Уфимский Математический Журнал

2012. Том 4. № 2 .

СОДЕРЖАНИЕ

Учредители:

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,

ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный
технический университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы»

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций (Свид. ПИ № ФС77-34233 от 26.11.2008)

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей доступны в Интернете на сайтах Института математики с ВЦ УНЦ РАН matem.anrb.ru, Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала mathnet.ru

Статьи журнала реферируются в Zentralblatt MATH (ZBMATH).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий.

Второй номер четвертого тома «Уфимского математического журнала» посвящается юбилею академика РАН Ильина Арлена Михайловича.

Ответственный редактор выпуска - профессор Калякин Л.А.

Технические редакторы: Р.Н. Гарифуллин, А.А. Махота.
Корректура: О.А. Соколова.

Подписано в печать 30.06.2012 г. Формат 60×84/8.
Усл. печ. л. ???. Уч.-изд. л. ???. Тираж 500 экз. Изд. № ???. Заказ № ???.
Цена договорная.

Отпечатано с предоставленных файлов в редакционно-издательском центре
Уфимского государственного авиационного технического университета.
450074, г. Уфа, ул.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:
ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112, к. 22. Тел.+7 347 273 33 42.
E-mail: umj@matem.anrb.ru
URL: http://matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863. Ufimskii matematičeskij žurnal.
Индекс в каталоге «Роспечать» 57382.

Арлен Михайлович Ильин

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

8 января 2012 г. исполнилось 80 лет академику РАН, Лауреату Государственной Премии Российской Федерации, выдающемуся российскому ученому-математику Арлену Михайловичу Ильину. Ему принадлежат уже ставшие классическими результаты по теории дифференциальных уравнений и по асимптотическим методам в задачах математической физики.

Арлен Михайлович родился в Ленинграде, но жизнь сложилась так, что он часто менял места своего проживания. В детстве он жил в Улан-Удэ, в Батуми, в Москве, во время войны в эвакуации в Курганской области. Потом возвращение в Москву, учеба и работа в Москве, затем переезд на Урал: Свердловск, Уфа, Екатеринбург, Челябинск.

Начиная с 8-го класса, А.М. Ильин учился в знаменитой 59-ой московской школе, которую окончил в 1949 году с золотой медалью, и поступил на мехмат МГУ.

Дипломную работу на тему о сильно вырождающихся эллиптических уравнениях он писал под руководством О.А. Олейник. Именно ей принадлежала идея ввести малый параметр и рассматривать семейство невырожденных эллиптических операторов, зависящих от малого параметра и сходящихся к вырожденному. А.М. Ильину удалось получить равномерные оценки решений краевой задачи и тем самым доказать существование и единственность решения предельной задачи. Результаты дипломной работы А.М. Ильина были опубликованы в ДАН СССР в 1955 году, и так получилось, что большая часть последующих научных достижений Арлена Михайловича связана с исследованием подобных задач с малым параметром.

С осени 1954 года он начал преподавать на заочном (а позднее вечернем) отделении механико-математического факультета МГУ, а с января 1957 года по февраль 1963 года А.М. Ильин работал на кафедре дифференциальных уравнений МГУ, которой заведовал академик И.Г. Петровский, ректор университета. В этот период Арлен Михайлович (совместно со своим однокурсником и другом Р.З. Хасьминским) занимался исследованием асимптотики решений линейных параболических уравнений второго порядка при больших значениях времени, а также (совместно с О.А. Олейник) исследованием поведения решений нелинейных параболических уравнений. Часть результатов, полученных им в этот период, вошла в обзорную статью о линейных параболических уравнениях, написанную совместно с О.А. Олейник и А.С. Калашниковым. Эта публикация [6] получила широкую известность и остается актуальной до сих пор, о чем свидетельствует её переиздание в 21 томе “Трудов семинара им. И.Г. Петровского”.

В 1963 году Арлен Михайлович переезжает на Урал в город Свердловск (ныне Екатеринбург) и становится сотрудником только что образованного в Свердловске отделения Математического института имени В.А. Стеклова (СОМИ, ныне Институт математики и механики УрО РАН). С тех пор вся дальнейшая трудовая деятельность А.М. Ильина связана с Уралом. Отдел уравнений математической физики СОМИ, возглавлявшийся А.М. Ильиным, некоторое время сотрудничал с Институтом океанологии АН СССР, выполняя численные расчеты. Одним из важнейших результатов этого сотрудничества (в частности, сотрудничества с В.М. Каменковичем) оказалось формирование двух новых научных направлений в теории дифференциальных уравнений и приближенных методов их решения.

Первое - создание разностных схем для эффективного численного решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных (как раз такого типа уравнения, называемые иногда уравнениями с сингулярным возмущением, возникают в математических моделях океанических и атмосферных течений). В этом направлении до сих пор наибольшей популярностью пользуется небольшая заметка [20], опубликованная Арленом Михайловичем в 1969 году.

Второе - аналитическое исследование специального, но весьма широкого класса краевых задач с малым параметром (теперь эти задачи называются бисингулярными), характеризующееся тем, что при построении асимптотики решения в виде рядов по степеням малого параметра, в коэффициентах рядов обнаруживаются разного типа сингулярности, которых нет в точном решении. Это второе направление также было инициировано исследованием моделей океанических течений. Простейшая модель такого типа представляла собой краевую задачу для эллиптического уравнения с малым параметром в случае, когда характеристика предельного уравнения первого порядка касается границы области. Следует отметить, что известный метод пограничных функций не дает исчерпывающего ответа для подобных задач. Для исследования асимптотики решения были использованы идеи, высказанные в начале XX века Л. Прандтлем, с развитием которых впоследствии был связан термин "matching method".

Первые работы на эту тему [24 - 26], написанные в Свердловске, вышли из печати к 1975 году уже тогда, когда А.М. Ильин работал в Уфе в Отделе физики и математики Башкирского филиала АН СССР. В Отделе физики и математики БФАН Арлен Михайлович возглавил сектор дифференциальных уравнений и полностью переключился на указанную выше тематику, постепенно создавая работоспособный коллектив из выпускников Уральского и Башкирского университетов. К этому периоду относится детальная разработка и обоснование метода согласования применительно к широкому классу бисингулярнымх задач.

Один из наиболее важных результатов Арлена Михайловича в уфимский период относится к исследованию структуры ударной волны. В задаче Коши для уравнения Бюргерса с малой диффузией была построена асимптотика решения в общем случае, когда в решении предельной задачи со временем возникает разрыв. Было получено и обосновано полное асимптотическое разложение при стремлении малого параметра к нулю, равномерное по независимым переменным. При этом была выявлена область зарождения переходного слоя, в которой коэффициенты асимптотики определяются из параболических уравнений. Оказалось, что детальное исследование решения в этой области необходимо для однозначного определения асимптотики в переходном (ударном) слое [31, 36, 43, 44]. В дальнейшем А.М. Ильиным совместно с его учениками были исследованы ситуации, когда со временем возникает слабый разрыв, переходящий в сильный [63].

Не менее интересные результаты были получены для другого класса трудных задач, связанных с гидродинамикой обтекания тонких тел. Математическая модель этого явления представляет собой краевую задачу для эллиптического уравнения в области с малым возмущением, например, в области с вырезанной узкой полостью, либо с маленькой дыркой. Здесь также были построены полные асимптотические разложения решения, равномерные во всей области [29, 30, 35].

Все эти результаты получены с использованием идей сращивания асимптотических разложений, которые на уровне рецептов использовались ранее механиками для анализа некоторых задач гидродинамики в главных членах асимптотики, однако без какого-либо обоснования. Следует отметить, что ранее строгие математические результаты с обоснованием метода сращивания применительно к задаче о релаксационных колебаниях были получены в работах Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова, а широкий класс дифракционных задач был исследован этим методом в классических работах В.М. Бабича. Математическое оформление этого подхода было предпринято в работах L.E. Fraenkel, S. Kaplun, P.A. Lagerstom.

Итогом работ А.М. Ильина и его учеников на основе этих идей было создание метода, названного методом согласования асимптотических разложений, который был успешно применен к широкому кругу задач, не поддающихся исследованию другими способами. Результаты этих исследований были собраны Арленом Михайловичем в монографии [46], вышедшей в 1989 году, которая почти немедленно была переведена на английский язык [47] Американским математическим обществом.

В марте 1988 года он переехал обратно в Свердловск и до 1994 года работал профессором в Уральском политехническом институте, являясь одновременно (с 1990 года) ведущим научным сотрудником Института математики и механики (ИММ) УрО РАН, а затем и заведующим отделом уравнений математической физики этого института. В этот период Арленом Михайловичем было инициализировано исследование ряда новых бисингулярных задач - задач теории оптимального управления, содержащих в своем описании малые параметры. Отметим здесь интересный результат, полученный при исследовании одного класса задач оптимального быстродействия (включающего управление материальной точкой с помощью силы, ограниченной по величине) с начальным условием, мало отличающимся от некоторого "критического", при котором происходит качественная смена оптимального управления. Оказалось, что в данной задаче асимптотическое разложение времени быстродействия нельзя построить в виде ряда, содержащего только степени малого параметра и логарифма от этого параметра [50, 51, 57].

С 2002 года А.М. Ильин работает профессором кафедры вычислительной математики Челябинского государственного университета, оставаясь научным руководителем отдела уравнений математической физики ИММ УрРО РАН. В последние годы Арлен Михайлович, помимо исследовательской работы, уделяет много внимания и передаче накопленного опыта новым поколениям исследователей. Им подготовлены и опубликованы в издательстве Физматлит монография "Асимптотические методы в анализе" и учебное пособие "Уравнения математической физики".

Исследования А.М. Ильина получили признание научного сообщества. В марте 1994 года он был избран членом-корреспондентом Российской Академии Наук, а в мае 2000 года - действительным членом РАН. В 1995 году ему была присуждена премия имени И.Г. Петровского Российской Академии Наук за цикл работ "Асимптотические методы в математической физике" (совместно с О.А. Олейник). В 2000 году Арлену Михайловичу Ильину была присуждена Государственная премия (в коллективе с В.С. Буслаевым и М.В. Карасевым) за цикл работ "Асимптотические методы исследования уравнений математической физики".

Много сил и времени Арлен Михайлович отдает педагогической деятельности. В настоящий момент он читает лекции не только в Челябинском государственном университете, но и в УрГУ (ныне УрФУ, Екатеринбург). В 2000 - 2002 гг. Ильин сотрудничал с Бурятским государственным университетом и был в 2001 - 2002 годах директором Института математики и информатики БГУ. Отношение к преподаванию у него не менее серьезное, чем к научной работе. Эту черту, унаследованную от своих учителей на мехмате МГУ, он передает и своим ученикам. Сочетая в себе таланты блестящего лектора и воспитателя, он неизменно привлекает к себе способную молодежь. Созданная им научная школа получила признание, как в России, так и за рубежом. Среди его учеников семь докторов наук.

Особо следует выделить роль Арлена Михайловича в становлении математической школы по дифференциальным уравнениям в Уфе. Здесь за короткий срок, не более 10 лет были подготовлены специалисты высшей квалификации в области асимптотических методов. Ныне это признанные ученые, составляющие основу активно развивающегося научного направления.

Арлен Михайлович много работает в экспертных советах ВАК и РФФИ, всеми силами способствуя сохранению и развитию математической науки в России. Он является членом редколлегий и редакционных советов таких математических журналов, как "Успехи математических наук", "Журнал вычислительной математики и математической физики", "Труды института математики и механики".

Арлен Михайлович пользуется авторитетом и признанием коллег не только за выдающиеся научные достижения. Сочетание требовательности и принципиальности с благожелательным отношением к любому человеку, будь то студент или академик, обеспечивают ему уважение и любовь окружающих его людей. Внимание и доброжелательность известна всем его друзьям, коллегам и студентам.

Мы искренне желаем Арлену Михайловичу многих лет жизни, доброго здоровья, радости и новых успехов.

Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р., Гарифуллин Р.Н., Калякин Л.А., Киселев О.М., Новокшенов В.Ю., Сулейманов Б.И.

Список основных научных публикаций А.М. Ильина.

1. О задаче Дирихле для уравнения эллиптического типа, вырождающегося на некотором множестве внутренних точек области // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 1, С. 9–12.

2. О поведении решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при неограниченном возрастании времени (совместно с Олейник О.А.) // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 1. С. 25–28.

3. Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения //Матем. сборник. 1960. Т. 50. № 4. С. 443–498.

4. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени (совместно с Олейник О.А.) // Матем. сборник. 1960. Т. 51. № 2.С. 191–216.

5. О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени // Успехи мат. Наук. 1961. Т. 16. № 2. С. 115–121.

6. Линейные уравнения второго порядка параболического типа (совместно с Олейник О.А. и Калашниковым А.С.) // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.

7. Об эргодическом свойстве неоднородных диффузионных процессов (совместно с Хасьминским Р.З.) // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 5 С. 986–988.

8. О фундаментальном решении параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 4. С. 768–771.

9. Асимптотическое поведение решений параболических уравнений и эргодическое свойство неоднородных диффузионных процессов (совместно с Хасьминским Р.З.) // Матем. сборник. 1963. Т. 60. № 3. С. 366–392.

10. О влиянии трения на океанические течения (совместно с Каменковичем В.М.) // Доклады АН СССР. 1963. Т. 150. № 6. С. 1274–1277.

11. Об уравнении броуновского движения (совместно с Хасьминским Р.З.) // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9. № 3. С. 466–491.

12. Об одном классе ультрапараболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. № 6. С. 1214–1217.

13. О структуре пограничного слоя в двумерной теории океанических течений (совместно с Каменковичем В.М.) // Океанология. 1964. Т. 4. Вып. 5. С. 756–769.

14. Об аддитивных цепочках чисел // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 245–248.

15. О собственных функциях эллиптического оператора в некоторых неограниченных областях // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 4. С. 757–759.

16. Устойчивость разностных схем задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 3. С. 491–494.

17. О параболических уравнениях с непрерывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. № 6. С. 1264–1267.

18. О параболических уравнениях, коэффициенты которых не удовлетворяют условию Дини // Матем. Заметки. 1967. Т. 1. № 1. С. 71–80.

19. О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода (совместно с Емельяновым К.В.) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. № 4. С. 905–910.

20. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. Заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.

21. Первая краевая задача для уравнения броуновского движения на полупрямой (совместно с Шишкиным Г.И.) // Матем. записки Уральского гос. университета. 1969. Т. 7. Тетр. 2. С. 59–75.

22. Об асимптотике решения одной краевой задачи // Матем. Заметки. 1970. Т. 8. № 3. С. 273–284.

23. О поведении решения одной краевой задачи при $t \to \infty$ // Матем. сборник. Т. 87. № 4. С. 529–553.

24. О методе сращивания асимптотических разложений (совместно с Горьковым Ю.П. и Леликовой Е.Ф.) // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 5. С. 1033–1036.

25. Асимптотика решения эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных в окрестности особой характеристики предельного уравнения (совместно с Горьковым Ю.П. и Леликовой Е.Ф.) // Труды семинара им. И.Г. Петровского. М. Вып. 1. С. 75–133.

26. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\Delta u - a(x,y)u_x = f(x,y)$ в прямоугольнике (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Матем. сборник. 1975. Т. 96. № 4. С. 568–583.

27. О методе сеток решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае разрывных граничных условий // Сб. “Разностные методы решения краевых задач с малым параметром и разрывными краевыми условиями”. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1976. Вып. 21. С. 44–51.

28. Краевая задача для одного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной (совместно с Шайгардановым Ю.З.) // Сб. “Краевые задачи математической физики и их приложения”. Уфа: БФАН СССР. 1976. С. 3–17.

29. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай. // Матем. сборник. 1976. Т. 99. № 4. С. 514–537.

30. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием. // Матем. сборник. 1977. Т. 103. № 2. С. 265–284.

31. Асимптотика решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром (совместно с Нестеровой Т.Н.). // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 1. С. 11–13.

32. Об асимптотике решения краевой задачи на полупрямой для одного параболического уравнения // Сб. “Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений”. Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск. 1979. № 28. С. 81–92.

33. Метод согласования асимптотических разложений для одной эллиптической краевой задачи с малым параметром (совместно с Насировым К.Х.). // Дифференц. уравнения с малым параметром. Свердловск: УНЦ. 1980. С. 8–15.

34. Асимптотика решения уравнения Пуассона вне полуполосы // Метод согласования асимптотических разложений в задачах с сингулярными возмущениями. Уфа: БФАН СССР. 1980. С. 115–134.

35. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1981. Вып. 6. С. 57–82.

36 Структура ударной волны при наличии малой вязкости // Сб. “Нелинейные волны”. М.: Наука. 1981. С. 234–237.

37. Асимптотика решения краевой задачи для уравнения Пуассона вне цилиндра и вне полуцилиндра // Матем. сборник. 1982. Т. 110. № 2. С. 184–202. 38. Малого параметра метод для дифференциальных уравнений с частными производными (совместно с Федорюком М.В.) // Математическая энциклопедия. 1982. Т.3. С. 498–506.

39. Асимптотика решений некоторых эллиптических уравнений в неограниченных областях (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Матем. сборник. 1982. Т. 119. № 3. С. 307–324.

40. Асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка вблизи границы области (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Известия АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1322–1339.

41. Асимптотика решений некоторых эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Матеем. сборник. 1984. Т. 125. № 1. С. 88–116.

42. Об одном достаточном условии стабилизации решения параболического уравнения // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 6. С. 851–856.

43. Задача Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 530–534.

44. Задача без начальных условий для уравнения Бюргерса // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41. Вып. 5. С. 208–209.

45. Пограничный слой // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования. М.: ВИНИТИ.1988. Т. 34. С. 175–213.

46. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 336 с.

47. Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Translation of Mathematical Monographs. 1992. V.102. AMS. Providence. Rhode Island. 281 p.

48. Об асимптотике стационарной волны горения в конденсированной среде (совместно с Худяевым С.И.) // Химическая физика. 1989. Т. 8. № 4. С. 525–532.

49. Об асимптотике решения одной задачи с малым параметром // Известия АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 258–275.

50. Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий (совместно с Данилиным А.Р.) // Известия Академии наук. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.

51. Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных (совместно с Данилиным А.Р.) // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 155–157.

52. О влиянии малой диссипации на решения гиперболической системы, имеющие слабые разрывы (совместно с Неудачиным Д.И.) // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 5. С. 583–585.

53. The matching method for Asymptotic solutions in chemical physics problem (together with Kalyakin L.A., Maslennikov S.I.) // Singular Perturbation Problems in Chemical Physics. Analytic and Computational Methods. Advances in Chemical Physics Series. V. XCVII. P. 1–45.

54. Эллиптическое уравнение с малым параметром при старших производных, вырождающееся на границе области (совместно с Ялышевой Т.Ю.) // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 847–848.

55. Асимптотика решения эллиптического уравнение с малым параметром при старших производных, вырождающегося на границе области. Случай слабого вырождения (совместно с Зыряновой Т.Ю.) // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 34, № 8. С. 1092–1099.

56. Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью (совместно с Гадыльшиным Р.Р.) // Матем. сборник. 1998. Т. 189. № 4. С. 25–48.

57. О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия (совместно с Данилиным А.Р.) // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 3. № 4. С. 905–926.

58. О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания // Теор. Матем. Физика.1999. Т.118. № 4. С. 383–389.

59. Perturbed Switching Diffusions: Rapid Switching's and Fast Diffusions (together with Khasminnskii R.Z.) // J. Optimiz. Theory and Appl. 1999. Vol. 102. N 3. P. 555–591.

60. The Boundery Layer // Partial Differential Equations V: Asymptotic Methods for Partial Differential Equations. Berlin etc.: Springer. 1999. P. 173–210.

61. Метод Ритца в задаче о сфероидальных колебаниях слоистой модели Земли (совместно с Бессоновой Э.Н. и Резниковым Е.Л.) // Вычислительная сейсмология.

Вып. 31. С. 77–87. М.: ГЕОС. 2000.

62. О границе применимости регулярной теории возмущений для мембраны с узкой щелью (совместно с Гадыльшиным Р.Р.) // Докл. РАН. Т. 380. 2001. № 2. С. 172–175.

63. От слабого разрыва к градиентной катастрофе (совместно с Захаровым С.В) // Матем. сборник. - 2001. - Т.192, № 10. С. 3–18.

64. On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities (together with Zakharov S.V.) // Fund. Different. Equat. 2001. Vol. 8. № 3–4. P. 257–271.

65. О двух специальных функциях, связанных с особенностями типа сборки (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 2. С. 156–158.

66. Применение метода согласования асимптотических разложений к решению краевых задач (совместно с Данилиным А.Р. и Захаровым С.В.) // Совр. математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 33–78.

67. Коэффициенты внутреннего разложения при исследовании асимптотики некоторых сингулярных краевых задач (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Дальневосточный мат. журн. 2003. Т. 4. № 1. С. 78–85.

68. Равномерная асимптотика интеграла, зависящего от двух параметров (совместно с Вандановым А.С.) // Вестник ЧелГУ. Сер. 3: Математика. Механика. Информатика. 2003. № 2. С. 35–38.

69. Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами (совместно с Коврижных О.О.) // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 1. С. 23–24.

70. Асимптотика решения вырождающегося дифференциального уравнения 3-го порядка с малым параметром при старшей производной (совместно с Нестеровой В.В.) // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1574–1584.

71. Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Матем. сб. 2004. Т. 195. N 12. С. 27–46.

72. Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени (совместно с Меленцовым М.А.) // Труды Института математики и механики. 2005. Т. 11. № 1. С. 97–110.

73. Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Матем. сб. 2006. Т.196. № 1. С. 55–70.

74. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром при условии пересечения линий устойчивости предельного уравнения (совместно с Долбеевой С.Ф.) // Докл. РАН. 2006 . Т. 408. № 4. С. 443–445.

75. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения (совместно с Долбеевой С.Ф.) // Тр. Института математики и механики. 2006. Т.12. № 1. С. 98–108.

76. Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки. II Большие значения параметра t (совместно с Сулеймановым Б.И.) // Матем. сб. 2007. Т.198. № 9. С. 81–106.

77. Сингулярная начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром (совместно с Хачаем О.Ю.) // Докл. РАН. 2008. Т. 422 № 4. С. 455–458.

78. Уравнения математической физики. М.: Физматлит. 2009. 192 с.

79. Асимптотические методы в анализе (совместно с Данилиным А.Р.). М.: Физматлит. 2009. 248 с.

80. Асимптотика двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра (совместно с Ершовым А.А.) // Тр. Института математики и механики. 2009. Т.15. № 3. С. 116–126.

81. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром (совместно с Леликовой Е.Ф.) // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 6. С. 109–125.

82. Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой (совместно с Леонычевым Ю.А. и Хачаем О.Ю.) // Матем. сборник. 2010. Т. 201. № 1. С. 81–102.

83. On the spectrum of the Neumann problem for Laplace equation in a domain with a narrow slit (together with Gadylshin R.R.) // Asymptotic Analysis. V. 67. N 3, 4. May 2010. P. 167–189.

84. Нелинейное уравнение диффузии и кольца Лизеганга (совместно с Марковым Б.А.) // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 1–4.

При подготовке этих материалов использовались статьи, посвященные 70-летию А.М. Ильина, опубликованные в журналах “Дифференциальные уравнения” (2002, Т. 38, № 8) и “Труды института математики и механики” (2003, Т. 9, № 1).

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 13-27.

УДК 517.925

ОТДЕЛИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.Ю. БАГДЕРИНА

Аннотация. Рассматриваются системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка проективного типа с кубической зависимостью правой части от первых производных. Для таких систем получен критерий приводимости локальным преобразованием к системе, в которой отделяется уравнение на одну из неизвестных функций. Применение критерия и построение соответствующего преобразования проиллюстрировано рядом примеров.

Ключевые слова: уравнения второго порядка, разделение уравнений, отделение уравнения, система с отделяющимся уравнением.

1. Введение

Задача об отделимости уравнения в системе, как и проблема линеаризации дифференциальных уравнений, представляет собой частный случай проблемы эквивалентности. Две системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$x'' = f(t, x, y, x', y'), \qquad y'' = g(t, x, y, x', y') \tag{1}$$

назовем эквивалентными, если существует обратимая точечная замена переменных

$$\tilde{t} = \theta(t, x, y), \qquad \tilde{x} = \varphi(t, x, y), \qquad \tilde{y} = \psi(t, x, y), \qquad \Delta = \frac{\partial(\theta, \varphi, \psi)}{\partial(t, x, y)} \neq 0, \tag{2}$$

при которой одна система переходит в другую. Здесь для производных используется обозначение $x' = dx/dt$, $x'' = d^2x/dt^2$, $y' = dy/dt$, $y'' = d^2y/dt^2$. Как показано еще в С. Ли [1], многие частные методы решения дифференциальных уравнений равносильны нахождению такой замены переменных (2), которая бы привела данное уравнение к одному из уже известных. Так, в некоторых случаях задача интегрирования нелинейного ОДУ считается решенной, если его удается линеаризовать. В случае системы уравнений (1) задача сводится к более простой, если в результате преобразования (2) получена система, в которой отделяется уравнение относительно одной из функций, например, $\tilde{x}(\tilde{t})$:

$$\tilde{x}'' = \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x}'), \qquad \tilde{y}'' = \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}'). \tag{3}$$

Тем самым интегрирование системы сводится к решению первого уравнения (3) относительно $\tilde{x}(\tilde{t})$ и затем при известной функции $\tilde{x}(\tilde{t})$ — к интегрированию второго уравнения (3) относительно $\tilde{y}(\tilde{t})$.

Yu.Yu. Bagderina, Separation of an equation in the system of two second-order ordinary differential equations.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10-01-00186-а, 11-01-91330-ННИО-а), МК-8247.2010.1, ФЦП (госконтракт 02.740.11.0612).

Поступила 24 октября 2011 г.

В редких случаях после преобразования (2) уравнения системы (1) могут полностью разделиться:

$$\tilde{x}'' = \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x}'), \qquad \tilde{y}'' = \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{y}, \tilde{y}'),$$

и тогда они интегрируются независимо друг от друга. Вопрос разделения уравнений в системах ОДУ второго порядка исследовался в [2, 3, 4]. При этом рассматривались преобразования, действующие только на зависимые переменные и не меняющие t. Задача отделимости уравнений в системе (в таком классе преобразований) изучалась в [5, 6].

Примером системы с разделяющимися уравнениями служит система (1), линеаризуемая к виду $\tilde{x}'' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$. Известный критерий линеаризации [7, 8] в терминах относительных инвариантов γ_i, σ_k системы (1) может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Система* (1) *некоторым преобразованием* (2) *линеаризуется к виду* $\tilde{x}'' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$ *тогда и только тогда, когда для нее*

$$\gamma_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \qquad \sigma_k = 0, \quad k = 0, \dots, 4, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \tfrac{1}{2} D(f_{y'}) - \tfrac{1}{4} f_{y'}(f_{x'} + g_{y'}) - f_y, \\ \gamma_1 &= \tfrac{1}{4} D(f_{x'} - g_{y'}) + \tfrac{1}{8}(g_{y'}^2 - f_{x'}^2) + \tfrac{1}{2}(g_y - f_x), \\ \gamma_2 &= -\tfrac{1}{2} D(g_{x'}) + \tfrac{1}{4} g_{x'}(f_{x'} + g_{y'}) + g_x, \end{aligned} \tag{5}$$

$D = \partial_t + x'\partial_x + y'\partial_y + f\partial_{x'} + g\partial_{y'}$ — *оператор дифференцирования в силу системы* (1) *и*

$$\sigma_0 = f_{y'y'y'}, \qquad \sigma_1 = \tfrac{1}{4}(3f_{x'y'y'} - g_{y'y'y'}), \qquad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}(f_{x'x'y'} - g_{x'y'y'}),$$
$$\sigma_3 = \tfrac{1}{4}(f_{x'x'x'} - 3g_{x'x'y'}), \qquad \sigma_4 = -g_{x'x'x'}.$$

Система (1), удовлетворяющая условиям $\sigma_0 = 0, \dots, \sigma_4 = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} x'' &= K_1 + 2L_1 x' + 2M_1 y' + P_1 x'^2 + 2S_1 x'y' + Q_1 y'^2 \\ &\quad + x'(V_1 x'^2 + 2V_0 x'y' + V_2 y'^2), \\ y'' &= K_2 + 2L_2 y' + 2M_2 x' + P_2 y'^2 + 2S_2 x'y' + Q_2 x'^2 \\ &\quad + y'(V_1 x'^2 + 2V_0 x'y' + V_2 y'^2) \end{aligned} \tag{6}$$

с коэффициентами K_j, L_j, M_j, P_j, Q_j, S_j, V_0, V_j, $j = 1, 2$, зависящими от t, x, y, и может быть ассоциирована с проективной связностью в трехмерном пространстве [7]. Для системы (6) по формулам (5) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= a_0 x'^3 - b_0 x'^2 y' + a_2 x'^2 + a_1 x'y' + (2a_5 - a_4)x' + a_3 y' + a_7, \\ \gamma_1 &= -a_0 x'^2 y' + b_0 x'y'^2 + \tfrac{1}{2}(b_1 x'^2 + (b_2 - a_2)x'y' - a_1 y'^2 \\ &\quad + (b_6 + b_5 - 2b_4)x' + (2a_4 - a_5 - a_6)y' + a_8 - b_8), \\ \gamma_2 &= a_0 x'y'^2 - b_0 y'^3 - b_1 x'y' - b_2 y'^2 - b_3 x' + (b_4 - 2b_5)y' - b_7, \end{aligned} \tag{7}$$

и условие линеаризации (4) принимает вид 15 соотношений

$$\begin{gathered} a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 - 2a_5 = 0, \quad 3a_5 - a_6 = 0, \\ b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_4 - 2b_5 = 0, \quad 3b_5 - b_6 = 0, \\ a_7 = 0, \quad b_7 = 0, \quad a_8 - b_8 = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Явный вид относительных инвариантов a_j, b_j, $j = 0, \dots, 8$, системы (6) приведен в [9]. В частности,

$$\begin{aligned} a_5 &= S_{1t} - L_{1y} - M_1 S_2 + M_2 Q_1 + \tfrac{3}{2} K_1 V_0 + \tfrac{1}{2} K_2 V_2, \\ b_5 &= S_{2t} - L_{2x} - M_2 S_1 + M_1 Q_2 + \tfrac{3}{2} K_2 V_0 + \tfrac{1}{2} K_1 V_1, \\ b_8 &= L_{2t} - K_{2y} - L_2^2 - M_1 M_2 + K_2 P_2 + K_1 S_2. \end{aligned} \tag{9}$$

В данной работе получен критерий отделимости уравнения в системах вида (6). Критерий полного разделения уравнений в системе (6) можно найти в [10]. Класс уравнений

(6) замкнут относительно произвольной невырожденной замены переменных (2). Такая замена преобразует систему (6) в систему того же вида

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}'' &= \tilde{K}_1 + 2\tilde{L}_1\tilde{x}' + 2\tilde{M}_1\tilde{y}' + \tilde{P}_1\tilde{x}'^2 + 2\tilde{S}_1\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_1\tilde{y}'^2 \\
&\quad + \tilde{x}'(\tilde{V}_1\tilde{x}'^2 + 2\tilde{V}_0\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{V}_2\tilde{y}'^2), \\
\tilde{y}'' &= \tilde{K}_2 + 2\tilde{L}_2\tilde{y}' + 2\tilde{M}_2\tilde{x}' + \tilde{P}_2\tilde{y}'^2 + 2\tilde{S}_2\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_2\tilde{x}'^2 \\
&\quad + \tilde{y}'(\tilde{V}_1\tilde{x}'^2 + 2\tilde{V}_0\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{V}_2\tilde{y}'^2)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

с некоторыми коэффициентами $\tilde{K}_j$, $\tilde{L}_j$, $\tilde{M}_j$, $\tilde{P}_j$, $\tilde{Q}_j$, $\tilde{S}_j$, $\tilde{V}_0$, $\tilde{V}_j$, $j = 1, 2$, являющимися функциями $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$. В системе (10) первое уравнение отделяется, если ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{K}_1 = P, \quad \tilde{L}_1 = \frac{3}{2}Q, \quad \tilde{M}_1 = 0, \quad \tilde{P}_1 = 3R, \quad \tilde{S}_1 = 0, \quad \tilde{Q}_1 = 0, \quad \tilde{V}_1 = S, \quad \tilde{V}_0 = 0, \quad \tilde{V}_2 = 0$$

с некоторыми функциями P, Q, R, S, зависящими от $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, а ее уравнения имеют вид

$$\tilde{x}'' = P(\tilde{t}, \tilde{x}) + 3Q(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}' + 3R(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^2 + S(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^3, \tag{11}$$

$$\tilde{y}'' = \tilde{K}_2 + 2\tilde{L}_2\tilde{y}' + 2\tilde{M}_2\tilde{x}' + \tilde{P}_2\tilde{y}'^2 + 2\tilde{S}_2\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_2\tilde{x}'^2 + S(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^2\tilde{y}'. \tag{12}$$

В §2 рассматривается случай преобразования (2), в котором $\theta = \theta(t)$. Случай произвольного преобразования (2) (с $\theta_x \neq 0$ или $\theta_y \neq 0$) исследуется в §4. В §3, 5 применение полученных критериев отделимости демонстрируется на примере нормальной формы системы с двумя степенями свободы и системы, которую можно интерпретировать как уравнения геодезических в пространстве с римановой метрикой.

Как было замечено рецензентом данной работы, задачу отделимости уравнения в системе (6) можно решать в более общей постановке. А именно, найти условия отделимости в системе (6) уравнения вида

$$\tilde{x}'' = P(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) + 3Q(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}' + 3R(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}'^2 + S(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}'^3, \tag{13}$$

отличающегося от уравнения (11) тем, что в него переменная $\tilde{y}$ входит как параметр. Соответствующий критерий будет включать в себя в качестве частного случая и критерии приводимости системы (6) к виду (11), (12), полученные в данной работе. Вопрос об отделимости в системе (6) уравнения вида (13) здесь не рассматривается. Его решение является более сложной задачей, так как сводится к исследованию совместности переопределенной системы 15 уравнений относительно функций θ, φ, ψ, в которой уже не будет отделяться подсистема 9 уравнений относительно функций θ, φ (см. ниже подсистемы (16), (17) и (46), (47)).

2. Критерий отделимости уравнения в системе (6). Случай преобразования частного вида

Найдем условия, при которых система (6) невырожденной точечной заменой переменных

$$\tilde{t} = \theta(t), \qquad \tilde{x} = \varphi(t, x, y), \qquad \tilde{y} = \psi(t, x, y) \tag{14}$$

может быть преобразована в систему вида (11), (12). Предполагается, что $\varphi_x \neq 0$, $\varphi_y \neq 0$. Иначе, если система (6) приводится к виду (11), (12) преобразованием (14), в котором $\varphi_x = 0$ ($\varphi_y = 0$), это означает, что первое (второе) уравнение в системе (6) уже отделено.

Подстановка преобразования (14) в уравнения (11), (12) приводит к системе ОДУ второго порядка относительно $x(t)$, $y(t)$ с той же формой зависимости от x', y', что и в уравнениях (6). Приравнивая ее коэффициенты при степенях x', y' соответствующим коэффициентам уравнений (6), получим 15 соотношений, которые при $\varphi_x \neq 0$, $\varphi_y \neq 0$ можно разрешить относительно всех производных второго порядка функции ψ:

$$\begin{aligned}
\psi_{xx} &= -P_1\psi_x - Q_2\psi_y + \tilde{P}_2\psi_x^2 + 2\tilde{S}_2\varphi_x\psi_x + \tilde{Q}_2\varphi_x^2 + S(\varphi_x\psi_t + 2\varphi_t\psi_x)\varphi_x/\theta',\\
\psi_{xy} &= -S_1\psi_x - S_2\psi_y + \tilde{P}_2\psi_x\psi_y + \tilde{S}_2(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + \tilde{Q}_2\varphi_x\varphi_y\\
&\quad + S(\varphi_x\varphi_y\psi_t + \varphi_t\varphi_y\psi_x + \varphi_t\varphi_x\psi_y)/\theta',\\
\psi_{yy} &= -Q_1\psi_x - P_2\psi_y + \tilde{P}_2\psi_y^2 + 2\tilde{S}_2\varphi_y\psi_y + \tilde{Q}_2\varphi_y^2 + S(\varphi_y\psi_t + 2\varphi_t\psi_y)\varphi_y/\theta',\\
\psi_{tx} &= -L_1\psi_x - M_2\psi_y + \psi_x\theta''/(2\theta') + \theta'(\tilde{L}_2\psi_x + \tilde{M}_2\varphi_x) + \tilde{P}_2\psi_t\psi_x\\
&\quad + \tilde{S}_2(\varphi_x\psi_t + \varphi_t\psi_x) + \tilde{Q}_2\varphi_t\varphi_x + S(\varphi_t\psi_x + 2\varphi_x\psi_t)\varphi_t/(2\theta'),\\
\psi_{ty} &= -M_1\psi_x - L_2\psi_y + \psi_y\theta''/(2\theta') + \theta'(\tilde{L}_2\psi_y + \tilde{M}_2\varphi_y) + \tilde{P}_2\psi_t\psi_y\\
&\quad + \tilde{S}_2(\varphi_y\psi_t + \varphi_t\psi_y) + \tilde{Q}_2\varphi_t\varphi_y + S(\varphi_t\psi_y + 2\varphi_y\psi_t)\varphi_t/(2\theta'),\\
\psi_{tt} &= -K_1\psi_x - K_2\psi_y + \psi_t\theta''/\theta' + \tilde{K}_2\theta'^2 + 2\theta'(\tilde{L}_2\psi_t + \tilde{M}_2\varphi_t) + \tilde{P}_2\psi_t^2\\
&\quad + 2\tilde{S}_2\varphi_t\psi_t + \tilde{Q}_2\varphi_t^2 + S\varphi_t^2\psi_t/\theta'
\end{aligned} \tag{15}$$

и производных функции φ:

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx} &= -P_1\varphi_x - Q_2\varphi_y + 3(R + S\varphi_t/\theta')\varphi_x^2,\\
\varphi_{xy} &= -S_1\varphi_x - S_2\varphi_y + 3(R + S\varphi_t/\theta')\varphi_x\varphi_y,\\
\varphi_{yy} &= -Q_1\varphi_x - P_2\varphi_y + 3(R + S\varphi_t/\theta')\varphi_y^2,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{tx} &= -L_1\varphi_x - M_2\varphi_y + \varphi_x\theta''/(2\theta') + 3/2(Q\theta' + 2R\varphi_t + S\varphi_t^2/\theta')\varphi_x,\\
\varphi_{ty} &= -M_1\varphi_x - L_2\varphi_y + \varphi_y\theta''/(2\theta') + 3/2(Q\theta' + 2R\varphi_t + S\varphi_t^2/\theta')\varphi_y,\\
\varphi_{tt} &= -K_1\varphi_x - K_2\varphi_y + P\theta'^2 + (3Q\theta' + \theta''/\theta')\varphi_t + 3R\varphi_t^2 + S\varphi_t^3/\theta'.
\end{aligned}$$

Оставшиеся три соотношения имеют вид

$$V_1 = S\varphi_x^2/\theta', \qquad V_0 = S\varphi_x\varphi_y/\theta', \qquad V_2 = S\varphi_y^2/\theta'. \tag{17}$$

Таким образом, система (6) заменой переменных (14) преобразуется в систему с отделяющимся уравнением (11), (12) тогда и только тогда, когда совместна переопределенная система уравнений (15)–(17) относительно функций θ, φ, ψ.

Уравнения (16), (17) отделяются от системы (15)–(17), так как они содержат только функции P, Q, R, S, зависящие от θ, φ, и не содержат функции $\tilde{K}_2$, $\tilde{L}_2$, $\tilde{M}_2$, $\tilde{P}_2$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{Q}_2$, зависящие от θ, φ, ψ. Их решение определяет функции θ, φ в преобразовании (14). В качестве ψ годится любая функция такая, что замена переменных (14) является невырожденной. Из шести уравнений (15) определяются коэффициенты $\tilde{K}_2$, $\tilde{L}_2$, $\tilde{M}_2$, $\tilde{P}_2$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{Q}_2$ уравнения (12). Никаких ограничений на вид этих коэффициентов не накладывается. Поэтому уравнения (15) совместны, так же как совместна и система (15)–(17) в целом, если совместна подсистема уравнений (16), (17). Система (16), (17) является переопределенной, и исследование ее совместности основано на анализе систем уравнений Пфаффа. Подробное изложение теории таких уравнений можно найти, например, в [11].

Нетрудно видеть, что если одна из функций V_0, V_1, V_2 равна нулю, то уравнения (17) могут быть совместны только при $S = 0$, V_0, V_1, $V_2 = 0$. При исследовании совместности системы (16), (17) этот случай, а также случай, когда коэффициенты V_0, V_1, V_2 в системе

(6) отличны от нуля, рассматриваются отдельно. Кроме (9) используются обозначения

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = a_{5x} - b_{6y} + Q_1 b_3 - S_1 b_4 - S_2 a_5 + Q_2 a_3 + 3(M_2 V_{2t} - M_1 V_{1t})\\
&\quad +3/2((3L_1 - L_2)V_{0t} - V_1 M_{1t} + V_0(L_{1t} - L_{2t}) + V_2 M_{2t}),\\
&\alpha_1 = a_{3x} - a_{4y} + (S_2 - P_1)a_3 + (2S_1 - P_2)a_4 - S_1 a_6 + Q_1(b_5 - b_6)\\
&\quad +3/2(L_1 + L_2)V_{2t},\\
&\alpha_2 = a_{7x} - a_{8y} + Q_1 b_7 + S_1(a_8 - b_8) - P_1 a_7 - M_1 b_6\\
&\quad +L_1 a_4 - L_2 a_5 + M_2 a_3 + 3/2(K_1 V_{0t} + K_2 V_{2t}),\\
&\alpha_3 = b_{5t} - b_{6t} + 3(a_{8x} - b_{8x}) + 6(Q_2 a_7 - S_1 b_7) + 2M_1 b_3 + 2L_1(b_6 - b_5)\\
&\quad +M_2(a_5 - a_4 - 2a_6),\\
&\alpha_4 = a_{4t} - 3a_{7x} + 3S_1(b_8 - a_8) + 3(P_1 - S_2)a_7\\
&\quad -2M_2 a_3 + (L_2 - 3L_1)a_4 + M_1(b_6 - b_5),\\
&\alpha_5 = a_{5t} - a_{4t} + M_1(b_5 - b_4) - L_2(a_4 + 2a_5) + 9/2(K_1 V_{0t} + K_2 V_{2t})\\
&\quad +3[a_{7x} - a_{8y} + Q_1 b_7 + S_1(a_8 - b_8) - P_1 a_7 - M_1 b_6 + L_1 a_4 + M_2 a_3\\
&\quad +V_0(K_{1t}/2 + K_1 L_1 + K_2 M_1) + V_2(K_{2t}/2 + K_1 M_2 + K_2 L_2)],\\
&\alpha_6 = a_{3t} - 3a_{7y} + 3Q_1(b_8 - a_8) + 3(S_1 - P_2)a_7 - M_1(a_4 + a_6)\\
&\quad -(L_1 + L_2)a_3,\\
&\alpha_7 = (\beta_4 + \beta_5 - \alpha_3)_y - \alpha_{4x} - Q_1\beta_6 + S_1(\beta_4 + \beta_5) + S_2\alpha_4 - Q_2\alpha_6,\\
&\alpha_8 = \alpha_{6x} - (\alpha_4 + \alpha_5)_y + Q_1(\alpha_3 - \beta_5) + S_1\beta_6 + (S_1 - P_2)(\alpha_4 + \alpha_5)\\
&\quad +(S_2 - P_1)\alpha_6,\\
&\alpha_9 = b_{6x} + P_1 b_6 - S_1 b_3 + 2Q_2 a_5,\\
&\alpha_{10} = a_{5x} + S_1(b_6 - b_4) + S_2 a_5 + Q_2 a_3,\\
&\alpha_{11} = a_{4y} + S_2 a_3 + P_2 a_4 + Q_1(b_6 - b_5),\\
&\alpha_{12} = a_{3y} + (2P_2 - S_1)a_3 + Q_1(2a_4 - a_6),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

а также β_i, $i = 0, \dots, 12$, формулы для вычисления которых получаются, если в выражениях для α_i поменять ролями следующие пары переменных: (x, y), (a_j, b_j), (α_k, β_k) и индексы (1,2) коэффициентов системы (6). В частности, имеем

$$
\begin{aligned}
&\beta_7 = (\alpha_4 + \alpha_5 - \beta_3)_x - \beta_{4y} - Q_2\alpha_6 + S_2(\alpha_4 + \alpha_5) + S_1\beta_4 - Q_1\beta_6,\\
&\beta_{12} = b_{3x} + (2P_1 - S_2)b_3 + Q_2(2b_4 - b_6),
\end{aligned}
$$

и т.д. По этому же правилу величины b_j получаются из a_j (см. (9)). Справедливы следующие критерии отделимости уравнения в системе (6) в результате преобразования вида (14).

Теорема 2. *Система двух ОДУ второго порядка*

$$
\begin{aligned}
x'' &= K_1 + 2L_1 x' + 2M_1 y' + P_1 x'^2 + 2S_1 x'y' + Q_1 y'^2,\\
y'' &= K_2 + 2L_2 y' + 2M_2 x' + P_2 y'^2 + 2S_2 x'y' + Q_2 x'^2
\end{aligned}
\tag{19}
$$

преобразованием (14) *приводится к виду*

$$\tilde{x}'' = p(\tilde{t}, \tilde{x}) + 2q(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}' + r(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^2, \tag{20}$$

$$\tilde{y}'' = \tilde{K}_2 + 2\tilde{L}_2\tilde{y}' + 2\tilde{M}_2\tilde{x}' + \tilde{P}_2\tilde{y}'^2 + 2\tilde{S}_2\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_2\tilde{x}'^2 \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$B_{i1}B_{j2} - B_{j1}B_{i2} = 0, \tag{22}$$

$$B_{j2}^2 A_{k1} - B_{j1}B_{j2}A_{k2} + B_{j1}^2 A_{k3} = 0, \tag{23}$$

$$(A_{k1}A_{l3} - A_{l1}A_{k3})^2 + (A_{k2}A_{l1} - A_{l2}A_{k1})(A_{k2}A_{l3} - A_{l2}A_{k3}) = 0, \tag{24}$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{k1} & A_{k2} & A_{k3}\\ A_{l1} & A_{l2} & A_{l3}\\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3}\end{pmatrix} = 0, \qquad i, j = 1, \dots, 36, \quad k, l, m = 1, \dots, 65, \tag{25}$$

где

$$\begin{array}{lllll} B_{11}=a_1, & B_{21}=a_2, & B_{31}=a_4-a_5, & B_{41}=\alpha_0, & B_{51}=\alpha_1, \\ B_{12}=-b_2, & B_{22}=-b_1, & B_{32}=b_5-b_4, & B_{42}=-\beta_1, & B_{52}=-\beta_0, \\ B_{71}=\alpha_5, & B_{72}=-\beta_5, & B_{61}=\alpha_2, & B_{62}=-\beta_2, & \end{array} \tag{26}$$

$$\begin{array}{l} B_{81}=\alpha_7+2M_2\alpha_{11}+2(L_1-L_2)\alpha_{10}-2M_1\alpha_9, \\ B_{82}=\beta_8+2M_2\beta_{10}+2(L_1-L_2)\beta_{11}-2M_1\beta_{12}, \\ B_{91}=\alpha_8+2M_1\alpha_{10}+2(L_2-L_1)\alpha_{11}-2M_2\alpha_{12}, \\ B_{92}=\beta_7+2M_1\beta_{11}+2(L_2-L_1)\beta_{10}-2M_2\beta_9, \end{array} \tag{27}$$

$$\begin{array}{ll} B_{9+j,1}=(B_{j1})_t-L_1B_{j1}-M_1B_{j2}, & B_{9+j,2}=(B_{j2})_t-M_2B_{j1}-L_2B_{j2}, \\ B_{18+j,1}=(B_{j1})_x-P_1B_{j1}-S_1B_{j2}, & B_{18+j,2}=(B_{j2})_x-Q_2B_{j1}-S_2B_{j2}, \\ B_{27+j,1}=(B_{j1})_y-S_1B_{j1}-Q_1B_{j2}, & B_{27+j,2}=(B_{j2})_y-S_2B_{j1}-P_2B_{j2}, \\ j=1,\ldots,9, & \end{array} \tag{28}$$

$$\begin{array}{lllll} A_{11}=a_5, & A_{21}=a_3, & A_{31}=a_7, & A_{41}=\alpha_4, & A_{51}=-\alpha_6, \\ A_{12}=b_4-b_6, & A_{22}=a_6-a_4, & A_{32}=b_8-a_8, & A_{42}=\alpha_3, & A_{52}=\beta_3, \\ A_{13}=-b_3, & A_{23}=-b_5, & A_{33}=-b_7, & A_{43}=-\beta_6, & A_{53}=\beta_4, \end{array} \tag{29}$$

$$\begin{array}{l} A_{n+k,1}=(A_{k1})_t-2L_1A_{k1}-M_1A_{k2},\, A_{n+k,3}=(A_{k3})_t-M_2A_{k2}-2L_2A_{k3}, \\ A_{n+k,2}=(A_{k2})_t-2M_2A_{k1}-(L_1+L_2)A_{k2}-2M_1A_{k3}, \\ A_{2n+k,1}=(A_{k1})_x-2P_1A_{k1}-S_1A_{k2},\, A_{2n+k,3}=(A_{k3})_x-Q_2A_{k2}-2S_2A_{k3}, \\ A_{2n+k,2}=(A_{k2})_x-2Q_2A_{k1}-(P_1+S_2)A_{k2}-2S_1A_{k3}, \\ A_{3n+k,1}=(A_{k1})_y-2S_1A_{k1}-Q_1A_{k2},\, A_{3n+k,3}=(A_{k3})_y-S_2A_{k2}-2P_2A_{k3}, \\ A_{3n+k,2}=(A_{k2})_y-2S_2A_{k1}-(S_1+P_2)A_{k2}-2Q_1A_{k3}, \end{array} \tag{30}$$

где 1) $n=5$, $k=1,\ldots,5$; *2)* $n=15$, $k=6,\ldots,20$.

Теорема 3. *Система двух ОДУ второго порядка* (6) *с коэффициентами* V_0, V_1, V_2, *отличными от нуля, преобразованием* (14) *приводится к виду* (11), (12) *тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям*

$$V_0^2=V_1V_2, \qquad a_0=0, \qquad b_0=0, \tag{31}$$

$$V_1B_{j1}+V_0B_{j2}=0, \qquad V_0B_{j1}+V_2B_{j2}=0, \qquad j=1,\ldots,13, \tag{32}$$

$$V_1A_{k1}+V_0A_{k2}+V_2A_{k3}=0, \qquad k=1,\ldots,6, \tag{33}$$

в которых B_{ji}, A_{kl} *определяются формулами* (26), (29),

$$A_{61}=\alpha_8, \qquad A_{62}=\alpha_7+\beta_7, \qquad A_{63}=\beta_8, \tag{34}$$

$$\begin{array}{l} B_{81}=V_{2x},\ B_{91}=V_{1y}-2V_{0x},\ B_{10,1}=V_{2y},\ B_{11,1}=\varepsilon+V_{0t},\ B_{12,1}=V_{2t}, \\ B_{82}=-V_{1y},\ B_{92}=V_{1x},\ B_{10,2}=V_{2x}-2V_{0y},\ B_{11,2}=-V_{1t},\ B_{12,2}=\varepsilon-V_{0t}, \end{array} \tag{35}$$

где $\varepsilon=M_1V_1+(L_2-L_1)V_0-M_2V_2$ *и*

$$B_{13,1}=\alpha_8, \qquad B_{13,2}=\beta_7 \qquad \text{при } \varepsilon=0, \tag{36}$$

$$\begin{array}{l} B_{13,1}=\alpha_8\varepsilon_x+\alpha_7\varepsilon_y+\varepsilon[P_1\alpha_8+S_1(\alpha_7+\beta_7)+Q_1\beta_8-\alpha_{7y}-\alpha_{8x}], \\ B_{13,2}=\beta_8\varepsilon_y+\beta_7\varepsilon_x+\varepsilon[P_2\beta_8+S_2(\alpha_7+\beta_7)+Q_2\alpha_8-\beta_{7x}-\beta_{8y}] \text{ при } \varepsilon\neq 0. \end{array} \tag{37}$$

Условия теоремы 2 выводятся с помощью стандартного (аналогично тому, как это делалось в [9]) исследования совместности системы (16), в результате которого получаются уравнения

$$B_{j1}\varphi_x+B_{j2}\varphi_y=0, \tag{38}$$

линейные по φ_x, φ_y с коэффициентами (26)–(28), и уравнения

$$A_{k1}\varphi_x^2+A_{k2}\varphi_x\varphi_y+A_{k3}\varphi_y^2=0 \tag{39}$$

второй степени по φ_x, φ_y с коэффициентами (29), (30). Равенства (22) представляют собой условие совместности системы (38), а (24), (25) — системы (39). Равенства (23) определяют условие совместности уравнений (38) с уравнениями (39).

Замечание. Система (38), (39) может иметь два решения $\varphi_x/\varphi_y = \phi_1(t,x,y)$, $\varphi_x/\varphi_y = \phi_2(t,x,y)$ таких, что $\partial(\phi_1,\phi_2)/\partial(x,y) \neq 0$. Это означает, что использование соответствующих решений в качестве $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ приводит к системе, уравнения которой полностью разделяются. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в соотношениях (38) все $B_{ji} = 0$, а в (39) $\operatorname{rank}\|A_{kl}\| = 1$, причем, если какая-либо строка (A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}) отлична от нулевой, то $A_{k2}^2 - 4A_{k1}A_{k3} \neq 0$. Это же замечание справедливо и в случае преобразования (2) с $\theta_x \neq 0$ или $\theta_y \neq 0$ (соответствующие утверждения о разделении уравнений в системе двух ОДУ второго порядка приведены в [10]).

Теорема 3 доказывается аналогично. Первое условие (31) и равенства

$$V_0\varphi_x = V_1\varphi_y, \quad V_2\varphi_x = V_0\varphi_y \tag{40}$$

являются алгебраическим следствием уравнений (17). Исследование совместности уравнений (16), (17) приводит к условиям $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, соотношениям (38) с коэффициентами (26), (35), (36) или (37) и соотношениям (39) с коэффициентами (29), (34), что с учетом (40) дает условия (32), (33) теоремы 3.

3. Примеры систем с отделяющимся уравнением

Пример 1. Рассмотрим семейство уравнений

$$\begin{aligned} x'' &= P_1(x,y)x'^2 + 2S_1(x,y)x'y' + Q_1(x,y)y'^2, \\ y'' &= P_2(x,y)y'^2 + 2S_2(x,y)x'y' + Q_2(x,y)x'^2, \end{aligned} \tag{41}$$

имеющих ту же форму зависимости от первых производных, что и уравнения геодезических в пространстве с римановой метрикой

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad i,j,k,=1,2. \tag{42}$$

Если положить $(x^1,x^2) = (x,y)$, то символы Кристоффеля Γ^i_{jk} связаны с коэффициентами системы (41) соотношениями

$$\Gamma^1_{11} = -P_1, \quad \Gamma^1_{12} = -S_1, \quad \Gamma^1_{22} = -Q_1, \quad \Gamma^2_{11} = -Q_2, \quad \Gamma^2_{12} = -S_2, \quad \Gamma^2_{22} = -P_2.$$

Известно, что уравнения (41), отнесенные к параметру x, принимают вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Q_2 + (2S_2 - P_1)\frac{dy}{dx} + (P_2 - 2S_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - Q_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

т.е. отделение уравнения в системе (41) в результате преобразования (2) с $\theta_x \neq 0$

$$\tilde{t} = x, \qquad \tilde{x} = y, \qquad \tilde{y} = t$$

имеет место для любой системы (41). Найдем условия, при которых в системе (41) отделяется уравнение в результате преобразования вида (14).

Вычислив по формулам (5) инварианты (13), можно установить, что для системы (41) из 18 инвариантов a_j, b_j, $j = 0, \ldots, 8$ отличны от нуля четыре: a_1, a_2, b_1, b_2. В случае системы (42) они совпадают с компонентами тензора кривизны [10]

$$a_1 = R^1_{221}, \qquad a_2 = R^1_{121}, \qquad b_1 = R^2_{112}, \qquad b_2 = R^2_{212}.$$

Нетрудно видеть, что все величины (29), (30) равны нулю, и, следовательно, для системы (41) все условия (23)–(25) теоремы 2 удовлетворяются тождественно. Условие (22) выполнено, если ранг следующей матрицы (составленной из ненулевых строк матрицы B) не превосходит 1:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_1 \\ a_{1x} - P_1 a_1 + S_1 b_2 & b_{2x} - S_2 b_2 + Q_2 a_1 \\ a_{2x} - P_1 a_2 + S_1 b_1 & b_{1x} - S_2 b_1 + Q_2 a_2 \\ a_{1y} - S_1 a_1 + Q_1 b_2 & b_{2y} - P_2 b_2 + S_2 a_1 \\ a_{2y} - S_1 a_2 + Q_1 b_1 & b_{1y} - P_2 b_1 + S_2 a_2 \end{pmatrix}.$$

Отделение уравнения в системе (41) имеет место, если $\mathrm{rank}\tilde{B} = 1$. Если $\mathrm{rank}\tilde{B} = 0$, то уравнения (41) полностью разделяются и, согласно теореме 1, приводятся к виду $\tilde{x}'' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$. В [9, 10] показано, что в частном случае системы (42) равенство $a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0$ возможно, только если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$.

Пример 2. Система, которая в случае $\Gamma_t = 0$ описывает плоское движение частицы под действием гироскопических сил, имеет вид

$$x'' = 2\Gamma\, y' - U_x, \qquad y'' = -2\Gamma\, x' - U_y, \qquad \Gamma \neq 0. \tag{43}$$

Функции Γ, U переменных t, x, y предполагаются вещественными, для вторых производных функции U используются обозначения $V = U_{xy}$, $W = U_{xx} - U_{yy}$. Рассмотрим случай нелинейной системы (43). Для нее отличны от нуля следующие коэффииенты в инвариантах (13): $a_3 = -\Gamma_y$, $b_3 = \Gamma_x$, $a_4 = -\Gamma_x$, $b_4 = \Gamma_y$, $a_7 = U_{xy} + \Gamma_t$, $b_7 = U_{xy} - \Gamma_t$, $a_8 = U_{xx} + \Gamma^2$, $b_8 = U_{yy} + \Gamma^2$. Из условий (23), при $k = 1, 2$, $j = 3$ имеющих вид $-\Gamma_x(\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2) = 0$, $-\Gamma_y(\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2) = 0$, следует $\Gamma_x = 0$, $\Gamma_y = 0$.

Пусть в системе (43) $\Gamma = \Gamma(t)$. Тогда все коэффициенты (26), (28) равны нулю, а первые несколько ненулевых коэффициентов (29), (30) равны

$$\begin{aligned} &A_{31} = \Gamma' + U_{xy}, \quad A_{32} = U_{yy} - U_{xx}, \quad A_{33} = \Gamma' - U_{xy}, \quad A_{41} = -A_{43} = -3U_{xxy}, \\ &A_{42} = 3(U_{xyy} - U_{xxx}), \quad A_{51} = -A_{53} = -3U_{xyy}, \quad A_{52} = 3(U_{yyy} - U_{xxy}), \\ &A_{81} = \Gamma'' + \Gamma(U_{xx} - U_{yy}) + U_{txy}, \quad A_{82} = 4\Gamma U_{xy} + U_{tyy} - U_{txx}, \\ &A_{83} = \Gamma'' + \Gamma(U_{yy} - U_{xx}) - U_{txy}. \end{aligned}$$

С ними соотношения (24) принимают вид

$$\begin{aligned} &(4V_x^2 + W_x^2)\Gamma'^2 = (WV_x - VW_x)^2, \quad (4V_y^2 + W_y^2)\Gamma'^2 = (WV_y - VW_y)^2, \\ &(W_x V_{xx} - V_x W_{xx})^2 = 0, \quad (W_x V_{xy} - V_x W_{xy})^2 = 0, \\ &(W_y V_{xy} - V_y W_{xy})^2 = 0, \quad (W_y V_{yy} - V_y W_{yy})^2 = 0, \quad (V_x W_y - V_y W_x)^2 = 0, \\ &(\Gamma''^2 + 4\Gamma^2\Gamma'^2)(4V^2 + W^2) - 2\Gamma'\Gamma''(4VV_t + WW_t) + 8\Gamma\Gamma'^2(WV_t - VW_t) \\ &+\Gamma'^2(4V_t^2 + W_t^2) = (\Gamma(4V^2 + W^2) + WV_t - VW_t)^2, \end{aligned}$$

откуда следует $W = f_1(t)V + f_0(t)$, $f_0^2 = (f_1^2 + 4)\Gamma'^2$, $f_1' = (f_1^2 + 4)\Gamma$. Пусть $\Gamma = \gamma'/2$ с некоторой функцией $\gamma(t)$. Тогда $f_1(t) = 2\,\mathrm{tg}\gamma$, $f_0(t) = \pm\gamma''/\cos\gamma$ и функция $U(t, x, y)$ должна удовлетворять уравнению

$$U_{xx} - U_{yy} = 2\,\mathrm{tg}\gamma\, U_{xy} \pm \frac{\gamma''}{\cos\gamma}. \tag{44}$$

Следовательно, отделение уравнения в системе (43) возможно, если

$$\begin{gathered} \Gamma = \frac{\gamma'(t)}{2}, \qquad U = \frac{\gamma''}{4}(m(x^2 - y^2)\cos\gamma - 2xy\sin\gamma) \\ +V_{+1}(t, y\cos\gamma + x(\sin\gamma + 1)) + +V_{-1}(t, y\cos\gamma + x(\sin\gamma - 1)), \end{gathered} \tag{45}$$

где m равно либо $+1$, либо -1. С функциями (45) все условия (24), (25) теоремы 2 становятся тождествами, а все квадратные уравнения (39) имеют общий корень $\varphi_x/\varphi_y = (\sin\gamma + m)/\cos\gamma$. Решением последнего уравнения является $\varphi = \phi(t, z)$, где $z = y\cos\gamma + x(\sin\gamma + m)$. Его подстановка в (16) приводит к системе уравнений, при $\theta = t$

имеющей частное решение $\phi = (\sin\gamma + m)^{-1/2}z$. Таким образом, в системе (43) с коэффициентами (45) отделяется уравнение

$$\tilde{x}'' + \frac{\gamma'^2}{4}\tilde{x} + 2m\sqrt{\sin\gamma + m}\,\frac{\partial V_m}{\partial z} = 0$$

относительно функции $\tilde{x}(t) = (\sin\gamma + m)^{-1/2}(y\cos\gamma + x(\sin\gamma + m))$.

4. Критерий отделимости уравнения в системе (6). Общий случай

Найдем условия, при которых система (6) может быть преобразована в систему с отделяющимся уравнением (11), (12) заменой переменных (2) с $\theta_x \neq 0$ или $\theta_y \neq 0$. Пусть для определенности $\theta_x \neq 0$. Подстановка преобразования (2) в систему (11), (12) приводит к системе ОДУ второго порядка с той же формой зависимости от x', y', что и в уравнениях (6). Приравнивая ее коэффициенты при степенях x', y' соответствующим коэффициентам уравнений (6), получим 15 соотношений, которые при $\theta_x \neq 0$ можно разрешить относительно всех производных второго порядка функций φ, ψ и трех производных функции θ. Так же как и в случае преобразования (14), рассмотренного в §2, при этом отделяется подсистема девяти уравнений

$$\begin{aligned}
&\theta_{yy} = V_2\theta_t - Q_1\theta_x + (2F_2 - P_2)\theta_y - S\varphi_y^2,\\
&\theta_{ty} = F_2\theta_t - M_1\theta_x + (F_1 - L_2)\theta_y - S\varphi_t\varphi_y,\\
&\theta_{tt} = 2F_1\theta_t - K_1\theta_x - K_2\theta_y - S\varphi_t^2,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{xx} = V_1\varphi_t + (2F_0 - P_1)\varphi_x - Q_2\varphi_y + P\theta_x^2 + 3Q\theta_x\varphi_x + 3R\varphi_x^2,\ \varphi_{xy} = V_0\varphi_t\\
&+(F_2 - S_1)\varphi_x + (F_0 - S_2)\varphi_y + P\theta_x\theta_y + 3/2Q(\theta_x\varphi_y + \theta_y\varphi_x) + 3R\varphi_x\varphi_y,\\
&\varphi_{yy} = V_2\varphi_t - Q_1\varphi_x + (2F_2 - P_2)\varphi_y + P\theta_y^2 + 3Q\theta_y\varphi_y + 3R\varphi_y^2,\\
&\varphi_{tx} = F_0\varphi_t + (F_1 - L_1)\varphi_x - M_2\varphi_y + P\theta_t\theta_x + 3/2Q(\theta_t\varphi_x + \theta_x\varphi_t) + 3R\varphi_t\varphi_x,\\
&\varphi_{ty} = F_2\varphi_t - M_1\varphi_x + (F_1 - L_2)\varphi_y + P\theta_t\theta_y + 3/2Q(\theta_t\varphi_y + \theta_y\varphi_t) + 3R\varphi_t\varphi_y,\\
&\varphi_{tt} = 2F_1\varphi_t - K_1\varphi_x - K_2\varphi_y + P\theta_t^2 + 3Q\theta_t\varphi_t + 3R\varphi_t^2,
\end{aligned} \tag{47}$$

из совместности которой следует совместность всех 15 уравнений относительно функций θ, φ, ψ. Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned}
&F_0 = (\theta_{xx} - V_1\theta_t + P_1\theta_x + Q_2\theta_y + S\varphi_x^2)/(2\theta_x),\\
&F_1 = (\theta_{tx} - F_0\theta_t + L_1\theta_x + M_2\theta_y + S\varphi_t\varphi_x)/\theta_x,\\
&F_2 = (\theta_{xy} - V_0\theta_t + S_1\theta_x + (S_2 - F_0)\theta_y + S\varphi_x\varphi_y)/\theta_x.
\end{aligned}$$

Доказательство приведенного ниже критерия отделимости уравнения в системе (6) проводится аналогично доказательству теорем 2, 3 и приводит к равенствам, подобным (38), (39). Роль производных φ_x, φ_y в них играют миноры $M_{31} = \theta_x\varphi_y - \theta_y\varphi_x$, $M_{33} = \theta_t\varphi_x - \theta_x\varphi_t$ матрицы Якоби преобразования (2). Они не могут быть равны нулю одновременно, иначе из тождества $\theta_t M_{31} - \theta_x M_{32} + \theta_y M_{33} = 0$ при $\theta_x \neq 0$ следует $M_{32} = 0$. Тогда из разложения $\Delta = \psi_t M_{31} - \psi_x M_{32} + \psi_y M_{33}$ следует равенство нулю якобиана преобразования (2), что противоречит предположению о его невырожденности.

Теорема 4. *Система двух ОДУ второго порядка* (6) *преобразованием* (2) *с* $\theta_x \neq 0$ *приводится к виду* (11), (12) *тогда и только тогда, когда совместна система алгебраических и дифференциальных уравнений относительно* T, Y*:*

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \equiv\ & a_3 - a_1T + (a_6 - a_5 - a_4)Y - b_0T^2 + (a_2 + b_2)TY\\
&+(b_6 - b_5 - b_4)Y^2 - a_0T^2Y - b_1TY^2 + b_3Y^3 = 0,\\
\Phi_2 \equiv\ & a_7 + (a_4 - 2a_5)T + (b_8 - a_8)Y + a_2T^2 + (b_6 + b_5 - 2b_4)TY\\
&-b_7Y^2 - a_0T^3 - b_1T^2Y + b_3TY^2 = 0,
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\Delta_t\Phi_1 = 0, \quad \Delta_t\Phi_2 = 0, \quad \Delta_y\Phi_1 = 0, \quad \Delta_y\Phi_2 = 0, \tag{49}$$

$$T_y - Y_t = YT_x - TY_x, \tag{50}$$

$$B_{i1}B_{j2} - B_{j1}B_{i2} = 0, \tag{51}$$

$$B_{j2}^2 A_{k1} - B_{j1}B_{j2}A_{k2} + B_{j1}^2 A_{k3} = 0, \tag{52}$$

$$(A_{k1}A_{l3} - A_{l1}A_{k3})^2 + (A_{k2}A_{l1} - A_{l2}A_{k1})(A_{k2}A_{l3} - A_{l2}A_{k3}) = 0, \tag{53}$$

$$\det \begin{pmatrix} A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \\ A_{l1} & A_{l2} & A_{l3} \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \end{pmatrix} = 0, \quad i,j = 1, \ldots, 10, \quad k,l,m = 1, \ldots, 15, \tag{54}$$

где
$$\begin{aligned}
&\Delta_t = \partial_t - T\partial_x + \lambda_0\partial_T + \lambda_1\partial_Y + (\lambda_{0x} + T_x\lambda_{0T} + Y_x\lambda_{0Y} + T_x^2)\partial_{T_x} \\
&\qquad + (\lambda_{1x} + T_x\lambda_{1T} + Y_x\lambda_{1Y} + T_xY_x)\partial_{Y_x}, \\
&\Delta_y = \partial_y - Y\partial_x + \lambda_1\partial_T + \lambda_2\partial_Y + (\lambda_{1x} + T_x\lambda_{1T} + Y_x\lambda_{1Y} + T_xY_x)\partial_{T_x} \\
&\qquad + (\lambda_{2x} + T_x\lambda_{2T} + Y_x\lambda_{2Y} + Y_x^2)\partial_{Y_x}, \\
&B_{11} = \Phi_{1Y}, \qquad B_{12} = -\Phi_{1T}, \qquad B_{21} = -\Phi_{2Y}, \qquad B_{22} = \Phi_{2T}, \\
&B_{2+j,1} = \Delta_t B_{j1} + (\lambda_{1Y} + 2T_x)B_{j1} - \lambda_{0Y}B_{j2}, \\
&B_{2+j,2} = \Delta_t B_{j2} - (\lambda_{1T} + Y_x)B_{j1} + (\lambda_{0T} + 3T_x)B_{j2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B_{4+j,1} = \Delta_y B_{j1} + (\lambda_{2Y} + 3Y_x)B_{j1} - (\lambda_{1Y} + T_x)B_{j2}, \\
&B_{4+j,2} = \Delta_y B_{j2} - \lambda_{2T}B_{j1} + (\lambda_{1T} + 2Y_x)B_{j2}, \quad j = 1,2, \\
&B_{71} = \lambda_0 + TT_x - T_t, \ B_{72} = B_{81} = \lambda_1 + TY_x - Y_t, \ B_{82} = \lambda_2 + YY_x - Y_y, \\
&B_{91} = 2\alpha_4 - \lambda_{0TY}\alpha_6 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\alpha_7 + \lambda_{1TT}\alpha_8, \\
&B_{92} = 2\beta_4 - \lambda_{0TY}\beta_6 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\beta_7 + \lambda_{1TT}\beta_8, \\
&B_{10,1} = 2\alpha_5 - \lambda_{0TY}\alpha_7 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\alpha_8 + \lambda_{1TT}\alpha_9, \\
&B_{10,2} = 2\beta_5 - \lambda_{0TY}\beta_7 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\beta_8 + \lambda_{1TT}\beta_9,
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
&A_{11} = b_3, \quad A_{12} = b_1, \quad A_{13} = -a_0, \\
&A_{21} = b_4 + b_5 - b_6 + b_1T - 2b_3Y, \quad A_{22} = a_2 + b_2 - 2a_0T - b_1Y, \quad A_{23} = b_0, \\
&A_{31} = b_7, \quad A_{32} = b_6 + b_5 - 2b_4 - b_1T + 2b_3Y, \quad A_{33} = -a_2 + 2a_0T + b_1Y, \\
&A_{3+k,1} = \Delta_t A_{k1} + 2(\lambda_{1Y} + 2T_x)A_{k1} - \lambda_{0Y}A_{k2}, \\
&A_{3+k,2} = \Delta_t A_{k2} - 2(\lambda_{1T} + Y_x)A_{k1} + (\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 5T_x)A_{k2} - 2\lambda_{0Y}A_{k3}, \\
&A_{3+k,3} = \Delta_t A_{k3} - (\lambda_{1T} + Y_x)A_{k2} + 2(\lambda_{0T} + 3T_x)A_{k3}, \\
&A_{6+k,1} = \Delta_y A_{k1} + 2(\lambda_{2Y} + 3Y_x)A_{k1} - (\lambda_{1Y} + T_x)A_{k2}, \\
&A_{6+k,2} = \Delta_y A_{k2} - 2\lambda_{2T}A_{k1} + (\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 5Y_x)A_{k2} - 2(\lambda_{1Y} + T_x)A_{k3}, \\
&A_{6+k,3} = \Delta_y A_{k3} - \lambda_{2T}A_{k2} + 2(\lambda_{1T} + 2Y_x)A_{k3}, \quad k = 1,2,3, \\
&A_{10,1} = \alpha_2, \quad A_{10,2} = \beta_2 - \alpha_1, \quad A_{10,3} = -\beta_1, \\
&A_{11,1} = \alpha_3, \quad A_{11,2} = \beta_3 + \alpha_2, \quad A_{11,3} = \beta_2, \\
&A_{12,1} = \alpha_5, \quad A_{12,2} = \beta_5 - \alpha_4, \quad A_{12,3} = -\beta_4, \\
&A_{13,1} = \alpha_7, \quad A_{13,2} = \beta_7 - \alpha_6, \quad A_{13,3} = -\beta_6, \\
&A_{14,1} = \alpha_8, \quad A_{14,2} = \beta_8 - \alpha_7, \quad A_{14,3} = -\beta_7, \\
&A_{15,1} = \alpha_9, \quad A_{15,2} = \beta_9 - \alpha_8, \quad A_{15,3} = -\beta_8.
\end{aligned}$$

В (55) используются обозначения

$$\lambda_0 = -K_1 + 2L_1T - P_1T^2 + V_1T^3 + (-K_2 + 2M_2T - Q_2T^2)Y,$$
$$\lambda_1 = S_1T - M_1 + (L_1 - L_2)Y - V_0T^2 + (S_2 - P_1)TY + M_2Y^2 + V_1T^2Y - Q_2TY^2,$$
$$\lambda_2 = -Q_1 + (2S_1 - P_2)Y + (2S_2 - P_1)Y^2 - Q_2Y^3 + (V_2 - 2V_0Y + V_1Y^2)T,$$
$$\beta_1 = 2a_0(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + 2\gamma_1Y + 3(-a_{0y} - S_1a_0 - V_2b_1 + V_0a_2) - b_{0x} - P_2a_0$$
$$+(S_2 - P_1)b_0 - V_1a_1 + V_0b_2, \qquad \gamma_1 = a_{0x} + P_1a_0 - Q_2b_0 + V_0b_1 - V_1a_2,$$
$$\alpha_1 = 2a_0(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + 2\gamma_1T + 3(a_{0t} + b_{1y} + L_1a_0 - Q_2a_1 + S_1b_1 - 2V_2b_3)$$
$$-2a_{2x} - b_{2x} - L_2a_0 - 4M_2b_0 - P_1(2a_2 + b_2) + S_2(a_2 + 2b_2)$$
$$+V_0(8b_4 - b_5 - 5b_6) + V_1(7a_5 - 2a_4 - a_6),$$
$$\beta_2 = b_1(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + \gamma_2Y + 3a_{0t} - a_{2x} + 3(L_1 + L_2)a_0 - 2M_2b_0 - Q_2a_1$$
$$+P_2b_1 - (P_1 + S_2)a_2 + V_0(2b_4 - b_5 - b_6) + 2V_1(2a_5 - a_4),$$
$$\alpha_2 = b_1(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + \gamma_2T + (b_4 + b_5 - b_6)_x - 3b_{3y} - 2L_2b_1 + 3(P_2 - S_1)b_3$$
$$+M_2(a_2 + b_2) + (P_1 - 3S_2)(b_4 + b_5 - b_6) + 2Q_2(a_6 - a_5 - a_4) + 2V_0b_7 + V_1(a_8 - b_8),$$
$$\gamma_2 = b_{1x} - 2M_2a_0 + (P_1 - S_2)b_1 + Q_2(a_2 + b_2) - 2V_0b_3 + V_1(2b_4 - b_5 - b_6),$$
$$\beta_3 = 2b_3(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + 2\gamma_3Y + 3(b_{3y} - b_{1t} - b_{4x} + 2K_2a_0 + (L_2 - L_1)b_1$$
$$-M_2b_2 + S_1b_3 + S_2(b_4 + b_5 - b_6) + V_1(b_8 - a_8)) + 2b_{6x} - 5M_2a_2 - P_2b_3$$
$$+Q_2(2a_4 + 5a_5 - 3a_6) + P_1(2b_6 - 3b_4) - 4V_0b_7,$$
$$\gamma_3 = b_{3x} + M_2b_1 + (P_1 - 2S_2)b_3 + Q_2(b_4 + b_5 - b_6) - V_1b_7,$$
$$\alpha_3 = 2b_3(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + 2\gamma_3T - 3(b_{3t} + K_2b_1 + L_1b_3) + b_{7x} + 5L_2b_3$$
$$+M_2(3b_6 - b_5 - 4b_4) + (P_1 - S_2)b_7 + Q_2(b_8 - a_8),$$
$$\beta_4 = \Delta_t\beta_1 + \Delta_y\beta_2 + (\lambda_{0T} - \lambda_{1Y} - T_x)\beta_1 - (\lambda_{1T} + Y_x)\alpha_1 + (2\lambda_{1T} - \lambda_{2Y} - 2Y_x)\beta_2$$
$$-\lambda_{2T}(\alpha_2 + \beta_3),$$
$$\alpha_4 = \Delta_t\alpha_1 + \Delta_y\alpha_2 - \lambda_{0Y}\beta_1 - 2T_x\alpha_1 - (\lambda_{1Y} + T_x)\beta_2 + (\lambda_{1T} - Y_x)\alpha_2 - \lambda_{2T}\alpha_3,$$
$$\beta_5 = \Delta_t\beta_2 - \Delta_y\beta_3 + \lambda_{0Y}\beta_1 + (\lambda_{1Y} - T_x)\beta_2 - (\lambda_{1T} + Y_x)\alpha_2 + 2Y_x\beta_3 + \lambda_{2T}\alpha_3,$$
$$\alpha_5 = \Delta_t\alpha_2 - \Delta_y\alpha_3 + \lambda_{0Y}(\alpha_1 - \beta_2) + (2\lambda_{1Y} - \lambda_{0T} - 2T_x)\alpha_2 + (\lambda_{1Y} + T_x)\beta_3$$
$$+(\lambda_{1T} - \lambda_{2Y} + Y_x)\alpha_3,$$
$$\beta_6 = 2(b_0 + a_0Y)(2\lambda_{2Y} - \lambda_{1T} + 4Y_x) + 2a_0(T\lambda_{2T} - \lambda_2) + 2(b_2 - b_1Y)\lambda_{2T}$$
$$+2(-b_{0y} + (b_{0x} - a_{0y})Y + a_{0x}Y^2),$$
$$\alpha_6 = 2b_0(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + \alpha_1Y + 3V_1\Phi_1 - \lambda_{1TT}\Phi_{1Y}$$
$$+(3b_{0x} + a_{0y} + (P_2 - S_1)a_0 + (3S_2 + P_1)b_0 + 3V_1a_1 + V_2b_1 - V_0(a_2 + 3b_2))T$$
$$+3(b_{0t} + a_{1x} + L_2b_0 - Q_1b_1 + S_2a_1 - 2V_1a_3) - a_{2y} - 2b_{2y} - L_1b_0 - 4M_1a_0$$
$$-P_2(a_2 + 2b_2) + S_1(2a_2 + b_2) + V_0(8a_4 - a_5 - 5a_6) + V_2(7b_5 - 2b_4 - b_6),$$
$$\beta_7 = 2(b_0 + a_0Y)(\lambda_{0T} - 2\lambda_{1Y} - T_x) + 2a_0(\lambda_1 - T\lambda_{1T} - TY_x)$$
$$+2(b_1Y - b_2)(\lambda_{1T} + Y_x) + 2(b_{0t} - b_{0x}T + a_{0t}Y - a_{0x}TY),$$
$$\alpha_7 = (a_0T - a_2 - 2b_2 + 3b_1Y)(\lambda_{1Y} + 2T_x) + \gamma_1T^2 + 3\gamma_2TY - 3\gamma_3Y^2 + 3V_0\Phi_{2Y}$$
$$+(b_4 + b_5 - b_6 + b_1T - 3b_3Y)(2Y_x - \lambda_{1T}) + V_1(T\Phi_{2T} - \Phi_2) + 5M_2\Phi_{1T}$$
$$+3Q_2(2\Phi_1 - 2T\Phi_{1T} - Y\Phi_{1Y}) - 3b_3Y\lambda_{2Y} + b_1(T\lambda_{1T} + 3Y\lambda_{1Y} - \lambda_1)$$
$$+3b_0\lambda_{0Y} - b_7\lambda_{2T} + a_0(T\lambda_{0T} + 6Y\lambda_{0Y} - 2\lambda_0) - (a_{0t} + a_{2x} + 2b_{2x})T$$
$$+(3(b_4 + b_5 - b_6)_x - 3b_{3y} + 4K_2a_0 + 2(L_2 - L_1)b_1 - 2M_2(a_2 + b_2)$$
$$+2V_1(a_8 - b_8) + 4V_0b_7)Y + (a_{2t} - b_{2t})/4 + 3/4((4a_4 + a_5 - 3a_6)_x + 3b_{5y} - b_{6y})$$
$$-K_1a_0 + 2K_2b_0 + 2M_2a_1 - M_1b_1 + 3Q_1b_3 - 3Q_2a_3 + V_1a_7 - 2V_2b_7,$$
$$\beta_8 = (3a_0T - a_2 + b_1Y)(\lambda_{1Y} - 2T_x) + (b_6 + 3b_5 - 3b_4 - 3b_1T + b_3Y)(\lambda_{1T} + 2Y_x)$$
$$-3\gamma_1T^2 - 3\gamma_2TY + \gamma_3Y^2 + 3M_2\Phi_{1T} + Q_2(Y\Phi_{1Y} - \Phi_1) + 5V_0\Phi_{2Y}$$
$$+3V_1(2\Phi_2 - T\Phi_{2T} - 2Y\Phi_{2Y}) + b_0\lambda_{0Y} - 3a_0T\lambda_{0T} + b_1(\lambda_1 - 3T\lambda_{1T} - Y\lambda_{1Y})$$
$$-3b_7\lambda_{2T} + b_3(6T\lambda_{2T} + Y\lambda_{2Y} - 2\lambda_2) + ((b_6 + 3b_5 - 3b_4)_x - b_{3y})Y$$
$$+(3a_{2x} - 3a_{0t} + 4M_2b_0 + 2Q_2a_1 + 2S_1b_1 + 2V_0(2b_4 - b_5 - b_6) - 4V_2b_3)T$$
$$+3/4(a_{2t} - b_{2t} + (4a_4 - 5a_5 - a_6)_x + 3b_{5y} - b_{6y})/4 + 3K_1a_0 - 2K_2b_0$$
$$+M_1b_1 + Q_2a_3 - Q_1b_3 - 3V_1a_7 + 2V_2b_7 + 2V_0(a_8 - b_8),$$
$$\alpha_8 = 2(b_7 - b_3T)(2\lambda_{1T} - \lambda_{2Y} + Y_x) + 2b_3(\lambda_1 - Y\lambda_{1Y} - YT_x)$$
$$+2(2b_5 - b_4 - b_1T)(\lambda_{1Y} + T_x) + 2(-b_{7y} + b_{3y}T + b_{7x}Y - b_{3x}TY),$$

$$\beta_9 = -2b_7(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + \beta_3 T + 3Q_2\Phi_2 + \lambda_{1YY}\Phi_{2T} + (b_{3t} - 3b_{7x} + K_2 b_1 - (L_1 + L_2)b_3 + M_2(4b_4 - 5b_5 - b_6) + (5S_2 - P_1)b_7 + 3Q_2(a_8 - b_8))Y + 3(b_{8x} - a_{8x} - b_{7y} + K_1 b_1 + K_2 b_2 + L_2(b_4 - 2b_5) - 2Q_2 a_7 + S_2(a_8 - b_8)) + (b_6 + 3b_5 - 3b_4)_t - K_2 a_2 - 4M_1 b_3 + L_1(3b_4 - 2b_6) + M_2(3a_6 + 7a_5 - 8a_4) + (P_2 + S_1)b_7,$$

$$\alpha_9 = 2(b_7 - b_3 T)(\lambda_{1Y} - 2\lambda_{0T} - 4T_x) + 2b_3(Y\lambda_{0Y} - \lambda_0) + 2(b_4 - 2b_5 + b_1 T)\lambda_{0Y} + 2(b_{7t} - (b_{3t} + b_{7x})T + b_{3x}T^2). \tag{56}$$

Доказательство. Найдем условия совместности системы (46), (47). Если обозначить $T = \theta_t/\theta_x$, $Y = \theta_y/\theta_x$, то условие равенства производных θ_{tyy}, θ_{yyt} и θ_{tty}, θ_{tyt}, вычисленных с помощью дифференцирования выражений (46) по t, y, имеет вид (48). Дифференцирование (47) по t, x, y и сравнение смешанных производных третьего порядка функции φ приводят к двум соотношениям

$$B_{i1}M_{31} + B_{i2}M_{33} = 0, \tag{57}$$

где B_{ij}, $i, j = 1, 2$ введены в (55), и шести соотношениям

$$(G_0 + b_1 + \Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)M_{31} - a_0 M_{33} = 0, \tag{58}$$

$$b_3 M_{31} - (G_0 + \Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)M_{33} = 0, \tag{59}$$

$$(G_1 - 2b_4 - 2(G_0 + b_1)T + 2b_3 Y)M_{31} + (G_2 - a_2 + 2a_0 T + (b_1 - 2G_0)Y)M_{33} = 0, \tag{60}$$

$$(3G_2 + a_2 + 2b_2 - 4a_0 T - (4G_0 + b_1)Y + 2(\Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)Y)M_{31} + (2\Omega_2 - PS + 3\Omega_3\varphi_x/\theta_x)M_{31}^2 + 2b_0 M_{33} = 0, \tag{61}$$

$$(3G_2 - a_2 + (b_1 - 4G_0)Y + 2(\Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)Y)M_{33} + (2\Omega_2 - PS + 3\Omega_3\varphi_x/\theta_x)M_{31}M_{33} + 2(b_6 - b_5 - b_4 - b_1 T + 2b_3 Y)M_{31} = 0, \tag{62}$$

$$(3G_1 - 4b_6 - 4G_0 T - 4b_3 Y + 2(\Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)T)M_{33} - (2\Omega_2 - PS + 3\Omega_3\varphi_x/\theta_x)M_{33}^2 - 2b_7 M_{31} = 0, \tag{63}$$

где $\Omega_1 = 3/2Q_\theta - P_\varphi - 9/4Q^2 + 3PR$, $\Omega_2 = 3R_\theta - 3/2Q_\varphi + 2PS$, $\Omega_3 = S_\theta + 3/2QS$,

$$G_0 = F_{0x} - F_0^2 + P_1 F_0 + Q_2 F_2 - V_{1t} - (L_1 + F_1)V_1 - M_2 V_0,$$
$$G_1 = F_{1x} + (L_1 - F_1)F_0 + M_2 F_2 + b_6 - (K_1 V_1 + K_2 V_0)/2 + G_0 T + b_3 Y,$$
$$G_2 = F_{2x} + (S_1 - F_2)F_0 + S_2 F_2 - V_{0t} - M_1 V_1 - (L_2 + F_1)V_0 + a_0 T + G_0 Y.$$

Их алгебраическим следствием являются равенства

$$A_{k1}M_{31}^2 + A_{k2}M_{31}M_{33} + A_{k3}M_{33}^2 = 0, \tag{64}$$

где A_{kl}, $k, l = 1, 2, 3$, заданы формулами (55).

Чтобы найти условие совместности уравнений (48), (57), (64) с системой (46), (47), продифференцируем их по t (по y) и вычтем из них эти же уравнения, продифференцированные по x и умноженные на T (на Y). Это дает соотношения (49) и равенства вида (57), (64) с коэффициентами B_{ij}, $i = 3, 4, 5, 6$, A_{kl}, $k = 4, \ldots, 9$, определяемыми соотношениями (55). Тождество (50) является следствием равенства производных θ_{ty} и θ_{yt}. С использованием обозначений (56) уравнения (46) могут быть представлены в виде

$$T_t - TT_x - \lambda_0 + SM_{33}^2/\theta_x^3 = 0,$$
$$Y_t - TY_x - \lambda_1 - SM_{31}M_{33}/\theta_x^3 = 0, \quad Y_y - YY_x - \lambda_2 + SM_{31}^2/\theta_x^3 = 0.$$

Исключение из них слагаемых с S приводит к равенствам

$$(\lambda_0 + TT_x - T_t)M_{31} + (\lambda_1 + TY_x - Y_t)M_{33} = 0,$$
$$(\lambda_1 + TY_x - Y_t)M_{31} + (\lambda_2 + YY_x - Y_y)M_{33} = 0.$$

Чтобы получить условие равенства друг другу смешанных производных функции θ четвертого порядка, продифференцируем (60)–(63) по x и заменим производные θ четвертого порядка в силу уравнений (58), (59), продифференцированных по t, x, y. В случае уравнения (60) это приводит к тождеству, а для уравнений (61)–(63) дает соотношения

$$\begin{aligned}&\alpha_1 M_{31} + \beta_1 M_{33} - 3(\Gamma_1\theta_x + \Gamma_2\varphi_x)M_{31}^2 = 0,\\ &\alpha_2 M_{31} + \beta_2 M_{33} - 3(\Gamma_1\theta_x + \Gamma_2\varphi_x)M_{31}M_{33} = 0,\\ &\alpha_3 M_{31} + \beta_3 M_{33} + 3(\Gamma_1\theta_x + \Gamma_2\varphi_x)M_{33}^2 = 0,\end{aligned} \tag{65}$$

где $\Gamma_1 = P_{\varphi\varphi} - 2Q_{\theta\varphi} + R_{\theta\theta} + P(2S_\theta - 3R_\varphi) + 3Q(2Q_\varphi - R_\theta) - 3RP_\varphi + SP_\theta$,
$\Gamma_2 = Q_{\varphi\varphi} - 2R_{\theta\varphi} + S_{\theta\theta} - PS_\varphi + 3QS_\theta + 3R(Q_\varphi - 2R_\theta) + S(3Q_\theta - 2P_\varphi)$. Алгебраическим следствием уравнений (65) является

$$\alpha_2 M_{31}^2 + (\beta_2 - \alpha_1)M_{31}M_{33} - \beta_1 M_{33}^2 = 0, \quad \alpha_3 M_{31}^2 + (\beta_3 + \alpha_2)M_{31}M_{33} + \beta_2 M_{33}^2 = 0.$$

Продифференцировав второе уравнение (65) по y, t и составив, соответственно, сумму с первым уравнением (65), продифференцированным по t, и разность с третьим, продифференцированным по y, получим соотношения

$$\begin{aligned}&2\alpha_4 M_{31} + 2\beta_4 M_{33}\\ &\quad +3\Gamma_2[\lambda_{0TY}M_{31}^2 + (2\lambda_{1TY} - \lambda_{0TT})M_{31}M_{33} - \lambda_{1TT}M_{33}^2]M_{31}/\theta_x = 0,\\ &2\alpha_5 M_{31} + 2\beta_5 M_{33}\\ &\quad +3\Gamma_2[\lambda_{0TY}M_{31}^2 + (2\lambda_{1TY} - \lambda_{0TT})M_{31}M_{33} - \lambda_{1TT}M_{33}^2]M_{33}/\theta_x = 0.\end{aligned} \tag{66}$$

Для исключения Γ_2 используем соотношения

$$\begin{aligned}&\alpha_6 M_{31} + \beta_6 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{31}^3/\theta_x = 0,\ \alpha_7 M_{31} + \beta_7 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{31}^2 M_{33}/\theta_x = 0,\\ &\alpha_8 M_{31} + \beta_8 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{31}M_{33}^2/\theta_x = 0,\ \alpha_9 M_{31} + \beta_9 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{33}^3/\theta_x = 0,\end{aligned} \tag{67}$$

которые получаются при дифференцировании (61), (63) по y, t и замене производных θ в силу уравнений (46), дважды продифференцированных по x. Алгебраическим следствием (66), (67) являются равенства вида (64) с коэффициентами A_{kl}, $k = 12, 13, 14, 15$. Подстановка (67) в (66) дает еще два соотношения вида (57), коэффициенты B_{91}, B_{92}, $B_{10,1}$, $B_{10,2}$ которых определяются формулами (55).

Таким образом, при исследовании совместности системы (47) получены десять уравнений (57) линейных по M_{31}, M_{33} и пятнадцать уравнений (64) второй степени по M_{31}, M_{33}. Их условиями совместности являются равенства (51)–(54), которые добавляются к условиям совместности (48)–(50) уравнений (46).

Система (46), (47) совместна в том случае, когда совместна система уравнений (48)–(54) относительно T, Y. Эта система делится на подсистему уравнений (48), (49) и (51)–(54) с $i,j = 1,2$, $k,l,m = 1,2,3$, алгебраических относительно T, Y, и подсистему дифференциальных уравнений, содержащую уравнения (50) и остальные уравнения (51)–(54). Система (48)–(54) совместна при условии, что подсистема алгебраических уравнений разрешима относительно величин T, Y, а их подстановка в оставшиеся уравнения системы приводит к тождествам. Теорема доказана.

Заметим, что в большинстве случаев для того чтобы установить, что уравнение в системе двух ОДУ не отделяется, бывает достаточно исследовать совместность алгебраической подсистемы уравнений (48)–(54). Если она оказывается совместной, и подстановка ее решения T, Y в оставшиеся уравнения (48)–(54) не приводит к противоречивым равенствам, то замена переменных (2), приводящая данную систему ОДУ к виду (11), (12), находится из совместной системы уравнений $\theta_t/\theta_x = T$, $\theta_y/\theta_x = Y$, (46), (47), (57)–(64).

Чтобы проверить, не приводится ли система (6) к виду (11), (12) преобразованием (2), в котором $\theta_y \neq 0$, достаточно в системе (6) сделать подстановку $\tilde{x} = y$, $\tilde{y} = x$ и применить к ней теорему 4.

5. Пример системы с отделяющимся уравнением

Пример 3. Продолжим рассмотрение системы (43) и найдем, при каких Γ, U в ней отделяется уравнение в результате преобразования (2) с $\theta_x \neq 0$. Первое условие (48) и условия (52) при $k = 1, 2$, $j = 2$ имеют вид

$$\begin{aligned}&(Y^2+1)(Y\Gamma_x - \Gamma_y) = 0, \quad \Gamma_x((Y^2-1)\Gamma_x - 2Y\Gamma_y)^2 = 0,\\ &(2Y\Gamma_x - \Gamma_y)((Y^2-1)\Gamma_x - 2Y\Gamma_y)^2 = 0,\end{aligned}$$

откуда следует $\Gamma_x = 0$, $\Gamma_y = 0$.

Если $\Gamma = \Gamma(t)$, то все соотношения (53), (54) становятся тождествами, а наиболее простые из условий (51) имеют вид

$$Y_x\Psi = 0, \qquad (Y_y - YY_x)\Psi = 0, \qquad (Y_t - TY_x + (Y^2+1)\Gamma)\Psi = 0, \tag{68}$$

где $\Psi = U_{xx} - U_{yy} + 2Y(U_{xy} - \Gamma')$. Пусть $\Psi \neq 0$ и $\Gamma = \gamma'(t)/2$, тогда $Y_x = 0$, $Y_y = 0$, $Y_t + (Y^2+1)\gamma'/2 = 0$. Подстановка $Y = -\mathrm{tg}(\gamma/2)$ во второе равенство (48)

$$Y^2(\Gamma' - U_{xy}) + Y(U_{yy} - U_{xx}) + \Gamma' + U_{xy} = 0 \tag{69}$$

с точностью до замены $\tilde\gamma = \gamma \pm \pi/2$ приводит к уравнению (44) относительно $U(t, x, y)$.

Если $\Psi = 0$, то все условия теоремы 4 сводятся к совместной системе уравнений

$$4V^2 + W^2 = 4\Gamma'^2, \quad 2(V - \Gamma')V_y + WV_x = 0, \quad 2(V - \Gamma')W_y + WW_x = 0, \tag{70}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma'V_xT + V\Gamma'' - \Gamma'V_t - \Gamma\Gamma'W = 0, &&2(V-\Gamma')T_y + WT_x = 4\Gamma\Gamma',\\ &\Gamma'W_xT + W\Gamma'' - \Gamma'W_t + 4\Gamma\Gamma'V = 0, &&2(V-\Gamma')Y + W = 0,\end{aligned} \tag{71}$$

где $T = \theta_t/\theta_x$, $Y = \theta_y/\theta_x$. Предполагается, что $V \pm \Gamma' \neq 0$, $\Gamma' \neq 0$, иначе из первого уравнения (70) следует, что система (43) является линейной. Пусть функция $U(t, x, y)$ удовлетворяет трем соотношениям (70), тогда из уравнений (71) находится θ. Кроме того, $A_{31} = V - \Gamma'$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 0$, и из (64) следует $M_{31} = 0$, что эквивалентно уравнению

$$2(V - \Gamma')\varphi_y + W\varphi_x = 0 \tag{72}$$

относительно φ. Решение θ, φ этого уравнения и уравнений (71) необходимо подставить в систему (46), (47), чтобы окончательно определить вид функций θ, φ в преобразовании (2). Поскольку из соотношений $\theta_t - T\theta_x = 0$, $\theta_y - Y\theta_x = 0$ функция θ определяется как функция одного аргумента, то система (46) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно этой функции. Функция φ из уравнения (72) определяется как функция двух аргументов, и ее постановка превращает (47) в совместную систему относительно этой функции. В качестве φ можно взять любое частное решение этой системы, выбранное так, чтобы соответствующее преобразование (2) было невырожденным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Lie *Gesammelte Abhandlungen.* Vol. 5. Leipzig: Teubner, 1924.
2. C. Ferrario, G. Lo Vecchio, G. Marmo, G. Morandi, C. Rubano *A separability theorem for dynamical systems admitting alternative Lagrangian descriptions* // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. Vol. 20, № 11. P. 3225–3236.
3. E. Martinez, J.F. Cariñena, W. Sarlet *Geometric characterization of separable second-order equations* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1993. Vol. 113. P. 205–224.
4. F. Cantrijn, W. Sarlet, A. Vandecasteele, E. Martinez *Complete separability of time-dependent second-order ordinary differential equations* // Acta Appl. Math. 1996. Vol. 42, № 3. P. 309–334.
5. M. Kossowski, G. Thompson *Submersive second order ordinary differential equations* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1991. Vol. 110, № 1. P. 207–224.
6. M. de Leon, D.M. de Diego *Nonautonomous submersive second-order differential equations and lie symmetries* // Int. J. Theor. Phys. 1994. Vol. 33, № 8. P. 1759–1781.

7. M.E. Fels *The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations* // Proc. London Math. Soc. 1995. Vol. 71, № 1. P. 221–240.
8. S. Neut, M. Petitot, R. Dridi *Elie Cartan's geometrical vision or how to avoid expression swell* // J. Symb. Comput. 2009. Vol. 44, № 3. P. 261–270. (`arXiv: math.DG/0504203`)
9. Yu.Yu. Bagderina *Linearization criteria for a system of two second-order ordinary differential equations* // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. Vol. 43, № 46. P. 465201.
10. Багдерина Ю.Ю. *Разделение уравнений в системах двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка* // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Казан. матем. об-во, 2010. Т. 40. С. 37–45.
11. R.A. Sharipov *On the point transformations for the equation* $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // e-print arXiv: solv-int/9706003 (1997).

Юлия Юрьевна Багдерина,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `yulya@mail.rb.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 28-64.

УДК 517.928:517.984

ВОЗМУЩЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА УЗКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ В n-МЕРНОЙ ОБЛАСТИ

А.Р. БИКМЕТОВ, Р.Р. ГАДЫЛЬШИН

Аннотация. Исследуется дискретный спектр эллиптического оператора второго порядка в n-мерной области, $n \geqslant 2$, возмущенного потенциалом, зависящим от двух малых параметров, один из которых описывает диаметр носителя потенциала, а обратное значение второго соответствует максимуму абсолютного значения потенциала. Приведено соотношение между этими параметрами, при котором имеет место обобщенная сходимость возмущенного оператора к невозмущенному. При выполнении этого соотношения построены асимптотики по малым параметрам собственных значений возмущенного оператора.

Ключевые слова: Эллиптический оператор, возмущение, согласование асимптотический разложений.

1. Введение

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, причем, Ω может и совпадать с $\mathbb{R}^n$, $a_{ij}(x)$, $a(x)$ – локально интегрируемые функции в Ω такие, что

$$\int\limits_{\Omega} a(x)|u(x)|^2 dx \geqslant c(a)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad c(a) > 0, \tag{1.1}$$

для любых функций u из $L_2(\Omega)$, для которых этот интеграл существует, $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\alpha_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \qquad \alpha_1 > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{1.2}$$

Так как

$$\mathfrak{h}_0(u,v) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} + (au, v)_{L_2(\Omega)} \tag{1.3}$$

является в силу (1.1) и (1.2) полуторалинейной положительной симметрической формой, то будем рассматривать ее как скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ всех функций, для которых

$$\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} := \sqrt{\mathfrak{h}_0(u,u)} < \infty.$$

Так как $\widetilde{W}_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ в силу (1.1) и (1.2), то квадратичная форма

$$\mathfrak{h}_0[u] := \mathfrak{h}_0(u,u) \tag{1.4}$$

замкнута в $L_2(\Omega)$ (см., например, [1, глава VI, теорема 1.1]). А так как подмножество функций из $C^\infty(\Omega)$, равных нулю в окрестности границы $\partial\Omega$ (если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$) и при больших x

A.R. Bikmetov, R.R. Gadyl'shin, Perturbation of an elliptic operator by a narrow potential in an n-dimensional domain.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (12-01-00445) и ФЦП (02.740.110612).
Поступила 10 мая 2012 г.

(если Ω неограниченная область), очевидно, является подмножеством $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и плотно в $L_2(\Omega)$, то и квадратичная форма $\mathfrak{h}_0$ плотно определена в $L_2(\Omega)$. Следовательно (см., например, [1, глава VI, теоремы 2.1,2.6]), существует ассоциированный с $\mathfrak{h}_0$ самосопряженный оператор $\mathcal{H}_0$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{h}_0) = \widetilde{W}_2^1(\Omega)$$

(т.е. такой, что $(\mathcal{H}_0 u, v)_{L_2(\Omega)} = \mathfrak{h}_0(u, v)$ для любых u, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$).

Всюду далее, не ограничивая общности, будем считать, что начало координат лежит в Ω. Обозначим

$$\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}[u] := \mathfrak{h}_0[u] + \mu^{-1} \left(V_\varepsilon u, u\right)_{L_2(\Omega)}, \tag{1.5}$$

где

$$0 < \varepsilon \ll 1, \qquad \mu(\varepsilon) > 0,$$

V_ε — семейство равномерно ограниченных по ε функций из $L_\infty(\Omega)$, носители которых лежат в n-мерном шаре радиуса $\gamma\varepsilon$ с центром в начале координат для некоторого $\gamma > 0$.

Так как квадратичная форма $\mu^{-1} \left(V_\varepsilon u, u\right)_{L_2(\Omega)}$, очевидно, ограничена на $L_2(\Omega)$, то квадратичная форма $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ замкнута и плотно определена в $L_2(\Omega)$, причем, $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}) = \widetilde{W}_2^1(\Omega)$. Обозначим через $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ самосопряженный оператор, ассоциированный с квадратичной формой $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}[u]$.

Замечание 1.1. *Если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, то обозначим через $\widetilde{W}_{2,0}^1(\Omega)$ замыкание по норме $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ подмножества функций из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega$. Легко видеть, что квадратичные формы $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$, определяемые на $\widetilde{W}_{2,0}^1(\Omega)$ равенствами (1.3), (1.4) и (1.5), соответственно, являются симметричными, замкнутыми и плотно определенными в $L_2(\Omega)$. Для самосопряженных операторов, ассоциированных с этими формами, сохраним обозначение $\mathcal{H}_0$.*

В первой части работы доказывается сходимость собственных значений оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ к собственным значениям оператора $\mathcal{H}_0$ (в случае существования последних), когда

$$\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon) = o\,(1)\,, \tag{1.6}$$

где $\beta_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 \left|\ln \varepsilon\right|$, $\beta_n(\varepsilon) = \varepsilon^2$ при $n \geqslant 3$.

Ясно, что если, например,

$$\begin{aligned} &V_\varepsilon(x) = V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad V \in C_0^\infty(\Omega), \\ &a_{ij},\, a \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{если } \Omega = \mathbb{R}^n, \\ &a_{ij},\, a \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \partial\Omega \in C^\infty, \quad \text{если } \Omega \neq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.7}$$

то операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ являются расширениями по Фридрихсу дифференциальных операторов H_0 и $H_{\mu,\varepsilon}$ в $L_2(\Omega)$, определяемых соответственно как

$$H_0 u := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u, \qquad H_{\mu,\varepsilon} = H_0 u + \mu^{-1} V_\varepsilon(x) u \tag{1.8}$$

на функциях, удовлетворяющих при $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ дополнительно граничному условиям Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\cos(x_i, \mathbf{n}) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, если операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ ассоциированы с квадратичными формами, определенными на $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, и граничному условию Дирихле

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

если операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ ассоциированы с квадратичными формами, определенными на $\widetilde{W}^1_{2,0}(\Omega)$.

Во основной второй части статьи при выполнении условий (1.7) будут построены полные асимптотические разложения собственных значений оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, сходящихся к собственным оператора $\mathcal{H}_0$ как в случае простого предельного собственного значения оператора $\mathcal{H}_0$, так и в случае двукратного. Однако для строгого обоснования построенных асимптотик придется наложить более жесткое (нежели (1.6)) ограничение:

$$\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\tau}\right), \tag{1.9}$$

где $\tau > 0$ — любое число.

Как будет видно из дальнейшего вывода полных асимптотик собственных значений, для их формального построения достаточно было бы потребовать лишь бесконечную дифференцируемость функций $a_{ij}(x)$, и $a(x)$ в окрестности нуля. Более жесткие условия (1.7) наложены лишь для того, чтобы избежать несущественной, но громоздкой детализации в обозначениях и доказательствах.

Заметим, что краевые задачи для оператора Лапласа в ограниченных областях с подобными возмущениями, зависящими от одного параметра, рассматривались в [2], [3]. В [2] для трехмерной области была доказана сходимость собственных значений в случае $\mu = \varepsilon^{\tau}$, $\tau < 2$ и построена асимптотика собственного значения возмущенной краевой задачи, сходящегося к простому собственному значению предельной задачи. В [3] для n-мерной ограниченной области была доказана сходимость собственного значения возмущенного оператора в случае, когда $\mu = \varepsilon^{\tau}$, $\tau < 1$, а собственное значение предельного оператора — простое, и построена его двучленная асимптотика. В обеих этих работах при доказательстве сходимости существенным была компактность вложения W^1_2 в L_2 для ограниченных областей. Как уже упоминалась выше, асимптотики строились только для случая простого собственного значения предельной задачи. Причем, для задачи в трехмерной области, рассмотренной в [2], дополнительно предполагалось, что, во-первых, собственная функция предельной задачи не обращается в нуль в точке сжатия носителя возмущающего потенциала, а во-вторых, среднее значение (интеграл) этого потенциала не равно нулю. В [3] при построении двучленной асимптотики были сняты два последних ограничения, но наложено более жесткое (по сравнению [2]) условие на рост возмущающего потенциала ($\tau < 1$). Как будет показано ниже (см. замечание 2.1), влияние равенства нулю среднего значения возмущающего потенциала на первый член теории возмущений существенно различно для случаев $\tau < 1$ и $\tau > 1$. В заключении раздела заметим, что подобные возмущения дифференциального оператора второго порядка в одномерном случае рассматривались в [4],[5],[6].

2. Формулировка основных утверждений

В следующем разделе будет доказана

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие (1.6). Тогда имеет место сходимость $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon} \to \mathcal{H}_0$ при $\varepsilon \to 0$ в обобщенном смысле (резольвентная сходимость).*

Из этой теоремы и [1, глава IV, теорема 3.16] вытекает

Следствие 1. *Пусть λ_0 — собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$ кратности m и выполнено равенство (1.6). Тогда при $\varepsilon \to 0$ к λ_0 сходятся собственные значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,j}$ оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, совокупная кратность которых также равна m, а для соответствующего проектора $\mathcal{P}_{\mu,\varepsilon}$ имеет сходимость по норме к проектору $\mathcal{P}_0$, соответствующему собственному значению λ_0.*

Основным содержанием работы, которому посвящена остальная часть статьи, является доказательство методом согласования асимптотических разложений [7], [8], сформулированных ниже теорем 2.2–2.4, при выполнении дополнительных условий гладкости (1.7), более жесткого требования (1.9) на отношение параметров ε и μ и не ограничивающего общности условия $a_{ij}(0) = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера.

Прежде, чем перейти к формулировки основных теорем, введем некоторые обозначения:

$$\langle g\rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx, \qquad \langle g\rangle_i := \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i g(x)\,dx, \qquad \langle g\rangle_{ij} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i x_j g(x)\,dx,$$

$$\mathcal{G}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln r \quad \text{при } n = 2, \qquad \mathcal{G}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)|S_n|}r^{-n+2} \quad \text{при } n \geqslant 3,$$

$$z_0^{(1)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y)V(y)dy.$$

Здесь и всюду далее, $|S_n|$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Положим $\delta(n) = 0$ при нечетных n и $\delta(n) = 1$ при нечетных n.

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие (1.9), λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция.*

Тогда, если и $\psi_0(0) \neq 0$, то собственное значение $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, сходящееся к λ_0, имеет асимптотику

$$\begin{aligned}\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\lambda_{n+i,j+1}\varepsilon^i\mu^{-j} \\ + d(n)\varepsilon^{2n}\mu^{-2}\ln\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty}\lambda_{2n+i,j+2,p+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon,\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\lambda_{n,1} = \psi_0^2(0)\langle V\rangle, \tag{2.2}$$

$$\lambda_{n+2,2} = -\psi_0^2(0)\left\|\nabla z_0^{(1)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.3}$$

Если, к тому же, $a_{ij}(x) \equiv \delta_j^i$ (т.е. $H_0 = -\Delta + a(x)$), то

$$\lambda_{n+1,1} = (n-2)\psi_0(0)\sum_{m=1}^{n}\langle V\rangle_m\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0), \qquad n \geqslant 3, \tag{2.4}$$

$$\lambda_{3,1} = \psi_0(0)\sum_{m=1}^{2}\langle V\rangle_m\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0), \qquad n = 2. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. *Из теоремы следует, что если $\langle V\rangle = 0$, то*

$$\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\left(\lambda_{n+1,1} + o(1)\right), \quad \text{если } \varepsilon = o(\mu),$$
$$\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^{n+2}\mu^{-2}\left(\lambda_{n+2,2} + o(1)\right), \quad \text{если } \mu = o(\varepsilon).$$

То есть при $\langle V\rangle = 0$ порядок малости первого члена теории возмущений для $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ заметно различается для случаев $\varepsilon = o(\mu)$ и $\mu = o(\varepsilon)$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.*

Тогда, если и $\psi_0(0)=0$*, то собственное значение* $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ *оператора* $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$*, сходящееся к* λ_0*, имеет асимптотику*

$$\begin{aligned}\lambda^{\mu,\varepsilon} =&\lambda_0+\varepsilon^{n+2}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\lambda_{n+2+i,j+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\\ &+d(n)\varepsilon^{2n+2}\mu^{-2}\ln\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon\lambda_{2n+i+2,j+2,p+1},\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\lambda_{n+2,1}=\nabla\psi_0(0)\mathcal{V}\nabla\psi_0(0), \tag{2.7}$$

а $\mathcal{V}$ *— симметричная* $n\times n$*-матрица с компонентами* $\langle V\rangle_{km}$.

Пусть λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. Из следствия 1 вытекает, что для сходящихся к λ_0 собственных значений оператора $H_{\mu,\varepsilon}$ возможны следующие случаи: либо это два простых собственных значения, либо это одно двукратное собственное значение, либо для разных ε имеет место один из этих вариантов. И даже, если к λ_0 сходится два простых собственных значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$, то нельзя утверждать, что соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции $\psi^{\mu,\varepsilon,j}$ имеют предел. Следствие 1 лишь гарантирует, что из любой последовательности $\varepsilon_k\to 0$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_m}\to 0$ такую, что на ней имеет место сходимость $\psi^{\mu,\varepsilon,j}\to\psi_0^{(j)}$ в $L_2(\Omega)$, где $\psi_0^{(j)}$ — ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора $\mathcal{H}_0$, соответствующие λ_0. Однако, эти пределы могут меняться в зависимости от выбора подпоследовательности $\varepsilon_{k_m}\to 0$.

В работе рассматривается случай наиболее общего положения:

$$|\psi_0^{(1)}(0)|+|\psi_0^{(2)}(0)|\neq 0. \tag{2.8}$$

Тогда, очевидно, эти собственные функции можно выбрать так, что

$$\psi_0^{(1)}(0)\neq 0, \qquad \psi_0^{(2)}(0)=0. \tag{2.9}$$

Будет доказана следующая

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие (1.9),* $\langle V\rangle\neq 0$*,* λ_0 *— двукратное собственное значение оператора* $\mathcal{H}_0$*,* $\psi_0^{(1)}$ *и* $\psi_0^{(2)}$ *— соответствующие ортонормированные в* $L_2(\Omega)$ *собственные функции, удовлетворяющие условию (2.8) и выбранные в соответствии с (2.9).*

Тогда существуют два простые собственные значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ *и* $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$ *оператора* $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$*, сходящееся к* λ_0*, и они имеют асимптотики*

$$\begin{aligned}\lambda^{\mu,\varepsilon,1} =& \lambda_0+\varepsilon^{n}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\lambda^{(1)}_{n+i,j+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\\ &+d(n)\varepsilon^{2n}\mu^{-2}\ln\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon\lambda^{(1)}_{2n+i,j+2,p+1},\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{\mu,\varepsilon,2} =&\lambda_0+\varepsilon^{n+2}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\lambda^{(2)}_{n+2+i,j+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\\ &+d(n)\varepsilon^{2n+2}\mu^{-2}\ln\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon\lambda^{(2)}_{2n+i+2,j+2,p+1},\end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$\lambda_{n,1}^{(1)} = \left(\psi_0^{(1)}(0)\right)^2 \langle V \rangle , \tag{2.12}$$

$$\lambda_{n+2,1}^{(2)} = \nabla\psi_0^{(2)}(0)\widetilde{\mathcal{V}}\nabla\psi_0^{(2)}(0), \tag{2.13}$$

$\widetilde{\mathcal{V}}$ *— симметричная $n \times n$-матрица с компонентами*

$$\langle V \rangle_{mi} - (n-2)\frac{\langle V \rangle_m \langle V \rangle_i}{\langle V \rangle}, \quad n \geqslant 3, \qquad \langle V \rangle_{mi} - \frac{\langle V \rangle_m \langle V \rangle_i}{\langle V \rangle}, \quad n = 2,$$

а соответствующие собственные функции $\psi^{\mu,\varepsilon,s}$ сходятся к $\psi_0^{(s)}$ в $L_2(\Omega)$.

Из теоремы, в частности, следует, что если выполнено условие (2.8) и $\langle V \rangle \neq 0$, то двукратное собственное значение λ_0 при рассматриваемом возмущении расщепляется на два простых собственных значения, а соответствующие собственные функции сходятся к собственным функциям оператора $\mathcal{H}_0$, выбранным в соответствии с (2.9).

В работе также построены полные асимптотические разложения соответствующих собственных функций.

3. Доказательство теоремы 2.1

Из определения квадратичных форм $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ и функции V следует, что, во-первых, эти формы ограничены снизу, а во-вторых, справедлива следующая оценка:

$$|(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon} - \mathfrak{h}_0)[u]| = \mu^{-1}\left|\int\limits_{\Omega} V_\varepsilon(x)|u(x)|^2 dx\right| \leqslant C\mu^{-1}\int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon} |u(x)|^2 dx, \tag{3.1}$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от ε.

Пусть B — n-мерный шар с центром в начале координат и радиусом, равным трем. Не ограничивая общности, будем считать, что $\overline{B} \subset \Omega$. Из ([9, Гл. 3, лемма 5.1]) и [10] для $n \geqslant 3$ и $n = 2$ соответственно следует, что для любой функции $v \in C_0^\infty(B)$ справедливо неравенство:

$$\int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon} |v(x)|^2 dx \leqslant C_1(\gamma)\beta_n(\varepsilon)\int\limits_{B} |\nabla v(x)|^2 dx, \tag{3.2}$$

где константа C_1 не зависит от ε. Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$.

Так как $\widetilde{W}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ в силу (1.1), (1.2), то для любой функции $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ согласно (3.2), (1.1), (1.2) последовательно получаем, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon} |u(x)|^2 dx = \int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon} |u(x)\chi(|x|)|^2 dx \leqslant C_1\beta_n(\varepsilon)\int\limits_{B} |\nabla(u(x)\chi(|x|))|^2 dx \\ \leqslant C_2\beta_n(\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\left(|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2\right) dx \leqslant C_3\beta_n(\varepsilon)\mathfrak{h}_0[u],\end{aligned}$$

где C_2, C_3 — некоторые постоянные, независящие от u. Из этого неравенства и неравенства (3.1) вытекает, что

$$|(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon} - \mathfrak{h}_0)[u]| \leqslant C_3 C\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon)\mathfrak{h}_0[u]$$

для любой функции $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega) = \mathcal{D}(\mathfrak{h}_0) = \mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon})$. Так как квадратичные формы $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ плотно определены в $L_2(\mathbb{R})$, ограничены снизу и замкнуты, а $\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу (1.6), то из последней оценки и [1, Глава VI, теорема 3.6] следует справедливость утверждения доказываемой теоремы.

4. Вспомогательные утверждения

Всюду далее в тексте считаются выполненными условия (1.7) на функцию V_ε и коэффициенты дифференциального выражения H_0, определенного в (1.8), и не ограничивающее общности предположение, что $a_{ij}(0) = \delta_i^j$, где, напомним, δ_i^j — символ Кронекера.

Также, всюду далее, $r = |x|$, через $P_k(x)$, $Q_k(x)$ и $R_k(x)$ будем обозначать однородные полиномы степени k, через $Y_k(x)$, $Z_k(x)$ — однородные гармонические полиномы степени k, а через $Q_{i,j}(x, D)$ — однородные полиномы степени j относительно символа дифференцирования $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_q = \partial/\partial x_q$, коэффициентами которых являются однородные полиномы степени i. Для целых j под $T_j(x)$ будем понимать однородные функции степени k, представимые в виде $R_{j+k}(x)r^{-k}$ хотя бы для какого-нибудь целого k.

В этих обозначениях для дифференциального выражения H_0 при $r \to 0$ справедливо представление

$$H_0 = -\Delta + \sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(x, D) + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(x, D) + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x, D). \tag{4.1}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ множество рядов вида

$$\mathcal{E}(x) = \Phi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(x), \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x) =& b \ln r + c, \qquad \Phi_j(x) = r^{-2j} P_{3j}(x) + \ln r R_j(x) \quad \text{при } n = 2, j \geqslant 1,\\
\Phi_0(x) =& b r^{2-n} \quad \text{при } n \geqslant 3,\\
\Phi_j(x) =& r^{2-n-2j} P_{3j}(x) \quad \text{при } n \geqslant 4, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3,\\
\Phi_j(x) =& r^{2-n-2j} P_{3j}(x) + \delta(n) \ln r R_{j+2-n}(x) + (1 - \delta(n)) Q_{j+2-n}(x)\\
& \quad \text{при } n \geqslant 3, \ j \geqslant n-2,
\end{aligned}$$

а b, c — произвольные числа. Напомним, что $\delta(n) = 0$ при нечетных n и $\delta(n) = 1$ при четных n.

При целых $m \geqslant 1$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ множество рядов вида (4.2), где

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x) =& Z_m(x) r^{-2m+2-n} \quad \text{при } n \geqslant 2,\\
\Phi_j(x) =& \sum_{s=0}^{2j-1} Z_{m+3j-2s}(x) r^{-2m+2-n-2j+2s}\\
& \text{при } n \geqslant 3, \quad m \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+m-3\\
& \text{и при } n = 2, \quad m \geqslant 2, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1,\\
\Phi_m(x) =& P_{4m}(x) r^{-4m} \quad \text{при } n = 2, \quad j = m,\\
\Phi_j(x) =& P_{m+3j}(x) r^{-2m+2-n-2j} + \delta(n) \ln r \, R_{j-m-n+2}(x)\\
& + (1 - \delta(n)) Q_{j-m-n+2}(x)\\
& \text{при } n \geqslant 3, \quad j \geqslant n+m-2 \quad \text{и при } n = 2, \quad j \geqslant m+1.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}^m$ множество рядов, представимых в виде сумм рядов из $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ при $j \leqslant m$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{A}}^k$. Тогда существует ряд $\mathcal{E} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$, имеющий главный член $\Phi_0(x) = Z_k(x) r^{-2k+n-2}$ при $k \geqslant 1$, где Z_k — произвольный гармонический полином, и* *главные члены* $\Phi_0(x) = b\ln r + c$ *при* $n = 2$, $k = 0$ *и* $\Phi_0(x) = br^{2-n}$ *при* $n \geqslant 3$, $k = 0$, *где* b, c *— произвольные постоянные, такой что справедливы равенства:*

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_0 =&0, \qquad \Delta\Phi_1 = (Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D))\,\Phi_0,\\ \Delta\Phi_j =&\sum_{i=2}^{j}(Q_{i,2}(x,D) + Q_{i-1,1}(x,D) + Q_{i-2,0}(x,D))\,\Phi_{j-i}\\ &+ (Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D))\,\Phi_{j-1} - \lambda_0\Phi_{j-2} - \widetilde{\Phi}_{j-2} \qquad \text{при } j \geqslant 2,\end{aligned}$$

где Φ_q, $\widetilde{\Phi}_q$ *— члены рядов* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{F}$ *соответственно.*

Справедливость этого утверждения показана в доказательстве теоремы 1.1 из [11].

Обозначим через $\mathcal{A}_k$ множество функций $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ при $\Omega = \mathbb{R}^n$ и множество функций $u \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ при $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, имеющих в нуле дифференцируемую асимптотику из $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ и таких, что $u\varkappa$ принадлежит области определения оператора $\mathcal{H}_0$ для любой срезающей функции $\varkappa \in C^\infty(\Omega)$, тождественно равной нулю в окрестности начала координат, и такой, что $\operatorname{supp}(1-\varkappa) \subset \Omega$. Через $\mathcal{A}^m$ обозначим множество функций, представимых в виде сумм функций из $\mathcal{A}_j$ при $j \leqslant m$.

Лемма 4.2. *Пусть* $n + k \geqslant 3$, $F \in \mathcal{A}^k$. *Тогда существует функция* $E \in \mathcal{A}_k$, *имеющая главный член асимптотики в нуле* $\Phi_0(x) = Z_k(x)r^{-2k+n-2}$ *при* $k \geqslant 1$, *где* Z_k *— любой заданный гармонический полином, и главный член асимптотики в нуле* $\Phi_0(x) = br^{2-n}$ *при* $k = 0$, *где* b *— любая заданная постоянная, такая что*

$$H_0E = \lambda_0E + F + \Lambda\psi_0 \quad \text{в } \Omega\backslash\{0\} \tag{4.3}$$

при некотором числе Λ, *если* λ_0 *— простое собственное значение оператора* $\mathcal{H}_0$, *и уравнения*

$$H_0E =\lambda_0E + F + \Lambda^{(1)}\psi_0^{(1)} + \Lambda^{(2)}\psi_0^{(2)} \quad \text{в } \Omega\backslash\{0\} \tag{4.4}$$

при некоторых числах $\Lambda^{(k)}$, *если* λ_0 *— двукратное собственное значение оператора* $\mathcal{H}_0$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{A}}^k$ асимптотическое разложение в нуле функции $F(x)$, через $\mathcal{E} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$ — ряд, удовлетворяющий утверждению леммы 4.1, а через $\mathcal{E}_N(x)$ — частичную сумму ряда $\mathcal{E}(x)$ до членов $O\left(r^N\ln r\right)$ включительно, $N \geqslant 4$. Функцию $E(x)$ будем искать в виде

$$E_N(x) = (1-\varkappa(x))\mathcal{E}_N(x) + \widetilde{E}_N(x), \tag{4.5}$$

где $\widetilde{E}_N \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$.

Рассмотрим случай, когда λ_0 — простое собственное значение. Из (4.3) и (4.4) в силу леммы 4.1 получаем уравнение на $\widetilde{E}_N$:

$$\mathcal{H}_0\widetilde{E}_N = \lambda_0\widetilde{E}_N + \widetilde{F}_N + \Lambda(N)\psi_0, \tag{4.6}$$

где $\widetilde{F}_N \in L_2(\mathbb{R}^n)\cap C^{N-3}(\mathbb{R}^n)$, если $\Omega = \mathbb{R}^n$, и $\widetilde{F}_N \in L_2(\Omega)\cap C^{N-1}(\overline{\Omega})$, если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Из необходимого и достаточного условия разрешимости этого уравнения следует, что при

$$\Lambda(N) = -\left(\widetilde{F}_N, \psi_0\right)_{L_2(\Omega)}$$

уравнение (4.6) имеет решение $\widetilde{E}_N \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$, а из теорем о повышении гладкости для решений эллиптических краевых задач последовательно вытекает, что $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{E}_N \in C^{N-1}(\mathbb{R}^n)$, если $\Omega = \mathbb{R}^n$, и $\psi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\widetilde{E}_N \in C^{N-1}(\overline{\Omega})$, если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Покажем, что $\Lambda(N)$ не зависит от N. Обозначим

$$E_{N,M}(x) := E_N(x) - E_M(x), \qquad N < M.$$

Тогда по построению, во-первых, $E_{N,M} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$, а во-вторых,

$$\mathcal{H}_0 E_{N,M} = \lambda_0 E_{N,M} + (\Lambda(N) - \Lambda(M))\,\psi_0.$$

Отсюда следует, что, во-первых, $\Lambda(N) = \Lambda(M)$ (т.е. $\Lambda(N)$ от N не зависит), а во-вторых, $E_{N,M}(x) = b_{N,M}\psi_0(x)$. Легко видеть, что, если при $N \geqslant 5$ функции E_N нормализовать, например, условием $(E_{N,4}, \psi_0)_{L_2(\Omega)} = 0$, то они не зависят от N также. Поэтому из (4.5) и произвола в выборе N вытекает, что $E \in \mathcal{A}_k$.

Справедливость утверждения леммы для случая, когда λ_0 является простым собственным значением оператора $\mathcal{H}_0$, доказана.

Аналогично показывается справедливость леммы и для случая, когда λ_0 является двукратным собственным значением оператора $\mathcal{H}_0$. □

Лемма 4.3. *Пусть $n = 2$, $F \in \mathcal{A}_0$, b — любая постоянная. Тогда существует функция $E \in \mathcal{A}_0$, имеющая главный член асимптотики в нуле $\Phi_0(x) = b\ln r + d$, удовлетворяющая уравнению (4.3) при некотором числе Λ, если λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, причем, если $\psi_0(0) \neq 0$, то постоянную d можно выбрать любой, и удовлетворяющая уравнению (4.4) при некоторых числах $\Lambda^{(k)}$, если λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, причем, в невырожденном случае (2.8) постоянную d можно выбрать любой.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству леммы 4.2. Возможность выбора постоянной d произвольной (при условиях $\psi_0(0) \neq 0$ и (2.8)) очевидным образом вытекает из того, что функции E определены с точностью до слагаемого $C\psi_0(x)$ для любого C в случае, когда λ_0 – простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и с точностью до произвольной линейной комбинации собственных функций $\psi_0^{(s)}(x)$ в случае, когда λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. □

Лемма 4.4. *Существуют функции $E_0 \in \mathcal{A}_0$ при $n \geqslant 3$ и $E_1, \ldots E_n \in \mathcal{A}_1$ при $n \geqslant 2$, имеющие при $r \to 0$ асимптотики*

$$\begin{aligned} E_0(x) =& r^{-n+2} + O\left(r^{-n+3}\right) \quad \text{при } n \geqslant 3, \\ E_m(x) =& x_m r^{-n} + O\left(r^{-n+2}\right) \quad \text{при } n \geqslant 2,\ j = 1, ..., m \end{aligned}$$

и удовлетворяющие в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнениям

$$H_0 E_q = \lambda_0 E_q + \Lambda_q \psi_0 \quad \text{в } \Omega\backslash\{0\}, \tag{4.7}$$

где

$$\Lambda_0 = -\,|S_n|(n-2)\psi_0(0) \quad \text{при } n \geqslant 3, \tag{4.8}$$

$$\Lambda_m = -\,|S_n|\frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \quad \text{при } n \geqslant 2,\ m = 1, ..., n, \tag{4.9}$$

если λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и удовлетворяющие в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнениям

$$H_0 E_q = \lambda_0 E_q + \Lambda_q^{(1)} \psi_0^{(1)} + \Lambda_q^{(2)} \psi_0^{(2)},$$

где собственные функции $\psi_0^{(s)}(x)$ ортонормированы в соответствии с (2.9),

$$\begin{aligned} &\Lambda_0^{(1)} = -\,|S_n|(n-2)\psi_0^{(1)}(0), \qquad \Lambda_0^{(2)} = 0 \quad \text{при } n \geqslant 3, \\ &\Lambda_m^{(s)} = -\,|S_n|\frac{\partial \psi_0^{(s)}}{\partial x_m}(0) \quad \text{при } n \geqslant 2,\ \ m = 1, ..., n,\ s = 1, 2, \end{aligned} \tag{4.10}$$

если λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$.

Доказательство. Утверждения доказываемой леммы за исключением явных формул (4.8)–(4.10) являются частным случаем леммы 4.2. Поэтому осталось показать справедливость равенств (4.8)–(4.10).

Получим вначале равенство (4.8). Для положительных s обозначим $\chi_q(t) := \chi(tq^{-1})$, $\widetilde{\chi}_q(t) := 1-\chi_q(t)$, $\widetilde{E}(x) := E_0(x)\widetilde{\chi}_q(r)$, где, напомним, $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. Очевидно, что $\widetilde{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$ для любых достаточно малых q, и в силу (4.7) справедливо следующее равенство:

$$\mathcal{H}_0\widetilde{E} - \lambda_0\widetilde{E} = \Lambda_0\psi_0\widetilde{\chi}_q - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\widetilde{\chi}_q}{\partial x_j}\frac{\partial E_0}{\partial x_i} - E_0\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\widetilde{\chi}_q}{\partial x_j}\right).$$

В силу и условия разрешимости этого уравнения (ортогональности в $L_2(\Omega)$ правой части собственной функции ψ_0) и определения $\widetilde{\chi}_q$ имеем:

$$\Lambda_0(\widetilde{\chi}_q\psi_0, \psi_0) = -2\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\chi_q}{\partial x_j}\frac{\partial E_0}{\partial x_i}, \psi_0\right) - \left(E_0\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\chi_q}{\partial x_j}\right), \psi_0\right).$$

Учитывая асимптотику в нуле функций $a_{i,j}(x)$, $E_0(x)$ и $\psi_0(x)$, переходя в интегралах в правой части последнего равенства к растянутой в q^{-1} раз переменной и устремляя q к нулю, получаем, что

$$\begin{aligned}\Lambda_0 = &-\psi_0(0)\left(2\int\limits_{r<2}\nabla r^{2-n}\nabla\chi(r)dx + \int\limits_{r<2} r^{2-n}\Delta\chi(r)dx\right)\\ = &-\psi_0(0)\int\limits_{r<2}\nabla r^{2-n}\nabla\chi(r)dx.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Интегрируя по частям при малых $t > 0$, имеем:

$$\int\limits_{t<r<2}\nabla r^{2-n}\nabla\chi(r)dx = (n-2)|S_n|.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to 0$, в силу (4.11) получаем справедливость равенства (4.8).

Аналогично доказывается равенства (4.9) и (4.10). □

Лемма 4.5. *Пусть $n = 2$. Тогда существует функция $E_0 \in \mathcal{A}_0$, имеющая при $r \to 0$ асимптотику*

$$\begin{aligned}&E_0(x) = -\ln r + O(r\ln r), &&\text{если } \psi_0(0) \neq 0,\\ &E_0(x) = -\ln r + c(\Omega) + O(r\ln r), &&\text{если } \psi_0(0) = 0,\end{aligned}\tag{4.12}$$

и удовлетворяющая в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнению

$$H_0E_0 = \lambda_0E_0 + \Lambda_0\psi_0, \quad \text{где } \Lambda_0 = -2\pi\psi_0(0),$$

если λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и имеющая при $r \to 0$ асимптотику (4.12) и удовлетворяющая в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнению

$$H_0E_0 = \lambda_0E_0 + \Lambda_0^{(1)}\psi_0^{(1)} + \Lambda_0^{(2)}\psi_0^{(2)},$$

где собственные функции $\psi_0^{(m)}(x)$ ортонормированы в соответствии с (2.9),

$$\Lambda_0^{(1)} = -2\pi\psi_0^{(1)}(0), \qquad \Lambda_0^{(2)} = 0,$$

если λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$.

Доказательство. С учетом леммы 4.3 доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству леммы 4.4. Отсутствие постоянной $c(\Omega)$ в (4.12) очевидным образом вытекает из того, что функция E_0 определена с точностью до слагаемого $C\psi_0(x)$ для любого C в случае, когда λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и с точностью до произвольной линейной комбинации собственных функций $\psi_0^{(s)}(x)$ в случае, когда λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. □

Из лемм 4.2, 4.4, 4.5 вытекает

Следствие 2. *Пусть λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$ и собственные функции $\psi_0^{(s)}(x)$ ортонормированы в соответствии с (2.9). Тогда для любых $Z_k(x)$, $k \geqslant 1$, $F \in \mathcal{A}^k$ существует решение $E \in \mathcal{A}^k$ уравнения*

$$H_0 E = \lambda_0 E + F + \Lambda\psi_0^{(2)},$$

в $\Omega\backslash\{0\}$ при некоторой постоянной, имеющее главный член асимптотики в нуле $\Phi_0(x) = Z_k(x) r^{-2k+n-2}$.

Обозначим

$$z_m^{(1)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y) y_m V(y) dy \quad \text{при } m = 1, \dots, n.$$

Из определения функций $z_0^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}$ вытекает

Лемма 4.6. *Функции $z_0^{(1)}, \dots, z_n^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют уравнениям*

$$\Delta z_0^{(1)} = V, \qquad \Delta z_m^{(1)} = x_m V, \quad m = 1, \dots, n$$

в $\mathbb{R}^n$ и имеют при $r \to \infty$ дифференцируемые асимптотики

$$z_q^{(1)}(x) = -c_{q,0}^{(1)} \ln r + \left(c_{q,1}^{(1)} x_1 r^{-2} + c_{q,2}^{(1)} x_2 r^{-2}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(1,q)}(x) r^{-2i} \quad \text{при } n = 2,$$

$$z_q^{(1)}(x) = c_{q,0}^{(1)} r^{2-n} + \sum_{m=1}^{n} c_{q,m}^{(1)} x_m r^{-n} + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(1,q)}(x) r^{-2i-n+2} \qquad \text{при } n \geqslant 3,$$

где

$$c_{0,0}^{(1)} = -\frac{\langle V \rangle}{2\pi} \quad \text{при } n = 2, \qquad c_{0,0}^{(1)} = -\frac{\langle V \rangle}{(n-2)|S_n|} \qquad \text{при } n \geqslant 3,$$

$$c_{0,m}^{(1)} = c_{m,0}^{(1)} = -\frac{\langle V \rangle_m}{|S_n|}, \qquad c_{p,m}^{(1)} = -\frac{\langle V \rangle_{pm}}{|S_n|} \quad \text{при } p, m = 1, \dots, n,$$

а $Y_i^{(1,q)}(x)$ — однородные гармонические полиномы порядка i.

При $k \geqslant 2$ рекуррентно определим следующие функции:

$$z_q^{(k)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y) V(y) z_q^{(k-1)}(y) dy, \quad \text{при } q = 0, 1, \dots, n.$$

Лемма 4.7. *Функции $z_0^{(k)}, \dots, z_n^{(k)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 2$, удовлетворяют в $\mathbb{R}^n$ уравнениям*

$$\Delta z_q^{(k)} = V z_q^{(k-1)}$$

и имеют при $r \to \infty$ дифференцируемые асимптотики

$$
\begin{aligned}
z_p^{(k)}(x) =& - c_{p,0}^{(k)} \ln r + \left(c_{p,1}^{(k)} x_1 r^{-2} + c_{p,2}^{(k)} x_2 r^{-2} \right) + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(k,p)}(x) r^{-2i} \quad \text{при } n = 2, \\
z_p^{(k)}(x) =& c_{p,0}^{(k)} r^{2-n} + \sum_{m=1}^{n} c_{p,m}^{(k)} x_m r^{-n} + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(k,p)}(x) r^{-2i-n+2} \qquad \text{при } n \geqslant 3,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_{0,0}^{(2)} =& \frac{1}{2\pi} \left\| \nabla z_0^{(1)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \qquad \text{при } n = 2, \\
c_{0,0}^{(2)} =& \frac{1}{(n-2)|S_n|} \left\| \nabla z_0^{(1)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad \text{при } n \geqslant 3.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Доказательство. Справедливость утверждений леммы за исключением равенств (4.13) следует непосредственно из определения функций $z_q^{(k)}(x)$.

Покажем справедливость (4.13). Из определения $z_0^{(2)}(x)$ и $z_0^{(1)}(x)$ последовательно получаем

$$
\begin{aligned}
c_{0,0}^{(2)} &= - \frac{\left\langle V z_0^{(1)} \right\rangle}{2\pi} \qquad \text{при } n = 2, \qquad c_{0,0}^{(2)} = - \frac{\left\langle V z_0^{(1)} \right\rangle}{(n-2)|S_n|} \qquad \text{при } n \geqslant 3, \\
c_{0,0}^{(2)} &= - \frac{\left\langle z_0^{(1)} \Delta z_0^{(1)} \right\rangle}{2\pi} \qquad \text{при } n = 2, \qquad c_{0,0}^{(2)} = - \frac{\left\langle z_0^{(1)} \Delta z_0^{(1)} \right\rangle}{(n-2)|S_n|} \qquad \text{при } n \geqslant 3.
\end{aligned}
$$

Интегрируя по частям правые части последних двух равенств, получаем справедливость (4.13). $\square$

При $j \geqslant 0$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{B}}_j$ множество рядов вида

$$
\sum_{i=0}^{\infty} T_{j-i}(x) + \delta(n) \ln r \sum_{s=0}^{j} P_{j-s}(x).
$$

Через $\mathcal{B}_j$ будем обозначать множество функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, имеющих на бесконечности дифференцируемые асимптотики из $\widetilde{\mathcal{B}}_j$. Из этого определения, в частности, следует, что $z_j^{(p)} \in \mathcal{B}_0$.

Лемма 4.8. *Пусть $S \in \mathcal{B}_q$, а ряд $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{q+2}$ является асимптотическим решением уравнения*

$$
\Delta V = S \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{4.14}
$$

при $r \to \infty$. Тогда существует решение $V \in \mathcal{B}_{q+2}$ этого уравнения, имеющее на бесконечности асимптотику

$$
\begin{aligned}
V(\xi) =& \widetilde{V}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(x) r^{-2i-n+2} \qquad \text{при } n \geqslant 3, \\
V(x) =& \widetilde{V}(x) + b \ln r + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(x) r^{-2i} \quad \text{при } n = 2.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{V}_N$ частичную сумму ряда $\widetilde{V}$ до членов порядка r^{-N-n} включительно. Решение уравнения (4.14) будем искать в виде

$$
V_N(x) = \widetilde{V}_N(x)(1 - \chi(r)) + w_N(x). \tag{4.15}
$$

Подставляя (4.15) в (4.14), получаем уравнение для w_N:

$$\Delta w_N = S_N, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.16}$$

где

$$S_N = S - (1-\chi)\Delta\widetilde{V}_N + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\frac{\partial \widetilde{V}_N}{\partial x_i}.$$

Следовательно, $S_N(x) = O(r^{-N-n-3})$ при $r \to \infty$. Тогда функция

$$w_N(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y)S_N(y)dy$$

является решением уравнения (4.16) и при $r \to \infty$ имеет асимптотику

$$w_N(x) = b\ln r + \sum_{i=1}^{N+1} Z_i(x) r^{-2i} + o(r^{-N-2}) \quad \text{при } n = 2,$$

$$w_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} Z_i(x) r^{-n-2i+2} + o(r^{-N-n}) \qquad \text{при } n \geqslant 3.$$

Отсюда и из (4.15) следует, что при $r \to \infty$

$$\begin{aligned} V_N(x) =&\widetilde{V}_N(x) + b\ln r + \sum_{i=1}^{N+1} Z_i(x) r^{-2i} + o(r^{-N-2}) \quad \text{при } n = 2,\\ V_N(x) =&\widetilde{V}_N(x) + \sum_{i=0}^{N+1} Z_i(x) r^{-n-2i+2} + o(r^{-N-n}) \qquad \text{при } n \geqslant 3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Разность $V_{N_1} - V_{N_2}$ является гармонической в $\mathbb{R}^n$ функцией, убывающей на бесконечности. Следовательно, $V_{N_1} - V_{N_2} = 0$, то есть V_N не зависит от N. Поэтому из (4.17) в силу произвола в выборе N следует справедливость утверждения доказываемой леммы. $\square$

5. Вывод структуры внутреннего разложения собственной функции в случае нечетномерной области

Всюду далее в этом и трех следующих разделах λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. В этом случае из следствия 1 вытекает, что для нормированной в $L_2(\Omega)$ собственной функции $\psi_{\mu,\varepsilon}$, соответствующей собственному значению $\lambda_{\mu,\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda_0$, имеет место сходимость $\psi^{\mu,\varepsilon} \to \psi_0$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому вне окрестности начала координат (где и сосредоточено возмущение оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$) приближение $\psi^{ex}(x,\mu,\varepsilon)$ (*внешнее разложение*) функции $\psi^{\mu,\varepsilon}$ естественно искать в виде $\psi^{ex}(x,\mu,\varepsilon) \approx \psi_0(x)$. В окрестности же начала координат приближение ψ^{in} (*внутреннее разложение*) функции $\psi_{\mu,\varepsilon}$ также естественно искать в виде разложения по функциям, зависящим от переменой $\xi = x\varepsilon^{-1}$, соответствующей аргументу возмущающего потенциала $V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Ряд Тейлора функции ψ_0 в нуле имеет вид:

$$\psi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x), \qquad r \to 0, \tag{5.1}$$

где

$$P_0(x) = \psi_0(0), \quad P_1(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) x_m, \tag{5.2}$$

причем, в силу уравнения

$$H_0\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \tag{5.3}$$

и равенства (4.1) справедливы равенства

$$\begin{aligned}\Delta P_0 =&0, \qquad \Delta P_1 = \left(Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D)\right) P_0 = 0,\\ \Delta P_k =& \sum_{i=2}^{k} \left(Q_{i,2}(x,D) + Q_{i-1,1}(x,D) + Q_{i-2,0}(x,D)\right) P_{k-i}\\ &+ \left(Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D)\right) P_{k-1} - \lambda_0 P_{k-2} \qquad \text{при } k \geqslant 2.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Замечание 5.1. *Всюду далее через $P_k(x)$ обозначаются только члены ряда Тейлора в нуле функции $\psi_0(x)$, а через $P_k^{(s)}(x)$ — функций $\psi_0^{(s)}(x)$.*

Обозначим $\rho = |\xi|$. Переписывая правую часть (5.1) в переменной ξ, с учетом (5.2) получаем:

$$\psi^{ex}(x,\mu,\varepsilon) \approx \psi_0(x) = \psi_0(0) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi), \qquad \rho\varepsilon^{-1} = r \to 0.$$

Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений [7], получаем, что внутреннее разложение следует искать в виде

$$\psi^{in}(\xi,\mu,\varepsilon) \approx \psi_0^{in}(\xi,\varepsilon) = v_{0,0}(\xi) + \varepsilon v_{1,0}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k v_{k,0}(\xi), \tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned}v_{0,0}(\xi) \sim&\psi_0(0), \quad v_{1,0}(\xi) \sim \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad \rho \to \infty,\\ v_{k,0}(\xi) \sim& P_k(\xi), \quad k \geqslant 2, \quad \rho \to \infty.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Подставляя $\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0$, (4.1) и (5.5) в уравнение

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon}, \tag{5.7}$$

переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, получаем рекуррентную систему уравнений для $v_{k,0}$:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-2}: \quad \Delta_\xi v_{0,0} = 0,\\ &\varepsilon^{-1}: \quad \Delta_\xi v_{1,0} = \left(Q_{1,2}(\xi,D_\xi) + Q_{0,1}(\xi,D_\xi)\right) v_{0,0},\\ &\varepsilon^{k-2}: \quad \begin{aligned}\Delta_\xi v_{k,0} =& \sum_{i=2}^{k} \left(Q_{i,2}(\xi,D_\xi) + Q_{i-1,1}(\xi,D_\xi) + Q_{i-2,0}(\xi,D_\xi)\right) v_{k-i,0}\\ &+ \left(Q_{1,2}(\xi,D_\xi) + Q_{0,1}(\xi,D_\xi)\right) v_{k-1,0} - \lambda_0 v_{k-2,0}, \quad k \geqslant 2\end{aligned}\end{aligned} \tag{5.8}$$

и дополнительные требования на эти функции:

$$\varepsilon^i\mu^{-1}: \quad V(\xi)v_{i,0}(\xi) = 0, \quad i \geqslant 0. \tag{5.9}$$

Замечание 5.2. *Здесь Δ_ξ означает Лапласа по переменной ξ. Аналогично, символ дифференцирования D_ξ означает, что дифференцирование ведется по переменной ξ. Так как всюду в дальнейшем в уравнениях для коэффициентов внутренних разложений оператор Лапласа и символ дифференцируемости используются только в таком смысле, то для упрощения обозначений будем в Δ_ξ и D_ξ опускать этот индекс ξ.*

В силу (5.4), (5.2) и (5.8) функции

$$v_{0,0} \equiv \psi_0(0), \qquad v_{1,0}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \qquad v_{k,0}(\xi) = P_k(\xi), \quad k \geqslant 2, \tag{5.10}$$

очевидно, являются решениями уравнений (5.8), удовлетворяющими условию (5.6) (условию согласования асимптотических разложений).

Однако, также очевидно, что условия (5.9) не выполняются. Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, во внутреннее разложение необходимо добавить новые члены:

$$\psi^{in}(\xi,\mu,\varepsilon)\approx\psi^{in}_1(\xi,\mu,\varepsilon)=\psi^{in}_0(\xi,\varepsilon)+\mu^{-1}\left(\varepsilon^2 v_{2,1}(\xi)+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k v_{k,1}(\xi)\right). \tag{5.11}$$

Подставляя $\lambda^{\mu,\varepsilon}=\lambda_0$, (4.1) и (5.11) (вместо (5.5)) в уравнение (5.7), переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, получаем вновь рекуррентную систему уравнений (5.8), новую рекуррентную систему уравнений для функций $v_{2+k,1}(\xi)$, из которых первые два имеют вид:

$$\mu^{-1}:\quad \Delta v_{2,1}=Vv_{0,0}, \tag{5.12}$$

$$\varepsilon\mu^{-1}:\quad \Delta v_{3,1}=\left(Q_{1,2}(\xi,D)+Q_{0,1}(\xi,D)\right)v_{2,1}+Vv_{1,0} \tag{5.13}$$

и дополнительные требования на эти функции (вместо условий (5.9)):

$$\varepsilon^i\mu^{-2}:\quad V(\xi)v_{i,1}(\xi)=0,\quad i\geqslant 2. \tag{5.14}$$

Очевидно, что равенства (5.14), вообще говоря, не выполняются. И чтобы заменить эти равенства на уравнения типа (5.12), (5.13) во внутреннем разложении (5.11), нужно добавить слагаемые $\mu^{-2}\varepsilon^{i+2}v_{i+2,2}$ (аналогично тому, как это было проделано в случае равенств (5.10)). Эти новые слагаемые, в свою очередь, влекут требования вида (5.9), (5.14) при $\mu^{-3}\varepsilon^i$, $i\geqslant 4$, для устранения которых придется вводить слагаемые $\mu^{-3}\varepsilon^{i+2}v_{i+2,3}$, и т.д. Поэтому внутреннее разложение естественно искать в виде

$$\begin{aligned}\psi^{in}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)=&\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}(\xi)\\ &+\varepsilon^2\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}v_{2+i,j+1}(\xi),\qquad \text{если } \psi_0(0)\neq 0.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Подставляя $\lambda^{\mu,\varepsilon}=\lambda_0$, (4.1) и (5.15) (вместо (5.11)) в уравнение (5.7), переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^k\mu^{-l}$, получаем при $l=0$ систему уравнений (5.8), а при $l=j+1\geqslant 1$ — рекуррентную систему уравнений для функций $v_{2+k,j+1}(\xi)$, из которых первые два (при фиксированном $j\geqslant 0$) имеют вид

$$\varepsilon^{2j}\mu^{-j-1}:\ \Delta v_{2j+2,j+1}=Vv_{2j,j}, \tag{5.16}$$

$$\varepsilon^{2j+1}\mu^{-j-1}:\ \Delta v_{2j+3,j+1}=\left(Q_{1,2}(\xi,D)+Q_{0,1}(\xi,D)\right)v_{2j+2,j+1}+Vv_{2j+1,j}, \tag{5.17}$$

включающий, в частности, при $j=0$ и уравнения (5.12), (5.13).

В силу равенств (5.10) и лемм 4.6, 4.7 функции

$$v_{2j+2,j+1}(\xi)=\psi_0(0)z_0^{(j+1)}(\xi),\qquad j\geqslant 0, \tag{5.18}$$

являются решениями уравнений (5.16).

Замечание 5.3 (случай $\psi_0(0)=0$)**.** *Если $\psi_0(0)=0$, то опять же в силу равенств (5.10) и лемм 4.6, 4.7 функции*

$$\begin{gathered}v_{2j+2,j+1}(\xi)\equiv 0,\quad v_{2j+3,j+1}(\xi)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)z_m^{(j+1)}(\xi),\quad j\geqslant 0,\\ \text{если } \psi_0(0)=0,\end{gathered} \tag{5.19}$$

являются решениями уравнений (5.16), (5.17).

Из (5.10), (5.19) и (5.15), в частности, следует, что

$$\begin{aligned}\psi_{odd}^{in}(\xi,\mu,\varepsilon) =&\psi_{odd}^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}(\xi)\\ &+\varepsilon^3\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}v_{3+i,j+1}(\xi), \qquad \text{если } \psi_0(0)=0.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Замечание 5.4 (о четности n). *Подчеркнем, что приведенный выше алгоритм пока никоим образом не зависит от нечетности n. Дальнейшее согласование внутреннего и внешнего асимптотических разложений собственных функций оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, приводимое ниже, покажет, что внутреннее асимптотическое разложение действительно имеет вид (5.15), (5.20), (5.10), (5.18), (5.19) для нечетных n, но имеет более громоздкую структуру для четных n, нежели (5.15), (5.20). Случай четного n будет исследован ниже в разделе 10.*

6. Вывод структуры внешнего асимптотического разложения собственной функции и асимптотики собственного значения в случае нечетномерной области

Временно будем считать равными нулю пока неопределенные коэффициенты в (5.15) и (5.20), т.е. полагать, что

$$\begin{aligned}\psi_{odd}^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j+2}\mu^{-j-1}v_{2j+2,j+1}(\xi), \qquad \psi_0(0)\neq 0,\\ \psi_{odd}^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j+3}\mu^{-j-1}v_{2j+3,j+1}(\xi), \qquad \psi_0(0)=0.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Тогда, заменяя в (6.1) коэффициенты $v_{i,0}$, $v_{2j+2,j+1}$ и $v_{2j+3,j+1}$ на их асимптотики при $\rho\to\infty$ и переписывая полученную сумму в переменных x, с учетом равенств (5.10), (5.18), (5.19) и утверждений лемм 4.6, 4.7 получаем, что

$$\begin{aligned}\psi_{odd}^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{k=0}^{\infty}P_k(x) + \varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\varphi_{n+i,j+1}^{(1)}(x)\\ &+\delta_n^2 d_1(\mu,\varepsilon)\ln\varepsilon, \qquad \psi_0(0)\neq 0,\\ \psi_{odd}^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{k=1}^{\infty}P_k(x) + \varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\varphi_{n+i+1,j+1}^{(2)}(x)\\ &+\delta_n^2 d_2(\mu,\varepsilon)\ln\varepsilon, \qquad \psi_0(0)=0,\end{aligned} \tag{6.2}$$

где (напомним) δ_p^q — символ Кронекера,

$$d_1(\mu,\varepsilon) =\varepsilon^2\mu^{-1}\psi_0(0)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j}\mu^{-j}c_{0,0}^{(j+1)},$$

$$d_2(\mu,\varepsilon) =\varepsilon^3\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j}\mu^{-j}\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}^{(j+1)},$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2+2j,j+1}^{(1)}(x) =& -\psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}\ln r, \qquad j\geqslant 0, \quad n=2,\\ \varphi_{2+2j+1,j+1}^{(2)}(x) =& -\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}^{(j+1)}\ln r, \quad j\geqslant 0, \quad n=2,\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}_{n+2j,j+1}(x) =&\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}r^{-n+2}, \qquad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3,\\ \varphi^{(2)}_{n+2j+1,j+1}(x) =&\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}r^{-n+2}, \quad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3, \end{aligned} \tag{6.4}$$

а $\varphi^{(s)}_{n+i+q-1,j+1}(x)$ с остальными нижними индексами являются конечными суммами однородных функций не меньше, чем $(-n-i+2j+2)$-го порядка.

Замечание 6.1 (о случае $n=2$)**.** *К вопросу о слагаемых $d_q(\mu,\varepsilon)\ln\varepsilon$ в (6.2) при $n=2$ вернемся ниже в замечании 7.2. Пока же не будем обращать внимание на них.*

Следуя методу согласования асимптотических разложений и учитывая равенства (6.2), (6.3), (6.4) и замечание 6.1, внешнее разложение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi^{ex}_{odd}(x,\mu,\varepsilon) =&\psi^{ex,1}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)\\ =&\psi_0(x)+\varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i,j+1}(x), \quad \psi_0(0)\neq 0,\\ \psi^{ex}_{odd}(x,\mu,\varepsilon) =&\psi^{ex,2}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)\\ =&\psi_0(x)+\varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i+1,j+1}(x), \quad \psi_0(0)= 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где, в частности,

$$\begin{aligned} \psi_{2+2j,j+1}(x)\sim&-\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\ln r, \qquad j\geqslant 0, \quad n=2, \quad \psi_0(0)\neq 0,\\ \psi_{3+2j,j+1}(x)\sim&-\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}\ln r, \quad j\geqslant 0, \quad n=2, \quad \psi_0(0)=0,\\ \psi_{n+2j,j+1}(x)\sim&\,\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}r^{-n+2}, \qquad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3, \quad \psi_0(0)\neq 0,\\ \psi_{n+2j+1,j+1}(x)\sim&\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}r^{-n+2}, \quad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3, \quad \psi_0(0)=0, \end{aligned} \tag{6.6}$$

при $r\to 0$.

Так как внешнее разложение должно описывать поведение собственной функции почти во всей области Ω (за исключением малой окрестности нуля), то по аналогии с (6.5) (и с учетом замечания 6.1) асимптотику собственного значения естественно искать в виде

$$\lambda_{odd}(\mu,\varepsilon)=\lambda^1_{odd}(\mu,\varepsilon)=\lambda_0+\varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\lambda_{n+i,j+1}, \quad \psi_0(0)\neq 0, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{odd}(\mu,\varepsilon) =&\lambda^2_{odd}(\mu,\varepsilon)\\ =&\lambda_0+\varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\lambda_{n+i+1,j+1}, \quad \psi_0(0)=0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Замечание 6.2 (о структуре асимптотик собственного значения)**.** *Для нечетного n ряд (6.7) имеет вид (2.1), но в критическом случае $\psi_0(0)=0$ вид ряда (6.8) отличается от вида ряда (2.6). Для того чтобы ряд (6.8) имел вид (2.6), не хватает только равенства $\lambda_{n+2j+1,j+1}=0$. Соображения о выполнении этого равенства будут приведены ниже в замечание 7.1.*

7. Вывод уравнений для коэффициентов асимптотических разложений в случае нечетномерной области

Так как внешнее разложение рассматривается вне окрестности начала координат и $H_0 = H_{\mu,\varepsilon}$ вне окрестности начала координат, то, подставляя в уравнение

$$H_0\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} \tag{7.1}$$

ряды (6.5), (6.7), (6.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, получаем заведомо выполняющееся уравнение (5.3) и рекуррентную систему уравнений в $\Omega\backslash\{0\}$ для остальных коэффициентов внешнего разложения (6.5):

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{n+i}\mu^{-1}: \quad & (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i,1} = \lambda_{n+i,1}\psi_0, \quad i \geqslant 0,\\
\varepsilon^{n+i+2j}\mu^{-1-j}: \quad & (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i+2j,j+1} = \lambda_{n+i+2j,j+1}\psi_0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-3,\\
& (H_0-\lambda_0)\psi_{n+i+2j,j+1} = \lambda_{n+i+2j,j+1}\psi_0\\
& \qquad + \sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{s=0}^{j-1}\lambda_{n+k+2s,s+1}\psi_{i-k+2(j-s),j-s},\\
& \qquad i \geqslant n-2, \quad j \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

где

$$\psi_{n+2j,j+1}(x) = \lambda_{n+2j,j+1} = 0, \qquad \text{если } \psi_0(0) = 0, \tag{7.3}$$

силу (6.5) и (6.8).

Замечание 7.1 (о структуре асимптотики собственного значения в случае $\psi_0(0) = 0$). *Из (7.2), (7.3) получаем следующее уравнение:*

$$H_0\psi_{n+2j+1,j+1} = \lambda_0\psi_{n+2j+1,j+1} + \lambda_{n+2j+1,j+1}\psi_0, \qquad \psi_0(0) = 0, \tag{7.4}$$

при $j \geqslant 0$. В силу лемм 4.4, 4.5 функции

$$\psi_{n+2j+1,j+1}(x) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}^{(j+1)}E_0(x), \quad j \geqslant 0, \qquad \psi_0(0) = 0, \tag{7.5}$$

имеют асимптотики (6.6) и являются решениями уравнений (7.4) при

$$\lambda_{n+2j+1,j+1} = 0, \qquad j \geqslant 0, \qquad \text{если } \psi_0(0) = 0. \tag{7.6}$$

С учетом равенств (7.6), во-первых, ряд (6.8) уже принимает вид (2.6) для нечетного n, а во-вторых, в уравнениях (7.2) условие (7.3) заменяется на следующее:

$$\psi_{2+2j,j+1}(x) = \lambda_{2+2j,j+1} = \lambda_{3+2j,j+1} = 0 \qquad \text{при } \psi_0(0) = 0 \tag{7.7}$$

для коэффициентов внешнего разложения.

Конечно, даже с позиции построения полных формальных асимптотических разложений собственных значений и соответствующих собственных функций равенства (7.7) остаются пока лишь ожидаемыми и правдоподобными. Подтверждение справедливости в этом смысле равенства (7.7) будет приведено в следующем разделе 8 при построении полных формальных асимптотических разложений (см., например, вывод равенства (8.13)).

Замечание 7.2 (о четности n). *Вновь подчеркнем, что приведенный выше алгоритм пока никоим образом не зависит от четности-нечетности $n \geqslant 3$. Дальнейшее согласование внутреннего и внешнего асимптотических разложений собственных функций оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, приводимое ниже, покажет, что внешнее асимптотические разложение действительно имеет вид (6.5) для нечетных n. Однако для четных n ситуация усложняется. Например, для того чтобы в (6.2) согласовать слагаемые, содержащие*

$\ln\varepsilon$ при $n=2$, во внутренних разложениях (5.15) для $\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ и (5.20) для $\psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ необходимо добавлять слагаемые, содержащие $\ln\varepsilon$:

$$\ln\varepsilon\, d_1(\mu,\varepsilon), \quad \ln\varepsilon\, d_2(\mu,\varepsilon)$$

соответственно. Подобная ситуация будет возникать на следующих шагах согласования асимптотических разложений и для четных $n \geqslant 4$, так как, например, асимптотика в нуле функции $E_0(x)$ из равенств (7.5) содержит при четных n логарифмические члены. Вывод структуры полных асимптотических разложений собственных значений и собственных будет приведен ниже в разделе 10.

В заключении раздела выведем уравнения для коэффициентов внутреннего разложения. Подставляя ряды (5.15), (5.20), (6.7) и (6.8) в уравнение

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon},$$

переходя в нем к внутренним переменным ξ и выписывая равенства при одинаковых степенях ε и μ, получаем для коэффициентов внутренних разложений уравнения (5.8), которые выполняются для функций, определяемых равенствами (5.10), и уравнения

$$\begin{aligned}
\Delta v_{2j+2,j+1} =& V v_{2j,j},\\
\Delta v_{2j+3,j+1} =& \left(Q_{1,2}(\xi,D) + Q_{0,1}(\xi,D)\right) v_{2j+2,j+1} + V v_{2j+1,j},\\
\Delta v_{i+4+2j,j+1} =& \sum_{q=2}^{i} \big(Q_{q,2}(\xi,D) + Q_{q-1,1}(\xi,D)\\
&\qquad\qquad + Q_{q-2,0}(\xi,D)\big) v_{i+4-q+2j,j+1}\\
&+ \left(Q_{1,2}(\xi,D) + Q_{0,1}(\xi,D)\right) v_{i+3+2j,j+1} + V v_{i+2j+2,j}\\
&- \lambda_0 v_{i+2j+2,j+1}, \quad i<n,\\
\Delta v_{i+4+2j,j+1} =& \sum_{q=2}^{i} \big(Q_{q,2}(\xi,D) + Q_{q-1,1}(\xi,D)\\
&\qquad\qquad + Q_{q-2,0}(\xi,D)\big) v_{i+4-q+2j,j+1}\\
&+ \left(Q_{1,2}(\xi,D) + Q_{0,1}(\xi,D)\right) v_{i+3+2j,j+1} + V v_{i+2j+2,j}\\
&- \sum_{p=0}^{i-n}\sum_{l=0}^{j} v_{p+2l,l}\lambda_{i+2(j-l)-p+2,j-l+1}\\
&- \lambda_0 v_{i+2j+2,j+1}, \quad i \geqslant n, \quad j \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

где

$$v_{2j+2,j+1}(\xi) = \lambda_{n+2j+2,j+1} = \lambda_{n+1+2j+2,j+1} = 0, \quad \text{если } \psi_0(0)=0. \tag{7.9}$$

в силу (5.19), (7.7).

8. Построение полных формальных асимптотических разложений в случае нечетномерной области

На рядах $U(x,\varepsilon,\mu)$ вида (6.5) определим операторы $\mathcal{K}_{q,m}$ и $\mathcal{K}$ следующим образом. Коэффициенты ряда $U(x,\varepsilon,\mu)$ разложим в ряды при $r\to 0$ и перейдем к переменным ξ. В полученных рядах оставим только члены вида $\varepsilon^q\mu^{-m}\Phi(\xi)$. Этот ряд обозначим $\mathcal{K}_{q,m}(U(x,\varepsilon,\mu))$ и положим

$$\mathcal{K} = \sum_{q,m}\mathcal{K}_{q,m}.$$

Коэффициенты асимптотики собственного значения и внешнего разложения собственной функции будем строить в следующем виде

$$\lambda_{n+i+2j,j+1} = \sum_{t=0}^{i} \Lambda^{(t)}_{n+i+2j,j+1}, \quad j \geqslant 0, \tag{8.1}$$

$$\psi_{n+i+2j,j+1}(x) = \sum_{t=0}^{i} \Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x), \quad j \geqslant 0. \tag{8.2}$$

Обозначим

$$\Phi^{(N)}_{n+i+2j,j+1}(x) := \sum_{t=0}^{\min\{i,N\}} \Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x).$$

В этих обозначениях $\Phi^{(N)}_{n+i+2j,j+1}(x) = \psi_{n+i+2j,j+1}(x)$ при $N \geqslant i$ в силу (8.2). Через $\Phi^{ex}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ будем обозначать ряды вида (6.5), где коэффициенты $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$ заменены на $\Phi^{(N)}_{n+i+2j,j+1}(x)$.

Из определения $\mathcal{A}^m$, $\mathcal{A}_m$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$, $\mathcal{K}_{m,l}$, $\mathcal{K}$, $\Phi^{ex}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ и (8.1), (8.2) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 8.1. *Если коэффициенты $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$ рядов (6.5) принадлежат $\mathcal{A}^i$, то*

$$\mathcal{K}(\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)) = \Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon),$$

где $\Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ — ряды вида (5.15), (5.20), в которых коэффициенты $v_{2+i,j+1}(\xi)$ заменены на ряды $V_{2+i,j+1}(\xi) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i-2j}$.

Если $\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x) \in \mathcal{A}_{i-t}$, то функции $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемые равенством (8.2), принадлежат $\mathcal{A}^i$ и имеют место следующие равенства:

$$V_{2j+2+t,j+1}(\xi) = \widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k^{(2j+2+t,j+1)}(\xi)\rho^{-n+2-2k},$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_{2j+2,j+1}(\xi) \equiv& 0,\\
\widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}(\xi) =& \varepsilon^{-2j-2-t}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+2+t,j+1}\left(\Phi^{ex}_{odd,t-1}(x,\mu,\varepsilon)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_t, \quad t \geqslant 1,
\end{aligned}$$

(т.е. $\widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}$ не зависит от $\Psi^{(m)}_{p,q}$ при $m \geqslant t-1$), а $Z_k^{(2j+2+t,j+1)} r^{-n+2-2k}$ – главный член асимптотики $\Psi^{(t)}_{n+2j-t+k,j+1}$ в нуле.

Если, к тому же, функции $\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ являются в $\Omega\backslash\{0\}$ решениями уравнений

$$\begin{aligned}
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t)}_{n+i,1} =& \Lambda^{(t)}_{n+i,1}\psi_0, \quad i \geqslant 0,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1} =& \Lambda^{(t)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-3,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1} =& \Lambda^{(t)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0\\
&+ \sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{s=0}^{j-1}\sum_{p=0}^{t} \Lambda^{(p)}_{n+k+2s,s+1}\Psi^{(t-p)}_{i-k+2(j-s),j-s},\\
& i \geqslant n-2, \quad j \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{8.3}$$

то функции $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемые равенствами (8.2), являются решениями уравнений (7.2) при $\lambda_{n+i+2j,j+1}$, определяемыми равенствами (8.1), ряды $\widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}$ являются формальными асимптотическими решениями уравнений (7.8) при $\rho \to \infty$, где в правой части функции $v_{m,q}(\xi)$ заменены на ряды $V_{m,q}(\xi)$ при $q > 0$.

Теорема 8.1. *Пусть n — нечетно, λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ψ_0 — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция.*

Тогда существуют ряды (2.1), (2.6), (6.5), (5.15) и (5.20) такие, что:
1) выполняются равенства (2.2), (2.3), (2.4), (2.7);
2) функции $\psi_{n+2j+i,j+1} \in \mathcal{A}^i$ являются решениями уравнений (7.2), (7.7);
3) функции $v_{i,0}$ определяются равенствами (5.10), а функции $v_{2j+2+i,j+1} \in \mathcal{B}_i$ являются решениями уравнений (7.8), (7.9);
4) выполняется следующее равенство

$$\mathcal{K}(\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)) = \psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon), \qquad \rho\to\infty.$$

Доказательство. С учетом утверждений леммы 8.1 для доказательства теоремы достаточно показать, что, правильно выбирая на t-ом шаге согласования главные члены асимптотик в нуле функций $\Psi^{(t)}_{n+2j-t+k,j+1}(x)$, можно добиться того, чтобы существовали ряды (5.15), (5.20) такие, что их коэффициенты $v_{2j+2+t,j+1}(\xi)\in\mathcal{B}_t$ являлись решениями уравнений (7.8), (7.9) и имели при $\rho\to\infty$ асимптотики $V_{2j+2+t,j+1}$ из формулировки леммы 8.1.

Начнем с определения $\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x)$ Как было показано уже ранее (см., (5.10), (5.8), (5.18), (5.16)), функции

$$v_{0,0}\equiv\psi(0),\quad v_{2j+2,j+1}(\xi)=\psi_0(0)z_0^{(j+1)}(\xi)\in\mathcal{B}_0, \qquad j\geqslant 0, \tag{8.4}$$

являются решениями уравнений (5.8) и (7.8) (в первой строчке) и согласно леммам 4.6, 4.7 имеют при $\rho\to\infty$ следующие асимптотики

$$V_{2j+2,j+1}(\xi)=\psi_0(0)\left(c^{(j+1)}_{0,0}\rho^{2-n}+\sum_{m=1}^{n}c^{(j+1)}_{0,m}\xi_m\rho^{-n}+\sum_{k=2}^{\infty}Y_k(\xi)\rho^{-2k-n+2}\right).$$

Отсюда в силу леммы 8.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x)$:

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)}_{n+2j,j+1}(x)\sim&\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}r^{2-n},\\ \Psi^{(0)}_{n+2j+1,j+1}(x)\sim&\psi_0(0)\sum_{m=1}^{n}c^{(j+1)}_{0,m}x_m r^{-n},\\ \Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x)\sim&\psi_0(0)Y_k(x)r^{-2k-n+2}, \qquad k\geqslant 2.\end{aligned}\tag{8.5}$$

В силу леммы 4.2 существуют функции $\Psi^{(0)}_{n+2j+q,j+1}(x)\in\mathcal{A}_q$, имеющие требуемые асимптотики в нуле и удовлетворяющие уравнениям (8.3) при некоторых $\Lambda^{(0)}_{n+2j+q,j+1}$. Следовательно, в частности, подтверждены представления (2.1) и (6.5) для случая $\psi_0(0)\neq 0$.

Кроме этого, во-первых, функции

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)}_{n+2j,j+1}(x)=&\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}E_0(x),\\ \Psi^{(0)}_{n+2j+1,j+1}(x)=&\psi_0(0)\sum_{m=1}^{n}c^{(j+1)}_{0,m}E_m(x)\end{aligned}\tag{8.6}$$

имеют требуемые асимптотики (8.5) и удовлетворяют уравнениям (8.3) при

$$\Lambda^{(0)}_{n+2j,j+1}=\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\Lambda_0, \qquad \Lambda^{(0)}_{n+2j+1,j+1}=\psi_0(0)\sum_{m=1}^{n}c^{(j+1)}_{0,m}\Lambda_m \tag{8.7}$$

в силу леммы 4.4, а во-вторых, очевидны, представления

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x)=&\psi_0(0)\widetilde{\Psi}^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x),\\ \Lambda^{(0)}_{n+2j+k,j+1}=&\psi_0(0)\widetilde{\Lambda}^{(0)}_{n+2j+k,j+1}, \qquad k\geqslant 2.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Замечание 8.1 (вывод формул (2.2) и (2.3)). *В силу (8.1), (8.2), (8.6) и (8.7) получаем, что*

$$\lambda_{n+2j,j+1} = \psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}\Lambda_0, \quad \psi_{n+2j,j+1}(x) = \psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}E_0(x) \in \mathcal{A}^0. \tag{8.9}$$

Подставляя в эти равенства для $\lambda_{n,1}$ *и* $\lambda_{n+2,2}$ *значения постоянных* Λ_0, $c_{0,0}^{(1)}$ *и* $c_{0,0}^{(2)}$ *из лемм 4.4, 4.6, 4.7, получаем равенства (2.2) и (2.3).*

Замечание 8.2 (случай $\psi_0(0) = 0$). *В силу (8.5)–(8.8), (8.9) и представлений (8.1), (8.2) последовательно получаем, что*

$$\begin{gathered}\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x) = \Lambda^{(0)}_{n+2j+k,j+1} = 0, \quad k \geqslant 1,\\ \lambda_{n+2j,j+1} = \psi_{n+2j,j+1}(x) = 0 \quad \text{если } \psi_0(0) = 0.\end{gathered} \tag{8.10}$$

Следовательно, в частности, подтверждено представление (6.5) и для случая $\psi_0(0) = 0$, *а в силу леммы 8.1 справедливо равенство*

$$\widetilde{V}_{2j+3,j+1}(\xi) \equiv 0.$$

Следующий шаг ($t = 1$). В силу леммы 8.1 получаем, что ряды

$$\widetilde{V}_{2j+3,j+1}(\xi) = \varepsilon^{-2j-3}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+3,j+1}\left(\Phi^{ex}_{odd,0}(x,\mu,\varepsilon)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$$

являются асимптотическими решениями при $\rho \to \infty$ вторых уравнений в (7.8), где в правой части функции $v_{2q+2,q+1}$ заменены на их асимптотики $V_{2q+2,q+1}$ при $\rho \to \infty$, а $v_{1,0} = P_1$. В силу леммы 4.8 существуют функции $v_{2j+3,j+1} \in \mathcal{B}_1$, являющиеся решениями вторых уравнений в (7.8) и имеющие при $\rho \to \infty$ асимптотики $V_{2j+3,j+1}$, такие, что

$$V_{2j+3,j+1}(\xi) = \widetilde{V}_{2j+3,j+1}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\xi)\rho^{-n+2-2k}. \tag{8.11}$$

Отсюда в силу леммы 8.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}(x)$:

$$\Psi^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}(x) \sim Z_k(x)r^{-n+2-2k}, \qquad k \geqslant 0. \tag{8.12}$$

В силу леммы 4.2 существуют функции $\Psi^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}(x) \in \mathcal{A}_k$, имеющие требуемые асимптотики в нуле и удовлетворяющие уравнениям (8.3) при некоторых $\Lambda^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}$.

А так как на предыдущем шаге были определены $\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x) \in \mathcal{A}_k$ и $\Lambda^{(0)}_{n+2j+k,j+1}$, то в соответствии с (8.1), (8.2) окончательно определены коэффициенты $\lambda_{n+2j+1,j+1}$ и $\psi_{n+2j+1,j+1}(x) \in \mathcal{A}^1$.

Замечание 8.3 (случай $\psi_0(0) = 0$). *Отметим, что*

$$\Lambda^{(1)}_{n+2j+1,j+1} = 0, \quad \text{если } \psi_0(0) = 0$$

в силу (8.12) и леммы 4.4. Из этого равенства и (8.10), (8.1) следует, что

$$\lambda_{n+2j+1,j+1} = \lambda_{n+2j,j+1} = 0, \quad \text{если } \psi_0(0) = 0. \tag{8.13}$$

Таким образом подтверждено и представление (2.6).

Для того чтобы на следующем шаге получить равенство (2.7) для $\lambda_{n+2,1}$ *в критическом случае* $\psi_0(0) = 0$, *заметим, что*

$$v_{0,0}(\xi) = v_{2,1}(\xi) \equiv 0, \qquad v_{1,0}(\xi) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad \text{если } \psi_0(0) = 0$$

(см., (5.10), (8.4)). Поэтому уравнение (7.8) для $v_{3,1}(\xi)$ (второе при $j = 0$) приобретает вид

$$\Delta v_{3,1} = V v_{1,0} = V(\xi) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m. \tag{8.14}$$

В силу леммы 4.6 функция

$$v_{3,1}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) z_m^{(1)}(\xi) \tag{8.15}$$

является решением этого уравнения и имеет при $\rho \to \infty$ следующее асимптотическое разложение $V_{3,1}(\xi)$:

$$\begin{aligned} V_{3,1}(\xi) =& \rho^{2-n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,0}^{(1)} \\ &+ \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,k}^{(1)} \xi_k \rho^{-n} + O(\rho^{-n}), \quad \textit{если } \psi_0(0) = 0. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Из (8.11), (8.12) и (8.16) следует, что

$$\Psi_{n+2,1}^{(1)}(x) \sim \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,k}^{(1)} x_k r^{-n}. \tag{8.17}$$

В силу леммы 4.4 функция

$$\Psi_{n+2,1}^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,k}^{(1)} E_k(x)$$

имеет в нуле асимптотику (8.17) и является решением уравнения (8.3) при

$$\Lambda_{n+2,1}^{(1)} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,k}^{(1)} \Lambda_k. \tag{8.18}$$

Перейдем к следующему шагу ($t = 2$). В силу леммы 8.1 получаем, что ряды

$$\widetilde{V}_{2j+4,j+1}(\xi) = \varepsilon^{-2j-4}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+4,j+1}\left(\Phi_{odd,1}^{ex}(x,\mu,\varepsilon)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_2$$

являются асимптотическими решениями при $\rho \to \infty$ уравнений (7.8), где функции $v_{2j+3,j+1}(\xi)$ заменены на их асимптотики $V_{2j+3,j+1}(\xi)$, а при $j > 0$ и функции и $v_{2j+2,j}(\xi)$ заменены на на их асимптотики $V_{2j+2,j}(\xi)$. В силу леммы 4.8 существуют функции $v_{2j+4,j+1}(\xi) \in \mathcal{B}_2$, являющиеся решениями уравнений (7.8) и имеющие при $\rho \to \infty$ следующие асимптотики $V_{2j+4,j+1}(\xi)$:

$$V_{2j+4,j+1}(\xi) = \widetilde{V}_{2j+4,j+1}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k^{(2j+4,j+1)}(\xi)\rho^{-n+2-2k}.$$

Отсюда в силу леммы 8.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi_{n+2j+2+k,j+1}^{(2)}(x)$:

$$\Psi_{n+2j+2+k,j+1}^{(2)}(x) \sim Z_k^{(2j+4,j+1)}(x) r^{-n+2-2k}, \qquad k \geqslant 0.$$

В силу леммы 4.2 существуют функции $\Psi_{n+2j+2+k,j+1}^{(1)}(x) \in \mathcal{A}_k$, имеющие требуемые асимптотики в нуле и удовлетворяющие уравнениям (8.3) при некоторых $\Lambda_{n+2j+2+k,j+1}^{(2)}$.

Так как уже определены $\Psi_{n+2j+k,j+1}^{(0)}$, $\Psi_{n+2j+1+k,j+1}^{(1)} \in \mathcal{A}_k$ и $\Lambda_{n+2j+k,j+1}^{(0)}$, $\Lambda_{n+2j+1+k,j+1}^{(1)}$, то в соответствии с (8.1), (8.2) окончательно определены и коэффициенты $\lambda_{n+2j+2,j+1}$ и $\psi_{n+2j+2,j+1} \in \mathcal{A}^2$.

И так далее.

Замечание 8.4 (вывод формулы (2.7)). *Отметим, что*

$$\Lambda^{(2)}_{n+2,1} = 0, \quad \textit{если } \psi_0(0) = 0 \tag{8.19}$$

в силу (8.12) и леммы 4.4. Из (8.10), (8.18), (8.19) и (8.1) следует, что

$$\lambda_{n+2,1} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,k}\Lambda_k, \quad \textit{если } \psi_0(0) = 0.$$

Подставляя в это равенство значения постоянных Λ_k и $c^{(1)}_{m,k}$ из лемм 4.4, 4.6, получаем равенство (2.7).

Замечание 8.5 (вывод формулы (2.4)). *Если $H_0 = -\Delta + a$, то уравнение (7.8) для $v_{3,1}(\xi)$ вновь имеет вид (8.14). Его решение определяется равенством (8.15) и имеет при $\rho\to\infty$ асимптотику (8.16). Из (8.11), (8.12) и (8.16) следует, что*

$$\Psi^{(1)}_{n+1,1}(x) \sim r^{2-n}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}, \quad r\to 0.$$

В силу леммы 4.4 функция

$$\Psi^{(1)}_{n+1,1}(x) = E_0(x)\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}.$$

имеет в нуле требуемую асимптотику и является решением уравнения (8.3) при

$$\Lambda^{(1)}_{n+1,1} = \Lambda_0\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}. \tag{8.20}$$

Из (8.7), (8.20) и (8.1) следует, что

$$\lambda_{n+1,1} = \psi_0(0)\sum_{m=1}^{n} c^{(1)}_{0,m}\Lambda_m + \Lambda_0\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}.$$

Подставляя в это равенство значения постоянных Λ_k и $c^{(1)}_{m,k}$ из лемм 4.4, 4.6, получаем равенство (2.4).

Теорема доказана полностью. □

Частичные суммы рядов $\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ до степеней M по ε включительно обозначим через $\widehat{\psi}^{ex,s}_{odd,M}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\widehat{\psi}^{in,s}_{odd,M}(\xi,\mu,\varepsilon)$, соответственно. А через $\widehat{\lambda}^1_{odd,M}(\mu,\varepsilon)$ и $\widehat{\lambda}^2_{odd,M}(\mu,\varepsilon)$ обозначим аналогичные частичные сумм рядов (2.1) и (2.6) соответственно. Из пунктов 2)–4) доказанной теоремы 8.1 вытекает

Следствие 3. *Справедливы следующие равенства*

$$\begin{aligned}
\left(H_0 - \widehat{\lambda}^s_{odd,n+2N}(\mu,\varepsilon)\right)\widehat{\psi}^{ex,s}_{odd,n+2N}(x,\mu,\varepsilon) &= O\left(\mathcal{G}_n(r)\left(\left(\varepsilon r^{-1}\right)^2 + \varepsilon^2\mu^{-1}\right)^{N-1}\right)\\
&\quad \textit{при } r\to 0,\ \varepsilon r^{-1}\to 0,\\
\left(H_{\mu,\varepsilon} - \widehat{\lambda}^s_{odd,n+2N}(\mu,\varepsilon)\right)\widehat{\psi}^{in,s}_{odd,2(N+1)}(\xi,\mu,\varepsilon) &= O\left((\varepsilon\rho)^{-1}\left((\varepsilon\rho)^2 + \varepsilon^2\mu^{-1}\right)^{N}\right)\\
&\quad \textit{при } \rho\to\infty,\ \varepsilon\rho\to 0,\\
\widehat{\psi}^{ex,s}_{odd,n+2N}(x,\mu,\varepsilon) - \widehat{\psi}^{in,s}_{odd,2(N+1)}(\xi,\mu,\varepsilon) &= O\left(\left(r^2 + \varepsilon^2\mu^{-1} + \rho^{-2}\right)^{N}\right)\\
&\quad \textit{при } r\to 0, \quad \rho\to\infty,
\end{aligned}$$

причем, последнее равенство дифференцируемо по x_m (с учетом того, что $\xi = \varepsilon^{-1}x$).

9. Построение полных формальных асимптотических разложений в случае двукратного собственного значения λ_0 и нечетномерной области

В рассмотренном в предыдущих разделах случае простого собственного λ_0 при построении асимптотического разложения собственного значения можно было начинать построение не с функции $\psi_0(x)$, а например, с функции $\psi_0(x) + \varepsilon^q C\psi_0(x) = (1+\varepsilon^q C)\psi_0(x)$ для любых $q > 0$ и C, что, очевидно, в силу линейности рассматриваемых операторов, привело бы к той же асимптотике собственного значения. Поэтому начинать построение асимптотик с подобных функций и не имело смысла. В рассматриваемом же в настоящем разделе случае , когда λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ситуация — иная, так как этому собственному значению соответствуют две собственные функции $\psi_0^{(1)}(x)$ и $\psi_0^{(2)}(x)$. Поэтому при построении асимптотических разложений, соответствующих собственным функциям оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, сходящимся к собственным функциям $\psi_0^{(s)}(x)$, будем начинать построение со следующих асимптотических рядов:

$$\psi_0^{(s)}(x) + \varepsilon\psi_0^{(s^*)}(x)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\alpha_{i+1,j}^{(s)}\varepsilon^i\mu^{-j}, \tag{9.1}$$

где $s^* = 2$, если $s = 1$ и, наоборот, $s^* = 1$, если $s = 2$, а $\alpha_{i+1,j}^{(s)}$ — пока произвольные постоянные.

Замечание 9.1. *Интуитивные соображения присутствия последних сумм в (9.5) (обоснованность которых будет видна из дальнейшего согласования асимптотических разложений собственных функций) заключается в следующем наблюдении: ничто не запрещает при построении внешнего разложения собственной функции, сходящейся к $\psi_0^{(1)}(x)$ (к $\psi_0^{(2)}(x)$), добавлять на каждом последующем шагу построения функцию пропорциональную $\psi_0^{(2)}(x)$ (пропорциональную $\psi_0^{(1)}(x)$).*

Начиная построение асимптотических разложений с (9.1) и следуя методу согласования асимптотических разложений (повторяя алгоритм, приведенный в разделе 5), последовательно получаем сначала функции $v_{p,0}^{(s)}$ и главные члены (по нарастанию отрицательных степеней μ) внутренних разложений:

$$v_{0,0}^{(1)} \equiv \psi_0^{(1)}(0), \qquad v_{q,0}^{(1)}(\xi) = P_q^{(1)}(\xi) + \alpha_{1,0}^{(1)}P_q^{(2)}(\xi), \quad q \geqslant 1,$$
$$v_{1,0}^{(2)}(\xi) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)\xi_m + \alpha_{1,0}^{(2)}\psi_0^{(1)}(0), \quad v_{k,0}^{(2)}(\xi) = P_k^{(2)}(\xi) + \alpha_{1,0}^{(2)}P_k^{(1)}(\xi), \quad k \geqslant 2,$$

$$v_{2j+2,j+1}^{(1)}(\xi) = \psi_0^{(1)}(0)z_0^{(j+1)}(\xi), \qquad j \geqslant 0, \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned} v_{2j+3,j+1}^{(2)}(\xi) = {} & \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)z_m^{(j+1)}(\xi) \\ & + \psi_0^{(1)}(0)\left(\sum_{k=0}^{j}\alpha_{2k+1,k}^{(2)}z_0^{(j+1-k)}(\xi) + \alpha_{2j+3,j+1}^{(2)}\right), \quad j \geqslant 0; \end{aligned} \tag{9.3}$$

затем структуры внутренних асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} \psi_{odd}^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}v_{2+i,j+1}^{(1)}(\xi), \\ \psi_{odd}^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}^{(2)}(\xi) + \varepsilon^3\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}v_{3+i,j+1}^{(2)}(\xi) \end{aligned} \tag{9.4}$$

(аналог (5.15), (5.20)); потом предполагаемые структуры внешних асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} \psi_{odd}^{ex,1}(x,\mu,\psi_0^{(1)}(x) &+ \varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i,j+1}^{(1)}(x) \\ &+ \varepsilon\psi_0^{(2)}(x)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\alpha_{i+1,j}^{(1)}\varepsilon^i\mu^{-j}, \\ \psi_{odd}^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon) = \psi_0^{(2)}(x) &+ \varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i+1,j+1}^{(2)}(x) \\ &+ \varepsilon\psi_0^{(1)}(x)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\alpha_{i+1,j}^{(2)}\varepsilon^i\mu^{-j}, \end{aligned} \tag{9.5}$$

(аналог (6.5)) и ожидаемые структуры (2.10), (2.11) асимптотических разложений собственных значений (аналог (2.1), (2.6)).

Подставляя ряды (2.10), (2.11), (9.5) в уравнение (7.1), получаем заведомо выполняющиеся уравнения

$$H_0\psi_0^{(s)} = \lambda_0\psi_0^{(s)} \quad \text{в } \Omega$$

и рекуррентные системы уравнений в $\Omega\backslash\{0\}$ для остальных коэффициентов внешних разложений (9.5):

$$\begin{aligned} (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+2j,j+1}^{(s)} =& \lambda_{n+2j,j+1}^{(s)}\psi_0^{(s)}, \qquad j\geqslant 0 \\ (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i,1}^{(s)} =& \lambda_{n+i,1}^{(s)}\psi_0^{(s)} + \psi_0^{(s^*)}\sum_{p=1}^{i}\alpha_{p,0}^{(s)}\lambda_{n+i-p,1}^{(s)} \quad i\geqslant 1, \\ (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i+2j,j+1}^{(s)} =& \lambda_{n+i+2j,j+1}^{(s)}\psi_0^{(s)} \\ &+ \psi_0^{(s^*)}\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\alpha_{2q+p,q}^{(s)}\lambda_{n+i-p+2(j-q),j-q+1}^{(s)}, \\ &1\leqslant i\leqslant n-3, \quad j\geqslant 1, \\ (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i+2j,j+1}^{(s)} =& \lambda_{n+i+2j,j+1}^{(s)}\psi_0^{(s)} \\ &+ \sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{q=0}^{j-1}\lambda_{n+k+2q,q+1}^{(s)}\psi_{i-k+2(j-q),j-q}^{(s)} \\ &+ \psi_0^{(s^*)}\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\alpha_{2q+p,q}^{(s)}\lambda_{n+i-p+2(j-q),j-q+1}^{(s)}, \\ &i\geqslant n-2, \quad j\geqslant 1, \end{aligned} \tag{9.6}$$

(аналог (7.2)), где

$$\psi_{n+2j,j+1}^{(2)}(x) = \lambda_{n+2j,j+1}^{(2)} = \lambda_{n+1+2j,j+1}^{(2)} = 0 \tag{9.7}$$

(аналог (7.3), (8.13)).

Подставляя ряды (2.10), (2.11), (9.4) в уравнение (7.1), получаем для коэффициентов внутренних разложений (9.4) уравнения (7.8), в которых коэффициенты $v_{p,q}$, $\lambda_{k,l}$ заменены $v^{(s)}_{p,q}$, $\lambda^{(s)}_{k,l}$, а равенство (7.9) заменяется на следующее:

$$v^{(2)}_{0,0}(\xi)=v^{(2)}_{2j+2,j+1}(\xi)=\lambda^{(2)}_{n+2j+2,j+1}=\lambda^{(2)}_{n+1+2j+2,j+1}=0. \tag{9.8}$$

Поэтому далее для коэффициентов внутренних разложения будем ссылаться на уравнения (7.8), подразумевая, что в них добавлены упомянутые выше соответствующие индексы.

По аналогии с предыдущем разделом коэффициенты асимптотических разложений собственных значений и внешних разложений собственных функций будем строить в виде

$$\lambda^{(s)}_{n+i+2j,j+1}=\sum_{t=0}^{i}\Lambda^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1},\quad j,i\geqslant 0, \tag{9.9}$$

$$\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)=\sum_{t=0}^{i}\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x),\quad j,i\geqslant 0, \tag{9.10}$$

$$\alpha^{(s)}_{2j+i,j}=\sum_{t=0}^{i}\alpha^{(t,s)}_{2j+t,j},\quad j,i\geqslant 0, \tag{9.11}$$

и обозначим через $\Phi^{ex,s}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ ряды вида (9.5), где $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ и $\alpha^{(s)}_{2j+i,j}$ заменены на

$$\Phi^{(N,s)}_{n+i+2j,j+1}(x)=\sum_{t=0}^{\min\{i,N\}}\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x),\quad j\geqslant 0,$$

$$\Theta^{(N,s)}_{2j+i,j+1}=\sum_{t=0}^{\min\{i,N\}}\alpha^{(t,s)}_{2j+i,j+1},\quad j\geqslant 0,$$

соответственно.

Для дальнейшего согласования рядов $\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ из (9.5) и (9.4) понадобится следующий аналог леммы 8.1, справедливость которого также вытекает из определения $\mathcal{A}^m$, $\mathcal{A}_m$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$, $\mathcal{K}_{m,l}$, $\mathcal{K}$, $\Phi^{ex,s}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ и (9.9), (9.10), (9.11).

Лемма 9.1. *Если коэффициенты $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ рядов (9.5) принадлежат $\mathcal{A}^i$, то*

$$\mathcal{K}(\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon))=\Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon),$$

где $\Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ — ряды вида (9.4), в которых коэффициенты $v^{(s)}_{2+i,j+1}(\xi)$ заменены на ряды $V^{(s)}_{2+i,j+1}(\xi)\in\widetilde{\mathcal{B}}_{i-2j}$.

Если $\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x)\in\mathcal{A}_{i-t}$, то функция $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемая равенством (9.10), принадлежит $\mathcal{A}^i$ и имеют место следующие равенства:

$$V^{(s)}_{2j+2+t,j+1}(\xi)=\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}(\xi)+\sum_{k=0}^{\infty}Z^{(2j+2+t,j+1,s)}_{k}(\xi)\rho^{-n+2-2k},$$

где $\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2,j+1}(\xi)\equiv 0$,

$$\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}(\xi)=\varepsilon^{-2j-2-t}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+2+t,j+1}\left(\Phi^{ex,s}_{odd,t-1}(x,\mu,\varepsilon)\right)\in\widetilde{\mathcal{B}}_t,\quad t\geqslant 1,$$

(т.е. $\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}$ не зависит от $\Psi^{(m,s)}_{p,q}$ при $m\geqslant t-1$), а $Z^{(2j+2+t,j+1,s)}_{k}r^{-n+2-2k}$ — главный член асимптотики $\Psi^{(t,s)}_{n+2j-t+k,j+1}(x)$ в нуле.

Если, к тому же, функции $\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ являются в $\Omega\backslash\{0\}$ решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+2j,j+1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+2j,j+1}\psi^{(s)}_0, \qquad j\geqslant 0\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi^{(s)}_0+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\alpha^{(s)}_{p,0}\Lambda^{(t,s)}_{n+i-p,1} \quad i\geqslant 1,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi_0, \quad i\geqslant 0,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0\\
&+\sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{p=0}^{t}\Lambda^{(p,s)}_{n+k+2q,q+1}\Psi^{(t-p,s)}_{i-k+2(j-q),j-q}\\
&+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\alpha^{(s)}_{2q+p,q}\Lambda^{(t,s)}_{n+i-p+2(j-q),j-q+1},\\
&i\geqslant 1 \quad j\geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{9.12}
$$

или уравнений

$$
\begin{aligned}
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+2j,j+1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+2j,j+1}\psi^{(s)}_0, \qquad j\geqslant 0\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi^{(s)}_0+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\sum_{l=0}^{t}\alpha^{(l,s)}_{p,0}\Lambda^{(t-l,s)}_{n+i-p,1} \quad i\geqslant 1,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi_0, \quad i\geqslant 0,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1} =&\Lambda^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0\\
&+\sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{p=0}^{t}\Lambda^{(p,s)}_{n+k+2q,q+1}\Psi^{(t-p,s)}_{i-k+2(j-q),j-q}\\
&+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\sum_{l=0}^{t}\alpha^{(l,s)}_{2q+p,q}\Lambda^{(t-l,s)}_{n+i-p+2(j-q),j-q+1},\\
&i\geqslant 1 \quad j\geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{9.13}
$$

то функции $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемые равенствами (9.10), являются решениями уравнений (9.6), (9.7), при $\lambda^{(s)}_{n+i+2j,j+1}$, определяемыми равенствами (9.9), а ряды $\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}$ являются формальными асимптотическими решениями уравнений (7.8) при $\rho\to\infty$, где в правой части $v_{p,q}$ и $\lambda_{p,q}$ заменены на $V^{(s)}_{p,q}$ и и $\lambda^{(s)}_{p,q}$ при $q>0$.

Вначале займемся согласованием рядов $\psi^{ex,1}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$. В этом случае будем использовать уравнения (9.13). Следуя алгоритму доказательства теоремы 8.1, видим, что функции $v^{(1)}_{2j+2,j+1}(\xi)$, $j\geqslant 0$, определяемые равенствами (9.2), принадлежат $\mathcal{B}_0$, являются решениями уравнений (7.8) (в первой строчке), и в силу лемм 4.6, 4.7 имеют при $\rho\to\infty$ следующие асимптотики

$$
V^{(1)}_{2j+2,j+1}(\xi)=\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\rho^{2-n}+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\xi)\rho^{-2k-n+2}, \quad j\geqslant 0.
$$

Отсюда в силу леммы 9.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x)$:

$$\begin{aligned}\Psi^{(0,1)}_{n+2j,j+1}(x) \sim&\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}r^{2-n},\\ \Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x) \sim&Y_k(x)r^{-2k-n+2}, \qquad k \geqslant 1.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Функции

$$\Psi^{(0,1)}_{n+2j,j+1}(x) =\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}E_0(x) \tag{9.15}$$

имеют требуемую асимптотику в нуле и в силу леммы 4.4 удовлетворяет соответствующим уравнениям

$$(H_0-\lambda_0)\Psi^{(0,1)}_{n+2j,j+1} = \Lambda^{(0,1)}_{n+2j,j+1}\psi^{(1)}_0, \quad j \geqslant 0$$

из (9.13) при

$$\Lambda^{(0,1)}_{n+2j,j+1} = \psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\Lambda_0. \tag{9.16}$$

Замечание 9.2 (вывод формулы (2.12))**.** *В силу (9.9), (9.10), (9.16) и (9.15), в частности, получаем, что*

$$\lambda^{(1)}_{n+2j,j+1} = \psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\Lambda_0, \quad \psi_{n+2j,j+1}(x) = \psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}E_0(x) \in \mathcal{A}^0.$$

Подставляя в эти равенства значения Λ_0, $c^{(1)}_{0,0}$ из лемм 4.4, 4.6, получаем равенство (2.12) для $\lambda^{(1)}_{n,1}$.

При $k \geqslant 1$ уравнения (9.13) для $\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}(H_0-\lambda_0)\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1} =&\Lambda^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}\psi^{(1)}_0\\ &+\psi^{(2)}_0\sum_{m=1}^{k}\sum_{q=0}^{j-1}\alpha^{(0,1)}_{2q+m,q}\Lambda^{(0,1)}_{n+2(j-q)+k-m,(j-q)+1}.\end{aligned}$$

В силу леммы 4.2 из условия разрешимости этих уравнений с заданными в (9.14) особенностями в нуле решений, во-первых, определяем $\Lambda^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}$ и $\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x) \in \mathcal{A}_k$, а во-вторых, учитывая, что $\Lambda^{(0,1)}_{n,1} = \lambda^{(1)}_{n,1} \neq 0$ в силу (2.12) и условия $\langle V\rangle \neq 0$, находим $\alpha^{(0,1)}_{2j+k,j+1}$. Отметим, что $\alpha^{(1)}_{2j+1,j} = \alpha^{(0,1)}_{2j+1,j}$ в силу (9.11).

На следующем шаге аналогично определяются $\Psi^{(1,1)}_{n+2j+1+k,j+1}$, $\Lambda^{(1,1)}_{n+2j+1+k,j+1}$ и $\alpha^{(1,1)}_{2j+k+2,j}$ при $k \geqslant 0$, а следовательно в силу (9.9), (9.10) и (9.11) окончательно находятся $\psi^{(1)}_{n+2j+1,j+1}$, $\lambda^{(1)}_{n+2j+1,j+1}$ и $\alpha^{(1)}_{2j+2,j}$. И так далее.

В результате получаем справедливость следующего аналога теоремы 8.1 и ее следствия 3.

Теорема 9.1. *Пусть n — нечетно, $\langle V\rangle \neq 0$, λ_0 – двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, $\psi^{(1)}_0$ и $\psi^{(2)}_0$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, удовлетворяющие условию (2.8) и выбранные в соответствии с (2.9).*

Тогда существуют ряд $\psi^{ex,1}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ вида (9.5), ряд $\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ вида (9.4) и ряд (2.10) такие, что:

1) выполняется равенство (2.12);

2) $\psi^{(1)}_{n+2j+i,j+1} \in \mathcal{A}^i$, $v^{(1)}_{2j+2+i,j+1} \in \mathcal{B}_i$;

3) для их частичных сумм справедливы утверждения следствия 3.

Перейдем к согласованию рядов $\psi^{ex,2}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$. В этом случае будет достаточно использовать уравнения (9.12). Следуя приведенному выше алгоритму, видим, что функции $v^{(2)}_{2j+3,j+1}(\xi)$, $j\geqslant 0$, определяемые равенствами (9.3), принадлежат $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}_1$, являются решениями уравнений (7.8) (с учетом равенств (9.8)) и в силу лемм 4.6, 4.7 имеют при $\rho\to\infty$ следующие асимптотики

$$\begin{aligned}V^{(2)}_{2j+3,j+1}(\xi)=&\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\right)\rho^{2-n}\\&+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi^{(2)}_0}{\partial x_i}(0)c^{(j+1)}_{m,i}+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,i}\right)\xi_i\rho^{-n}\\&+\sum_{k=2}^{\infty}\left(Y^{(j+1,0,2)}_k(\xi)+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}Y^{(j+1,0,1)}_k(\xi)\right)\rho^{-2k-n+2}.\end{aligned}$$

Отсюда, во-первых, в силу (9.9), (9.10) последовательно вытекает, что

$$\begin{aligned}\Psi^{(0,2)}_{n+2j+k,j+1}(x)=&\Lambda^{(0,2)}_{n+2j+k,j+1}=0,\quad k\geqslant 0,\\\psi^{(2)}_{n+2j,j+1}(x)=&\lambda^{(2)}_{n+2j,j+1}=0,\end{aligned}\tag{9.17}$$

а во-вторых, в силу леммы 9.1 получаем, что $\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}(x)$:

$$\Psi^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1}(x)\sim\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\right)\rho^{2-n},\tag{9.18}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}(x)\sim\sum_{i=1}^{n}\Bigg(&\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,i}\\&+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,i}\Bigg)\xi_i\rho^{-n},\end{aligned}\tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}(x)\sim\Big(&Y^{(j+1,0,2)}_k(\xi)\\&+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}Y^{(j+1,0,1)}_k(\xi)\Big)\rho^{-2k-n+2},\qquad k\geqslant 2,\end{aligned}\tag{9.20}$$

при $r\to 0$. Уравнения (9.12) для этих функций с учетом равенств (9.17) принимают следующий вид:

$$(H_0-\lambda_0)\Psi^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1}=\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1}\psi^{(2)}_0,\tag{9.21}$$

$$(H_0-\lambda_0)\Psi^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}=\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}\psi^{(2)}_0,\tag{9.22}$$

$$(H_0-\lambda_0)\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}=\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}\psi^{(2)}_0,\quad k\geqslant 2.\tag{9.23}$$

В силу леммы 4.4 уравнения (9.21) имеют решения с асимптотикой (9.18) в нуле только, если множитель в (9.18) равен нулю, т.е.

$$\alpha^{(2)}_{2j+1,j}=-\frac{1}{\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0},\tag{9.24}$$

что, в свою очередь, влечет равенства

$$\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1}=\Psi^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1}=0.\tag{9.25}$$

Замечание 9.3 (о структуре внешнего разложения). *Из (9.25), (9.17) и (9.9), (9.10) вытекают равенства*

$$\psi^{(2)}_{n+2j,j+1}(x)=\psi^{(2)}_{n+2j+1,j+1}(x)=\lambda^{(2)}_{n+2j,j+1}=\lambda^{(2)}_{n+1+2j,j+1}=0,$$

являющиеся более детальными, нежели равенства (9.7).

Так же в силу леммы 4.4 функции

$$\Psi^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,i}\right.$$
$$\left.+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi_0^{(1)}(0)c^{(j+1)}_{0,i}\right)E_i(x)$$

имеют асимптотики (9.19) и является решениями уравнений (9.22) при

$$\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,i}+\alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi_0^{(1)}(0)c^{(j+1)}_{0,i}\right)\Lambda^{(2)}_i. \tag{9.26}$$

И, наконец, в силу следствия 2 существуют функции $\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}\in\mathcal{A}^k$, имеющие асимптотики (9.20) и являющиеся решениями уравнений (9.23) при некоторых $\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}$.

На следующем шаге, аналогично, из условия разрешимости уравнений (9.12) для $\Psi^{(2,2)}_{n+2j+2,j+1}(x)$ находим $\alpha^{(2)}_{2j+2,j}$ и получаем, что

$$\Lambda^{(2,2)}_{n+2j+2,j+1}=\Psi^{(2,2)}_{n+2j+2,j+1}=0. \tag{9.27}$$

Далее, в силу следствия 2 существуют функции $\Psi^{(2,2)}_{n+2j+k+2,j+1}\in\mathcal{A}^k$, $k\geqslant 1$, имеющие асимптотики, требуемые асимптотики и являющиеся решениями уравнений (9.12) при некоторых $\Lambda^{(2,2)}_{n+2j+k+2,j+1}$. И так далее.

Замечание 9.4 (вывод формулы (2.13)). *Так как $\Lambda^{(2)}_{n+2,1}=\Lambda^{(1,2)}_{n+2,1}$ в силу (9.9) и (9.17), (9.27), то, подставляя в (9.26) значения $\alpha^{(2)}_{1,0}$ из (9.24) и Λ_k, $c^{(1)}_{m,k}$ из лемм 4.4, 4.6, выводим равенство (2.13).*

В результате получаем справедливость следующего аналога теоремы 8.1 и ее следствия 3.

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1.*

Тогда существуют ряд $\psi^{ex,2}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ вида (9.5), ряд $\psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ вида (9.4) и ряд (2.11) такие, что:

1) выполняется равенство (2.13);

2) $\psi^{(2)}_{n+2j+i,j+1}\in\mathcal{A}^i$, $v^{(2)}_{2j+2+i,j+1}\in\mathcal{B}_i$;

3) для их частичных сумм справедливы утверждения следствия 3.

10. Построение полных формальных асимптотических разложений в случае четномерных областей

Для случая четных областей асимптотические разложения более громоздкие и содержат степени $\ln\varepsilon$. Это связано с тем, что асимптотики в нуле коэффициентов внешнего разложения содержат логарифмические члены, которые при переписывании во внутренних переменных порождают слагаемые, содержащие $\ln\varepsilon$. Поэтому во внутреннем и внешнем разложениях собственных функций и разложении собственного значения последовательно возникают слагаемые вида $\varepsilon^i\mu^{-j}\ln\varepsilon\, v_{i,j,1}(\xi)$, $\varepsilon^i\mu^{-j}\ln\varepsilon\,\psi_{i,j,1}(x)$ и $\varepsilon^i\mu^{-j}\ln\varepsilon\,\lambda_{i,j,1}$. В свою очередь, переписывание асимптотики в нуле коэффициентов внешнего разложения $\psi_{i,j,1}(x)$ во внутренних переменных последовательно порождает слагаемые, содержащие $\ln^2\varepsilon$, во внутреннем, внешнем разложениях собственных функций и в разложении собственного значения. Используя применяемый в предыдущих разделах алгоритм метода согласования асимптотических разложений, легко проследить, что для четных n в случае простого собственного значения λ_0 цепочка возникновения первых членов, содержащих повышающиеся степени $\ln\varepsilon$, выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&v_{0,0}=\psi_0(0),\quad v_{k,0}=P_k,\quad k\geqslant 1\\
\Rightarrow\ &\varepsilon^{2+2j}\mu^{-j-1}:\ v_{2+2j,j+1}=\psi_0(0)z_0^{(j+1)}j\geqslant 0\\
\Rightarrow\ &\varepsilon^{n+2j}\mu^{-j-1}:\ \psi_{n+2j,j+1}=\psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}E_0;\quad \lambda_{n+2j,j+1}=\psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}\Lambda_0\\
\Rightarrow\ &\varepsilon^{n+2j}\mu^{-j-1}\ln\varepsilon:\ v_{n+2j,j+1,1}=\psi_0(0)A_j^{(1)},\quad v_{n+2j+k,j+1,1}(\xi)=\psi_0(0)R_k^{(1)}(\xi)\\
\Rightarrow\ &\dots\\
\Rightarrow\ &\varepsilon^{qn+2j}\mu^{-j-q}\ln^q\varepsilon:\ v_{qn+2j,j+q,q}=\psi_0(0)A_j^{(q)},\\
&v_{qn+2j+k,j+q,q}=\psi_0(0)R_k^{(q)}\\
\Rightarrow\ &\varepsilon^{qn+2j+2}\mu^{-j-q-1}\ln^q\varepsilon:\ v_{qn+2j+2,j+q+1,q}=\psi_0(0)A_j^{(q)}z_0^{(j+1)}\\
\Rightarrow\ &\varepsilon^{3n+2j}\mu^{-j-3}\ln^q\varepsilon:\ \psi_{(q+1)n+2j,j+q+1,q}=\psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}A_j^{(q)}E_0;\\
&\qquad\qquad\lambda_{(q+1)n+j,j+q+1,q}=\psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}A_j^{(q)}\Lambda_0\\
\Rightarrow\ &\varepsilon^{(q+1)n+2j}\mu^{-j-q-1}\ln^{q+1}\varepsilon:\ v_{(q+1)n+2j,j+q+1,q+1}=\psi_0(0)A_j^{(q+1)},\\
&v_{(q+1)n+2j+k,j+q+1,q+1}=\psi_0(0)R_k^{(q+1)}\ \Rightarrow\dots
\end{aligned}
$$

Из этой цепочки и приведенного в предыдущем разделе согласования асимптотических разложений следует, что если $\psi_0(0)=0$, то внутреннее разложение имеет вид

$$\psi_{even}^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)=\sum_{q=0}^{\infty}\mu^{-q}\varepsilon^{qn}\ln^q\varepsilon\,\psi_q^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon),\tag{10.1}$$

где $s=1$, ряд $\psi_0^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon)$ из (5.15), а ряды $\psi_l^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon)$ при $l\geqslant 1$ имеют такую же структуру, внешнее разложение имеет вид

$$\psi_{even}^{ex,s}(\xi,\mu,\varepsilon)=\sum_{q=0}^{\infty}\mu^{-q}\varepsilon^{qn}\ln^q\varepsilon\,\psi_q^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon),\tag{10.2}$$

где $s=1$, ряд $\psi_0^{ex,1}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{ex,1}(x,\mu,\varepsilon)$ из (6.5), а ряды $\psi_l^{ex,1}(\xi,\mu,\varepsilon)+\psi_0(x)$ при $l\geqslant 1$ имеют такую же структуру, а асимптотическое разложение собственного значения имеет вид

$$\lambda_{even}^{s}(\mu,\varepsilon)=\sum_{q=0}^{\infty}\mu^{-q}\varepsilon^{qn}\ln^q\varepsilon\,\lambda_q^{s}(\mu,\varepsilon),\tag{10.3}$$

где $s=1$, ряд $\lambda_0^1(\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\lambda_{odd}^1(\mu,\varepsilon)$ из (6.7), а ряды $\lambda_l^1(\mu,\varepsilon)+\lambda_0$ при $l\geqslant 1$ имеют такую же структуру. Следовательно, ряд $\lambda_{even}^1(\mu,\varepsilon)$ имеет вид (2.1).

Если же $\psi_0(0)=0$, то для четных $n\geqslant 4$ в случае простого собственного значения λ_0 цепочка возникновения первых членов, содержащих повышающиеся степени $\ln\varepsilon$, имеет следующий вид:

$$v_{0,0} = \psi_0(0) = 0 \quad v_{1,0}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad v_{k,0} = P_k, \quad k \geqslant 2$$

$$\Rightarrow v_{3+2j,j+1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) z_m^{(j+1)}, \quad j \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \psi_{n+2j+1,j+1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,0}^{(j+1)} E_0;$$

$$\psi_{n+2j+2,j+1} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,i}^{(j+1)} E_i + B_j^{(1)} E_0;$$

$$\lambda_{n+2j+2,j+1} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,i}^{(j+1)} \Lambda_i$$

$$\Rightarrow v_{n+2j+1,j+1,1} = A_j^{(1)}, \quad v_{n+2j+1+l,j+1,1}(\xi) = R_l^{(1)}(\xi), \quad l \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow v_{qn+2j+1,j+q,q} = A_j^{(q)}, \quad v_{qn+2j+1+l,j+q,q} = R_l^{(q)}$$

$$\Rightarrow v_{qn+2j+3,j+q+1,q} = A_j^{(q)} z_0^{(j+1)}$$

$$\Rightarrow \psi_{(q+1)n+2j+1,j+q+1,q} = A_j^{(q)} c_{0,0}^{(j+1)} E_0;$$

$$\psi_{(q+1)n+2j+2,j+q+1,q} = A_j^{(q)} \sum_{i=1}^{n} c_{0,i}^{(j+1)} E_i + B_j^{(q+1)} E_0;$$

$$\lambda_{(q+1)n+2j+2,j+q+1,q} = A_j^{(q)} \sum_{i=1}^{n} c_{0,i}^{(j+1)} \Lambda_i$$

$$\Rightarrow v_{2n+2j+1,j+2,2} = A_j^{(q+1)}, \quad v_{(q+1)n+2j+2,j+q+1,q+1} = R_l^{(k+1)} \Rightarrow \ldots$$

Замечание 10.1 (случай $\psi_0(0) = 0$, $n = 2$)**.** *Так как в рассматриваемом случае*

$$E_0(x) = -\ln r + c(\Omega) + O(r \ln r), \quad r \to 0,$$

в силу леммы 4.5, то для согласования главных членов внешнего и внутреннего асимптотических разложений собственной функции в приведенной выше цепочке достаточно выбирать

$$v_{3+2j,j+1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \left(z_m^{(j+1)} + c_{m,0}^{(j+1)} c(\Omega) \right),$$

$$v_{qn+2j+3,j+q+1,q} = A_j^{(q)} \left(z_0^{(j+1)} + c_{0,0}^{(j+1)} c(\Omega) \right), \quad j \geqslant 0,\ q \geqslant 1.$$

Из этой цепочки и приведенного в предыдущем разделе согласования асимптотических разложений следует, что если $\psi_0(0) = 0$, то внутреннее разложение имеет вид (10.1), где $s = 2$, ряд $\psi_0^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon)$ из (5.20), а ряды $\psi_l^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру с точностью до постоянного слагаемого, внешнее разложение имеет вид (10.2), где $s = 2$, ряд $\psi_0^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon)$ из (6.5), а ряды $\psi_l^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon) + \psi_0(x)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру, а асимптотическое разложение собственного значения имеет вид (10.3), где $s = 2$, ряд $\lambda_0^2(\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\lambda_{odd}^2(\mu,\varepsilon)$ из (6.7), а ряды $\lambda_l^2(\mu,\varepsilon) + \lambda_0$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру. Следовательно, ряд $\lambda_{even}^2(\mu,\varepsilon)$ имеет вид (2.6).

Замечание 10.2. *Уравнения для коэффициентов асимптотических разложений (10.1), (10.2) собственных функций выводятся так же, как и в предыдущих разделах. Ряды (10.2) и (10.3) подставляются в уравнение*

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon}, \tag{10.4}$$

и выписываются равенства при одинаковых степенях $\varepsilon, \ln\varepsilon$ и μ. В результате получаем уравнения на коэффициенты внешнего разложения (10.2). Аналогично, подстановкой рядов (10.1) и (10.3) в уравнение (10.4), переходом в нем ко внутренней переменной ξ и выписыванием равенств при одинаковых степенях $\varepsilon, \ln\varepsilon$ и μ получаются уравнения на коэффициенты внутреннего разложения (10.1). Если коэффициенты разложений удовлетворяют полученным таким образом уравнениям, то будем говорить, что ряды (10.1), (10.2), (10.3) являются асимптотическими решениями уравнения (10.4).

По аналогии с индексами, используемыми в приведенных выше цепочках, при $l \geqslant 1$ для коэффициентов рядов $\psi_l^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$, $\psi_l^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\lambda_l^{(s)}(\mu,\varepsilon)$ при $\varepsilon^i\mu^k$ будем использовать обозначения $v_{i,k,l}$, $\psi_{i,k,l}$ и $\lambda_{i,k,l}$ соответственно.

Следуя процедуре согласования асимптотических разложений, приведенной в разделе 8, легко получить справедливость следующего утверждения.

Теорема 10.1. *Пусть λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ψ_0 — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция. Тогда при четных n существуют ряды (10.1), (10.2), (10.3) такие, что:*

1) они являются асимптотическими решениями уравнения (10.4);

2) ряды $\lambda^1_{even}(\mu,\varepsilon)$, $\lambda^2_{even}(\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами (2.1), (2.6), соответственно, причем, для них выполняются равенства (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) (последнее с учетом утверждения леммы 4.6 для $n=2$);

3) ряды ряды $\psi_0^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами $\psi_{odd}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ из (6.5);

4) $\psi_{n+2j+i,j+1}$, $\psi_{n+2j+nl+i,j+1,l} \in \mathcal{A}^i$, $v_{2j+2+i,j+1}$, $v_{2j+ln+2+i,j+1,l} \in \mathcal{B}_i$;

5) для частичных сумм рядов (10.1), (10.2), (10.3) справедливы утверждения следствия 3 (с заменой индекса "odd" на "even"в формулировке).

Сформулируем аналог этой теоремы для случая кратного λ_0. Следуя алгоритму, приведенному в предыдущем разделе 9, легко выписать цепочки возникновения первых членов, содержащих повышающиеся степени $\ln\varepsilon$, и в случае двукратного собственного значения λ_0, и убедиться, что асимптотические разложения имеют вид (10.1), (10.2), (10.3), где ряды $\psi_0^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядами $\psi_{odd}^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$ из (9.4), а ряды $\psi_l^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру (последние с точностью до постоянного слагаемого), ряды $\psi_0^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядами $\psi_{odd}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ из (9.5), а ряды $\psi_l^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon) + \psi_0^{(s)}(x)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру, а асимптотические разложения собственных значений имеет вид (2.10), (2.11). Аналогично предыдущему разделу доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 10.2. *Пусть λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, $\langle V\rangle \neq 0$, $\psi_0^{(1)}$ и $\psi_0^{(2)}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, удовлетворяющие (2.8), выбраны в соответствии с (2.9). Тогда при четных n существуют ряды (10.1), (10.2), (10.3) такие, что:*

1) они являются асимптотическими решениями уравнения (10.4);

2) ряды $\lambda^1_{even}(\mu,\varepsilon)$, $\lambda^2_{even}(\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами (2.10) и (2.11) соответственно, причем, для них выполняются равенства (2.12) и (2.13);

3) ряды ряды $\psi_0^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами $\psi_{odd}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ из (9.5);

4) $\psi^{(s)}_{n+2j+i,j+1}$, $\psi^{(s)}_{n+2j+nl+i,j+1,l} \in \mathcal{A}^i$, $v^{(s)}_{2j+2+i,j+1}$, $v^{(s)}_{2j+ln+2+i,j+1,l} \in \mathcal{B}_i$;

5) для частичных сумм рядов (10.1), (10.2), (10.3) справедливы утверждения следствия 3 (с заменой индекса "odd" на "even"в формулировке).

Построение формальных асимптотических разложений (2.1)–(2.13) собственных значений, соответствующих собственных функций методом согласования асимптотических разложений закончено. Заметим также, что при построении асимптотик условие (1.9) не использовалось. Очевидно, что ряды (2.1), (2.6), (2.10), (2.11) являются асимптотическими и при более слабом условии (1.6).

11. Обоснование асимптотических разложений

Всюду далее, во-первых, асимптотические разложения собственных функций и собственных значений считаются выбранными в соответствии с утверждениями теорем 8.1, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2, а во-вторых, так как дальнейшее изложение не зависит от четности n, то в обозначениях этих рядов и их частичных сумм будем опускать индексы "odd" и "even". С учетом утверждений упомянутых теорем обоснование построенных асимптотических разложений достаточно стандартно (см., например, [8]).

Обозначим

$$\widetilde{\psi}_N^{(s)}(x,\mu,\varepsilon) := \left(1-\chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)\widehat{\psi}_{n+2N}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon) + \chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\widehat{\psi}_{2(N+1)}^{in,s}\left(\frac{x}{\varepsilon},\mu,\varepsilon\right)$$

где, напомним, $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t<1$ и нулю при $t>2$. Из утверждений теорем 8.1, 9.1, 10.1, 10.2 вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 11.1. *Для $\widetilde{\psi}_N^{(s)}$ справедливы равенства*

$$\|\widetilde{\psi}_N^{(s)} - \psi_0^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0, \tag{11.1}$$

$$\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\widetilde{\psi}_N^{(s)} = \widehat{\lambda}_{n+2N}^s\widetilde{\psi}_N^{(s)} + f_N^{(s)}, \tag{11.2}$$

причем, если выполнено условие (1.9), то

$$\|f_N^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{M(N)}\right), \qquad M(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{11.3}$$

Обозначим через $\sigma(\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon})$ спектр оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$. В силу хорошо известной оценки резольвенты (см., например, [1, Глава 5, § 3]) имеем

$$\left\|\widetilde{\psi}_N^{(s)}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|f_N^{(s)}\|_{L_2(\Omega)}}{\operatorname{dist}\left\{\sigma(\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}), \widehat{\lambda}_{n+2N}^s\right\}}.$$

Из этой оценки и (11.1), (11.3) вытекает, что

$$\operatorname{dist}\left\{\sigma(\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}), \widehat{\lambda}_{n+2N}^s\right\} = O\left(\varepsilon^{M(N)}\right), \qquad M(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Это равенство в силу теоремы 2.1, ее следствия 1 и произвола в выборе N обосновывает асимптотические разложения (2.1)–(2.13) собственных значений и, в частности, заканчивает доказательство теорем 2.2, 2.3.

Отметим также, что в случае двукратного собственного значения λ_0

$$\left|\lambda^{\mu,\varepsilon,2} - \lambda^{\mu,\varepsilon,1}\right| \geqslant c\varepsilon^n\mu^{-1}, \quad c>0, \tag{11.4}$$

в силу (2.10)–(2.12) и неравенства $\langle V\rangle \neq 0$. Следовательно, собственные значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$ – простые, и для окончательного доказательства теоремы 2.4 осталось показать, что

$$\|\psi^{\mu,\varepsilon,s} - \psi_0^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0. \tag{11.5}$$

Разложим $\widetilde{\psi}_N^{(1)}$ на прямую сумму:

$$\widetilde{\psi}_N^{(1)} = b_N(\mu,\varepsilon)\psi^{\mu,\varepsilon,1} + \psi_{\mu,\varepsilon}^{\perp}, \tag{11.6}$$

$$\text{где} \qquad b_N(\mu,\varepsilon) = \left(\widetilde{\psi}_N^{(1)}, \psi^{\mu,\varepsilon,1}\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad \left(\psi_{\mu,\varepsilon}^{\perp}, \psi^{\mu,\varepsilon,1}\right)_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{11.7}$$

В силу (11.2), (11.6) получаем, что

$$\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\psi_{\mu,\varepsilon}^{\perp} = \lambda^{\mu,\varepsilon,1}\psi_{\mu,\varepsilon}^{\perp} + \widetilde{f}_N^{(1)}, \tag{11.8}$$

$$\text{где} \qquad \widetilde{f}_N^{(1)} = \left(\widehat{\lambda}_{n+2N}^1 - \lambda^{\mu,\varepsilon,1}\right)\left(b_N(\mu,\varepsilon)\psi^{\mu,\varepsilon,1} + \psi_{\mu,\varepsilon}^{\perp}\right) + f_N^{(1)}.$$

Из последнего равенства и из (11.7), (11.1) и (11.3) вытекает, что

$$\|\widetilde{f}_N^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{M(N)}\right), \qquad M(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{11.9}$$

Так как к λ_0 сходятся два простых собственных значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$, то из (11.8) и второго равенства в (11.7) следует, что

$$\left\|\psi_{\mu,\varepsilon}^{\perp}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|\widetilde{f}_N^{(1)}\|_{L_2(\Omega)}}{\left|\lambda^{\mu,\varepsilon,2} - \lambda^{\mu,\varepsilon,1}\right|}.$$

Из этого неравенства, (11.9) и (11.4) следует, что

$$\left\|\psi_{\mu,\varepsilon}^{\perp}\right\|_{L_2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда и из (11.6) и (11.1) получаем сходимость (11.5) при $s=1$. В свою очередь, из этой сходимости, следствия 1 и ортонормированности $\psi^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\psi^{\mu,\varepsilon,2}$ в $L_2(\Omega)$ вытекает сходимость (11.5) и при $s=2$. Теорема 2.4 доказана полностью.

Первый автор признателен за гостеприимство Казахскому национальному университету им. Аль-Фараби, где была выполнена часть настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* Мир, М., 1972.
2. Бикметов А.Р. *Асимптотики собственных элементов краевых задач оператора Шредингера с большим потенциалом, локализованным на малом множестве* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 79, № 4. С. 666–681.
3. Бикметов А.Р., Гадыльшин Р.Р. *О спектре оператора Шредингера с растущим потенциалом, локализованным на сжимающемся множестве* // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 787–790.
4. Головатий Ю.Д., Манько С.С. *Точнi моделi для операторiв Шредингера з δ' подобнiми потенцiалами* // Український математичний вiсник. Т.6, № 2. 2009. С. 173–207.
5. Хуснуллин И.Х. *Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т.50, № 4. 2010. С. 679–698.
6. Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х. *Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом* // Уфимский матем. журнал. Т.3, №3. 2011. С. 55–66.
7. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач* Наука, М., 1989.
8. Гадыльшин Р.Р. *Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задачи для оператора Лапласа* // Современная математика и ее приложения. Т.5. 2003. С. 3–32.
9. Олейник О.А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред* Изд-во МГУ, М., 1990.

10. O.A. Oleinik, J. Sanchez-Hubert, Yosifian G.A. *On vibrations of a membrane with concentrated masses* // Bull. Sc. math. Ser. 2 1991. V. 115. P. 1–27.
11. Ильин А.М. *Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием* // Матем. сб. 1977. Т. 103, № 2. С. 265–284.

Бикметов Айдар Ренатович,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской рев., 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `bikmetovar@yandex.ru`

Гадыльшин Рустем Рашитович,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской рев., 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `gadylshin@yandex.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 65-73.

УДК 517.984

О РЕЗОЛЬВЕНТАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗБЕГАЮЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Д.И. БОРИСОВ, А.М. ГОЛОВИНА

Посвящается Арлену Михайловичу Ильину

Аннотация. В работе рассматриваются разбегающиеся возмущения абстрактного периодического оператора. Невозмущённый оператор вводится как замкнутый оператор на соболевском пространстве, заданном на периодической области в многомерном пространстве. На невозмущённый оператор накладываются условия, являющиеся естественным обобщением условия эллиптичности и периодичности дифференциального оператора. Возмущения описываются абстрактными относительными операторами, локализованными в определённом смысле. Рассматривается случай, когда расстояния между областями, где локализованы возмущения, неограниченно растет. Основной полученный результат – явное представление для резольвенты возмущённого оператора.

Ключевые слова: резольвента, периодический оператор, разбегающиеся возмущения.

1. Введение

Работ, посвященных операторам с разбегающимися возмущениями, довольно много (см., например, [1]–[14]). Большая их часть посвящена изучению оператора Шрёдингера с вещественными потенциалами (см., например, [4]–[10], [12]–[14]). При этом потенциалы были сконцентрированы на конечных областях, причём предполагалось, что расстояния между этими областями стремятся к бесконечности, что и объясняет название таких возмущений – "разбегающиеся". Основное внимание в цитированных статьях уделялось изучению асимптотического поведения собственных значений и собственных функций. Исследованию же поведения резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями посвящено достаточно мало работ (см., например, [5], [6, Гл. 8, §8.6], [10], [15], [16]). Остановимся на этих работах подробнее.

В [5] рассматривался оператор Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^3$ с тремя разбегающимися потенциалами. Потенциалы удовлетворяли двум условиям, первое из которых обеспечивало относительную компактность, а второе описывало аналитические свойства потенциалов. Была доказана сходимость резольвенты возмущённого оператора к резольвенте невозмущённого оператора в смысле сильной резольвентной сходимости. Также было приведено разложение резольвенты возмущённого оператора в ряд Неймана, сходящийся в смысле сильной резольвентной сходимости. В [6, Гл. 8, §8.6] рассматривался оператор Шрёдингера с двумя разбегающимися возмущениями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возмущениями здесь являлись два вещественных убывающих на бесконечности потенциала. Доказана сходимость резольвенты унитарного преобразования некоторого матричного оператора, который строился на основе исходного оператора с разбегающимися возмущениями. При этом

D.I. Borisov, A.M. Golovina, On the resolvents of periodic operators with distant perturbations.

Работа поддержана грантом РФФИ (10-01-00118) и Федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг." (контракт № 02.740.11.0612).

Поступила 10 января 2012 г.

унитарное преобразование строилось специальным образом и само зависело от расстояния между разбегающимися потенциалами. В [10] исследовалось поведение резольвенты оператора Шрёдингера с двумя разбегающимися возмущениями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возмущения задавались вещественнозначными функциями из класса Ролльника. Предполагается, что функция $V(x)$ принадлежит классу Ролльника (Rollnik class), если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}dxdy<\infty.$$

Была доказана сходимость к нулю разности резольвент возмущённого и невозмущённого операторов.

Наиболее общие результаты были получены в статьях [15], [16]. Здесь рассматривался периодический дифференциальный эллиптический оператор чётного порядка с конечным числом разбегающихся возмущений в многомерном пространстве. Возмущающими операторами были абстрактные локализованные операторы, локализованность которых описывалась специальными весовыми функциями. Была получена явная формула для резольвенты возмущённого оператора. На основе этой формулы была доказана равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к некоторому предельному, а также получено представление резольвенты в виде равномерно сходящегося асимптотического ряда.

В настоящей работе рассматривается абстрактный оператор с разбегающимися возмущениями в некоторой произвольной области. Невозмущённый оператор, в отличие от работ [15], [16], не предполагается дифференциальным. Данный оператор вводится как оператор в $L_2(\Omega)$ на некоторой периодической области Ω в многомерном пространстве. Условие эллиптичности в работах [15], [16] мы заменяем на выполнение некоторых априорных оценок, а условие периодичности – на коммутирование нашего оператора с оператором сдвига вдоль области Ω. Еще одним отличием от [15], [16] является то, что область Ω достаточно произвольна, в то время как в [15], [16] в качестве такой области выбиралось многомерное пространство. Класс невозмущённых операторов, рассматриваемых в данной работе, довольно широк. Невозмущёнными операторами могут быть дифференциальный оператор произвольного порядка в различных периодических областях, а также интегрально-дифференциальные операторы (см. третий параграф). Разбегающиеся возмущения определяются аналогично [15], [16]. Наш основной результат такого же типа, что и в цитированных работ – получено явное представление для резольвенты возмущённого оператора в предположении, что расстояние между областями, где локализованы возмущающие операторы, стремится к бесконечности. На основе этого представления доказана равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к некоторому предельному оператору. Приведено разложение резольвенты возмущённого оператора в полный асимптотический ряд, сходящийся в равномерной операторной норме. В основе доказательства главного результата лежит обобщение схемы, предложенной в работах [15], [16].

Опишем структуру статьи. В следующем параграфе описывается постановка задачи и формулируется основной результат. В третьем параграфе приводятся примеры невозмущённых и возмущающих операторов, а также весовых функций и различного рода областей. В четвёртом параграфе доказывается основной результат.

2. Постановка задачи и основной результат

Пусть $(x_1,\ldots,x_d)$ – декартовы координаты в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 1$, а $(e_1,\ldots,e_\ell)$ – набор линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$, где $\ell\leqslant d$. Группу всех целочисленных комбинаций вида $z_1e_1+\ldots+z_\ell e_\ell$, $z_i\in\mathbb{Z}$, обозначим через Γ. Через Ω будем обозначать некоторую область в $\mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей, инвариантную относительно сдвигов на элементы группы Γ.

Пусть $X_i \in \Gamma$, $i = 1, \dots k$ – некоторые параметры. Положим $\tau(X) := \min\limits_{i \neq j} |X_i - X_j|$. Всюду далее предполагается, что $\tau(X) \to \infty$.

В пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим некоторый абстрактный оператор $\mathcal{H}_0$, чья область определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ является подпространством гильбертова пространства $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$, где $m \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что данный оператор удовлетворяет следующим условиям:

A1. Для любой $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_1\big(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + \|u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\big) \leqslant C_2 \|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)},$$

где C_1, C_2 – некоторые константы, не зависящие от u.

A2. Справедливо равенство

$$\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{H}_0\mathcal{S}(X_i) = \mathcal{H}_0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где $\mathcal{S}(X_i)$ – оператор сдвига, действующий по правилу $(\mathcal{S}(X_i)u)(\cdot) = u(\cdot - X_i)$.

Первое из данных условий следует понимать как обобщение в определённом смысле условия эллиптичности для дифференциальных операторов, а второе – как обобщение условия периодичности. Отметим также, что из условия A1 немедленно вытекает замкнутость оператора $\mathcal{H}_0$.

Введём в рассмотрение функции $\xi_i, \eta_i \in C^m(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, k$, удовлетворяющие следующим требованиям:

A3. Существует положительная функция $\varphi \in C^m(\overline{\Omega})$, такая, что выполнены оценки:

$$|\xi_i(x)| \leqslant C\varphi(x), \quad \partial^\alpha \varphi(x) \leqslant C\varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1, \dots, k, \quad |\alpha| \leqslant m,$$

где C – некоторая константа, не зависящая от x, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ – произвольный мультииндекс.

A4. Функции φ, η_i и все их производные вплоть до порядка m стремятся к нулю на бесконечности.

Далее эти функции будем называть весовыми. Будем считать, что для оператора $\mathcal{H}_0$ верно ещё одно предположение:

A5. Для любой $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ и достаточно малых ε имеет место оценка

$$\|(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^{\varepsilon} - \mathcal{H}_0)u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} \leqslant \varsigma(\varepsilon)\|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)},$$

где функция $\varsigma(\varepsilon)$ не зависит от u и $\varsigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $\mathcal{L}_i^0$, $i = 1, \dots k$ – произвольные операторы, ограниченные как операторы из пространства $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Введём в рассмотрение операторы $\mathcal{L}_i = \xi_i \mathcal{L}_i^0 \eta_i$ в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ с областью определения $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Под разбегающимися возмущениями будем понимать операторы вида $\sum\limits_{i=1}^k \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$.

В пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ определим возмущённый оператор

$$\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^k \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$$

с областью определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$.

Целью данной работы является исследование поведения резольвенты возмущённого оператора при $\tau(X) \to \infty$. Для формулировки основного результата нам понадобятся дополнительные обозначения.

Введём в рассмотрение семейство операторов $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_i$ в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$. Будем предполагать, что

A5. Операторы $\mathcal{H}_i$ замкнуты.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$ спектр оператора, через $\|\bullet\|_{Y_1\to Y_2}$ – норму линейного оператора, действующего из пространства Y_1 в пространство Y_2, а через I – тождественный оператор.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть множество* $M := \mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{i=0}^{k}\sigma(\mathcal{H}_i)$ *непусто. Тогда для достаточно больших* $\tau(X)$ *оператор* $\mathcal{H}_X$ *замкнут. Для любого* $\lambda\in M$ *и достаточно больших* $\tau(X)$ *резольвента возмущённого оператора корректно определена и имеет место представление*

$$(\mathcal{H}_X-\lambda)^{-1}=\Big[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big](\mathrm{I}+\mathcal{P}_X)^{-1},$$

$$\mathcal{P}_X:=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\Big[\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big],$$

где $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\to L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\to 0$ *при* $\tau(X)\to\infty$.

Обсудим основной результат данной работы. Предположение непустоты множества M достаточно естественно и верно для довольно большого класса операторов. Например, данное множество заведомо непусто, если операторы $\mathcal{H}_i$, $i=0,\dots,k$ самосопряжённы. Множество M также непусто, если предположить, что операторы $\mathcal{H}_i$ либо операторы $-\mathcal{H}_i$, $i=0,\dots,k$, являются m-секториальными.

Основным и самым важным результатом данной работы является явная формула для резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, приведённая в теореме. Как следует из данной формулы, вид резольвенты фактически определяется оператором $\mathcal{P}_X$. Данный оператор является своего рода универсальной характеристикой резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$. Из формулы для оператора $\mathcal{P}_X$ видно, что этот оператор является суммой слагаемых, каждое из которых можно интерпретировать как попарное взаимодействие операторов $\mathcal{L}_i$. Таким образом, задача об отыскании резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ сводится к отысканию оператора $\mathcal{P}_X$. Зная последний, мы можем не только выписать явную формулу для резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, но и получить полное асимптотическое разложение резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$. Для этого достаточно в формуле для резольвенты разложить оператор $(\mathrm{I}+\mathcal{P}_X)^{-1}$ в ряд Неймана.

3. Примеры

В данном параграфе приводятся примеры невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ и примеры областей Ω. Многочисленные примеры весовых функций и возмущающих операторов $\mathcal{L}_i^0$ весьма подробно обсуждались в третьем параграфе работы [15] для случая $\Omega=\mathbb{R}^d$. Эти примеры нетрудно распространить и на случай произвольной области Ω. Отметим также, что как и в [15], класс весовых функций весьма широк. В частности, убывание может быть экспоненциальным, степенным и даже логарифмическим.

В качестве невозмущённого оператора могут быть рассмотрены различные дифференциальные операторы с краевыми условиями первого, второго и третьего типов. Например, дифференциальный оператор второго порядка, матричный и магнитный операторы Шрёдингера, оператор теории упругости, двух- и трёхмерный оператор Паули, а также оператор с δ – потенциалом. Основным требованием на граничные условия является периодичность. Подробное описание данных примеров во всём пространстве $\mathbb{R}^d$ приводится в третьем параграфе статьи [15]. Обобщение их на различные области не составляет особого труда, и поэтому мы на них не останавливаемся.

В качестве примеров областей Ω может быть взято многомерное пространство: $\Omega=\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$, области типа слоёв или полос: $\Omega=\omega\times\mathbb{R}^p$, ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^q$. Следующий пример – периодически изогнутые полосы – см. рис. 1, либо периодически скрученные

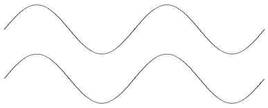


Рис. 1: Периодически изогнутая полоса

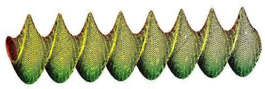


Рис. 2: Скручённый цилиндр

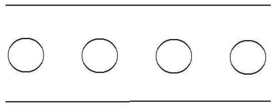


Рис. 3: Периодически перфорированная область

многомерные цилиндры – см. рис. 2. Возможно также взять области с периодической перфорацией, см. рис. 3.

Примером недифференциального оператора $\mathcal{H}_0$ является интегро-дифференциальный оператор

$$\mathcal{H}_0 u := \left(\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|=|\gamma|=p}} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \mathrm{A}_{\beta\gamma} \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} + \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2p-1}} \mathrm{A}_\beta \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \right) u + \int\limits_\Omega \mathrm{F}(\cdot, y, \cdot - y) u(y)\, \mathrm{d}y,$$

где $p \in \mathbb{N}$. Предполагается, что дифференциальная часть оператора $\mathcal{H}_0$ удовлетворяет условию эллиптичности вида

$$\nu \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|=p}} |\xi_\beta|^2 \leqslant \mathrm{Re} \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|=|\gamma|=p}} (\mathrm{A}_{\beta\gamma}(x)\xi_\beta, \xi_\gamma)_{\mathbb{C}^n}, \quad \xi_\beta \in \mathbb{C}^n,$$

ν — некоторая константа, не зависящая от x и ξ_β, $m \in \mathbb{N}$, функции $\mathrm{A}_{\beta\gamma} \in C^p(\overline{\Omega})$, $\mathrm{A}_\beta(\overline{\Omega})$ периодичны относительно сдвигов на элементы группы Γ, то есть,

$$\mathrm{A}_{\beta\gamma}(x+\rho) = \mathrm{A}_{\beta\gamma}(x), \quad \mathrm{A}_\beta(x+\rho) = \mathrm{A}_\beta(x), \quad x \in \Omega, \quad \rho \in \Gamma.$$

Функция $\mathrm{F}(x,y,z)$ периодична по x и y относительно сдвигов на элементы группы Γ, финитна по z и удовлетворяет условию

$$\int\limits_\Omega \max_{x,y} |\mathrm{F}(x,y,z)| dz = \int\limits_\Omega f(z) dz < \infty, \tag{1}$$

где $f(z) := \max\limits_{x,y} |\mathrm{F}(x,y,z)|$ — некоторая финитная функция. Отметим, что условие (1) и финитность функции $\mathrm{F}(x,y,z)$ по переменной z являются достаточно слабыми требованиями, и класс возможных функций $\mathrm{F}(x,y,x-y)$ довольно широк.

Проверим выполнение требований (A1) — (A3) для оператора $\mathcal{H}_0$. Согласно леммам 2 и 4 в работе [15], для дифференциальной части оператора $\mathcal{H}_0$ условия (A1), (A2), (A5) будут выполнены. Рассмотрим интегральную часть невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$. Согласно неравенству Коши-Буняковского, оценке (1) и финитности функции $F(x,y,z)$ по переменной z, справедливы неравенства

$$M(x) := \left| \int\limits_\Omega \mathrm{F}(x,y,x-y) u(y) dy \right|^2 \leqslant \int\limits_\Omega f(t) dt \int\limits_\Omega f(x-y) \big|u(y)\big|^2 dy,$$

$$\int\limits_\Omega M(x) dx \leqslant C \big\|u\big\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)},$$

где C — некоторая константа, не зависящая от u. Следовательно, интегральная часть невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ действует из пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, и условие (A1) будет выполнено. Так как функция $\mathrm{F}(x,y,z)$ периодическая по переменным x и y, то условие (A2) для интегральной части невозмущённого оператора

$\mathcal{H}_0$ также выполнено. Для проверки условия (A5) достаточно оценить интеграл

$$N_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \Big[\varphi^\varepsilon(y)\varphi^{-\varepsilon}(x) - 1\Big] F(x,y,x-y)u(y)dy.$$

Для этого дополнительно предположим, что функция φ удовлетворяет условию

$$K_1 \leqslant \frac{\varphi(x-t)}{\varphi(x)} \leqslant K_2, \quad x\in\Omega, \quad t\in\Pi, \tag{2}$$

где Π — некоторый компакт, K_1, K_2 – некоторые положительные числа, не зависящие от x и t, и для всех x, y носитель функции $F(x,y,\cdot)$ целиком лежит в Π. Данное условие достаточно слабое. В частности, оно выполнено для всех примеров весовых функций, которые приводятся в третьем параграфе работы [15].

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, делая замену переменной $x-y=t$, а также учитывая условие (2) и то, что функция $f(z)$ является финитной, последовательно получаем

$$\begin{aligned}\Big|N_\varepsilon(x)\Big|^2 &\leqslant \int\limits_\Omega \Big[\varphi^\varepsilon(y)\varphi^{-\varepsilon}(x)-1\Big]^2 f(x-y)dy \int\limits_\Omega f(x-y)\big|u(y)\big|^2dy \\ &\leqslant \int\limits_\Omega \Big[\Big(\frac{\varphi(x-t)}{\varphi(x)}\Big)^\varepsilon - 1\Big]^2 f(t)dt \int\limits_\Omega f(x-y)\big|u(y)\big|^2dy \\ &\leqslant \varepsilon K_3 \int\limits_\Omega f(x-y)\big|u(y)\big|^2dy,\end{aligned}$$

где K_3 — некоторая константа, не зависящая от x. Согласно последней оценке, имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega \big|N_\varepsilon(x)\big|^2dx \leqslant \varepsilon K_4\|u\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}, \tag{3}$$

где K_4 — некоторая константа, не зависящая от ε и u. Из неравенства (3) следует справедливость условия (A5) для интегральной части невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$. Таким образом, интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{H}_0$ является примером недифференциального невозмущённого оператора.

4. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится пара вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть $\lambda\in M$, ξ — одна из функций ξ_i, $i=1,\dots k$, η — одна из функций η_j, $j=1,\dots k$, X – один из векторов $X_i - X_j$, $i\neq j$. Тогда для всех η_j, $j=1,\dots,k$, при $X\to\infty$ выполнено*

$$\|\eta\mathcal{S}(X)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\xi\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\to W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)} \to 0, \quad X\to\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Для любой $f\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ положим $u := (\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\xi f$. Функцию u, являющуюся решением уравнения

$$(\mathcal{H}_0-\lambda)u = \xi f, \tag{5}$$

будем искать в виде $u=\varphi^\varepsilon v$, где $\varepsilon>0$ – некоторая достаточно малая константа. Подставляя $u=\varphi^\varepsilon v$ в (5), получаем:

$$(\mathcal{H}_0-\lambda)u = (\mathcal{H}_0-\lambda)\varphi^\varepsilon v = \mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon v - \lambda\varphi^\varepsilon v = \xi f.$$

Разделим последнее уравнение на φ^ε, а затем в левой части прибавим и вычтем $\mathcal{H}_0 v$:

$$\begin{aligned}&\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon v-\lambda v+\mathcal{H}_0 v-\mathcal{H}_0 v=(\mathcal{H}_0+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)-\lambda)v\\&=(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1})(\mathcal{H}_0-\lambda)v=\varphi^{-\varepsilon}\xi f\end{aligned}\tag{6}$$

В силу условий (A1), (A5) норма оператора $(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}$ как оператора из $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ мала при достаточно малых ε.

Так как операторы $(\mathcal{H}_0-\lambda)$, $(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1})$ обратимы, то уравнение (6) разрешимо, и его решение представимо в виде

$$v=\big(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\big)^{-1}\varphi^{-\varepsilon}\xi f.$$

Из последнего уравнения и условия (A3) выводим оценку

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)}&=\|(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1})^{-1}\varphi^{-\varepsilon}\xi f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\&\leqslant C\,\|f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)},\end{aligned}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от v и f.

В силу условий (A3), (A4) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}(\eta_i\mathcal{S}(X)u)\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}&=\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}(\eta_i\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon\mathcal{S}(X)v)\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\
&=\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\ \sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}}\left\|C_{\beta\rho\alpha}\frac{\partial^\alpha\eta_i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^{\rho-\alpha}\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon}{\partial x^{\rho-\alpha}}\frac{\partial^{\beta-\rho}\mathcal{S}(X)v}{\partial x^{\beta-\rho}}\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\
&\leqslant C\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\ \sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}}\left\|\frac{\partial^\alpha\eta_i}{\partial x^\alpha}\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon\frac{\partial^{\beta-\rho}\mathcal{S}(X)v}{\partial x^{\beta-\rho}}\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\
&\leqslant\widetilde{C}(X)\|v\|^2_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)},\end{aligned}$$

где

$$\widetilde{C}(X):=C\max_{\overline{\Omega}}\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=2}}\ \sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}}\left|\frac{\partial^\alpha\eta_i}{\partial x^\alpha}\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon\right|\to0\quad\text{при}\quad X\to\infty,$$

C — некоторая константа, не зависящая от X и u. $\square$

Из несложно проверяемого равенства

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\\&\qquad=\mathcal{S}(-X_j)\big((\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\big)\mathcal{S}(X_j)\\&\qquad=-\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{L}_j(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)\end{aligned}$$

и определения оператора $\mathcal{P}_X$ следует

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X&=-\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^k\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_j)\,(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\,\mathcal{L}_j\,(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\,\mathcal{S}(X_j)\\&=-\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^k\mathcal{S}(-X_i)\xi_i\mathcal{L}_i^0\eta_i\mathcal{S}(X_i-X_j)\,(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\,\xi_j\mathcal{L}_j^0\eta_j\,(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\,\mathcal{S}(X_j).\end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Для любого* $\lambda \in M$ *при* $\tau(X) \to +\infty$ *верно*

$$\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\to L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} \to 0.$$

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Прямыми вычислениями проверяем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{T} := {} & (\mathcal{H}_X-\lambda)\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big)\\
&= k\mathrm{I}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda)^{-1}-(k-1)\mathrm{I}\\
&-(k-1)\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\\
&= \mathrm{I}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\big[(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\big]\\
&= \mathrm{I}+\mathcal{P}_X.\end{aligned}$$

В силу леммы 2 при достаточно больших $\tau(X)$ оператор $(\mathrm{I}+\mathcal{P}_X)$ ограниченно обратим. Отсюда и из определения оператора $\mathcal{T}$ следует справедливость требуемого представления для резольвенты возмущённого оператора; необходимо лишь проверить тривиальность ядра оператора $(\mathcal{H}_X-\lambda)$.

Аналогично приведённым выше вычислениям нетрудно показать, что

$$\left[\sum_{i=1}^{k}(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\right](\mathcal{H}_X-\lambda)=\mathrm{I}+\mathcal{Q}_X,$$

$$\mathcal{Q}_X=-\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j-X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i),$$

$$\big\|\mathcal{Q}_X\big\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)\to W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)}\to 0 \quad \text{при} \quad \tau(X)\to\infty.$$

Отсюда уже несложно вывести тривиальность ядра оператора $(\mathcal{H}_X-\lambda)$ для достаточно большого $\tau(X)$.

Из полученного представления для резольвенты и теоремы Банаха об обратном операторе следует априорная оценка для оператора $\mathcal{H}_X$:

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)}\leqslant C_1\big(\|\mathcal{H}_X u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}+\|u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\big),$$

откуда и вытекает замкнутость этого оператора при достаточно больших $\tau(X)$.

Благодарности

Часть данной работы была выполнена во время визита авторов в Технический институт г. Кемниц, Германия в феврале 2012 г. Авторы благодарны за оказанное им гостеприимство. Авторы также выражают благодарность Кордюкову Ю.А. за полезные замечания, которые позволили значительно улучшить первоначальную версию данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Borisov, *Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation* // Mathematical Physics, Analysis and Geometry, V. 10, N. 2, 2007, P. 155–196.
2. D. Borisov, P. Exner, *Exponential splitting of bound in a waveguide with a pair of distant windows* // Journal of Physics A: Mathematics and General, V. 37, N. 10, 2004, P. 3411–3428.

3. D. Borisov, *Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space* // Annales Henri Poincaré, V. 8, N. 7, 2007, P. 1371–1399.
4. E.B. Davies, *The twisting trick for double well Hamiltonians* // Communications in Mathematical Physics, V. 85, N.3, 1982, P. 471–479.
5. P. Aventini, R. Seiler, *On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion* // Communications in Mathematical Physics, V. 41, N. 2, 1975, P. 119–134.
6. E.B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge University Press, NY, 1995.
7. E.M. Harrell, M. Klaus, *On the double-well problem for Dirac operators* // Annales de l'Institut Henri Poincaré, V. 38, N. 2, 1983, 153–166.
8. E.M. Harrell, *Double wells* // Com. in Math. Ph., V. 75, N. 3, 1980, P. 239–261.
9. J.D. Morgan III, B. Simon, *Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations* // International journal of quantum chemistry, V. 17, N. 2, 1980, P. 1143–1166.
10. V. Kostrykin, R. Schrader, *Cluster properties of one particle Schrödinger operators, I* // Reviews in Mathematical Physics, V. 6, N. 5, 1994, P. 833–853.
11. S. Kondej, I. Veselić, *Lower bound on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians* // Annales Henri Poincaré, V. 8, N. 1, 2007, P. 109–134.
12. M. Klaus, *Some remarks on double-wells in one and three dimensions* // Annales de l'Institut Henri Poincaré, V. 34, N. 4, 1981, 405–417.
13. M. Klaus, B. Simon, *Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells* // Annales de l'Institut Henri Poincaré, section A, V. 30, N. 2, 1979, P. 83–87.
14. V. Graffi, E.V Harrell II, H.J. Silverstone, *The $\frac{1}{R}$ expansion for H_2^+: analyticity, summability and asymptotics* // Ann. Phys., V. 165, N. 2, 1985, P. 441–483.
15. A.M. Golovina *On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations of whole space* // Russ. J. Math. Phys., V. 19, N. 2, 2012, P. 182-192.
16. Головина А.М. *Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями* // Математические заметки, Москва, Т. 91, В. 3, 2012. С. 464-466.

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: borisovdi@yandex.ru

Анастасия Михайловна Головина,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: nastya_gm@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 74-79.

УДК 517.956.2

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

И.Ф. ГАЛИХАНОВ, В.Н. ПАВЛЕНКО

Аннотация. Рассматривается телеграфное уравнение с разрывной внутренней энергией по фазовой переменной и однородным граничным условием Дирихле. Изучается вопрос о существовании обобщенных периодических решений в резонансном случае, когда оператор, порождаемый линейной частью уравнения с однородным граничным условием Дирихле и условием периодичности, имеет ненулевое ядро, а нелинейность, входящая в уравнение, ограничена. Топологическим методом получена теорема существования обобщенного периодического решения. Доказательство базируется на принципе Лере-Шаудера для выпуклозначных компактных отображений. Главное отличие от аналогичных результатов других авторов — допущение разрывов по фазовой переменной у внутренней энергии в телеграфном уравнении.

Ключевые слова: нелинейное телеграфное уравнение, разрывная нелинейность, периодические решения, резонансная задача.

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2,

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x)u(x)$$

— равномерно эллиптический дифференциальный оператор в области Ω [1] с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ a \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\ 0 < \alpha < 1$.

Исследуется проблема существования решения телеграфного уравнения с разрывной нелинейностью

$$u_{tt} + Lu(x,t) + \mu u_t + g(x,t,u) = f(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

удовлетворяющего однородному граничному условию Дирихле

$$u(x,t) = 0 \tag{2}$$

на $S = \partial\Omega \times (0, 2\pi)$, и условию периодичности

$$u(x,0) = u(x,2\pi) \tag{3}$$

для $x \in \Omega$, где $Q = \Omega \times (0,2\pi),\ \mu \neq 0$ (учитывается диссипация энергии), $f \in L^2(Q)$.

Предполагается, что нелинейность $g(x,t,u)$ удовлетворяет i-условию:

$i1$ — функция $g : Q\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева (mod 0) [2], что означает существование множества $l \subset Q \times \mathbb{R}$, проекция которого на Q имеет меру нуль, и борелевой на $Q \times \mathbb{R}$ функции, совпадающей с $g(x,t,u)$ на $(Q \times \mathbb{R}) \setminus l$;

I.F. Galikhanov, V.N. Pavlenko, Periodic solutions of the telegraph equation with a discontinuous nonlinearity.

Поступила 10 января 2012 г.

$i2$ — для почти всех $(x,t) \in Q$ сечение $g(x,t,\bullet)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода и для произвольного $u \in \mathbb{R}$ верно включение $g(x,t,u) \in [g_-(x,t,u), g_+(x,t,u)]$, где $g_-(x,t,u) = \liminf_{\eta\to u} g(x,t,\eta)$, $\quad g_+(x,t,u) = \limsup_{\eta\to u} g(x,t,\eta)$;

$i3$ — (ограниченность нелинейности) существует функция $b(x,t)$ из $L^2(Q)$ такая, что для почти всех $(x,t) \in Q$

$$|g(x,t,u)| \leqslant b(x,t) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Заметим, что условие $i1$ гарантирует суперпозиционную измеримость $g(x,t,u)$ на Q, то есть измеримость на Q композиции $g(x,t,u(x,t))$ для любой измеримой на Q функции $u(x,t)$.

Дифференциальный оператор L с однородным граничным условием Дирихле порождает в $L^2(\Omega)$ самосопряженный линейный оператор B с областью определения $D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : Bu = Lu \; \forall u \in D(B)$, где все производные функции $u(x)$ — соболевские. Через $H^m(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$ обозначается соболевское пространство $W_2^m(\Omega)$[1], а через $H_0^m(\Omega)$ — замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций в метрике $H^m(\Omega)$. Спектр σ оператора B состоит из собственных значений конечной кратности

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots; \quad \lambda_j \to \infty.$$

[3]. Здесь каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Существует ортонормированный базис (v_j) в $L^2(\Omega)$ из собственных функций оператора B $(Bv_j = \lambda_j v_j)$. В комплексном пространстве $L^2(Q)$ последовательность $\{\psi_{jk}(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} v_j(x)e^{ikt},\ j = 0,1,2,\ldots;\ k \in \mathbb{Z}\}$ будет ортонормированным базисом. Для любой вещественно-значной функции $u \in L^2(Q)$

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\psi_{jk}(x,t), \quad a_{j,-k} = \overline{a_{j,k}}.$$

Положим $D(A_0) = \{u(x,t) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{jk}\psi_{jk}(x,t)|\ a_{j,-k} = \overline{a_{j,k}},\ \ m,n \in \ \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ и определим в вещественном $L^2(Q)$ оператор $A_0 : D(A_0) \subset L^2(Q) \to L^2(Q)$ равенством $A_0 u = u_{tt} + \mu u_t + Lu(x,t)$ для любого $u \in D(A_0)$. Заметим, что формулой, определяющей A_0, можно задать продолжение A_0 на линейную оболочку последовательности $(\psi_{jk}(x,t))$ в комплексном $L^2(Q)$, и для этого продолжения $\psi_{jk}(x,t)$ являются собственными функциями, отвечающими собственным значениям $\mu_{jk} = -k^2 + \lambda_j + i\mu k$. В частности, отсюда следует, что ядро оператора A_0 $(KerA_0)$ совпадает с $KerB$.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1)-(3) *называется функция* $u(x,t) \in L^2(Q)$ *со значениями в* $\mathbb{R}$ *такая, что найдется измеримая на* Q *функция* $z(x,t) \in [g_-(x,t,u(x,t)), g_+(x,t,u(x,t))]$ *почти всюду на* Q*, для которой верно интегральное тождество*

$$\int\limits_Q u(x,t)(\varphi_{tt} + L\varphi - \mu\varphi_t)dxdt = \int\limits_Q \varphi(x,t)(f(x,t) - z(x,t))dxdt \; \forall \varphi \in D(A_0). \tag{5}$$

Замечание1. В случае, когда $g(x,t,u)$ каратеодориева, то есть для почти всех $(x,t) \in Q$ сечение $g(x,t,\bullet)$ непрерывно на $\mathbb{R}$ и для любого $u \in \mathbb{R}$ функция $g(\bullet,\bullet,u)$ измерима на Q, в определении1 $z(x,t) = g(x,t,u(x,t))$, и мы приходим к общепринятому понятию обобщенного решения задачи (1)–(3). В [4] показано, что если $u \in L^2(Q)$ удовлетворяет (5) с $r(x,t) = f(x,t) - z(x,t) \in L^2(Q)$, то $u(x,t) \in H_0^1(\Omega)$ для $t \in [0,2\pi]$ (регулярность обобщенного решения) и выполняется (3). Если предположить, что обощенное решение $u(x,t) \in H^2(Q)$, то с помощью интегрирования по частям в (5) можно получить, что $u_{tt} + Lu(x,t) + \mu u_t + z(x,t) = f(x,t)$ почти всюду на Q.

Основной результат работы следующая теорема (рассматривается резонансный случай, когда уравнение $u_{tt} + Lu(x,t) + \mu u_t = 0$ имеет в Q ненулевое решение, удовлетворяющее условиям (2) и (3), что равносильно принадлежности нуля спектру σ оператора B).

Теорема 1. *Предположим, что $0 \in \sigma$, функция $g(x,t,u)$ удовлетворяет i - условию. Кроме того, для любой функции $v(x)$ из ядра оператора B выполняется условие Ландесмана - Лазера*

$$\int\limits_{v>0} \underline{g}_+(x,t)v(x)dxdt + \int\limits_{v<0} \overline{g}_-(x,t)v(x)dxdt > \int\limits_{\Omega} f(x,t)v(x)dxdt,$$

где $\underline{g}_+(x,t) = \liminf\limits_{u\to+\infty} g(x,t,u)$, $\overline{g}_-(x,t) = \limsup\limits_{u\to-\infty} g(x,t,u)$.
Тогда задача (1)–(3) имеет обобщенное решение $u(x,t) \in L^2(Q)$.

Доказательство теоремы1 сводится к проблеме существования неподвижной точки у выпуклозначного компактного отображения. Существование неподвижной точки устанавливается с помощью принципа Лере - Шаудера для многозначных отображений [5].

Вопрос о существовании периодических решений телеграфного уравнения с нелинейной внутренней энергией изучался многими авторами. Задача (1)–(3) с каратеодориевой нелинейностью $g(x,t,u)$ линейного роста, симметричной эллиптической частью L порядка 2m с независящими от времени коэффициентами рассматривалась в совместной работе Brezis и Nirenberg [4] (условие (2) при этом заменяется на принадлежность $u(x,t)$ к $H_0^m(\Omega)$ для любого $t \in (0,T)$). В резонасном случае, когда задача $Lu = 0, u \in H_0^m(\Omega)$ имеет ненулевое решение, получена теорема существования обобщенного решения при более жестком ограничении на f, чем условие Ландесмана-Лазера в теореме 1. Исследуется регулярность обобщенного решения для случая $m = 2$. В частности, показано, что если $f \in L^2(Q)$, то $u(x,t) \in H_0^1(\Omega)$ для любого $t \in (0,T)$.

В работе И.А. Рудакова [6] задача (1)–(3) с каратеодориевой нелинейностью $g(x,t,u)$ степенного роста рассматриевается для $n = 1$, $Lu = -u_{xx}$ с дополнительным членом νu_x в нерезонансном случае. Доказывается существование обобщенного решения и исследуется его регулярность. Укажем также на работы [7],[8], где проблема существования периодических решений нелинейного телеграфного уравнения исследуется в резонансном случае при $n = 1$, $Lu = -u_{xx}$. Главное отличие данного исследования от работ других авторов — допущение разрывов у $g(x,t,u)$ по фазовой переменной u.

2. Операторная постановка задачи(1)–(3)

Обозначим $A : D(A) \subset L^2(Q) \to L^2(Q)$ замыкание оператора A_0. Как показано в [4],

$$D(A) = \{u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\psi_{jk}(x,t)| \quad a_{j,-k} = \overline{a_{j,k}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j,k}|^2((\lambda_j - k^2)^2 + \mu^2k^2) < +\infty\},$$

и для любого $u \in D(A)$ значение $Au = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{jk}a_{jk}\psi_{j,k}(x,t)$. Вещественный спектр оператора A совпадает с σ(спектром оператора B), $D(A^*) = D(A)$ и $KerA^* = KerA$ (A^* - оператор сопряженный с A),

$$A^*u = u_{tt} + Lu_t - \mu u_t,$$

для каждой $u \in D(A_0)$.

Для $\lambda \notin \sigma, \lambda \in \mathbb{R}$ резольвента оператора A

$$(A - \lambda I)^{-1}u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{jk}}{\mu_{jk} - \lambda} \psi_{j,k}(x,t),$$

Так как $\frac{1}{\mu_{jk}-\lambda} \to 0$, при $j + k \to +\infty$, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ компактный в $L^2(Q)$.

Определим оператор Немыцкого G равенством

$$Gu = g(x,t,u(x,t)), \quad \forall u \in L^2(Q).$$

Поскольку $g(x,t,u)$ удовлетворяет $i1$ и $i3$ условиям, то оператор G действует из $L^2(Q)$ в $L^2(Q)$, и для него справедлива оценка:

$$\|Gu\| \leqslant \|b\|, \quad \forall u \in L^2(Q), \tag{6}$$

здесь и далее $\|\|$ — норма в $L^2(Q)$. Обозначим через $G^{\Box}$ овыпукление оператора G:

$$G^{\Box}u = \bigcap_{\varepsilon<0} clco\{y = Gz \mid \ \|z-u\| < \varepsilon\},$$

где $clco\Lambda$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $\Lambda \subset L^2(Q)$.

Рассмотрим включение

$$f - Au \in G^{\Box}u. \tag{7}$$

Его справедливость означает существование $z \in G^{\Box}u$ такого, что

$$f - Au = z. \tag{8}$$

Как показано в [2], $z \in G^{\Box}u$ равносильно тому, что функция $z(x,t)$ измеримая на Q и для почти всех $(x,t) \in Q$ $\ z(x,t) \in [g_-(x,t,u), g_+(x,t,u)]$. Из равенства (8) следует, что u — обобщенное решение задачи (1)–(3). Докажем это. Обозначим $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(Q)$. Имеем для любого $\varphi \in D(A_0)$ равенство $(Au,\varphi) + (z,\varphi) = (f,\varphi)$, что равносильно $(u, A^*\varphi) + (z,\varphi) = (f,\varphi)$ $\forall\varphi \in D(A_0)$ (по определению сопряженного оператора), а это эквивалентно интегральному тождеству

$$\int\limits_Q u(x,t)(\varphi_{tt} + Lu - \mu u_t)dxdt + \int\limits_Q z(x,t)\varphi(x,t)dxdt = \int\limits_Q f\varphi(x,t)dxdt,$$

для всех $\varphi \in D(A_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $[-\varepsilon, 0) \cap \sigma = \varnothing$ (такое ε существует, поскольку собственные значения оператора B изолированные). Преобразуем включение (7):

$$f - Au - \varepsilon u \in G^{\Box}u - \varepsilon u$$

или

$$(A + \varepsilon I)u \in f - G^{\Box}u + \varepsilon u,$$

последнее равносильно включению

$$u \in (A + \varepsilon I)^{-1}(f - G^{\Box}u + \varepsilon u) \equiv T.$$

Рассмотрим свойства отображения T. Докажем, что значения T — выпуклые компактные множества в $L^2(Q)$. Значения $G^{\Box}$ ограниченные выпуклые и замкнутые в $L^2(Q)$, а опрератор $(A + \varepsilon I)^{-1} : L^2(Q) \to L^2(Q)$ линейный и компактный. Поэтому значения T — выпуклые и предкомпактные множества. Чтобы доказать компактность Tu для $u \in L^2(Q)$, достаточно установить замкнутость Tu в $L^2(Q)$. Пусть последовательность $(z_m) \subset Tu$ и $z_m \to z$ в $L^2(Q)$. Тогда существует $(y_m) \subset G^{\Box}u$ такая, что $z_m = (A+\varepsilon I)^{-1}(f - y_m + \varepsilon u)$. Отсюда следует равенство $y_m = -(A+\varepsilon I)z_m + f + \varepsilon u$. Из ограниченности множества $G^{\Box}u \subset L^2(Q)$ заключаем о существовании подпоследовательности (y_{m_k}), слабо сходящейся к некоторому y в $L^2(Q)$. Так как $(y_{m_k}) \subset G^{\Box}u$, а $G^{\Box}u$ – замкнутое выпуклое множество, то $y \in G^{\Box}u$. В силу замкнутости линейного оператора $(A+\varepsilon I)$ его график в $L^2(Q) \times L^2(Q)$ слабо замкнут, поэтому $z \in D(A+\varepsilon I)$ и $y = -(A+\varepsilon I)z + f + \varepsilon u$, и, значит, $z = (A+\varepsilon I)^{-1}(f - y + \varepsilon u) \in Tu$. Замкнутость множества Tu в $L^2(Q)$ установлена.

Покажем полунепрерывность сверху отображения T на $L^2(Q)$. Допустим противное, тогда найдутся $u \in L^2(Q)$ и открытое множество $D \supset Tu$ в $L^2(Q)$ такие, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется $u_m \in L^2(Q)$ с $\|u_m - u\| < m^{-1}$ и $z_m \in Tu_m \backslash D$. Каждый элемент (z_m) представляется в виде $z_m = (A + \varepsilon I)^{-1}(f - v_m + \varepsilon u_m), \quad v_m \in G^{\square}(u_m)$. Так как последовательность (u_m) ограничена в $L^2(Q)$, а отображение $G^{\square}$ переводит ограниченные множества в ограниченные (в силу оценки (6)), то и последовательность (v_m) ограничена в $L^2(Q)$. Отсюда следует существование слабо сходящейся подпоследовательности (v_{m_k}) к некоторому v в $L^2(Q)$. Поскольку $u_m \to u$ в $L^2(Q)$, то в силу слабо-сильной замкнутости $G^{\square}$[9] имеем $v \in G^{\square}(u)$. Так как $(A + \varepsilon I)^{-1}$ – линейный компактный оператор, то $(A + \varepsilon I)^{-1}v_{m_k} \to (A + \varepsilon I)^{-1}v$. Поэтому $z_{m_k} \to (A + \varepsilon I)^{-1}(f - v + \varepsilon u) \in Tu \subset D$. Из чего, поскольку D – открытое множество в $L^2(Q)$,заключаем, что z_{m_k} принадлежит D для достаточно больших k, что противоречит выбору z_m. Полунепрерывность сверху отображения T на $L^2(Q)$ доказана.

Многозначный оператор $G^{\square}$ переводит ограниченные множества в $L^2(Q)$ в ограниченные, а оператор $(A + \varepsilon I)^{-1}$ вполне непрерывный, поэтому для произвольного шара U из $L^2(Q)$ его образ TU – предкомпактное множество в $L^2(Q)$. Таким образом, значения мультиотображения T в $L^2(Q)$ являются выпуклыми компактами, T полунепрерывно сверху, и любой шар U из $L^2(Q)$ отображение T переводит в предкомпактное множество.

3. Доказательство теоремы 1

Поскольку отображение T выпуклозначное и компактное, то для доказательства существования у него неподвижной точки достаточно установить равномерную ограниченность множества решений семейства включений $u \in \tau Tu, \ 0 \leqslant \tau < 1$ ([5], с.107). Допустим противное. Тогда существуют последовательности $(t_n) \subset [0,1)$ и $(u_n) \subset L^2(Q), \ \|u_n\| > n$ такие, что $u_n \in t_n Tu_n$ для любого натурального n. Положим $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Существуют $z_n \in Tu_n$ такие, что

$$Au_n + \varepsilon u_n = -t_n z_n + t_n \varepsilon u_n + t_n f, \tag{9}$$

поделим обе части на $\|u_n\|$, получим:

$$Av_n + \varepsilon v_n = -t_n \frac{z_n}{\|u_n\|} + t_n \varepsilon v_n + t_n \frac{f}{\|u_n\|},$$

Существует возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $v_{n_k} \rightharpoonup v$, и $t_{n_k} \to t$, ($y_n \rightharpoonup y$ обозначает слабую сходимость (y_n) к y в $L^2(Q)$). Но

$$v_{n_k} = (A + \varepsilon I)^{-1}(\frac{t_{n_k} z_{n_k}}{\|u_{n_k}\|} + \frac{t_{n_k} f}{\|u_{n_k}\|} + t_{n_k} \varepsilon v_{n_k}),$$

$$\frac{t_n z_n}{\|u_n\|} \to 0, \ \frac{t_n f}{\|u_n\|} \to 0, \ t_{n_k} \varepsilon v_{n_k} \rightharpoonup t\varepsilon v.$$

Поэтому $v_{n_k} \to (A + \varepsilon I)^{-1} t\varepsilon v$ и $v \neq 0$. Тогда $Av = (t-1)\varepsilon v$. Так как v ненулевая функция, $t - 1 \leqslant 0$ и $[-\varepsilon, 0) \cap \sigma = \varnothing$ то отсюда следует, что $t = 1$ и $Av = 0$. Таким образом, v принадлежит ядру оператора A, значит, и $KerB$. Так как $v_{n_k} \to v$ в $L^2(Q)$, то можно считать, что $v_{n_k} \to v$ почти всюду на Q, переходя, в противном случае, к подпоследовательности. Умножим обе части (9) скалярно на $v(x)$. Имеем для произвольного натурального n

$$(Au_n, v) + \varepsilon(u_n, v) + (t_n z_n, v) - (t_n f, v) - t_n(\varepsilon u_n, v) = 0. \tag{10}$$

Так как $(Au_n, v) = (u_n, A^* v) = 0$, то, поделив обе части (10) на t_n, получим,

$$(\frac{1 - t_n}{t_n})\varepsilon(u_n, v) + (z_n, v) = (f, v).$$

Отсюда следует для достаточно больших k справедливость неравенства $(f, v) > (z_{n_k}, v)$, поскольку $(u_{n_k}, v) = \|u_{n_k}\|(v_{n_k}, v)$, $(v_{n_k}, v) \to \|v\|^2 = 1$ и $\|u_{n_k}\| > n_k$. Из чего заключаем, что

$$(f, v) \geq \liminf_{k\to\infty}(z_{n_k}, v) \geq \liminf_{k\to\infty}\Big(\int\limits_{v>0} g_-(x, t, u_{n_k}(x, t))v(x)dxdt +$$

$$+ \int\limits_{v<0} g_+(x, t, u_{n_k}(x, t))v(x)dxdt\Big) \geq \int\limits_{v>0} \underline{g}_+(x, t)v(x)dxdt + \int\limits_{v<0} \overline{g}_-(x, t)v(x)dxdt.$$

При переходе к пределу под знак интеграла воспользовались леммой Лебега-Фату [10] с учетом оценки (4) для $g(x, t, u)$ и тем, что для почти всех $(x, t) \in Q$ $u_{n_k} \to +\infty$, если $v(x) > 0$, и $u_{n_k} \to -\infty$, если $v(x) < 0$. Полученное неравенство противоречит условию Ландесмана - Лазера в теореме1. Теорема1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1964. 540 с.
2. Красносельский М.А. *Системы с гистерезисом.* М.: Наука, 1983. 272 с.
3. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989. 464 с.
4. H. Brezis, L. Nirenberg *Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems.* //Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1978. V.5, № 2. P. 225–325
5. Борисович Ю.Г. и др. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* М.: КомКнига. 2005. 216 с.
6. Рудаков И.А. *Периодическое решение нелинейного телеграфного уравнения.* //Вестник Московского университета, 1993. № 4. С. 3–6.
7. W.S. Kim *Periodic-Dirichlet boundary value problem for nonlinear dissipative hyperbolic equations at resonance.* //Bull. Korean Math. Soc. 1989. V. 26 № 2. P. 221–229.
8. N. Hirano, W.S. Kim *Periodic-Dirichlet boundary value problem for semilinear dissipative hyperbolic equations.* // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 148 № 2. P. 371–377.
9. Павленко В.Н. *Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями.* // Укр. матем. журн. 1994. Т.5. №6. С. 729–736
10. Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1967. 624 с.

Ильдар Фаридович Галиханов,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: igalikhanov@mail.ru

Вячеслав Николаевич Павленко,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: pavlenko@csu.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 80-86.

УДК 517.928

СДВИГ ФАЗЫ ДЛЯ СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Р.Н. ГАРИФУЛЛИН

Аннотация. Исследуется специальное решение уравнения Кортевега де Вриза, которое описывает влияние малой дисперсии на процессы трансформации слабых разрывов уравнений идеальной гидродинамики в сильные. Это решение также удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка. Для него в зоне Уиземовских колебаний построено асимптотическое решение с точностью до сдвига фазы. На сдвиг фазы получено уравнение, и с помощью численных экспериментов выбрано конкретное решение полученного уравнения, которое оказывается постоянным.

Ключевые слова: сдвиг фазы, уравнение Кортевега–де Вриза, недиссипативные ударные волны.

1. Введение

В работах А.М.Ильина и С.В. Захарова [1–3] начато исследование вопроса о влиянии малой диссипации на процессы трансформации слабых разрывов в сильные. В этих работах показано, что этот процесс в главном описывается специальным решением уравнения Бургерса. В работе [4] показано, что в задачах с малой дисперсией аналогичную роль играют два специальных решения уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.1}$$

В этой работе будет исследоваться одно из них с заданными асимптотиками:

$$u\big|_{x\to-\infty} = 0, \qquad u\big|_{x\to\infty} = (-t - \sqrt{t^2+4x})/2. \tag{1.2}$$

Решение $u(x,t)$ играет универсальную роль [4] в задачах о возникновении бездиссипативных ударных волн [4–6]. В работе [4] для решения задачи (1.1,1.2) построено асимптотическое решение при $x^2+t^2 \to \infty$, которое в области незатухающих осцилляций задается квазипростыми решениями уравнений Уизема. Однако, в этом решении оставался неопределенным сдвиг фазы. В данной работе определяется этот сдвиг фазы методом, предложенным в [8].

В [4] показано, что решение $u(x,t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка по переменной x :

$$\left(u_{xxxx} + \frac{5u_{xx}u}{3} + \frac{5u_x^2}{6} + \frac{5u^3}{18}\right)'_x - \frac{2u + xu_x - 3t(u_{xxx}+uu_x)}{6} = 0. \tag{1.3}$$

R.N. Garifullin, Phase shift for the common solution of the KdV and the fifth order differential equation.

Поступила 19 мая 2012 г.

Уравнение (1.3) представляет собой комбинацию стационарных частей симметрий уравнений КдВ. Одна из них — высшая (обобщенная) симметрия пятого порядка:

$$u_{\tau_5} = \left(u_{xxxx} + \frac{5u_{xx}u}{3} + \frac{5u_x^2}{6} + \frac{5u^3}{18}\right)'_x, \tag{1.4}$$

вторая – классическая симметрия растяжения:

$$u_{\tau_r} = 2u + xu_x - 3t(u_{xxx} + uu_x). \tag{1.5}$$

Уравнения (1.3) можно назвать первым высшим аналогом уравнения Пенлеве I, см.6.2 [4].

Статья состоит из двух частей. В первой части показывается как задача (1.1,1.2) возникает при описании бездиссипативных ударных волн. Для этого рассматривается задача Коши для возмущенного обобщенного уравнения Хопфа с начальными данными, терпящими слабый разрыв. Показывается, что в окрестности точки градиентной катастрофы для главного члена асимптотики возникает исследуемая задача. Во второй части строится асимптотическое решение задачи (1.1,1.2) методом, который использует наличие двух уравнений, которым удовлетворяет решение $u(x,t)$. Для неизвестного сдвига фаз полученное обыкновенное линейное уравнение третьего порядка. Конкретное решение этого уравнения выбрано с помощью численных экспериментов: моделирования решения $u(x,t)$ и построенного асимптотического решения.

2. Возникновение задачи (1.1,1.2)

В статье [4] показано возникновение задачи (1.1,1.2) на примере возмущенного обобщенного уравнения Хопфа, уравнений мелкой воды и дисперсионного нелинейного уравнения Шредингера. В данной статье возникновение этой задачи будет показано более подробно.

Рассмотрим задачу Коши для функции $U(X,T)$:

$$\begin{aligned} &U_T + g(U)U_X + \varepsilon^3 U_{XXX} = 0, \\ &U(X,0) = F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} F_-(x), & x < 0, \\ F_+(x), & x \geq 0. \end{array} \right. , \quad F_-(0) = F_+(0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

С помощью замены переменных и переобозначения ε мы можем добиться:

$$F_-(0) = F_+(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 1. \tag{2.2}$$

На исходные данные ставятся условия:

$$\begin{gathered} g'(U) > 0, \quad F'_-(0) > F'_+(0), \quad F'_+(0) < 0, \\ F'(X)g'(F(X)) \notin [F'_+(0), 0], \ \forall x \neq 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

которые обеспечивают существования слабого разрыва начальных данных и возникновения градиентной катастрофы (сильного разрыва) на характеристике $X = 0$ в некоторый момент времени T^* в невозмущенном уравнении ($\varepsilon = 0$).

Будем строить асимптотическое решение задачи Коши (2.1) в виде ряда:

$$U(X,T) = U_0(X,T) + \varepsilon^3 U_1(X,T) + \ldots \tag{2.4}$$

Главный член и первая поправка удовлетворяют задачам:

$$\partial_T U_0 + g(U_0)\partial_X U_0 = 0, \quad U_0(X,0) = F(X), \tag{2.5}$$

$$\partial_T U_1 + g(U_0)\partial_X U_1 + g'(U_0)\partial_X U_0 U_1 + \partial_X^3 U_0 = 0, \quad U_1(X,0) = 0. \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.5) выписывается в неявном виде методом характеристик:

$$U_0 = F(X - g(U_0)T), \quad X \neq 0. \tag{2.7}$$

Решение задачи (2.6) также находится методом характеристик и его можно выписать явно в терминах функции $U_0(X,T)$.

Точка градиентной катастрофы X^*, T^*, U^* определяется соотношениями:

$$T^* = -\frac{1}{F'_+(0)}, \quad U^* = 0, \quad X^* = 0 \tag{2.8}$$

Определим поведение решения $U_0(X,T)$, $U_1(X,T)$ в окрестности прямой $X=0$, с учетом ограничений на исходные данные имеем:

$$U_0(X,T) = \begin{cases} \dfrac{F'_+(0)}{1+TF'_+(0)}X + \dfrac{F''_+(0) - TF'_+(0)g''(0)}{2(1+TF'_+(0))^3}X^2 + O(X^3), & X>0, \\ \dfrac{F'_-(0)}{1+TF'_-(0)}X + \dfrac{F''_-(0) - TF'_-(0)g''(0)}{2(1+TF'_-(0))^3}X^2 + O(X^3), & X<0 \end{cases}$$

$$U_1(X,T) = \begin{cases} \dfrac{U^+_{10}(T)}{(1+TF'_+(0))^4} + U^+_{11}(T)X + O(X^2), & X>0, \\ \dfrac{U^-_{10}(T)}{(1+TF'_-(0))^4} + U^-_{11}(T)X + O(X^2), & X<0 \end{cases}$$

Мы видим, что первая производная не является непрерывной функцией, более того, первая поправка $U_1(X,T)$ терпит разрыв в точке $X=0$ при $T>0$. Поэтому в окрестности линии $X=0$ надо строить асимптотику по-другому. В окрестности этой линии необходимо сделать растяжение переменных:

$$U(X,T,\varepsilon) = \varepsilon V(y,T,\varepsilon), \quad x = \varepsilon y. \tag{2.9}$$

После этого задача (2.1) в новых переменных примет вид:

$$\begin{gathered} V_T + VV_y + V_{yyy} + (U(\varepsilon V)/\varepsilon - V)V_y = 0, \\ V(y,0) = F(\varepsilon y)/\varepsilon = \begin{cases} F'_-(0)y + \varepsilon F''_-(0)y^2 + \dots, & y<0, \\ F'_+(0)y + \varepsilon F''_+(0)y^2 + \dots, & y>0. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.10}$$

Формальная асимптотика функции V может быть построена в виде ряда:

$$V(y,T,\varepsilon) = V_0(y,T) + \varepsilon V_1(y,t) + \dots. \tag{2.11}$$

На главный член асимптотики получается задача:

$$\begin{gathered} V^0_T + V^0V^0_y + V^0_{yyy} = 0, \\ V^0(y,0) = \begin{cases} F'_-(0)y, & y<0, \\ F'_+(0)y, & y>0. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.12}$$

В случае $F'_-(0) = 0$ существование решения этой задачи на отрезке $T \in (0, T^*)$ доказано Фаминским [9]. Для решения задачи (2.12) верна асимптотика, следующая из соображений согласования с разложением для функции $U(X,T)$

$$V(y,T) \to \frac{F'_+(0)}{1+TF'_+(0)}y, y \to +\infty, \quad V(y,T) \to 0, y \to -\infty.$$

Однако, в окрестности точки градиентной катастрофы X^*, T^* становится непригодными и разложение для $U(X,T)$ и разложение для $V(y,T)$. В окрестности этой точки требуется делать другое растяжение.

Окрестность точки $(0,T^*)$ исследуем с помощью внешнего разложения (2.4). Выпишем, как себя ведет решение $U_0(X,T)$ в окрестности точки градиентной катастрофы слева и справа от прямой $X=0$:

$$X - \left(g''(0) + F''_+(0)(T^*)^2\right)U^2/2 - U(T-T^*) + \dots = 0, \ X>0 \tag{2.13}$$

$$X - \left(\frac{1}{F'_-(0)} + T\right)U + \dots = 0, \ X<0. \tag{2.14}$$

Здесь и ниже константа

$$\delta = (g''(0) + F''_+(0)(T^*)^2)/2 > 0 \tag{2.15}$$

считается положительной, в силу условия (2.3) она не отрицательна, а в ситуации общего положения положительна.

Согласно методу согласования асимптотических разложений [7] проведем растяжение переменных в окрестности точки градиентной катастрофы:

$$U(X,T) = a\varepsilon^\alpha u, \quad T - T^* = b\varepsilon^\beta t, \quad X = c\varepsilon^\gamma x. \tag{2.16}$$

В новых переменных уравнение (2.1) и формулы (2.14) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b}\varepsilon^{\alpha-\beta}u_t + \frac{a^2}{c}\varepsilon^{2\alpha-\gamma}uu_t + \frac{a}{c^3}\varepsilon^{3+\alpha-3\gamma}u_{xxx} + \frac{a^3}{c}\varepsilon^{3\alpha-\gamma}g''(0)u^2u_x + \ldots = 0,\\
&c\varepsilon^\gamma x - \delta a^2\varepsilon^{2\alpha}u^2 - ab\varepsilon^{\alpha+\beta}ut + \ldots = 0, \quad x \gg 1,\\
&c\varepsilon^\gamma x - \left(\frac{1}{F'_-(0)} + T^*\right)a\varepsilon^\alpha u + \ldots = 0, \quad x \ll -1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Потребовав равенство коэффициентов перед первыми тремя слагаемыми в первых двух уравнениях, получим систему:

$$\alpha - \beta = 2\alpha - \gamma = 3 + \alpha - 3\gamma, \quad \gamma = 2\alpha = \alpha + \beta,$$
$$a/b = a^2/c = a/c^3, \quad c = \delta a^2 = ab.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$\alpha = \beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{6}{5}, \quad a = \delta^{-2/5}, \quad b = \delta^{3/5}, \quad c = \delta^{1/5}.$$

После растяжения (2.16) с указанными параметрами уравнения (2.17) примут вид:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + O(\varepsilon^{3/5}) = 0,$$
$$x - u^2 - ut + O(\varepsilon^{3/5}) = 0, x \gg 1, \quad u + O(\varepsilon^{3/5}) = 0, x \ll -1.$$

Этот вид в главном совпадает с задачей (1.1,1.2).

3. Определение сдвига фазы

Асимптотическое решение задачи (1.1,1.2,1.3) при $t \to \infty$ состоит из нескольких частей [4]. Особый интерес представляет зона незатухающих колебаний. Сделаем естественную замену переменных

$$u = t\,U(t,s), \quad s = \frac{x}{t^2}.$$

После нее уравнения (1.1,1.3) примут вид:

$$t^{-5}U_{sss} + tU_t - 2sU_s + UU_s + U = 0, \tag{3.1}$$

$$t^{-10}U_{sssss} + \frac{1}{6}t^{-5}(20U_sU_{ss} + (10U+3)U_{sss}) + \frac{1}{6}(5U^2 - s + 3U)U_s - \frac{1}{3}U = 0. \tag{3.2}$$

В уравнении (3.2) все производные по переменной x третьего и более высокого порядка можно заменить в силу уравнения (3.1):

$$2t^{-5}((U_s+9)U_{ss} + 6sU_{sss}) - 6t^{-4}U_{sst} + (5s + U^2 + 8sU)U_s - (4U+3)tU_t - (5+4U)U = 0. \tag{3.3}$$

Асимптотическое решение U этой системы (3.1,3.3) строится в виде ряда по обратным степеням t

$$U = U_0(\varphi,s) + t^{-5/4}U_1(\varphi,s) + t^{-5/2}U_2(\varphi,s) + \ldots, \quad t \to \infty. \tag{3.4}$$

Здесь U_0, U_1 и U_2 – 2π периодические функции быстрой переменной φ. Эта переменная имеет вид

$$\varphi = t^{5/2} f(s) + n(s),$$

где $n(s)$ — искомый сдвиг фазы.

Для функции U_0 получаем следующую нелинейную систему уравнений по быстрой переменной φ:

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_0 + (a(s) + U_0)\,\partial_\varphi U_0 = 0,\\ 6a(s)(f')^2\partial_\varphi^3 U_0 - 2(f')^2\partial_\varphi^2 U_0\partial_\varphi U_0 + \partial_\varphi U_0\big(s - U_0^2 + 4a(s)U_0 + 3a(s)\big) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для функций U_1, U_2 линейные неоднородные системы уравнения. Первое из уравнений на U_1 имеет вид:

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_1 + (a(s) + U_0)\,\partial_\varphi U_1 + \partial_\varphi U_0 U_1 = -3f'n'\partial_\varphi^3 U_0\\ + (2s - U_0)\frac{\partial_\varphi U_0 n' + \partial_s U_0}{f'} - 3\partial_s(f'\partial_\varphi^2 U_0) - \frac{U_0}{f'}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь обозначено:

$$a(s) = \frac{5f}{2f'} - 2s.$$

Исключив из (3.5) выражение $\partial_\varphi^3 U_0$, получим уравнение второго порядка для функции U_0:

$$(f')^2\partial_\varphi^2 U_0 + \frac{1}{2}U_0^2 + a(s)U_0 + 3a(s)^2 - \frac{s + 3a(s)}{2} = 0. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) может быть один раз проинтегрировано:

$$(f'\partial_\varphi U_0)^2 + \frac{1}{3}U_0^3 + a(s)U_0^2 + (6a^2 - 3a - s)U_0 + b(s) = 0. \tag{3.8}$$

Здесь $b(s)$ – произвольная функция (константа интегрирования).

Далее предлагается не выписывать явно решение U_0, а просто считать, что это некая 2π периодическая функция, удовлетворяющая уравнению (3.8). В силу этого уравнения мы можем все производные от U_0 выписать как рационально-дробные выражения в терминах:

$$U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, \partial_s^2 U_0, \dots.$$

Уравнения на U_1 имеют вид :

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_1 + (a(s) + U_0)\,\partial_\varphi U_1 + \partial_\varphi U_0 U_1 = \frac{F_1(U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, a, a', n', s)}{f}\\ 6a(s)(f')^2\partial_\varphi^3 U_1 - 2(f')^2(\partial_\varphi^2 U_1\partial_\varphi U_0 + \partial_\varphi^2 U_0\partial_\varphi U_1) + \partial_\varphi U_1(s - U_0^2 + 4aU_0 + 3a)\\ +2\partial_\varphi U_0(2a - U_0)U_1 = \frac{F_2(U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, a, b, a', b', n', s)}{f\partial_\varphi U_0}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь F_1, F_2 — полиномиальные функции своих аргументов. Исключая из системы (3.9) последовательно старшие производные U_1 по переменной φ, придем к соотношению, не содержащему функцию U_1 – условию совместности этой системы:

$$\begin{aligned} \big(3(2s + a)(-2s - 24a + 3 + 36a^2)a' + (4s + 2a)b' + 6sa - 4s - 27a + 108a^2 - 6b\\ -108a^3\big)\,U_0 + 3(2s + a)(-72a^3 + 54a^2 - 9a + 12sa + 4b - 3s)a' + 3(4a - 1)(2s + a)b'\\ +45a^2 - 36sa^2 + 216a^4 + 15b - 198a^3 + 15sa - 48ab = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку равенство (3.10) должно выполнятся тождественно, то равны 0 коэффициенты при разных степенях U_0, следовательно получаем уравнения для $a(s), b(s)$:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{(2a-1)(-288a^3+192a^2+24sa-27a-4s+4b)}{(2s+a)(-576a^3+504a^2-126a+48sa+8b-12s+9)}, \\ b' &= (3s-54a^2+36a-9/2)a' + \frac{-6sa+4s-108a^2+27a+6b+108a^3}{4s+2a}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Система (3.9) совместна тогда и только тогда, когда $a(s)$ и $b(s)$ определены из уравнений (3.11). Если это условие выполнено, то все производные по φ от U_1 старше второго порядка можно выразить через младшие производные, например:

$$(f')^2\partial_\varphi^2 U_1 = -(U_0+a)U_1 + (n' + \partial_s U_0/\partial_\varphi U_0)G_1(U_0,a,s)/s + G_2(U_0,a,b,s)/f/\partial_\varphi U_0,$$

где G_1, G_2 — некоторые функции.

Уравнения на U_2 имеют вид :

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_2 + (a(s)+U_0)\,\partial_\varphi U_2 + \partial_\varphi U_0 U_2 &= \frac{F_3}{f} \\ 6a(s)(f')^2\partial_\varphi^3 U_2 - 2(f')^2(\partial_\varphi^2 U_2\partial_\varphi U_0 + \partial_\varphi^2 U_0\partial_\varphi U_2) + \partial_\varphi U_2(s-U_0^2+4aU_0+3a) \\ +2\partial_\varphi U_0(2a-U_0)U_2 &= \frac{F_4}{f\partial_\varphi U_0}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь F_3, F_4 — функции, зависящие от предыдущих поправок.

Исключая последовательно производные функции U_2 из этих уравнений, получим соотношение вида:

$$\begin{aligned} &\partial_{\varphi s}U_1 - \frac{\partial_\varphi^2 U_0}{\partial_\varphi U_0}\partial_s U_1 + \left(\frac{\partial_\varphi^2 U_0\partial_s U_0}{(\partial_\varphi U_0)^2} + \frac{G_3(U_0,a,b)}{(f\partial_\varphi U_0)^2(12a+2U_0-3)}\right)\partial_\varphi U_1 \\ &-\left(\frac{\partial_\varphi^3 U_0\partial_s U_0}{(\partial_\varphi U_0)^2} - \frac{G_4(U_0,a,b)}{(f\partial_\varphi U_0)^2(12a+2U_0-3)}\right)U_1 = G_5(U_0,a,b,n',n''). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Дифференцируя это уравнение по φ, получаем соотношение такого же вида, исключая из этих двух уравнений $\partial_{\varphi s}U_1$, получаем:

$$\partial_\varphi U_1 = \frac{\partial_\varphi^2 U_0}{\partial_\varphi U_0}U_1 + \frac{n''G_6(s,a,b,f) + n'G_7(s,a,b,f)}{\partial_\varphi U_0} + G_8(\partial_s^3 U_0, \partial_s^2 U_0, \partial_s U_0, \partial_\varphi U_0, U_0, a, b, f, s). \tag{3.14}$$

Подставив это в уравнение (3.13), получим соотношение вида:

$$\begin{aligned} \partial_\varphi U_0(n''' + A_1 n'' + A_2 n') + \partial_s^3 U_0 + B_1\partial_s^2 U_0\partial_s U_0 + B_2\partial_s^2 U_0 &+ \\ B_3(\partial_s U_0)^3 + B_4(\partial_s U_0)^2 + B_5\partial_s U_0 + B_6 &= 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$A_i = A_i(s,f,a,b), \quad B_i = B_i(U_0,s,f,a,b)$$

некоторые функции.

Без ограничения общности можно считать функию U_0 четной по φ. Тогда в (3.15) первая часть нечетна, вторая четна по φ. Следовательно, из (3.15) немедленно получаем два уравнения:

$$n''' + A_1 n'' + A_2 n' = 0. \tag{3.16}$$

$$\partial_s^3 U_0 + B_1\partial_s^2 U_0\partial_s U_0 + B_2\partial_s^2 U_0 + B_3(\partial_s U_0)^3 + B_4(\partial_s U_0)^2 + B_5\partial_s U_0 + B_6 = 0. \tag{3.17}$$

Общее решение (3.16) имеет вид:

$$n(s) = C_1 + C_2 n_1(s) + C_2 n_2(s). \tag{3.18}$$

Здесь n_1, n_2 — отличные от константы линейно-независимые решения (3.16). С использованием численных методов мы получаем:

$$n(s) = \pi.$$

Численно показано, что разница между численным и асимтотическим решением убывает как $t^{-5/2}$ для этого значения $n(s)$. На рисунке 1 представлено численное моделирование решения $U(t,z)$ при $t = 19$ и главного член асимптотики $U_0(\varphi, s)$.

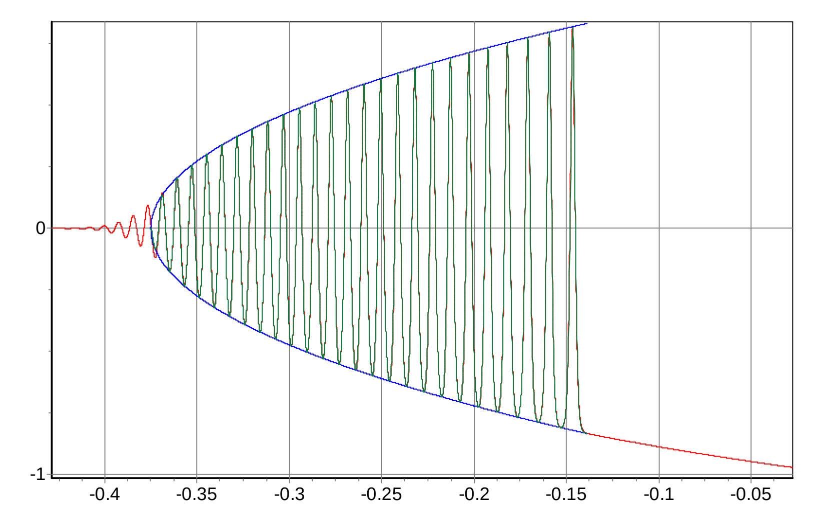


Рис. 1. Численное моделирование функции $U(t,z)$ при $t = 19$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.M. Il'in, S.V. Zakharov *On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities* // International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, 1999). Funct. Differ. Equ. 8 (2001), no. 3–4. P. 257–271.
2. Захаров С.В., Ильин А.М. *От слабого разрыва к градиентной катастрофе* // Матем. сб., 192:10 (2001). С. 3–18 .
3. Захаров С.В. *Зарождение ударной волны в одной задаче Коши для уравнения Бюргерса* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 44:3 (2004). С. 536–542.
4. Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И. *От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам* // ЖЭТФ. 2010. 137, вып. 1. С. 149–164.
5. Камчатнов А.М., Корнеев С.В. *Течение Бозе-Эйнштейновского конденсата в квазиодномерном канале под действием поршня* // ЖЭТФ. 2010. 137, вып. 1. С. 191–204.
6. G.A. El, V.V. Khodorovskii, A.M. Leszczyszyn *Refraction of dispersive shock waves* arXiv:1105.1920v1 [nlin.PS]
7. Ильин А. М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* — М.: Наука, 1989. — 336 с.
8. R. Garifullin, B. Suleimanov, N. Tarkhanov *Phase Shift in the Whitham Zone for the Gurevich-Pitaevskii Special Solution of the Korteweg-de Vries Equation* Ph. Let. A 374 (2010). P. 1420–1424, DOI:10.1016/j.physleta.2010.01.057.
9. Фаминский А.В. *Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза в случае негладкой неограниченной начальной функции* // Матем. заметки, 83:1 (2008). С. 119–128 .

Рустем Наилевич Гарифуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: rustem@matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 87-100.

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ОБЛАСТИ С МАЛОЙ ПОЛОСТЬЮ

А.Р. ДАНИЛИН

Аннотация. Статья посвящена исследованию асимптотики решения задачи оптимального граничного управления [1] в области с малой полостью. Построение асимптотики краевой задачи для эллиптического оператора в области с малой полостью рассмотрено в [2], а асимптотика распределенного управления в области с малой полостью — в [3]. Асимптотика граничного управления для оператора с малым коэффициентом при старшей производной рассматривалась в [4], [5]. Другие задачи управления решениями краевых задач оптимального управления, содержащих малый параметр, рассмотрены в [6], [7].

Ключевые слова:асимптотика, граничное управление, метод согласования, краевые задачи, системы уравнений в частных производных.

1. Постановка задачи

В двусвязной ограниченной области $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \varepsilon\omega \subset \mathbb{R}^3$ $(O \in \overset{\circ}{\omega}, \overline{\omega} \subset \overset{\circ}{\Omega})$ с гладкой границей $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \varepsilon\gamma := \partial\Omega \cup \varepsilon\partial\omega$ (Ω_ε — гладкое многообразие с краем) рассматривается следующая задача оптимального управления [1, глава 2, соотношения (2.41), (2.9)]

$$\begin{cases} Az_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon,\ z_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A} = g(x) + u_\varepsilon(x), & x \in \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$u \in \mathcal{U}_\varepsilon \text{ — выпуклое и замкнутое множество в } L_2(\Omega_\varepsilon), \tag{1.2}$$

$$J(u) := ||z_\varepsilon - z_d||_\varepsilon^2 + \nu^{-1}|||u_\varepsilon|||_\varepsilon^2 \to \inf, \tag{1.3}$$

где $A = -\nabla \cdot \big(A_{3\times3}(x) \cdot \nabla\big) + a_0(x)$, $A_{3\times3}(x) = (a_{ij}(x))$, то есть

$$Az := -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial z}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)z,$$

$$f, a_0, a_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega}), g \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial n_A} := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\cos(n, x_i) = \nabla z \cdot \big(A_{3\times3}^T n\big) - \tag{1.5}$$

конормальная производная, определяемая оператором A, $\cos(n, x_i)$ — i-й направляющий косинус внешней нормали n к границе Γ_ε области Ω_ε, $A_{3\times3}^T$ — транспонированная матрица $A_{3\times3}$, ν — положительная константа, а $||\cdot||_\varepsilon$ и $|||\cdot|||_\varepsilon$ — нормы в пространстве $L_2(\Omega_\varepsilon)$ и $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ соответственно.

A.R. Danilin, Optimal boundary control in a small concave domain .

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00679-а), ФЦП 02.740.11.0612 и Программой Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математике и физике"(проект 12-П-1-1009).

Поступила 15 апреля 2012 г.

Относительно коэффициентов оператора A кроме этого предполагается следующее:

$$\exists\,\alpha>0\,\forall\,x\in\overline{\Omega}\,\forall\xi\in\mathbb{R}^3$$
$$\sum_{i,j=1}^{3}a(x)_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2,\quad a_0(x)\geqslant\alpha>0 \tag{1.6}$$
$$a_{ii}(0)=1,a_{ij}(0)=0\,(i\neq j).$$

В дальнейшем скалярные произведения в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ и $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_\varepsilon$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$, норму в $H^1(\Omega_\varepsilon)$ — через $||\cdot||_{\varepsilon,1}$, а нормы и скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $||\cdot||_0$, $(\cdot,\cdot)_0$ и $|||\cdot|||_0$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ соответственно.

В [1, глава 2, п. 2.4] доказано, что задача (1.1) — (1.3) имеет единственное решение.

Мы будем рассматривать эту задачу при следующих предположениях:

$$\begin{gathered}g\Big|_{\varepsilon\gamma}\equiv 0,\\ \mathcal{U}_\varepsilon=\mathcal{U}_\varepsilon(1),\ \text{где}\ \ \mathcal{U}_\varepsilon(r):=\{u\in L_2(\Gamma_\varepsilon):u\Big|_{\varepsilon\gamma}\equiv 0,\ |||u|||_0\leqslant r\},\end{gathered} \tag{1.7}$$

то есть управление процессом происходит только через внешнюю границу.

Нас будет интересовать асимптотическое разложение z_ε и u_ε при $\varepsilon\to 0$.

2. Определяющие соотношения

Как показано в [1, глава 2, п. 2.4], единственное решение задачи (1.1) — (1.3) пара z_ε и u_ε — характеризуется следующими условиями: существует $p_\varepsilon\in H^1(\Omega_\varepsilon)$ такое, что

$$\begin{cases}Az_\varepsilon=f(x), & A^*p_\varepsilon=z_\varepsilon-z_d,\quad x\in\Omega_\varepsilon,\\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A}=g(x)+u_\varepsilon(x), & \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n_{A^*}}=0,\qquad x\in\Gamma_\varepsilon\end{cases} \tag{2.1}$$

и

$$\forall\,v\in\mathcal{U}\qquad\langle p_\varepsilon+\nu^{-1}u_\varepsilon,v-u_\varepsilon\rangle\geqslant 0, \tag{2.2}$$

где оператор A^* — формально сопряженный к A, то есть

$$A^*:=-\nabla\cdot\left(A^T_{3\times3}(x)\cdot\nabla\right)+a_0(x).$$

Лемма 1. *Условие* (2.2) *для* $\mathcal{U}_\varepsilon=\mathcal{U}_\varepsilon(r)$ *эквивалентно следующему*

$$\begin{gathered}\exists\,\lambda\in(0;\nu]:\ \Big(u_\varepsilon(\cdot)=-\lambda p_\varepsilon(\cdot)\Big|_\Gamma\Big)\wedge\\ \wedge\Big(\lambda|||p_\varepsilon|||_0\leqslant r\Big)\wedge\Big((\nu-\lambda)\cdot(r-\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0)=0\Big).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 из [4]. ■

С учетом (2.3) система (2.1) принимает вид

$$\begin{cases}Az_\varepsilon=f(x), & A^*p_\varepsilon=z_\varepsilon-z_d,\quad x\in\Omega_\varepsilon,z_\varepsilon,p_\varepsilon\in H^1(\Omega_\varepsilon),\\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A}+\lambda_\varepsilon p_\varepsilon=g(x), & \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n_{A^*}}=0,\qquad x\in\Gamma\\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A}=0, & \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n_{A^*}}=0,\qquad x\in\varepsilon\gamma\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\big(\lambda_\varepsilon\in(0;\nu]\big)\wedge\Big(\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0\leqslant 1\Big)\wedge\Big((\nu-\lambda_\varepsilon)\cdot\big(1-\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0\big)=0\Big). \tag{2.5}$$

Отметим, что в силу условий (1.6) граничный оператор $\partial/\partial n_A$ $(\partial/\partial n_{A^*})$ нормален, накрывает оператор A (A^*) [8, Глава 2. п. 1.4.], а отображение следа

$$H^m(\Omega_\varepsilon)\ni w\mapsto\left(w\Big|_{\Gamma_\varepsilon},\frac{\partial w}{\partial n_A}\right)\in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon)\times H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$$

сюръективно.

Действительно, если n — единичный вектор нормали к Γ_ε, то в силу (1.5)

$$n \cdot \big(A^T_{3\times 3} \cdot n\big) = n \cdot \big(A_{3\times 3} \cdot n\big) \geqslant \alpha > 0,$$

что и означает нормальность этого граничного оператора.

Пусть теперь $0 \neq \tau$ — касательный вектор к Γ_ε в точке $x \in \Gamma_\varepsilon$, n — единичный вектор нормали к Γ_ε в точке $x \in \Gamma_\varepsilon$, $\beta \neq 0$, $A^T_{3\times 3} \cdot n = \tau_1 + \beta_1 n$, где τ_1 касательный вектор к Γ_ε в точке $x \in \Gamma_\varepsilon$. Тогда многочлен

$$(\tau + \beta t \cdot n) \cdot \big(A^T_{3\times 3} n\big) = \tau \cdot \tau_1 + \beta \cdot \beta_1 t$$

от t имеет отличный от нуля коэффициент при t, поскольку $\beta_1 = n \cdot \big(A^T_{3\times 3} n\big)$. Поэтому его корень вещественен. Таким образом этот многочлен не равен нулю по модулю многочлена $(t - t_1)$, где t_1 — комплексный корень многочлена второго порядка, порожденного символом оператора A и вектором $\tau + \beta t \cdot n$.

Наконец, покажем для произвольных $\varphi \in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и $\psi \in H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$ разрешимость задачи $H^m(\Omega_\varepsilon) \ni w$ $w = \varphi\Big|_{\Gamma_\varepsilon}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial n_A} = \psi$.

В силу определения (1.5) и представления $A^T_{3\times 3}(x) \cdot n(x) = \tau_1(x) + \beta_1(x) n(x)$ получим, что $\partial w / n_A = \nabla w \cdot \tau_1(x) + \beta_1(x) \partial w / n$. Но $\nabla w \cdot \tau_1$ есть производная по касательному вектору τ_1, поэтому она выражается через φ: $\nabla w \cdot \tau_1 = B(\varphi)$. Тогда $\partial w / n = \beta_1^{-1}\big(\partial w / n_A - B(\varphi)\big) = \beta_1^{-1}\big(\psi - B(\varphi)\big)$. Но в силу теоремы о следах [8, Глава 1, теорема 8.3] отображение

$$H^m(\Omega_\varepsilon) \ni w \mapsto \left(w\Big|_{\Gamma_\varepsilon}, \frac{\partial w}{\partial n}\right) \in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \times H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$$

есть сюръекция.

В силу свойств эллиптических уравнений из условия (1.6) следует, что

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^m(\Omega_\varepsilon),$$

и, следовательно, $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$.

Отметим, что краевая задача (2.4) при каждом фиксированном λ_ε по определению эквивалентна соотношениям

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall\, \varphi, \psi & \in & H^1(\Omega_\varepsilon) \\ (f, \varphi) & = & \pi_\varepsilon(\nabla z_\varepsilon, \nabla \varphi) + (a_0 z_\varepsilon, \varphi)_\varepsilon - \langle g - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon, \varphi\rangle_0, \\ (z_\varepsilon - z_d, \psi) & = & \pi_\varepsilon(\nabla \psi, \nabla p_\varepsilon) + (a_0 p_\varepsilon, \psi)_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

где

$$\pi_\varepsilon(\varphi, \psi) := \sum_{i,j=1}^{3} \left(a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)_\varepsilon.$$

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться тем фактом, что если $\Omega_1 \supset \Omega_2$, то определено непрерывное вложение $H^m(\Omega_1) \hookrightarrow H^m(\Omega_2)$ — "сужение на Ω_2". Мы не будем различать сам элемент из $H^m(\Omega_1)$ и его сужение на Ω_2. Отметим также, что норма этого оператора вложения равна 1.

Лемма 2. *Пусть z_ε, p_ε и λ_ε, — решение задачи* (2.4), (2.5). *Тогда*

$$||z_\varepsilon||^2_\varepsilon + \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon|||^2_0 = (f, p_\varepsilon)_\varepsilon + (z_d, z_\varepsilon)_\varepsilon + \langle g, p_\varepsilon\rangle_0 \tag{2.7}$$

и

$$||z_\varepsilon||_{\varepsilon,1}, ||p_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big), \varepsilon \to 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ — решение задачи (1.1) при $u \equiv 0$. Тогда по определению $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ получим, что $||z_\varepsilon - z_d||_\varepsilon \leqslant ||\overset{\circ}{z}_\varepsilon - z_d||_\varepsilon$, откуда следует, что

$$||z_\varepsilon||_\varepsilon \leqslant ||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||_\varepsilon + 2||z_d||_\varepsilon. \tag{2.9}$$

Поскольку $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ удовлетворяет (1.1) при $u \equiv 0$, то

$$(f, \overset{\circ}{z}_\varepsilon)_\varepsilon = (A\overset{\circ}{z}_\varepsilon, \overset{\circ}{z}_\varepsilon)_\varepsilon = \pi_\varepsilon(\nabla \overset{\circ}{z}_\varepsilon, \overset{\circ}{z}_\varepsilon) + (a_0 \overset{\circ}{z}_\varepsilon, \overset{\circ}{z}_\varepsilon)_\varepsilon - \langle g, \overset{\circ}{z}_\varepsilon\rangle_0,$$

что с учетом (1.6) дает

$$\alpha||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||^2_{\varepsilon,1} \leqslant ||f||_\varepsilon \cdot ||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||_\varepsilon + |||g|||_0 \cdot |||\overset{\circ}{z}_\varepsilon|||_0. \tag{2.10}$$

Поскольку $H^s(\Gamma)$ при $s>0$ вложено в $L_2(\Gamma)$ плотно и непрерывно, то в силу теоремы о следах (см [8, Глава 1, теорема 8.3]) оператор взятия следа является непрерывным как оператор из $H^m(\Omega)$ в $L_2(\Gamma)$ при $m \geqslant 1$, то есть

$$\exists K>0\, \forall z \in H^1(\Omega) \qquad |||z|||_0 \leqslant K||z||_{H^1(\Omega)}, \tag{2.11}$$

поэтому в силу (2.10)

$$||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + |||g|||_0\big). \tag{2.12}$$

В силу (2.12) и (2.9) получим, что

$$||z_\varepsilon||_\varepsilon = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big). \tag{2.13}$$

Теперь, положив в (2.6) $\varphi = z_\varepsilon$ и $\psi = p_\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} &\alpha|||z_\varepsilon|||^2_{\varepsilon,1} \leqslant (f, z_\varepsilon)_\varepsilon + \langle g, z_\varepsilon\rangle_0 - \langle \lambda_\varepsilon p\varepsilon, z_\varepsilon\rangle_0, \\ &\alpha|||p_\varepsilon|||^2_{\varepsilon,1} \leqslant (p_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon - (z_d, p_\varepsilon)_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Из последнего неравенства с учетом (2.13) получим, что

$$||p_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big). \tag{2.15}$$

Теперь из первого соотношения в (2.14) и соотношения (2.15) с использованием неравенства (2.11) и ограниченности λ_ε получим, что

$$||z_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big).$$

Наконец, взяв в (2.6) $\varphi = p_\varepsilon$ и $\psi = z_\varepsilon$ и вычтя из первого получившегося равенства второе, получим соотношение (2.7). ∎

Теперь, используя априорные оценки (2.8), мы получим аналогичные оценки для следующей краевой задачи более общего вида по сравнению с (2.4)

$$\begin{cases} Az = f_1(x), & A^*p - z = f_2(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, z, p \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z}{\partial n_A} + \lambda p = g_{1,\Gamma}(x), & \dfrac{\partial p}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma}(x), \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial z}{\partial n_A} = g_{1,\gamma}(x), & \dfrac{\partial p}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma}(x), \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases} \tag{2.16}$$

где λ — некоторая положительна константа, $f_i \in L_2(\Omega_\varepsilon)$, $g_{i,\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $g_{i,\gamma}(x) \in H^{1/2}(\varepsilon\gamma)$.

Лемма 3. *Пусть z и p — решение задачи* (2.16). *Тогда*

$$\begin{aligned} ||z||_{\varepsilon,1}, ||p||_{\varepsilon,1} \;=\; &\mathcal{O}\big(||f_1||_\varepsilon + ||f_2||_\varepsilon + |||g_{1,\Gamma}|||_0 + |||g_{1,\Gamma}|||_0 + \\ &+ |||g_{1,\Gamma}|||_{\varepsilon\gamma} + |||g_{1,\Gamma}|||_{\varepsilon\gamma}\big), \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $|||\cdot|||_{\varepsilon\gamma}$ — норма в пространстве $L_2(\varepsilon\gamma)$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{z}$ и $\widetilde{p}$ — решения краевых задач

$$\begin{cases} A\widetilde{z} = 0, & A^*\widetilde{p} = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \widetilde{z}}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial \widetilde{p}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma}(x), & x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial \widetilde{z}}{\partial n_A} = g_{1,\gamma}(x), & \dfrac{\partial \widetilde{p}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma}(x), & x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

Отметим, что они разрешимы единственным образом и для них справедливы оценки [9], [8]

$$||\widetilde{z}||_\varepsilon = \mathcal{O}\big(|||g_{1,\gamma}|||_{\varepsilon\gamma}\big), \quad |\widetilde{p}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(|||g_{2,\Gamma}|||_0 + |||g_{2,\gamma}|||_{\varepsilon\gamma}\big). \tag{2.18}$$

Тогда функции $\widehat{z} := z - \widetilde{z}$ и $\widehat{p} := z - \widetilde{p}$ удовлетворяют следующей задаче

$$\begin{cases} A\widehat{z} = f_1(x), & A^*\widehat{p} - \widehat{z} = f_2(x) + \widetilde{z}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \widehat{z}}{\partial n_A} + \lambda\widehat{p} = g_{1,\Gamma}(x) - \lambda\widetilde{p}(x), & \dfrac{\partial \widehat{p}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial \widehat{z}}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial \widehat{p}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases}$$

Поскольку эта задача совпадает с задачей (2.4), (2.5) при $z_d = f_2 + \widetilde{z}$, $g = g_{1,\Gamma} - \lambda\widetilde{p}$, $\nu > \lambda$ и $r = \lambda|||\widehat{p}|||_0$, то в силу (2.8) получим

$$||\widehat{z}||_{\varepsilon,1}, ||\widehat{p}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f_1||_\varepsilon + ||f_2 + \widetilde{z}||_\varepsilon + |||g_{1,\gamma} - \lambda\widetilde{p}|||_0\big), \varepsilon \to 0.$$

Теперь осталось применить неравенство треугольника для норм и соотношение (2.18). ■

Теорема 1. *Задача* (2.16) *разрешима единственным образом при любых* $f_i \in L_2(\Omega_\varepsilon)$, $g_{i,\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ *и* $g_{i,\gamma} \in H^{1/2}(\varepsilon\gamma)$ $(i = 1, 2)$ *и её решение* $z, p \in H^2(\Omega_\varepsilon)$.

При этом, если $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega}))$, $g_{i,\Gamma} \in C^\infty(\Gamma)$ *и* $g_{i,\gamma} \in C^\infty(\varepsilon\gamma)$ $(i = 1, 2)$, *то при всех* $m \in \mathbb{N}$ $z, p \in H^m(\Omega_\varepsilon)$.

Доказательство. Расссмотрим отображение гильбертова пространства $E := H^2(\Omega_\varepsilon)^2$ в гильбертово пространство $G := L_2(\Omega_\varepsilon)^2 \times H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)^2$, определяемое задачей (2.16),

$$\mathcal{A}(z, p) := \Big(Az, A^*p - z, \Big(\frac{\partial z}{\partial n_A} + \lambda p\Big)\Big|_\Gamma, \frac{\partial p}{\partial n_{A^*}}\Big|_\Gamma, \frac{\partial z}{\partial n_A}\Big|_{\varepsilon\gamma}, \frac{\partial p}{\partial n_{A^*}}\Big|_{\varepsilon\gamma}\Big).$$

Пусть $F := H^1(\Omega_\varepsilon)^2$. Тогда E компактно вложено в F. Покажем, что

$$\exists\, C > 0\, \forall\, z, p \in H^2(\Omega_\varepsilon) \qquad ||(z, p)||_E \leqslant C \cdot \Big(||\mathcal{A}(z, p)||_G + ||(z, p)||_F\Big). \tag{2.19}$$

В силу п.1 теоремы 5.1 из [8, Глава 2, п. 5] $\exists\, C_1 > 0$:

$$||(z, p)||_E \leqslant ||z||_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + ||p||_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_1\Big(||Az||_\varepsilon + ||A^*p - z||_\varepsilon + ||z||_\varepsilon +$$

$$+\Big|\Big|\Big|\frac{\partial z}{\partial n_A} + \lambda p\Big|\Big|\Big|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + \lambda|||p|||_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + \Big|\Big|\Big|\frac{\partial p}{\partial n_{A^*}}\Big|\Big|\Big|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + ||z||_{1,\varepsilon} + ||p||_{1,\varepsilon}\Big).$$

Но в силу теоремы о следах $\exists\, C_2 > 0$:

$$|||z|||_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \leqslant C_2|||z|||_{\varepsilon,1}, \quad |||p|||_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \leqslant C_2|||p|||_{\varepsilon,1},$$

что и завершает доказательство неравенства (2.19).

Таким образом, по лемме Питре [10], [8, Глава 2, лемма 5.1] образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут, а его ядро конечномерно.

Что касается ядра оператора $\mathcal{A}$, то в силу априорных оценок (2.17) оно состоит из одного нуля, то есть оператор $\mathcal{A}$ инъективен.

Покажем, что оператор сюръективен.

Пусть $f_i^* \in L_2(\Omega_\varepsilon)$, $g_{i,\Gamma}^* \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и $g_{i,\gamma}^* \in H^{-1/2}(\varepsilon\gamma)$ $(i = 1, 2)$ таковы, что $\forall\, u, v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (Au, f_1^*)_\varepsilon + (A^*v - u, f_2^*)_\varepsilon + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A} + \lambda v, g_{1,\Gamma}^* \Big\rangle_0 + \\ & + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\Gamma}^* \Big\rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\gamma}^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma} + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\gamma}^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

В доказательстве этой теоремы через $\langle\cdot\rangle_0$ и $\langle\cdot\rangle_{\varepsilon\gamma}$ обозначены билинейные формы, задающие двойственность между пространствами $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\varepsilon\gamma)$ и $H^{-1/2}(\varepsilon\gamma)$ соответственно.

Отметим, что если $g_{i,\Gamma}^* \in L_2(\Gamma)$ и $g_{i,\gamma}^* \in L_2(\varepsilon\gamma)$, то эти билинейные формы совпадают со скалярным произведением в $L_2(\Gamma)$ и $L_2(\varepsilon\gamma)$ соответственно, и, тем самым, не противоречат предыдущему использованию этих обозначений.

Наша цель — доказать равенства $f_i^* = 0$, $g_{i,\Gamma}^* = 0$ и $g_{i,\gamma}^* = 0$ $(i = 1, 2)$, которые в силу замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$ дадут сюръективность этого оператора.

В силу независимости u и v соотношение (2.20) распадается на два

$$\forall\, u\in H^2(\Omega_\varepsilon)\quad 0=(Au,f_1^*)_\varepsilon-(u,f_2^*)_\varepsilon+\Big\langle\frac{\partial u}{\partial n_A},g_{1,\Gamma}^*\Big\rangle_0+\Big\langle\frac{\partial u}{\partial n_A},g_{1,\gamma}^*\Big\rangle_{\varepsilon\gamma},\tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\forall\, v\in H^2(\Omega_\varepsilon)\quad 0\ &=\ (A^*v,f_2^*)_\varepsilon+\langle\lambda v,g_{1,\Gamma}^*\rangle_0+\Big\langle\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}},g_{2,\Gamma}^*\Big\rangle_0+\\&\quad+\Big\langle\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}},g_{2,\gamma}^*\Big\rangle_{\varepsilon\gamma}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Соотношение (2.21) показывает, что

$$(Au,f_1^*)_\varepsilon+\Big\langle\frac{\partial u}{\partial n_A},g_{1,\Gamma}^*\Big\rangle_0+\Big\langle\frac{\partial u}{\partial n_A},g_{1,\gamma}^*\Big\rangle_{\varepsilon\gamma}=(u,f_2^*)_\varepsilon$$

Тем самым по п. 2 теоремы 5.1 из [8, Глава 2, п. 5], примененной к оператору $u\mapsto\Big(Au,\frac{\partial u}{\partial n_A}\Big)$, получим, что

$$f_1^*\in H^2(\Omega_\varepsilon),\ g_{1,\Gamma}^*\in H^{3/2}(\Gamma),\ g_{1,\gamma}^*\in H^{1/2}(\varepsilon\gamma).$$

Теперь воспользуемся тем, что $g_{1,\Gamma}^*\in H^{3/2}(\Gamma)$. Поскольку отображение следа

$$H^m(\Omega_\varepsilon)\ni w\mapsto\Big(w\Big|_{\Gamma_\varepsilon},\frac{\partial w}{\partial n_A}\Big)\in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon)\times H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$$

является непрерывным и сюръективным отображением, найдется $g_1^*\in H^3(\Omega_\varepsilon)$: $\dfrac{\partial g_1^*}{\partial n_A}=g_{1,\Gamma}^*$ на Γ и $\dfrac{\partial g_1^*}{\partial n_A}=0$ на $\varepsilon\gamma$. Тогда в силу формулы Грина [1, Глава 1, п.3.4]

$$u,v\in H^1(\Omega_\varepsilon)\Longrightarrow(Au,v)_\varepsilon=(u,A^*v)_\varepsilon-\Big\langle\frac{\partial u}{\partial n_A},v\Big\rangle_\varepsilon+\Big\langle u,\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}\Big\rangle_\varepsilon\tag{2.23}$$

получим равенства

$$\langle g_{1,\Gamma}^*,v\rangle_0=\Big\langle\frac{\partial g_1^*}{\partial n_A},v\Big\rangle_\varepsilon=-(Ag_1^*,v)_\varepsilon+\Big\langle g_1^*,\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}\Big\rangle_\varepsilon.$$

Таким образом, соотношение (2.22) можно записать в виде

$$(A^*v,f_2^*+\lambda g_1^*)+\Big\langle\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}},g_{2,\Gamma}^*+\lambda g_1^*\Big\rangle_0+\Big\langle\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}},g_{2,\gamma}^*+\lambda g_1^*\Big\rangle_{\varepsilon\gamma}=(v,\lambda Ag_1^*)_\varepsilon.$$

Поскольку $\lambda Ag_1^*\in H^1(\Omega_\varepsilon)$, то снова, применяя п. 2 теоремы 5.1 из [8, Глава 2, п. 5] получим, что

$$f_2^*+\lambda g_1^*\in H^3(\Omega_\varepsilon),\ g_{2,\Gamma}^*+\lambda g_1^*\in H^{5/2}(\Gamma),\ g_{2,\gamma}^*+\lambda g_1^*\in H^{1/2}(\varepsilon\gamma).$$

Это с учетом теоремы о следах дает:

$$f_2^*\in H^3(\Omega_\varepsilon),\ g_{2,\Gamma}^*\in H^{5/2}(\Gamma),\ g_{2,\gamma}^*\in H^{1/2}(\varepsilon\gamma).$$

Теперь, взяв в (2.21), (2.22) $u,v\in\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_\varepsilon)$, получим, что $0=(u,A^*f_1^*-f_2^*)_\varepsilon$ и $0=(v,Af_2^*)$, откуда в силу плотности $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ следуют равенства

$$A^*f_1^*=0,\quad Af_2^*=0,\quad x\in\Omega_\varepsilon.\tag{2.24}$$

Применив в (2.21) и (2.22) формулу Грина (2.23) и учтя равенства (2.24), получим, что

$$\begin{aligned}\forall\, u\in H^2(\Omega_\varepsilon)\quad 0\ &=\ \Big\langle\frac{\partial u}{\partial n_A},g_{1,\Gamma}^*-f_1^*\Big\rangle_0+\Big\langle\frac{\partial u}{\partial n_A},g_{1,\gamma}^*-f_1^*\Big\rangle_{\varepsilon\gamma}+\\&\quad+\Big\langle u,\frac{\partial f_1^*}{\partial n_{A^*}}\Big\rangle_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall\, v\in H^2(\Omega_\varepsilon)\quad 0\ &=\ \Big\langle v,\lambda g_{1,\Gamma}^*+\frac{\partial f_2^*}{\partial n_A}\Big\rangle_0+\Big\langle\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}},g_{2,\Gamma}^*-f_2^*\Big\rangle_0+\\&\quad+\Big\langle v,\frac{\partial f_2^*}{\partial n_A}\Big\rangle_{\varepsilon\gamma}+\Big\langle\frac{\partial v}{\partial n_{A^*}},g_{2,\gamma}^*-f_2^*\Big\rangle_{\varepsilon\gamma},\end{aligned}$$

откуда в силу сюръективности отображения следа получим

$$
\begin{aligned}
&g^*_{1,\Gamma} - f^*_1 = 0,\ \frac{\partial f^*_1}{\partial n_{A^*}} \ \text{на } \Gamma, \quad g^*_{1,\gamma} - f^*_1 \text{ на } \varepsilon\gamma,\\
&\lambda g^*_{1,\Gamma} + \frac{\partial f^*_2}{\partial n_A},\ g^*_{2,\Gamma} - f^*_2 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial f^*_2}{\partial n_A},\ g^*_{2,\gamma} - f^*_2 \text{ на } \varepsilon\gamma,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

что с учетом равенств (2.24) дает

$$
\begin{cases}
Af^*_2 = 0, & A^* f^*_1 - f^*_2 = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\
\dfrac{\partial f^*_2}{\partial n_A} + \lambda f^*_1 = 0, & \dfrac{\partial f^*_1}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma,\\
\dfrac{\partial f^*_2}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial f^*_1}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \varepsilon\gamma.
\end{cases}
$$

Заметим, что (f^*_2, f^*_1) удовлетворяет однородной задаче (2.16), и, тем самым, как уже было показано, $f^*_2 = f^*_1 = 0$. Поэтому в силу (2.25) и все остальные элементы и равны нулю.

Последнее утверждение теоремы есть следствие свойства эллиптических краевых задач для одной неизвестной функции. ■

3. Предельная задача и априорные оценки погрешности приближения

Теперь мы покажем, что предельной для задачи (2.4), (2.5) будет следующая задача

$$
\begin{cases}
Az_0 = f(x), & A^* p_0 - z_0 = z_d, \quad x \in \Omega_\varepsilon, z_0, p_0 \in H^1(\Omega),\\
\dfrac{\partial z_0}{\partial n_A} + \lambda_0 p_0 = g(x), & \dfrac{\partial p_0}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

$$
\big(\lambda_0 \in (0, \nu]\big) \wedge \Big(\lambda_0 |||p_0|||_0 \leqslant 1\Big) \wedge \Big((\nu - \lambda_0)\cdot(1 - \lambda_0 |||p_0|||_0) = 0\Big). \tag{3.2}
$$

Эта задача совпадает с системой оптимальности для задачи (1.1) — (1.3) в области с "заклеенной" полостью, то есть с заменой Ω_ε на Ω и $\mathcal{U}_\varepsilon(r)$ на $\mathcal{U}(r) := \{u \in L_2(\Gamma) : |||u|||_0 \leqslant r\}$.

Теорема 2. *Пусть λ_ε, z_ε и решение задачи* (2.4), (2.5). *Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$
\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0,\ ||z_\varepsilon - z_0||_{\varepsilon,1} \longrightarrow 0,\ ||p_\varepsilon - p_0||_{\varepsilon,1} \longrightarrow 0.
$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется $\eta > 0$, и последовательность ε_m такие, что

$$
|\lambda_m - \lambda_0| + ||z_m - z_0||_{m,1} + ||p_m - p_0||_{m,1} \geqslant \eta, \tag{3.3}
$$

где $\lambda_m := \lambda_{\varepsilon_m}$, $z_m := z_{\varepsilon_m}$, $p_m := p_{\varepsilon_m}$, а $||\cdot||_{m,1}$ — норма в $H^1(\Omega_{\varepsilon_m})$.

Поскольку $0 < \lambda_m \leqslant \nu$ и $\lambda_m |||p_m|||_0 \leqslant 1$, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$
\lambda_m \longrightarrow \overline{\lambda},\ \lambda_m |||p_m|||_0 \longrightarrow \overline{\mu},\ (\nu - \overline{\lambda})\cdot(1 - \overline{\mu}) = 0. \tag{3.4}
$$

Если $\overline{\lambda} = 0$, то $\overline{\mu} = 1$ и, значит, $|||p_m|||_0 \longrightarrow \infty$, что противоречит соотношениям (2.8) и (2.11). Таким образом, $\nu \geqslant \overline{\lambda} > 0$.

Пусть $\overline{z}$, $\overline{p}$ — решение задачи

$$
\begin{cases}
A\overline{z} = f(x), & A^* \overline{p} - \overline{z} = z_d, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \overline{z}, p_0 \in H^1(\Omega),\\
\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial n_A} + \overline{\lambda}\overline{p} = g(x), & \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma.
\end{cases}
$$

Отметим, что разрешимость этой задачи при всех правых частях с нужной степенью гладкости получается аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1. При этом в силу условий на f и g справедливы вкючения $\overline{z}, \overline{p} \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Тогда $\widehat{z}_m := z_m - \overline{z}$, $\widehat{p}_m := p_m - \overline{p}$, удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} A\widehat{z}_m = 0, & A^*\widehat{p}_m - \widehat{z}_m = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \widehat{z}_m}{\partial n_A} + \overline{\lambda}\widehat{p}_m = (\overline{\lambda} - \lambda_m)p_m, & \dfrac{\partial \widehat{p}_m}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial \widehat{z}_m}{\partial n_A} = -\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial n_A}, & \dfrac{\partial \widehat{p}_m}{\partial n_{A^*}} = -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}}, \quad x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

В силу (2.17) имеем

$$||\widehat{z}||_{\varepsilon_m,1}, ||\widehat{p}||_{\varepsilon_m,1} = \mathcal{O}\Big(|\overline{\lambda} - \lambda_m| \cdot |||p_m|||_0 + \Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{z}}{\partial n_A}\Big|\Big|\Big|_m + \Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}}\Big|\Big|\Big|_m\Big), \varepsilon \to 0, \tag{3.5}$$

где $|||\cdot|||_m$ — норма в $L_2(\varepsilon_m\gamma)$.

Но в $|\overline{\lambda} - \lambda_m| \cdot |||p_m|||_0 \to 0$ силу ограниченности $\{\,|||p_m|||_0\,\}$ и (3.4).

Поскольку $\overline{z}, \overline{p} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то

$$\Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{z}}{\partial n_A}\Big|\Big|\Big|_m, \quad \Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}}\Big|\Big|\Big|_m = \mathcal{O}(\varepsilon_m).$$

В силу этого и соотношений (3.5) $|||p_m|||_0 \longrightarrow |||\overline{p}|||_0$ и, тем самым, $\overline{\lambda}$, $\overline{z}$, $\overline{p}$ есть решение задачи (3.1), (3.2), имеющей единственное решение. Поэтому $\overline{\lambda} = \lambda_0$, $\overline{z} = z_0$ и $\overline{p} = p_0$, что противоречит (3.3). ∎

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda_0 < \nu, \text{ и, тем самым, } \lambda_0|||p_0|||_0 = 1, \tag{3.6}$$

то есть в предельной задаче ограничения по существу.

Тогда в силу теоремы 2 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ условие (2.5) принимает вид

$$\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0 = 1. \tag{3.7}$$

Теорема 3. *Пусть* $u_{\varepsilon,r}$ *— решение задачи* (1.1) *—* (1.3) *с* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\varepsilon(r)$, $r \in [r_1; r_2]$, *удовлетворяющее условию* $|||u_{\varepsilon,r}|||_0 = r$. *Тогда*

$$\exists\, K > 0\, \exists\, \varepsilon_0 > 0\, \forall\, r, r' \in (r_1; r_2)\, \forall\, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0) \quad |||u_{\varepsilon,r} - u_{\varepsilon,r'}|||_0 \leqslant K \cdot |r - r'|.$$

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ — решение задачи (1.1) при $u \equiv 0$, а оператор $\mathcal{F}_\varepsilon : L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega_\varepsilon)$ ставит в соответствие функции $u \in L_2(\Gamma)$ решение задачи (1.1) как функции из $L_2(\Omega)$. Тогда в точке $u_{\varepsilon,r}$ достигается минимум функционала $||\overset{\circ}{z}_\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon u - z_d||^2_\varepsilon + \nu^{-1}|||u|||^2_0$ на $\mathcal{U}_\varepsilon(r)$ — замкнутом шаре радиуса r в $L_2(\Gamma)$. Тогда в силу принципа Лагранжа $u_{\varepsilon,r}$ есть точка локального минимума и для

$$||\overset{\circ}{z}_\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon u - z_d||^2_\varepsilon + \nu^{-1}|||u|||^2_0 + \mu|||u|||^2_0, \quad \mu > 0.$$

Тем самым найдется $\mu_{\varepsilon,r}$ такое, что $\mathcal{F}^*_\varepsilon\big(\overset{\circ}{z}_\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon u_{\varepsilon,r} - z_d\big) + \big(\nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)u_{\varepsilon,r} = 0$ или

$$u_{\varepsilon,r} = \big(\mathcal{F}^*_\varepsilon\mathcal{F}_\varepsilon + \big(\nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)I\big)^{-1}\mathcal{F}^*_\varepsilon\big(z_d - \overset{\circ}{z}_\varepsilon\big), \tag{3.8}$$

где $\mathcal{F}^*_\varepsilon : L_2(\Omega_\varepsilon) \to L_2(\Gamma)$ — оператор, сопряженный к $\mathcal{F}_\varepsilon$, а I —- тождественный оператор в $L_2(\Gamma)$.

Используя спектральное представление самосопряженного оператора $\mathcal{F}^*_\varepsilon\mathcal{F}_\varepsilon$ (см., например, [11, гл. 4, § 4]) и вводя обозначение $w_\varepsilon := \mathcal{F}^*_\varepsilon\big(z_d - \overset{\circ}{z}_\varepsilon\big)$, из (3.8) получим

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,r} &= \int\limits_0^{M_\varepsilon} \big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)^{-1}\, d\, I_\sigma w_\varepsilon, \\ |||u_{\varepsilon,r}|||_0 &= \int\limits_0^{M_\varepsilon} \big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)^{-2}\, d\, |||I_\sigma w_\varepsilon|||_0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$|||u_{\varepsilon,r} - u_{\varepsilon,r'}|||^2_0 = \int\limits_0^{M_\varepsilon} \frac{\big(\mu_{\varepsilon,r} - \mu_{\varepsilon,r'}\big)^2 d\, |||I_\sigma w_\varepsilon|||^2_0}{\big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)^2\big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r'}\big)^2} \tag{3.10}$$

(здесь $\{I_\sigma\}$ — ортопроекторы, порождаемые оператором $\mathcal{F}_\varepsilon^*\mathcal{F}_\varepsilon : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$, а $M_\varepsilon = ||\mathcal{F}_\varepsilon^*\mathcal{F}_\varepsilon|| + \varepsilon = ||\mathcal{F}_\varepsilon||^2 + \varepsilon$).

Рассмотрим функцию

$$F(\mu) := \int\limits_0^{M_\varepsilon} \big(\sigma + \nu^{-1} + \mu\big)^{-2}\, d\,|||I_\sigma w_\varepsilon|||_0^2.$$

Тогда $r^2 = |||u_{\varepsilon,r}|||_0^2 \overset{(3.9)}{=} F(\mu_{\varepsilon,r}) \leqslant \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0^2$, то есть

$$r \leqslant \nu |||w_\varepsilon|||_0. \tag{3.11}$$

Отметим, что поскольку $\big(\sigma+\nu^{-1}+\mu\big)^{-2}$ строго убывает как функция от μ, то $F(\cdot)$ тоже строго убывает. Поэтому у $F(\cdot)$ есть обратная функция. Более того,

$$|F'(\mu)| = 2\left|\int\limits_0^{M_\varepsilon} \big(\sigma + \nu^{-1} + \mu\big)^{-3}\, d\,|||I_\sigma w_\varepsilon|||_0^2\right| \geqslant \frac{2|||w_\varepsilon|||_0^2}{\big(M_\varepsilon + \nu^{-1} + \mu\big)^3}. \tag{3.12}$$

Тогда

$$|||u_{\varepsilon,r} - u_{\varepsilon,r'}|||_0 \overset{(3.10)}{\leqslant} \nu^2\big|\mu_{\varepsilon,r} - \mu_{\varepsilon,r'}\big| \cdot |||w_\varepsilon|||_0 = \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot \big|F^{-1}(r^2) - F^{-1}(r'^2)\big| =$$

$$= \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot \big|(F^{-1})'(\widetilde{r})\big| \cdot |r^2 - r'^2| = \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot \big|F'(\widetilde{\mu})\big|^{-1} \cdot |r^2 - r'^2| \overset{(3.12)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot |r - r'| \cdot |r + r'| \frac{(M_\varepsilon + \nu^{-1} + \widetilde{\mu})^3}{2|||w_\varepsilon|||_0^2} \overset{(3.11)}{\leqslant} \frac{\nu^3 2 r_2 |r - r'| (M_\varepsilon + \nu^{-1} + \mu_1)^3}{2 r_1},$$

(здесь $\mu_1 := F^{-1}(r_1^2)$).

Оценим $||\mathcal{F}_\varepsilon||$, а следовательно и M_ε. Пусть $|||u|||_0 \leqslant 1$ и $z := \mathcal{F}_\varepsilon u$. Тогда по определению $\mathcal{F}_\varepsilon$

$$Az = 0,\ x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial z}{\partial n_A} = u,\ x \in \Gamma \quad \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial n_A} = 0,\ x \in \varepsilon\gamma,$$

поэтому $||z||_\varepsilon = \mathcal{O}\big(|||u|||_0\big) = \mathcal{O}(1)$. ■

Теперь докажем основную аппроксимационную теорему

Теорема 4. *Пусть функции* $f_{i,m} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_{i,\Gamma,m} \in C^\infty(\Gamma)$, $g_{i,\gamma,m} \in C^\infty(\varepsilon\gamma)$ $(i = 1,2)$, *а* $\lambda_m(\varepsilon)$ *и* $h_m(\varepsilon)$ *— некоторые функции от* ε *и* $\lambda_m \in (0;\nu]$ *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$. *Если*

$$||f_{i,\varepsilon,m}||_\varepsilon,\ |||g_{i,\Gamma,m}|||_0,\ |||g_{i,\gamma,m}|||_{\varepsilon\gamma},\ |h_m(\varepsilon)| = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0, \tag{3.13}$$

а z_m, p_m *— решение задачи*

$$\begin{cases} Az_m = f(x) + f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^* p_m - z_m = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_m, p_m \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial n_A} + \lambda_m p_m = g(x) + g_{1,\Gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_m}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma,m}(x), \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial n_A} = g_{1,\gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_m}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma,m}(x), \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases}$$

$$\lambda_m |||p_m|||_0 = 1 + h_m, \tag{3.14}$$

то для $z_{\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_m$, $p_{\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_m$, $\lambda_{\varepsilon,m} := \lambda_\varepsilon - \lambda_m$, *где* z_ε, p_ε, λ_ε, *— решение задачи* (2.4), (3.7), *справедливы следующие асимптотические оценки:*

$$\begin{aligned} ||z_{\varepsilon,m}||_{H^2(\Omega_\varepsilon)},\ ||p_{\varepsilon,m}||_{H^2(\Omega_\varepsilon)},\ |\lambda_{\varepsilon,m}| &= \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0, \\ ||z_{\varepsilon,m}||_{C(\overline{\Omega_\varepsilon})},\ ||p_{\varepsilon,m}||_{C(\overline{\Omega_\varepsilon})} &= \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Доказательство. Возьмем $z_{m,1}$ и $p_{m,1}$ — решение краевой задачи

$$\begin{cases} Az_{m,1} = f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^*p_{m,1} - z_{m,1} = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_{m,1}, p_{m,1} \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_{m,1}}{\partial n_A} + \lambda_m p_{m,1} = g_{1,\Gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_{m,1}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma,m}(x), \quad x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial z_{m,1}}{\partial n_A} = g_{1,\gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_{m,1}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma,m}(x), \quad x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

Тогда в силу оценок (2.17), (3.13) и неравенства $0 < \lambda_m \leqslant \nu$ получим, что

$$||z_{m,1}||_{\varepsilon,1}, ||p_{m,1}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big), \ \varepsilon \to 0. \tag{3.16}$$

Теперь пара функций $z_{m,2} := z_m - z_{m,1}$ и $p_{m,2} := p_m - p_{m,1}$ удовлетворяет следующей краевой задаче

$$\begin{cases} Az_{m,2} = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^*p_{m,2} - z_{m,2} = 0, & z_{m,2}, p_{m,2} \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_{m,2}}{\partial n_A} + \lambda_m p_{m,2} = g(x), & \dfrac{\partial p_{m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial z_{m,2}}{\partial n_A} = g_{1,\gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_{m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

Это означает, что функция $z_{m,2}(\cdot)$ есть решение задачи оптимального управления (1.1) — (1.3) с $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\varepsilon(r_m)$, где $r_m = \lambda_m|||p_{m,2}|||_0$ с оптимальным управлением $u_m = -\lambda_m p_{m,2}\big|_\Gamma$.

Но в силу (3.14) и (3.16)

$$\lambda_m^2|||p_{m,2}|||_0^2 = \lambda_m^2|||p_m - p_{m,1}|||_0^2 = \lambda_m^2\big(|||p_m|||_0^2 - 2\langle p_m, p_{m,1}\rangle_0 + |||p_{m,1}|||_0^2\big) =$$
$$= 1 + \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),$$

поэтому и $\lambda_m|||p_{2,m}||| = 1 + \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big)$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда по теореме 3 для $u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\big|_\Gamma$ и $u_m = -\lambda_m p_{2,m}\big|_\Gamma$ с учетом равенства (3.7) получим

$$|||u_\varepsilon - u_m|||_0 = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big), \ \varepsilon \to 0. \tag{3.17}$$

Рассмотрим теперь функции $z_{\varepsilon,m,2} := z_\varepsilon - z_{m,2}$, $z_{\varepsilon,m,2} := z_\varepsilon - z_{m,2}$ Они удовлетворяют краевой задаче

$$\begin{cases} Az_{\varepsilon,m,2} = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^*p_{\varepsilon,m,2} - z_{m,2} = 0, & z_{\varepsilon,m,2}, p_{\varepsilon,m,2} \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_{\varepsilon,m,2}}{\partial n_A} = u_\varepsilon(x) - u_m(x), & \dfrac{\partial p_{\varepsilon,m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial z_{\varepsilon,m,2}}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial p_{m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases}$$

Тем самым для любых φ, $\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_\varepsilon(\nabla z_{\varepsilon,m,2}, \nabla\varphi) + (a_0 z_{\varepsilon,m,2}, \varphi)_\varepsilon - \langle u_\varepsilon - u_m, \varphi\rangle_0, \\ (z_{\varepsilon,m,2}, \psi) &= \pi_\varepsilon(\nabla\psi, \nabla p_{\varepsilon,m,2}) + (a_0 p_{\varepsilon,m,2}, \psi)_\varepsilon. \end{aligned}$$

Положив в этих соотношениях $\varphi = z_{\varepsilon,m,2}$ и $\psi = p_{\varepsilon,m,2}$ с учетом (1.6) и (3.17), получим

$$||z_{\varepsilon,m,2}||_{\varepsilon,1}, ||p_{\varepsilon,m,2}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big), \ \varepsilon \to 0. \tag{3.18}$$

Поскольку $z_{\varepsilon,m} = z_{\varepsilon,m,2} + z_{m,1}$, а $p_{\varepsilon,m} = p_{\varepsilon,m,2} + p_{m,1}$, то для получения окончательных оценок (3.15) для этих функций осталось применить неравенство треугольника для соответствуюших норм и уже полученные оценки (3.16) и (3.18), теорему 5.1 из [8, Глава 2, п. 5] и теоремы вложения [12].

Докажем теперь последнюю оставшуюся оценку для величины $|\lambda_{\varepsilon,m}|$.

Из теоремы 2 и соотношения (3.7) следует, что $\lambda_0|||p_0|||_0 = 1$. Поскольку $|||p_\varepsilon|||_0 \to |||p_0|||_0$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$|||p_\varepsilon|||_0^{-1} = \mathcal{O}(1),\ \varepsilon \to 0. \tag{3.19}$$

Наконец $|\lambda_{\varepsilon,m}| \cdot |||p_\varepsilon|||_0 = |||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_m p_\varepsilon|||_0 \leqslant |||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_m p_m|||_0 + \ |||\lambda_m p_m - \lambda_m p_\varepsilon|||_0 \overset{(3.17)}{=} \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big)$, что с учетом (3.19) дает окончательно $|\lambda_{\varepsilon,m}| = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big)$. ■

4. Построение асимптотического разложения

Внешнее разложение ищем в виде асимптотических рядов

$$\begin{gathered}
\mathcal{Z}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} z_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \qquad \mathcal{P}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} u_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \\
\Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} \lambda_{k,l} \ln^l \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0,
\end{gathered} \tag{4.1}$$

а внутреннее разложение для функций $v(\xi) := z(\varepsilon\xi)$ и $w(\xi) := p(\varepsilon\xi)$, где ξ — внутренняя переменная $(x = \varepsilon\xi)$, ищем в виде

$$\mathcal{V}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} v_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon, \qquad \mathcal{W}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} w_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon. \tag{4.2}$$

Как обычно, считаем, что $z_{k,i} = 0$, $p_{k,l} = 0$, $\lambda_{k,l} = 0$ при $l > k-3$ и $v_{i,m} = 0$, $w_{i,m} = 0$ при $m > i-2$.

Функции $z_{0,0}(x)$, $p_{0,0}(x)$ и число $\lambda_{0,0}$ – это решение предельной задачи (3.1), (3.6) $z_0(x)$, $p_0(x)$ и λ_0. При этом, как уже отмечалось, $z_0(x), p_0(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Для рядов (4.1) и (4.2) должно быть выполнено условие согласования [2]:

$$\forall\, n,m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{A}_{n,x}\mathcal{Z} = \mathcal{A}_{n,x}\mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{V}, \quad \mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{A}_{n,x}\mathcal{P} = \mathcal{A}_{n,x}\mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{W}, \tag{4.3}$$

где $\mathcal{A}_{n,x}$ $(\mathcal{A}_{m,\xi})$ — оператор взятия частичной суммы асимптотического разложения функций от ε, x $(\varepsilon,\ \xi)$ с точностью до $o\big(\varepsilon^n\big)$ $\big(o\big(\varepsilon^m\big)\big)$, при этом асимптотические разложения функций вида $b(x/\varepsilon)$ берутся при $\xi = x/\varepsilon \to \infty$ (а функций вида $b(\varepsilon\xi)$ при $x = \varepsilon\xi \to 0$).

Функции $z_{k,l}(x)$, $pu_{k,l}(x)$ и числа $\lambda_{k,l}$ являются решениями задач

$$\begin{cases}
Az_{k,l}(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus O, \\
A^* p_{k,l} - z_{k,l} = 0, \quad z_{k,l}, p_{k,l} \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\}), \\
\dfrac{\partial z_{k,l}}{\partial n_A} + \lambda_0 p_{k,l}(x) = -\lambda_{k,l} p_0(x) + g_{k,l}(x), \quad \dfrac{\partial p_{k,l}}{\partial n_{A*}} = 0 \quad x \in \partial\Omega,
\end{cases} \tag{4.4}$$

где $g_{k,l}(x) = -\sum\limits_{s=1}^{k-1} \sum\limits_{\sigma} \lambda_{s,\sigma} p_{k-s,l-\sigma}(x)$ – полностью определяются решениями предыдущих уравнений (здесь $\sigma : s-3 \geq \sigma \geq 0$, $k-l-3 \geq s-\sigma$, $l \geq \sigma$).

Для получения аналогичных уравнений для $v_{i,m}(\xi)$ и $w_{i,m}(\xi)$ необходимо разложить операторы A, A^*, ∂/n_A и ∂/n_{A^*} в окрестности точки O в ряд при $x \to 0$. В силу (1.6) при $x \longrightarrow 0$ получим

$$\begin{gathered}
A = -\Delta - \sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x), \\
A^* = -\Delta - \sum_{i=1}^{\infty} Q^*_{i,2}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q^*_{i,1}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x), \\
\frac{\partial}{\partial n_A} = \frac{\partial}{\partial n} + \sum_{i=1}^{\infty} q_{i,1}(x,D),\ \frac{\partial}{\partial n_{A^*}} = \frac{\partial}{\partial n} + \sum_{i=1}^{\infty} q^*_{i,1}(x,D),
\end{gathered}$$

где $Q_{i,j}(x,D)$, $Q^*_{i,j}(x,D)$, $q_{i,j}(x,D)$ и $q^*_{i,j}(x,D)$ — многочлены от $x = (x_1,x_2,x_3)$ и $D=\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\Big)$ однородные степени i по x и степени j по D (при этом оператор D действует раньше умножения). Отметим, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x)$ — это ряд Маклорена функции $a_0(x)$.

Подставляя эти разложения в систему для функций v и w, получим для функций $v_{i,m}$ и $w_{i,m}$ следующие задачи

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta v_{0,0}(\xi) &=& 0, \qquad \Delta v_{0,0}(\xi)=0,\\ \Delta v_{1,0}(\xi) &=& (Q_{1,2}(\xi,D)+Q_{0,1}(\xi,D))v_{0,0}(\xi),\\ \Delta w_{1,0}(\xi) &=& (Q^*_{1,2}(\xi,D)+Q^*_{0,1}(\xi,D))w_{0,0}(\xi),\\ \Delta v_{i,m}(\xi) &=& \sum\limits_{s=1}^{i}\Big(Q_{s,2}(\xi,D)+Q_{s-1,1}(\xi,D)+\\ && +Q_{s-2,0}(\xi)\Big)v_{i-s,m}(\xi)-f_{1,i-2,m}(\xi),\\ \Delta w_{i,m}(\xi) &=& \sum\limits_{s=1}^{i}\Big(Q^*_{s,2}(\xi,D)+Q^*_{s-1,1}(\xi,D)+\\ && +Q_{s-2,0}(\xi)\Big)w_{i-s,m}(\xi)+v_{i-2,m}-f_{2,i-2,m}(\xi), \end{array}\right. \qquad \xi\notin\omega \tag{4.5}$$

с граничными условиями

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v_{0,0}}{\partial n}=0,\quad \dfrac{\partial w_{0,0}}{\partial n}=0,\quad \dfrac{\partial v_{1,0}}{\partial n}=0,\quad \dfrac{\partial w_{1,0}}{\partial n}=0,\\ \dfrac{\partial v_{i,m}}{\partial n}=-\sum\limits_{s=1}^{i} q_{s,i}v_{i-s,m},\quad \dfrac{\partial w_{i,m}}{\partial n}=-\sum\limits_{s=1}^{i} q_{s,i}w_{i-s,m}, \end{array}\right. \qquad \xi\in\omega. \tag{4.6}$$

Здесь $f_{1,i-2,m}$ и $f_{2,i-2,m}$ порождены разложениями при $x\to 0$ функций $f(x)$ и $z_d(x)$, соответственно.

Дополнительное условие (3.7) принимает следующий вид

$$\lambda_0\langle p_0,p_{k,l}\rangle_0+\lambda_{k,l}|||p_0|||_0^2=\delta_{k,l}, \tag{4.7}$$

где числа $\delta_{k,l}$ определяются предыдущеми $p_{k,l}$ и $\lambda_{k,l}$.

Прежде всего отметим, что $v_{0,0}=z_0(0)$ и $w_{0,0}=p_0(0)$, однако в силу (4.3) $v_{1,0}$ и $w_{1,0}$ не константы, тем самым эти функции неограничены при $\xi\to\infty$. Это в свою очередь порождает неограниченность и остальных функций $z_{k,l}$, $p_{k,l}$, $v_{i,m}$, $w_{i,m}$. Тем самым данная задача бисингулярна. В [3] найднены классы функций неограниченных при $x\to 0$ и при $\xi\to\infty$, соответственно, в которых задача, аналогичная рассматриваемой здесь, разрешима. В этих же классах функций разрешимы и задачи (4.4) — (4.6). Доказательство этого факта почти дословно повторяет доказательства из [3, § 3].

Поскольку решение системы (4.4) можно представить в виде

$$z_{k,l}(x)=\lambda_{k,l}\overline{z}_0(x)+\overline{Z}_{k,l},\quad p_{k,l}(x)=\lambda_{k,l}\overline{p}_0(x)+\overline{P}_{k,l}, \tag{4.8}$$

где $\overline{z}_0,\overline{p}_0\in C^\infty(\overline{\Omega})$ – решение задачи

$$\left\{\begin{array}{ll} A\overline{z}_0=0,\quad A^*\overline{p}_0=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\overline{z}_0}{\partial n_A}+\lambda_0\overline{p}_0=-p_0,\quad \dfrac{\overline{p}_0}{\partial n_{A^*}}=0, & x\in\Gamma, \end{array}\right. \tag{4.9}$$

а $\overline{Z}_{k,l},\overline{P}_{k,l}\in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{O\})$ — решение неоднородной системы

$$\left\{\begin{array}{ll} A\overline{Z}_{k,l}=0,\quad A^*\overline{P}_{k,l}-\overline{Z}_{k,l}=0, & x\in\Omega\setminus O,\\ \dfrac{\partial\overline{Z}_{k,l}}{\partial n_A}+\lambda_0\overline{P}_{k,l}=g_{k,l}(x),\quad \dfrac{\partial\overline{P}_{k,l}}{\partial n_{A*}}=0, & x\in\partial\Omega, \end{array}\right.$$

то уравненя (4.7) принимают вид

$$\lambda_{k,l}\big(\lambda_0\langle p_0,\overline{p}_0\rangle_0+|||p_0|||_0^2\big)=\overline{\delta}_{k,l}. \tag{4.10}$$

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$\lambda_0\langle p_0,\overline{p}_0\rangle_0+|||p_0|||_0^2\neq 0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Умножив первое равенство в системе (4.9) на $\overline{p}_0$ и применив формулу Грина (2.23) для области Ω, получим равенство

$$||\overline{z}_0||_0^2+\lambda_0|||\overline{p}_0|||_0^2=-\langle p_0,\overline{p}_0\rangle. \tag{4.12}$$

Предположим теперь, что соотношение (4.11) неверно. Тогда

$$-\langle p_0,\overline{p}_0\rangle=\lambda_0^{-1}|||p_0|||_0^2 \ \text{ и} \tag{4.13}$$

$$p_0\perp\big(p_0+\lambda_0^{-1}\overline{p}_0\big) \ \text{ в } \ L_2(\Gamma). \tag{4.14}$$

Из равенств (4.12) и (4.13) получим, что

$$\lambda_0||\overline{z}_0||_0^2+\lambda_0^2|||\overline{p}_0|||_0^2=|||p_0|||_0^2. \tag{4.15}$$

С другой стороны, в силу соотношения (4.14) и теоремы Пифагора

$$\lambda_0^2|||\overline{p}_0|||_0^2=|||p_0|||_0^2+|||p_0+\lambda_0\overline{p}_0|||_0^2. \tag{4.16}$$

Из равенств (4.15) и (4.16) следует, что $\overline{z}_0=0$ и $\big(p_0+\lambda_0^{-1}\overline{p}_0\big)\big|_\Gamma=0$. Но тогда в силу (4.9) $\overline{p}_0\big|_\Gamma=0$ а, значит, и $p_0\big|_\Gamma=0$, что противоречит соотношению (3.6). ∎

Построение функций $z_{k,l}(x)$, $p_{k,l}(x)$, $v_{i,m}(\xi)$, $w_{i,m}(\xi)$ и чисел $\lambda_{k,l}$ идет стандартным для метода согласования асимптотических разложений [2] способом. Функции $z_{0,0}(\varepsilon\xi)$, $p_{0,0}(\varepsilon\xi)$ определяют главные члены асимптотических разложений функций $v_{i,m}(\xi)$, $v_{i,m}(\xi)$ $(i>0)$ при $\xi\to\infty$. Определив по ним функции $v_{1,0}(\xi)$ и $w_{1,0}(\xi)$ мы из разложения функций $v_{1,0}(x/\varepsilon)$ и $w_{1,0}(x/\varepsilon)$ при $x/\varepsilon\to\infty$ получим главные члены асимптотики при $x\to 0$ функций $z_{k,l}(x)$, $p_{k,l}(x)$ $(k>0)$. Найдя $\overline{Z}_{k,l}(x)$, $\overline{P}_{k,l}(x)$ с заданной асимптотикой, из уравнения (4.10) находим $\lambda_{1,0}(x)$. Теперь $z_{1,0}(x)$ и $p_{1,0}(x)$ определены и, вместе с ними, определены следующие члены разложений $v_{i,m}(\xi)$ и $v_{i,m}(\xi)$ $(i>1)$, и т. д.

Доказательство того, что таким образом построенные согласованные в смысле (4.3) ряды (4.1) и (4.2) есть асимптотика решения задачи (2.4), (3.7) проводится аналогично тому, как это сделано в [3, § 2,§ 5]). Тем самым, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.6), (1.7) *и* (3.6). *Тогда решение задачи* (2.4), (3.7) *расскадываются в равномерные в области* $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{O\})$ *(в смысле норм* $||\cdot||_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$ *и* $||\cdot||_{C(\overline{\Omega_\varepsilon})}$*) асимптотические ряды вида* (4.1), (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* М.: Мир. 1972. 414 с.
2. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989. 336 с.
3. Данилин А.Р. *Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью* // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
4. Данилин А.Р., Зорин А.Р. *Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления* // Труды Института математики и механики. 2009. Т.15. № 4. С. 95–107.
5. Данилин А.Р., Зорин А.П. *Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления* // ДАН, 2011. Т. 440, № 4. С. 1–4.
6. Капустян В.Е. *Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах* // Докл. АН Украины, сер. Математика, естествознание, технические науки, 1992, № 2, с. 70–74.

7. Капустян В.Е. *Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением* // ДАН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
8. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир, 1971. 371 с.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа* М.: Наука, 1964. 540 с.
10. J. Peetre *Another approach to elliptic boundary problems* // Comm. Pure. Appl. Math. 1961. V. 14. P. 711–731.
11. Морен К. *Методы гильбертова пространства.* М.: Мир, 1965. 570 с.
12. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Л.:Изд-во ЛГУ. 1950. 255 с.

Алексей Руфимович Данилин,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской 16
620990, г. Екатеринбург, Россия,
профессор кафедры математического анализа и теории функций УрФУ
E-mail: dar@imm.uran.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 101-113.

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ

Л.А. КАЛЯКИН

Аннотация. Исследована математическая модель ускорения заряженных частиц в электромагнитной волне. Получены усредненные уравнения, описывающие резонансное взаимодействие частицы с волной. Показано, что любая частица со временем выходит из резонанса. Вычислено время нахождения в резонансе в зависимости от начальных условий.

Ключевые слова: Нелинейные колебания, малый параметр, возмущение, усреднение, адиабатика.

1. Введение

Цель данной статьи – разработка асимптотического подхода к анализу модели серфотронного ускорения (или просто серфинга) релятивистских частиц в электромагнитной волне.

С точки зрения физики здесь рассматривается ускорение заряженных частиц посредством локализованного в пространстве пакета электромагнитных волн. Когда частица пересекает пакет в области, где волновое поле выше некоторого порогового значения, наблюдается эффект ускорения. Со временем частица вылетает из области пакета, совершая циклотронное вращение, ускорение при этом прекращается. Синхронизация частицы с волной случается на конечном, но весьма большом интервале времени. В космических условиях эффективная ширина пакета может быть достаточно большой, и потому энергия захваченной частицы сможет возрасти на 3–5 порядков величины ее начального (до захвата) значения.

Физика этого явления, обнаруженного в [1, 2, 3, 4], была детально исследована в работе [5]. Мы изучаем математическую модель, в основу которой положено нелинейное неавтономное уравнение второго порядка [6, 7, 8]:

$$\begin{aligned}\beta\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \sigma\frac{\Big[1-\beta^2\Big(1-d\psi/d\tau\Big)^2\Big]^{3/2}}{\Big[1+h^2+\Big(J+(\tau-\Psi)\beta u\Big)^2\Big]^{1/2}}\cos\psi\cdot\exp\big[-((\psi-\tau)/\rho)^2\big]+\\ +\frac{u\Big(J+(\tau-\psi)\beta u\Big)}{1+h^2+\Big(J+(\tau-\psi)\beta u\Big)^2}\Big[1-\beta^2\Big(1-d\psi/d\tau\Big)^2\Big].\end{aligned} \tag{1.1}$$

Уравнение содержит шесть параметров $\beta, u, \sigma, J, h, \rho$, которые считаются постоянными[1]. Искомая функция $\psi(\tau)$ соответствует фазе волнового пакета электромагнитной волны на

L.A. Kalyakin, Asymptotic analysis of the surfing acceleration model.

Работа поддержана РФФИ (проекты 10-01-00186, 11-02-97003).

Поступила 24 января 2012 г.

[1]Зависимость от медленного времени в этих параметрах допустима и не вносит принципиальных изменений в обсуждаемую ниже методику.

несущей частоте. Режим серфинга соответствует изменению функции $\psi(\tau)$ в конечных пределах. По своей постановке задача поиска ограниченных решений для уравнения (1.1) похожа на задачи, которые рассматриваются в теории синхронизации [9]. Однако, надо иметь в виду, что при физически значимых коэффициентах все решения уравнения (1.1) неограниченно растут при $\tau \to \infty$. В физической интерпретации это соответствует выходу со временем из режима серфинга для любой частицы. Поэтому синхронизация здесь наблюдается лишь на конечном промежутке времени.

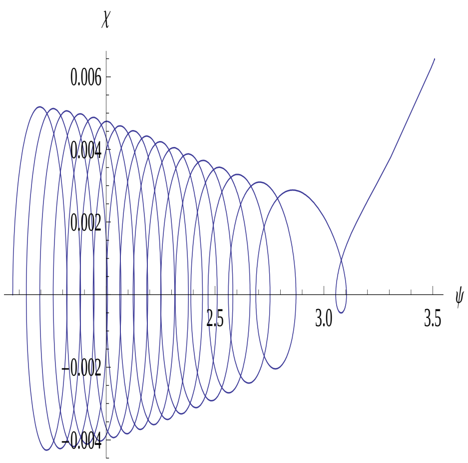
На первый взгляд кажется, что более просто выглядит уравнение для функции $\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau) - \tau$, в котором неавтономность содержится лишь в аргументе косинуса. Однако, для анализа задачи на начальном этапе, с которым связывается понятие серфинга, выгоднее использовать уравнение в форме (1.1). При рассматриваемых ниже значениях параметров изменения коэффициентов по времени оказываются медленными. Это позволяет воспользоваться идеями адиабатических приближений и значительно упростить исходную модель.

Основная задача при анализе серфинга состоит в выявлении условий, при которых пучок фазовых траекторий (или семейство решений) находится в конечных, заранее фиксированных пределах в течение *большого* промежутка времени. Термин *большой* подразумевает наличие в задаче большого (либо малого) параметра, с которым производится сравнение. Точная математическая постановка задачи возможна в рамках теории возмущений с привлечением понятия асимптотического разложения.

Возможность выделения в задаче малого параметра и использования идей теории возмущения можно усмотреть из анализа характерных значений исходных параметров, которые обычно используются в модели (1.1), см. [8]:

$$0 < \beta < 1, \quad u \approx 10^{-1},\ \sigma \approx 10^{-1}, \quad J \approx 10^1 \div 10^2, \quad h \approx 10^2, \quad \rho \approx 10^4.$$

В частности, численные эксперименты с уравнением (1.1) при таких коэффициентах позволили выявить область резонансного захвата – множество начальных точек на фазовой плоскости, из которых выходят решения, осциллирующие в конечных пределах (с ограниченным средним значением) до далеких времен порядка $\tau \approx 10^3 \div 10^4$, [7, 8]. Для начальных данных вне области захвата средние значения фазы сразу начинают монотонно расти. Примеры решений разного типа приведены на рис. 1.



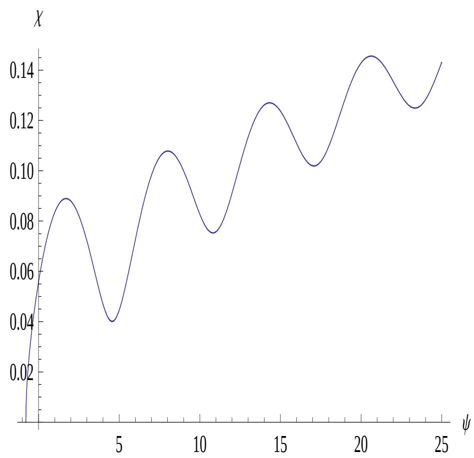


Рис. 1. Фазовые траектории разного типа для исходного уравнения (1.1) на начальном этапе. Параметры $\sigma = 0.1; \beta = 0.4; u = 0.1; h = 100; J = 10; \rho = 10^4$. Начальные точки $\psi(0) = \pi/2$ и $\psi(0) = -\pi/4$ при $\dot{\psi}(0) = 0$. Эволюция траекторий: слева до момента $4 \cdot 10^3$, справа до момента $4 \cdot 10^2$

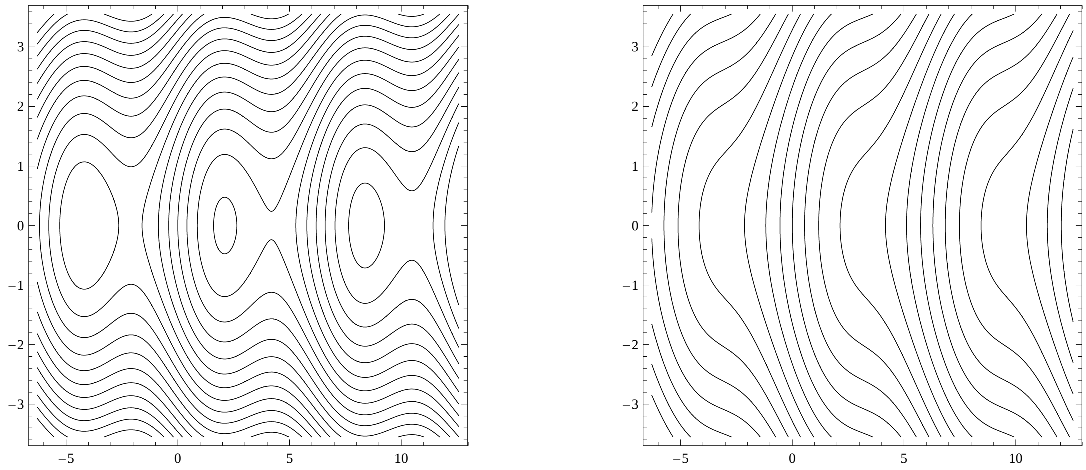


Рис. 2. Фазовый портрет маятника с крутящим моментом. Слева при $0 < \nu < 1$ существуют замкнутые траектории внутри сепаратрисной петли; справа при $\nu > 1$ замкнутых траекторий нет

Такое разделение решений на два класса напоминает ситуацию с нелинейным маятником. По своей структуре уравнение (1.1) похоже на уравнение маятника с крутящим моментом[1]: $\psi'' = A\cos\psi + B$. Если коэффициенты A, B — постоянные, то такое уравнение интегрируются, и при $\nu = |B/A| < 1$ можно выделить движения двух типов: периодические колебания и вращения, см. левую часть рис. 2.

Существенное отличие уравнения (1.1) от простой интегрируемой модели маятника заключается в наличии переменных коэффициентов, которые убывают со временем. Из-за этого убывания осциллирующие на начальном этапе решения со временем начинают быстро расти. Обычно подобные эффекты описываются приближенно с использованием метода адиабатических приближений или усреднения [10, 11]. В таком подходе смена типа решения соответствует переходу медленно деформирующейся траектории быстрого осциллирующего движения через медленно деформирующуюся сепаратрисную петлю. Похожие задачи давно и весьма детально исследовались, см. например, обзор [11]. В частности, на этом пути был решен ряд задач о серфинге [12, 13, 14] и были выявлены условия захвата в резонанс.

Рассматриваемая здесь модель (1.1) с точностью до замены переменных совпадает с той, что анализировалась в статьях [12, 13]. Асимптотический анализ, который проводится здесь, соответствует работе [12], из которой, в принципе, можно извлечь получаемые ниже результаты. Тем не менее, анализ задачи в постановке (1.1) с использованием фазы $\psi(t)$ может представлять самостоятельный интерес ввиду ее прозрачной физической интерпретации.

Основной результат состоит в доказательстве невозможности вечного захвата в резонанс: любая траектория со временем покидает резонансную область. Продолжительность этапа резонансного захвата зависит от начальных данных и параметров системы. Например, слагаемые с первой производной в уравнении (1.1), которые обязаны учету релятивистских эффектов, приводят к затягиванию этапа резонансного захвата. Эти слагаемые на начальном этапе играют такую же роль, как диссипация (сопротивление) в системе нелинейного маятника.

Получаемые здесь аналитические результаты дают возможность вычисления таких характеристик, как область и продолжительность резонансного захвата в их зависимости от исходных параметров. При этом не требуется трудоемких вычислений, которые выполняются при прямом контроле пучка траекторий [8]. Обсуждаемый подход представляет

[1] предельный переход к уравнению маятника можно усмотреть при $u \approx \sigma \approx \beta \to 0$.

собой один из вариантов теории возмущений и основан на наличии малого параметра в уравнениях. Поэтому надо помнить, что предлагаемые ниже формулы носят приближенный характер, и их точность зависит от величины этого параметра.

2. Масштаб быстрых колебаний

Исходное уравнение преобразуются с целью минимизации числа независимых параметров. Масштаб времени выбирается так, чтобы в простейшей модели осциллятора (при $u = 0$) колебания вблизи равновесия имели частоту, равную единице. Это позволяет идентифицировать быстрый масштаб времени и выделить малый параметр.

Для выбора быстрого временно́го масштаба $t = T \cdot \tau$ используется масштабный множитель T, определяемый соотношением

$$T^2 = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}\sigma}{\beta\sqrt{1+h^2+J^2}}\,.$$

Новые параметры вводятся выражениями

$$\varepsilon = \frac{\beta^{3/2}\sqrt{\sigma}}{(1-\beta^2)^{1/4}(1+h^2+J^2)^{1/4}}, \quad \mu = \frac{u^2}{\sigma^2(1-\beta^2)},$$

$$\nu = \frac{uJ}{\sigma\sqrt{(1-\beta^2)(1+h^2+J^2)}}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{1+h^2+J^2}}{\sigma\beta\rho\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = \frac{1-\beta^2}{\beta^2}.$$

При этом получаются соотношения: $T = b\,\varepsilon$, $\lambda = 1/\rho b\varepsilon^2$, $\nu^2 < \mu$. Оставшиеся коэффициенты пересчитываются по формулам

$$\nu\beta u/J = \frac{u^2\beta}{\sigma\sqrt{(1-\beta^2)(1+h^2+J^2)}} = \varepsilon^2\mu b, \quad \frac{(\beta u)^2}{\varepsilon^2 T^2(1+h^2+J^2)} = \mu.$$

Наряду с быстрым временем t вводится медленное время $\theta = \varepsilon t$. После этого в исходном уравнении остается пять независимых параметров $\varepsilon, b, \lambda, \mu, \nu$:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{\Big[1+\varepsilon\,\dfrac{d\psi}{dt}\Big(2-\varepsilon b\,\dfrac{d\psi}{dt}\Big)\Big]^{3/2}}{\Big[1+(\theta-\varepsilon^2 b\psi)\Big(2\nu+(\theta-\varepsilon^2 b\psi)\mu\Big)\Big]^{1/2}}\cdot\cos\psi\cdot\exp\big(-\lambda^2(\theta-b\varepsilon^2\psi)^2\big)+ \\ +\frac{\nu+\mu\theta-\varepsilon^2\mu b\psi}{1+(\theta-\varepsilon^2 b\psi)\Big(2\nu+(\theta-\varepsilon^2 b\psi)\mu\Big)}\Big[1+\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\Big(2-\varepsilon b\,\frac{d\psi}{dt}\Big)\Big].\end{gathered} \tag{2.1}$$

Для этого уравнения ниже проводится асимптотический анализ решений с использованием малого параметра $0 < \varepsilon \ll 1$. При этом считается, что остальные параметры не велики; их возможная малость не используется. В частности, характерные значения новых констант, пересчитанные из старых, которые обычно берутся в рассматриваемой модели, соответствуют обсуждаемым условиям:

$$\varepsilon = 10^{-1} \div 10^{-2},\ \nu = 1 \div 10^{-1},\ \mu \approx 1,\ \lambda = 10^{-1} \div 10^{-2}, \quad b = 1 \div 10,\ T = 1 \div 10^{-2}.$$

Малость параметра ε позволяет значительно упростить уравнение и получить ряд аналитических результатов. Упрощения основаны на идеях двухмасштабных разложений, которые обеспечивают разделение быстрой и медленной зависимости от времени в решении.

3. Упрощение уравнений

В исходном уравнении (2.1) идентифицируется малый параметр ε и медленное время $\theta = \varepsilon t$. Наиболее грубая аппроксимация получается в пределе при $\varepsilon \to 0$:

$$\frac{d^2\psi_0}{dt^2} = \cos\psi_0 + \nu.$$

Это уравнение соответствует маятнику с постоянным крутящим моментом, и с ним связывается описание процесса захвата в резонанс в самых разных ситуациях [15]. Решение такого приближенного уравнения дает главный член асимптотики для решения полного уравнения (2.1): $\psi(t) = \psi_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Это приближение пригодно на любом конечном промежутке времени[1] $0 < t \leqslant T_0$, независящим от параметра ε. Закон сохранения $(\dot\psi_0)^2/2 - \sin\psi_0 - \nu\psi_0 = E = \mathrm{const}$ позволяет выписать решение через интеграл. Впрочем, для анализа структуры всех возможных решений достаточно фазового портрета (см. рис. 2).

Как видим, фазовые траектории, ограниченные сепаратрисной петлей, а также устойчивая ветвь сепаратрисы соответствуют решениям с ограниченной функцией $\psi(t)$. На остальных траекториях функция $\psi(t)$ неограниченно растет при $t \to \infty$. Применительно к полному уравнению (2.1) из этих результатов может создаться впечатление, что область, ограниченная сепаратрисной петлей, представляет собой искомую область захвата, из которой стартуют решения с ограниченной по времени фазой $\psi(t)$. Однако, решение уравнения (2.1) не обладает таким свойством ограниченности. Численные эксперименты показывают, что все решения $\psi(t)$ неограниченно растут при $t \to \infty$; примеры приведены на рис. 1. Более того, этот факт легко доказывается на уровне точного утверждения, см. Дополнение.

Значительные расхождения между приближенным и полным уравнениями обнаруживаются на далеких временах $t \geq \varepsilon^{-1/2}$; в частности, вместо замкнутых траекторий появляется спираль. Эти расхождения в первую очередь обязаны изменению коэффициентов, которые зависят от медленного времени $\theta = \varepsilon t$.

Учет влияния медленной деформации коэффициентов в подобных задачах производится методом усреднения, а соответствующие асимптотические конструкции иногда называют адиабатическими приближениями. Помимо того, в рассматриваемой задаче на далеких временах $t > \varepsilon^{-1/2}$ оказывается существенным влияние возмущений – членов порядка $O(\varepsilon)$ из полного уравнения (2.1). Их влияние проявляется в эффекте сжатия спирали на рис. 1. Усредненные уравнения, учитывающие такие возмущения, уже не гарантируют адиабатического инварианта. Получение таких уравнений иногда связывается с методом двухмасштабных разложений либо с нелинейным методом ВКБ. Использование одного из вариантов такого подхода позволяет для уравнения (2.1) построить асимптотику решения по малому параметру $\varepsilon \to 0$, пригодную до далеких времен $t \approx \varepsilon^{-1}$. На этом пути удается описать как область захвата, так и время пребывания фазовой траектории в области захвата.

Для той части коэффициентов, которые на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$ изменяются на величину порядка единицы, введем обозначения

$$A(\theta) = \frac{\exp\big(-\lambda^2\theta^2\big)}{\sqrt{1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2}}, \quad B(\theta) = \frac{\nu + \mu\theta}{1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2}, \quad \theta = \varepsilon t. \tag{3.1}$$

Выделим в исходном уравнении члены до порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ и запишем соответствующую систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{d\psi}{dt} = \phi, \quad \frac{d\phi}{dt} = A(\theta)\cdot\cos\psi + B(\theta) + \varepsilon F(\psi, \phi; \theta). \tag{3.2}$$

[1] На далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1/2}$ такое приближение становится непригодным, что обнаруживается в появлении секулярных слагаемых в поправках порядка ε.

Эта система с функцией $F(\psi,\phi;\theta) = \big[3A(\theta)\cdot\cos\psi + 2B(\theta)\big]\phi$ будет основным объектом исследования. Слагаемое εF с малым множителем ε называется возмущением. Оно не является гамильтоновым и отвественно за диссипацию, которая ведет к затуханию колебаний на этапе резонансного захвата. В формальных конструкциях асимптотического решения диссипация проявляется в медленном изменении величины[1], которая при отсутствии возмущения εF является адиабатическим инвариантом.

Надо отметить, что часть эффектов от возмущения εF можно выделить из решения в виде экспоненциального множителя так, что оставшееся возмущение в главном будет гамильтоновым, и задача будет иметь адиабатический инвариант. Этот факт был указан автору А.И.Нейштадтом. В простейшем случае линейного осциллятора с малым сопротивлением $\ddot{x}+x+\varepsilon\dot{x}=0$ такой подход соответствует выделению из решения медленно затухающего множителя $\exp(-\varepsilon t/2)$. Однако, для уравнения (3.2) структура подобного множителя не столь очевидна. Мы не будем производить редукцию к гамильтоновым возмущениям, чтобы не вдаваться в пространные пояснения, мало понятные для читателя, неискушенного в методе усреднения.

Полному уравнению (2.1) соответствует более сложное выражение для возмущения $\varepsilon F = \varepsilon F(\psi,\phi;\theta,\varepsilon)$, которое включает поправки старших порядков, начиная со слагаемых порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Однако, такие поправки не вносят существенного вклада в изучаемые нами эффекты и поэтому не учитываются.

Отметим, что в коэффициентах уравнений (3.2) помимо ε остаются три независимых параметра μ,ν,λ. Параметр b содержится в членах порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ и поэтому не учитывается в дальнейших конструкциях[2].

4. Формулировка результата

Построение асимптотики, пригодной вплоть до далеких времен $t=\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, основано на решении автономных уравнений с "замороженными"коэффициентами

$$\frac{d\psi_0}{ds} = \phi_0, \quad \frac{d\phi_0}{ds} = A(\theta)\cdot\cos\psi_0 + B(\theta), \tag{4.1}$$

в которых параметр θ считается независящим от "времени" s. Рассматривается семейство периодических решений $\psi_0 = \psi_0(s,E;\theta)$, $\phi_0 = \phi_0(s,E;\theta)$. Для параметризации (перечисления решений) используется значение первого интеграла (энергия) $\phi_0^2/2 - A\sin\psi_0 - B\,\psi_0 = E = \mathrm{const}$. Обращаем внимание, что в этих решениях параметры E и θ независимы[3].

Не надо думать, что функция $\psi_0(t,E;\theta)$ немедленно дает главный член асимптотики для исходного уравнения[4]. Построение главного члена асимптотики, пригодной до далеких времен, состоит в нахождении подходящей медленной деформации решения замороженных уравнений.

Теорема 1. *Если параметр $0<\nu<1$ — не велик, то для уравнения (2.1) существует двухпараметрическое семейство асимптотических решений*
$\psi(t;s_0,E_0)$, $(s_0,E_0=\mathrm{const})$, *которые в главном члене разложения представляются через периодическое решение "замороженной"системы*

$$\psi(t;s_0,E_0) = \psi_0(\varepsilon^{-1}\mathcal{S}(\theta),\mathcal{E}(\theta);\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0, \ (\theta=\varepsilon t).$$

[1] площади, охватываемой невозмущенной замкнутой траекторией на фазовой плоскости

[2] В предположении, что величина b невелика: $b \ll \varepsilon^{-1}$

[3] Иногда вместо энергии используется либо действие, либо площадь Π, охватываемая замкнутой фазовой траекторией. Переход к такой параметризации будет указан ниже.

[4] Это не верно даже в тривиальном примере уравнения с переменным коэффициентом $\dot{x}=2\theta\cdot x$, $(\theta=\varepsilon t)$. Здесь точное решение $x=C\cdot\exp(\varepsilon t^2)$, $\forall\, C=\mathrm{const}$ отличается от приближенного "замороженного"решения $x_0 = C\cdot\exp(2\theta t)$, $(\theta=\varepsilon t)$ на величину порядка единицы на далеких временах $t=\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$.

Здесь аргументы $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\theta;E_0,s_0)$, $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\theta;E_0)$ зависят от θ и определяются из скалярных дифференциальных уравнений. Эта асимптотика будет равномерной на большом промежутке времени $0<t\leqslant\theta^*\cdot\varepsilon^{-1}$ (этап резонансного захвата), длина которого $\theta^*=\theta^*(E_0)$ зависит от начального параметра E_0.

Доказательство теоремы составляет содержание следующих разделов; дело сводится к получению и исследованию уравнений для функций $\mathcal{S}(\theta;E_0,s_0)$,
$\mathcal{E}(\theta;E_0)$.

Геометрическая интерпретация теоремы. Траектории замороженной системы на фазовой плоскости представлены замкнутыми кривыми внутри сепаратрисной петли (см. рис. 2). Фазовый портрет зависит от параметра θ; в частности, с ростом θ неподвижные точки смещаются, а сепаратрисная петля сжимается. При фиксированном значением параметра θ замкнутая траектория определяется величиной E. При включении связи $\theta=\varepsilon\, t$ и $E=\mathcal{E}(\theta;E_0)$ траектория медленно деформируется со временем и напоминает сжимающуюся спираль. Как раз такую структуру имеет решение исходного уравнения на этапе резонансного захвата (см. рис. 1). Приближенное описание решения посредством периодической функции обрывается на далеких временах $t=\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, когда медленно деформирующаяся траектория пересекает сепаратрису. Такой обрыв неизбежен для любой траектории из–за сжатия сепаратрисной петли с ростом θ и ее схлопывания в момент Θ, когда коэффициенты сравняются: $A(\Theta)=B(\Theta)$. В рассматриваемой задаче адиабатический инвариант отсутствует: площадь $\Pi(\theta)$, ограниченная быстрой траекторией, зависит от медленного времени и убывает с ростом θ. Это свойство обусловлено наличием диссипации и ведет к затягиванию этапа резонансного захвата.

Для приложений основной результат содержится в формуле (7.1), которая связывает момент обрыва резонанса $\theta^*=\theta^*(\Pi_0)$ с площадью Π_0, охватываемой замороженной траекторией в начальный момент $\theta=0$.

5. Преобразование возмущенной системы

Для построения асимптотики по малому параметру наиболее коротким и прозрачным представляется подход, основанный на стандартном переходе к переменным типа действие–угол в главной части уравнений (3.2). Для этой цели используется пара периодических функций, которые представляют двухпериодическое решение замороженной системы (5.1) $\psi_0=\psi_0(s,E;\theta)$, $\phi_0=\phi_0(s,E;\theta)$. Рассматриваемое решение будет периодическим тогда и только тогда, когда $|B(\theta)/A(\theta)|<1$. Отметим, что период $T(E;\theta)$ и частота $\omega(E;\theta)=2\pi/T>0$ зависят как от параметра E, т.е. от выбора фазовой траектории, так и от θ.

В дальнейшей конструкции удобно использовать 2π–периодические функции

$$\Psi(S,E;\theta)\equiv\psi_0(S/\omega(E;\theta),E;\theta),\quad \Phi(S,E;\theta)\equiv\phi_0(S/\omega(E;\theta),E;\theta).$$

Введенные таким образом функции зависят от трех переменных и в силу уравнений (5.1) удовлетворяют тождествам

$$\omega(E;\theta)\frac{\partial\Psi}{\partial S}=\Phi,\ \ \omega(E;\theta)\frac{\partial\Phi}{\partial S}=A(\theta)\cdot\cos\Psi+B(\theta). \tag{5.1}$$

Кроме того, имеет место тождество первого интеграла:

$$\Phi^2/2-A\,\sin\Psi-B\,\Psi=E.$$

Дифференцирование последнего соотношения по E и по θ дает еще два тождества

$$\begin{gathered}\omega(E;\theta)[\partial_S\Psi\cdot\partial_E\Phi-\partial_S\Phi\cdot\partial_E\Psi]=1,\\ \omega(E;\theta)[\partial_S\Psi\cdot\partial_\theta\Phi-\partial_S\Phi\cdot\partial_\theta\Psi]=A'(\theta)\sin\Psi(S,E;\theta)+B'(\theta)\Psi(S,E;\theta).\end{gathered} \tag{5.2}$$

Определенная выше пара функций используется в уравнениях (3.2) для замены переменных по формулам:

$$\psi = \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta), \quad \phi = \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta).$$

Эти соотношения описывают переход от ψ, ϕ к новым искомым функциям – к энергии $\mathcal{E}(t;\varepsilon)$ и углу $\mathcal{S}(t;\varepsilon)$. При этом уравнения (3.2) для ψ, ϕ переходят в уравнения для $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$. После приведения к нормальной форме с учетом (5.2) они приобретают вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon F\Phi - \varepsilon[A'(\theta)\sin\Psi(\mathcal{S},\mathcal{E};\theta) + B'(\theta)\Psi(\mathcal{S},\mathcal{E};\theta)].$$
$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \omega(\mathcal{E};\theta) - \varepsilon\omega(\mathcal{E};\theta)[F\partial_{\mathcal{E}}\Psi - \partial_{\mathcal{E}}\Psi\partial_\theta\Phi + \partial_{\mathcal{E}}\Phi\partial_\theta\Psi], \quad \theta = \varepsilon\, t. \tag{5.3}$$

Здесь функция $F(\Psi, \Phi; \theta) = \big[3A(\theta)\cdot\cos\Psi + 2B(\theta)\big]\Phi$ определяет возмущение интегрируемого уравнения с замороженными коэффициентами (5.1).

6. Усредненное уравнение

Уравнения (5.3) имеют стандартный вид для медленной $\mathcal{E}$ и быстрой $\mathcal{S}$ переменных. Асимптотика решения по малому параметру ε строится обычным методом усреднения. Для энергии $\mathcal{E}(t;\varepsilon) = \mathcal{E}_0(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$ главный член асимптотики $\mathcal{E}_0(\theta)$ представляет собой медленно меняющуюся функцию. Уравнение для нее получается путем усреднения по быстрой переменной $\mathcal{S}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{d\theta} = \langle F(\Phi,\Psi;\theta)\Phi(\mathcal{S},\mathcal{E}_0;\theta)\rangle - \langle A'(\theta)\sin\Psi(\mathcal{S},\mathcal{E}_0;\theta) + B'(\theta)\Psi(\mathcal{S},\mathcal{E}_0;\theta)\rangle.$$

Здесь уго́льными скобками обозначен интеграл среднего значения

$$\langle f(\mathcal{S})\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathcal{S})\, d\mathcal{S}.$$

Однако, вместо $\mathcal{E}_0(\theta)$ выгодно использовать другую функцию $\Pi(\theta)$, которая имеет простой геометрический смысл. Для этого, используя тождества (5.1), (5.2), усредненное уравнение для энергии запишем в другой форме[1]:

$$\langle \partial_S\Psi\partial_{\mathcal{E}}\Phi - \partial_S\Phi\partial_{\mathcal{E}}\Psi\rangle\frac{d\mathcal{E}_0}{d\theta} + \langle\partial_S\Psi\partial_\theta\Phi - \partial_S\Phi\partial_\theta\Psi\rangle = \frac{1}{\omega}\langle F\Phi\rangle.$$

Нетрудно видеть, что левая часть представляет полную производную по θ от интеграла среднего

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\langle\partial_S\Psi\Phi - \partial_S\Phi\Psi\rangle = \langle \partial_S\Psi\partial_{\mathcal{E}}\Phi - \partial_S\Phi\partial_{\mathcal{E}}\Psi\rangle\frac{d\mathcal{E}_0}{d\theta} + \langle\partial_S\Psi\partial_\theta\Phi - \partial_S\Phi\partial_\theta\Psi\rangle.$$

Учтем, что этот интеграл связан с площадью Π, которая охватывается на фазовой плоскости (ψ, ϕ) замкнутой траекторией $\psi = \Psi(S,\mathcal{E};\theta), \phi = \Phi(S,\mathcal{E};\theta)$, с фиксированными параметрами $\mathcal{E}, \theta$:

$$\Pi = 2\pi\langle\partial_S\Psi\Phi\rangle = \pi\langle\partial_S\Psi\Phi - \partial_S\Phi\Psi\rangle = \frac{2\pi}{\omega}\langle\Phi^2\rangle.$$

Поэтому усредненное уравнение можно записать в виде уравнения для площади

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = \frac{2\pi}{\omega}\langle F(\Phi,\Psi;\theta)\Phi\rangle.$$

[1]Это можно было сделать в исходном уравнении для энергии.

Отсюда видно, что при отсутствии возмущения, когда $F \equiv 0$, площадь будет адиабатическим инвариантом (сохраняется) в масштабе медленного времени. Однако, в рассматриваемой нами задаче $F \not\equiv 0$. Более того, интеграл среднего отличен от нуля и вычисляется через площадь в силу уравнений (5.1):

$$\langle F(\Phi,\Psi;\theta)\cdot\Phi\rangle = \langle [3A\cos\Psi + 2B]\Phi^2\rangle = -B(\theta)\langle\Phi^2\rangle = -B(\theta)\frac{\omega}{2\pi}\Pi.$$

В итоге усредненное уравнение приобретает форму

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = -B(\theta)\cdot\Pi. \tag{6.1}$$

Из последнего уравнения немедленно вытекает, что площадь, охватываемая фазовой кривой, убывает при деформации по времени, поскольку $B(\theta) > 0$. Для рассматриваемой задачи с $B(\theta) = (\nu+\mu\theta)/(1+2\nu\theta+\mu\theta^2)$ решение этого уравнения с начальным условием $\Pi|_{\theta=0} = \Pi_0$ выписывается в виде

$$\Pi(\theta;\Pi_0) = \Pi_0\Big(1+2\nu\theta+\mu\theta^2\Big)^{-1/2}. \tag{6.2}$$

Эту формулу можно рассматривать как первый этап построения асимптотики по малому параметру для системы уравнений (5.3). Связь энергии с площадью $\omega(\mathcal{E};\theta)\cdot d\Pi = 2\pi\cdot d\mathcal{E}$ позволяет использовать в конструкции любую из этих переменных.

Главный член асимптотики для угла выписывается через интеграл

$$\mathcal{S}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\int_0^\theta \omega(\mathcal{E}_0(\zeta))\,d\zeta + \mathcal{O}(1), \quad \varepsilon\to 0,\ (\theta=\varepsilon\, t).$$

Поправки более высокого порядка в разложении как $\mathcal{E}(t;\varepsilon)$, так и $\mathcal{S}(t;\varepsilon)$ строятся известным способом и могут включать периодическую зависимость от быстрой переменной, [10, 11]. Впрочем, для анализа проблемы резонансного захвата старшие поправки и даже формула для угла не нужны.

7. Резонансный захват

Под резонансным захватом будем понимать возможность представления асимптотики решения в виде быстро осциллирующей функции с медленно меняющимися параметрами:

$$\Psi(t,\varepsilon) = \psi_0(s,\mathcal{E}_0(\theta);\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0, \quad (s = \varepsilon^{-1}\mathcal{S}/\omega(\mathcal{E};\theta)).$$

Не все решения обладают таким свойством. Более того, описание приближенного решения посредством периодической функции годится лишь до тех пор, пока медленно деформирующаяся траектория системы (5.1) $\psi = \psi_0(s,\mathcal{E}_0(\theta);\theta)$, $\phi = \phi_0(s,\mathcal{E}_0(\theta);\theta)$ находится на фазовой плоскости в области, ограниченной сепаратрисной петлей. Эта, так называемая, область захвата описывается с помощью первого интеграла неравенством

$$-B\psi_c - A\sin\psi_c \leqslant \frac{1}{2}\phi^2 - B\psi - A\sin\psi \leqslant -B(-\psi_c+2\pi) + A\sin\psi_c. \tag{7.1}$$

Здесь используются координаты неподвижных точек $(\pm\psi_c(\theta),0)$ с положительным значением $0<\psi_c = \arccos(-B(\theta)/A(\theta)) < \pi$. Петля сепаратрисы, выходящей из седла $2\pi-\psi_c$, охватывает центр с координатой ψ_c. Условием существования области захвата является неравенство: $|B(\theta)/A(\theta)| < 1$, которое с учетом (3.1) приобретает вид:

$$\frac{\nu+\mu\theta}{\sqrt{1+2\nu\theta+\mu\theta^2}} < \exp(-\lambda\theta).$$

Очевидно, требование $\nu<1$ необходимо и достаточно для существования области захвата в начальный момент $\theta=0$. Со временем площадь этой области убывает, см. Дополнение.

7.1. Глобальный обрыв резонансного захвата. Верхняя граница Θ времени обрыва резонансного захвата для всех решений определяется моментом схлопывании сепаратрисной петли, т.е. из уравнения $A(\Theta) = B(\Theta)$. К этому моменту никакое решение не представляется через периодические функции. В рассматриваемой задаче момент обрыва определяется из уравнения

$$\exp(-\lambda^2\Theta^2) = \frac{\nu + \mu\Theta}{\sqrt{1 + 2\nu\Theta + \mu\Theta^2}}.$$

В случае, когда $0 < \lambda \ll 1$, а остальные параметры имеют порядок единицы, корень этого уравнения Θ можно вычислить приближенно, т.е. построить асимптотику решения при $\lambda \to 0$. Структура главного члена такой асимптотики зависит от величины μ.

Если $\mu < 1$, то правую часть можно заменить асимптотикой

$$\exp(-\lambda^2\Theta^2) = \sqrt{\mu} + \mathcal{O}(\Theta^{-1}),\ \Theta \to \infty.$$

Отсюда получаем приближенное значение для момента схлопывания сепаратрисной петли

$$\Theta = \lambda^{-1}\sqrt{-\ln\mu} + \mathcal{O}(1),\ \lambda \to 0,\ (\mu < 1).$$

Очевидно, при $\lambda = 0,\ \mu < 1$ схлопывание сепаратрисной петли не бывает, и для одной траектории существует вечный захват.

В случае $\mu > 1$ приближенное значение момента обрыва определяется уравнением

$$1 + O(\lambda^2) = \frac{\nu + \mu\Theta}{\sqrt{1 + 2\nu\Theta + \mu\Theta^2}}\ .$$

Отсюда извлекается асимптотика

$$\Theta = \frac{\sqrt{\mu - \nu^2} - \nu}{\mu\sqrt{\mu - 1}} + \mathcal{O}(\lambda^2),\ \lambda \to 0,\quad (\mu > 1).$$

Как видим, в этом случае значение Θ не растет при $\lambda \to 0$. Отметим, что $\mu > \nu^2$ в силу соотношений, которые определяют параметры задачи..

Вывод. *Условия долговременного захвата:* $\mu < 1, \quad \lambda \ll 1.$

Замечание. При использовании последнего результата надо иметь в виду, что формулы двухмасштабных разложений обоснованы до времен не слишком больших, в лучшем случае $\theta \ll \varepsilon^{-1/2}$.

7.2. Локальный обрыв резонансного захвата. Момент обрыва резонансного захвата на конкретной траектории меньше верней границы Θ и зависит от траектории. Причина в том, что любая траектория в рассматриваемой слабо диссипативной системе медленно приближается к медленно движущемуся положению равновесия. Площадь, охватываемая такой траекторией в любой замороженный момент медленного времени θ, не может обратиться в нуль, хотя и стремится к нулю при $\theta \to \infty$. Поэтому к моменту схлопывания сепаратрисной петли такая траектория находится уже за пределами описания ее периодическими функциями. Исключением является лишь единственная траектория, соответствующая медленно меняющемуся положению равновесия – центру $\psi = \psi_c(\theta)$ с нулевой площадью $\Pi(\theta) \equiv 0$. Для такой траектории момент выхода из резонансного захвата совпадает с верней границей Θ.

В общем случае момент θ^* выхода из резонансного захвата для конкретной траектории можно связать с начальным значение площади Π_0 на этой траектории. Это условие можно сформулировать в виде требования равенства двух площадей. Поскольку сепаратриса описывается уравнением

$$\frac{1}{2}\phi^2 - A(\theta)\sin\psi - B(\theta)\psi = A(\theta)\sin\psi_c + B(\theta)[\psi_c - 2\pi],$$

то требование равенства площади $\Pi(\theta;\Pi_0)$ под траекторией и площади $\Pi_c(\theta)$ под сепаратрисой приводит к соотношению:

$$\Pi_0\Big(1+2\nu\theta+\mu\theta^2\Big)^{-1/2}=2\sqrt{2}\int_{\psi_-(\theta)}^{\psi_+(\theta)}\sqrt{A(\theta)[\sin\psi+\sin\psi_c]+B(\theta)[\psi+\psi_c-2\pi]}\,d\psi. \qquad (7.1)$$

Здесь $\psi_-<\psi_+$ – нули подкоренного выражения, в частности, $\psi_+=-\psi_c+2\pi$ – координата седловой точки, $0<\psi_c(\theta)=\arccos(-B(\theta)/A(\theta))<\pi$. Корень этого уравнения $\theta^*=\theta^*(\Pi_0)$ определяет момент выхода из резонанса для траектории, стартующей с начальным значением параметра $\Pi|_{\theta=0}=\Pi_0$.

С другой стороны соотношение (7.1) можно рассматривать как формулу для начальной площади множества тех точек, из которых стартуют траектории, не покидающие резонансную область до момента θ. Это множество на начальной плоскости ограничено замкнутой траекторией замороженной системы, площадь которого совпадает с Π_0.

В этих рассуждениях неявно предполагается, что траектория может покидать область захвата, но не может в нее входить. Такое свойство не очевидно и требует доказательства, которое приводится в Дополнении.

8. Дополнение

1. Неограниченность решений по времени.

В этом разделе обсуждается вопрос о существовании и поведении решений уравнения (1.1) на бесконечном промежутке.

Указание на отсутствие решений, ограниченных при $\tau\to\infty$, можно получить из следующих рассуждений. Если функция $\Psi(\tau)$ ограничена, то первое слагаемое в правой части уравнения (1.1) экспоненциально убывает при $\tau\to\infty$. После удаления этого слагаемого получается уравнение, которое можно проинтегрировать. Из явной формулы для решения видно, что функция $\Psi(\tau)$ не может быть ограничена. Однако, строго говоря, приведенные рассуждения не применимы к полному уравнению (1.1), которое не интегрируется.

Теорема 2. *Если $\beta^2\neq 1$, $u>0$, то любое решение уравнения* (1.1) *продолжается на бесконечный промежуток и линейно растет при $\tau\to\infty$.*

Для доказательства теоремы удобно использовать отличную от (1.1) форму уравнения, сделав замену переменных:

$$J+[\tau-\Psi(\tau)]\beta u=-\Phi(t),\ t=u\cdot\tau,\ \Rightarrow\ (1-\dot\Psi)\beta=-\dot\Phi,\ \beta\ddot\Psi=u\ddot\Phi.$$

В результате неавтономность оказывается под аргументом косинуса:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}=\frac{\sigma}{u}\cdot\frac{\Big[1-\dot\Phi^2\Big]^{3/2}}{\Big[1+h^2+\Phi^2\Big]^{1/2}}\cos\Psi\cdot\exp\big[-((J+\Phi)/\beta u\rho)^2\big]+$$
$$+\frac{\Phi}{1+h^2+\Phi^2}\big[1-\dot\Phi^2\big],\quad (\Psi=(\beta t+J+\Phi)/\beta u). \qquad (8.1)$$

Часть уравнения можно проинтегрировать и свести его к интегральному соотношению. Для этого надо умножить левую и правую части на $-2\dot\Phi/(1-\dot\Phi^2)$ и взять интеграл на промежутке (t_0,t). В результате приходим к уравнению в форме

$$\frac{1-\dot\Phi^2(t)}{1+h^2+\Phi^2(t)}-\frac{1-\dot\Phi^2(t_0)}{1+h^2+\Phi^2(t_0)}=$$

$$=\exp\Big(-2\frac{\sigma}{u}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot\Phi\sqrt{1-\dot\Phi^2(\eta)}}{\sqrt{1+h^2+\Phi^2(\eta)}}\cos\Psi(\eta)\cdot\exp\big[-((J+\Phi(\eta))/\beta u\rho)^2\big]\,d\eta\Big).$$

Отсюда, очевидно, вытекает строгое неравенство

$$\frac{1-\dot{\Phi}^2(t)}{1+h^2+\Phi^2(t)} > \frac{1-\dot{\Phi}^2(t_0)}{1+h^2+\Phi^2(t_0)} = m_0. \tag{8.2}$$

Заметим, что уравнение определено в области, где $\dot{\Phi}^2 \leqslant 1$. Граничное значение $\dot{\Phi}^2 = 1$ соответствует точным (растущим) решениям исходного уравнения $\Psi(\tau) = (1 \pm 1/\beta)\tau + \text{const}$. В силу единственности решения задачи Коши значение $\dot{\Phi}^2 = 1$ не достигается на других решениях. Следовательно на любом другом решении правая часть в (8.2) обязана быть положительной величиной: $m_0 > 0$. Тогда из неравенства (8.2) вытекает оценка $\Phi^2(t) < 1/m_0 < \infty,\ \forall\, t > t_0$. Тем самым доказано, что для любого решения уравнения (8.1) фазовая траектория $(\Phi(t), \dot{\Phi}(t))$ остается в ограниченной области, где выполнены условия теоремы существования и единственности. В таком случае для уравнения (8.1) применимы известные теоремы о существовании глобального решения [16] на полуоси $t_0 < t < \infty$.

С учетом формул замены свойство ограниченности $\Phi(t)$ приводит к асимптотике $\Psi(\tau) = \tau + \mathcal{O}(1),\ \tau \to \infty$, которая показывает линейный рост любого решения исходного уравнения (1.1). Теорема доказана.

2. Монотонность области захвата.

Теорема 3. *В любой момент θ площадь под сепаратрисой $\Pi_c(\theta)$ убывает быстрее, чем площадь под траекторией $\Pi(\theta)$ вблизи сепаратрисы*

$$\frac{d\Pi_c}{d\theta} < \frac{d\Pi}{d\theta}\Big|_{\Pi=\Pi_c} < 0. \tag{8.3}$$

Доказательство. Дифференцирование формулы для площади под сепаратрисой дает выражение

$$\frac{d\Pi_c}{d\theta} = \sqrt{2}\int_{\psi_c^-}^{\psi_c} \frac{A'(\theta)[\sin\psi + \sin\psi_c] + B'(\theta)[\psi + \psi_c - 2\pi]}{\sqrt{A(\theta)[\sin\psi + \sin\psi_c] + B(\theta)[\psi + \psi_c - 2\pi]}}\,d\psi.$$

Для функций $A(\theta), B(\theta)$, определенных в (3.1), производные в выражении под интегралом вычисляются и приводятся к виду

$$A'(\theta) = -(2\lambda\theta A + BA), \quad B'(\theta) = \frac{\mu - \nu^2}{(1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2)^2} - B^2.$$

Рассматриваемый промежуток интегрирования соответствует внутренности сепаратрисной петли, где выполняются неравенства $\sin\psi \geq \sin\psi_c,\ \psi \leqslant -\psi_c + 2\pi$. Поэтому с учетом свойства $\mu > \nu^2$ производные от коэффициентов на таком промежутке оцениваются сверху

$$A'(\theta)[\sin\psi - \sin\psi_c] \leqslant -BA[\sin\psi - \sin\psi_c], \quad B'(\theta)[\psi + \psi_c + 2\pi] \leqslant -B^2[\psi + \psi_c + 2\pi].$$

Таким образом, для интеграла получается оценка

$$\frac{d\Pi_c}{d\theta} < -\sqrt{2}\,B(\theta)\int_{\psi_c^-}^{\psi_c} \sqrt{A(\theta)[\sin\psi - \sin\psi_c] + B(\theta)[\psi + \psi_c - 2\pi]}\,d\psi =$$

$$= -\frac{1}{2}B(\theta)\cdot\Pi_c(\theta).$$

Отсюда требуемое неравенство (8.3) получается путем замены правой части в силу уравнения (6.1). Теорема доказана.

Следствие. *Медленно деформирующиеся траектории не могут входить извне в область захвата.*

Эту статью следует рассматривать как реакцию математика на работы физиков, общение с которыми всегда плодотворно для математики. Выражаю признательность Н.С. Ерохину и Н.Н. Зольниковой за знакомство с тематикой серфинга и А.И. Нейштадту за обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д. *Влияние поперечного магнитного поля на затухание Ландау* // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т.17, вып. 7. С. 389–394.
2. N. Katsouleas, J. Dawson *Unlimited electron acceleration in laser-driven plasma wave* // Physical Review Letters, 51:5 (1983). P. 392–395.
3. B.E. Gribov, R.Z. Sagdeev, V.D. Shapiro, V.I. Shevchenko *Damping of plasma waves and acceleration of resonant electrons in a transverse magnetic field* // JETP Letters, 15:2 (1985). P. 63–68.
4. N.S. Erokhin, S.S. Moiseev, R.Z. Sagdeev *Relativistic surfatron in an inhomogeneous plasma and cosmic ray generation* // Soviet Astr. Lett.(TR:PISMA) 15:1 (1989) P.1.
5. Кичигин Г.Н. *Серфотронный механизм ускорения космических лучей в галактической плазме* // ЖЭТФ. 2001. Т.119, вып. 6. С. 1038–1049.
6. N. Erokhin, N. Zolnikova, L. Mikhailovskaya, P. Trenchev *Generation of fast particles fluxes by finite amplitude electromagnetic waves space plasma* // Доклади на Българската академия на науките. 2007. Т.60. №9. С. 967–972.
7. N.S. Erokhin, N.N. Zolnikova, P.P. Grinevich, L.A. Mikhailovskaya *Generation of fast particle fluxes by finite amplitude electromagnetic waves in space plasma Problems of Atomic Science and Technology* // серия "Плазменная электроника". 2006. Т 60, №5. P. 152–156.
8. N.S. Erokhin, N.N. Zolnikova, E.A. Кузнецов, L.A. Mikhailovskaya *Серфинг релятивистских зпрядов на электромагнитной волне с плавной огибающей амплитуды. Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность* // Сборник трудов конференции MCC-09. Москва. 2009. С. 92–99.
9. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление.* М.: Техносфера. 2003.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука, 1974.
11. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* М.: ВИНИТИ. 1985.
12. Физика плазмы, 15, (1989), С. 593–594.
13. A.P. Itin, A.I. Neishtadt, A.A. Vasiliev *Capture into resonance in dynamics of a charged partice in magnetic field and electrostatic wave* // Physica D, **141:**4 (2000). P. 281–296.
14. Нейштадт А.И., Артемьев А.В., Зеленый Л.М., Вайнштейн Д.Л. *Серфотронное ускорение в электромагнитных волнах с малой фазовой скоростью* // Письма ЖЭТФ. 2009. Т.89, вып.9. С. 528–534
15. Чириков Б.В. *Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс* // Доклады АН СССР. 1959. Т.125, №5. С. 1015–1018.
16. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* Изд. 3-е, испр. М.:Едиториал УРСС, 2004.

Леонид Анатольевич Калякин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `klenru@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 114-126.

УДК 519.2

О ПОСТРОЕНИИ И МОДЕЛИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМ СИММЕТРИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Ф.С. НАСЫРОВ, Е.В. ЮРЬЕВА

Аннотация. Построен детерминированный аналог многомерного стохастического интеграла Стратоновича. Разработан метод решения систем уравнений с многомерными симметричными интегралами и систем стохастических дифференциальных уравнений с многомерным винеровским процессом. Для задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка с многомерным симметричным интегралом построен метод характеристик, сводящий решение таких задач к решению систем уравнений с симметричными интегралами.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, многомерные симметричные интегралы, системы уравнений с многомерными симметричными интегралами, дифференциальные уравнения в частных производных с многомерным симметричным интегралом, метод характеристик.

1. Введение

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (F_t), P)$ – вероятностное пространство с фильтрацией (F_t), на котором задан стандартный d-мерный винеровский процесс $\overline{W}(t,\omega) = (W_1(t,\omega), \ldots, W_d(t,\omega))$. В дальнейшем всюду, как правило, переменная $\omega \in \Omega$ опускается.

Пусть $\overline{\eta}(t,\bar{x}) = (\eta_1(t,\bar{x}), \ldots, \eta_n(t,\bar{x}))$ – диффузионный процесс, являющийся решением системы уравнений Ито:

$$\begin{cases} \eta_i(t,\bar{x}) = x_i + \displaystyle\int_0^t \Bigg[B^i(s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \sigma^{kj}(s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) \left(\sigma^{ij}\right)'_{x_k} (s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) \Bigg] ds + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) dW_j(s), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{1}$$

где последние d интегралов в каждом уравнении системы (1) есть стохастические интегралы Ито по многомерному винеровскому процессу $\overline{W}(t)$, а переменная $\bar{x} \in R^n$ указывает на зависимость процесса $\overline{\eta}(t,\bar{x})$ от начальных условий $\eta_i(0,\bar{x}) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Известно, что между решениями обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений Ито и дифференциальных уравнений Ито в частных производных существует тесная связь (см., например, [6, 12, 14]). Пусть функция $u = u(t,\bar{x}) : [0,T] \times R^n \to R$ при каждом t принадлежит классу функций $C^m(R^n)$, непрерывных по совокупности переменных и имеющих непрерывные (относительно $\bar{x}$) производные по $\bar{x}$ до некоторого порядка

F.S. Nasyrov, E.V. Yureva, On solutions of the first-order PDE with a multidimensional symmetric integral and their modelling.

Поступила 12 апреля 2012 г.

m. Функцию, при каждом t обратную по $\bar{x}$ к диффузионному процессу $\overline{\eta}(t,\bar{x})$, обозначим $\overline{\eta}^{\,-1}(t,\bar{x})$. Зафиксируем величину $K>0$ и целое $m\geq 3$.

Теорема ([6, 12]). *Пусть при каждом $\bar{x}$ коэффициенты $B^i(s,\bar{x})$, $\sigma^{ij}(s,\bar{x})$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,d$, измеримы по (t,ω) и согласованы с семейством σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$, $t\in[0,T]$, сами функции $B^i(s,\bar{x})$, $\sigma^{ij}(s,\bar{x})$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,d$, и их производные по $\bar{x}$ до порядка m по абсолютной величине не превосходят K. Тогда при всех ω из некоторого подмножества вероятности 1 и каждом $t\in[0,T]$ отображение $\overline{\eta}(t,\cdot):\bar{x}\in R^n\to\overline{\eta}(t,\bar{x})\in R^n$ является диффеоморфизмом класса $C^{m-1}(R^n)$, причем каждая координата обратного отображения $\overline{\eta}^{\,-1}(t,\bar{x})$, $i=1,2,\ldots,n$, является решением соответствующей задачи Коши*

$$d_tu(t,\bar{x})=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(t,\bar{x})\sigma^{kj}(t,\bar{x})u''_{x_ix_k}(t,\bar{x})+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{kj}(t,\bar{x})\left(\sigma^{ij}\right)'_{x_k}(t,\bar{x})+B^i(t,\bar{x})\right)u'_{x_i}(t,\bar{x})\right]dt- \tag{2}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(t,\bar{x})u'_{x_i}(t,\bar{x})dW_j(t)$$

с начальным условием $u(0,\bar{x})=x_i$, где i – номер координаты вектора $\bar{x}\in R^n$.

Здесь и ниже символом $d_tu(t,\bar{x})$ обозначается дифференциал по переменной t в отличие от полного дифференциала $du(t,\bar{x})$.

Отметим, что стохастическое дифференциальное уравнение Ито (2) является уравнением второго порядка параболического типа, но при записи этого уравнения с интегралами Стратоновича мы получим уравнение в частных производных первого порядка.

Приведем необходимые обозначения и определения, используемые в работе. Пусть $X(s)$, $s\in[0,T]$, – произвольная непрерывная функция, $f(s,v)$, $s\in[0,T]$, $v\in R$, — детерминированная функция, измеримая по s и v. Рассмотрим разбиения T_n, $n\in N$, отрезка $[0,T]$: $T_n=\{t_k^{(n)}\}$, $0=t_0^{(n)}\leq t_1^{(n)}\leq\ldots\leq t_k^{(n)}\leq\ldots\leq t_{m_n}^{(n)}=T$, $n\in N$, такие, что $T_n\subset T_{n+1}$, $n\in N$, и $\lambda_n=\max\limits_k\left|t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right|\to 0$ при $n\to\infty$. Через $X^{(n)}(s), s\in[0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Положим $\Delta t_k^{(n)}=t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right]=\left[t_{k-1}^{(n)},t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)}=X(t_k^{(n)})-X(t_{k-1}^{(n)})$.
Симметричным интегралом по непрерывной функции $X(s)$ называется

$$\int_0^t f(s,X(s))*dX(s)\stackrel{def}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_k\frac{1}{\Delta t_k^{(n)}}\int_{[\Delta t_k^{(n)}]}f(s,X^{(n)}(s))ds\,\Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n\in N$. Достаточным условием существования симметричного интеграла является так называемое условие (S) (см. [7, 8]). В случае, когда $X(t)$ — траектория стандартного винеровского процесса, симметричный интеграл с вероятностью 1 совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича.

В работах [7, 8] были исследованы детерминированные аналоги стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом, найден метод их решения путем сведения к решению конечных цепочек обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе Захаровой О. В. [5] найден метод решения определенного класса систем стохастических дифференциальных уравнений с симметричными интегралами путем сведения решения последних к решению систем уравнений в полных дифференциалах. В работе [15] обсуждаются математические модели, содержащие переход от обыкновенных уравнений

Ито к уравнениям в частных производных, а в статьях [3, 4] выявлена связь между решениями детерминированных аналогов стохастических дифференциальных уравнений с одномерным симметричным интегралом и уравнениями в частных производных с одномерным симметричным интегралом. В монографии [9] приведены основные сведения теории симметричных интегралов.

В настоящей работе продолжены исследования в этом направлении. Во-первых, построены многомерные симметричные интегралы по произвольным непрерывным функциям, которые являются обобщениями стохастических интегралов Стратоновича по многомерному винеровскому процессу. Во-вторых, метод решения уравнений с одномерным симметричным интегралом и соответствующих стохастических дифференциальных уравнений, найденный в работах [7, 8], развит для решения систем уравнений с многомерными симметричными интегралами. Наконец, построен метод характеристик для решения дифференциальных уравнений в частных производных с многомерными симметричными интегралами, который, в частности, обобщает приведенный выше результат Крылова Н. В., Розовского Б. Л. (см. [6, 12]), при этом: (a) вместо многомерного винеровского процесса $\overline{W}(t)$ берется произвольная непрерывная вектор-функция $\overline{X}(t)$, все компоненты которой имеют неограниченную вариацию на любом отрезке; (b) функция $\overline{\eta}(t,\bar{x})$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами уже не является диффузионным процессом, а сами многомерные симметричные интегралы являются обобщением стохастического интеграла Стратоновича (см. [7, 8]).

Таким образом, в статье показано, что часть результатов, ранее справедливых в рамках стохастического анализа, имеет гораздо более общий характер и может быть сформулирована для некоторых классов уравнений с симметричными интегралами.

2. Основные результаты

2.1. Пусть $\overline{X}(s) = (X_1(s),\ldots,X_d(s))$, $s\in[0,T]$, — произвольная непрерывная вектор-функция и даны функции $\sigma^1(s,\overline{X}(s)),\ldots,\sigma^d(s,\overline{X}(s))$. Рассмотрим разбиения T_n, $n\in N$, отрезка $[0,T]$: $T_n=\{t_k^{(n)}\}$, $0=t_0^{(n)}\le t_1^{(n)}\le\ldots\le t_k^{(n)}\le\ldots\le t_{m_n}^{(n)}=T$, $n\in N$, такие, что $T_n\subset T_{n+1}$, $n\in N$, и $\lambda_n=\max_k\left|t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right|\to 0$ при $n\to\infty$. Обозначим через $X_k^{(n)}(s)$, $s\in[0,T]$, $k=1,2,\ldots,d$, ломаные, построенные по функциям $X_k(s)$ по последовательности сгущающихся разбиений T_n.

Симметричным интегралом по функции $\overline{\sigma}(s,\overline{X}(s))=(\sigma^1(s,\overline{X}(s)),\ldots,\sigma^d(s,\overline{X}(s)))$ относительно непрерывной функции $\overline{X}(s)$ называется

$$\int_0^t\overline{\sigma}(s,\overline{X}(s))*d\overline{X}(s)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^d\int_0^t\sigma^k(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s))\left(X_k^{(n)}\right)'(s)ds,\tag{3}$$

если предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n\in N$.

Наряду с обозначением (3) будем использовать следующее:

$$\int_0^t\overline{\sigma}(s,\overline{X}(s))*d\overline{X}(s)\equiv\sum_{k=1}^d\int_0^t\sigma^k(s,X_1(s),\ldots,X_d(s))*dX_k(s).\tag{4}$$

Пусть $f(s,\bar{v})=f(s,v_1,\ldots,v_d)$ — непрерывно дифференцируемая функция, тогда ее *дифференциалом с симметричными интегралами* называется

$$f(t,\overline{X}(t))-f(0,\overline{X}(0))=\int_0^t grad_{\bar{v}}f(s,\overline{X}(s))*d\overline{X}(s)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}f(s,\overline{X}(s))ds,\tag{5}$$

где $grad_{\bar{v}}f(s,\bar{v})=(f'_{v_1},\ldots,f'_{v_d})$.

Замечание 1. Формула (5) является детерминированным аналогом стохастического дифференциала Ито с интегралами Стратоновича. Наряду с записью дифференциала в виде

(5) мы будем применять краткую запись дифференциала

$$df(t,\overline{X}(t)) = grad_{\bar{v}} f(t,\overline{X}(t)) * d\overline{X}(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(t,\overline{X}(t))dt.$$

Покажем, что для непрерывно дифференцируемой функции $f(s,\bar{v})$ дифференциал с симметричными интегралами существует.

Лемма 1. *Пусть $\overline{X}(s) = (X_1(s),\ldots,X_d(s))$, $s \in [0,T]$, — произвольная непрерывная вектор-функция, а функция $f(s,\bar{v})$, $s \in [0,T]$, $\bar{v} \in R^d$, имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем своим переменным. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ существует симметричный интеграл $\int_0^t grad_{\bar{v}} f(s,\overline{X}(s)) * d\overline{X}(s)$ и справедлива формула (5).*

Доказательство. Пусть $X_k^{(n)}(s)$, $s \in [0,T]$, $k = 1,2,\ldots,d$, — ломаные, построенные по функциям $X_k(s)$, $k = 1,2,\ldots,d$, по последовательности сгущающихся разбиений T_n, $n \in N$, отрезка $[0,T]$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} f(t,X_1^{(n)}(t),\ldots,X_d^{(n)}(t)) - f(0,X_1^{(n)}(0),\ldots,X_d^{(n)}(0)) = \\ = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial}{\partial v_k} f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s)) \left(X_k^{(n)}\right)'(s)ds + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s))ds, \end{aligned} \tag{6}$$

которое получено путем дифференцирования, а затем интегрирования функции $f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s))$ по переменной $s \in [0,t]$. Заметим, что в силу непрерывности функции $f(s,v_1,\ldots,v_d)$ предел левой части выражения (6) при $n \to \infty$ существует и равен

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} [f(t,X_1^{(n)}(t),\ldots,X_d^{(n)}(t)) - f(0,X_1^{(n)}(0),\ldots,X_d^{(n)}(0))] = \\ = f(t,X_1(t),\ldots,X_d(t)) - f(0,X_1(0),\ldots,X_d(0)). \end{aligned}$$

Точно также, ввиду непрерывности частной производной функции $f(s,v_1,\ldots,v_d)$ по s, существует предел последнего слагаемого в правой части равенства (6):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s))ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,X_1(s),\ldots,X_d(s))ds,$$

откуда следует существование предела (3).

Замечание 2. Лемма 1 не гарантирует существования предела каждого слагаемого в выражении (4), но обозначение в правой части выражения (4) соответствует принятой в стохастическом анализе системе обозначений.

Замечание 3. Если $\overline{X}(s)$, $s \in [0,T]$, есть многомерный винеровский процесс, то каждое слагаемое в формуле (3) из определения симметричного интеграла по функции $\overline{X}(s)$ имеет смысл и с вероятностью 1 совпадает с соответствующим стохастическим интегралом Стратоновича.

2.2. Введем детерминированные аналоги систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Стратоновича по многомерным непрерывным функциям.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами:

$$\begin{cases} \eta_i(t) = \eta_i^0 + \int_0^t B^i(s,\overline{\eta}(s),\overline{X}(s))ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s,\overline{\eta}(s),\overline{X}(s)) * dX_j(s), \\ \qquad i = 1,2,\ldots,n, \end{cases} \tag{7}$$

где $\overline{X}(s) = (X_1(s),\ldots,X_d(s))$ — непрерывная вектор-функция.

Решением системы уравнений (7) будем называть набор функций вида $\eta_i(t) = \varphi_i(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такой, что:

1. функции $\varphi_i(t, \bar{v})$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам;
2. правые части системы (7) при подстановке функций $\varphi_i(t, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, образуют дифференциалы с симметричными интегралами некоторых функций $\psi_i(t, \overline{X}(t))$;
3. дифференциалы с симметричными интегралами $d\varphi_i(t, \overline{X}(t))$ и $d\psi_i(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, правой и левой частей системы (7) совпадают.

Обозначим $\overline{X}_{[k]}(t, v_k) = (X_1(t), \ldots, X_{k-1}(t), v_k, X_{k+1}(t), \ldots, X_d(t))$, где индекс $[k]$ указывает, что вместо k-той координаты $X_k(t)$ вектора $\overline{X}(t)$ стоит переменная v_k. Покажем, что решение систем уравнений с многомерными симметричными интегралами сводится к решению конечных цепочек систем обыкновенных дифференциальных уравнений (в дальнейшем — ОДУ).

Теорема 1. *Пусть фиксирована вектор-функция $\overline{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_d(t))$, составляющие которой являются непрерывными функциями, а функции $\sigma^{ik}(t, \overline{\eta}, \bar{v})$, $k = 1, 2, \ldots, d$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $B^i(t, \overline{\eta}, \bar{v})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы. Предположим, что непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам функции $\overline{\varphi}(t, \bar{v})$, $t \in [0, T]$, $\bar{v} \in R^d$, удовлетворяют конечной цепочке ОДУ:*

$$\left\{ (\varphi_i)'_{v_1} (t, \overline{X}_{[1]}(t, v_1)) = \sigma^{i1}(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}_{[1]}(t, v_1)), \overline{X}_{[1]}(t, v_1)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \right. \tag{8}$$

$$\ldots$$

$$\left\{ (\varphi_i)'_{v_k} (t, \overline{X}_{[k]}(t, v_k)) = \sigma^{ik}(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}_{[k]}(t, v_k)), \overline{X}_{[k]}(t, v_k)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \right. \tag{9}$$

$$\ldots$$

$$\left\{ (\varphi_i)'_{v_d} (t, \overline{X}_{[d]}(t, v_d)) = \sigma^{id}(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}_{[d]}(t, v_d)), \overline{X}_{[d]}(t, v_d)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \right. \tag{10}$$

$$\begin{cases} (\varphi_i)'_t (t, \bar{v})\big|_{\{v_j = X_j(t), j=1,2,\ldots,d\}} = B^i(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}(t)), \overline{X}(t)), \\ \qquad\qquad \varphi_i(0, \overline{X}(0)) = \eta_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда функция $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, $\overline{X}(t) \in R^d$, есть решение задачи Коши (7).

Доказательство. Тот факт, что решение $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$ цепочки систем ОДУ (8)–(11) дает нам решение исходной системы уравнений (7), проверяется путем подстановки функции $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$ в систему (7) и применением формулы дифференциала с симметричными интегралами (5).

Замечание 4. Покажем, как с помощью цепочки систем ОДУ (8)–(11) построить решение системы уравнений (7). При этом будем предполагать, что каждая из рассматриваемых ниже систем ОДУ, построенных с помощью цепочки (8)–(11), имеет общее решение.

Пусть ${}^r\overline{X}(t) = (X_r(t), X_{r+1}(t), \ldots, X_d(t))$ — вектор-функция, образованная из $\overline{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_d(t))$ отбрасыванием первых $r - 1$ координат, $r = 1, 2, \ldots, d$.

Решая систему ОДУ (8) относительно переменной v_1 и считая другие переменные параметрами, находим функции $\varphi_i(t, \overline{X}(t))$ в виде

$$\varphi_i(t, \overline{X}(t)) = \varphi_i^{*1}(t, X_1(t), \overline{C}^1(t, {}^2\overline{X}(t))) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

зависящей от произвольной вектор-функции $\overline{C}^1(t, {}^2\overline{X}(t)) = (C_1^1(t, {}^2\overline{X}(t)) \ , \ldots, C_n^1(t, {}^2\overline{X}(t)))$. Эта вектор-функция, в свою очередь, находится при подстановке функций φ_i^{*1}, $i = 1, 2, \ldots, n$, в следующую систему ОДУ на переменную v_2 с точностью до неизвестной вектор-функции $\overline{C}^2(t, {}^3\overline{X}(t)) = (C_1^2(t, {}^3\overline{X}(t)), \ldots, C_n^2(t, {}^3\overline{X}(t)))$. Продолжая этот процесс, на $k-$ом шаге $(k < d)$ мы получим решение в виде

$$\varphi_i(t, \overline{X}(t)) = \varphi_i^{*k}(t, X_1(t), \ldots, X_k(t), \overline{C}^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t))), \tag{13}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, с точностью до произвольной вектор-функции

$$\overline{C}^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t)) = (C_1^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t)), \ldots, C_n^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t))),$$

которая, в свою очередь, находится при подстановке полученных на этом шаге функций φ_i^{*k} в $(k+1)$-ю систему ОДУ. Решив первые d систем приведенной цепочки, получим:

$$\varphi_i(t, \overline{X}(t)) = \varphi_i^{*d}(t, \overline{X}(t), \overline{C}^d(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где неизвестную вектор-функцию $\overline{C}^d(t) = (C_1^d(t), \ldots, C_n^d(t))$ можно найти, подставив полученные φ_i^{*d} в систему (11) с начальными условиями

$$\varphi_i(0, \overline{X}(0)) = \eta_i^0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

При решении систем ОДУ вышеприведенной цепочки в иной последовательности, чем показано здесь, можно получить решение в других формах. В случае, если система уравнений с симметричными интегралами имеет единственное решение, то все построенные решения должны совпадать. Метод решения систем дифференциальных уравнений с многомерным симметричным интегралом остается справедливым и при решении систем стохастических дифференциальных уравнений с многомерным винеровским процессом.

Замечание 5. В предположениях теоремы 1 достаточным условием совместности системы уравнений (7) является совместность каждой из систем ОДУ (8)–(11).

Будем говорить, что непрерывные функции $X_1(s), \ldots, X_d(s)$, $s \in [t_1, t_2]$, имеющие неограниченную вариацию на любом конечном промежутке, *локально функционально зависимы на отрезке* $[t_1, t_2]$, если существует непрерывно дифферецируемая по всем своим переменным функция $\Phi(s, \bar{v}) = \Phi(s, v_1, ..., v_d)$ такая, что $grad_{\bar{v}}\, \Phi(s, \bar{v}) \neq 0$ для $\bar{v}$ из "прямоугольника" $[\overline{X}(s_1), \overline{X}(s_2)]$, и $\Phi(s, \overline{X}(s)) \equiv 0$ на некотором отрезке $[s_1, s_2] \subset [t_1, t_2]$, в противном случае функции $X_1(s), \ldots, X_d(s)$ *функционально независимы на отрезке* $[t_1, t_2]$.

Замечание 6. Пусть непрерывные функции $X_1(s), \ldots, X_d(s)$, $s \in [0, T]$, имеют неограниченную вариацию на любом конечном промежутке и функционально независимы на $[0, T]$. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(s, \overline{v})$ из того факта, что $\Phi(s, \overline{X}(s)) = 0$, $s \in [0, T]$, следует, что при каждом $s \in [0, T]$ для всех $\overline{v} \in [\overline{X}(0), \overline{X}(s)]$ справедливо $grad_{\overline{v}}\Phi(s, \overline{v}) = 0$.

Следующее утверждение выявляет условия, при которых возможно обратить теорему 1.

Теорема 2. *Пусть дана непрерывная вектор-функция $\overline{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_d(t))$, компоненты которой имеют неограниченную вариацию на любом отрезке из $[0, T]$ и функционально независимы на отрезке $[0, T]$, а функции $\sigma^{ik}(t, \overline{\eta}, \overline{v})$, $k = 1, 2, \ldots, d$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $B^i(t, \overline{\eta}, \overline{v})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы. Если вектор-функция $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, есть решение задачи Коши (7), то функция $\overline{\varphi}(t, \overline{v})$ удовлетворяет цепочке систем ОДУ (8)–(11).*

Доказательство. Приведем доказательство теоремы 2 в случае $d = 2$ и $n = 1$, общий случай доказывается аналогично.

Пусть функция $\eta(t) = \varphi(t, X_1(t), X_2(t))$ является решением задачи Коши (7). Согласно определению решения уравнения с симметричным интегралом, существует функция $F(t, v_1, v_2)$ такая, что $F(t, X_1(t), X_2(t)) \equiv 0$ и

$$F'_t(t, X_1(t), X_2(t)) = B(t, \varphi(t, X_1(t), X_2(t)), X_1(t), X_2(t)) - \varphi'_t(t, X_1(t), X_2(t)),$$
$$F'_{v_1}(t, X_1(t), X_2(t)) = \sigma^1(t, \varphi(t, X_1(t), X_2(t)), X_1(t), X_2(t)) - \varphi'_{v_1}(t, X_1(t), X_2(t)),$$

$$F'_{v_2}(t, X_1(t), X_2(t)) = \sigma^2(t, \varphi(t, X_1(t), X_2(t)), X_1(t), X_2(t)) - \varphi'_{v_2}(t, X_1(t), X_2(t)).$$

Так как функции $X_1(t), X_2(t)$ функционально независимы, то $grad_{\overline{v}} F(t, v_1, v_2) \equiv 0$ на $[\overline{X}(0), \overline{X}(t)]$, то функция $\varphi(t, v_1, v_2)$ удовлетворяет цепочке уравнений (8)–(11).

2.3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка с многомерным симметричными интегралами:

$$\begin{gathered} d_t u(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) = -\sum_{i=1}^{n} B^i(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) u'_{x_i}(t, \bar{x}, \overline{X}(t))dt- \\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) u'_{x_i}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) * dX_j(t), \end{gathered} \tag{14}$$

$$u(0, \bar{x}, \overline{X}(0)) = x_k, \tag{15}$$

где x_k в начальном условии (15) — k-ая координата переменной $\bar{x} \in R^n$.

Решением уравнения (14) будем называть функцию $u(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$ такую, что при подстановке функции $u(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$ в уравнение (14) все интегралы в правой части имеют смысл, а само это уравнение превращается в тождество. Для каждого вектора начальных условий $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ через $\overline{U}(t, \bar{x}) = (u_1(t, \bar{x}), \ldots, u_n(t, \bar{x}))$ будем обозначать решения задачи Коши (14)-(15), полагая $u_k(t, \bar{x}) = u_k(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$.

Наряду с задачей (14)–(15) рассмотрим соответствующую систему уравнений с многомерными симметричными интегралами:

$$\begin{cases} d\eta_i(t, \bar{x}) = B^i(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t))dt + \sum\limits_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t)) * dX_j(t), \\ \eta_i(0, \bar{x}) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим следующие условия:

(A) Функции $B^i(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, — непрерывны по $(t, \overline{\eta})$ в некоторой замкнутой области Q — окрестности начальных значений системы уравнений (16).

(B) Функции $B^i(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, удовлетворяют в Q условию Липшица относительно переменной $\overline{\eta}$: существует такое $N > 0$, что для любого значения t и любых значений $\overline{\eta}'$, $\overline{\eta}''$ переменной $\overline{\eta}$ из области Q для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$ выполняются неравенства

$$\left|B^i(t, \overline{\eta}', \overline{X}(t)) - B^i(t, \overline{\eta}'', \overline{X}(t))\right| \leqslant N \left|\overline{\eta}' - \overline{\eta}''\right|,$$

$$\left|\sigma^{ij}(t, \overline{\eta}', \overline{X}(t)) - \sigma^{ij}(t, \overline{\eta}'', \overline{X}(t))\right| \leqslant N \left|\overline{\eta}' - \overline{\eta}''\right|.$$

Теорема 3. *Пусть справедливы все предположения теоремы 2 и для коэффициентов $B^i(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, выполнены условия (A) и (B). Тогда при каждом $t \in [0, T]$ отображение $\overline{U}(t, \cdot) : \bar{x} \in R^n \to \overline{U}(t, \bar{x}) \in R^n$ является диффеоморфизмом класса $C^1(R^n)$, причем обратное отображение $\overline{U}^{-1}(t, \bar{x})$ является решением системы уравнений с многомерными симметричными интегралами* (16).

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2 решение системы уравнений (16) одновременно является и решением цепочек систем ОДУ, при этом переменная $\bar{x}$ является параметром. При выполнении условий (A) и (B) на коэффициенты $B^i(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, решения систем ОДУ непрерывно дифференцируемы по параметру $\bar{x}$ (см., например, [1, Теор. 5.2.1]). Следовательно, решение системы уравнений (16) является непрерывно дифференцируемым по параметру $\bar{x}$.

Пусть $u(t,\bar{x},\overline{X}(t))$ — решение задачи (14)-(15). Воспользовавшись методом доказательств теорем 1,2 и применив соответствующие рассуждения к уравнению (14), приходим к цепочке соотношений:

$$\begin{cases} u'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)) = -\sum_{i=1}^{n}\sigma^{ij}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j))u'_{x_i}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)), \\ u'_t(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} B^i(t,\bar{x},\overline{X}(t))u'_{x_i}(t,\bar{x},\overline{X}(t)), \\ j=1,...,d. \end{cases} \tag{17}$$

Обозначим через $(\eta_i)'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = \frac{\partial}{\partial v_j}\eta_i(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j))\mid_{v_j=X_j(t)}$ и найдем дифференциал с симметричным интегралом функции $u(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t))$:

$$\begin{gathered} d_t u(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) = \Bigg[u'_t(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) + \\ + \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t))\,(\eta_i)'_t(t,\bar{x},\overline{X}(t))\Bigg]dt + \\ + \sum_{j=1}^{d}\Bigg[u'_{v_j}(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) + \\ + \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t))\,(\eta_i)'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}(t))\Bigg] * dX_j(t). \end{gathered} \tag{18}$$

Выпишем, согласно теоремам 1,2, цепочку уравнений типа (8)-(11) для уравнения (16):

$$\begin{cases} (\eta_i)'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)) = \sigma^{ij}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)), \\ (\eta_i)'_t(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = B^i(t,\bar{x},\overline{X}(t)), \\ i=1,2,\ldots,n, \quad j=1,2,\ldots,d. \end{cases}$$

Подставим эти соотношения в (18) и, опустив аргументы функций в правой части, в силу (17) получим:

$$\begin{gathered} d_t u(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) = \\ = \left[u'_t + \sum_{i=1}^{n} B^i u'_{x_i}\right]dt + \sum_{j=1}^{d}\left[u'_{v_j} + \sum_{i=1}^{n}\sigma^{ij}u'_{x_i}\right] * dX_j(t) \equiv 0. \end{gathered}$$

Таким образом, мы убедились, что $d_t u(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) \equiv 0$, значит, $u(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) = x_i$ при всех t для каждого $i=1,2,\ldots,n$. Теорема 3 доказана.

Будем предполагать справедливыми все предположения теоремы 3. Вернемся к уравнению в частных производных первого порядка с многомерным симметричным интегралом (14) и рассмотрим систему уравнений с многомерным симметричным интегралом и коэффициентами из уравнения (14):

$$\begin{cases} x_i(t,\bar{z}) = z_i + \displaystyle\int_0^t B^i(t,\bar{x}(s,\bar{z}),\overline{X}(s))ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma^{ij}(t,\bar{x}(s,\bar{z}),\overline{X}(s)) * dX_j(s), \\ \hfill i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{19}$$

При наложенных условиях эта система имеет n интегралов

$$\begin{cases} \xi_1(t,\overline{X}(t),\bar{x}) = C_1, \\ \qquad\ldots \\ \xi_n(t,\overline{X}(t),\bar{x}) = C_n. \end{cases} \tag{20}$$

Общим решением уравнения (14) назовем функцию $u = \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, где Φ — произвольная функция, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — левые части выражений (20).

Пусть $u = \theta(t, \bar{x}) = \theta(t, \overline{X}(t), \bar{x})$ — решение уравнения (14). Это решение является гиперповерхностью в пространстве $u, t, x_1, \dots, x_n$. Уравнения (20) вместе с $u = \theta(t, \bar{x})$ определяют семейство (однопараметрических) линий в этом пространстве. Линии пересечения цилиндров (20) с поверхностью $\xi_{n+1} \equiv z = C$, где C — произвольный параметр, назовем *характеристическими линиями* уравнения (14), а уравнения (19) — *уравнениями характеристик.*

Замечание 7. Систему уравнений (19) можно формально записать в классическом виде, принятом в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для уравнений характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{B^1(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{1j}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) * (X_j(t))'_t} = \dots = \\ = \frac{dx_n}{B^n(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{nj}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) * (X_j(t))'_t}. \end{aligned} \tag{21}$$

Положив $\sigma = 0$ в уравнении (14), мы перейдем к классическому определению характеристик и обыкновенным дифференциальным уравнениям вида (21) без симметричных интегралов.

Ввиду того, что коэффициенты B^i, σ^{ij}, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, d$, системы уравнений (20) напрямую зависят только от t, $\bar{x}$, $X(t)$, а от $\bar{z}$ не зависят, решение системы (20) имеет вид:

$$\bar{x}(t, \bar{z}) = \overline{\Psi}(t) + \bar{z}, \quad \overline{\Psi}(0) = 0, \tag{22}$$

где $\bar{z}$ — начальное условие для системы уравнений (20), $\overline{\Psi}(t) = \overline{\Psi}(t, \overline{X}(t))$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \Psi_i(t) = \displaystyle\int_0^t B^i(s, \overline{\Psi}(s), \overline{X}(s)) ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s, \overline{\Psi}(s), \overline{X}(s)) * dX_j(s), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{23}$$

Докажем формулу (22). Для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выпишем дифференциалы с симметричными интегралами для функций $x_i(t, \overline{X}(t))$, $\Psi_i(t, \overline{X}(t))$ по формуле (5), а затем воспользуемся системами уравнений (19) и (23):

$$\begin{aligned} x_i(t, \overline{X}(t)) - x_i(0, \overline{X}(0)) = \\ = \int_0^t B^i(s, \overline{x}(s), \overline{X}(s)) ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s, \overline{x}(s), \overline{X}(s)) * dX_j(s) = \\ = \Psi_i(t, \overline{X}(t)) - \Psi_i(0, \overline{X}(0)), \end{aligned} \tag{24}$$

откуда получаем равенство (22).

Следуя за классической теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, семейство характеристик уравнения (14) запишем так:

$$x_i - \Psi_i(t) = \xi_i(t, x_1, \dots, x_n) = C_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{25}$$

где C_i, $i = 1, 2, \dots, n$, — некоторые константы.

Покажем, что справедливо одно из основных свойств характеристик (см., например, [11]), а именно, что произвольная достаточно гладкая функция от характеристик дифференциального уравнения в частных производных первого порядка является его решением.

Теорема 4. *В предположенях теоремы 3 общее решение уравнения* (14) *можно записать в виде* $u(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = \Phi(\bar{x}-\overline{\Psi}(t))$ *с произвольной непрерывной функцией* $\Phi \in C^1(R^n)$, *где* $x_i - \Psi_i(t) = C_i$, C_i *— правые части интегралов* (20), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $u = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где Φ — произвольная функция, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — левые части выражений (20). Покажем, что при $\xi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = x_i - \Psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\Psi_i(t) = \Psi_i(t, \overline{X}(t))$ — решение системы (23), функция $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ даст общее решение уравнения (14).

Найдем дифференциал по t функции $\Phi(\overline{\xi}(t,\bar{x}))$:

$$\begin{gathered} d_t\Phi\left(\overline{\xi}(t,\bar{x})\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi'_{\xi_i} * d_t\xi_i(t,\bar{x}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \Phi'_{x_i} * d_t(x_i - \Psi_i\left(t, \overline{X}(t)\right)) = -\sum_{i=1}^{n} \Phi'_{x_i} * d\Psi_i\left(t, \overline{X}(t)\right). \end{gathered} \tag{26}$$

В силу (23) имеем:

$$\begin{gathered} d\Psi_i(t,\overline{X}(t)) = grad_{\bar{v}}\Psi_i(t,\overline{X}(t)) * d\overline{X}(t) + (\Psi_i)'_t\,(t,\overline{X}(t))dt = \\ = \sum_{j=1}^{d} (\Psi_i)'_{v_j}\,(t,\overline{X}(t)) * dX_j(t) + (\Psi_i)'_t\,(t,\overline{X}(t))dt = \\ = \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(s,\overline{\Psi}(s),\overline{X}(s)) * dX_j(s) + B^i(s,\overline{\Psi}(s),\overline{X}(s))ds. \end{gathered}$$

Следовательно, правая часть (26) равна:

$$\begin{gathered} -\sum_{i=1}^{n} \Phi'_{x_i} \left(\sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t)) * dX_j(t) + B^i(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))dt \right) = \\ = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i} * dX_j(t) - \sum_{i=1}^{n} B^i(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i}dt. \end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} d_t\Phi\left(\bar{x} - \overline{\Psi}(t)\right) = -\sum_{i=1}^{n} B^i(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i}dt - \\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i} * dX_j(t), \end{gathered}$$

то есть, функция $\Phi\left(\bar{x} - \overline{\Psi}(t)\right)$ удовлетворяет уравнению (14). Следовательно, общее решение уравнения (14) можно представить в виде $\Phi\left(\bar{x} - \overline{\Psi}(t)\right)$, где Φ — произвольная гладкая функция.

Следствие. *Пусть* $\overline{\eta} = \overline{\varphi}(t,\bar{x})$ *— решение системы уравнений* (16), $\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta})$ *— функция, при каждом* t *обратная по переменной* $\bar{x}$ *к процессу* $\overline{\varphi}(t,\bar{x})$. *Тогда структура процесса* $\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta})$ *имеет вид:*

$$\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta}) = \overline{\eta} - \overline{\Psi}(t),$$

где функция $\overline{\Psi}(t)$ *— решение системы уравнений* (23).

Доказательство. Из представления (22) получаем, что $\overline{\varphi}(t,\bar{x}) = \overline{\eta} = \overline{\Psi}(t) + \bar{x}$, где $\bar{x}$ — начальное условие для системы уравнений (16), $\overline{\Psi}(t)$ — решение системы уравнений (23). Тогда обратная функция к $\overline{\varphi}(t,\bar{x})$ находится по формуле: $\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta}) = \bar{x} = \overline{\eta} - \overline{\Psi}(t)$.

2.4. Пример 1. Пусть $X(t)$, $t \in [0,T]$, — произвольная непрерывная функция неограниченной вариации, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с симметричным интегралом:

$$\begin{aligned} d_t u(t,\bar{x},X(t)) = \left(-tu'_{x_1} + (1-X(t))u'_{x_2}\right)dt+ \\ + \left(X(t)u'_{x_1} - tu'_{x_2}\right) * dX(t). \end{aligned} \tag{27}$$

Составим соответствующие уравнения характеристик:

$$\begin{cases} dx_1(t) = tdt - X(t) * dX(t), \\ dx_2(t) = (X(t)-1)dt + t * dX(t). \end{cases} \tag{28}$$

Решив систему (28), получим

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}(t^2 - (X(t))^2) + C_1, \\ x_2(t) = (X(t)-1)t + C_2, \end{cases} \tag{29}$$

откуда находим, что общее решение уравнения (27) имеет вид:

$$u(t,x) = \Phi\left(x_1 - \frac{1}{2}(t^2 - (X(t))^2), x_2 - (X(t)-1)t\right), \tag{30}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Проверим, действительно ли найденная функция является решением уравнения (27). Имеем:

$$\begin{gathered} \xi_1(t,x_1,x_2) = x_1 - \frac{1}{2}(t^2 - (X(t))^2), \\ \xi_2(t,x_1,x_2) = x_2 - (X(t)-1)t. \end{gathered}$$

Сначала найдем производные по x_1, x_2 функции (30):

$$\begin{gathered} u'_{x_1} = \Phi'_{\xi_1} \cdot {\xi_1}'_{x_1} + \Phi'_{\xi_2} \cdot {\xi_2}'_{x_1} = \Phi'_{\xi_1}, \\ u'_{x_2} = \Phi'_{\xi_1} \cdot {\xi_1}'_{x_2} + \Phi'_{\xi_2} \cdot {\xi_2}'_{x_2} = \Phi'_{\xi_2}, \end{gathered} \tag{31}$$

а затем — дифференциал по t:

$$\begin{gathered} d_t u = \Phi'_{\xi_1} \cdot d_t\xi_1 + \Phi'_{\xi_2} \cdot d_t\xi_2 = \\ = \Phi'_{\xi_1}\left(-tdt + X(t) * dX(t)\right) + \Phi'_{\xi_2}\left((1-X(t))dt - t * dX(t)\right). \end{gathered} \tag{32}$$

Подставляя выражения (31) в правую часть уравнения (27), а (32) — в левую, получим тождество. Следовательно, функция (30) является решением уравнения (27). А так как функция Φ — произвольная, то мы нашли общее решение уравнения (27).

Пример 2. Пусть $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения в частных производных с симметричным интегралом:

$$d_t u(t,x,W(t)) = -\left(t - \frac{\sin X^2(t)}{t^2}\right)u'_x dt - \left(W(t) + \frac{\sin 2W(t)}{t}\right)u'_x * dW(t), \tag{33}$$

с начальными условиями

$$u|_{\Gamma:\ x=\sqrt{t}} = x + \frac{\cos 2X(t)}{2t} - \frac{X^2(t)+t^2}{2} - \frac{1}{t}. \tag{34}$$

Составим уравнение характеристик:

$$dx(t,X(t)) = \left(t - \frac{\sin X^2(t)}{t^2}\right)dt + \left(W(t) + \frac{\sin 2W(t)}{t}\right) * dW(t), \tag{35}$$

решив которую, получим

$$x(t,X(t)) = -\frac{\cos 2X(t)}{2t} + \frac{X^2(t)+t^2}{2} + \frac{1}{t} + C. \tag{36}$$

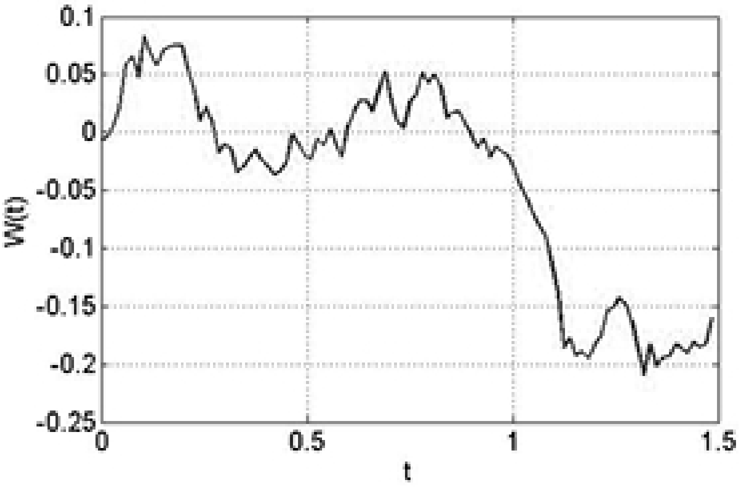


Рис. 1. График процесса $W(t)$

Следовательно, общее решение уравнения (33) имеет вид:

$$u(t,x) = \Phi\left(x + \frac{\cos 2X(t)}{2t} - \frac{X^2(t)+t^2}{2} - \frac{1}{t}\right), \tag{37}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Из вида начального условия находим, что решение задачи (33)-(34) задается выражением:

$$u(t,x) = x + \frac{\cos 2X(t)}{2t} - \frac{X^2(t)+t^2}{2} - \frac{1}{t}. \tag{38}$$

Смоделируем траекторию винеровского процесса $W(t)$ (рис. 1),
и приведем графики характеристических кривых и самой интегральной поверхности (38) (рис. 2):

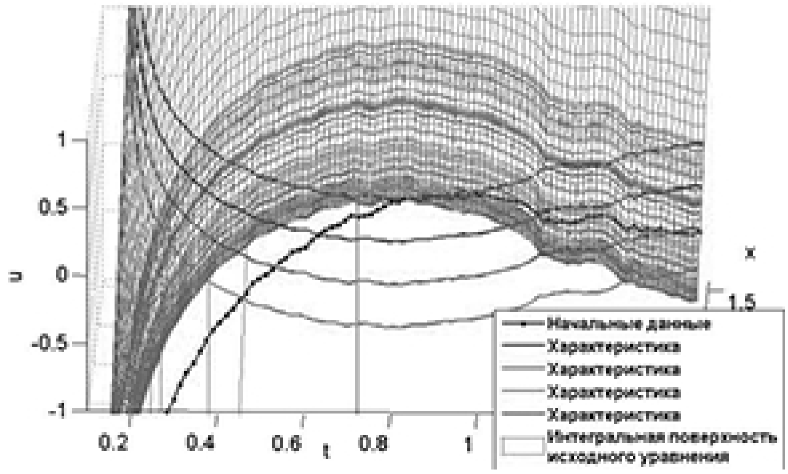


Рис. 2. Интегральная поверхность уравнения (33)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков Ю.Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* М. Высшая школа. 1991. 303 с.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов.* М. ФИЗМАТЛИТ. 2005. 408 с.
3. Гапечкина Е.В. *Об обобщении одного результата Крылова Н.В., Розовского Б.Л.* Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова 9-15 сентября 2008 г. Ростов-на-Дону. 2008. С. 211–212.
4. Гапечкина Е.В. *Об обобщении одного результата Н.В. Крылова.* Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, №2. С. 257.
5. Захарова О.В. *О решении одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений.* «Известия ВУЗов. Математика». Казань. 2009. № 6. С. 3–9.
6. Крылов Н.В., Розовский Б.Л. *Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и диффузионные процессы.* Успехи математических наук. 1982. Т. 37, вып. 6(228). С. 75–95.
7. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений.* Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4. №2. С. 55–66.
8. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и стохастический анализ.* Теория вероятностей и ее применение. 2006. Т. 51. №3. С. 496–517.
9. Насыров Ф.С. *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ.* М.: Физматлит, 2011. 212 с.
10. Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения: Введение в теорию и приложения.* М. Мир, ООО "Издательство АСТ". 2003. 408 с.
11. Положий Г.Н. *Уравнения математической физики.* М. Высшая школа. 1964. 560 с.
12. Розовский Б.Л. *Эволюционные стохастические системы.* М. Наука. 1983. 208 с.
13. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М. Наука. 1969. 424 с.
14. Friedman A. *Stochastic Differential Equations and Applications.* New York. Academic Press. 1975. T. 1. 244 p.
15. Kotelenez P. *Stochastic Ordinary and Stochastic Partial Differential Equations.* Cleveland. Springer Science+Business Media. 2008. 460 p.

Екатерина Викторовна Юрьева,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gap_kate@mail.ru

Фарит Сагитович Насыров,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: farsagit@yandex.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 127-135.

УДК 517.9

“КВАНТОВАЯ” ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ КАК КОМПОНЕНТА ИХ L, A ПАР

Б.И. СУЛЕЙМАНОВ

Аннотация. Вводится в рассмотрение процедура “квантовой” линеаризации гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений с одной степенью свободы. Ее предлагается использовать, в частности, для классификации интегрируемых уравнений типа Пенлеве. При всех натуральных n с помощью данной процедуры строятся решения $\Psi(\hbar, t, x, n)$ нестационарного уравнения Шредингера для осциллятора с гамильтонианом $H = (p^2 + q^2)/2$, которые экспоненциально стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, и на кривых $x = q_n(\hbar, t)$, выделяемых старым вариантом правила Бора—Зоммерфельда, удовлетворяют соотношению $i\hbar\Psi'_x \equiv p_n(\hbar, t)\Psi$, где $p_n(\hbar, t) = (q_n(\hbar, t))'_t$ — классический импульс, соответствующий гармонике $q_n(\hbar, t)$.

Ключевые слова: квантование, линеаризация, гамильтониан, нестационарное уравнение Шредингера, уравнения Пенлеве, изомонодромные деформации.

1. Введение

Из процедур, применяемых к нелинейным уравнениям, линеаризация, пожалуй, самая распространенная. Она используются не только для работы с приближениями к решениям.

В частности, специалистам по уравнениям, интегрируемым методом обратной задачи рассеяния, известно, что эти уравнения обладают настоящими, “рабочими” L,A парами, одна компонента которых есть результат линеаризации. Например, для уравнения Кортевега — де Вриза

$$u'_t = u'''_{xxx} + uu'_x$$

эта компонента имеет вид

$$U'_t = U'''_{xxx} + uU'_x + u'_x U.$$

Вторая компонента таких пар определяется гамильтоновыми структурами уравнений, допускающих данный метод (посредством оператора рекурсии [1]).

Замечание 1. Не исключено, что все такие пары эквивалентны обычным. Во всяком случае к этому предположению подталкивает рассмотрение случая L, A пар уравнения sin-Гордон

$$u''_{xt} + \sin u = 0.$$

Его традиционно используемую пару составляют [2] системы линейных уравнений (ζ — спектральный параметр)

$$(v_1)'_x = -i\zeta v_1 + Qv_2, \quad (v_2)'_x = -Qv_1 + i\zeta v_2, \tag{1}$$

$$4i\zeta(v_1)'_t = \cos(u)v_1 + \sin(u)v_2, \quad 4i\zeta(v_2)'_t = (\sin Q)v_1 - (\cos Q)v_2, \tag{2}$$

B.I. Suleimanov, The “quantum” linearization of the Painlevé equations as a component of theier L, A pairs.

Работа поддержана ФЦП (контракт 02.740.11.0612).
Поступила 1 марта 2012 г.

где $Q = -u_x/2$. О. М. Киселев [3, §4.1.1] показал, что комбинации квадратов

$$\Phi^{\pm}(x,t,\zeta) = v_2^2(x,t,\zeta) \pm v_1^2(x,t,\zeta), \qquad \Psi(x,t,\zeta) = v_1(x,t,\zeta)v_2(x,t,\zeta)$$

решений L, A пары (1), (2) удовлетворяют двум линейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$(\Phi^+)'_x = 2i\zeta\Phi^-, \quad (\Phi^-)'_x = 2i\zeta\Phi^+ - 4Q\Psi, \quad \Psi'_x = Q\Phi^-, \tag{3}$$

$$2i\zeta(\Phi^+)'_t = \sin(u)\Psi, \quad 2i\zeta(\Phi^-)'_t = -\cos(u)\Phi^+, \quad 2i\zeta\Psi'_t = Q\sin(u)\Phi^+ \tag{4}$$

и заметил, что компонента Φ^+ решения систем (3), (4) удовлетворяет уравнению

$$(\Phi^+)_{xt} + \cos(u)\Phi^+ = 0,$$

представляющего собой результат линеаризации уравнения sin-Гордон. Этот вывод О.М. Киселева дополняется следующим наблюдением:

- компонента Φ^+ решения системы (3) удовлетворяет также уравнению

$$-4\zeta^2\Phi^+ = (\Phi^+)''_{xx} + 4Q^2\Phi^+ - 4Q\int^x Q'_x\Phi^+ dx,$$

правая часть которого есть результат действия на Φ^+ оператора рекурсии для уравнения синус–Гордон, выписанного А. В. Жибером и А. Б. Шабатом в их известной работе [4].

Наряду с результатом линеаризации гамильтоновым системам ОДУ

$$\lambda'_\tau = H'_\mu(\tau,\lambda,\mu), \quad \mu'_\tau = -H'_\lambda(\tau,\lambda,\mu), \tag{5}$$

с квадратичными по импульсу μ гамильтонианами

$$H(\tau,\lambda,\mu) = \alpha(\tau,\lambda)\mu^2 + \beta(\tau,\lambda)\mu + \gamma(\tau,\lambda), \tag{6}$$

после создания волновой квантовой механики часто сопоставляется и другое линейное дифференциальное уравнение — нестационарное уравнение Шредингера ($\hbar$ — постоянная Планка)

$$i\hbar\Psi'_\tau = H(\tau, z, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z})\Psi. \tag{7}$$

Оказывается [5] — [7], что для всех ОДУ Пенлеве, интегрируемых методом изомонодромных деформаций [8], схожие с (7) линейные уравнения (как и в [7], они далее называются "квантованиями" ОДУ второго порядка на координату $\lambda(\tau)$)

$$\Psi'_\tau = H(\tau, z, \frac{\partial}{\partial z})\Psi \tag{8}$$

можно рассматривать как компоненту соответствующей L, A пары.

Замечание 2. Подобные "квантования" возникают в задачах фильтрации диффузионных процессов [9], [10].

В данной статье вводится в рассмотрение процедура, ассоциирующая гамильтоновы ОДУ еще с одними линейными уравнениями — некоторыми "квантовыми" аналогоми результатов линеаризаций данных ОДУ (конкретные примеры подобных "квантовых" линеаризаций некоторых ОДУ Пенлеве приводятся далее). Эти линейные уравнения и уравнения, определяемыми "квантованиями" (8), далее предлагается, в частности, использовать как L, A пары общего вида для классификации гамильтоновых (с гамильтонианом вида (6)) ОДУ, которые были бы интегрируемы методом изомонодромных деформаций.

Начинается же основная часть статьи разделом, посвященным довольно любопытному аспекту проблемы квантования гармонического осциллятора, который был выявлен с помощью именно такой L, A пары.

2. Траектории квазиопределенности для гармонического осциллятора.

Старая квантовая теория с помощью известного правила Бора — Зоммерфельда [11, Гл.1,§15, формула (17)] среди решений уравнений гармонического осциллятора

$$q''_{tt} + q = 0 \tag{9}$$

с гамильтонианом энергии

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{10}$$

выделяла набор траекторий $q_n(t,\hbar)$ с энергиями

$$H = H(n) = n\hbar \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \tag{11}$$

Позднее, в противоположность этому набору, матричная и волновая механики среди возможных энергий (10) выделила (впервые Гейзенбергом [12, формулы (22),(23)]) другую серию энергий

$$H = E(n) = (n + \frac{1}{2})\hbar \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) \tag{12}$$

Эта серия, в частности, описывает собственные значения $E = E(n)$ ОДУ

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Phi''_{xx} + \frac{x^2}{2}\Phi = E\Phi, \tag{13}$$

которым соответствуют собственные функции

$$\Phi_n(x,\hbar) = \alpha_n H_n(\sqrt{\frac{1}{\hbar}}x)\exp(-\frac{1}{2\hbar}x^2), \tag{14}$$

где α_n — постоянные, а

$$H_n(z) = (-1)^n \exp(z^2)(\frac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2)) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

— полиномы Эрмита [11, Гл.12, §7, §8; Дополнение Б, раздел III]. Каждое из $\Phi_n(x,\hbar)$ формулой

$$\Psi(t,x,\hbar) = \Phi(x,\hbar)\exp(-i\frac{E(n)t}{\hbar})$$

задает решения уравнения Шредингера

$$i\hbar\Psi'_t = \frac{(-i\hbar)^2}{2}\Psi''_{xx} + \frac{x^2}{2}\Psi. \tag{15}$$

Но сейчас будет продемонстрировано, что серия гармоник $q_n(\hbar,t)$, определяющих энергии (11), при рассмотрении уравнения Шредингера (15) все же также выделена: для каждого натурального n будет построено гладкое решение $\Psi(\hbar,t,x,n)$ этого уравнения, которое экспоненциально убывает при $x \to \pm\infty$ и *только при* $x = q_n(\hbar,t)$ *удовлетворяет соотношению*

$$i\hbar\Psi'_x(\hbar,t,x,n) \equiv p_n(\hbar,t)\Psi(\hbar,t,x,n),$$

где $p_n(\hbar,t) = q_n(\hbar,t)'_t$ *— классический импульс, соответствующий координате* $q_n(\hbar,t)$. Иными словами, действие на функцию $\Psi(\hbar,t,x,n)$ оператора квантовомеханического импульса на траекториях $q_n(\hbar,t)$ лишь знаком отличается от результата умножения $\Psi(\hbar,t,x,n)$ на классический импульс. Данные решения $\Psi(\hbar,t,x,n)$ задаются ниже формулой (17), в которой функция $Q_-(\hbar,x)$ совпадает с правой частью равенства (14), а постоянные c_1 и c_2, которые по формуле (16) определяют соответствующую гармонику $q_n(t,\hbar)$, комплексно сопряжены и равны по модулю величине $\sqrt{n\hbar/2}$. Этот факт выводится из справедливости более общего утверждения:

для решения ОДУ (9) (c_1, c_2 — произвольные постоянные)

$$q(t) = c_1\exp(it) + c_2\exp(-it), \tag{16}$$

которому отвечают импульс $p(t) = q'(t)$ и значение $E = 2c_1c_2$ гамильтониана (10), каждое решение $Q_-(x,\hbar)$ ОДУ (13) с помощью следующих результатов действия операторов уничтожения и рождения

$$(\hbar\frac{\partial}{\partial x} + x)Q_- = -2c_2Q_+, \qquad (\hbar\frac{\partial}{\partial x} - x)Q_+ = 2c_1Q_-,$$

задает решение

$$\Psi = \exp(-\frac{iEt}{\hbar})(\exp(\frac{it}{2})Q_+ + exp(-\frac{it}{2})Q_-) \tag{17}$$

уравнения (15), удовлетворяющее равенству

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - q'(t))\Psi = 2(x - q(t))(\Psi'_t + \frac{iE}{\hbar}\Psi).$$

Замечание 3. В краткой публикации [13] отмечено, что выделенность классических траекторий $q(t)$, соответствующая старому варианту правила Бора — Зоммерфельда, наблюдается и для дискретных серий решений уравнений Шредингера (7), определяемых L, A парами и гамильтонианами $H(q,p)$ ряда автономных редукций третьего и пятого уравнений Пенлеве. Подробному описанию свойств таких серий решений уравнений (7) (соответствующих хорошо известным потенциалам Морса и Пешля — Теллера) автор намерен посвятить отдельную работу. Пока лишь подчеркнем, что важен выбор гамильтониана $H(q,p)$. Важность такого выбора ясна, например, из сравнения результатов [5], [6] с результатами [14] для четвертого, пятого и шестого уравнений Пенлеве. (О разнообразии гамильтоновых структур уравнений Пенлеве – см. [15], [16].)

Замечание 4. При $\varepsilon = 1$ "квантования" уравнений Пенлеве из статей [6]—[7], [13] получаются не только из уравнений (8), но и из уравнений $\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H(t, x, \varepsilon\frac{\partial}{\partial x})\Psi$, для которых при произвольных значениях ε и определенных редукциях уравнений Пенлеве H. Nagoya в [17] построил явные (в терминах гипергеометрических функций) решения. По мнению автора, заслуживает изучения вопрос о том, какие именно из этих явных решений при $\varepsilon = i\hbar$ выделены условием ограниченности при всех вещественных x.

Замечание 5. Для любой из классических траекторий гармонического осциллятора $g(\hbar, t)$ хорошо известно [18], [19] решение уравнения Шредингера (15), которое стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ (это решение сосредоточено в экспоненциально малой при $\hbar << 1$ окрестности кривой $x = q(\hbar, t)$), и которое при $x = q(\hbar, t)$ удовлетворяет равенству

$$-i\hbar\Psi'_x(\hbar, t, x, n) \equiv q(\hbar, t)\Psi(\hbar, t, x, n).$$

Но эти решения не выделяют какой-либо дискретный набор классических траекторий.

3. "Квантование" и "квантовая" линеаризация уравнений типа Пенлеве

К утверждению, сформулированному перед Замечанием 3, автор пришел после размышлений над "квантовой" природой L, A пары для ОДУ (a_j — произвольные постоянные)

$$\lambda''_{\tau\tau} = a_4(2\lambda^3 + \tau\lambda) + a_3(6\lambda^2 + \tau) + a_2\lambda + a_1, \tag{18}$$

указанной Гарнье [20, с.49]. Эта пара для ОДУ (18), которое в частных случаях содержит первое и второе уравнения Пенлеве, а также ОДУ, эквивалентное (9), имеет вид

$$W''_{zz} = P(\tau, z)W, \qquad W'_\tau = B(\tau, z)W'_z - \frac{1}{2}B(\tau, z)'_zW, \tag{19}$$

где $B = 1/(2(z - \lambda))$,

$$P = a_4[z^4 - \lambda^4 + \tau(z^2 - \lambda^2)] + 2a_3[2(z^3 - \lambda^3) + \tau(z - \lambda)] +$$
$$+ a_2(z^2 - \lambda^2) + 2a_1(z - \lambda) + (\lambda')^2 - \frac{\lambda'}{z - \lambda} + \frac{3}{4(z - \lambda)^2}.$$

Уравнения (19) с такими коэффициентами $B(\tau, z)$ и $P(\tau, z)$ совместны на решениях $\lambda(\tau)$ ОДУ (18).

“Квантовая” природа данной пары проявляется, в частности, в том, что замена

$$V = \sqrt{(z-\lambda)}W$$

систему (19) переводит в уравнения

$$V''_{zz} = \frac{V'_z}{z-\lambda} - [P - \frac{3}{4(z-\lambda)^2}]V, \qquad V'_\tau = \frac{V_z - \lambda' V}{2(z-\lambda)}, \tag{20}$$

совместное решение $V(\tau, z)$ которых, как нетрудно видеть, удовлетворяет тождеству

$$V'_\tau = \frac{V''_{zz}}{2} - [\frac{a_4}{2}(z^4 + \tau z^2) + a_3(2z^3 + \tau z) + \frac{a_2}{2}z^2 + a_1 z + H(\tau, \lambda(\tau), \lambda'(\tau)]V. \tag{21}$$

Здесь функция $H(\tau, \lambda(\tau), \lambda'(\tau))$ при $\lambda = \lambda(\tau)$ и $\mu = \lambda'(\tau)$ совпадает с гамильтонианом

$$H = \frac{\mu^2}{2} - \frac{a_4}{2}(\lambda^4 + \tau\lambda^2) - a_3(2\lambda^3 + \tau\lambda) - \frac{a_2}{2}\lambda^2 - a_1\lambda$$

системы (5), эквивалентной ОДУ (18). Преобразованием $\Psi = \exp\big(\int_{\tau_*}^{\tau} H(\nu, \lambda(\nu), \mu(\nu))d\nu\big)V$ тождество (21) сводится к “квантованию” ОДУ (18)

$$\Psi'_\tau = \frac{\Psi''_{zz}}{2} - [\frac{a_4}{2}(z^4 + \tau z^2) + a_3(2z^3 + \tau z) + \frac{a_2}{2}z^2 + a_1 z]\Psi,$$

не содержащему явной зависимости от $\lambda(\tau)$.

В [5], [6] и для каждого из остальных четырех канонических уравнений Пенлеве указан гамильтониан $H = H_j(t, \lambda, \mu)$ $(j = 3, \ldots, 6)$, который определяет гамильтонову систему (5), эквивалентную соответствующему ОДУ Пенлеве, и который таков, что “квантование” (8) имеет решения, задаваемые фактически L,A парами из [20]. (Для третьего и пятого уравнений Пенлеве в формулах [5], [6] содержатся неточности — легко, впрочем, исправимые.) Логичным поэтому выглядит предложение заключения статьи [7] об использовании “квантований” (8) для классификации гамильтоновых ОДУ второго порядка, обладающих L, A парами того же типа , что и ОДУ Пенлеве. Ясно, что для проведения такой классификации, которая была бы примерно столь же естественна, как уже проведенные успешные классификации разных классов интегрируемых уравнений [4], [21]—[27], нужны дополнительные, в том или ином смысле — естественные, ограничения.

В предположении, что первая компонента L, A пар классифицируемых интегрируемых гамильтоновых ОДУ определяется “квантованием” (8), ниже предлагается общий *ansatz* (33) их второй компоненты. Этот *ansatz* обобщает, в частности, вид ОДУ

$$4V''_{\tau\tau} = [a_4(z^2 + 2z\lambda + 3\lambda^2 + \tau)) + 4a_3(z + 2\lambda) + a_2]V, \tag{22}$$

которому, как следует из уравнений (20) и (21), одновременно удовлетворяет их совместное решение.

ОДУ (22) есть результат своего рода “квантовой” линеаризации ОДУ (18): при формальном “деквантовании” — замене в его правой части z на $\lambda(\tau)$ — оно переходит в уравнение, которое лишь множителем 4 в левой части отличается от ОДУ

$$\Lambda''_{\tau\tau} = [(6\lambda^2(\tau) + \tau)a_4 + 12\lambda(\tau)a_3 + a_2]\Lambda,$$

возникающего в результате линеаризации ОДУ (18).

При $a_4 = a_3 = a_1 = 0$ и $a_2 = 1$ ОДУ (18) и уравнение (22) редуцируются к линейным ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\lambda''_{\tau\tau} = \lambda, \tag{23}$$

$$4V''_{\tau\tau} = V, \tag{24}$$

а уравнение (21) к линейному уравнению

$$V'_\tau = \frac{V''_{zz}}{2} - (\frac{z^2}{2} + H)V, \tag{25}$$

где гамильтониан $H = (\mu^2(\tau) - \lambda^2(\tau))/2$ постоянен.

Из уравнений (24) и (25) следует, что их совместное решение $V(\tau, z)$ имеет вид

$$V(\tau, z) = exp(\frac{\tau}{2})A_+(z) + \exp{(-\frac{\tau}{2})}A_-(z), \tag{26}$$

где функции $A_\pm(z)$ удовлетворяют линейным ОДУ

$$\frac{(A_\pm)''_{zz}}{2} = (\frac{z^2}{2} + H \pm \frac{1}{2})A_\pm. \tag{27}$$

Учет справедливости для $V(\tau, z)$ второго из соотношений (20) позволяет уточнить, что для решения ОДУ (23) (r_1, r_2—произвольные постоянные)

$$\lambda(\tau) = r_1 \exp{(\tau)} + r_2 \exp{(-\tau)}, \tag{28}$$

при этом имеют место соотношения

$$(A_+)'_z - zA_+ = 2r_1A_-, \tag{29}$$

$$(A_-)'_z + zA_- = -2r_2A_+. \tag{30}$$

Данные соотношения возникают в итоге подстановки правой части (26) в результат умножения второго из уравнений (20) на множитель $z - \lambda(\tau)$ и последующего сравнения членов при разных степенях $\exp(\tau)$.

Для решения (28) $H = -2r_1r_2$. И легко видеть, что по любому из решений A_+ (A_-) линейного ОДУ (27) правая часть соотношения (29) (соотношения (30) удовлетворяет ОДУ (27) со знаком минус (плюс), и при $r_1 \neq 0$ ($r_2 \neq 0$) тождество (30) (тождество (29)) следует из тождества (29) (соответственно, (30)).

Справедливость утверждения, сформулированного перед Замечанием 3, теперь видна после замен

$$\tau = it, \quad z = \sqrt{\frac{1}{\hbar}}x, \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{\hbar}}q, \quad r_j = \sqrt{\frac{1}{\hbar}}c_j \quad (j = 1, 2), \quad A_\pm = Q_\pm.$$

4. “Квантовый” подход к классификации гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируемых методом изомонодромных деформаций

ОДУ второго порядка на переменную λ, которое получается из гамильтоновой системы (5) исключением импульса μ, в случае гамильтнониана (6), имеет вид

$$\lambda''_{\tau\tau} = K(\tau, \lambda)(\lambda'_\tau)^2 + L(\tau, \lambda)\lambda'_\tau + M(\tau, \lambda), \tag{31}$$

где

$$K(\tau, \lambda) = \frac{\alpha'_\lambda(\tau, \lambda)}{2\alpha(\tau, \lambda)}, \quad L(\tau, \lambda) = \frac{\alpha'_\tau(\tau, \lambda)}{\alpha(\tau, \lambda)}.$$

Замена (λ_* — постоянная)

$$\varphi = \int_{\lambda_*}^{\lambda} \frac{d\nu}{\sqrt{\alpha(\tau, \nu)}}$$

переводит его в уравнение вида

$$\varphi''_{\tau\tau} = f(\tau, \varphi). \tag{32}$$

Результат линеаризации ОДУ (31)

$$\Lambda''_{\tau\tau} = [2K(\tau, \lambda)\lambda' + L(\tau, \lambda)]\Lambda'_\tau + [K'_\lambda(\tau, \lambda)(\lambda')^2 + L'_\lambda(\tau, \lambda)\lambda' + M'_\lambda(\tau, \lambda)]\Lambda$$

в общем случае зависит не только от координат λ, но и от импульсов μ. Естественно поэтому при “квантовой” линеаризации ОДУ (31) сопоставлять ему, вообще говоря, уравнение в частных производных

$$W''_{\tau\tau} = A(\tau,z,\varphi)W''_{zz} + D(\tau,z,\varphi)(W'_z)'_\tau + [E_1(\tau,z,\varphi)\varphi' + E_0(\tau,z,\varphi)]W'_\tau + \\ +[F_1(\tau,z,\varphi)\varphi' + F_0(\tau,z,\varphi)]W'_z + [J_2(\tau,z,\varphi)(\varphi')^2 + J_1(\tau,z,\varphi)\varphi' + J_0(\tau,z,\varphi)\varphi']W, \qquad (33)$$

коэффициенты которого аналитически зависят от φ.

Для классификации гамильтоновых ОДУ (31), интегрируемых методом изомонодромных деформаций, уравнение (33) предлагается в пару к уравнению

$$W'_\tau = \frac{W''_{zz}}{2} - [G(\tau,z) + R(\tau,\varphi,\varphi')]W \qquad (34)$$

(к нему после простых замен сводится “квантование” (8) ОДУ (31), определяемое гамильтонианом (6)) наряду с требованием совместности этой пары на решениях $\varphi(\tau)$ ОДУ (32). При проведении данной классификации существенна специфика зависимости уравнения (33) от φ', так как функции φ и φ' надо рассматривать как независимые переменные. При этом заранее зависимость функции $R(\tau,\varphi,\varphi')$ от своих аргументов не предполагается аналитической (не исключается, например, что эта функция, описывается с помощью нелокальностей — интегралов по переменной τ от комбинаций аргументов).

Понятно, что вводимая в рассмотрение процедура “квантовой” линеаризации ОДУ жестко не формализована. Но вид уравнения (33) представляется достаточно общим и, в то же время, отражающем дух данной процедуры.

Вообще-то, для всех шести уравнений Пенлеве с уравнением (34) совместны, в частности, и уравнения вида (33) с $A = D = F_j = 0$ — то есть, линейные ОДУ по переменной τ. Но:

1) например, уравнению Пенлеве IV

$$\lambda''_{\tau\tau} = \frac{(\lambda'_\tau)^2}{2\lambda} + \frac{3\lambda^3}{2} + 4\tau\lambda^2 + 2(\tau^2+4b)\lambda - \frac{8a+2}{\lambda} \qquad (35)$$

(a, b — постоянные) и его гамильтониану

$$H_{IV}(\tau,\lambda,\mu) = 2\lambda\mu^2 - \frac{\lambda^3}{8} - \frac{\tau\lambda^2}{2} - \frac{(\tau^2+4b)\lambda}{2} - 2\frac{a+1/4}{\lambda} \qquad (36)$$

наряду с уравнением

$$\Phi'_\tau = 2z\Phi''_{zz} + 2\Phi'_z - (\frac{z^3}{8} + \frac{\tau z^2}{2} + \frac{(\tau^2+4b)z}{2} - 2\frac{a+1/4}{z} + H_{IV}(\tau,\lambda,\mu))\Phi, \qquad (37)$$

определяемым “квантованием” из [6], естественно сопоставить не ОДУ, а уравнение

$$\varepsilon^2\Phi''_{\tau\tau} = 2\varepsilon\Phi''_{z\tau} + \varepsilon\frac{\lambda'}{2\lambda}\Phi'_\tau - 2\frac{\lambda'}{\lambda}\Phi'_z + [\frac{z^2+3z\lambda+5\lambda^2}{2} + \tau(6\lambda+2z) + 2(\tau^2+4b) + \frac{8a+2}{\lambda z}]\Phi(\tau) \qquad (38)$$

с $\varepsilon = 2$: результат линеаризации уравнения (35)

$$\Lambda'' = \frac{\lambda'}{\lambda}\Lambda' + [-\frac{(\lambda')^2}{2\lambda^2} + \frac{9\lambda^2}{2} + 8\tau\lambda + 2(\tau^2+4b) + \frac{8a+2}{\lambda^2}]\Lambda$$

возникает именно из уравнения (38) после формальных подстановок (функция $\mu = \lambda'/(4\lambda)$ есть классический импульс гамильтониана (36))

$$z \to \lambda, \quad \varepsilon(d\Phi/d\tau) \to \Lambda', \quad d/dz \to \mu = \lambda'/(4\lambda(\tau)), \quad \Phi \to \Lambda(\tau).$$

В то же время именно этому уравнению в частных производных удовлетворяет совместное решение уравнения (37) и уравнения $2(z-\lambda)\Phi_\tau = 4z\Phi'_z - \lambda'\Phi$. Последняя же пара уравнений эквивалентна L, A паре для четвертого уравнения Пенлеве из [5], [6]. Аналогичное замечание касается уравнения Пенлеве типа тридцать четыре, связанного со вторым уравнением Пенлеве, — по поводу его “квантований” см. [7];

2) в ходе решения сформулированной задачи классификации предлагается перечислить и эволюционные уравнения (34), которые для решений ОДУ (32) (с классической точки зрения, возможно, столь же тривиальных, как ОДУ (9)), совместны с линейными уравнениями вида (33). По поводу решений эволюционных уравнений типа (8), отвечающих различным редукциям уравнений Пенлеве, см. [17], [28], [29].

Поэтому заранее слишком ограничивать вид уравнений (33) не целесообразно. Возможно, однако, что при проведении классификации, основанной на совместности на решениях ОДУ (32) L, A пары (33), (34), окажется также нужным наложение и дополнительных постулатов — например, требования справедливости на кривых $z = \varphi(\tau)$ тождества

$$V'_z \equiv [\varphi'\nu(\tau,\varphi) + \xi(\tau,\varphi)]V,$$

отражающему тот факт, что для всех шести уравнений Пенлеве решения их “квантований” из работ [5] — [7] обладают на таких кривых свойством, следующим из справедливости для данных решений соотношений типа второго из уравнений (20).

5. Заключение

В заключении отметим, что Д. П. Новиков в статье [28] описал связи L, A пар для многокомпонентных гамильтоновых систем ОДУ Шлезингера [30], с некоторыми результатами работ [31], [32]. Но естественный вопрос о принципиальной возможности использования подобных связей с какими-либо общими “квантовыми” уравнениями для классификации многокомпонентных гамильтоновых систем ОДУ, допускающих применение метода изомонодромных деформаций, еще только предстоит осмысливать.

За благожелательный интерес к результатам, представленным выше, автор благодарит Д. А. Полякова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Мир. М. 1989. 640 с.
2. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur *Method for solving sine-Gordon equation* //Phys. rev. lett. 1973. V. 30. P. 1262–1264.
3. Киселев О.М. *Асимптотики решений многомерных интегрируемых уравнений и их возмущений.* //Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 11 С. 3–149.
4. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // ДАН. 1979. Т. 247. № 5. С. 1104–1107.
5. Сулейманов Б.И. *Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, Ин-т мат. 1988. С. 93–102.
6. Сулейманов Б.И. *Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Дифф. уравн. 1994. Т. 30. № 5. С. 791–796.
7. Сулейманов Б.И. *“Квантования” второго уравнения Пенлеве и проблема эквивалентности его L, A пар* // Теор. и мат. физ. 2008. Т. 156. № 3. С. 364–378.
8. Итс А.Р., Капаев А.В., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С. *Трансцеденты Пенлеве: метод задачи Римана.* Институт компьютерных исследований; НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Москва — Ижевск. 2005. 728 с.
9. Овсеевич А.И. *Фильтр Калмана и квантование* // ДАН. 2007. Т. 414, № 6. С. 732–735.
10. Овсеевич А.И. *Фильтр Калмана и квантование*// Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44. Вып. 1. С. 59–79.
11. Мессиа А. *Квантовая механика.* Том 1. Наука. М. 1978
12. W. Heisenberg *Über quantentheoretishe Umdeutung mechanischer Bezhienungen*// Zs. Phys. 1925. V. 33. S. 879–893.

13. Сулейманов Б.И. *Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве и старая квантовая теория.*// Тезисы международной конференции, посвященной памяти И.Г.Петровского "23-е совместное заседание Московского математического общества и семинара имени И.Г.Петровского Москва, 2011. С. 356–357.
14. A. Zabrodin, A. Zotov *Quantum Painleve-Calodgero correspondence* // arXiv:1107.5672v.2 [math-ph] 26 aug 2011.
15. Цегельник В.А. *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве.* Издательский центр БГУ. Минск. 2007. 224 с.
16. Цегельник В.А. *Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве* // ТМФ. 2010. Т. 162. № 1. С. 69—74.
17. H. Nagoya *“Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painleve equations”* // J. Math. Phys. 2011. V. 52. № 1. doi: 10/1063/1.36204/2 (16 pages).
18. Бабич В.М. *Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической* // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1968. Т. 9. С. 15–63.
19. Бабич В.М., Данилов Ю.П. *Построение асимптотики решения уравнения Шредингера, сосредоточенной в окрестности классической траектории* // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1969. Т. 15. С. 47–65.
20. R. Garnier *Sur des equations differentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Ann. Sci. Ecole Normale Sup (3). 1912. T. 29. P. 1–126.
21. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения* // Фунцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16. Вып. 4. С. 86—87.
22. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем* //УМН. 1987. Т. 42. Вып. 4(256). С. 3—53.
23. A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov, A.B. Shabat *The symmetry approach to classification of integrable equations* // What is Integrability?. Berlin, Springer. 1991. P. 115—184.
24. Адлер В.Э., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к проблеме интегрируемости* //ТМФ. 2000. Т. 125. № 3. С. 355—424.
25. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* УМН. 2001. Т. 56. Вып. 1(337). С. 63—106.
26. R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* //J. Phys. A. 2006. V. 39. № 345. P. 541–623.
27. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ //J. Math. Phys. 2009. V. 50. P. 1–23.
28. Новиков Д.П. *О системе Шлезингера с матрицами размера* 2×2 *и уравнении Белавина — Полякова — Замолодчикова* // ТМФ. Т. 161 № 2. С. 191–203
29. D.P. Novikov *A monodromy problem and some functions connected with Painleve 6* // Intrenational Conference “Painleve equations and Related Topics. Proceedings of International Conference. St.-Petrsburg, Euler International Mathematical Institute. 2011. P. 118–121.
30. L. Schlesinger *Über eine Klasse von Differentialsystem belibeger Ordnung mit festen kritischen Punkten* // Reine u. Angew. Math. 1912. V. 141. P. 96–145.
31. A.A. Belavin, A.M. Poliakov, A.B. Zamolodchikov *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory* //Nucl. Phys. 1984. V. 241. P. 333–380.
32. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. *Операторная алгебра и корреляционные функции двумерной* $SU(2) \times SU(2)$*-киральной модели Весса-Зумино* //Ядер. физ. 1986. Т. 43. Вып. 4. С. 1031–1044.

Булат Ирекович Сулейманов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `bisul@mail.ru`

ABSTRACTS

Yu.Yu. Bagderina

Separation of an equation in the system of two second-order ordinary differential equations

Abstract. We consider projectable type systems of two second-order ordinary differential equations with cubic nonlinearity of the right-hand side in first derivatives. For such systems we obtain criteria of reducibility by local transformation to a system with a separating equation in one of the unknown functions. Applications of the criteria and construction of the corresponding transformation is illustrated by a number of examples.
Keywords: second-order equation, decoupling of equations, separation of an equation, submersive system

A.R. Bikmetov, R.R. Gadyl'shin

Perturbation of an elliptic operator by a narrow potential in an n-dimensional domain

Abstract. We study a discrete spectrum of an elliptic operator of the second order in an n-dimensional domain, $n \geqslant 2$, perturbed by a potential depending on two parameters, one of the parameters describes the length of the support of the potential and the inverse of the other corresponds to the magnitude of the potential. We give the relation between these parameters, under which the generalized convergence of the perturbed operator to the unperturbed one holds. Under this relation we construct the asymptotics w.r.t. small parameters of the eigenvalues of the perturbed operators.

Keywords: Elliptic operator, perturbation, matching of asymptotic expansions

D.I. Borisov, A.M. Golovina

On the resolvents of periodic operators with distant perturbations

Abstract. We consider distant perturbations for an abstract periodic operator. The unperturbed operator is introduced as a closed operator on the Sobolev space defined on a periodic domain in a multidimensional space. We impose certain condition for the unperturbed operator being a natural generalization of the ellipticity and periodicity conditions for the differential operators. The perturbations are described by abstract relatively bounded operators being localized in a certain sense. We study the case when the distance between the domains, where the perturbations are localized, increases unboundedly. The main obtained result is the explicit representation for the resolvent of the perturbed operator.

Keywords: resolvent, periodic operator, distant perturbations.

I.F. Galikhanov, V.N. Pavlenko

Periodic solutions of the telegraph equation with a discontinuous nonlinearity

Abstract. We consider telegraph equations with a variable inner energy, discontinuous by phase, and the homogeneous Dirichlet boundary condition. Question of existence of general periodic solutions in the resonant case, when the operator created by a linear part of the equation with the homogeneous Dirichlet boundary condition and the condition of periodicity has a non zero kernel, and nonlinearity appearing in the equation is limited. We obtained an existence theorem for the general periodic solution bt means of the topological method. The proof is based on the Leray-Schauder principle for convex compact mappings. The main difference from similar results of other authors is an assumption that there are breaks in the phase variable of the inner energy of the telegraph equation.

Keywords: nonlinear telegraph equation, discontinuous nonlinearity ,periodic solutions, resonance problem

R.N. Garifullin

Phase shift for the common solution of the KdV and the fifth order differential equation

Abstract. We investigate the special solution of KortewegпїЅde Vries equation. This solution describes the influence of small dispersion to a process of transformation from weak to strong discontinuities in inviscid fluid dynamics. This solution also satisfies the fifth order ordinary differential equation. We construct the asymptotic solution in the Witham zone up to a phase shift. We obtain an the equation for phase shift and, using the numerical experiments, we choose the concrete solution of this equation. This solution is a constant function. **Keywords:**phase shift, KortewegпїЅde Vries equation, nondissipative shock waves.

A.R. Danilin

Optimal boundary control in a small concave domain

Abstract. The paper is devoted to investigation of an asymptotics of a solution of the problem of optimal boundary control [1] in a small concave domain. Construction of an asymptotics of a boundary value problem for an elliptic operator in a small concave domain is considered in [2], and an asymptotics of the distributed control in a small concave domain in [3]. The Asymptotics of boundary control for an operator with a small factor at the higher derivative was considered in [4], [5]. Other problems of control by solutions of boundary value problems of the optimal control containing a small parameter are considered in [6], [7].

Keywords: asymptotic, boundary control, matching method, boundary value problems, sestems of equations in partial derivatives.

L.A. Kalyakin

Asymptotic analysis of the surfing acceleration model

Abstract. A mathematical model of acceleration of the charge particles by the electromagnetic waves is under investigation. Averaging equations, describing the resonance interaction of the particle with the electromagnetic wave are obtained. We show that each particle leaves the resonance zone under growth of time. The time length of the stay in the resonance depending on the initial data is calculated.
Keywords: Nonlinear oscillations, small parameter, perturbation, averaging, adiabatic.

F.S. Nasyrov, E.V. Yureva

On solutions of the first-order PDE with a multidimensional symmetric integral and their modelling

Abstract. The deterministic analog of the multidimensional Stratonovich integral is constructed. Method of solution of a system of equations with a multidimensional symmetric integral is elaborated. The method of characteristics for solving the Cauchy problem for first-order partial differential equations with a multidimensional symmetric integral is developed. This method reduces solving the initial-value problem of the above equations to solving a system of equations with a multidimensional symmetric integral.

Keywords: multidimensional symmetric integral, differential equations system with multidimensional symmetric integral, partial differential equations with multidimensional symmetric integral, the method of characteristics

B.I. Suleimanov

The “quantum” linearization of the Painlevé equations as a component of their $L-A$ pairs

Abstract. The procedure of the “quantum” linearization of the Hamiltonian ordinary differential equations with one degree of freedom is investigated. It is offered to be used for the classification of integrable equations of the Painleve type. For the Hamiltonian $H = (p^2 + q^2)/2$ and all natural numbers n the new solutions $\Psi(\hbar, t, x, n)$ of the non-stationary Shrödinger equation are constructed. The solutions tend to zero at $x \to \pm\infty$. On curves $x = q_n(\hbar, t)$, defined by the old Bohr- Zommerfeld rule, the solutions satisfy the relation $i\hbar\Psi'_x \equiv p_n(\hbar, t)\Psi$. In this relation $p_n(\hbar, t) = (q_n(\hbar, t))'_t$ is the classical momentum corresponding to the harmonic $q_n(\hbar, t)$.

Keywords: quantization, linearization, non-stationary Schrödinger equation, Painleve equations, isomonodromiпїЅ deformations.

CONTENTS

ДЛЯ АВТОРОВ

«Уфимский математический журнал» публикует оригинальные научные исследования преимущественно по теории функций, комплексному анализу, функциональному анализу, обыкновенным дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям в частных производных, математической физике, теории вероятностей и математической статистике. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре номера в год.

К публикации в периодическом издании «Уфимский математический журнал» принимаются статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более сорока страниц. Работы, превышающие сорок страниц, принимаются к публикации по особому решению редколлегии журнала.

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей также размещаются в свободном доступе в Интернете на сайте Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (http://matem.anrb.ru).

Публикации в журнале для авторов бесплатны.

1. Все материалы предоставляются в редакцию в двух экземплярах. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая страницы с рисунками, таблицами и списком литературы, следует пронумеровать. Авторам для окончательной правки высылается макет статьи в формате PDF или PS.

2. В отдельном файле, набранном в любом текстовом редакторе, указываются фамилии, имена, отчества всех авторов, название статьи, аннотации и ключевые слова на русском и английском языках. В этом же файле указываются ученое звание и ученая степень, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты, адрес прописки каждого из авторов. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Текст статьи должен быть подготовлен на компьютере в издательской системе LaTeX2e (стиль amsart, пакеты amsmath, amsfonts, amssymb). Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX , не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте (umj@matem.anrb.ru) или передаются в редакцию на любых электронных носителях. Официально поданным в журнал для публикации считается распечатанный и подписанный всеми авторами вариант.

В тексте статьи определяются индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся краткие, не более 20 строк, аннотации на русском и английском языках, даются списки ключевых слов на русском и английском языках. Далее в файле приводятся полностью фамилия, имя, отчество каждого из авторов и наименование учреждения, где была выполнена работа, с полным почтовым адресом.

В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами, не следует переопределять греческие буквы и другие стандартные команды. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета.

Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова Рис. с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отцентрированной надписью Табл. с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. В списке литературы должно быть не более 40 позиций.

В случае отклонения статьи авторы получают мотивированный отказ, экземпляры рукописи авторам не возвращаются.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:

ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, Россия, ул. Чернышевского, 112, к. 22.
Тел. +7 347 273 33 42.
Email: umj@matem.anrb.ru, сайт журнала: http://matem.anrb.ru

Information for authors

Requirements for preparation of manuscripts

Ufimskii Matematicheskii Zhurnal publishes original research papers on the theory of functions, complex analysis, ordinary differential equations, partial differential equations, mathematical physics, probability theory and mathematical statistics. It is intended for researchers, teachers, postgraduate and undergraduate students. The journal publishes four regular issues per each year. We publish papers written in Russian or English which generally comprise up to 40 printed pages. Paper exceeding 40 printed pages can be accepted for publication by special consideration by the Editorial board.

Papers published in the journal are also freely placed in full volume on the official site of the Institute of mathematics with computer center of RAS (http://matem.anrb.ru).

The publication of papers in the journal is free of charge.

1. All documents are presented to editorial board in duplicate. The manuscript should be carefully checked. All pages should be numbered including drawings, tables and bibliographical references. The layout of the paper in PDF or PS format will be sent to authors for the final proof-reading.
2. Manuscript should be prepared on computer using LaTeX2e publishing software (style amsart, packages amsmath, amsfonts, amssymb). Typewritten manuscripts or the ones prepared by the software, different from TeX, will not be considered. Files *.tex and *.ps (*.pdf) of the paper should be sent to the editorial board by e-mail or submitted on any electronic data carriers. A variant of the manuscript is regarded as officially filed if it is in printed form and is signed by all authors.
3. In a detached file using any text editor should be represented full names of all authors, title of the paper, annotation and key words in Russian and English. The file should also contain science title and academic degrees, positions, full names of scientific institutions, addresses with the post office code, phone numbers with city code and mobile phone numbers, e-mail addresses and registration addresses of all authors. It is necessary to indicate the author responsible for

corresponding with Editorial board.

The date of submission to editorial board of two copies of manuscript, signed by all the authors is considered as the official date of submission of the paper.

Exemplary setup of the file of the paper (*.tex)

In the text index UDC and the title of the paper is defined, then it follows initials and family names of all authors, short annotation (at most 20 lines) in Russian and English, and the list of key words in Russian and English. Further it is given full names of all authors and names of institutions, where the work was implemented with full post addresses.

It is not admissible for the annotation includes intricate formulas, references on the text of the paper or on reference list. It should be in special attention that it is undesirable to use new (defined by authors) command sequences, especially with parameters, to redefine the Greece letters and other standard commands! In general it should be used standard package means.

Black-and-white drawings should be prepared in EPS format (Encapsulated PostScript) in such a way that guarantees its adequate representation under sequel optical two time decrease. If using drawings it is necessary to attach package epsfig. Inscription under the drawing must be placed on the center and include the word Fig. with sequel number. The numbers of drawings must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to drawings should be placed in the text of the paper. The tables are accompanied by centered inscription Tab. with sequel number. The numbers of tables must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to tables should be placed in the text of the paper. Diagrams are made as drawings.

The list of references must include only the items with references in the text with the order of citing. It is inadmissible the references on unpublished papers, the results of which are used in the proofs of the paper. In the case of rejection of the paper authors receive a notice with relevant valid reasons. Manuscripts are not returned.

Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 450008, Ufa, Russian Federation, 112 Chernyshevsky Street.
Tel. +7 347 273 33 42.
http://matem.anrb.ru
Email: umj@matem.anrb.ru