ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 127-135.

УДК 517.9

"КВАНТОВАЯ" ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ КАК КОМПОНЕНТА ИХ L, A ПАР

Б.И. СУЛЕЙМАНОВ

Аннотация. Вводится в рассмотрение процедура "квантовой" линеаризации гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений с одной степенью свободы. Ее предлагается использовать, в частности, для классификации интегрируемых уравнений типа Пенлеве. При всех натуральных n с помощью данной процедуры строятся решения $\Psi(\hbar, t, x, n)$ нестационарного уравнения Шредингера для осциллятора с гамильтонианом $H = (p^2 + q^2)/2$, которые экспоненциально стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, и на кривых $x = q_n(\hbar, t)$, выделяемых старым вариантом правила Бора—Зоммерфельда, удовлетворяют соотношению $i\hbar\Psi'_x \equiv p_n(\hbar, t)\Psi$, где $p_n(\hbar, t) = (q_n(\hbar, t))'_t$ — классический импульс, соответствующий гармонике $q_n(\hbar, t)$.

Ключевые слова: квантование, линеаризация, гамильтониан, нестационарное уравнение Шредингера, уравнения Пенлеве, изомонодромные деформации.

1. Введение

Из процедур, применяемых к нелинейным уравнениям, линеаризация, пожалуй, самая распространенная. Она используются не только для работы с приближениями к решениям.

В частности, специалистам по уравнениям, интегрируемым методом обратной задачи рассеяния, известно, что эти уравнения обладают настоящими, "рабочими" L,A парами, одна компонента которых есть результат линеаризации. Например, для уравнения Кортевега — де Вриза

$$u'_t = u'''_{xxx} + uu'_x$$

эта компонента имеет вид

$$U'_t = U'''_{xxx} + uU'_x + u'_xU.$$

Вторая компонента таких пар определяется гамильтоновыми структурами уравнений, допускающих данный метод (посредством оператора рекурсии [1]).

Замечание 1. Не исключено, что все такие пары эквивалентны обычным. Во всяком случае к этому предположению подталкивает рассмотрение случая L, A пар уравнения sin-Гордон

$$u''_{xt} + \sin u = 0.$$

Его традиционно используемую пару составляют [2] системы линейных уравнений (ζ — спектральный параметр)

$$(v_1)'_x = -i\zeta v_1 + Qv_2, \quad (v_2)'_x = -Qv_1 + i\zeta v_2, \tag{1}$$

$$4i\zeta(v_1)'_t = \cos(u)v_1 + \sin(u)v_2, \quad 4i\zeta(v_2)'_t = (\sin Q)v_1 - (\cos Q)v_2, \tag{2}$$

B.I. Suleimanov, The "quantum" linearization of the Painlevé equations as a component of theier L, A pairs.

Работа поддержана ФЦП (контракт 02.740.11.0612).

Поступила 1 марта 2012 г.

где $Q = -u_x/2$. О. М. Киселев [3, §4.1.1] показал, что комбинации квадратов

$$\Phi^{\pm}(x,t,\zeta) = v_2^2(x,t,\zeta) \pm v_1^2(x,t,\zeta), \qquad \Psi(x,t,\zeta) = v_1(x,t,\zeta)v_2(x,t,\zeta)$$

решений L, A пары (1), (2) удовлетворяют двум линейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$(\Phi^+)'_x = 2i\zeta\Phi^-, \quad (\Phi^-)'_x = 2i\zeta\Phi^+ - 4Q\Psi, \quad \Psi'_x = Q\Phi^-, \tag{3}$$

$$2i\zeta(\Phi^+)'_t = \sin(u)\Psi, \quad 2i\zeta(\Phi^-)'_t = -\cos(u)\Phi^+, \quad 2i\zeta\Psi'_t = Q\sin(u)\Phi^+ \tag{4}$$

и заметил, что компонента Φ^+ решения систем (3), (4) удовлетворяет уравнению

$$(\Phi^+)_{xt} + \cos(u)\Phi^+ = 0,$$

представляющего собой результат линеаризации уравнения sin-Гордон. Этот вывод О.М. Киселева дополняется следующим наблюдением:

- компонента Φ^+ решения системы (3) удовлетворяет также уравнению

$$-4\zeta^2\Phi^+ = (\Phi^+)''_{xx} + 4Q^2\Phi^+ - 4Q\int^x Q'_x\Phi^+ dx,$$

правая часть которого есть результат действия на Φ^+ оператора рекурсии для уравнения синус–Гордон, выписанного А. В. Жибером и А. Б. Шабатом в их известной работе [4].

Наряду с результатом линеаризации гамильтоновым системам ОДУ

$$\lambda'_\tau = H'_\mu(\tau,\lambda,\mu), \quad \mu'_\tau = -H'_\lambda(\tau,\lambda,\mu), \tag{5}$$

с квадратичными по импульсу μ гамильтонианами

$$H(\tau,\lambda,\mu) = \alpha(\tau,\lambda)\mu^2 + \beta(\tau,\lambda)\mu + \gamma(\tau,\lambda), \tag{6}$$

после создания волновой квантовой механики часто сопоставляется и другое линейное дифференциальное уравнение — нестационарное уравнение Шредингера ($\hbar$ — постоянная Планка)

$$i\hbar\Psi'_\tau = H(\tau, z, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z})\Psi. \tag{7}$$

Оказывается [5] — [7], что для всех ОДУ Пенлеве, интегрируемых методом изомонодромных деформаций [8], схожие с (7) линейные уравнения (как и в [7], они далее называются “квантованиями” ОДУ второго порядка на координату $\lambda(\tau)$)

$$\Psi'_\tau = H(\tau, z, \frac{\partial}{\partial z})\Psi \tag{8}$$

можно рассматривать как компоненту соответствующей L, A пары.

Замечание 2. Подобные “квантования” возникают в задачах фильтрации диффузионных процессов [9], [10].

В данной статье вводится в рассмотрение процедура, ассоциирующая гамильтоновы ОДУ еще с одними линейными уравнениями — некоторыми “квантовыми” аналогоми результатов линеаризаций данных ОДУ (конкретные примеры подобных “квантовых” линеаризаций некоторых ОДУ Пенлеве приводятся далее). Эти линейные уравнения и уравнения, определяемыми “квантованиями” (8), далее предлагается, в частности, использовать как L, A пары общего вида для классификации гамильтоновых (с гамильтонианом вида (6)) ОДУ, которые были бы интегрируемы методом изомонодромных деформаций.

Начинается же основная часть статьи разделом, посвященным довольно любопытному аспекту проблемы квантования гармонического осциллятора, который был выявлен с помощью именно такой L, A пары.

2. Траектории квазиопределенности для гармонического осциллятора.

Старая квантовая теория с помощью известного правила Бора — Зоммерфельда [11, Гл.1,§15, формула (17)] среди решений уравнений гармонического осциллятора

$$q''_{tt} + q = 0 \tag{9}$$

с гамильтонианом энергии

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{10}$$

выделяла набор траекторий $q_n(t,\hbar)$ с энергиями

$$H = H(n) = n\hbar \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \tag{11}$$

Позднее, в противоположность этому набору, матричная и волновая механики среди возможных энергий (10) выделила (впервые Гейзенбергом [12, формулы (22),(23)]) другую серию энергий

$$H = E(n) = (n + \frac{1}{2})\hbar \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) \tag{12}$$

Эта серия, в частности, описывает собственные значения $E = E(n)$ ОДУ

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Phi''_{xx} + \frac{x^2}{2}\Phi = E\Phi, \tag{13}$$

которым соответствуют собственные функции

$$\Phi_n(x,\hbar) = \alpha_n H_n(\sqrt{\frac{1}{\hbar}}x)\exp(-\frac{1}{2\hbar}x^2), \tag{14}$$

где α_n — постоянные, а

$$H_n(z) = (-1)^n \exp(z^2)(\frac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2)) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

— полиномы Эрмита [11, Гл.12, §7, §8; Дополнение Б, раздел III]. Каждое из $\Phi_n(x,\hbar)$ формулой

$$\Psi(t,x,\hbar) = \Phi(x,\hbar)\exp(-i\frac{E(n)t}{\hbar})$$

задает решения уравнения Шредингера

$$i\hbar\Psi'_t = \frac{(-i\hbar)^2}{2}\Psi''_{xx} + \frac{x^2}{2}\Psi. \tag{15}$$

Но сейчас будет продемонстрировано, что серия гармоник $q_n(\hbar,t)$, определяющих энергии (11), при рассмотрении уравнения Шредингера (15) все же также выделена: для каждого натурального n будет построено гладкое решение $\Psi(\hbar,t,x,n)$ этого уравнения, которое экспоненциально убывает при $x \to \pm\infty$ и *только при* $x = q_n(\hbar,t)$ *удовлетворяет соотношению*

$$i\hbar\Psi'_x(\hbar,t,x,n) \equiv p_n(\hbar,t)\Psi(\hbar,t,x,n),$$

где $p_n(\hbar,t) = q_n(\hbar,t)'_t$ *— классический импульс, соответствующий координате* $q_n(\hbar,t)$. Иными словами, действие на функцию $\Psi(\hbar,t,x,n)$ оператора квантовомеханического импульса на траекториях $q_n(\hbar,t)$ лишь знаком отличается от результата умножения $\Psi(\hbar,t,x,n)$ на классический импульс. Данные решения $\Psi(\hbar,t,x,n)$ задаются ниже формулой (17), в которой функция $Q_-(\hbar,x)$ совпадает с правой частью равенства (14), а постоянные c_1 и c_2, которые по формуле (16) определяют соответствующую гармонику $q_n(t,\hbar)$, комплексно сопряжены и равны по модулю величине $\sqrt{n\hbar/2}$. Этот факт выводится из справедливости более общего утверждения:

для решения ОДУ (9) (c_1, c_2 — произвольные постоянные)

$$q(t) = c_1\exp(it) + c_2\exp(-it), \tag{16}$$

которому отвечают импульс $p(t) = q'(t)$ и значение $E = 2c_1c_2$ гамильтониана (10), каждое решение $Q_-(x,\hbar)$ ОДУ (13) с помощью следующих результатов действия операторов уничтожения и рождения

$$(\hbar\frac{\partial}{\partial x}+x)Q_- = -2c_2Q_+, \qquad (\hbar\frac{\partial}{\partial x}-x)Q_+ = 2c_1Q_-,$$

задает решение

$$\Psi = \exp(-\frac{iEt}{\hbar})(\exp(\frac{it}{2})Q_+ + exp(-\frac{it}{2})Q_-) \tag{17}$$

уравнения (15), удовлетворяющее равенству

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - q'(t))\Psi = 2(x-q(t))(\Psi'_t + \frac{iE}{\hbar}\Psi).$$

Замечание 3. В краткой публикации [13] отмечено, что выделенность классических траекторий $q(t)$, соответствующая старому варианту правила Бора — Зоммерфельда, наблюдается и для дискретных серий решений уравнений Шредингера (7), определяемых L, A парами и гамильтонианами $H(q,p)$ ряда автономных редукций третьего и пятого уравнений Пенлеве. Подробному описанию свойств таких серий решений уравнений (7) (соответствующих хорошо известным потенциалам Морса и Пешля — Теллера) автор намерен посвятить отдельную работу. Пока лишь подчеркнем, что важен выбор гамильтониана $H(q,p)$. Важность такого выбора ясна, например, из сравнения результатов [5], [6] с результатами [14] для четвертого, пятого и шестого уравнений Пенлеве. (О разнообразии гамильтоновых структур уравнений Пенлеве – см. [15], [16].)

Замечание 4. При $\varepsilon = 1$ "квантования" уравнений Пенлеве из статей [6]—[7], [13] получаются не только из уравнений (8), но и из уравнений $\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H(t,x,\varepsilon\frac{\partial}{\partial x})\Psi$, для которых при произвольных значениях ε и определенных редукциях уравнений Пенлеве H. Nagoya в [17] построил явные (в терминах гипергеометрических функций) решения. По мнению автора, заслуживает изучения вопрос о том, какие именно из этих явных решений при $\varepsilon = i\hbar$ выделены условием ограниченности при всех вещественных x.

Замечание 5. Для любой из классических траекторий гармонического осциллятора $g(\hbar,t)$ хорошо известно [18], [19] решение уравнения Шредингера (15), которое стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ (это решение сосредоточено в экспоненциально малой при $\hbar << 1$ окрестности кривой $x = q(\hbar,t)$), и которое при $x = q(\hbar,t)$ удовлетворяет равенству

$$-i\hbar\Psi'_x(\hbar,t,x,n) \equiv q(\hbar,t)\Psi(\hbar,t,x,n).$$

Но эти решения не выделяют какой-либо дискретный набор классических траекторий.

3. "Квантование" и "квантовая" линеаризация уравнений типа Пенлеве

К утверждению, сформулированному перед Замечанием 3, автор пришел после размышлений над "квантовой" природой L, A пары для ОДУ (a_j — произвольные постоянные)

$$\lambda''_{\tau\tau} = a_4(2\lambda^3+\tau\lambda) + a_3(6\lambda^2+\tau) + a_2\lambda + a_1, \tag{18}$$

указанной Гарнье [20, c.49]. Эта пара для ОДУ (18), которое в частных случаях содержит первое и второе уравнения Пенлеве, а также ОДУ, эквивалентное (9), имеет вид

$$W''_{zz} = P(\tau,z)W, \qquad W'_\tau = B(\tau,z)W'_z - \frac{1}{2}B(\tau,z)'_zW, \tag{19}$$

где $B = 1/(2(z-\lambda))$,

$$P = a_4[z^4-\lambda^4+\tau(z^2-\lambda^2)] + 2a_3[2(z^3-\lambda^3)+\tau(z-\lambda)] +$$
$$+a_2(z^2-\lambda^2) + 2a_1(z-\lambda) + (\lambda')^2 - \frac{\lambda'}{z-\lambda} + \frac{3}{4(z-\lambda)^2}.$$

Уравнения (19) с такими коэффициентами $B(\tau,z)$ и $P(\tau,z)$ совместны на решениях $\lambda(\tau)$ ОДУ (18).

“Квантовая” природа данной пары проявляется, в частности, в том, что замена

$$V=\sqrt{(z-\lambda)}W$$

систему (19) переводит в уравнения

$$V''_{zz}=\frac{V'_z}{z-\lambda}-[P-\frac{3}{4(z-\lambda)^2}]V, \qquad V'_\tau=\frac{V_z-\lambda' V}{2(z-\lambda)}, \tag{20}$$

совместное решение $V(\tau,z)$ которых, как нетрудно видеть, удовлетворяет тождеству

$$V'_\tau=\frac{V''_{zz}}{2}-[\frac{a_4}{2}(z^4+\tau z^2)+a_3(2z^3+\tau z)+\frac{a_2}{2}z^2+a_1 z+H(\tau,\lambda(\tau),\lambda'(\tau)]V. \tag{21}$$

Здесь функция $H(\tau,\lambda(\tau),\lambda'(\tau))$ при $\lambda=\lambda(\tau)$ и $\mu=\lambda'(\tau)$ совпадает с гамильтонианом

$$H=\frac{\mu^2}{2}-\frac{a_4}{2}(\lambda^4+\tau\lambda^2)-a_3(2\lambda^3+\tau\lambda)-\frac{a_2}{2}\lambda^2-a_1\lambda$$

системы (5), эквивалентной ОДУ (18). Преобразованием $\Psi=\exp\left(\int_{\tau_*}^{\tau}H(\nu,\lambda(\nu),\mu(\nu))d\nu\right)V$ тождество (21) сводится к “квантованию” ОДУ (18)

$$\Psi'_\tau=\frac{\Psi''_{zz}}{2}-[\frac{a_4}{2}(z^4+\tau z^2)+a_3(2z^3+\tau z)+\frac{a_2}{2}z^2+a_1 z]\Psi,$$

не содержащему явной зависимости от $\lambda(\tau)$.

В [5], [6] и для каждого из остальных четырех канонических уравнений Пенлеве указан гамильтониан $H=H_j(t,\lambda,\mu) \quad (j=3,\dots,6)$, который определяет гамильтонову систему (5), эквивалентную соответствующему ОДУ Пенлеве, и который таков, что “квантование” (8) имеет решения, задаваемые фактически L,A парами из [20]. (Для третьего и пятого уравнений Пенлеве в формулах [5], [6] содержатся неточности — легко, впрочем, исправимые.) Логичным поэтому выглядит предложение заключения статьи [7] об использовании “квантований” (8) для классификации гамильтоновых ОДУ второго порядка, обладающих L,A парами того же типа , что и ОДУ Пенлеве. Ясно, что для проведения такой классификации, которая была бы примерно столь же естественна, как уже проведенные успешные классификации разных классов интегрируемых уравнений [4], [21]—[27], нужны дополнительные, в том или ином смысле — естественные, ограничения.

В предположении, что первая компонента L,A пар классифицируемых интегрируемых гамильтоновых ОДУ определяется “квантованием” (8), ниже предлагается общий *ansatz* (33) их второй компоненты. Этот *ansatz* обобщает, в частности, вид ОДУ

$$4V''_{\tau\tau}=[a_4(z^2+2z\lambda+3\lambda^2+\tau))+4a_3(z+2\lambda)+a_2]V, \tag{22}$$

которому, как следует из уравнений (20) и (21), одновременно удовлетворяет их совместное решение.

ОДУ (22) есть результат своего рода “квантовой” линеаризации ОДУ (18): при формальном “деквантовании” — замене в его правой части z на $\lambda(\tau)$ — оно переходит в уравнение, которое лишь множителем 4 в левой части отличается от ОДУ

$$\Lambda''_{\tau\tau}=[(6\lambda^2(\tau)+\tau)a_4+12\lambda(\tau)a_3+a_2]\Lambda,$$

возникающего в результате линеаризации ОДУ (18).

При $a_4=a_3=a_1=0$ и $a_2=1$ ОДУ (18) и уравнение (22) редуцируются к линейным ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\lambda''_{\tau\tau}=\lambda, \tag{23}$$

$$4V''_{\tau\tau}=V, \tag{24}$$

а уравнение (21) к линейному уравнению

$$V'_\tau = \frac{V''_{zz}}{2} - (\frac{z^2}{2} + H)V, \tag{25}$$

где гамильтониан $H = (\mu^2(\tau) - \lambda^2(\tau))/2$ постоянен.

Из уравнений (24) и (25) следует, что их совместное решение $V(\tau, z)$ имеет вид

$$V(\tau, z) = exp(\frac{\tau}{2})A_+(z) + \exp(-\frac{\tau}{2})A_-(z), \tag{26}$$

где функции $A_\pm(z)$ удовлетворяют линейным ОДУ

$$\frac{(A_\pm)''_{zz}}{2} = (\frac{z^2}{2} + H \pm \frac{1}{2})A_\pm. \tag{27}$$

Учет справедливости для $V(\tau, z)$ второго из соотношений (20) позволяет уточнить, что для решения ОДУ (23) (r_1, r_2—произвольные постоянные)

$$\lambda(\tau) = r_1 \exp(\tau) + r_2 \exp(-\tau), \tag{28}$$

при этом имеют место соотношения

$$(A_+)'_z - zA_+ = 2r_1 A_-, \tag{29}$$

$$(A_-)'_z + zA_- = -2r_2 A_+. \tag{30}$$

Данные соотношения возникают в итоге подстановки правой части (26) в результат умножения второго из уравнений (20) на множитель $z - \lambda(\tau)$ и последующего сравнения членов при разных степенях $\exp(\tau)$.

Для решения (28) $H = -2r_1r_2$. И легко видеть, что по любому из решений A_+ (A_-) линейного ОДУ (27) правая часть соотношения (29) (соотношения (30) удовлетворяет ОДУ (27) со знаком минус (плюс), и при $r_1 \neq 0$ ($r_2 \neq 0$) тождество (30) (тождество (29)) следует из тождества (29) (соответственно, (30)).

Справедливость утверждения, сформулированного перед Замечанием 3, теперь видна после замен

$$\tau = it, \quad z = \sqrt{\frac{1}{\hbar}}x, \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{\hbar}}q, \quad r_j = \sqrt{\frac{1}{\hbar}}c_j \quad (j = 1, 2), \quad A_\pm = Q_\pm.$$

4. "Квантовый" подход к классификации гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируемых методом изомонодромных деформаций

ОДУ второго порядка на переменную λ, которое получается из гамильтоновой системы (5) исключением импульса μ, в случае гамильтнониана (6), имеет вид

$$\lambda''_{\tau\tau} = K(\tau, \lambda)(\lambda'_\tau)^2 + L(\tau, \lambda)\lambda'_\tau + M(\tau, \lambda), \tag{31}$$

где

$$K(\tau, \lambda) = \frac{\alpha'_\lambda(\tau, \lambda)}{2\alpha(\tau, \lambda)}, \quad L(\tau, \lambda) = \frac{\alpha'_\tau(\tau, \lambda)}{\alpha(\tau, \lambda)}.$$

Замена (λ_* — постоянная)

$$\varphi = \int_{\lambda_*}^{\lambda} \frac{d\nu}{\sqrt{\alpha(\tau, \nu)}}$$

переводит его в уравнение вида

$$\varphi''_{\tau\tau} = f(\tau, \varphi). \tag{32}$$

Результат линеаризации ОДУ (31)

$$\Lambda''_{\tau\tau} = [2K(\tau, \lambda)\lambda' + L(\tau, \lambda)]\Lambda'_\tau + [K'_\lambda(\tau, \lambda)(\lambda')^2 + L'_\lambda(\tau, \lambda)\lambda' + M'_\lambda(\tau, \lambda)]\Lambda$$

в общем случае зависит не только от координат λ, но и от импульсов μ. Естественно поэтому при “квантовой” линеаризации ОДУ (31) сопоставлять ему, вообще говоря, уравнение в частных производных

$$W''_{\tau\tau} = A(\tau, z, \varphi)W''_{zz} + D(\tau, z, \varphi)(W'_z)'_\tau + [E_1(\tau, z, \varphi)\varphi' + E_0(\tau, z, \varphi)]W'_\tau + \\ + [F_1(\tau, z, \varphi)\varphi' + F_0(\tau, z, \varphi)]W'_z + [J_2(\tau, z, \varphi)(\varphi')^2 + J_1(\tau, z, \varphi)\varphi' + J_0(\tau, z, \varphi)\varphi']W, \quad (33)$$

коэффициенты которого аналитически зависят от φ.

Для классификации гамильтоновых ОДУ (31), интегрируемых методом изомонодромных деформаций, уравнение (33) предлагается в пару к уравнению

$$W'_\tau = \frac{W''_{zz}}{2} - [G(\tau, z) + R(\tau, \varphi, \varphi')]W \quad (34)$$

(к нему после простых замен сводится “квантование” (8) ОДУ (31), определяемое гамильтонианом (6)) наряду с требованием совместности этой пары на решениях $\varphi(\tau)$ ОДУ (32). При проведении данной классификации существенна специфика зависимости уравнения (33) от φ', так как функции φ и φ' надо рассматривать как независимые переменные. При этом заранее зависимость функции $R(\tau, \varphi, \varphi')$ от своих аргументов не предполагается аналитической (не исключается, например, что эта функция, описывается с помощью нелокальностей — интегралов по переменной τ от комбинаций аргументов).

Понятно, что вводимая в рассмотрение процедура “квантовой” линеаризации ОДУ жестко не формализована. Но вид уравнения (33) представляется достаточно общим и, в то же время, отражающем дух данной процедуры.

Вообще-то, для всех шести уравнений Пенлеве с уравнением (34) совместны, в частности, и уравнения вида (33) с $A = D = F_j = 0$ — то есть, линейные ОДУ по переменной τ. Но:

1) например, уравнению Пенлеве IV

$$\lambda''_{\tau\tau} = \frac{(\lambda'_\tau)^2}{2\lambda} + \frac{3\lambda^3}{2} + 4\tau\lambda^2 + 2(\tau^2 + 4b)\lambda - \frac{8a + 2}{\lambda} \quad (35)$$

(a, b — постоянные) и его гамильтониану

$$H_{IV}(\tau, \lambda, \mu) = 2\lambda\mu^2 - \frac{\lambda^3}{8} - \frac{\tau\lambda^2}{2} - \frac{(\tau^2 + 4b)\lambda}{2} - 2\frac{a + 1/4}{\lambda} \quad (36)$$

наряду с уравнением

$$\Phi'_\tau = 2z\Phi''_{zz} + 2\Phi'_z - (\frac{z^3}{8} + \frac{\tau z^2}{2} + \frac{(\tau^2 + 4b)z}{2} - 2\frac{a + 1/4}{z} + H_{IV}(\tau, \lambda, \mu))\Phi, \quad (37)$$

определяемым “квантованием” из [6], естественно сопоставить не ОДУ, а уравнение

$$\varepsilon^2\Phi''_{\tau\tau} = 2\varepsilon\Phi''_{z\tau} + \varepsilon\frac{\lambda'}{2\lambda}\Phi'_\tau - 2\frac{\lambda'}{\lambda}\Phi'_z + [\frac{z^2 + 3z\lambda + 5\lambda^2}{2} + \tau(6\lambda + 2z) + 2(\tau^2 + 4b) + \frac{8a + 2}{\lambda z}]\Phi(\tau) \quad (38)$$

с $\varepsilon = 2$: результат линеаризации уравнения (35)

$$\Lambda'' = \frac{\lambda'}{\lambda}\Lambda' + [-\frac{(\lambda')^2}{2\lambda^2} + \frac{9\lambda^2}{2} + 8\tau\lambda + 2(\tau^2 + 4b) + \frac{8a + 2}{\lambda^2}]\Lambda$$

возникает именно из уравнения (38) после формальных подстановок (функция $\mu = \lambda'/(4\lambda)$ есть классический импульс гамильтониана (36))

$$z \to \lambda, \quad \varepsilon(d\Phi/d\tau) \to \Lambda', \quad d/dz \to \mu = \lambda'/(4\lambda(\tau)), \quad \Phi \to \Lambda(\tau).$$

В то же время именно этому уравнению в частных производных удовлетворяет совместное решение уравнения (37) и уравнения $2(z - \lambda)\Phi_\tau = 4z\Phi'_z - \lambda'\Phi$. Последняя же пара уравнений эквивалентна L, A паре для четвертого уравнения Пенлеве из [5], [6]. Аналогичное замечание касается уравнения Пенлеве типа тридцать четыре, связанного со вторым уравнением Пенлеве, — по поводу его “квантований” см. [7];

2) в ходе решения сформулированной задачи классификации предлагается перечислить и эволюционные уравнения (34), которые для решений ОДУ (32) (с классической точки зрения, возможно, столь же тривиальных, как ОДУ (9)), совместны с линейными уравнениями вида (33). По поводу решений эволюционных уравнений типа (8), отвечающих различным редукциям уравнений Пенлеве, см. [17], [28], [29].

Поэтому заранее слишком ограничивать вид уравнений (33) не целесообразно. Возможно, однако, что при проведении классификации, основанной на совместности на решениях ОДУ (32) L, A пары (33), (34), окажется также нужным наложение и дополнительных постулатов — например, требования справедливости на кривых $z = \varphi(\tau)$ тождества

$$V'_z \equiv [\varphi'\nu(\tau, \varphi) + \xi(\tau, \varphi)]V,$$

отражающему тот факт, что для всех шести уравнений Пенлеве решения их "квантований" из работ [5] — [7] обладают на таких кривых свойством, следующим из справедливости для данных решений соотношений типа второго из уравнений (20).

5. Заключение

В заключении отметим, что Д. П. Новиков в статье [28] описал связи L, A пар для многокомпонентных гамильтоновых систем ОДУ Шлезингера [30], с некоторыми результатами работ [31], [32]. Но естественный вопрос о принципиальной возможности использования подобных связей с какими-либо общими "квантовыми" уравнениями для классификации многокомпонентных гамильтоновых систем ОДУ, допускающих применение метода изомонодромных деформаций, еще только предстоит осмысливать.

За благожелательный интерес к результатам, представленным выше, автор благодарит Д. А. Полякова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Мир. М. 1989. 640 с.
2. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur *Method for solving sine-Gordon equation* //Phys. rev. lett. 1973. V. 30. P. 1262–1264.
3. Киселев О.М. *Асимптотики решений многомерных интегрируемых уравнений и их возмущений.* //Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 11 С. 3–149.
4. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // ДАН. 1979. Т. 247. № 5. С. 1104–1107.
5. Сулейманов Б.И. *Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, Ин-т мат. 1988. С. 93–102.
6. Сулейманов Б.И. *Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Дифф. уравн. 1994. Т. 30. № 5. С. 791–796.
7. Сулейманов Б.И. *"Квантования" второго уравнения Пенлеве и проблема эквивалентности его L, A пар* // Теор. и мат. физ. 2008. Т. 156. № 3. С. 364–378.
8. Итс А.Р., Капаев А.В., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С. *Трансцендphysикенты Пенлеве: метод задачи Римана.* Институт компьютерных исследований; НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Москва — Ижевск. 2005. 728 с.
9. Овсеевич А.И. *Фильтр Калмана и квантование* // ДАН. 2007. Т. 414, № 6. С. 732–735.
10. Овсеевич А.И. *Фильтр Калмана и квантование*// Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44. Вып. 1. С. 59–79.
11. Мессиа А. *Квантовая механика.* Том 1. Наука. М. 1978
12. W. Heisenberg *Über quantentheoretishe Umdeutung mechanischer Bezhienungen*// Zs. Phys. 1925. V. 33. S. 879–893.

13. Сулейманов Б.И. *Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве и старая квантовая теория.*// Тезисы международной конференции, посвященной памяти И.Г.Петровского "23-е совместное заседание Московского математического общества и семинара имени И.Г.Петровского Москва, 2011. С. 356–357.
14. A. Zabrodin, A. Zotov *Quantum Painleve-Calodgero correspondence* // arXiv:1107.5672v.2 [math-ph] 26 aug 2011.
15. Цегельник В.А. *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве.* Издательский центр БГУ. Минск. 2007. 224 с.
16. Цегельник В.А. *Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве* // ТМФ. 2010. Т. 162. № 1. С. 69—74.
17. H. Nagoya *"Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painleve equations"* // J. Math. Phys. 2011. V. 52. № 1. doi: 10/1063/1.36204/2 (16 pages).
18. Бабич В.М. *Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической* // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1968. Т. 9. С. 15–63.
19. Бабич В.М., Данилов Ю.П. *Построение асимптотики решения уравнения Шредингера, сосредоточенной в окрестности классической траектории* // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1969. Т. 15. С. 47–65.
20. R. Garnier *Sur des equations differentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Ann. Sci. Ecole Normale Sup (3). 1912. T. 29. P. 1–126.
21. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения* // Фунцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16. Вып. 4. С. 86—87.
22. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем* //УМН. 1987. Т. 42. Вып. 4(256). С. 3—53.
23. A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov, A.B. Shabat *The symmetry approach to classification of integrable equations* // What is Integrability?. Berlin, Springer. 1991. P. 115—184.
24. Адлер В.Э., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к проблеме интегрируемости* //ТМФ. 2000. Т. 125. № 3. С. 355—424.
25. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* УМН. 2001. Т. 56. Вып. 1(337). С. 63—106.
26. R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* //J. Phys. A. 2006. V. 39. № 345. P. 541–623.
27. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ //J. Math. Phys. 2009. V. 50. P. 1–23.
28. Новиков Д.П. *О системе Шлезингера с матрицами размера* 2×2 *и уравнении Белавина — Полякова — Замолодчикова* // ТМФ. Т. 161 № 2. С. 191–203
29. D.P. Novikov *A monodromy problem and some functions connected with Painleve 6* // Intrenational Conference "Painleve equations and Related Topics. Proceedings of International Conference. St.-Petrsburg, Euler International Mathematical Institute. 2011. P. 118–121.
30. L. Schlesinger *Über eine Klasse von Differentialsystem belibeger Ordnung mit festen kritischen Punkten* // Reine u. Angew. Math. 1912. V. 141. P. 96–145.
31. A.A. Belavin, A.M. Poliakov, A.B. Zamolodchikov *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory* //Nucl. Phys. 1984. V. 241. P. 333–380.
32. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. *Операторная алгебра и корреляционные функции двумерной* $SU(2) \times SU(2)$*-киральной модели Весса-Зумино* //Ядер. физ. 1986. Т. 43. Вып. 4. С. 1031–1044.

Булат Ирекович Сулейманов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: bisul@mail.ru