



Арлен Михайлович Ильин

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

8 января 2012 г. исполнилось 80 лет академику РАН, Лауреату Государственной Премии Российской Федерации, выдающемуся российскому ученому-математику Арлену Михайловичу Ильину. Ему принадлежат уже ставшие классическими результаты по теории дифференциальных уравнений и по асимптотическим методам в задачах математической физики.

Арлен Михайлович родился в Ленинграде, но жизнь сложилась так, что он часто менял места своего проживания. В детстве он жил в Улан-Удэ, в Батуми, в Москве, во время войны в эвакуации в Курганской области. Потом возвращение в Москву, учеба и работа в Москве, затем переезд на Урал: Свердловск, Уфа, Екатеринбург, Челябинск.

Начиная с 8-го класса, А.М. Ильин учился в знаменитой 59-ой московской школе, которую окончил в 1949 году с золотой медалью, и поступил на мехмат МГУ.

Дипломную работу на тему о сильно вырождающихся эллиптических уравнениях он писал под руководством О.А. Олейник. Именно ей принадлежала идея ввести малый параметр и рассматривать семейство невырожденных эллиптических операторов, зависящих от малого параметра и сходящихся к вырожденному. А.М. Ильину удалось получить равномерные оценки решений краевой задачи и тем самым доказать существование и единственность решения предельной задачи. Результаты дипломной работы А.М. Ильина были опубликованы в ДАН СССР в 1955 году, и так получилось, что большая часть последующих научных достижений Арлена Михайловича связана с исследованием подобных задач с малым параметром.

С осени 1954 года он начал преподавать на заочном (а позднее вечернем) отделении механико-математического факультета МГУ, а с января 1957 года по февраль 1963 года А.М. Ильин работал на кафедре дифференциальных уравнений МГУ, которой заведовал академик И.Г. Петровский, ректор университета. В этот период Арлен Михайлович (совместно со своим однокурсником и другом Р.З. Хасьминским) занимался исследованием асимптотики решений линейных параболических уравнений второго порядка при больших значениях времени, а также (совместно с О.А. Олейник) исследованием поведения решений нелинейных параболических уравнений. Часть результатов, полученных им в этот период, вошла в обзорную статью о линейных параболических уравнениях, написанную совместно с О.А. Олейник и А.С. Калашниковым. Эта публикация [6] получила широкую известность и остается актуальной до сих пор, о чем свидетельствует её переиздание в 21 томе “Трудов семинара им. И.Г. Петровского”.

В 1963 году Арлен Михайлович переезжает на Урал в город Свердловск (ныне Екатеринбург) и становится сотрудником только что образованного в Свердловске отделения Математического института имени В.А. Стеклова (СОМИ, ныне Институт математики и механики УрО РАН). С тех пор вся дальнейшая трудовая деятельность А.М. Ильина связана с Уралом. Отдел уравнений математической физики СОМИ, возглавлявшийся А.М. Ильиным, некоторое время сотрудничал с Институтом океанологии АН СССР, выполняя численные расчеты. Одним из важнейших результатов этого сотрудничества (в частности, сотрудничества с В.М. Каменковичем) оказалось формирование двух новых научных направлений в теории дифференциальных уравнений и приближенных методов их решения.

Первое - создание разностных схем для эффективного численного решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных (как раз такого типа уравнения, называемые иногда уравнениями с сингулярным возмущением, возникают в математических моделях океанических и атмосферных течений). В этом направлении до сих пор наибольшей популярностью пользуется небольшая заметка [20], опубликованная Арленом Михайловичем в 1969 году.

Второе - аналитическое исследование специального, но весьма широкого класса краевых задач с малым параметром (теперь эти задачи называются бисингулярными), характеризующееся тем, что при построении асимптотики решения в виде рядов по степеням малого параметра, в коэффициентах рядов обнаруживаются разного типа сингулярности, которых нет в точном решении. Это второе направление также было инициировано исследованием моделей океанических течений. Простейшая модель та-

кого типа представляла собой краевую задачу для эллиптического уравнения с малым параметром в случае, когда характеристика предельного уравнения первого порядка касается границы области. Следует отметить, что известный метод пограничных функций не дает исчерпывающего ответа для подобных задач. Для исследования асимптотики решения были использованы идеи, высказанные в начале XX века Л. Прандтлем, с развитием которых впоследствии был связан термин “matching method”.

Первые работы на эту тему [24 - 26], написанные в Свердловске, вышли из печати к 1975 году уже тогда, когда А.М. Ильин работал в Уфе в Отделе физики и математики Башкирского филиала АН СССР. В Отделе физики и математики БФАН Арлен Михайлович возглавил сектор дифференциальных уравнений и полностью переключился на указанную выше тематику, постепенно создавая работоспособный коллектив из выпускников Уральского и Башкирского университетов. К этому периоду относится детальная разработка и обоснование метода согласования применительно к широкому классу бисингулярных задач.

Один из наиболее важных результатов Арлена Михайловича в уфимский период относится к исследованию структуры ударной волны. В задаче Коши для уравнения Бюргерса с малой диффузией была построена асимптотика решения в общем случае, когда в решении предельной задачи со временем возникает разрыв. Было получено и обосновано полное асимптотическое разложение при стремлении малого параметра к нулю, равномерное по независимым переменным. При этом была выявлена область зарождения переходного слоя, в которой коэффициенты асимптотики определяются из параболических уравнений. Оказалось, что детальное исследование решения в этой области необходимо для однозначного определения асимптотики в переходном (ударном) слое [31, 36, 43, 44]. В дальнейшем А.М. Ильиным совместно с его учениками были исследованы ситуации, когда со временем возникает слабый разрыв, переходящий в сильный [63].

Не менее интересные результаты были получены для другого класса трудных задач, связанных с гидродинамикой обтекания тонких тел. Математическая модель этого явления представляет собой краевую задачу для эллиптического уравнения в области с малым возмущением, например, в области с вырезанной узкой полостью, либо с маленькой дыркой. Здесь также были построены полные асимптотические разложения решения, равномерные во всей области [29, 30, 35].

Все эти результаты получены с использованием идей сращивания асимптотических разложений, которые на уровне рецептов использовались ранее механиками для анализа некоторых задач гидродинамики в главных членах асимптотики, однако без какого-либо обоснования. Следует отметить, что ранее строгие математические результаты с обоснованием метода сращивания применительно к задаче о релаксационных колебаниях были получены в работах Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова, а широкий класс дифракционных задач был исследован этим методом в классических работах В.М. Бабица. Математическое оформление этого подхода было предпринято в работах L.E. Fraenkel, S. Kaplun, P.A. Lagerstrom.

Итогом работ А.М. Ильина и его учеников на основе этих идей было создание метода, названного методом согласования асимптотических разложений, который был успешно

применен к широкому кругу задач, не поддающихся исследованию другими способами. Результаты этих исследований были собраны Арленом Михайловичем в монографии [46], вышедшей в 1989 году, которая почти немедленно была переведена на английский язык [47] Американским математическим обществом.

В марте 1988 года он переехал обратно в Свердловск и до 1994 года работал профессором в Уральском политехническом институте, являясь одновременно (с 1990 года) ведущим научным сотрудником Института математики и механики (ИММ) УрО РАН, а затем и заведующим отделом уравнений математической физики этого института. В этот период Арленом Михайловичем было инициировано исследование ряда новых бисингулярных задач - задач теории оптимального управления, содержащих в своем описании малые параметры. Отметим здесь интересный результат, полученный при исследовании одного класса задач оптимального быстрогодействия (включающего управление материальной точкой с помощью силы, ограниченной по величине) с начальным условием, мало отличающимся от некоторого “критического”, при котором происходит качественная смена оптимального управления. Оказалось, что в данной задаче асимптотическое разложение времени быстрогодействия нельзя построить в виде ряда, содержащего только степени малого параметра и логарифма от этого параметра [50, 51, 57].

С 2002 года А.М. Ильин работает профессором кафедры вычислительной математики Челябинского государственного университета, оставаясь научным руководителем отдела уравнений математической физики ИММ УрО РАН. В последние годы Арлен Михайлович, помимо исследовательской работы, уделяет много внимания и передаче накопленного опыта новым поколениям исследователей. Им подготовлены и опубликованы в издательстве Физматлит монография “Асимптотические методы в анализе” и учебное пособие “Уравнения математической физики”.

Исследования А.М. Ильина получили признание научного сообщества. В марте 1994 года он был избран членом-корреспондентом Российской Академии Наук, а в мае 2000 года - действительным членом РАН. В 1995 году ему была присуждена премия имени И.Г. Петровского Российской Академии Наук за цикл работ “Асимптотические методы в математической физике” (совместно с О.А. Олейник). В 2000 году Арлену Михайловичу Ильину была присуждена Государственная премия (в коллективе с В.С. Буслаевым и М.В. Карасевым) за цикл работ “Асимптотические методы исследования уравнений математической физики”.

Много сил и времени Арлен Михайлович отдает педагогической деятельности. В настоящий момент он читает лекции не только в Челябинском государственном университете, но и в УрГУ (ныне УрФУ, Екатеринбург). В 2000 - 2002 гг. Ильин сотрудничал с Бурятским государственным университетом и был в 2001 - 2002 годах директором Института математики и информатики БГУ. Отношение к преподаванию у него не менее серьезное, чем к научной работе. Эту черту, унаследованную от своих учителей на мехмате МГУ, он передает и своим ученикам. Сочетая в себе таланты блестящего лектора и воспитателя, он неизменно привлекает к себе способную молодежь. Созданная им научная школа получила признание, как в России, так и за рубежом. Среди его учеников семь докторов наук.

Особо следует выделить роль Арлена Михайловича в становлении математической

школы по дифференциальным уравнениям в Уфе. Здесь за короткий срок, не более 10 лет были подготовлены специалисты высшей квалификации в области асимптотических методов. Ныне это признанные ученые, составляющие основу активно развивающегося научного направления.

Арлен Михайлович много работает в экспертных советах ВАК и РФФИ, всеми силами способствуя сохранению и развитию математической науки в России. Он является членом редколлегии и редакционных советов таких математических журналов, как “Успехи математических наук”, “Журнал вычислительной математики и математической физики”, “Труды института математики и механики”.

Арлен Михайлович пользуется авторитетом и признанием коллег не только за выдающиеся научные достижения. Сочетание требовательности и принципиальности с благожелательным отношением к любому человеку, будь то студент или академик, обеспечивают ему уважение и любовь окружающих его людей. Внимание и доброжелательность известна всем его друзьям, коллегам и студентам.

Мы искренне желаем Арлену Михайловичу многих лет жизни, доброго здоровья, радости и новых успехов.

*Борисов Д.И., Гадьильшин Р.Р., Гарифуллин Р.Н., Калякин Л.А.,
Киселев О.М., Новокишенов В.Ю., Сулейманов Б.И., Шайгарданов Ю.З.*

Список основных научных публикаций А.М. Ильина.

1. О задаче Дирихле для уравнения эллиптического типа, вырождающегося на некотором множестве внутренних точек области // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 1, С. 9–12.
2. О поведении решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при неограниченном возрастании времени (совместно с Олейник О.А.) // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 1. С. 25–28.
3. Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения // Матем. сборник. 1960. Т. 50. № 4. С. 443–498.
4. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени (совместно с Олейник О.А.) // Матем. сборник. 1960. Т. 51. № 2. С. 191–216.
5. О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени // Успехи мат. Наук. 1961. Т. 16. № 2. С. 115–121.
6. Линейные уравнения второго порядка параболического типа (совместно с Олейник О.А. и Калашниковым А.С.) // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.
7. Об эргодическом свойстве неоднородных диффузионных процессов (совместно с Хасьминским Р.З.) // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 5. С. 986–988.
8. О фундаментальном решении параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 4. С. 768–771.
9. Асимптотическое поведение решений параболических уравнений и эргодическое свойство неоднородных диффузионных процессов (совместно с Хасьминским Р.З.) // Матем. сборник. 1963. Т. 60. № 3. С. 366–392.

10. О влиянии трения на океанические течения (совместно с Каменковичем В.М.) // Доклады АН СССР. 1963. Т. 150. № 6. С. 1274–1277.
11. Об уравнении броуновского движения (совместно с Хасьминским Р.З.) // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9. № 3. С. 466–491.
12. Об одном классе ультрапараболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. № 6. С. 1214–1217.
13. О структуре пограничного слоя в двумерной теории океанических течений (совместно с Каменковичем В.М.) // Океанология. 1964. Т. 4. Вып. 5. С. 756–769.
14. Об аддитивных цепочках чисел // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 245–248.
15. О собственных функциях эллиптического оператора в некоторых неограниченных областях // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 4. С. 757–759.
16. Устойчивость разностных схем задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 3. С. 491–494.
17. О параболических уравнениях с непрерывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. № 6. С. 1264–1267.
18. О параболических уравнениях, коэффициенты которых не удовлетворяют условию Дини // Матем. Заметки. 1967. Т. 1. № 1. С. 71–80.
19. О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода (совместно с Емельяновым К.В.) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. № 4. С. 905–910.
20. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. Заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
21. Первая краевая задача для уравнения броуновского движения на полупрямой (совместно с Шишкиным Г.И.) // Матем. записки Уральского гос. университета. 1969. Т. 7. Тетр. 2. С. 59–75.
22. Об асимптотике решения одной краевой задачи // Матем. Заметки. 1970. Т. 8. № 3. С. 273–284.
23. О поведении решения одной краевой задачи при $t \rightarrow \infty$ // Матем. сборник. Т. 87. № 4. С. 529–553.
24. О методе сращивания асимптотических разложений (совместно с Горьковым Ю.П. и Леликовой Е.Ф.) // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 5. С. 1033–1036.
25. Асимптотика решения эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных в окрестности особой характеристики предельного уравнения (совместно с Горьковым Ю.П. и Леликовой Е.Ф.) // Труды семинара им. И.Г. Петровского. М. Вып. 1. С. 75–133.
26. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\Delta u - a(x, y)u_x = f(x, y)$ в прямоугольнике (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Матем. сборник. 1975. Т. 96. № 4. С. 568–583.
27. О методе сеток решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае разрывных граничных условий // Сб. “Разностные методы решения краевых задач с малым параметром и разрывными краевыми условиями”. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1976. Вып. 21. С. 44–51.

28. Краевая задача для одного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной (совместно с Шайгардановым Ю.З.) // Сб. "Краевые задачи математической физики и их приложения". Уфа: БФАН СССР. 1976. С. 3–17.
29. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай. // Матем. сборник. 1976. Т. 99. № 4. С. 514–537.
30. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием. // Матем. сборник. 1977. Т. 103. № 2. С. 265–284.
31. Асимптотика решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром (совместно с Нестеровой Т.Н.). // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 1. С. 11–13.
32. Об асимптотике решения краевой задачи на полупрямой для одного параболического уравнения // Сб. "Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений". Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск. 1979. № 28. С. 81–92.
33. Метод согласования асимптотических разложений для одной эллиптической краевой задачи с малым параметром (совместно с Насировым К.Х.). // Дифференц. уравнения с малым параметром. Свердловск: УНЦ. 1980. С. 8–15.
34. Асимптотика решения уравнения Пуассона вне полуполосы // Метод согласования асимптотических разложений в задачах с сингулярными возмущениями. Уфа: БФАН СССР. 1980. С. 115–134.
35. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1981. Вып. 6. С. 57–82.
36. Структура ударной волны при наличии малой вязкости // Сб. "Нелинейные волны". М.: Наука. 1981. С. 234–237.
37. Асимптотика решения краевой задачи для уравнения Пуассона вне цилиндра и вне полуцилиндра // Матем. сборник. 1982. Т. 110. № 2. С. 184–202. 38. Малого параметра метод для дифференциальных уравнений с частными производными (совместно с Федорюком М.В.) // Математическая энциклопедия. 1982. Т.3. С. 498–506.
39. Асимптотика решений некоторых эллиптических уравнений в неограниченных областях (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Матем. сборник. 1982. Т. 119. № 3. С. 307–324.
40. Асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка вблизи границы области (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Известия АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1322–1339.
41. Асимптотика решений некоторых эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Матем. сборник. 1984. Т. 125. № 1. С. 88–116.
42. Об одном достаточном условии стабилизации решения параболического уравнения // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 6. С. 851–856.
43. Задача Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 530–534.
44. Задача без начальных условий для уравнения Бюргерса // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41. Вып. 5. С. 208–209.

45. Пограничный слой // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования. М.: ВИНТИ.1988. Т. 34. С. 175–213.
46. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 336 с.
47. Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Translation of Mathematical Monographs. 1992. V.102. AMS. Providence. Rhode Island. 281 p.
48. Об асимптотике стационарной волны горения в конденсированной среде (совместно с Худяевым С.И.) // Химическая физика. 1989. Т. 8. № 4. С. 525–532.
49. Об асимптотике решения одной задачи с малым параметром // Известия АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 258–275.
50. Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий (совместно с Данилиным А.Р.) // Известия Академии наук. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.
51. Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных (совместно с Данилиным А.Р.) // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 155–157.
52. О влиянии малой диссипации на решения гиперболической системы, имеющие слабые разрывы (совместно с Неудачиным Д.И.) // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 5. С. 583–585.
53. The matching method for Asymptotic solutions in chemical physics problem (together with Kalyakin L.A., Maslennikov S.I.) // Singular Perturbation Problems in Chemical Physics. Analytic and Computational Methods. Advances in Chemical Physics Series. V. XCVII. P. 1–45.
54. Эллиптическое уравнение с малым параметром при старших производных, вырождающееся на границе области (совместно с Ялышевой Т.Ю.) // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 847–848.
55. Асимптотика решения эллиптического уравнение с малым параметром при старших производных, вырождающегося на границе области. Случай слабого вырождения (совместно с Зыряновой Т.Ю.) // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 34, № 8. С. 1092–1099.
56. Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью (совместно с Гадыльшиным Р.Р.) // Матем. сборник. 1998. Т. 189. № 4. С. 25–48.
57. О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия (совместно с Данилиным А.Р.) // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 3. № 4. С. 905–926.
58. О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания // Теор. Матем. Физика.1999. Т.118. № 4. С. 383–389.
59. Perturbed Switching Diffusions: Rapid Switching's and Fast Diffusions (together with Khasminskii R.Z.) // J. Optimiz. Theory and Appl. 1999. Vol. 102. N 3. P. 555–591.
60. The Boundery Layer // Partial Differential Equations V: Asymptotic Methods for Partial Differential Equations. Berlin etc.: Springer. 1999. P. 173–210.
61. Метод Ритца в задаче о сфероидальных колебаниях слоистой модели Земли (совместно с Бессоновой Э.Н. и Резниковым Е.Л.) // Вычислительная сейсмология.

Вып. 31. С. 77–87. М.: ГЕОС. 2000.

62. О границе применимости регулярной теории возмущений для мембраны с узкой щелью (совместно с Гадьльшиным Р.Р.) // Докл. РАН. Т. 380. 2001. № 2. С. 172–175.

63. От слабого разрыва к градиентной катастрофе (совместно с Захаровым С.В.) // Матем. сборник. - 2001. - Т.192, № 10. С. 3–18.

64. On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities (together with Zakharov S.V.) // Fund. Different. Equat. 2001. Vol. 8. № 3–4. P. 257–271.

65. О двух специальных функциях, связанных с особенностями типа сборки (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 2. С. 156–158.

66. Применение метода согласования асимптотических разложений к решению краевых задач (совместно с Данилиным А.Р. и Захаровым С.В.) // Совр. математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 33–78.

67. Коэффициенты внутреннего разложения при исследовании асимптотики некоторых сингулярных краевых задач (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Дальневосточный мат. журн. 2003. Т. 4. № 1. С. 78–85.

68. Равномерная асимптотика интеграла, зависящего от двух параметров (совместно с Вандановым А.С.) // Вестник ЧелГУ. Сер. 3: Математика. Механика. Информатика. 2003. № 2. С. 35–38.

69. Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами (совместно с Коврижных О.О.) // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 1. С. 23–24.

70. Асимптотика решения вырождающегося дифференциального уравнения 3-го порядка с малым параметром при старшей производной (совместно с Нестеровой В.В.) // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1574–1584.

71. Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 12. С. 27–46.

72. Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени (совместно с Меленцовым М.А.) // Труды Института математики и механики. 2005. Т. 11. № 1. С. 97–110.

73. Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Матем. сб. 2006. Т.196. № 1. С. 55–70.

74. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром при условии пересечения линий устойчивости предельного уравнения (совместно с Долбеевой С.Ф.) // Докл. РАН. 2006. Т. 408. № 4. С. 443–445.

75. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения (совместно с Долбеевой С.Ф.) // Тр. Института математики и механики. 2006. Т.12. № 1. С. 98–108.

76. Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки. II Большие значения параметра t (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Матем. сб. 2007. Т.198. № 9. С. 81–106.

77. Сингулярная начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром (совместно с Хачаеом О.Ю.) // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 4. С. 455–458.

78. Уравнения математической физики. М.: Физматлит. 2009. 192 с.

79. Асимптотические методы в анализе (совместно с Данилиным А.Р.). М.: Физматлит. 2009. 248 с.

80. Асимптотика двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра (совместно с Ершовым А.А.) // Тр. Института математики и механики. 2009. Т.15. № 3. С. 116–126.

81. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 6. С. 109–125.

82. Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой (совместно с Леонычевым Ю.А. и Хачаем О.Ю.) // Матем. сборник. 2010. Т. 201. № 1. С. 81–102.

83. On the spectrum of the Neumann problem for Laplace equation in a domain with a narrow slit (together with Gadylshin R.R.) // Asymptotic Analysis. V. 67. N 3, 4. May 2010. P. 167–189.

84. Нелинейное уравнение диффузии и кольца Лизеганга (совместно с Марковым Б.А.) // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 1–4.

При подготовке этих материалов использовались статьи, посвященные 70-летию А.М. Ильина, опубликованные в журналах “Дифференциальные уравнения” (2002, Т. 38, № 8) и “Труды института математики и механики” (2003, Т. 9, № 1).