ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 80-86.

УДК 517.928

СДВИГ ФАЗЫ ДЛЯ СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Р.Н. ГАРИФУЛЛИН

Аннотация. Исследуется специальное решение уравнения Кортевега де Вриза, которое описывает влияние малой дисперсии на процессы трансформации слабых разрывов уравнений идеальной гидродинамики в сильные. Это решение также удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка. Для него в зоне Уиземовских колебаний построено асимптотическое решение с точностью до сдвига фазы. На сдвиг фазы получено уравнение, и с помощью численных экспериментов выбрано конкретное решение полученного уравнения, которое оказывается постоянным.

Ключевые слова: сдвиг фазы, уравнение Кортевега–де Вриза, недиссипативные ударные волны.

1. Введение

В работах А.М.Ильина и С.В. Захарова [1–3] начато исследование вопроса о влиянии малой диссипации на процессы трансформации слабых разрывов в сильные. В этих работах показано, что этот процесс в главном описывается специальным решением уравнения Бургерса. В работе [4] показано, что в задачах с малой дисперсией аналогичную роль играют два специальных решения уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.1}$$

В этой работе будет исследоваться одно из них с заданными асимптотиками:

$$u\big|_{x\to-\infty} = 0, \qquad u\big|_{x\to\infty} = (-t - \sqrt{t^2+4x})/2. \tag{1.2}$$

Решение $u(x,t)$ играет универсальную роль [4] в задачах о возникновении бездиссипативных ударных волн [4–6]. В работе [4] для решения задачи (1.1,1.2) построено асимптотическое решение при $x^2+t^2\to\infty$, которое в области незатухающих осцилляций задается квазипростыми решениями уравнений Уизема. Однако, в этом решении оставался неопределенным сдвиг фазы. В данной работе определяется этот сдвиг фазы методом, предложенным в [8].

В [4] показано, что решение $u(x,t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка по переменной x :

$$\left(u_{xxxx} + \frac{5u_{xx}u}{3} + \frac{5u_x^2}{6} + \frac{5u^3}{18}\right)'_x - \frac{2u + xu_x - 3t(u_{xxx}+uu_x)}{6} = 0. \tag{1.3}$$

R.N. Garifullin, Phase shift for the common solution of the KdV and the fifth order differential equation.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00186-а) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(контракт 02.740.11.0612).

Поступила 19 мая 2012 г.

Уравнение (1.3) представляет собой комбинацию стационарных частей симметрий уравнений КдВ. Одна из них — высшая (обобщенная) симметрия пятого порядка:

$$u_{\tau_5} = \left(u_{xxxx} + \frac{5u_{xx}u}{3} + \frac{5u_x^2}{6} + \frac{5u^3}{18}\right)'_x, \tag{1.4}$$

вторая – классическая симметрия растяжения:

$$u_{\tau_r} = 2u + xu_x - 3t(u_{xxx} + uu_x). \tag{1.5}$$

Уравнения (1.3) можно назвать первым высшим аналогом уравнения Пенлеве I, см.6.2 [4].

Статья состоит из двух частей. В первой части показывается как задача (1.1,1.2) возникает при описании бездиссипативных ударных волн. Для этого рассматривается задача Коши для возмущенного обобщенного уравнения Хопфа с начальными данными, терпящими слабый разрыв. Показывается, что в окрестности точки градиентной катастрофы для главного члена асимптотики возникает исследуемая задача. Во второй части строится асимптотическое решение задачи (1.1,1.2) методом, который использует наличие двух уравнений, которым удовлетворяет решение $u(x,t)$. Для неизвестного сдвига фаз полученное обыкновенное линейное уравнение третьего порядка. Конкретное решение этого уравнения выбрано с помощью численных экспериментов: моделирования решения $u(x,t)$ и построенного асимптотического решения.

2. Возникновение задачи (1.1,1.2)

В статье [4] показано возникновение задачи (1.1,1.2) на примере возмущенного обобщенного уравнения Хопфа, уравнений мелкой воды и дисперсионного нелинейного уравнения Шредингера. В данной статье возникновение этой задачи будет показано более подробно.

Рассмотрим задачу Коши для функции $U(X,T)$:

$$\begin{aligned} &U_T + g(U)U_X + \varepsilon^3 U_{XXX} = 0,\\ &U(X,0) = F(x) = \left\{\begin{array}{ll} F_-(x), & x<0,\\ F_+(x), & x\geq 0.\end{array}\right., \quad F_-(0) = F_+(0).\end{aligned} \tag{2.1}$$

С помощью замены переменных и переобозначения ε мы можем добиться:

$$F_-(0) = F_+(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 1. \tag{2.2}$$

На исходные данные ставятся условия:

$$\begin{gathered} g'(U) > 0, \quad F'_-(0) > F'_+(0), \quad F'_+(0) < 0,\\ F'(X)g'(F(X)) \notin [F'_+(0), 0],\ \forall x \neq 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

которые обеспечивают существования слабого разрыва начальных данных и возникновения градиентной катастрофы (сильного разрыва) на характеристике $X = 0$ в некоторый момент времени T^* в невозмущенном уравнении ($\varepsilon = 0$).

Будем строить асимптотическое решение задачи Коши (2.1) в виде ряда:

$$U(X,T) = U_0(X,T) + \varepsilon^3 U_1(X,T) + \dots \tag{2.4}$$

Главный член и первая поправка удовлетворяют задачам:

$$\partial_T U_0 + g(U_0)\partial_X U_0 = 0, \quad U_0(X,0) = F(X), \tag{2.5}$$

$$\partial_T U_1 + g(U_0)\partial_X U_1 + g'(U_0)\partial_X U_0 U_1 + \partial_X^3 U_0 = 0, \quad U_1(X,0) = 0. \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.5) выписывается в неявном виде методом характеристик:

$$U_0 = F(X - g(U_0)T), \quad X \neq 0. \tag{2.7}$$

Решение задачи (2.6) также находится методом характеристик и его можно выписать явно в терминах функции $U_0(X,T)$.

Точка градиентной катастрофы X^*, T^*, U^* определяется соотношениями:

$$T^* = -\frac{1}{F'_+(0)}, \quad U^* = 0, \quad X^* = 0 \tag{2.8}$$

Определим поведение решения $U_0(X,T)$, $U_1(X,T)$ в окрестности прямой $X=0$, с учетом ограничений на исходные данные имеем:

$$U_0(X,T) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F'_+(0)}{1+TF'_+(0)}X + \dfrac{F''_+(0) - TF'_+(0)g''(0)}{2(1+TF'_+(0))^3}X^2 + O(X^3), \quad X > 0, \\ \dfrac{F'_-(0)}{1+TF'_-(0)}X + \dfrac{F''_-(0) - TF'_-(0)g''(0)}{2(1+TF'_-(0))^3}X^2 + O(X^3), \quad X < 0 \end{array} \right.$$

$$U_1(X,T) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{U^+_{10}(T)}{(1+TF'_+(0))^4} + U^+_{11}(T)X + O(X^2), \quad X > 0, \\ \dfrac{U^-_{10}(T)}{(1+TF'_-(0))^4} + U^-_{11}(T)X + O(X^2), \quad X < 0 \end{array} \right.$$

Мы видим, что первая производная не является непрерывной функцией, более того, первая поправка $U_1(X,T)$ терпит разрыв в точке $X=0$ при $T>0$. Поэтому в окрестности линии $X=0$ надо строить асимптотику по-другому. В окрестности этой линии необходимо сделать растяжение переменных:

$$U(X,T,\varepsilon) = \varepsilon V(y,T,\varepsilon), \quad x = \varepsilon y. \tag{2.9}$$

После этого задача (2.1) в новых переменных примет вид:

$$\begin{gathered} V_T + VV_y + V_{yyy} + (U(\varepsilon V)/\varepsilon - V)V_y = 0, \\ V(y,0) = F(\varepsilon y)/\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} F'_-(0)y + \varepsilon F''_-(0)y^2 + \dots, & y < 0, \\ F'_+(0)y + \varepsilon F''_+(0)y^2 + \dots, & y > 0. \end{array} \right. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Формальная асимптотика функции V может быть построена в виде ряда:

$$V(y,T,\varepsilon) = V_0(y,T) + \varepsilon V_1(y,t) + \dots. \tag{2.11}$$

На главный член асимптотики получается задача:

$$\begin{gathered} V^0_T + V^0V^0_y + V^0_{yyy} = 0, \\ V^0(y,0) = \left\{ \begin{array}{ll} F'_-(0)y, & y < 0, \\ F'_+(0)y, & y > 0. \end{array} \right. \end{gathered} \tag{2.12}$$

В случае $F'_-(0) = 0$ существование решения этой задачи на отрезке $T \in (0, T^*)$ доказано Фаминским [9]. Для решения задачи (2.12) верна асимптотика, следующая из соображений согласования с разложением для функции $U(X,T)$

$$V(y,T) \to \frac{F'_+(0)}{1+TF'_+(0)}y, y \to +\infty, \quad V(y,T) \to 0, y \to -\infty.$$

Однако, в окрестности точки градиентной катастрофы X^*, T^* становится непригодными и разложение для $U(X,T)$ и разложение для $V(y,T)$. В окрестности этой точки требуется делать другое растяжение.

Окрестность точки $(0, T^*)$ исследуем с помощью внешнего разложения (2.4). Выпишем, как себя ведет решение $U_0(X,T)$ в окрестности точки градиентной катастрофы слева и справа от прямой $X=0$:

$$X - \left(g''(0) + F''_+(0)(T^*)^2\right)U^2/2 - U(T - T^*) + \dots = 0, \ X > 0 \tag{2.13}$$

$$X - \left(\frac{1}{F'_-(0)} + T\right)U + \dots = 0, \ X < 0. \tag{2.14}$$

Здесь и ниже константа

$$\delta = (g''(0) + F''_+(0)(T^*)^2)/2 > 0 \tag{2.15}$$

считается положительной, в силу условия (2.3) она не отрицательна, а в ситуации общего положения положительна.

Согласно методу согласования асимптотических разложений [7] проведем растяжение переменных в окрестности точки градиентной катастрофы:

$$U(X,T) = a\varepsilon^\alpha u, \quad T - T^* = b\varepsilon^\beta t, \quad X = c\varepsilon^\gamma x. \tag{2.16}$$

В новых переменных уравнение (2.1) и формулы (2.14) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b}\varepsilon^{\alpha-\beta}u_t + \frac{a^2}{c}\varepsilon^{2\alpha-\gamma}uu_t + \frac{a}{c^3}\varepsilon^{3+\alpha-3\gamma}u_{xxx} + \frac{a^3}{c}\varepsilon^{3\alpha-\gamma}g''(0)u^2u_x + \ldots = 0,\\
&c\varepsilon^\gamma x - \delta a^2\varepsilon^{2\alpha}u^2 - ab\varepsilon^{\alpha+\beta}ut + \ldots = 0, \quad x \gg 1,\\
&c\varepsilon^\gamma x - \left(\frac{1}{F'_-(0)} + T^*\right)a\varepsilon^\alpha u + \ldots = 0, \quad x \ll -1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Потребовав равенство коэффициентов перед первыми тремя слагаемыми в первых двух уравнениях, получим систему:

$$\alpha - \beta = 2\alpha - \gamma = 3 + \alpha - 3\gamma, \quad \gamma = 2\alpha = \alpha + \beta,$$
$$a/b = a^2/c = a/c^3, \quad c = \delta a^2 = ab.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$\alpha = \beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{6}{5}, \quad a = \delta^{-2/5}, \quad b = \delta^{3/5}, \quad c = \delta^{1/5}.$$

После растяжения (2.16) с указанными параметрами уравнения (2.17) примут вид:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + O(\varepsilon^{3/5}) = 0,$$
$$x - u^2 - ut + O(\varepsilon^{3/5}) = 0, x \gg 1, \quad u + O(\varepsilon^{3/5}) = 0, x \ll -1.$$

Этот вид в главном совпадает с задачей (1.1,1.2).

3. Определение сдвига фазы

Асимптотическое решение задачи (1.1,1.2,1.3) при $t \to \infty$ состоит из нескольких частей [4]. Особый интерес представляет зона незатухающих колебаний. Сделаем естественную замену переменных

$$u = t\,U(t,s), \quad s = \frac{x}{t^2}.$$

После нее уравнения (1.1,1.3) примут вид:

$$t^{-5}U_{sss} + tU_t - 2sU_s + UU_s + U = 0, \tag{3.1}$$

$$t^{-10}U_{sssss} + \frac{1}{6}t^{-5}(20U_sU_{ss} + (10U + 3)U_{sss}) + \frac{1}{6}(5U^2 - s + 3U)U_s - \frac{1}{3}U = 0. \tag{3.2}$$

В уравнении (3.2) все производные по переменной x третьего и более высокого порядка можно заменить в силу уравнения (3.1):

$$2t^{-5}((U_s + 9)U_{ss} + 6sU_{sss}) - 6t^{-4}U_{sst} + (5s + U^2 + 8sU)U_s - (4U + 3)tU_t - (5 + 4U)U = 0. \tag{3.3}$$

Асимптотическое решение U этой системы (3.1,3.3) строится в виде ряда по обратным степеням t

$$U = U_0(\varphi, s) + t^{-5/4}U_1(\varphi, s) + t^{-5/2}U_2(\varphi, s) + \ldots, \quad t \to \infty. \tag{3.4}$$

Здесь U_0, U_1 и U_2 – 2π периодические функции быстрой переменной φ. Эта переменная имеет вид

$$\varphi = t^{5/2} f(s) + n(s),$$

где $n(s)$ — искомый сдвиг фазы.

Для функции U_0 получаем следующую нелинейную систему уравнений по быстрой переменной φ:

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_0 + (a(s)+U_0)\,\partial_\varphi U_0 = 0,\\ 6a(s)(f')^2\partial_\varphi^3 U_0 - 2(f')^2\partial_\varphi^2 U_0 \partial_\varphi U_0 + \partial_\varphi U_0\left(s - U_0^2 + 4a(s)U_0 + 3a(s)\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для функций U_1, U_2 линейные неоднородные системы уравнения. Первое из уравнений на U_1 имеет вид:

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_1 + (a(s)+U_0)\,\partial_\varphi U_1 + \partial_\varphi U_0 U_1 = -3f'n'\partial_\varphi^3 U_0\\ + (2s - U_0)\frac{\partial_\varphi U_0 n' + \partial_s U_0}{f'} - 3\partial_s(f'\partial_\varphi^2 U_0) - \frac{U_0}{f'}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь обозначено:

$$a(s) = \frac{5f}{2f'} - 2s.$$

Исключив из (3.5) выражение $\partial_\varphi^3 U_0$, получим уравнение второго порядка для функции U_0:

$$(f')^2\partial_\varphi^2 U_0 + \frac{1}{2}U_0^2 + a(s)U_0 + 3a(s)^2 - \frac{s+3a(s)}{2} = 0. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) может быть один раз проинтегрировано:

$$(f'\partial_\varphi U_0)^2 + \frac{1}{3}U_0^3 + a(s)U_0^2 + (6a^2 - 3a - s)U_0 + b(s) = 0. \tag{3.8}$$

Здесь $b(s)$ – произвольная функция (константа интегрирования).

Далее предлагается не выписывать явно решение U_0, а просто считать, что это некая 2π периодическая функция, удовлетворяющая уравнению (3.8). В силу этого уравнения мы можем все производные от U_0 выписать как рационально-дробные выражения в терминах:

$$U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, \partial_s^2 U_0, \ldots.$$

Уравнения на U_1 имеют вид :

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_1 + (a(s)+U_0)\,\partial_\varphi U_1 + \partial_\varphi U_0 U_1 = \frac{F_1(U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, a, a', n', s)}{f}\\ 6a(s)(f')^2\partial_\varphi^3 U_1 - 2(f')^2(\partial_\varphi^2 U_1\partial_\varphi U_0 + \partial_\varphi^2 U_0 \partial_\varphi U_1) + \partial_\varphi U_1(s - U_0^2 + 4aU_0 + 3a)\\ +2\partial_\varphi U_0(2a - U_0)U_1 = \frac{F_2(U_0, \partial_\varphi U_0, \partial_s U_0, a, b, a', b', n', s)}{f\partial_\varphi U_0}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь F_1, F_2 — полиномиальные функции своих аргументов. Исключая из системы (3.9) последовательно старшие производные U_1 по переменной φ, придем к соотношению, не содержащему функцию U_1 – условию совместности этой системы:

$$\begin{aligned} \big(3(2s+a)(-2s - 24a + 3 + 36a^2)a' + (4s+2a)b' + 6sa - 4s - 27a + 108a^2 - 6b\\ -108a^3\big)\,U_0 + 3(2s+a)(-72a^3 + 54a^2 - 9a + 12sa + 4b - 3s)a' + 3(4a-1)(2s+a)b'\\ +45a^2 - 36sa^2 + 216a^4 + 15b - 198a^3 + 15sa - 48ab = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку равенство (3.10) должно выполнятся тождественно, то равны 0 коэффициенты при разных степенях U_0, следовательно получаем уравнения для $a(s), b(s)$:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{(2a-1)(-288a^3+192a^2+24sa-27a-4s+4b)}{(2s+a)(-576a^3+504a^2-126a+48sa+8b-12s+9)}, \\ b' &= (3s-54a^2+36a-9/2)a' + \frac{-6sa+4s-108a^2+27a+6b+108a^3}{4s+2a}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Система (3.9) совместна тогда и только тогда, когда $a(s)$ и $b(s)$ определены из уравнений (3.11). Если это условие выполнено, то все производные по φ от U_1 старше второго порядка можно выразить через младшие производные, например:

$$(f')^2\partial_\varphi^2 U_1 = -(U_0+a)U_1 + (n' + \partial_s U_0/\partial_\varphi U_0)G_1(U_0,a,s)/s + G_2(U_0,a,b,s)/f/\partial_\varphi U_0,$$

где G_1, G_2 — некоторые функции.

Уравнения на U_2 имеют вид :

$$\begin{aligned} (f')^2\partial_\varphi^3 U_2 + (a(s)+U_0)\,\partial_\varphi U_2 + \partial_\varphi U_0 U_2 &= \frac{F_3}{f} \\ 6a(s)(f')^2\partial_\varphi^3 U_2 - 2(f')^2(\partial_\varphi^2 U_2\partial_\varphi U_0 + \partial_\varphi^2 U_0\partial_\varphi U_2) + \partial_\varphi U_2(s - U_0^2 + 4aU_0 + 3a) & \\ +2\partial_\varphi U_0(2a-U_0)U_2 &= \frac{F_4}{f\partial_\varphi U_0}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь F_3, F_4 — функции, зависящие от предыдущих поправок.

Исключая последовательно производные функции U_2 из этих уравнений, получим соотношение вида:

$$\begin{aligned} &\partial_{\varphi s}U_1 - \frac{\partial_\varphi^2 U_0}{\partial_\varphi U_0}\partial_s U_1 + \left(\frac{\partial_\varphi^2 U_0\partial_s U_0}{(\partial_\varphi U_0)^2} + \frac{G_3(U_0,a,b)}{(f\partial_\varphi U_0)^2(12a+2U_0-3)}\right)\partial_\varphi U_1 \\ &-\left(\frac{\partial_\varphi^3 U_0\partial_s U_0}{(\partial_\varphi U_0)^2} - \frac{G_4(U_0,a,b)}{(f\partial_\varphi U_0)^2(12a+2U_0-3)}\right)U_1 = G_5(U_0,a,b,n',n''). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Дифференцируя это уравнение по φ, получаем соотношение такого же вида, исключая из этих двух уравнений $\partial_{\varphi s}U_1$, получаем:

$$\partial_\varphi U_1 = \frac{\partial_\varphi^2 U_0}{\partial_\varphi U_0}U_1 + \frac{n''G_6(s,a,b,f) + n'G_7(s,a,b,f)}{\partial_\varphi U_0} + G_8(\partial_s^3 U_0, \partial_s^2 U_0, \partial_s U_0, \partial_\varphi U_0, U_0, a, b, f, s). \tag{3.14}$$

Подставив это в уравнение (3.13), получим соотношение вида:

$$\begin{aligned} \partial_\varphi U_0(n''' + A_1 n'' + A_2 n') + \partial_s^3 U_0 + B_1\partial_s^2 U_0\partial_s U_0 + B_2\partial_s^2 U_0 &+ \\ B_3(\partial_s U_0)^3 + B_4(\partial_s U_0)^2 + B_5\partial_s U_0 + B_6 &= 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$A_i = A_i(s,f,a,b), \quad B_i = B_i(U_0,s,f,a,b)$$

некоторые функции.

Без ограничения общности можно считать функию U_0 четной по φ. Тогда в (3.15) первая часть нечетна, вторая четна по φ. Следовательно, из (3.15) немедленно получаем два уравнения:

$$n''' + A_1 n'' + A_2 n' = 0. \tag{3.16}$$

$$\partial_s^3 U_0 + B_1\partial_s^2 U_0\partial_s U_0 + B_2\partial_s^2 U_0 + B_3(\partial_s U_0)^3 + B_4(\partial_s U_0)^2 + B_5\partial_s U_0 + B_6 = 0. \tag{3.17}$$

Общее решение (3.16) имеет вид:

$$n(s) = C_1 + C_2 n_1(s) + C_2 n_2(s). \tag{3.18}$$

Здесь n_1, n_2 — отличные от константы линейно-независимые решения (3.16). С использованием численных методов мы получаем:

$$n(s) = \pi.$$

Численно показано, что разница между численным и асимтотическим решением убывает как $t^{-5/2}$ для этого значения $n(s)$. На рисунке 1 представлено численное моделирование решения $U(t, z)$ при $t = 19$ и главного член асимптотики $U_0(\varphi, s)$.

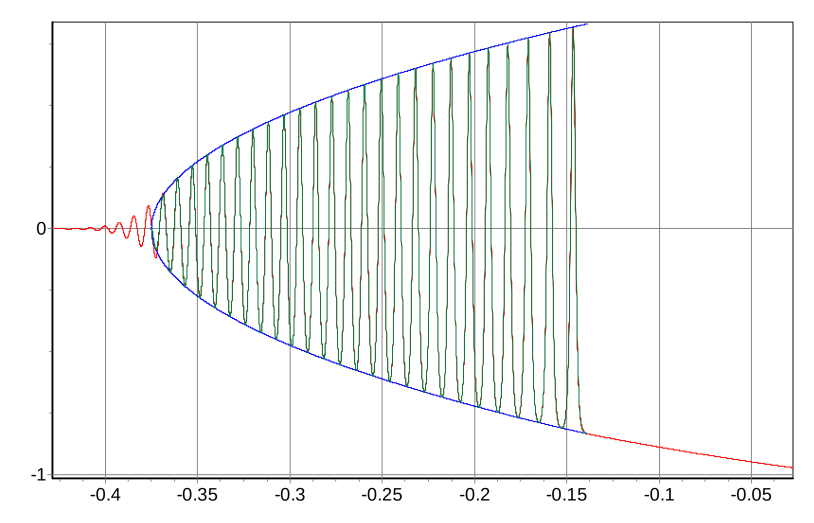

Рис. 1. Численное моделирование функции $U(t, z)$ при $t = 19$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.M. Il'in, S.V. Zakharov *On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities* // International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, 1999). Funct. Differ. Equ. 8 (2001), no. 3–4. P. 257–271.
2. Захаров С.В., Ильин А.М. *От слабого разрыва к градиентной катастрофе* // Матем. сб., 192:10 (2001). С. 3–18 .
3. Захаров С.В. *Зарождение ударной волны в одной задаче Коши для уравнения Бюргерса* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 44:3 (2004). С. 536–542.
4. Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И. *От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам* // ЖЭТФ. 2010. 137, вып. 1. С. 149–164.
5. Камчатнов А.М., Корнеев С.В. *Течение Бозе-Эйнштейновского конденсата в квазиодномерном канале под действием поршня* // ЖЭТФ. 2010. 137, вып. 1. С. 191–204.
6. G.A. El, V.V. Khodorovskii, A.M. Leszczyszyn *Refraction of dispersive shock waves* arXiv:1105.1920v1 [nlin.PS]
7. Ильин А. М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* — М.: Наука, 1989. — 336 с.
8. R. Garifullin, B. Suleimanov, N. Tarkhanov *Phase Shift in the Whitham Zone for the Gurevich-Pitaevskii Special Solution of the Korteweg-de Vries Equation* Ph. Let. A 374 (2010). P. 1420–1424, DOI:10.1016/j.physleta.2010.01.057.
9. Фаминский А.В. *Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза в случае негладкой неограниченной начальной функции* // Матем. заметки, 83:1 (2008). С. 119–128 .

Рустем Наилевич Гарифуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: rustem@matem.anrb.ru