ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 74-79.

УДК 517.956.2

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

И.Ф. ГАЛИХАНОВ, В.Н. ПАВЛЕНКО

Аннотация. Рассматривается телеграфное уравнение с разрывной внутренней энергией по фазовой переменной и однородным граничным условием Дирихле. Изучается вопрос о существовании обобщенных периодических решений в резонансном случае, когда оператор, порождаемый линейной частью уравнения с однородным граничным условием Дирихле и условием периодичности, имеет ненулевое ядро, а нелинейность, входящая в уравнение, ограничена. Топологическим методом получена теорема существования обобщенного периодического решения. Доказательство базируется на принципе Лере-Шаудера для выпуклозначных компактных отображений. Главное отличие от аналогичных результатов других авторов — допущение разрывов по фазовой переменной у внутренней энергии в телеграфном уравнении.

Ключевые слова: нелинейное телеграфное уравнение, разрывная нелинейность, периодические решения, резонансная задача.

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2,

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x)u(x)$$

— равномерно эллиптический дифференциальный оператор в области Ω [1] с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ a \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\ 0 < \alpha < 1$.

Исследуется проблема существования решения телеграфного уравнения с разрывной нелинейностью

$$u_{tt} + Lu(x,t) + \mu u_t + g(x,t,u) = f(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

удовлетворяющего однородному граничному условию Дирихле

$$u(x,t) = 0 \tag{2}$$

на $S = \partial\Omega \times (0, 2\pi)$, и условию периодичности

$$u(x,0) = u(x,2\pi) \tag{3}$$

для $x \in \Omega$, где $Q = \Omega \times (0,2\pi),\ \mu \neq 0$ (учитывается диссипация энергии), $f \in L^2(Q)$.

Предполагается, что нелинейность $g(x,t,u)$ удовлетворяет i-условию:

$i1$ — функция $g : Q\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева (mod 0) [2], что означает существование множества $l \subset Q \times \mathbb{R}$, проекция которого на Q имеет меру нуль, и борелевой на $Q \times \mathbb{R}$ функции, совпадающей с $g(x,t,u)$ на $(Q \times \mathbb{R}) \setminus l$;

I.F. Galikhanov, V.N. Pavlenko, Periodic solutions of the telegraph equation with a discontinuous nonlinearity.

Поступила 10 января 2012 г.

$i2$ — для почти всех $(x,t) \in Q$ сечение $g(x,t,\bullet)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода и для произвольного $u \in \mathbb{R}$ верно включение $g(x,t,u) \in [g_-(x,t,u), g_+(x,t,u)]$, где $g_-(x,t,u) = \liminf_{\eta \to u} g(x,t,\eta)$, $\quad g_+(x,t,u) = \limsup_{\eta \to u} g(x,t,\eta)$;

$i3$ — (ограниченность нелинейности) существует функция $b(x,t)$ из $L^2(Q)$ такая, что для почти всех $(x,t) \in Q$

$$|g(x,t,u)| \leqslant b(x,t) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Заметим, что условие $i1$ гарантирует суперпозиционную измеримость $g(x,t,u)$ на Q, то есть измеримость на Q композиции $g(x,t,u(x,t))$ для любой измеримой на Q функции $u(x,t)$.

Дифференциальный оператор L с однородным граничным условием Дирихле порождает в $L^2(\Omega)$ самосопряженный линейный оператор B с областью определения $D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : Bu = Lu \ \forall u \in D(B)$, где все производные функции $u(x)$ — соболевские. Через $H^m(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$ обозначается соболевское пространство $W_2^m(\Omega)$[1], а через $H_0^m(\Omega)$ — замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций в метрике $H^m(\Omega)$. Спектр σ оператора B состоит из собственных значений конечной кратности

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots; \quad \lambda_j \to \infty.$$

[3]. Здесь каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Существует ортонормированный базис (v_j) в $L^2(\Omega)$ из собственных функций оператора B $(Bv_j = \lambda_j v_j)$. В комплексном пространстве $L^2(Q)$ последовательность $\{\psi_{jk}(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} v_j(x) e^{ikt},\ j = 0,1,2,\ldots;\ k \in \mathbb{Z}\}$ будет ортонормированным базисом. Для любой вещественно-значной функции $u \in L^2(Q)$

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\psi_{jk}(x,t), \quad a_{j,-k} = \overline{a_{j,k}}.$$

Положим $D(A_0) = \{u(x,t) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{jk}\psi_{jk}(x,t)|\ a_{j,-k} = \overline{a_{j,k}},\quad m,n \in \ \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ и определим в вещественном $L^2(Q)$ оператор $A_0 : D(A_0) \subset L^2(Q) \to L^2(Q)$ равенством $A_0 u = u_{tt} + \mu u_t + Lu(x,t)$ для любого $u \in D(A_0)$. Заметим, что формулой, определяющей A_0, можно задать продолжение A_0 на линейную оболочку последовательности $(\psi_{jk}(x,t))$ в комплексном $L^2(Q)$, и для этого продолжения $\psi_{jk}(x,t)$ являются собственными функциями, отвечающими собственным значениям $\mu_{jk} = -k^2 + \lambda_j + i\mu k$. В частности, отсюда следует, что ядро оператора A_0 $(KerA_0)$ совпадает с $KerB$.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1)-(3) *называется функция* $u(x,t) \in L^2(Q)$ *со значениями в* $\mathbb{R}$ *такая, что найдется измеримая на* Q *функция* $z(x,t) \in [g_-(x,t,u(x,t)), g_+(x,t,u(x,t))]$ *почти всюду на* Q, *для которой верно интегральное тождество*

$$\int\limits_Q u(x,t)(\varphi_{tt} + L\varphi - \mu\varphi_t)dxdt = \int\limits_Q \varphi(x,t)(f(x,t) - z(x,t))dxdt \ \forall \varphi \in D(A_0). \tag{5}$$

Замечание1. В случае, когда $g(x,t,u)$ каратеодориева, то есть для почти всех $(x,t) \in Q$ сечение $g(x,t,\bullet)$ непрерывно на $\mathbb{R}$ и для любого $u \in \mathbb{R}$ функция $g(\bullet,\bullet,u)$ измерима на Q, в определении1 $z(x,t) = g(x,t,u(x,t))$, и мы приходим к общепринятому понятию обобщенного решения задачи (1)–(3). В [4] показано, что если $u \in L^2(Q)$ удовлетворяет (5) с $r(x,t) = f(x,t) - z(x,t) \in L^2(Q)$, то $u(x,t) \in H_0^1(\Omega)$ для $t \in [0,2\pi]$ (регулярность обобщенного решения) и выполняется (3). Если предположить, что обощенное решение $u(x,t) \in H^2(Q)$, то с помощью интегрирования по частям в (5) можно получить, что $u_{tt} + Lu(x,t) + \mu u_t + z(x,t) = f(x,t)$ почти всюду на Q.

Основной результат работы следующая теорема (рассматривается резонансный случай, когда уравнение $u_{tt} + Lu(x,t) + \mu u_t = 0$ имеет в Q ненулевое решение, удовлетворяющее условиям (2) и (3), что равносильно принадлежности нуля спектру σ оператора B).

Теорема 1. *Предположим, что $0 \in \sigma$, функция $g(x,t,u)$ удовлетворяет i - условию. Кроме того, для любой функции $v(x)$ из ядра оператора B выполняется условие Ландесмана - Лазера*

$$\int\limits_{v>0} \underline{g}_+(x,t)v(x)dxdt + \int\limits_{v<0} \overline{g}_-(x,t)v(x)dxdt > \int\limits_{\Omega} f(x,t)v(x)dxdt,$$

где $\underline{g}_+(x,t) = \liminf\limits_{u\to+\infty} g(x,t,u)$, $\overline{g}_-(x,t) = \limsup\limits_{u\to-\infty} g(x,t,u)$.
Тогда задача (1)–(3) имеет обобщенное решение $u(x,t) \in L^2(Q)$.

Доказательство теоремы1 сводится к проблеме существования неподвижной точки у выпуклозначного компактного отображения. Существование неподвижной точки устанавливается с помощью принципа Лере - Шаудера для многозначных отображений [5].

Вопрос о существовании периодических решений телеграфного уравнения с нелинейной внутренней энергией изучался многими авторами. Задача (1)–(3) с каратеодориевой нелинейностью $g(x,t,u)$ линейного роста, симметричной эллиптической частью L порядка 2m с независящими от времени коэффициентами рассматривалась в совместной работе Brezis и Nirenberg [4] (условие (2) при этом заменяется на принадлежность $u(x,t)$ к $H_0^m(\Omega)$ для любого $t \in (0,T)$). В резонасном случае, когда задача $Lu = 0, u \in H_0^m(\Omega)$ имеет ненулевое решение, получена теорема существования обобщенного решения при более жестком ограничении на f, чем условие Ландесмана-Лазера в теореме 1. Исследуется регулярность обобщенного решения для случая $m = 2$. В частности, показано, что если $f \in L^2(Q)$, то $u(x,t) \in H_0^1(\Omega)$ для любого $t \in (0,T)$.

В работе И.А. Рудакова [6] задача (1)–(3) с каратеодориевой нелинейностью $g(x,t,u)$ степенного роста рассматриевается для $n = 1$, $Lu = -u_{xx}$ с дополнительным членом νu_x в нерезонансном случае. Доказывается существование обобщенного решения и исследуется его регулярность. Укажем также на работы [7],[8], где проблема существования периодических решений нелинейного телеграфного уравнения исследуется в резонансном случае при $n = 1$, $Lu = -u_{xx}$. Главное отличие данного исследования от работ других авторов — допущение разрывов у $g(x,t,u)$ по фазовой переменной u.

2. Операторная постановка задачи(1)–(3)

Обозначим $A : D(A) \subset L^2(Q) \to L^2(Q)$ замыкание оператора A_0. Как показано в [4],

$$D(A) = \{u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\psi_{jk}(x,t)| \;\; a_{j,-k} = \overline{a_{j,k}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j,k}|^2((\lambda_j - k^2)^2 + \mu^2 k^2) < +\infty\},$$

и для любого $u \in D(A)$ значение $Au = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{jk} a_{jk}\psi_{j,k}(x,t)$. Вещественный спектр оператора A совпадает с σ(спектром оператора B), $D(A^*) = D(A)$ и $KerA^* = KerA$ (A^* - оператор сопряженный с A),

$$A^*u = u_{tt} + Lu_t - \mu u_t,$$

для каждой $u \in D(A_0)$.

Для $\lambda \notin \sigma, \lambda \in \mathbb{R}$ резольвента оператора A

$$(A-\lambda I)^{-1}u = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_{jk}}{\mu_{jk}-\lambda}\psi_{j,k}(x,t),$$

Так как $\frac{1}{\mu_{jk}-\lambda} \to 0$, при $j+k\to+\infty$, то оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ компактный в $L^2(Q)$.

Определим оператор Немыцкого G равенством

$$Gu = g(x,t,u(x,t)), \quad \forall u \in L^2(Q).$$

Поскольку $g(x,t,u)$ удовлетворяет $i1$ u $i3$ условиям, то оператор G действует из $L^2(Q)$ в $L^2(Q)$, и для него справедлива оценка:

$$\|Gu\| \leqslant \|b\|, \quad \forall u \in L^2(Q), \tag{6}$$

здесь и далее $\|\|$ — норма в $L^2(Q)$. Обозначим через $G^{\square}$ овыпукление оператора G:

$$G^{\square}u = \bigcap_{\varepsilon<0} clco\{y = Gz \mid \ \|z-u\| < \varepsilon\},$$

где $clco\Lambda$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $\Lambda \subset L^2(Q)$.

Рассмотрим включение

$$f - Au \in G^{\square}u. \tag{7}$$

Его справедливость означает существование $z \in G^{\square}u$ такого, что

$$f - Au = z. \tag{8}$$

Как показано в [2], $z \in G^{\square}u$ равносильно тому, что функция $z(x,t)$ измеримая на Q и для почти всех $(x,t) \in Q \quad z(x,t) \in [g_-(x,t,u), g_+(x,t,u)]$. Из равенства (8) следует, что u — обобщенное решение задачи (1)–(3). Докажем это. Обозначим $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(Q)$. Имеем для любого $\varphi \in D(A_0)$ равенство $(Au,\varphi)+(z,\varphi) = (f,\varphi)$, что равносильно $(u, A^*\varphi)+(z,\varphi) = (f,\varphi)$ $\forall \varphi \in D(A_0)$ (по определению сопряженного оператора), а это эквивалентно интегральному тождеству

$$\int\limits_Q u(x,t)(\varphi_{tt} + Lu - \mu u_t)dxdt + \int\limits_Q z(x,t)\varphi(x,t)dxdt = \int\limits_Q f\varphi(x,t)dxdt,$$

для всех $\varphi \in D(A_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $[-\varepsilon, 0)\cap\sigma = \varnothing$ (такое ε существует, поскольку собственные значения оператора B изолированные). Преобразуем включение (7):

$$f - Au - \varepsilon u \in G^{\square}u - \varepsilon u$$

или

$$(A+\varepsilon I)u \in f - G^{\square}u + \varepsilon u,$$

последнее равносильно включению

$$u \in (A+\varepsilon I)^{-1}(f - G^{\square}u + \varepsilon u) \equiv T.$$

Рассмотрим свойства отображения T. Докажем, что значения T — выпуклые компактные множества в $L^2(Q)$. Значения $G^{\square}$ ограниченные выпуклые и замкнутые в $L^2(Q)$, а опрератор $(A+\varepsilon I)^{-1} : L^2(Q) \to L^2(Q)$ линейный и компактный. Поэтому значения T — выпуклые и предкомпактные множества. Чтобы доказать компактность Tu для $u \in L^2(Q)$, достаточно установить замкнутость Tu в $L^2(Q)$. Пусть последовательность $(z_m) \subset Tu$ и $z_m \to z$ в $L^2(Q)$. Тогда существует $(y_m) \subset G^{\square}u$ такая, что $z_m = (A+\varepsilon I)^{-1}(f - y_m + \varepsilon u)$. Отсюда следует равенство $y_m = -(A+\varepsilon I)z_m + f + \varepsilon u$. Из ограниченности множества $G^{\square}u \subset L^2(Q)$ заключаем о существовании подпоследовательности (y_{m_k}), слабо сходящейся к некоторому y в $L^2(Q)$. Так как $(y_{m_k}) \subset G^{\square}u$, а $G^{\square}u$ – замкнутое выпуклое множество, то $y \in G^{\square}u$. В силу замкнутости линейного оператора $(A+\varepsilon I)$ его график в $L^2(Q)\times L^2(Q)$ слабо замкнут, поэтому $z \in D(A+\varepsilon I)$ и $y = -(A+\varepsilon I)z + f + \varepsilon u$, и, значит, $z = (A+\varepsilon I)^{-1}(f - y + \varepsilon u) \in Tu$. Замкнутость множества Tu в $L^2(Q)$ установлена.

Покажем полунепрерывность сверху отображения T на $L^2(Q)$. Допустим противное, тогда найдутся $u \in L^2(Q)$ и открытое множество $D \supset Tu$ в $L^2(Q)$ такие, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется $u_m \in L^2(Q)$ с $\|u_m - u\| < m^{-1}$ и $z_m \in Tu_m \backslash D$. Каждый элемент (z_m) представляется в виде $z_m = (A+\varepsilon I)^{-1}(f - v_m + \varepsilon u_m), \quad v_m \in G^{\Box}(u_m)$. Так как последовательность (u_m) ограничена в $L^2(Q)$, а отображение $G^{\Box}$ переводит ограниченные множества в ограниченные (в силу оценки (6)), то и последовательность (v_m) ограничена в $L^2(Q)$. Отсюда следует существование слабо сходящейся подпоследовательности (v_{m_k}) к некоторому v в $L^2(Q)$. Поскольку $u_m \to u$ в $L^2(Q)$, то в силу слабо-сильной замкнутости $G^{\Box}$[9] имеем $v \in G^{\Box}(u)$. Так как $(A+\varepsilon I)^{-1}$ – линейный компактный оператор, то $(A+\varepsilon I)^{-1}v_{m_k} \to (A+\varepsilon I)^{-1}v$. Поэтому $z_{m_k} \to (A+\varepsilon I)^{-1}(f - v + \varepsilon u) \in Tu \subset D$. Из чего, поскольку D – открытое множество в $L^2(Q)$,заключаем, что z_{m_k} принадлежит D для достаточно больших k, что противоречит выбору z_m. Полунепрерывность сверху отображения T на $L^2(Q)$ доказана.

Многозначный оператор $G^{\Box}$ переводит ограниченные множества в $L^2(Q)$ в ограниченные, а оператор $(A+\varepsilon I)^{-1}$ вполне непрерывный, поэтому для произвольного шара U из $L^2(Q)$ его образ TU – предкомпактное множество в $L^2(Q)$. Таким образом, значения мультиотображения T в $L^2(Q)$ являются выпуклыми компактами, T полунепрерывно сверху, и любой шар U из $L^2(Q)$ отображение T переводит в предкомпактное множество.

3. Доказательство теоремы 1

Поскольку отображение T выпуклозначное и компактное, то для доказательства существования у него неподвижной точки достаточно установить равномерную ограниченность множества решений семейства включений $u \in \tau Tu, \ 0 \leqslant \tau < 1$ ([5], с.107). Допустим противное. Тогда существуют последовательности $(t_n) \subset [0,1)$ и $(u_n) \subset L^2(Q), \ \|u_n\| > n$ такие, что $u_n \in t_n T u_n$ для любого натурального n. Положим $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Существуют $z_n \in Tu_n$ такие, что

$$Au_n + \varepsilon u_n = -t_n z_n + t_n \varepsilon u_n + t_n f, \tag{9}$$

поделим обе части на $\|u_n\|$, получим:

$$Av_n + \varepsilon v_n = -t_n \frac{z_n}{\|u_n\|} + t_n \varepsilon v_n + t_n \frac{f}{\|u_n\|},$$

Существует возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $v_{n_k} \rightharpoonup v$, и $t_{n_k} \to t$, ($y_n \rightharpoonup y$ обозначает слабую сходимость (y_n) к y в $L^2(Q)$). Но

$$v_{n_k} = (A+\varepsilon I)^{-1}\left(\frac{t_{n_k} z_{n_k}}{\|u_{n_k}\|} + \frac{t_{n_k} f}{\|u_{n_k}\|} + t_{n_k}\varepsilon v_{n_k}\right),$$

$$\frac{t_n z_n}{\|u_n\|} \to 0, \ \frac{t_n f}{\|u_n\|} \to 0, \ t_{n_k}\varepsilon v_{n_k} \rightharpoonup t\varepsilon v.$$

Поэтому $v_{n_k} \to (A+\varepsilon I)^{-1} t\varepsilon v$ и $v \neq 0$. Тогда $Av = (t-1)\varepsilon v$. Так как v ненулевая функция, $t - 1 \leqslant 0$ и $[-\varepsilon, 0) \cap \sigma = \varnothing$ то отсюда следует, что $t = 1$ и $Av = 0$. Таким образом, v принадлежит ядру оператора A, значит, и $KerB$. Так как $v_{n_k} \to v$ в $L^2(Q)$, то можно считать, что $v_{n_k} \to v$ почти всюду на Q, переходя, в противном случае, к подпоследовательности. Умножим обе части (9) скалярно на $v(x)$. Имеем для произвольного натурального n

$$(Au_n, v) + \varepsilon(u_n, v) + (t_n z_n, v) - (t_n f, v) - t_n(\varepsilon u_n, v) = 0. \tag{10}$$

Так как $(Au_n, v) = (u_n, A^* v) = 0$, то, поделив обе части (10) на t_n, получим,

$$\left(\frac{1 - t_n}{t_n}\right)\varepsilon(u_n, v) + (z_n, v) = (f, v).$$

Отсюда следует для достаточно больших k справедливость неравенства $(f,v) > (z_{n_k}, v)$, поскольку $(u_{n_k}, v) = \|u_{n_k}\|(v_{n_k}, v)$, $(v_{n_k}, v) \to \|v\|^2 = 1$ и $\|u_{n_k}\| > n_k$. Из чего заключаем, что

$$(f,v) \geq \liminf_{k\to\infty}(z_{n_k}, v) \geq \liminf_{k\to\infty}(\int\limits_{v>0} g_-(x,t,u_{n_k}(x,t))v(x)dxdt+$$

$$+\int\limits_{v<0} g_+(x,t,u_{n_k}(x,t))v(x)dxdt) \geq \int\limits_{v>0} \underline{g}_+(x,t)v(x)dxdt + \int\limits_{v<0} \overline{g}_-(x,t)v(x)dxdt.$$

При переходе к пределу под знак интеграла воспользовались леммой Лебега-Фату [10] с учетом оценки (4) для $g(x,t,u)$ и тем, что для почти всех $(x,t) \in Q$ $u_{n_k} \to +\infty$, если $v(x) > 0$, и $u_{n_k} \to -\infty$, если $v(x) < 0$. Полученное неравенство противоречит условию Ландесмана - Лазера в теореме1. Теорема1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1964. 540 с.
2. Красносельский М.А. *Системы с гистерезисом.* М.: Наука, 1983. 272 с.
3. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989. 464 с.
4. H. Brezis, L. Nirenberg *Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems.* //Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1978. V.5, № 2. P. 225–325
5. Борисович Ю.Г. и др. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* М.: КомКнига. 2005. 216 с.
6. Рудаков И.А. *Периодическое решение нелинейного телеграфного уравнения.* //Вестник Московского университета, 1993. № 4. С. 3–6.
7. W.S. Kim *Periodic-Dirichlet boundary value problem for nonlinear dissipative hyperbolic equations at resonance.* //Bull. Korean Math. Soc. 1989. V. 26 № 2. P. 221–229.
8. N. Hirano, W.S. Kim *Periodic-Dirichlet boundary value problem for semilinear dissipative hyperbolic equations.* // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 148 № 2. P. 371–377.
9. Павленко В.Н. *Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями.* // Укр. матем. журн. 1994. Т.5. №6. С. 729–736
10. Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1967. 624 с.

Ильдар Фаридович Галиханов,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: igalikhanov@mail.ru

Вячеслав Николаевич Павленко,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: pavlenko@csu.ru