ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 87-100.

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ОБЛАСТИ С МАЛОЙ ПОЛОСТЬЮ

А.Р. ДАНИЛИН

Аннотация. Статья посвящена исследованию асимптотики решения задачи оптимального граничного управления [1] в области с малой полостью. Построение асимптотики краевой задачи для эллиптического оператора в области с малой полостью рассмотрено в [2], а асимптотика распределенного управления в области с малой полостью — в [3]. Асимптотика граничного управления для оператора с малым коэффициентом при старшей производной рассматривалась в [4], [5]. Другие задачи управления решениями краевых задач оптимального управления, содержащих малый параметр, рассмотрены в [6], [7].

Ключевые слова:асимптотика, граничное управление, метод согласования, краевые задачи, системы уравнений в частных производных.

1. Постановка задачи

В двусвязной ограниченной области $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \varepsilon\omega \subset \mathbb{R}^3$ $(O \in \mathring{\omega}, \overline{\omega} \subset \mathring{\Omega})$ с гладкой границей $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \varepsilon\gamma := \partial\Omega \cup \varepsilon\partial\omega$ (Ω_ε — гладкое многообразие с краем) рассматривается следующая задача оптимального управления [1, глава 2, соотношения (2.41), (2.9)]

$$\begin{cases} Az_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon,\ z_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A} = g(x) + u_\varepsilon(x), & x \in \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$u \in \mathcal{U}_\varepsilon \text{ — выпуклое и замкнутое множество в } L_2(\Omega_\varepsilon), \tag{1.2}$$

$$J(u) := ||z_\varepsilon - z_d||^2_\varepsilon + \nu^{-1}|||u_\varepsilon|||^2_\varepsilon \to \inf, \tag{1.3}$$

где $A = -\nabla \cdot \big(A_{3\times3}(x) \cdot \nabla\big) + a_0(x)$, $A_{3\times3}(x) = (a_{ij}(x))$, то есть

$$Az := -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial z}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)z,$$

$$f, a_0, a_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega}), g \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial n_A} := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\cos(n, x_i) = \nabla z \cdot \big(A^T_{3\times3} n\big) \text{ —} \tag{1.5}$$

конормальная производная, определяемая оператором A, $\cos(n, x_i)$ — i-й направляющий косинус внешней нормали n к границе Γ_ε области Ω_ε, $A^T_{3\times3}$ — транспонированная матрица $A_{3\times3}$, ν — положительная константа, а $||\cdot||_\varepsilon$ и $|||\cdot|||_\varepsilon$ — нормы в пространстве $L_2(\Omega_\varepsilon)$ и $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ соответственно.

A.R. Danilin, Optimal boundary control in a small concave domain .

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00679-а), ФЦП 02.740.11.0612 и Программой Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математике и физике"(проект 12-П-1-1009).

Поступила 15 апреля 2012 г.

Относительно коэффициентов оператора A кроме этого предполагается следующее:

$$\exists\,\alpha>0\,\forall\,x\in\overline{\Omega}\,\forall\xi\in\mathbb{R}^3$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}a(x)_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2,\quad a_0(x)\geqslant\alpha>0 \tag{1.6}$$

$$a_{ii}(0)=1,a_{ij}(0)=0\;(i\neq j).$$

В дальнейшем скалярные произведения в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ и $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_\varepsilon$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$, норму в $H^1(\Omega_\varepsilon)$ — через $||\cdot||_{\varepsilon,1}$, а нормы и скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $||\cdot||_0$, $(\cdot,\cdot)_0$ и $|||\cdot|||_0$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ соответственно.

В [1, глава 2, п. 2.4] доказано, что задача (1.1) — (1.3) имеет единственное решение.

Мы будем рассматривать эту задачу при следующих предположениях:

$$\begin{gathered} g\Big|_{\varepsilon\gamma}\equiv 0,\\ \mathcal{U}_\varepsilon=\mathcal{U}_\varepsilon(1),\ \text{где}\ \ \mathcal{U}_\varepsilon(r):=\{u\in L_2(\Gamma_\varepsilon):u\Big|_{\varepsilon\gamma}\equiv 0,\ |||u|||_0\leqslant r\},\end{gathered} \tag{1.7}$$

то есть управление процессом происходит только через внешнюю границу.

Нас будет интересовать асимптотическое разложение z_ε и u_ε при $\varepsilon\to 0$.

2. Определяющие соотношения

Как показано в [1, глава 2, п. 2.4], единственное решение задачи (1.1) — (1.3) пара z_ε и u_ε — характеризуется следующими условиями: существует $p_\varepsilon\in H^1(\Omega_\varepsilon)$ такое, что

$$\begin{cases} Az_\varepsilon=f(x), & A^*p_\varepsilon=z_\varepsilon-z_d,\quad x\in\Omega_\varepsilon,\\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A}=g(x)+u_\varepsilon(x), & \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n_{A^*}}=0,\qquad\quad x\in\Gamma_\varepsilon\end{cases} \tag{2.1}$$

и

$$\forall\,v\in\mathcal{U}\qquad\langle p_\varepsilon+\nu^{-1}u_\varepsilon,v-u_\varepsilon\rangle\geqslant 0, \tag{2.2}$$

где оператор A^* — формально сопряженный к A, то есть

$$A^*:=-\nabla\cdot\big(A^T_{3\times 3}(x)\cdot\nabla\big)+a_0(x).$$

Лемма 1. *Условие* (2.2) *для* $\mathcal{U}_\varepsilon=\mathcal{U}_\varepsilon(r)$ *эквивалентно следующему*

$$\begin{gathered}\exists\,\lambda\in(0;\nu]:\ \Big(u_\varepsilon(\cdot)=-\lambda p_\varepsilon(\cdot)\Big|_\Gamma\Big)\wedge\\ \wedge\Big(\lambda|||p_\varepsilon|||_0\leqslant r\Big)\wedge\Big((\nu-\lambda)\cdot(r-\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0)=0\Big).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 из [4]. ■

С учетом (2.3) система (2.1) принимает вид

$$\begin{cases} Az_\varepsilon=f(x), & A^*p_\varepsilon=z_\varepsilon-z_d,\quad x\in\Omega_\varepsilon,z_\varepsilon,p_\varepsilon\in H^1(\Omega_\varepsilon),\\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A}+\lambda_\varepsilon p_\varepsilon=g(x), & \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n_{A^*}}=0,\qquad\quad x\in\Gamma\\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_A}=0, & \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n_{A^*}}=0,\qquad\quad x\in\varepsilon\gamma\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\big(\lambda_\varepsilon\in(0;\nu]\big)\wedge\Big(\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0\leqslant 1\Big)\wedge\Big((\nu-\lambda_\varepsilon)\cdot\big(1-\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0\big)=0\Big). \tag{2.5}$$

Отметим, что в силу условий (1.6) граничный оператор $\partial/\partial n_A$ $(\partial/\partial n_{A^*})$ нормален, накрывает оператор A (A^*) [8, Глава 2. п. 1.4.], а отображение следа

$$H^m(\Omega_\varepsilon)\ni w\mapsto\Big(w\Big|_{\Gamma_\varepsilon},\frac{\partial w}{\partial n_A}\Big)\in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon)\times H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$$

сюръективно.

Действительно, если n — единичный вектор нормали к Γ_ε, то в силу (1.5)

$$n \cdot \big(A^T_{3\times 3} \cdot n\big) = n \cdot \big(A_{3\times 3} \cdot n\big) \geqslant \alpha > 0,$$

что и означает нормальность этого граничного оператора.

Пусть теперь $0 \neq \tau$ — касательный вектор к Γ_ε в точке $x \in \Gamma_\varepsilon$, n — единичный вектор нормали к Γ_ε в точке $x \in \Gamma_\varepsilon$, $\beta \neq 0$, $A^T_{3\times 3} \cdot n = \tau_1 + \beta_1 n$, где τ_1 касательный вектор к Γ_ε в точке $x \in \Gamma_\varepsilon$. Тогда многочлен

$$(\tau + \beta t \cdot n) \cdot \big(A^T_{3\times 3} n\big) = \tau \cdot \tau_1 + \beta \cdot \beta_1 t$$

от t имеет отличный от нуля коэффициент при t, поскольку $\beta_1 = n \cdot \big(A^T_{3\times 3} n\big)$. Поэтому его корень вещественен. Таким образом этот многочлен не равен нулю по модулю многочлена $(t - t_1)$, где t_1 — комплексный корень многочлена второго порядка, порожденного символом оператора A и вектором $\tau + \beta t \cdot n$.

Наконец, покажем для произвольных $\varphi \in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и $\psi \in H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$ разрешимость задачи $H^m(\Omega_\varepsilon) \ni w$ $w = \varphi\Big|_{\Gamma_\varepsilon}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial n_A} = \psi$.

В силу определения (1.5) и представления $A^T_{3\times 3}(x) \cdot n(x) = \tau_1(x) + \beta_1(x) n(x)$ получим, что $\partial w / n_A = \nabla w \cdot \tau_1(x) + \beta_1(x) \partial w / n$. Но $\nabla w \cdot \tau_1$ есть производная по касательному вектору τ_1, поэтому она выражается через φ: $\nabla w \cdot \tau_1 = B(\varphi)$. Тогда $\partial w / n = \beta_1^{-1}\big(\partial w / n_A - B(\varphi)\big) = \beta_1^{-1}\big(\psi - B(\varphi)\big)$. Но в силу теоремы о следах [8, Глава 1, теорема 8.3] отображение

$$H^m(\Omega_\varepsilon) \ni w \mapsto \Big(w\Big|_{\Gamma_\varepsilon}, \frac{\partial w}{\partial n}\Big) \in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \times H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$$

есть сюръекция.

В силу свойств эллиптических уравнений из условия (1.6) следует, что

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^m(\Omega_\varepsilon),$$

и, следовательно, $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$.

Отметим, что краевая задача (2.4) при каждом фиксированном λ_ε по определению эквивалентна соотношениям

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall\, \varphi, \psi & \in & H^1(\Omega_\varepsilon) \\ (f, \varphi) & = & \pi_\varepsilon(\nabla z_\varepsilon, \nabla \varphi) + (a_0 z_\varepsilon, \varphi)_\varepsilon - \langle g - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon, \varphi\rangle_0, \\ (z_\varepsilon - z_d, \psi) & = & \pi_\varepsilon(\nabla \psi, \nabla p_\varepsilon) + (a_0 p_\varepsilon, \psi)_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

где

$$\pi_\varepsilon(\varphi, \psi) := \sum_{i,j=1}^{3} \Big(a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big)_\varepsilon.$$

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться тем фактом, что если $\Omega_1 \supset \Omega_2$, то определено непрерывное вложение $H^m(\Omega_1) \hookrightarrow H^m(\Omega_2)$ — "сужение на Ω_2". Мы не будем различать сам элемент из $H^m(\Omega_1)$ и его сужение на Ω_2. Отметим также, что норма этого оператора вложения равна 1.

Лемма 2. *Пусть z_ε, p_ε и λ_ε, — решение задачи* (2.4), (2.5). *Тогда*

$$||z_\varepsilon||^2_\varepsilon + \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon|||^2_0 = (f, p_\varepsilon)_\varepsilon + (z_d, z_\varepsilon)_\varepsilon + \langle g, p_\varepsilon\rangle_0 \tag{2.7}$$

и

$$||z_\varepsilon||_{\varepsilon,1}, ||p_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big), \varepsilon \to 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ — решение задачи (1.1) при $u \equiv 0$. Тогда по определению $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ получим, что $||z_\varepsilon - z_d||_\varepsilon \leqslant ||\overset{\circ}{z}_\varepsilon - z_d||_\varepsilon$, откуда следует, что

$$||z_\varepsilon||_\varepsilon \leqslant ||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||_\varepsilon + 2||z_d||_\varepsilon. \tag{2.9}$$

Поскольку $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ удовлетворяет (1.1) при $u \equiv 0$, то

$$(f, \overset{\circ}{z}_\varepsilon)_\varepsilon = (A\overset{\circ}{z}_\varepsilon, \overset{\circ}{z}_\varepsilon)_\varepsilon = \pi_\varepsilon(\nabla \overset{\circ}{z}_\varepsilon, \overset{\circ}{z}_\varepsilon) + (a_0 \overset{\circ}{z}_\varepsilon, \overset{\circ}{z}_\varepsilon)_\varepsilon - \langle g, \overset{\circ}{z}_\varepsilon\rangle_0,$$

что с учетом (1.6) дает

$$\alpha||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||^2_{\varepsilon,1} \leqslant ||f||_\varepsilon \cdot ||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||_\varepsilon + |||g|||_0 \cdot |||\overset{\circ}{z}_\varepsilon|||_0. \tag{2.10}$$

Поскольку $H^s(\Gamma)$ при $s > 0$ вложено в $L_2(\Gamma)$ плотно и непрерывно, то в силу теоремы о следах (см [8, Глава 1, теорема 8.3]) оператор взятия следа является непрерывным как оператор из $H^m(\Omega)$ в $L_2(\Gamma)$ при $m \geqslant 1$, то есть

$$\exists K > 0 \, \forall z \in H^1(\Omega) \qquad |||z|||_0 \leqslant K||z||_{H^1(\Omega)}, \tag{2.11}$$

поэтому в силу (2.10)

$$||\overset{\circ}{z}_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + |||g|||_0\big). \tag{2.12}$$

В силу (2.12) и (2.9) получим, что

$$||z_\varepsilon||_\varepsilon = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big). \tag{2.13}$$

Теперь, положив в (2.6) $\varphi = z_\varepsilon$ и $\psi = p_\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} &\alpha|||z_\varepsilon|||^2_{\varepsilon,1} \leqslant (f, z_\varepsilon)_\varepsilon + \langle g, z_\varepsilon\rangle_0 - \langle \lambda_\varepsilon p\varepsilon, z_\varepsilon\rangle_0, \\ &\alpha|||p_\varepsilon|||^2_{\varepsilon,1} \leqslant (p_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon - (z_d, p_\varepsilon)_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Из последнего неравенства с учетом (2.13) получим, что

$$||p_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big). \tag{2.15}$$

Теперь из первого соотношения в (2.14) и соотношения (2.15) с использованием неравенства (2.11) и ограниченности λ_ε получим, что

$$||z_\varepsilon||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f||_\varepsilon + ||z_d||_\varepsilon + |||g|||_0\big).$$

Наконец, взяв в (2.6) $\varphi = p_\varepsilon$ и $\psi = z_\varepsilon$ и вычтя из первого получившегося равенства второе, получим соотношение (2.7). ■

Теперь, используя априорные оценки (2.8), мы получим аналогичные оценки для следующей краевой задачи более общего вида по сравнению с (2.4)

$$\begin{cases} Az = f_1(x), & A^*p - z = f_2(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, z, p \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z}{\partial n_A} + \lambda p = g_{1,\Gamma}(x), & \dfrac{\partial p}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma}(x), \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial z}{\partial n_A} = g_{1,\gamma}(x), & \dfrac{\partial p}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma}(x), \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases} \tag{2.16}$$

где λ — некоторая положительна константа, $f_i \in L_2(\Omega_\varepsilon)$, $g_{i,\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $g_{i,\gamma}(x) \in H^{1/2}(\varepsilon\gamma)$.

Лемма 3. *Пусть z и p — решение задачи* (2.16). *Тогда*

$$\begin{aligned} ||z||_{\varepsilon,1}, ||p||_{\varepsilon,1} \;\; = \;\; &\mathcal{O}\big(||f_1||_\varepsilon + ||f_2||_\varepsilon + |||g_{1,\Gamma}|||_0 + |||g_{1,\Gamma}|||_0 + \\ &+ |||g_{1,\Gamma}|||_{\varepsilon\gamma} + |||g_{1,\Gamma}|||_{\varepsilon\gamma}\big), \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $|||\cdot|||_{\varepsilon\gamma}$— норма в пространстве $L_2(\varepsilon\gamma)$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{z}$ и $\widetilde{p}$ — решения краевых задач

$$\begin{cases} A\widetilde{z} = 0, & A^*\widetilde{p} = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \widetilde{z}}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial \widetilde{p}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma}(x), & x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial \widetilde{z}}{\partial n_A} = g_{1,\gamma}(x), & \dfrac{\partial \widetilde{p}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma}(x), & x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

Отметим, что они разрешимы единственным образом и для них справедливы оценки [9], [8]

$$||\widetilde{z}||_\varepsilon = \mathcal{O}\big(|||g_{1,\gamma}|||_{\varepsilon\gamma}\big), \quad |\widetilde{p}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(|||g_{2,\Gamma}|||_0 + |||g_{2,\gamma}|||_{\varepsilon\gamma}\big). \tag{2.18}$$

Тогда функции $\widehat{z} := z - \widetilde{z}$ и $\widehat{p} := z - \widetilde{p}$ удовлетворяют следующей задаче

$$\begin{cases} A\widehat{z} = f_1(x), & A^*\widehat{p} - \widehat{z} = f_2(x) + \widetilde{z}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \widehat{z}}{\partial n_A} + \lambda\widehat{p} = g_{1,\Gamma}(x) - \lambda\widetilde{p}(x), & \dfrac{\partial \widehat{p}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial \widehat{z}}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial \widehat{p}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases}$$

Поскольку эта задача совпадает с задачей (2.4), (2.5) при $z_d = f_2 + \widetilde{z}$, $g = g_{1,\Gamma} - \lambda\widetilde{p}$, $\nu > \lambda$ и $r = \lambda|||\widehat{p}|||_0$, то в силу (2.8) получим

$$||\widehat{z}||_{\varepsilon,1}, ||\widehat{p}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(||f_1||_\varepsilon + ||f_2 + \widetilde{z}||_\varepsilon + |||g_{1,\gamma} - \lambda\widetilde{p}|||_0\big), \varepsilon \to 0.$$

Теперь осталось применить неравенство треугольника для норм и соотношение (2.18). ∎

Теорема 1. *Задача* (2.16) *разрешима единственным образом при любых* $f_i \in L_2(\Omega_\varepsilon)$, $g_{i,\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ *и* $g_{i,\gamma} \in H^{1/2}(\varepsilon\gamma)$ $(i = 1, 2)$ *и её решение* $z, p \in H^2(\Omega_\varepsilon)$.

При этом, если $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega}))$, $g_{i,\Gamma} \in C^\infty(\Gamma)$ *и* $g_{i,\gamma} \in C^\infty(\varepsilon\gamma)$ *(*$i = 1, 2$*), то при всех* $m \in \mathbb{N}$ $z, p \in H^m(\Omega_\varepsilon)$.

Доказательство. Расссмотрим отображение гильбертова пространства $E := H^2(\Omega_\varepsilon)^2$ в гильбертово пространство $G := L_2(\Omega_\varepsilon)^2 \times H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)^2$, определяемое задачей (2.16),

$$\mathcal{A}(z, p) := \Big(Az, A^*p - z, \Big(\frac{\partial z}{\partial n_A} + \lambda p\Big)\Big|_\Gamma, \frac{\partial p}{\partial n_{A^*}}\Big|_\Gamma, \frac{\partial z}{\partial n_A}\Big|_{\varepsilon\gamma}, \frac{\partial p}{\partial n_{A^*}}\Big|_{\varepsilon\gamma}\Big).$$

Пусть $F := H^1(\Omega_\varepsilon)^2$. Тогда E компактно вложено в F. Покажем, что

$$\exists\, C > 0\, \forall\, z, p \in H^2(\Omega_\varepsilon) \qquad ||(z, p)||_E \leqslant C \cdot \Big(||\mathcal{A}(z, p)||_G + ||(z, p)||_F\Big). \tag{2.19}$$

В силу п.1 теоремы 5.1 из [8, Глава 2, п. 5] $\exists\, C_1 > 0$:

$$||(z, p)||_E \leqslant ||z||_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + ||p||_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_1\Big(||Az||_\varepsilon + ||A^*p - z||_\varepsilon + ||z||_\varepsilon +$$

$$+\Big|\Big|\Big|\frac{\partial z}{\partial n_A} + \lambda p\Big|\Big|\Big|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + \lambda|||p|||_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + \Big|\Big|\Big|\frac{\partial p}{\partial n_{A^*}}\Big|\Big|\Big|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + ||z||_{1,\varepsilon} + ||p||_{1,\varepsilon}\Big).$$

Но в силу теоремы о следах $\exists\, C_2 > 0$:

$$|||z|||_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \leqslant C_2|||z|||_{\varepsilon,1}, \quad |||p|||_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \leqslant C_2|||p|||_{\varepsilon,1},$$

что и завершает доказательство неравенства (2.19).

Таким образом, по лемме Питре [10], [8, Глава 2, лемма 5.1] образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут, а его ядро конечномерно.

Что касается ядра оператора $\mathcal{A}$, то в силу априорных оценок (2.17) оно состоит из одного нуля, то есть оператор $\mathcal{A}$ инъективен.

Покажем, что оператор сюръективен.

Пусть $f_i^* \in L_2(\Omega_\varepsilon)$, $g_{i,\Gamma}^* \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и $g_{i,\gamma}^* \in H^{-1/2}(\varepsilon\gamma)$ $(i = 1, 2)$ таковы, что $\forall\, u, v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (Au, f_1^*)_\varepsilon + (A^*v - u, f_2^*)_\varepsilon + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A} + \lambda v, g_{1,\Gamma}^* \Big\rangle_0 + \\ & + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\Gamma}^* \Big\rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\gamma}^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma} + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\gamma}^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

В доказательстве этой теоремы через $\langle\cdot\rangle_0$ и $\langle\cdot\rangle_{\varepsilon\gamma}$ обозначены билинейные формы, задающие двойственность между пространствами $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\varepsilon\gamma)$ и $H^{-1/2}(\varepsilon\gamma)$ соответственно.

Отметим, что если $g_{i,\Gamma}^* \in L_2(\Gamma)$ и $g_{i,\gamma}^* \in L_2(\varepsilon\gamma)$, то эти билинейные формы совпадают со скалярным произведением в $L_2(\Gamma)$ и $L_2(\varepsilon\gamma)$ соответственно, и, тем самым, не противоречат предыдущему использованию этих обозначений.

Наша цель — доказать равенства $f_i^* = 0$, $g_{i,\Gamma}^* = 0$ и $g_{i,\gamma}^* = 0$ $(i = 1, 2)$, которые в силу замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$ дадут сюръективность этого оператора.

В силу независимости u и v соотношение (2.20) распадается на два

$$\forall\, u \in H^2(\Omega_\varepsilon) \quad 0 = (Au, f_1^*)_\varepsilon - (u, f_2^*)_\varepsilon + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\Gamma}^* \Big\rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\gamma}^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma}, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\forall\, v \in H^2(\Omega_\varepsilon) \quad 0 \;&=\; (A^* v, f_2^*)_\varepsilon + \langle \lambda v, g_{1,\Gamma}^* \rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\Gamma}^* \Big\rangle_0 + \\ &+ \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\gamma}^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Соотношение (2.21) показывает, что

$$(Au, f_1^*)_\varepsilon + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\Gamma}^* \Big\rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\gamma}^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma} = (u, f_2^*)_\varepsilon$$

Тем самым по п. 2 теоремы 5.1 из [8, Глава 2, п. 5], примененной к оператору $u \mapsto \Big(Au, \frac{\partial u}{\partial n_A}\Big)$, получим, что

$$f_1^* \in H^2(\Omega_\varepsilon),\ g_{1,\Gamma}^* \in H^{3/2}(\Gamma),\ g_{1,\gamma}^* \in H^{1/2}(\varepsilon\gamma).$$

Теперь воспользуемся тем, что $g_{1,\Gamma}^* \in H^{3/2}(\Gamma)$. Поскольку отображение следа

$$H^m(\Omega_\varepsilon) \ni w \mapsto \Big(w\Big|_{\Gamma_\varepsilon}, \frac{\partial w}{\partial n_A} \Big) \in H^{m-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \times H^{m-3/2}(\Gamma_\varepsilon)$$

является непрерывным и сюръективным отображением, найдется $g_1^* \in H^3(\Omega_\varepsilon)$: $\dfrac{\partial g_1^*}{\partial n_A} = g_{1,\Gamma}^*$ на Γ и $\dfrac{\partial g_1^*}{\partial n_A} = 0$ на $\varepsilon\gamma$. Тогда в силу формулы Грина [1, Глава 1, п.3.4]

$$u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \Longrightarrow (Au, v)_\varepsilon = (u, A^* v)_\varepsilon - \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, v \Big\rangle_\varepsilon + \Big\langle u, \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}} \Big\rangle_\varepsilon \tag{2.23}$$

получим равенства

$$\langle g_{1,\Gamma}^*, v \rangle_0 = \Big\langle \frac{\partial g_1^*}{\partial n_A}, v \Big\rangle_\varepsilon = -(A g_1^*, v)_\varepsilon + \Big\langle g_1^*, \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}} \Big\rangle_\varepsilon.$$

Таким образом, соотношение (2.22) можно записать в виде

$$(A^* v, f_2^* + \lambda g_1^*) + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\Gamma}^* + \lambda g_1^* \Big\rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\gamma}^* + \lambda g_1^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma} = (v, \lambda A g_1^*)_\varepsilon.$$

Поскольку $\lambda A g_1^* \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, то снова, применяя п. 2 теоремы 5.1 из [8, Глава 2, п. 5] получим, что

$$f_2^* + \lambda g_1^* \in H^3(\Omega_\varepsilon),\ g_{2,\Gamma}^* + \lambda g_1^* \in H^{5/2}(\Gamma),\ g_{2,\gamma}^* + \lambda g_1^* \in H^{1/2}(\varepsilon\gamma).$$

Это с учетом теоремы о следах дает:

$$f_2^* \in H^3(\Omega_\varepsilon),\ g_{2,\Gamma}^* \in H^{5/2}(\Gamma),\ g_{2,\gamma}^* \in H^{1/2}(\varepsilon\gamma).$$

Теперь, взяв в (2.21), (2.22) $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_\varepsilon)$, получим, что $0 = (u, A^* f_1^* - f_2^*)_\varepsilon$ и $0 = (v, A f_2^*)$, откуда в силу плотности $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ следуют равенства

$$A^* f_1^* = 0, \quad A f_2^* = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.24}$$

Применив в (2.21) и (2.22) формулу Грина (2.23) и учтя равенства (2.24), получим, что

$$\begin{aligned}\forall\, u \in H^2(\Omega_\varepsilon) \quad 0 \;&=\; \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\Gamma}^* - f_1^* \Big\rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, g_{1,\gamma}^* - f_1^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma} + \\ &+ \Big\langle u, \frac{\partial f_1^*}{\partial n_{A^*}} \Big\rangle_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall\, v \in H^2(\Omega_\varepsilon) \quad 0 \;&=\; \Big\langle v, \lambda g_{1,\Gamma}^* + \frac{\partial f_2^*}{\partial n_A} \Big\rangle_0 + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\Gamma}^* - f_2^* \Big\rangle_0 + \\ &+ \Big\langle v, \frac{\partial f_2^*}{\partial n_A} \Big\rangle_{\varepsilon\gamma} + \Big\langle \frac{\partial v}{\partial n_{A^*}}, g_{2,\gamma}^* - f_2^* \Big\rangle_{\varepsilon\gamma},\end{aligned}$$

откуда в силу сюръективности отображения следа получим

$$
\begin{aligned}
&g^*_{1,\Gamma} - f^*_1 = 0,\ \frac{\partial f^*_1}{\partial n_{A^*}} \text{ на } \Gamma, \quad g^*_{1,\gamma} - f^*_1 \text{ на } \varepsilon\gamma,\\
&\lambda g^*_{1,\Gamma} + \frac{\partial f^*_2}{\partial n_A},\ g^*_{2,\Gamma} - f^*_2 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial f^*_2}{\partial n_A},\ g^*_{2,\gamma} - f^*_2 \text{ на } \varepsilon\gamma,
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

что с учетом равенств (2.24) дает

$$
\begin{cases}
Af^*_2 = 0, & A^* f^*_1 - f^*_2 = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\
\dfrac{\partial f^*_2}{\partial n_A} + \lambda f^*_1 = 0, & \dfrac{\partial f^*_1}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma,\\
\dfrac{\partial f^*_2}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial f^*_1}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \varepsilon\gamma.
\end{cases}
$$

Заметим, что (f^*_2, f^*_1) удовлетворяет однородной задаче (2.16), и, тем самым, как уже было показано, $f^*_2 = f^*_1 = 0$. Поэтому в силу (2.25) и все остальные элементы и равны нулю.

Последнее утверждение теоремы есть следствие свойства эллиптических краевых задач для одной неизвестной функции. ■

3. Предельная задача и априорные оценки погрешности приближения

Теперь мы покажем, что предельной для задачи (2.4), (2.5) будет следующая задача

$$
\begin{cases}
Az_0 = f(x), & A^* p_0 - z_0 = z_d, \quad x \in \Omega_\varepsilon, z_0, p_0 \in H^1(\Omega),\\
\dfrac{\partial z_0}{\partial n_A} + \lambda_0 p_0 = g(x), & \dfrac{\partial p_0}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma
\end{cases} \tag{3.1}
$$

$$
\big(\lambda_0 \in (0,\nu]\big) \wedge \Big(\lambda_0 |||p_0|||_0 \leqslant 1\Big) \wedge \Big((\nu - \lambda_0)\cdot(1 - \lambda_0 |||p_0|||_0) = 0\Big). \tag{3.2}
$$

Эта задача совпадает с системой оптимальности для задачи (1.1) — (1.3) в области с "заклееной" полостью, то есть с заменой Ω_ε на Ω и $\mathcal{U}_\varepsilon(r)$ на $\mathcal{U}(r) := \{u \in L_2(\Gamma) : |||u|||_0 \leqslant r\}$.

Теорема 2. *Пусть* λ_ε, z_ε *и решение задачи* (2.4), (2.5). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$
\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0,\ ||z_\varepsilon - z_0||_{\varepsilon,1} \longrightarrow 0,\ ||p_\varepsilon - p_0||_{\varepsilon,1} \longrightarrow 0.
$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется $\eta > 0$, и последовательность ε_m такие, что

$$
|\lambda_m - \lambda_0| + ||z_m - z_0||_{m,1} + ||p_m - p_0||_{m,1} \geqslant \eta, \tag{3.3}
$$

где $\lambda_m := \lambda_{\varepsilon_m}$, $z_m := z_{\varepsilon_m}$, $p_m := p_{\varepsilon_m}$, а $||\cdot||_{m,1}$ — норма в $H^1(\Omega_{\varepsilon_m})$.

Поскольку $0 < \lambda_m \leqslant \nu$ и $\lambda_m |||p_m|||_0 \leqslant 1$, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$
\lambda_m \longrightarrow \overline{\lambda},\ \lambda_m |||p_m|||_0 \longrightarrow \overline{\mu},\ (\nu - \overline{\lambda})\cdot(1 - \overline{\mu}) = 0. \tag{3.4}
$$

Если $\overline{\lambda} = 0$, то $\overline{\mu} = 1$ и, значит, $|||p_m|||_0 \longrightarrow \infty$, что противоречит соотношениям (2.8) и (2.11). Таким образом, $\nu \geqslant \overline{\lambda} > 0$.

Пусть $\overline{z}$, $\overline{p}$ — решение задачи

$$
\begin{cases}
A\overline{z} = f(x), & A^*\overline{p} - \overline{z} = z_d, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \overline{z}, p_0 \in H^1(\Omega),\\
\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial n_A} + \overline{\lambda}\overline{p} = g(x), & \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma.
\end{cases}
$$

Отметим, что разрешимость этой задачи при всех правых частях с нужной степенью гладкости получается аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1. При этом в силу условий на f и g справедливы вкючения $\overline{z}, \overline{p} \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Тогда $\widehat{z}_m := z_m - \overline{z}$, $\widehat{p}_m := p_m - \overline{p}$, удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} A\widehat{z}_m = 0, & A^*\widehat{p}_m - \widehat{z}_m = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \widehat{z}_m}{\partial n_A} + \overline{\lambda}\widehat{p}_m = (\overline{\lambda} - \lambda_m)p_m, & \dfrac{\partial \widehat{p}_m}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial \widehat{z}_m}{\partial n_A} = -\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial n_A}, & \dfrac{\partial \widehat{p}_m}{\partial n_{A^*}} = -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}}, \quad x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

В силу (2.17) имеем

$$||\widehat{z}||_{\varepsilon_m,1}, ||\widehat{p}||_{\varepsilon_m,1} = \mathcal{O}\Big(|\overline{\lambda} - \lambda_m| \cdot |||p_m|||_0 + \Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{z}}{\partial n_A}\Big|\Big|\Big|_m + \Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}}\Big|\Big|\Big|_m\Big), \varepsilon \to 0, \tag{3.5}$$

где $|||\cdot|||_m$ — норма в $L_2(\varepsilon_m\gamma)$.

Но в $|\overline{\lambda} - \lambda_m| \cdot |||p_m|||_0 \to 0$ силу ограниченности $\{\, |||p_m|||_0 \,\}$ и (3.4).

Поскольку $\overline{z}, \overline{p} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то

$$\Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{z}}{\partial n_A}\Big|\Big|\Big|_m, \quad \Big|\Big|\Big|\frac{\partial \overline{p}}{\partial n_{A^*}}\Big|\Big|\Big|_m = \mathcal{O}(\varepsilon_m).$$

В силу этого и соотношений (3.5) $|||p_m|||_0 \longrightarrow |||\overline{p}|||_0$ и, тем самым, $\overline{\lambda}$, $\overline{z}$, $\overline{p}$ есть решение задачи (3.1), (3.2), имеющей единственное решение. Поэтому $\overline{\lambda} = \lambda_0$, $\overline{z} = z_0$ и $\overline{p} = p_0$, что противоречит (3.3). ∎

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda_0 < \nu, \text{ и, тем самым, } \lambda_0|||p_0|||_0 = 1, \tag{3.6}$$

то есть в предельной задаче ограничения по существу.

Тогда в силу теоремы 2 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ условие (2.5) принимает вид

$$\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||_0 = 1. \tag{3.7}$$

Теорема 3. *Пусть $u_{\varepsilon,r}$ — решение задачи* (1.1) — (1.3) *с* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\varepsilon(r)$, $r \in [r_1; r_2]$, *удовлетворяющее условию* $|||u_{\varepsilon,r}|||_0 = r$. *Тогда*

$$\exists\, K > 0\, \exists\, \varepsilon_0 > 0\, \forall\, r, r' \in (r_1; r_2)\, \forall\, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0) \quad |||u_{\varepsilon,r} - u_{\varepsilon,r'}|||_0 \leqslant K \cdot |r - r'|.$$

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{z}_\varepsilon$ — решение задачи (1.1) при $u \equiv 0$, а оператор $\mathcal{F}_\varepsilon : L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega_\varepsilon)$ ставит в соответствие функции $u \in L_2(\Gamma)$ решение задачи (1.1) как функции из $L_2(\Omega)$. Тогда в точке $u_{\varepsilon,r}$ достигается минимум функционала $||\overset{\circ}{z}_\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon u - z_d||^2_\varepsilon + \nu^{-1}|||u|||^2_0$ на $\mathcal{U}_\varepsilon(r)$ — замкнутом шаре радиуса r в $L_2(\Gamma)$. Тогда в силу принципа Лагранжа $u_{\varepsilon,r}$ есть точка локального минимума и для

$$||\overset{\circ}{z}_\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon u - z_d||^2_\varepsilon + \nu^{-1}|||u|||^2_0 + \mu|||u|||^2_0, \quad \mu > 0.$$

Тем самым найдется $\mu_{\varepsilon,r}$ такое, что $\mathcal{F}^*_\varepsilon\big(\overset{\circ}{z}_\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon u_{\varepsilon,r} - z_d\big) + \big(\nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)u_{\varepsilon,r} = 0$ или

$$u_{\varepsilon,r} = \big(\mathcal{F}^*_\varepsilon\mathcal{F}_\varepsilon + \big(\nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)I\big)^{-1}\mathcal{F}^*_\varepsilon\big(z_d - \overset{\circ}{z}_\varepsilon\big), \tag{3.8}$$

где $\mathcal{F}^*_\varepsilon : L_2(\Omega_\varepsilon) \to L_2(\Gamma)$ — оператор, сопряженный к $\mathcal{F}_\varepsilon$, а I —- тождественный оператор в $L_2(\Gamma)$.

Используя спектральное представление самосопряженного оператора $\mathcal{F}^*_\varepsilon\mathcal{F}_\varepsilon$ (см., например, [11, гл. 4, § 4]) и вводя обозначение $w_\varepsilon := \mathcal{F}^*_\varepsilon\big(z_d - \overset{\circ}{z}_\varepsilon\big)$, из (3.8) получим

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,r} &= \int\limits_0^{M_\varepsilon} \big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)^{-1}\, d\, I_\sigma w_\varepsilon, \\ |||u_{\varepsilon,r}|||_0 &= \int\limits_0^{M_\varepsilon} \big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)^{-2}\, d\, |||I_\sigma w_\varepsilon|||_0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$|||u_{\varepsilon,r} - u_{\varepsilon,r'}|||^2_0 = \int\limits_0^{M_\varepsilon} \frac{\big(\mu_{\varepsilon,r} - \mu_{\varepsilon,r'}\big)^2 d\, |||I_\sigma w_\varepsilon|||^2_0}{\big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r}\big)^2\big(\sigma + \nu^{-1} + \mu_{\varepsilon,r'}\big)^2} \tag{3.10}$$

(здесь $\{I_\sigma\}$ — ортопроекторы, порождаемые оператором $\mathcal{F}_\varepsilon^*\mathcal{F}_\varepsilon : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$, а $M_\varepsilon = ||\mathcal{F}_\varepsilon^*\mathcal{F}_\varepsilon|| + \varepsilon = ||\mathcal{F}_\varepsilon||^2 + \varepsilon$).

Рассмотрим функцию

$$F(\mu) := \int\limits_0^{M_\varepsilon} \left(\sigma + \nu^{-1} + \mu\right)^{-2} d\,|||I_\sigma w_\varepsilon|||_0^2.$$

Тогда $r^2 = |||u_{\varepsilon,r}|||_0^2 \overset{(3.9)}{=} F(\mu_{\varepsilon,r}) \leqslant \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0^2$, то есть

$$r \leqslant \nu |||w_\varepsilon|||_0. \tag{3.11}$$

Отметим, что поскольку $\left(\sigma+\nu^{-1}+\mu\right)^{-2}$ строго убывает как функция от μ, то $F(\cdot)$ тоже строго убывает. Поэтому у $F(\cdot)$ есть обратная функция. Более того,

$$|F'(\mu)| = 2\left|\int\limits_0^{M_\varepsilon} \left(\sigma + \nu^{-1} + \mu\right)^{-3} d\,|||I_\sigma w_\varepsilon|||_0^2\right| \geqslant \frac{2|||w_\varepsilon|||_0^2}{\left(M_\varepsilon + \nu^{-1} + \mu\right)^3}. \tag{3.12}$$

Тогда

$$|||u_{\varepsilon,r} - u_{\varepsilon,r'}|||_0 \overset{(3.10)}{\leqslant} \nu^2\left|\mu_{\varepsilon,r} - \mu_{\varepsilon,r'}\right| \cdot |||w_\varepsilon|||_0 = \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot \left|F^{-1}(r^2) - F^{-1}(r'^2)\right| =$$

$$= \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot \left|(F^{-1})'(\widetilde{r})\right| \cdot |r^2 - r'^2| = \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot \left|F'(\widetilde{\mu})\right|^{-1} \cdot |r^2 - r'^2| \overset{(3.12)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \nu^2 |||w_\varepsilon|||_0 \cdot |r - r'| \cdot |r + r'| \frac{(M_\varepsilon + \nu^{-1} + \widetilde{\mu})^3}{2|||w_\varepsilon|||_0^2} \overset{(3.11)}{\leqslant} \frac{\nu^3 2r_2 |r - r'| (M_\varepsilon + \nu^{-1} + \mu_1)^3}{2r_1},$$

(здесь $\mu_1 := F^{-1}(r_1^2)$).

Оценим $||\mathcal{F}_\varepsilon||$, а следовательно и M_ε. Пусть $|||u|||_0 \leqslant 1$ и $z := \mathcal{F}_\varepsilon u$. Тогда по определению $\mathcal{F}_\varepsilon$

$$Az = 0,\ x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial z}{\partial n_A} = u,\ x \in \Gamma \quad \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial n_A} = 0,\ x \in \varepsilon\gamma,$$

поэтому $||z||_\varepsilon = \mathcal{O}\big(|||u|||_0\big) = \mathcal{O}(1)$. ∎

Теперь докажем основную аппроксимационную теорему

Теорема 4. *Пусть функции* $f_{i,m} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_{i,\Gamma,m} \in C^\infty(\Gamma)$, $g_{i,\gamma,m} \in C^\infty(\varepsilon\gamma)$ $(i = 1,2)$, *а* $\lambda_m(\varepsilon)$ *и* $h_m(\varepsilon)$ *— некоторые функции от* ε *и* $\lambda_m \in (0;\nu]$ *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$. *Если*

$$||f_{i,\varepsilon,m}||_\varepsilon,\ |||g_{i,\Gamma,m}|||_0,\ |||g_{i,\gamma,m}|||_{\varepsilon\gamma},\ |h_m(\varepsilon)| = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0, \tag{3.13}$$

а z_m, p_m *— решение задачи*

$$\begin{cases} Az_m = f(x) + f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^*p_m - z_m = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_m, p_m \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial n_A} + \lambda_m p_m = g(x) + g_{1,\Gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_m}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma,m}(x), \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial n_A} = g_{1,\gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_m}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma,m}(x), \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases}$$

$$\lambda_m |||p_m|||_0 = 1 + h_m, \tag{3.14}$$

то для $z_{\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_m$, $p_{\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_m$, $\lambda_{\varepsilon,m} := \lambda_\varepsilon - \lambda_m$, *где* z_ε, p_ε, λ_ε, *— решение задачи* (2.4), (3.7), *справедливы следующие асимптотические оценки:*

$$\begin{aligned} ||z_{\varepsilon,m}||_{H^2(\Omega_\varepsilon)},\ ||p_{\varepsilon,m}||_{H^2(\Omega_\varepsilon)},\ |\lambda_{\varepsilon,m}| &= \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0, \\ ||z_{\varepsilon,m}||_{C(\overline{\Omega_\varepsilon})},\ ||p_{\varepsilon,m}||_{C(\overline{\Omega_\varepsilon})} &= \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Доказательство. Возьмем $z_{m,1}$ и $p_{m,1}$ — решение краевой задачи

$$\begin{cases} Az_{m,1} = f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^* p_{m,1} - z_{m,1} = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_{m,1}, p_{m,1} \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_{m,1}}{\partial n_A} + \lambda_m p_{m,1} = g_{1,\Gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_{m,1}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\Gamma,m}(x), \quad x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial z_{m,1}}{\partial n_A} = g_{1,\gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_{m,1}}{\partial n_{A^*}} = g_{2,\gamma,m}(x), \quad x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

Тогда в силу оценок (2.17), (3.13) и неравенства $0 < \lambda_m \leqslant \nu$ получим, что

$$||z_{m,1}||_{\varepsilon,1}, ||p_{m,1}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0. \tag{3.16}$$

Теперь пара функций $z_{m,2} := z_m - z_{m,1}$ и $p_{m,2} := p_m - p_{m,1}$ удовлетворяет следующей краевой задаче

$$\begin{cases} Az_{m,2} = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^* p_{m,2} - z_{m,2} = 0, & z_{m,2}, p_{m,2} \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_{m,2}}{\partial n_A} + \lambda_m p_{m,2} = g(x), & \dfrac{\partial p_{m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial z_{m,2}}{\partial n_A} = g_{1,\gamma,m}(x), & \dfrac{\partial p_{m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \varepsilon\gamma. \end{cases}$$

Это означает, что функция $z_{m,2}(\cdot)$ есть решение задачи оптимального управления (1.1) — (1.3) с $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\varepsilon(r_m)$, где $r_m = \lambda_m|||p_{m,2}|||_0$ с оптимальным управлением $u_m = -\lambda_m p_{m,2}\big|_\Gamma$.

Но в силу (3.14) и (3.16)

$$\lambda_m^2|||p_{m,2}|||_0^2 = \lambda_m^2|||p_m - p_{m,1}|||_0^2 = \lambda_m^2\big(|||p_m|||_0^2 - 2\langle p_m, p_{m,1}\rangle_0 + |||p_{m,1}|||_0^2\big) =$$
$$= 1 + \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),$$

поэтому и $\lambda_m|||p_{2,m}||| = 1 + \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big)$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда по теореме 3 для $u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\big|_\Gamma$ и $u_m = -\lambda_m p_{2,m}\big|_\Gamma$ с учетом равенства (3.7) получим

$$|||u_\varepsilon - u_m|||_0 = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0. \tag{3.17}$$

Рассмотрим теперь функции $z_{\varepsilon,m,2} := z_\varepsilon - z_{m,2}$, $z_{\varepsilon,m,2} := z_\varepsilon - z_{m,2}$ Они удовлетворяют краевой задаче

$$\begin{cases} Az_{\varepsilon,m,2} = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ A^* p_{\varepsilon,m,2} - z_{m,2} = 0, & z_{\varepsilon,m,2}, p_{\varepsilon,m,2} \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ \dfrac{\partial z_{\varepsilon,m,2}}{\partial n_A} = u_\varepsilon(x) - u_m(x), & \dfrac{\partial p_{\varepsilon,m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial z_{\varepsilon,m,2}}{\partial n_A} = 0, & \dfrac{\partial p_{m,2}}{\partial n_{A^*}} = 0, \quad x \in \varepsilon\gamma, \end{cases}$$

Тем самым для любых φ, $\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_\varepsilon(\nabla z_{\varepsilon,m,2}, \nabla\varphi) + (a_0 z_{\varepsilon,m,2}, \varphi)_\varepsilon - \langle u_\varepsilon - u_m, \varphi\rangle_0, \\ (z_{\varepsilon,m,2}, \psi) &= \pi_\varepsilon(\nabla\psi, \nabla p_{\varepsilon,m,2}) + (a_0 p_{\varepsilon,m,2}, \psi)_\varepsilon. \end{aligned}$$

Положив в этих соотношениях $\varphi = z_{\varepsilon,m,2}$ и $\psi = p_{\varepsilon,m,2}$ с учетом (1.6) и (3.17), получим

$$||z_{\varepsilon,m,2}||_{\varepsilon,1}, ||p_{\varepsilon,m,2}||_{\varepsilon,1} = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big),\ \varepsilon \to 0. \tag{3.18}$$

Поскольку $z_{\varepsilon,m} = z_{\varepsilon,m,2} + z_{m,1}$, а $p_{\varepsilon,m} = p_{\varepsilon,m,2} + p_{m,1}$, то для получения окончательных оценок (3.15) для этих функций осталось применить неравенство треугольника для соответствуюших норм и уже полученные оценки (3.16) и (3.18), теорему 5.1 из [8, Глава 2, п. 5] и теоремы вложения [12].

Докажем теперь последнюю оставшуюся оценку для величины $|\lambda_{\varepsilon,m}|$.

Из теоремы 2 и соотношения (3.7) следует, что $\lambda_0|||p_0|||_0 = 1$. Поскольку $|||p_\varepsilon|||_0 \to |||p_0|||_0$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$|||p_\varepsilon|||_0^{-1} = \mathcal{O}(1),\ \varepsilon \to 0. \tag{3.19}$$

Наконец $|\lambda_{\varepsilon,m}| \cdot |||p_\varepsilon|||_0 = |||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_m p_\varepsilon|||_0 \leqslant |||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_m p_m|||_0 + \ |||\lambda_m p_m - \lambda_m p_\varepsilon|||_0 \overset{(3.17)}{=} \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big)$, что с учетом (3.19) дает окончательно $|\lambda_{\varepsilon,m}| = \mathcal{O}\big(\varepsilon^m\big)$. ■

4. Построение асимптотического разложения

Внешнее разложение ищем в виде асимптотических рядов

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{k-2} z_{k,l}(x)\ln^l\varepsilon, \qquad \mathcal{P}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{k-2} u_{k,l}(x)\ln^l\varepsilon,\\ \Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{k-2}\lambda_{k,l}\ln^l\varepsilon, \quad \varepsilon\to 0,\end{gathered} \tag{4.1}$$

а внутреннее разложение для функций $v(\xi) := z(\varepsilon\xi)$ и $w(\xi) := p(\varepsilon\xi)$, где ξ — внутренняя переменная ($x = \varepsilon\xi$), ищем в виде

$$\mathcal{V}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\sum_{m=0}^{i-2} v_{i,m}(\xi)\ln^m\varepsilon, \qquad \mathcal{W}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\sum_{m=0}^{i-2} w_{i,m}(\xi)\ln^m\varepsilon. \tag{4.2}$$

Как обычно, считаем, что $z_{k,i} = 0$, $p_{k,l} = 0$, $\lambda_{k,l} = 0$ при $l > k-3$ и $v_{i,m} = 0$, $w_{i,m} = 0$ при $m > i-2$.

Функции $z_{0,0}(x)$, $p_{0,0}(x)$ и число $\lambda_{0,0}$ – это решение предельной задачи (3.1), (3.6) $z_0(x)$, $p_0(x)$ и λ_0. При этом, как уже отмечалось, $z_0(x), p_0(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Для рядов (4.1) и (4.2) должно быть выполнено условие согласования [2]:

$$\forall\, n,m\in\mathbb{N} \quad \mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{A}_{n,x}\mathcal{Z} = \mathcal{A}_{n,x}\mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{V}, \quad \mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{A}_{n,x}\mathcal{P} = \mathcal{A}_{n,x}\mathcal{A}_{m,\xi}\mathcal{W}, \tag{4.3}$$

где $\mathcal{A}_{n,x}$ ($\mathcal{A}_{m,\xi}$) — оператор взятия частичной суммы асимптотического разложения функций от ε, x (ε, ξ) с точностью до $o\big(\varepsilon^n\big)$ $\big(o\big(\varepsilon^m\big)\big)$, при этом асимптотические разложения функций вида $b(x/\varepsilon)$ берутся при $\xi = x/\varepsilon \to \infty$ (а функций вида $b(\varepsilon\xi)$ при $x = \varepsilon\xi \to 0$).

Функции $z_{k,l}(x)$, $pu_{k,l}(x)$ и числа $\lambda_{k,l}$ являются решениями задач

$$\begin{cases} Az_{k,l}(x) = 0, \quad x\in\Omega\setminus O,\\ A^*p_{k,l} - z_{k,l} = 0, \quad z_{k,l}, p_{k,l} \in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{O\}),\\ \dfrac{\partial z_{k,l}}{\partial n_A} + \lambda_0 p_{k,l}(x) = -\lambda_{k,l}p_0(x) + g_{k,l}(x), \quad \dfrac{\partial p_{k,l}}{\partial n_{A*}} = 0 \quad x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{4.4}$$

где $g_{k,l}(x) = -\sum\limits_{s=1}^{k-1}\sum\limits_{\sigma}\lambda_{s,\sigma}p_{k-s,l-\sigma}(x)$ – полностью определяются решениями предыдущих уравнений (здесь $\sigma : s-3 \geq \sigma \geq 0$, $k-l-3 \geq s-\sigma$, $l \geq \sigma$).

Для получения аналогичных уравнений для $v_{i,m}(\xi)$ и $w_{i,m}(\xi)$ необходимо разложить операторы A, A^*, ∂/n_A и ∂/n_{A^*} в окрестности точки O в ряд при $x \to 0$. В силу (1.6) при $x \longrightarrow 0$ получим

$$\begin{gathered} A = -\Delta - \sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x),\\ A^* = -\Delta - \sum_{i=1}^{\infty} Q^*_{i,2}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q^*_{i,1}(x,D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x),\\ \frac{\partial}{\partial n_A} = \frac{\partial}{\partial n} + \sum_{i=1}^{\infty} q_{i,1}(x,D),\ \frac{\partial}{\partial n_{A^*}} = \frac{\partial}{\partial n} + \sum_{i=1}^{\infty} q^*_{i,1}(x,D), \end{gathered}$$

где $Q_{i,j}(x,D)$, $Q^*_{i,j}(x,D)$, $q_{i,j}(x,D)$ и $q^*_{i,j}(x,D)$ — многочлены от $x = (x_1,x_2,x_3)$ и $D = \Bigl(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\Bigr)$ однородные степени i по x и степени j по D (при этом оператор D действует раньше умножения). Отметим, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x)$ — это ряд Маклорена функции $a_0(x)$.

Подставляя эти разложения в систему для функций v и w, получим для функций $v_{i,m}$ и $w_{i,m}$ следующие задачи

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta v_{0,0}(\xi) &=& 0, \qquad \Delta v_{0,0}(\xi)=0,\\ \Delta v_{1,0}(\xi) &=& (Q_{1,2}(\xi,D)+Q_{0,1}(\xi,D))v_{0,0}(\xi),\\ \Delta w_{1,0}(\xi) &=& (Q^*_{1,2}(\xi,D)+Q^*_{0,1}(\xi,D))w_{0,0}(\xi),\\ \Delta v_{i,m}(\xi) &=& \sum\limits_{s=1}^{i}\Bigl(Q_{s,2}(\xi,D)+Q_{s-1,1}(\xi,D)+\\ && +Q_{s-2,0}(\xi)\Bigr)v_{i-s,m}(\xi)-f_{1,i-2,m}(\xi),\\ \Delta w_{i,m}(\xi) &=& \sum\limits_{s=1}^{i}\Bigl(Q^*_{s,2}(\xi,D)+Q^*_{s-1,1}(\xi,D)+\\ && +Q_{s-2,0}(\xi)\Bigr)w_{i-s,m}(\xi)+v_{i-2,m}-f_{2,i-2,m}(\xi), \end{array}\right. \qquad \xi\notin\omega \tag{4.5}$$

с граничными условиями

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v_{0,0}}{\partial n}=0, \quad \dfrac{\partial w_{0,0}}{\partial n}=0, \quad \dfrac{\partial v_{1,0}}{\partial n}=0, \quad \dfrac{\partial w_{1,0}}{\partial n}=0,\\ \dfrac{\partial v_{i,m}}{\partial n}=-\sum\limits_{s=1}^{i} q_{s,i}v_{i-s,m}, \quad \dfrac{\partial w_{i,m}}{\partial n}=-\sum\limits_{s=1}^{i} q_{s,i}w_{i-s,m}, \end{array}\right. \qquad \xi\in\omega. \tag{4.6}$$

Здесь $f_{1,i-2,m}$ и $f_{2,i-2,m}$ порождены разложениями при $x\to 0$ функций $f(x)$ и $z_d(x)$, соответственно.

Дополнительное условие (3.7) принимает следующий вид

$$\lambda_0\langle p_0,p_{k,l}\rangle_0+\lambda_{k,l}|||p_0|||_0^2=\delta_{k,l}, \tag{4.7}$$

где числа $\delta_{k,l}$ определяются предыдущеми $p_{k,l}$ и $\lambda_{k,l}$.

Прежде всего отметим, что $v_{0,0}=z_0(0)$ и $w_{0,0}=p_0(0)$, однако в силу (4.3) $v_{1,0}$ и $w_{1,0}$ не константы, тем самым эти функции неограничены при $\xi\to\infty$. Это в свою очередь порождает неограниченность и остальных функций $z_{k,l}$, $p_{k,l}$, $v_{i,m}$, $w_{i,m}$. Тем самым данная задача бисингулярна. В [3] найднены классы функций неограниченных при $x\to 0$ и при $\xi\to\infty$, соответственно, в которых задача, аналогичная рассматриваемой здесь, разрешима. В этих же классах функций разрешимы и задачи (4.4) — (4.6). Доказательство этого факта почти дословно повторяет доказательства из [3, § 3].

Поскольку решение системы (4.4) можно представить в виде

$$z_{k,l}(x)=\lambda_{k,l}\overline{z}_0(x)+\overline{Z}_{k,l}, \quad p_{k,l}(x)=\lambda_{k,l}\overline{p}_0(x)+\overline{P}_{k,l}, \tag{4.8}$$

где $\overline{z}_0,\overline{p}_0\in C^\infty(\overline{\Omega})$ – решение задачи

$$\left\{\begin{array}{ll} A\overline{z}_0=0, \quad A^*\overline{p}_0=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\overline{z}_0}{\partial n_A}+\lambda_0\overline{p}_0=-p_0, \quad \dfrac{\overline{p}_0}{\partial n_{A^*}}=0, & x\in\Gamma, \end{array}\right. \tag{4.9}$$

а $\overline{Z}_{k,l},\overline{P}_{k,l}\in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{O\})$ — решение неоднородной системы

$$\left\{\begin{array}{ll} A\overline{Z}_{k,l}=0, \quad A^*\overline{P}_{k,l}-\overline{Z}_{k,l}=0, & x\in\Omega\setminus O,\\ \dfrac{\partial\overline{Z}_{k,l}}{\partial n_A}+\lambda_0\overline{P}_{k,l}=g_{k,l}(x), \quad \dfrac{\partial\overline{P}_{k,l}}{\partial n_{A*}}=0, & x\in\partial\Omega, \end{array}\right.$$

то уравненя (4.7) принимают вид

$$\lambda_{k,l}\big(\lambda_0\langle p_0,\overline{p}_0\rangle_0+|||p_0|||_0^2\big)=\overline{\delta}_{k,l}. \tag{4.10}$$

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$\lambda_0\langle p_0,\overline{p}_0\rangle_0+|||p_0|||_0^2\neq 0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Умножив первое равенство в системе (4.9) на $\overline{p}_0$ и применив формулу Грина (2.23) для области Ω, получим равенство

$$||\overline{z}_0||_0^2+\lambda_0|||\overline{p}_0|||_0^2=-\langle p_0,\overline{p}_0\rangle. \tag{4.12}$$

Предположим теперь, что соотношение (4.11) неверно. Тогда

$$-\langle p_0,\overline{p}_0\rangle=\lambda_0^{-1}|||p_0|||_0^2 \ \text{ и} \tag{4.13}$$

$$p_0\perp\big(p_0+\lambda_0^{-1}\overline{p}_0\big)\ \text{ в }\ L_2(\Gamma). \tag{4.14}$$

Из равенств (4.12) и (4.13) получим, что

$$\lambda_0||\overline{z}_0||_0^2+\lambda_0^2|||\overline{p}_0|||_0^2=|||p_0|||_0^2. \tag{4.15}$$

С другой стороны, в силу соотношения (4.14) и теоремы Пифагора

$$\lambda_0^2|||\overline{p}_0|||_0^2=|||p_0|||_0^2+|||p_0+\lambda_0\overline{p}_0|||_0^2. \tag{4.16}$$

Из равенств (4.15) и (4.16) следует, что $\overline{z}_0=0$ и $\big(p_0+\lambda_0^{-1}\overline{p}_0\big)\big|_\Gamma=0$. Но тогда в силу (4.9) $\overline{p}_0\big|_\Gamma=0$ а, значит, и $p_0\big|_\Gamma=0$, что противоречит соотношению (3.6). ∎

Построение функций $z_{k,l}(x)$, $p_{k,l}(x)$, $v_{i,m}(\xi)$, $w_{i,m}(\xi)$ и чисел $\lambda_{k,l}$ идет стандартным для метода согласования асимптотических разложений [2] способом. Функции $z_{0,0}(\varepsilon\xi)$, $p_{0,0}(\varepsilon\xi)$ определяют главные члены асимптотических разложений функций $v_{i,m}(\xi)$, $v_{i,m}(\xi)$ $(i>0)$ при $\xi\to\infty$. Определив по ним функции $v_{1,0}(\xi)$ и $w_{1,0}(\xi)$ мы из разложения функций $v_{1,0}(x/\varepsilon)$ и $w_{1,0}(x/\varepsilon)$ при $x/\varepsilon\to\infty$ получим главные члены асимптотики при $x\to 0$ функций $z_{k,l}(x)$, $p_{k,l}(x)$ $(k>0)$. Найдя $\overline{Z}_{k,l}(x)$, $\overline{P}_{k,l}(x)$ с заданной асимптотикой, из уравнения (4.10) находим $\lambda_{1,0}(x)$. Теперь $z_{1,0}(x)$ и $p_{1,0}(x)$ определены и, вместе с ними, определены следующие члены разложений $v_{i,m}(\xi)$ и $v_{i,m}(\xi)$ $(i>1)$, и т. д.

Доказательство того, что таким образом построенные согласованные в смысле (4.3) ряды (4.1) и (4.2) есть асимптотика решения задачи (2.4), (3.7) проводится аналогично тому, как это сделано в [3, § 2,§ 5]). Тем самым, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.6), (1.7) *и* (3.6). *Тогда решение задачи* (2.4), (3.7) *расскадываются в равномерные в области* $C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{O\})$ (*в смысле норм* $||\cdot||_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$ *и* $||\cdot||_{C(\overline{\Omega_\varepsilon})}$) *асимптотические ряды вида* (4.1), (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* М.: Мир. 1972. 414 с.
2. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989. 336 с.
3. Данилин А.Р. *Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью* // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
4. Данилин А.Р., Зорин А.Р. *Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления* // Труды Института математики и механики. 2009. Т.15. № 4. С. 95–107.
5. Данилин А.Р., Зорин А.П. *Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления* // ДАН, 2011. Т. 440, № 4. С. 1–4.
6. Капустян В.Е. *Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах* // Докл. АН Украины, сер. Математика, естествознание, технические науки, 1992, № 2, с. 70–74.

7. Капустян В.Е. *Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением* // ДАН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
8. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир, 1971. 371 с.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа* М.: Наука, 1964. 540 с.
10. J. Peetre *Another approach to elliptic boundary problems* // Comm. Pure. Appl. Math. 1961. V. 14. P. 711–731.
11. Морен К. *Методы гильбертова пространства.* М.: Мир, 1965. 570 с.
12. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Л.:Изд-во ЛГУ. 1950. 255 с.

Алексей Руфимович Данилин,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской 16
620990, г. Екатеринбург, Россия,
профессор кафедры математического анализа и теории функций УрФУ
E-mail: dar@imm.uran.ru