ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 114-126.

УДК 519.2

О ПОСТРОЕНИИ И МОДЕЛИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМ СИММЕТРИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Ф.С. НАСЫРОВ, Е.В. ЮРЬЕВА

Аннотация. Построен детерминированный аналог многомерного стохастического интеграла Стратоновича. Разработан метод решения систем уравнений с многомерными симметричными интегралами и систем стохастических дифференциальных уравнений с многомерным винеровским процессом. Для задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка с многомерным симметричным интегралом построен метод характеристик, сводящий решение таких задач к решению систем уравнений с симметричными интегралами.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, многомерные симметричные интегралы, системы уравнений с многомерными симметричными интегралами, дифференциальные уравнения в частных производных с многомерным симметричным интегралом, метод характеристик.

1. Введение

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (F_t), P)$ – вероятностное пространство с фильтрацией (F_t), на котором задан стандартный d-мерный винеровский процесс $\overline{W}(t,\omega) = (W_1(t,\omega), \dots, W_d(t,\omega))$. В дальнейшем всюду, как правило, переменная $\omega \in \Omega$ опускается.

Пусть $\overline{\eta}(t,\bar{x}) = (\eta_1(t,\bar{x}), \dots, \eta_n(t,\bar{x}))$ – диффузионный процесс, являющийся решением системы уравнений Ито:

$$\begin{cases} \eta_i(t,\bar{x}) = x_i + \displaystyle\int_0^t \Bigg[B^i(s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \sigma^{kj}(s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) \left(\sigma^{ij}\right)'_{x_k}(s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) \Bigg] ds + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma^{ij}(s, \overline{\eta}(s,\bar{x})) dW_j(s), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \tag{1}$$

где последние d интегралов в каждом уравнении системы (1) есть стохастические интегралы Ито по многомерному винеровскому процессу $\overline{W}(t)$, а переменная $\bar{x} \in R^n$ указывает на зависимость процесса $\overline{\eta}(t,\bar{x})$ от начальных условий $\eta_i(0,\bar{x}) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Известно, что между решениями обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений Ито и дифференциальных уравнений Ито в частных производных существует тесная связь (см., например, [6, 12, 14]). Пусть функция $u = u(t,\bar{x}) : [0,T] \times R^n \to R$ при каждом t принадлежит классу функций $C^m(R^n)$, непрерывных по совокупности переменных и имеющих непрерывные (относительно $\bar{x}$) производные по $\bar{x}$ до некоторого порядка

F.S. Nasyrov, E.V. Yureva, On solutions of the first-order PDE with a multidimensional symmetric integral and their modelling.

Поступила 12 апреля 2012 г.

m. Функцию, при каждом t обратную по $\bar{x}$ к диффузионному процессу $\overline{\eta}(t,\bar{x})$, обозначим $\overline{\eta}^{\,-1}(t,\bar{x})$. Зафиксируем величину $K>0$ и целое $m\geq 3$.

Теорема (**[6, 12]**). *Пусть при каждом $\bar{x}$ коэффициенты $B^i(s,\bar{x})$, $\sigma^{ij}(s,\bar{x})$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,d$, измеримы по (t,ω) и согласованы с семейством σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$, $t\in[0,T]$, сами функции $B^i(s,\bar{x})$, $\sigma^{ij}(s,\bar{x})$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,d$, и их производные по $\bar{x}$ до порядка m по абсолютной величине не превосходят K. Тогда при всех ω из некоторого подмножества вероятности 1 и каждом $t\in[0,T]$ отображение $\overline{\eta}(t,\cdot):\bar{x}\in R^n\to\overline{\eta}(t,\bar{x})\in R^n$ является диффеоморфизмом класса $C^{m-1}(R^n)$, причем каждая координата обратного отображения $\overline{\eta}^{\,-1}(t,\bar{x})$, $i=1,2,\ldots,n$, является решением соответствующей задачи Коши*

$$
\begin{gathered}
d_t u(t,\bar{x})=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(t,\bar{x})\sigma^{kj}(t,\bar{x})u''_{x_i x_k}(t,\bar{x})+\right.\\
\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{kj}(t,\bar{x})\left(\sigma^{ij}\right)'_{x_k}(t,\bar{x})+B^i(t,\bar{x})\right)u'_{x_i}(t,\bar{x})\right]dt-\\
-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(t,\bar{x})u'_{x_i}(t,\bar{x})dW_j(t)
\end{gathered}
\tag{2}
$$

с начальным условием $u(0,\bar{x})=x_i$, где i – номер координаты вектора $\bar{x}\in R^n$.

Здесь и ниже символом $d_t u(t,\bar{x})$ обозначается дифференциал по переменной t в отличие от полного дифференциала $du(t,\bar{x})$.

Отметим, что стохастическое дифференциальное уравнение Ито (2) является уравнением второго порядка параболического типа, но при записи этого уравнения с интегралами Стратоновича мы получим уравнение в частных производных первого порядка.

Приведем необходимые обозначения и определения, используемые в работе. Пусть $X(s)$, $s\in[0,T]$, – произвольная непрерывная функция, $f(s,v)$, $s\in[0,T]$, $v\in R$, — детерминированная функция, измеримая по s и v. Рассмотрим разбиения T_n, $n\in N$, отрезка $[0,T]$: $T_n=\{t_k^{(n)}\}$, $0=t_0^{(n)}\leq t_1^{(n)}\leq\ldots\leq t_k^{(n)}\leq\ldots\leq t_{m_n}^{(n)}=T$, $n\in N$, такие, что $T_n\subset T_{n+1}$, $n\in N$, и $\lambda_n=\max\limits_k\left|t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right|\to 0$ при $n\to\infty$. Через $X^{(n)}(s), s\in[0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Положим $\Delta t_k^{(n)}=t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right]=\left[t_{k-1}^{(n)},t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)}=X(t_k^{(n)})-X(t_{k-1}^{(n)})$.

Симметричным интегралом по непрерывной функции $X(s)$ называется

$$
\int_0^t f(s,X(s))*dX(s)\overset{def}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_k\frac{1}{\Delta t_k^{(n)}}\int_{[\Delta t_k^{(n)}]}f(s,X^{(n)}(s))ds\,\Delta X_k^{(n)},
$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n\in N$. Достаточным условием существования симметричного интеграла является так называемое условие (S) (см. [7, 8]). В случае, когда $X(t)$ — траектория стандартного винеровского процесса, симметричный интеграл с вероятностью 1 совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича.

В работах [7, 8] были исследованы детерминированные аналоги стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом, найден метод их решения путем сведения к решению конечных цепочек обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе Захаровой О. В. [5] найден метод решения определенного класса систем стохастических дифференциальных уравнений с симметричными интегралами путем сведения решения последних к решению систем уравнений в полных дифференциалах. В работе [15] обсуждаются математические модели, содержащие переход от обыкновенных уравнений

Ито к уравнениям в частных производных, а в статьях [3, 4] выявлена связь между решениями детерминированных аналогов стохастических дифференциальных уравнений с одномерным симметричным интегралом и уравнениями в частных производных с одномерным симметричным интегралом. В монографии [9] приведены основные сведения теории симметричных интегралов.

В настоящей работе продолжены исследования в этом направлении. Во-первых, построены многомерные симметричные интегралы по произвольным непрерывным функциям, которые являются обобщениями стохастических интегралов Стратоновича по многомерному винеровскому процессу. Во-вторых, метод решения уравнений с одномерным симметричным интегралом и соответствующих стохастических дифференциальных уравнений, найденный в работах [7, 8], развит для решения систем уравнений с многомерными симметричными интегралами. Наконец, построен метод характеристик для решения дифференциальных уравнений в частных производных с многомерными симметричными интегралами, который, в частности, обобщает приведенный выше результат Крылова Н. В., Розовского Б. Л. (см. [6, 12]), при этом: (a) вместо многомерного винеровского процесса $\overline{W}(t)$ берется произвольная непрерывная вектор-функция $\overline{X}(t)$, все компоненты которой имеют неограниченную вариацию на любом отрезке; (b) функция $\overline{\eta}(t,\bar{x})$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами уже не является диффузионным процессом, а сами многомерные симметричные интегралы являются обобщением стохастического интеграла Стратоновича (см. [7, 8]).

Таким образом, в статье показано, что часть результатов, ранее справедливых в рамках стохастического анализа, имеет гораздо более общий характер и может быть сформулирована для некоторых классов уравнений с симметричными интегралами.

2. Основные результаты

2.1. Пусть $\overline{X}(s) = (X_1(s),\ldots,X_d(s))$, $s \in [0,T]$, — произвольная непрерывная вектор-функция и даны функции $\sigma^1(s,\overline{X}(s)),...,\sigma^d(s,\overline{X}(s))$. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0,T]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} \le ... \le t_k^{(n)} \le ... \le t_{m_n}^{(n)} = T$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max_k \left|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $X_k^{(n)}(s)$, $s \in [0,T]$, $k = 1,2,\ldots,d$, ломаные, построенные по функциям $X_k(s)$ по последовательности сгущающихся разбиений T_n.

Симметричным интегралом по функции $\overline{\sigma}(s,\overline{X}(s)) = (\sigma^1(s,\overline{X}(s)),\ldots,\sigma^d(s,\overline{X}(s)))$ относительно непрерывной функции $\overline{X}(s)$ называется

$$\int_0^t \overline{\sigma}(s,\overline{X}(s)) * d\overline{X}(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma^k(s, X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s)) \left(X_k^{(n)}\right)'(s)ds, \tag{3}$$

если предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$.

Наряду с обозначением (3) будем использовать следующее:

$$\int_0^t \overline{\sigma}(s,\overline{X}(s)) * d\overline{X}(s) \equiv \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma^k(s, X_1(s),\ldots,X_d(s)) * dX_k(s). \tag{4}$$

Пусть $f(s,\bar{v}) = f(s,v_1,\ldots,v_d)$ — непрерывно дифференцируемая функция, тогда ее *дифференциалом с симметричными интегралами* называется

$$f(t,\overline{X}(t)) - f(0,\overline{X}(0)) = \int_0^t grad_{\bar{v}} f(s,\overline{X}(s)) * d\overline{X}(s) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,\overline{X}(s))ds, \tag{5}$$

где $grad_{\bar{v}} f(s,\bar{v}) = (f'_{v_1},\ldots,f'_{v_d})$.

Замечание 1. Формула (5) является детерминированным аналогом стохастического дифференциала Ито с интегралами Стратоновича. Наряду с записью дифференциала в виде

(5) мы будем применять краткую запись дифференциала

$$df(t,\overline{X}(t)) = grad_{\bar{v}} f(t,\overline{X}(t)) * d\overline{X}(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(t,\overline{X}(t))dt.$$

Покажем, что для непрерывно дифференцируемой функции $f(s,\bar{v})$ дифференциал с симметричными интегралами существует.

Лемма 1. *Пусть $\overline{X}(s) = (X_1(s),\ldots,X_d(s))$, $s \in [0,T]$, — произвольная непрерывная вектор-функция, а функция $f(s,\bar{v})$, $s \in [0,T]$, $\bar{v} \in R^d$, имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем своим переменным. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ существует симметричный интеграл $\int_0^t grad_{\bar{v}} f(s,\overline{X}(s)) * d\overline{X}(s)$ и справедлива формула* (5).

Доказательство. Пусть $X_k^{(n)}(s)$, $s \in [0,T]$, $k = 1,2,\ldots,d$, — ломаные, построенные по функциям $X_k(s)$, $k = 1,2,\ldots,d$, по последовательности сгущающихся разбиений T_n, $n \in N$, отрезка $[0,T]$. Рассмотрим выражение

$$\begin{gathered} f(t,X_1^{(n)}(t),\ldots,X_d^{(n)}(t)) - f(0,X_1^{(n)}(0),\ldots,X_d^{(n)}(0)) = \\ = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial}{\partial v_k} f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s)) \left(X_k^{(n)}\right)'(s)ds + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s))ds, \end{gathered} \tag{6}$$

которое получено путем дифференцирования, а затем интегрирования функции $f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s))$ по переменной $s \in [0,t]$. Заметим, что в силу непрерывности функции $f(s,v_1,\ldots,v_d)$ предел левой части выражения (6) при $n \to \infty$ существует и равен

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} [f(t,X_1^{(n)}(t),\ldots,X_d^{(n)}(t)) - f(0,X_1^{(n)}(0),\ldots,X_d^{(n)}(0))] = \\ = f(t,X_1(t),\ldots,X_d(t)) - f(0,X_1(0),\ldots,X_d(0)). \end{gathered}$$

Точно также, ввиду непрерывности частной производной функции $f(s,v_1,\ldots,v_d)$ по s, существует предел последнего слагаемого в правой части равенства (6):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,X_1^{(n)}(s),\ldots,X_d^{(n)}(s))ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,X_1(s),\ldots,X_d(s))ds,$$

откуда следует существование предела (3).

Замечание 2. Лемма 1 не гарантирует существования предела каждого слагаемого в выражении (4), но обозначение в правой части выражения (4) соответствует принятой в стохастическом анализе системе обозначений.

Замечание 3. Если $\overline{X}(s)$, $s \in [0,T]$, есть многомерный винеровский процесс, то каждое слагаемое в формуле (3) из определения симметричного интеграла по функции $\overline{X}(s)$ имеет смысл и с вероятностью 1 совпадает с соответствующим стохастическим интегралом Стратоновича.

2.2. Введем детерминированные аналоги систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Стратоновича по многомерным непрерывным функциям.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами:

$$\begin{cases} \eta_i(t) = \eta_i^0 + \displaystyle\int_0^t B^i(s,\overline{\eta}(s),\overline{X}(s))ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s,\overline{\eta}(s),\overline{X}(s)) * dX_j(s), \\ \qquad i = 1,2,\ldots,n, \end{cases} \tag{7}$$

где $\overline{X}(s) = (X_1(s),\ldots,X_d(s))$ — непрерывная вектор-функция.

Решением системы уравнений (7) будем называть набор функций вида $\eta_i(t) = \varphi_i(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такой, что:

1. функции $\varphi_i(t, \bar{v})$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам;
2. правые части системы (7) при подстановке функций $\varphi_i(t, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, образуют дифференциалы с симметричными интегралами некоторых функций $\psi_i(t, \overline{X}(t))$;
3. дифференциалы с симметричными интегралами $d\varphi_i(t, \overline{X}(t))$ и $d\psi_i(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, правой и левой частей системы (7) совпадают.

Обозначим $\overline{X}_{[k]}(t, v_k) = (X_1(t), \ldots, X_{k-1}(t), v_k, X_{k+1}(t), \ldots, X_d(t))$, где индекс $[k]$ указывает, что вместо k-той координаты $X_k(t)$ вектора $\overline{X}(t)$ стоит переменная v_k. Покажем, что решение систем уравнений с многомерными симметричными интегралами сводится к решению конечных цепочек систем обыкновенных дифференциальных уравнений (в дальнейшем — ОДУ).

Теорема 1. *Пусть фиксирована вектор-функция $\overline{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_d(t))$, составляющие которой являются непрерывными функциями, а функции $\sigma^{ik}(t, \overline{\eta}, \bar{v})$, $k = 1, 2, \ldots, d$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $B^i(t, \overline{\eta}, \bar{v})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы. Предположим, что непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам функции $\overline{\varphi}(t, \bar{v})$, $t \in [0, T]$, $\bar{v} \in R^d$, удовлетворяют конечной цепочке ОДУ:*

$$\left\{ (\varphi_i)'_{v_1} (t, \overline{X}_{[1]}(t, v_1)) = \sigma^{i1}(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}_{[1]}(t, v_1)), \overline{X}_{[1]}(t, v_1)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \right. \tag{8}$$

$$\cdots$$

$$\left\{ (\varphi_i)'_{v_k} (t, \overline{X}_{[k]}(t, v_k)) = \sigma^{ik}(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}_{[k]}(t, v_k)), \overline{X}_{[k]}(t, v_k)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \right. \tag{9}$$

$$\cdots$$

$$\left\{ (\varphi_i)'_{v_d} (t, \overline{X}_{[d]}(t, v_d)) = \sigma^{id}(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}_{[d]}(t, v_d)), \overline{X}_{[d]}(t, v_d)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \right. \tag{10}$$

$$\begin{cases} (\varphi_i)'_t (t, \bar{v})\big|_{\{v_j = X_j(t), j=1,2,\ldots,d\}} = B^i(t, \overline{\varphi}(t, \overline{X}(t)), \overline{X}(t)), \\ \qquad\qquad\qquad \varphi_i(0, \overline{X}(0)) = \eta_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда функция $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, $\overline{X}(t) \in R^d$, есть решение задачи Коши (7).

Доказательство. Тот факт, что решение $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$ цепочки систем ОДУ (8)–(11) дает нам решение исходной системы уравнений (7), проверяется путем подстановки функции $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$ в систему (7) и применением формулы дифференциала с симметричными интегралами (5).

Замечание 4. Покажем, как с помощью цепочки систем ОДУ (8)–(11) построить решение системы уравнений (7). При этом будем предполагать, что каждая из рассматриваемых ниже систем ОДУ, построенных с помощью цепочки (8)–(11), имеет общее решение.

Пусть ${}^r\overline{X}(t) = (X_r(t), X_{r+1}(t), \ldots, X_d(t))$ — вектор-функция, образованная из $\overline{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_d(t))$ отбрасыванием первых $r - 1$ координат, $r = 1, 2, \ldots, d$.

Решая систему ОДУ (8) относительно переменной v_1 и считая другие переменные параметрами, находим функции $\varphi_i(t, \overline{X}(t))$ в виде

$$\varphi_i(t, \overline{X}(t)) = \varphi_i^{*1}(t, X_1(t), \overline{C}^1(t, {}^2\overline{X}(t)))\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

зависящей от произвольной вектор-функции $\overline{C}^1(t, {}^2\overline{X}(t)) = (C_1^1(t, {}^2\overline{X}(t))\ , \ldots, C_n^1(t, {}^2\overline{X}(t)))$. Эта вектор-функция, в свою очередь, находится при подстановке функций φ_i^{*1}, $i = 1, 2, \ldots, n$, в следующую систему ОДУ на переменную v_2 с точностью до неизвестной вектор-функции $\overline{C}^2(t, {}^3\overline{X}(t)) = (C_1^2(t, {}^3\overline{X}(t)), \dots, C_n^2(t, {}^3\overline{X}(t)))$. Продолжая этот процесс, на $k-$ом шаге ($k < d$) мы получим решение в виде

$$\varphi_i(t, \overline{X}(t)) = \varphi_i^{*k}(t, X_1(t), \dots, X_k(t), \overline{C}^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t))), \tag{13}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, с точностью до произвольной вектор-функции

$$\overline{C}^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t)) = (C_1^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t)), \dots, C_n^k(t, {}^{k+1}\overline{X}(t))),$$

которая, в свою очередь, находится при подстановке полученных на этом шаге функций φ_i^{*k} в $(k+1)$-ю систему ОДУ. Решив первые d систем приведенной цепочки, получим:

$$\varphi_i(t, \overline{X}(t)) = \varphi_i^{*d}(t, \overline{X}(t), \overline{C}^d(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где неизвестную вектор-функцию $\overline{C}^d(t) = (C_1^d(t), \dots, C_n^d(t))$ можно найти, подставив полученные φ_i^{*d} в систему (11) с начальными условиями

$$\varphi_i(0, \overline{X}(0)) = \eta_i^0, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

При решении систем ОДУ вышеприведенной цепочки в иной последовательности, чем показано здесь, можно получить решение в других формах. В случае, если система уравнений с симметричными интегралами имеет единственное решение, то все построенные решения должны совпадать. Метод решения систем дифференциальных уравнений с многомерным симметричным интегралом остается справедливым и при решении систем стохастических дифференциальных уравнений с многомерным винеровским процессом.

Замечание 5. В предположениях теоремы 1 достаточным условием совместности системы уравнений (7) является совместность каждой из систем ОДУ (8)–(11).

Будем говорить, что непрерывные функции $X_1(s), \dots, X_d(s)$, $s \in [t_1, t_2]$, имеющие неограниченную вариацию на любом конечном промежутке, *локально функционально зависимы на отрезке* $[t_1, t_2]$, если существует непрерывно дифферецируемая по всем своим переменным функция $\Phi(s, \bar{v}) = \Phi(s, v_1, ..., v_d)$ такая, что $grad_{\bar{v}}\, \Phi(s, \bar{v}) \neq 0$ для $\bar{v}$ из "прямоугольника" $[\overline{X}(s_1), \overline{X}(s_2)]$, и $\Phi(s, \overline{X}(s)) \equiv 0$ на некотором отрезке $[s_1, s_2] \subset [t_1, t_2]$, в противном случае функции $X_1(s), \dots, X_d(s)$ *функционально независимы на отрезке* $[t_1, t_2]$.

Замечание 6. Пусть непрерывные функции $X_1(s), \dots, X_d(s)$, $s \in [0, T]$, имеют неограниченную вариацию на любом конечном промежутке и функционально независимы на $[0, T]$. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(s, \overline{v})$ из того факта, что $\Phi(s, \overline{X}(s)) = 0$, $s \in [0, T]$, следует, что при каждом $s \in [0, T]$ для всех $\overline{v} \in [\overline{X}(0), \overline{X}(s)]$ справедливо $grad_{\overline{v}} \Phi(s, \overline{v}) = 0$.

Следующее утверждение выявляет условия, при которых возможно обратить теорему 1.

Теорема 2. *Пусть дана непрерывная вектор-функция* $\overline{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t))$, *компоненты которой имеют неограниченную вариацию на любом отрезке из* $[0, T]$ *и функционально независимы на отрезке* $[0, T]$, *а функции* $\sigma^{ik}(t, \overline{\eta}, \overline{v})$, $k = 1, 2, \dots, d$, $i = 1, 2, \dots, n$, *и* $B^i(t, \overline{\eta}, \overline{v})$, $i = 1, 2, \dots, n$, *непрерывно дифференцируемы. Если вектор-функция* $\overline{\varphi}(t, \overline{X}(t))$, $t \in [0, T]$, *есть решение задачи Коши (7), то функция* $\overline{\varphi}(t, \overline{v})$ *удовлетворяет цепочке систем ОДУ* (8)–(11).

Доказательство. Приведем доказательство теоремы 2 в случае $d = 2$ и $n = 1$, общий случай доказывается аналогично.

Пусть функция $\eta(t) = \varphi(t, X_1(t), X_2(t))$ является решением задачи Коши (7). Согласно определению решения уравнения с симметричным интегралом, существует функция $F(t, v_1, v_2)$ такая, что $F(t, X_1(t), X_2(t)) \equiv 0$ и

$$F'_t(t, X_1(t), X_2(t)) = B(t, \varphi(t, X_1(t), X_2(t)), X_1(t), X_2(t)) - \varphi'_t(t, X_1(t), X_2(t)),$$
$$F'_{v_1}(t, X_1(t), X_2(t)) = \sigma^1(t, \varphi(t, X_1(t), X_2(t)), X_1(t), X_2(t)) - \varphi'_{v_1}(t, X_1(t), X_2(t)),$$

$$F'_{v_2}(t, X_1(t), X_2(t)) = \sigma^2(t, \varphi(t, X_1(t), X_2(t)), X_1(t), X_2(t)) - \varphi'_{v_2}(t, X_1(t), X_2(t)).$$

Так как функции $X_1(t), X_2(t)$ функционально независимы, то $grad_{\overline{v}} F(t, v_1, v_2) \equiv 0$ на $[\overline{X}(0), \overline{X}(t)]$, то функция $\varphi(t, v_1, v_2)$ удовлетворяет цепочке уравнений (8)–(11).

2.3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка с многомерным симметричными интегралами:

$$\begin{aligned} d_t u(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) = -\sum_{i=1}^{n} B^i(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) u'_{x_i}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) dt- \\ -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) u'_{x_i}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) * dX_j(t), \end{aligned} \tag{14}$$

$$u(0, \bar{x}, \overline{X}(0)) = x_k, \tag{15}$$

где x_k в начальном условии (15) — k-ая координата переменной $\bar{x} \in R^n$.

Решением уравнения (14) будем называть функцию $u(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$ такую, что при подстановке функции $u(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$ в уравнение (14) все интегралы в правой части имеют смысл, а само это уравнение превращается в тождество. Для каждого вектора начальных условий $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ через $\overline{U}(t, \bar{x}) = (u_1(t, \bar{x}), \ldots, u_n(t, \bar{x}))$ будем обозначать решения задачи Коши (14)-(15), полагая $u_k(t, \bar{x}) = u_k(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$.

Наряду с задачей (14)–(15) рассмотрим соответствующую систему уравнений с многомерными симметричными интегралами:

$$\begin{cases} d\eta_i(t, \bar{x}) = B^i(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t)) dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t)) * dX_j(t), \\ \eta_i(0, \bar{x}) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим следующие условия:

(A) Функции $B^i(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, — непрерывны по $(t, \overline{\eta})$ в некоторой замкнутой области Q — окрестности начальных значений системы уравнений (16).

(B) Функции $B^i(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \overline{\eta}, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, удовлетворяют в Q условию Липшица относительно переменной $\overline{\eta}$: существует такое $N > 0$, что для любого значения t и любых значений $\overline{\eta}'$, $\overline{\eta}''$ переменной $\overline{\eta}$ из области Q для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$ выполняются неравенства

$$\left| B^i(t, \overline{\eta}', \overline{X}(t)) - B^i(t, \overline{\eta}'', \overline{X}(t)) \right| \leqslant N \left| \overline{\eta}' - \overline{\eta}'' \right|,$$

$$\left| \sigma^{ij}(t, \overline{\eta}', \overline{X}(t)) - \sigma^{ij}(t, \overline{\eta}'', \overline{X}(t)) \right| \leqslant N \left| \overline{\eta}' - \overline{\eta}'' \right|.$$

Теорема 3. *Пусть справедливы все предположения теоремы 2 и для коэффициентов $B^i(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \overline{\eta}(t, \bar{x}), \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, выполнены условия (A) и (B). Тогда при каждом $t \in [0, T]$ отображение $\overline{U}(t, \cdot) : \bar{x} \in R^n \to \overline{U}(t, \bar{x}) \in R^n$ является диффеоморфизмом класса $C^1(R^n)$, причем обратное отображение $\overline{U}^{-1}(t, \bar{x})$ является решением системы уравнений с многомерными симметричными интегралами* (16).

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2 решение системы уравнений (16) одновременно является и решением цепочек систем ОДУ, при этом переменная $\bar{x}$ является параметром. При выполнении условий (A) и (B) на коэффициенты $B^i(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t, \bar{x}, \overline{X}(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, решения систем ОДУ непрерывно дифференцируемы по параметру $\bar{x}$ (см., например, [1, Теор. 5.2.1]). Следовательно, решение системы уравнений (16) является непрерывно дифференцируемым по параметру $\bar{x}$.

Пусть $u(t,\bar{x},\overline{X}(t))$ — решение задачи (14)-(15). Воспользовавшись методом доказательств теорем 1,2 и применив соответствующие рассуждения к уравнению (14), приходим к цепочке соотношений:

$$\begin{cases} u'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)) = -\sum_{i=1}^{n}\sigma^{ij}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j))u'_{x_i}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)), \\ u'_t(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} B^i(t,\bar{x},\overline{X}(t))u'_{x_i}(t,\bar{x},\overline{X}(t)), \\ j=1,...,d. \end{cases} \tag{17}$$

Обозначим через $(\eta_i)'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = \frac{\partial}{\partial v_j}\eta_i(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j))\mid_{v_j=X_j(t)}$ и найдем дифференциал с симметричным интегралом функции $u(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t))$:

$$\begin{aligned} d_t u(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) = \Bigg[& u'_t(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t))\,(\eta_i)'_t(t,\bar{x},\overline{X}(t))\Bigg]dt + \\ & + \sum_{j=1}^{d}\Bigg[u'_{v_j}(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}(t,\overline{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t))\,(\eta_i)'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}(t))\Bigg] * dX_j(t). \end{aligned} \tag{18}$$

Выпишем, согласно теоремам 1,2, цепочку уравнений типа (8)-(11) для уравнения (16):

$$\begin{cases} (\eta_i)'_{v_j}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)) = \sigma^{ij}(t,\bar{x},\overline{X}_{[j]}(t,v_j)), \\ (\eta_i)'_t(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = B^i(t,\bar{x},\overline{X}(t)), \\ i=1,2,\ldots,n, \quad j=1,2,\ldots,d. \end{cases}$$

Подставим эти соотношения в (18) и, опустив аргументы функций в правой части, в силу (17) получим:

$$d_t u(t,\bar{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) =$$
$$= \left[u'_t + \sum_{i=1}^{n} B^i u'_{x_i}\right]dt + \sum_{j=1}^{d}\left[u'_{v_j} + \sum_{i=1}^{n}\sigma^{ij}u'_{x_i}\right] * dX_j(t) \equiv 0.$$

Таким образом, мы убедились, что $d_t u(t,\bar{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) \equiv 0$, значит, $u(t,\bar{\eta}(t,\bar{x},\overline{X}(t)),\overline{X}(t)) = x_i$ при всех t для каждого $i=1,2,\ldots,n$. Теорема 3 доказана.

Будем предполагать справедливыми все предположения теоремы 3. Вернемся к уравнению в частных производных первого порядка с многомерным симметричным интегралом (14) и рассмотрим систему уравнений с многомерным симметричным интегралом и коэффициентами из уравнения (14):

$$\begin{cases} x_i(t,\bar{z}) = z_i + \displaystyle\int_0^t B^i(t,\bar{x}(s,\bar{z}),\overline{X}(s))ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma^{ij}(t,\bar{x}(s,\bar{z}),\overline{X}(s)) * dX_j(s), \\ \hfill i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{19}$$

При наложенных условиях эта система имеет n интегралов

$$\begin{cases} \xi_1(t,\overline{X}(t),\bar{x}) = C_1, \\ \qquad\ldots \\ \xi_n(t,\overline{X}(t),\bar{x}) = C_n. \end{cases} \tag{20}$$

Общим решением уравнения (14) назовем функцию $u = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где Φ — произвольная функция, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — левые части выражений (20).

Пусть $u = \theta(t, \bar{x}) = \theta(t, \overline{X}(t), \bar{x})$ — решение уравнения (14). Это решение является гиперповерхностью в пространстве $u, t, x_1, \ldots, x_n$. Уравнения (20) вместе с $u = \theta(t, \bar{x})$ определяют семейство (однопараметрических) линий в этом пространстве. Линии пересечения цилиндров (20) с поверхностью $\xi_{n+1} \equiv z = C$, где C — произвольный параметр, назовем *характеристическими линиями* уравнения (14), а уравнения (19) — *уравнениями характеристик.*

Замечание 7. Систему уравнений (19) можно формально записать в классическом виде, принятом в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для уравнений характеристик:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{B^1(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{1j}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) * (X_j(t))'_t} = \ldots = \\ = \frac{dx_n}{B^n(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{nj}(t, \bar{x}, \overline{X}(t)) * (X_j(t))'_t}.\end{aligned} \tag{21}$$

Положив $\sigma = 0$ в уравнении (14), мы перейдем к классическому определению характеристик и обыкновенным дифференциальным уравнениям вида (21) без симметричных интегралов.

Ввиду того, что коэффициенты B^i, σ^{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, системы уравнений (20) напрямую зависят только от t, $\bar{x}$, $X(t)$, а от $\bar{z}$ не зависят, решение системы (20) имеет вид:

$$\bar{x}(t, \bar{z}) = \overline{\Psi}(t) + \bar{z}, \quad \overline{\Psi}(0) = 0, \tag{22}$$

где $\bar{z}$ — начальное условие для системы уравнений (20), $\overline{\Psi}(t) = \overline{\Psi}(t, \overline{X}(t))$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \Psi_i(t) = \displaystyle\int_0^t B^i(s, \overline{\Psi}(s), \overline{X}(s))ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s, \overline{\Psi}(s), \overline{X}(s)) * dX_j(s), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{23}$$

Докажем формулу (22). Для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выпишем дифференциалы с симметричными интегралами для функций $x_i(t, \overline{X}(t))$, $\Psi_i(t, \overline{X}(t))$ по формуле (5), а затем воспользуемся системами уравнений (19) и (23):

$$\begin{aligned} &x_i(t, \overline{X}(t)) - x_i(0, \overline{X}(0)) = \\ &= \int_0^t B^i(s, \overline{x}(s), \overline{X}(s))ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s, \overline{x}(s), \overline{X}(s)) * dX_j(s) = \\ &= \Psi_i(t, \overline{X}(t)) - \Psi_i(0, \overline{X}(0)), \end{aligned} \tag{24}$$

откуда получаем равенство (22).

Следуя за классической теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, семейство характеристик уравнения (14) запишем так:

$$x_i - \Psi_i(t) = \xi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = C_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{25}$$

где C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — некоторые константы.

Покажем, что справедливо одно из основных свойств характеристик (см., например, [11]), а именно, что произвольная достаточно гладкая функция от характеристик дифференциального уравнения в частных производных первого порядка является его решением.

Теорема 4. *В предположенях теоремы 3 общее решение уравнения* (14) *можно записать в виде* $u(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = \Phi(\bar{x}-\overline{\Psi}(t))$ *с произвольной непрерывной функцией* $\Phi \in C^1(R^n)$, *где* $x_i - \Psi_i(t) = C_i$, C_i *— правые части интегралов* (20), $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $u = \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, где Φ — произвольная функция, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — левые части выражений (20). Покажем, что при $\xi_i(t, x_1, \dots, x_n) = x_i - \Psi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $\Psi_i(t) = \Psi_i(t, \overline{X}(t))$ — решение системы (23), функция $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ даст общее решение уравнения (14).

Найдем дифференциал по t функции $\Phi(\overline{\xi}(t,\bar{x}))$:

$$d_t\Phi\left(\overline{\xi}(t,\bar{x})\right) = \sum_{i=1}^{n}\Phi'_{\xi_i} * d_t\xi_i(t,\bar{x}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\Phi'_{x_i} * d_t(x_i - \Psi_i\left(t,\overline{X}(t)\right)) = -\sum_{i=1}^{n}\Phi'_{x_i} * d\Psi_i\left(t,\overline{X}(t)\right). \tag{26}$$

В силу (23) имеем:

$$d\Psi_i(t,\overline{X}(t)) = grad_{\bar{v}}\Psi_i(t,\overline{X}(t)) * d\overline{X}(t) + (\Psi_i)'_t(t,\overline{X}(t))dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{d}(\Psi_i)'_{v_j}(t,\overline{X}(t)) * dX_j(t) + (\Psi_i)'_t(t,\overline{X}(t))dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(s,\overline{\Psi}(s),\overline{X}(s)) * dX_j(s) + B^i(s,\overline{\Psi}(s),\overline{X}(s))ds.$$

Следовательно, правая часть (26) равна:

$$-\sum_{i=1}^{n}\Phi'_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t)) * dX_j(t) + B^i(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))dt\right) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i} * dX_j(t) - \sum_{i=1}^{n}B^i(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i}dt.$$

Таким образом,

$$d_t\Phi\left(\bar{x}-\overline{\Psi}(t)\right) = -\sum_{i=1}^{n}B^i(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i}dt-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ij}(t,\overline{\Psi}(t),\overline{X}(t))\Phi'_{x_i} * dX_j(t),$$

то есть, функция $\Phi\left(\bar{x}-\overline{\Psi}(t)\right)$ удовлетворяет уравнению (14). Следовательно, общее решение уравнения (14) можно представить в виде $\Phi\left(\bar{x}-\overline{\Psi}(t)\right)$, где Φ — произвольная гладкая функция.

Следствие. *Пусть* $\overline{\eta} = \overline{\varphi}(t,\bar{x})$ *— решение системы уравнений* (16), $\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta})$ *— функция, при каждом* t *обратная по переменной* $\bar{x}$ *к процессу* $\overline{\varphi}(t,\bar{x})$. *Тогда структура процесса* $\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta})$ *имеет вид:*

$$\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta}) = \overline{\eta} - \overline{\Psi}(t),$$

где функция $\overline{\Psi}(t)$ *— решение системы уравнений* (23).

Доказательство. Из представления (22) получаем, что $\overline{\varphi}(t,\bar{x}) = \overline{\eta} = \overline{\Psi}(t) + \bar{x}$, где $\bar{x}$ — начальное условие для системы уравнений (16), $\overline{\Psi}(t)$ — решение системы уравнений (23). Тогда обратная функция к $\overline{\varphi}(t,\bar{x})$ находится по формуле: $\overline{\varphi}^{\,-1}(t,\overline{\eta}) = \bar{x} = \overline{\eta} - \overline{\Psi}(t)$.

2.4. Пример 1. Пусть $X(t)$, $t \in [0,T]$, — произвольная непрерывная функция неограниченной вариации, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с симметричным интегралом:

$$\begin{aligned} d_t u(t, \bar{x}, X(t)) = \left(-t u'_{x_1} + (1 - X(t)) u'_{x_2}\right) dt + \\ + \left(X(t) u'_{x_1} - t u'_{x_2}\right) * dX(t). \end{aligned} \tag{27}$$

Составим соответствующие уравнения характеристик:

$$\begin{cases} dx_1(t) = tdt - X(t) * dX(t), \\ dx_2(t) = (X(t) - 1)dt + t * dX(t). \end{cases} \tag{28}$$

Решив систему (28), получим

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}(t^2 - (X(t))^2) + C_1, \\ x_2(t) = (X(t) - 1)t + C_2, \end{cases} \tag{29}$$

откуда находим, что общее решение уравнения (27) имеет вид:

$$u(t, x) = \Phi\left(x_1 - \frac{1}{2}(t^2 - (X(t))^2), x_2 - (X(t) - 1)t\right), \tag{30}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Проверим, действительно ли найденная функция является решением уравнения (27). Имеем:

$$\xi_1(t, x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{2}(t^2 - (X(t))^2),$$
$$\xi_2(t, x_1, x_2) = x_2 - (X(t) - 1)t.$$

Сначала найдем производные по x_1, x_2 функции (30):

$$\begin{aligned} u'_{x_1} = \Phi'_{\xi_1} \cdot \xi_1{}'_{x_1} + \Phi'_{\xi_2} \cdot \xi_2{}'_{x_1} = \Phi'_{\xi_1}, \\ u'_{x_2} = \Phi'_{\xi_1} \cdot \xi_1{}'_{x_2} + \Phi'_{\xi_2} \cdot \xi_2{}'_{x_2} = \Phi'_{\xi_2}, \end{aligned} \tag{31}$$

а затем — дифференциал по t:

$$\begin{aligned} d_t u = \Phi'_{\xi_1} \cdot d_t\xi_1 + \Phi'_{\xi_2} \cdot d_t\xi_2 = \\ = \Phi'_{\xi_1} \left(-tdt + X(t) * dX(t)\right) + \Phi'_{\xi_2} \left((1 - X(t))dt - t * dX(t)\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Подставляя выражения (31) в правую часть уравнения (27), а (32) — в левую, получим тождество. Следовательно, функция (30) является решением уравнения (27). А так как функция Φ — произвольная, то мы нашли общее решение уравнения (27).

Пример 2. Пусть $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения в частных производных с симметричным интегралом:

$$d_t u(t, x, W(t)) = -\left(t - \frac{\sin X^2(t)}{t^2}\right) u'_x dt - \left(W(t) + \frac{\sin 2W(t)}{t}\right) u'_x * dW(t), \tag{33}$$

с начальными условиями

$$u|_{\Gamma:\ x=\sqrt{t}} = x + \frac{\cos 2X(t)}{2t} - \frac{X^2(t) + t^2}{2} - \frac{1}{t}. \tag{34}$$

Составим уравнение характеристик:

$$dx(t, X(t)) = \left(t - \frac{\sin X^2(t)}{t^2}\right) dt + \left(W(t) + \frac{\sin 2W(t)}{t}\right) * dW(t), \tag{35}$$

решив которую, получим

$$x(t, X(t)) = -\frac{\cos 2X(t)}{2t} + \frac{X^2(t) + t^2}{2} + \frac{1}{t} + C. \tag{36}$$

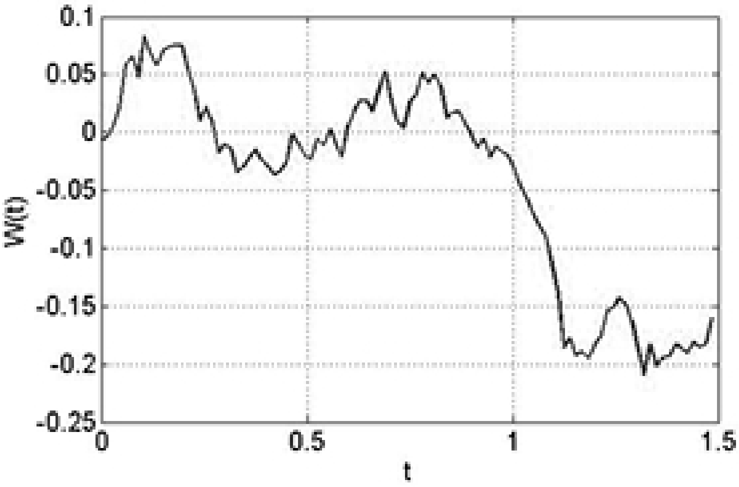

Рис. 1. График процесса $W(t)$

Следовательно, общее решение уравнения (33) имеет вид:

$$u(t,x) = \Phi\left(x + \frac{\cos 2X(t)}{2t} - \frac{X^2(t)+t^2}{2} - \frac{1}{t}\right), \tag{37}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Из вида начального условия находим, что решение задачи (33)-(34) задается выражением:

$$u(t,x) = x + \frac{\cos 2X(t)}{2t} - \frac{X^2(t)+t^2}{2} - \frac{1}{t}. \tag{38}$$

Смоделируем траекторию винеровского процесса $W(t)$ (рис. 1),
и приведем графики характеристических кривых и самой интегральной поверхности (38) (рис. 2):

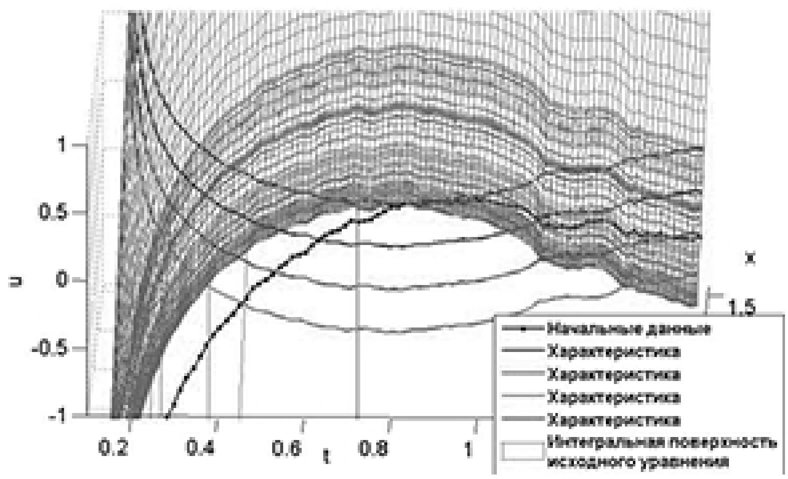

Рис. 2. Интегральная поверхность уравнения (33)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков Ю.Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* М. Высшая школа. 1991. 303 с.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов.* М. ФИЗМАТЛИТ. 2005. 408 с.
3. Гапечкина Е.В. *Об обобщении одного результата Крылова Н.В., Розовского Б.Л.* Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова 9-15 сентября 2008 г. Ростов-на-Дону. 2008. С. 211–212.
4. Гапечкина Е.В. *Об обобщении одного результата Н.В. Крылова.* Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, №2. С. 257.
5. Захарова О.В. *О решении одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений.* «Известия ВУЗов. Математика». Казань. 2009. № 6. С. 3–9.
6. Крылов Н.В., Розовский Б.Л. *Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и диффузионные процессы.* Успехи математических наук. 1982. Т. 37, вып. 6(228). С. 75–95.
7. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений.* Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4. №2. С. 55–66.
8. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и стохастический анализ.* Теория вероятностей и ее применение. 2006. Т. 51. №3. С. 496–517.
9. Насыров Ф.С. *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ.* М.: Физматлит, 2011. 212 с.
10. Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения: Введение в теорию и приложения.* М. Мир, ООО "Издательство АСТ". 2003. 408 с.
11. Положий Г.Н. *Уравнения математической физики.* М. Высшая школа. 1964. 560 с.
12. Розовский Б.Л. *Эволюционные стохастические системы.* М. Наука. 1983. 208 с.
13. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М. Наука. 1969. 424 с.
14. Friedman A. *Stochastic Differential Equations and Applications.* New York. Academic Press. 1975. T. 1. 244 p.
15. Kotelenez P. *Stochastic Ordinary and Stochastic Partial Differential Equations.* Cleveland. Springer Science+Business Media. 2008. 460 p.

Екатерина Викторовна Юрьева,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gap_kate@mail.ru

Фарит Сагитович Насыров,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: farsagit@yandex.ru