ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 28-64.

УДК 517.928:517.984

ВОЗМУЩЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА УЗКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ В n-МЕРНОЙ ОБЛАСТИ

А.Р. БИКМЕТОВ, Р.Р. ГАДЫЛЬШИН

Аннотация. Исследуется дискретный спектр эллиптического оператора второго порядка в n-мерной области, $n \geqslant 2$, возмущенного потенциалом, зависящим от двух малых параметров, один из которых описывает диаметр носителя потенциала, а обратное значение второго соответствует максимуму абсолютного значения потенциала. Приведено соотношение между этими параметрами, при котором имеет место обобщенная сходимость возмущенного оператора к невозмущенному. При выполнении этого соотношения построены асимптотики по малым параметрам собственных значений возмущенного оператора.

Ключевые слова: Эллиптический оператор, возмущение, согласование асимптотический разложений.

1. Введение

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, причем, Ω может и совпадать с $\mathbb{R}^n$, $a_{ij}(x)$, $a(x)$ – локально интегрируемые функции в Ω такие, что

$$\int\limits_{\Omega} a(x)|u(x)|^2 dx \geqslant c(a)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad c(a) > 0, \tag{1.1}$$

для любых функций u из $L_2(\Omega)$, для которых этот интеграл существует, $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\alpha_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \qquad \alpha_1 > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{1.2}$$

Так как

$$\mathfrak{h}_0(u,v) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + (au, v)_{L_2(\Omega)} \tag{1.3}$$

является в силу (1.1) и (1.2) полуторалинейной положительной симметрической формой, то будем рассматривать ее как скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ всех функций, для которых

$$\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} := \sqrt{\mathfrak{h}_0(u,u)} < \infty.$$

Так как $\widetilde{W}_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ в силу (1.1) и (1.2), то квадратичная форма

$$\mathfrak{h}_0[u] := \mathfrak{h}_0(u,u) \tag{1.4}$$

замкнута в $L_2(\Omega)$ (см., например, [1, глава VI, теорема 1.1]). А так как подмножество функций из $C^\infty(\Omega)$, равных нулю в окрестности границы $\partial\Omega$ (если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$) и при больших x

A.R. Bikmetov, R.R. Gadyl'shin, Perturbation of an elliptic operator by a narrow potential in an n-dimensional domain.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (12-01-00445) и ФЦП (02.740.110612).
Поступила 10 мая 2012 г.

(если Ω неограниченная область), очевидно, является подмножеством $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и плотно в $L_2(\Omega)$, то и квадратичная форма $\mathfrak{h}_0$ плотно определена в $L_2(\Omega)$. Следовательно (см., например, [1, глава VI, теоремы 2.1,2.6]), существует ассоциированный с $\mathfrak{h}_0$ самосопряженный оператор $\mathcal{H}_0$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{h}_0) = \widetilde{W}_2^1(\Omega)$$

(т.е. такой, что $(\mathcal{H}_0 u, v)_{L_2(\Omega)} = \mathfrak{h}_0(u, v)$ для любых u, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$).

Всюду далее, не ограничивая общности, будем считать, что начало координат лежит в Ω. Обозначим

$$\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}[u] := \mathfrak{h}_0[u] + \mu^{-1} \left(V_\varepsilon u, u\right)_{L_2(\Omega)}, \tag{1.5}$$

где

$$0 < \varepsilon \ll 1, \qquad \mu(\varepsilon) > 0,$$

V_ε — семейство равномерно ограниченных по ε функций из $L_\infty(\Omega)$, носители которых лежат в n-мерном шаре радиуса $\gamma\varepsilon$ с центром в начале координат для некоторого $\gamma > 0$.

Так как квадратичная форма $\mu^{-1} \left(V_\varepsilon u, u\right)_{L_2(\Omega)}$, очевидно, ограничена на $L_2(\Omega)$, то квадратичная форма $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ замкнута и плотно определена в $L_2(\Omega)$, причем, $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}) = \widetilde{W}_2^1(\Omega)$. Обозначим через $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ самосопряженный оператор, ассоциированный с квадратичной формой $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}[u]$.

Замечание 1.1. *Если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, то обозначим через $\widetilde{W}_{2,0}^1(\Omega)$ замыкание по норме $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ подмножества функций из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega$. Легко видеть, что квадратичные формы $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$, определяемые на $\widetilde{W}_{2,0}^1(\Omega)$ равенствами (1.3), (1.4) и (1.5), соответственно, являются симметричными, замкнутыми и плотно определенными в $L_2(\Omega)$. Для самосопряженных операторов, ассоциированных с этими формами, сохраним обозначение $\mathcal{H}_0$.*

В первой части работы доказывается сходимость собственных значений оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ к собственным значениям оператора $\mathcal{H}_0$ (в случае существования последних), когда

$$\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon) = o\,(1)\,, \tag{1.6}$$

где $\beta_2(\varepsilon) = \varepsilon^2\,|\ln\varepsilon|$, $\beta_n(\varepsilon) = \varepsilon^2$ при $n \geqslant 3$.

Ясно, что если, например,

$$\begin{aligned} &V_\varepsilon(x) = V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad V \in C_0^\infty(\Omega), \\ &a_{ij},\, a \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{если } \Omega = \mathbb{R}^n, \\ &a_{ij},\, a \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \partial\Omega \in C^\infty, \quad \text{если } \Omega \neq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.7}$$

то операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ являются расширениями по Фридрихсу дифференциальных операторов H_0 и $H_{\mu,\varepsilon}$ в $L_2(\Omega)$, определяемых соответственно как

$$H_0 u := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u, \qquad H_{\mu,\varepsilon} = H_0 u + \mu^{-1}V_\varepsilon(x)u \tag{1.8}$$

на функциях, удовлетворяющих при $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ дополнительно граничному условиям Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\cos(x_i, \mathbf{n}) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, если операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ ассоциированы с квадратичными формами, определенными на $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, и граничному условию Дирихле

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

если операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ ассоциированы с квадратичными формами, определенными на $\widetilde{W}^1_{2,0}(\Omega)$.

Во основной второй части статьи при выполнении условий (1.7) будут построены полные асимптотические разложения собственных значений оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, сходящихся к собственным оператора $\mathcal{H}_0$ как в случае простого предельного собственного значения оператора $\mathcal{H}_0$, так и в случае двукратного. Однако для строгого обоснования построенных асимптотик придется наложить более жесткое (нежели (1.6)) ограничение:

$$\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\tau}\right), \tag{1.9}$$

где $\tau > 0$ — любое число.

Как будет видно из дальнейшего вывода полных асимптотик собственных значений, для их формального построения достаточно было бы потребовать лишь бесконечную дифференцируемость функций $a_{ij}(x)$, и $a(x)$ в окрестности нуля. Более жесткие условия (1.7) наложены лишь для того, чтобы избежать несущественной, но громоздкой детализации в обозначениях и доказательствах.

Заметим, что краевые задачи для оператора Лапласа в ограниченных областях с подобными возмущениями, зависящими от одного параметра, рассматривались в [2], [3]. В [2] для трехмерной области была доказана сходимость собственных значений в случае $\mu = \varepsilon^{\tau}$, $\tau < 2$ и построена асимптотика собственного значения возмущенной краевой задачи, сходящегося к простому собственному значению предельной задачи. В [3] для n-мерной ограниченной области была доказана сходимость собственного значения возмущенного оператора в случае, когда $\mu = \varepsilon^{\tau}$, $\tau < 1$, а собственное значение предельного оператора — простое, и построена его двучленная асимптотика. В обеих этих работах при доказательстве сходимости существенным была компактность вложения W_2^1 в L_2 для ограниченных областей. Как уже упоминалась выше, асимптотики строились только для случая простого собственного значения предельной задачи. Причем, для задачи в трехмерной области, рассмотренной в [2], дополнительно предполагалось, что, во-первых, собственная функция предельной задачи не обращается в нуль в точке сжатия носителя возмущающего потенциала, а во-вторых, среднее значение (интеграл) этого потенциала не равно нулю. В [3] при построении двучленной асимптотики были сняты два последних ограничения, но наложено более жесткое (по сравнению [2]) условие на рост возмущающего потенциала ($\tau < 1$). Как будет показано ниже (см. замечание 2.1), влияние равенства нулю среднего значения возмущающего потенциала на первый член теории возмущений существенно различно для случаев $\tau < 1$ и $\tau > 1$. В заключении раздела заметим, что подобные возмущения дифференциального оператора второго порядка в одномерном случае рассматривались в [4],[5],[6].

2. Формулировка основных утверждений

В следующем разделе будет доказана

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие (1.6). Тогда имеет место сходимость $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon} \to \mathcal{H}_0$ при $\varepsilon \to 0$ в обобщенном смысле (резольвентная сходимость).*

Из этой теоремы и [1, глава IV, теорема 3.16] вытекает

Следствие 1. *Пусть λ_0 — собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$ кратности m и выполнено равенство (1.6). Тогда при $\varepsilon \to 0$ к λ_0 сходятся собственные значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,j}$ оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, совокупная кратность которых также равна m, а для соответствующего проектора $\mathcal{P}_{\mu,\varepsilon}$ имеет сходимость по норме к проектору $\mathcal{P}_0$, соответствующему собственному значению λ_0.*

Основным содержанием работы, которому посвящена остальная часть статьи, является доказательство методом согласования асимптотических разложений [7], [8], сформулированных ниже теорем 2.2–2.4, при выполнении дополнительных условий гладкости (1.7), более жесткого требования (1.9) на отношение параметров ε и μ и не ограничивающего общности условия $a_{ij}(0) = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера.

Прежде, чем перейти к формулировки основных теорем, введем некоторые обозначения:

$$\langle g \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx, \qquad \langle g \rangle_i := \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i g(x)\,dx, \qquad \langle g \rangle_{ij} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i x_j g(x)\,dx,$$

$$\mathcal{G}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln r \quad \text{при } n = 2, \qquad \mathcal{G}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)|S_n|} r^{-n+2} \quad \text{при } n \geqslant 3,$$

$$z_0^{(1)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y)V(y)dy.$$

Здесь и всюду далее, $|S_n|$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Положим $\delta(n) = 0$ при нечетных n и $\delta(n) = 1$ при нечетных n.

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие (1.9), λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция.*

Тогда, если и $\psi_0(0) \neq 0$, то собственное значение $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, сходящееся к λ_0, имеет асимптотику

$$\begin{aligned} \lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^n \mu^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=2j}^{\infty} \lambda_{n+i,j+1} \varepsilon^i \mu^{-j} \\ + d(n)\varepsilon^{2n}\mu^{-2}\ln\varepsilon \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty} \lambda_{2n+i,j+2,p+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\lambda_{n,1} = \psi_0^2(0)\left\langle V \right\rangle, \tag{2.2}$$

$$\lambda_{n+2,2} = -\,\psi_0^2(0)\left\|\nabla z_0^{(1)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.3}$$

Если, к тому же, $a_{ij}(x) \equiv \delta_j^i$ (т.е. $H_0 = -\Delta + a(x)$), то

$$\lambda_{n+1,1} = (n-2)\psi_0(0)\sum_{m=1}^{n}\left\langle V \right\rangle_m \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0), \qquad n \geqslant 3, \tag{2.4}$$

$$\lambda_{3,1} = \psi_0(0)\sum_{m=1}^{2}\left\langle V \right\rangle_m \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0), \qquad n = 2. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. *Из теоремы следует, что если $\langle V \rangle = 0$, то*

$$\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\left(\lambda_{n+1,1} + o\left(1\right)\right), \quad \text{если } \varepsilon = o(\mu)\ ,$$
$$\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^{n+2}\mu^{-2}\left(\lambda_{n+2,2} + o\left(1\right)\right), \quad \text{если } \mu = o(\varepsilon).$$

То есть при $\langle V \rangle = 0$ порядок малости первого члена теории возмущений для $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ заметно различается для случаев $\varepsilon = o(\mu)$ и $\mu = o(\varepsilon)$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.*

Тогда, если и $\psi_0(0) = 0$, *то собственное значение* $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ *оператора* $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, *сходящееся к* λ_0, *имеет асимптотику*

$$\begin{aligned}\lambda^{\mu,\varepsilon} =&\lambda_0 + \varepsilon^{n+2}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\lambda_{n+2+i,j+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\\ &+ d(n)\varepsilon^{2n+2}\mu^{-2}\ln\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon\lambda_{2n+i+2,j+2,p+1},\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\lambda_{n+2,1} = \nabla\psi_0(0)\mathcal{V}\nabla\psi_0(0), \tag{2.7}$$

а $\mathcal{V}$ *— симметричная* $n\times n$*-матрица с компонентами* $\langle V\rangle_{km}$.

Пусть λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. Из следствия 1 вытекает, что для сходящихся к λ_0 собственных значений оператора $H_{\mu,\varepsilon}$ возможны следующие случаи: либо это два простых собственных значения, либо это одно двукратное собственное значение, либо для разных ε имеет место один из этих вариантов. И даже, если к λ_0 сходится два простых собственных значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$, то нельзя утверждать, что соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции $\psi^{\mu,\varepsilon,j}$ имеют предел. Следствие 1 лишь гарантирует, что из любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_m} \to 0$ такую, что на ней имеет место сходимость $\psi^{\mu,\varepsilon,j} \to \psi_0^{(j)}$ в $L_2(\Omega)$, где $\psi_0^{(j)}$ — ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора $\mathcal{H}_0$, соответствующие λ_0. Однако, эти пределы могут меняться в зависимости от выбора подпоследовательности $\varepsilon_{k_m} \to 0$.

В работе рассматривается случай наиболее общего положения:

$$|\psi_0^{(1)}(0)| + |\psi_0^{(2)}(0)| \neq 0. \tag{2.8}$$

Тогда, очевидно, эти собственные функции можно выбрать так, что

$$\psi_0^{(1)}(0) \neq 0, \qquad \psi_0^{(2)}(0) = 0. \tag{2.9}$$

Будет доказана следующая

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие (1.9),* $\langle V\rangle \neq 0$, λ_0 *— двукратное собственное значение оператора* $\mathcal{H}_0$, $\psi_0^{(1)}$ *и* $\psi_0^{(2)}$ *— соответствующие ортонормированные в* $L_2(\Omega)$ *собственные функции, удовлетворяющие условию (2.8) и выбранные в соответствии с (2.9).*

Тогда существуют два простые собственные значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ *и* $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$ *оператора* $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, *сходящееся к* λ_0, *и они имеют асимптотики*

$$\begin{aligned}\lambda^{\mu,\varepsilon,1} = \lambda_0 &+ \varepsilon^{n}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\lambda^{(1)}_{n+i,j+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\\ &+ d(n)\varepsilon^{2n}\mu^{-2}\ln\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon\lambda^{(1)}_{2n+i,j+2,p+1},\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{\mu,\varepsilon,2} =&\lambda_0 + \varepsilon^{n+2}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\lambda^{(2)}_{n+2+i,j+1}\varepsilon^i\mu^{-j}\\ &+ d(n)\varepsilon^{2n+2}\mu^{-2}\ln\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{i=2j+(n-2)p}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\ln^p\varepsilon\lambda^{(2)}_{2n+i+2,j+2,p+1},\end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$\lambda_{n,1}^{(1)} = \left(\psi_0^{(1)}(0)\right)^2 \langle V\rangle, \tag{2.12}$$

$$\lambda_{n+2,1}^{(2)} = \nabla\psi_0^{(2)}(0)\widetilde{\mathcal{V}}\nabla\psi_0^{(2)}(0), \tag{2.13}$$

$\widetilde{\mathcal{V}}$ *— симметричная* $n\times n$*-матрица с компонентами*

$$\langle V\rangle_{mi} - (n-2)\frac{\langle V\rangle_m \langle V\rangle_i}{\langle V\rangle}, \quad n\geqslant 3, \qquad \langle V\rangle_{mi} - \frac{\langle V\rangle_m \langle V\rangle_i}{\langle V\rangle}, \quad n=2,$$

а соответствующие собственные функции $\psi^{\mu,\varepsilon,s}$ *сходятся к* $\psi_0^{(s)}$ *в* $L_2(\Omega)$.

Из теоремы, в частности, следует, что если выполнено условие (2.8) и $\langle V\rangle \neq 0$, то двукратное собственное значение λ_0 при рассматриваемом возмущении расщепляется на два простых собственных значения, а соответствующие собственные функции сходятся к собственным функциям оператора $\mathcal{H}_0$, выбранным в соответствии с (2.9).

В работе также построены полные асимптотические разложения соответствующих собственных функций.

3. Доказательство теоремы 2.1

Из определения квадратичных форм $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ и функции V следует, что, во-первых, эти формы ограничены снизу, а во-вторых, справедлива следующая оценка:

$$|(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}-\mathfrak{h}_0)[u]| = \mu^{-1}\left|\int\limits_{\Omega} V_\varepsilon(x)|u(x)|^2dx\right| \leqslant C\mu^{-1}\int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon}|u(x)|^2dx, \tag{3.1}$$

где $C>0$ — постоянная, не зависящая от ε.

Пусть B — n-мерный шар с центром в начале координат и радиусом, равным трем. Не ограничивая общности, будем считать, что $\overline{B}\subset\Omega$. Из ([9, Гл. 3, лемма 5.1]) и [10] для $n\geqslant 3$ и $n=2$ соответственно следует, что для любой функции $v\in C_0^\infty(B)$ справедливо неравенство:

$$\int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon}|v(x)|^2dx \leqslant C_1(\gamma)\beta_n(\varepsilon)\int\limits_B|\nabla v(x)|^2dx, \tag{3.2}$$

где константа C_1 не зависит от ε. Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t<1$ и нулю при $t>2$.

Так как $\widetilde{W}_2^1(\Omega)\subset W_2^1(\Omega)$ в силу (1.1), (1.2), то для любой функции $u\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ согласно (3.2), (1.1), (1.2) последовательно получаем, что

$$\int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon}|u(x)|^2dx = \int\limits_{|x|<\gamma\varepsilon}|u(x)\chi(|x|)|^2dx \leqslant C_1\beta_n(\varepsilon)\int\limits_B|\nabla(u(x)\chi(|x|)|^2dx$$

$$\leqslant C_2\beta_n(\varepsilon)\int\limits_\Omega\left(|\nabla u(x)|^2+|u(x)|^2\right)dx \leqslant C_3\beta_n(\varepsilon)\mathfrak{h}_0[u],$$

где C_2, C_3 — некоторые постоянные, независящие от u. Из этого неравенства и неравенства (3.1) вытекает, что

$$|(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}-\mathfrak{h}_0)[u]| \leqslant C_3C\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon)\mathfrak{h}_0[u]$$

для любой функции $u\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)=\mathcal{D}(\mathfrak{h}_0)=\mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon})$. Так как квадратичные формы $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ плотно определены в $L_2(\mathbb{R})$, ограничены снизу и замкнуты, а $\mu^{-1}\beta_n(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ в силу (1.6), то из последней оценки и [1, Глава VI, теорема 3.6] следует справедливость утверждения доказываемой теоремы.

4. Вспомогательные утверждения

Всюду далее в тексте считаются выполненными условия (1.7) на функцию V_ε и коэффициенты дифференциального выражения H_0, определенного в (1.8), и не ограничивающее общности предположение, что $a_{ij}(0) = \delta_i^j$, где, напомним, δ_i^j — символ Кронекера.

Также, всюду далее, $r = |x|$, через $P_k(x)$, $Q_k(x)$ и $R_k(x)$ будем обозначать однородные полиномы степени k, через $Y_k(x)$, $Z_k(x)$ — однородные гармонические полиномы степени k, а через $Q_{i,j}(x, D)$ — однородные полиномы степени j относительно символа дифференцирования $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_q = \partial/\partial x_q$, коэффициентами которых являются однородные полиномы степени i. Для целых j под $T_j(x)$ будем понимать однородные функции степени k, представимые в виде $R_{j+k}(x)r^{-k}$ хотя бы для какого-нибудь целого k.

В этих обозначениях для дифференциального выражения H_0 при $r \to 0$ справедливо представление

$$H_0 = -\Delta + \sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(x, D) + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(x, D) + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x, D). \tag{4.1}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ множество рядов вида

$$\mathcal{E}(x) = \Phi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(x), \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x) =& b \ln r + c, \qquad \Phi_j(x) = r^{-2j} P_{3j}(x) + \ln r R_j(x) \quad \text{при } n = 2, j \geqslant 1,\\
\Phi_0(x) =& b r^{2-n} \quad \text{при } n \geqslant 3,\\
\Phi_j(x) =& r^{2-n-2j} P_{3j}(x) \quad \text{при } n \geqslant 4, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3,\\
\Phi_j(x) =& r^{2-n-2j} P_{3j}(x) + \delta(n) \ln r R_{j+2-n}(x) + (1 - \delta(n)) Q_{j+2-n}(x)\\
& \text{при } n \geqslant 3,\ j \geqslant n-2,
\end{aligned}$$

а b, c — произвольные числа. Напомним, что $\delta(n) = 0$ при нечетных n и $\delta(n) = 1$ при четных n.

При целых $m \geqslant 1$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ множество рядов вида (4.2), где

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x) =& Z_m(x) r^{-2m+2-n} \quad \text{при } n \geqslant 2,\\
\Phi_j(x) =& \sum_{s=0}^{2j-1} Z_{m+3j-2s}(x) r^{-2m+2-n-2j+2s}\\
& \text{при } n \geqslant 3, \quad m \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+m-3\\
& \text{и при } n = 2, \quad m \geqslant 2, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1,\\
\Phi_m(x) =& P_{4m}(x) r^{-4m} \quad \text{при } n = 2, \quad j = m,\\
\Phi_j(x) =& P_{m+3j}(x) r^{-2m+2-n-2j} + \delta(n) \ln r\, R_{j-m-n+2}(x)\\
& + (1 - \delta(n)) Q_{j-m-n+2}(x)\\
& \text{при } n \geqslant 3, \quad j \geqslant n+m-2 \quad \text{и при } n = 2, \quad j \geqslant m+1.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}^m$ множество рядов, представимых в виде сумм рядов из $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ при $j \leqslant m$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{A}}^k$. Тогда существует ряд $\mathcal{E} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$, имеющий главный член $\Phi_0(x) = Z_k(x) r^{-2k+n-2}$ при $k \geqslant 1$, где Z_k — произвольный гармонический полином, и* *главные члены* $\Phi_0(x) = b\ln r + c$ *при* $n = 2$, $k = 0$ *и* $\Phi_0(x) = br^{2-n}$ *при* $n \geqslant 3$, $k = 0$, *где* b, c *— произвольные постоянные, такой что справедливы равенства:*

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_0 =&0, \qquad \Delta\Phi_1 = \left(Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D)\right)\Phi_0,\\ \Delta\Phi_j =&\sum_{i=2}^{j}\left(Q_{i,2}(x,D) + Q_{i-1,1}(x,D) + Q_{i-2,0}(x,D)\right)\Phi_{j-i}\\ &+ \left(Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D)\right)\Phi_{j-1} - \lambda_0\Phi_{j-2} - \widetilde{\Phi}_{j-2} \qquad \text{при } j \geqslant 2,\end{aligned}$$

где Φ_q, $\widetilde{\Phi}_q$ *— члены рядов* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{F}$ *соответственно.*

Справедливость этого утверждения показана в доказательстве теоремы 1.1 из [11].

Обозначим через $\mathcal{A}_k$ множество функций $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ при $\Omega = \mathbb{R}^n$ и множество функций $u \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ при $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, имеющих в нуле дифференцируемую асимптотику из $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ и таких, что $u\varkappa$ принадлежит области определения оператора $\mathcal{H}_0$ для любой срезающей функции $\varkappa \in C^\infty(\Omega)$, тождественно равной нулю в окрестности начала координат, и такой, что $\operatorname{supp}(1-\varkappa) \subset \Omega$. Через $\mathcal{A}^m$ обозначим множество функций, представимых в виде сумм функций из $\mathcal{A}_j$ при $j \leqslant m$.

Лемма 4.2. *Пусть* $n + k \geqslant 3$, $F \in \mathcal{A}^k$. *Тогда существует функция* $E \in \mathcal{A}_k$, *имеющая главный член асимптотики в нуле* $\Phi_0(x) = Z_k(x)r^{-2k+n-2}$ *при* $k \geqslant 1$, *где* Z_k *— любой заданный гармонический полином, и главный член асимптотики в нуле* $\Phi_0(x) = br^{2-n}$ *при* $k = 0$, *где* b *— любая заданная постоянная, такая что*

$$H_0E = \lambda_0E + F + \Lambda\psi_0 \quad \text{в } \Omega\backslash\{0\} \tag{4.3}$$

при некотором числе Λ, *если* λ_0 *— простое собственное значение оператора* $\mathcal{H}_0$, *и уравнения*

$$H_0E =\lambda_0E + F + \Lambda^{(1)}\psi_0^{(1)} + \Lambda^{(2)}\psi_0^{(2)} \quad \text{в } \Omega\backslash\{0\} \tag{4.4}$$

при некоторых числах $\Lambda^{(k)}$, *если* λ_0 *— двукратное собственное значение оператора* $\mathcal{H}_0$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{A}}^k$ асимптотическое разложение в нуле функции $F(x)$, через $\mathcal{E} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$ — ряд, удовлетворяющий утверждению леммы 4.1, а через $\mathcal{E}_N(x)$ — частичную сумму ряда $\mathcal{E}(x)$ до членов $O\left(r^N\ln r\right)$ включительно, $N \geqslant 4$. Функцию $E(x)$ будем искать в виде

$$E_N(x) = (1 - \varkappa(x))\mathcal{E}_N(x) + \widetilde{E}_N(x), \tag{4.5}$$

где $\widetilde{E}_N \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$.

Рассмотрим случай, когда λ_0 — простое собственное значение. Из (4.3) и (4.4) в силу леммы 4.1 получаем уравнение на $\widetilde{E}_N$:

$$\mathcal{H}_0\widetilde{E}_N = \lambda_0\widetilde{E}_N + \widetilde{F}_N + \Lambda(N)\psi_0, \tag{4.6}$$

где $\widetilde{F}_N \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap C^{N-3}(\mathbb{R}^n)$, если $\Omega = \mathbb{R}^n$, и $\widetilde{F}_N \in L_2(\Omega) \cap C^{N-1}(\overline{\Omega})$, если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Из необходимого и достаточного условия разрешимости этого уравнения следует, что при

$$\Lambda(N) = -\left(\widetilde{F}_N, \psi_0\right)_{L_2(\Omega)}$$

уравнение (4.6) имеет решение $\widetilde{E}_N \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$, а из теорем о повышении гладкости для решений эллиптических краевых задач последовательно вытекает, что $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{E}_N \in C^{N-1}(\mathbb{R}^n)$, если $\Omega = \mathbb{R}^n$, и $\psi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\widetilde{E}_N \in C^{N-1}(\overline{\Omega})$, если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Покажем, что $\Lambda(N)$ не зависит от N. Обозначим

$$E_{N,M}(x) := E_N(x) - E_M(x), \qquad N < M.$$

Тогда по построению, во-первых, $E_{N,M} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$, а во-вторых,

$$\mathcal{H}_0 E_{N,M} = \lambda_0 E_{N,M} + (\Lambda(N) - \Lambda(M))\,\psi_0.$$

Отсюда следует, что, во-первых, $\Lambda(N) = \Lambda(M)$ (т.е. $\Lambda(N)$ от N не зависит), а во-вторых, $E_{N,M}(x) = b_{N,M}\psi_0(x)$. Легко видеть, что, если при $N \geqslant 5$ функции E_N нормализовать, например, условием $(E_{N,4}, \psi_0)_{L_2(\Omega)} = 0$, то они не зависят от N также. Поэтому из (4.5) и произвола в выборе N вытекает, что $E \in \mathcal{A}_k$.

Справедливость утверждения леммы для случая, когда λ_0 является простым собственным значением оператора $\mathcal{H}_0$, доказана.

Аналогично показывается справедливость леммы и для случая, когда λ_0 является двукратным собственным значением оператора $\mathcal{H}_0$. □

Лемма 4.3. *Пусть $n = 2$, $F \in \mathcal{A}_0$, b — любая постоянная. Тогда существует функция $E \in \mathcal{A}_0$, имеющая главный член асимптотики в нуле $\Phi_0(x) = b\ln r + d$, удовлетворяющая уравнению (4.3) при некотором числе Λ, если λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, причем, если $\psi_0(0) \neq 0$, то постоянную d можно выбрать любой, и удовлетворяющая уравнению (4.4) при некоторых числах $\Lambda^{(k)}$, если λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, причем, в невырожденном случае (2.8) постоянную d можно выбрать любой.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству леммы 4.2. Возможность выбора постоянной d произвольной (при условиях $\psi_0(0) \neq 0$ и (2.8)) очевидным образом вытекает из того, что функции E определены с точностью до слагаемого $C\psi_0(x)$ для любого C в случае, когда λ_0 – простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и с точностью до произвольной линейной комбинации собственных функций $\psi_0^{(s)}(x)$ в случае, когда λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. □

Лемма 4.4. *Существуют функции $E_0 \in \mathcal{A}_0$ при $n \geqslant 3$ и $E_1, \dots E_n \in \mathcal{A}_1$ при $n \geqslant 2$, имеющие при $r \to 0$ асимптотики*

$$\begin{aligned} E_0(x) =& r^{-n+2} + O\left(r^{-n+3}\right) \quad \text{при } n \geqslant 3,\\ E_m(x) =& x_m r^{-n} + O\left(r^{-n+2}\right) \quad \text{при } n \geqslant 2,\ j = 1, ..., m \end{aligned}$$

и удовлетворяющие в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнениям

$$H_0 E_q = \lambda_0 E_q + \Lambda_q \psi_0 \quad \text{в } \Omega\backslash\{0\}, \tag{4.7}$$

где

$$\Lambda_0 = -\,|S_n|(n-2)\psi_0(0) \quad \text{при } n \geqslant 3, \tag{4.8}$$

$$\Lambda_m = -\,|S_n|\frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \quad \text{при } n \geqslant 2,\ m = 1, ..., n, \tag{4.9}$$

если λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и удовлетворяющие в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнениям

$$H_0 E_q = \lambda_0 E_q + \Lambda_q^{(1)}\psi_0^{(1)} + \Lambda_q^{(2)}\psi_0^{(2)},$$

где собственные функции $\psi_0^{(s)}(x)$ ортонормированы в соответствии с (2.9),

$$\begin{aligned} \Lambda_0^{(1)} =& -\,|S_n|(n-2)\psi_0^{(1)}(0), \qquad \Lambda_0^{(2)} = 0 \quad \text{при } n \geqslant 3,\\ \Lambda_m^{(s)} =& -\,|S_n|\frac{\partial \psi_0^{(s)}}{\partial x_m}(0) \quad \text{при } n \geqslant 2,\ \ m = 1, ..., n,\ s = 1, 2, \end{aligned} \tag{4.10}$$

если λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$.

Доказательство. Утверждения доказываемой леммы за исключением явных формул (4.8)–(4.10) являются частным случаем леммы 4.2. Поэтому осталось показать справедливость равенств (4.8)–(4.10).

Получим вначале равенство (4.8). Для положительных s обозначим $\chi_q(t) := \chi(tq^{-1})$, $\widetilde{\chi}_q(t) := 1-\chi_q(t)$, $\widetilde{E}(x) := E_0(x)\widetilde{\chi}_q(r)$, где, напомним, $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t<1$ и нулю при $t>2$. Очевидно, что $\widetilde{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$ для любых достаточно малых q, и в силу (4.7) справедливо следующее равенство:

$$\mathcal{H}_0\widetilde{E} - \lambda_0\widetilde{E} = \Lambda_0\psi_0\widetilde{\chi}_q - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\widetilde{\chi}_q}{\partial x_j}\frac{\partial E_0}{\partial x_i} - E_0\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\widetilde{\chi}_q}{\partial x_j}\right).$$

В силу и условия разрешимости этого уравнения (ортогональности в $L_2(\Omega)$ правой части собственной функции ψ_0) и определения $\widetilde{\chi}_q$ имеем:

$$\Lambda_0(\widetilde{\chi}_q\psi_0,\psi_0) = -2\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\chi_q}{\partial x_j}\frac{\partial E_0}{\partial x_i},\psi_0\right) - \left(E_0\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\chi_q}{\partial x_j}\right),\psi_0\right).$$

Учитывая асимптотику в нуле функций $a_{i,j}(x)$, $E_0(x)$ и $\psi_0(x)$, переходя в интегралах в правой части последнего равенства к растянутой в q^{-1} раз переменной и устремляя q к нулю, получаем, что

$$\begin{aligned}\Lambda_0 =& -\psi_0(0)\left(2\int\limits_{r<2}\nabla r^{2-n}\nabla\chi(r)dx + \int\limits_{r<2} r^{2-n}\Delta\chi(r)dx\right)\\ =& -\psi_0(0)\int\limits_{r<2}\nabla r^{2-n}\nabla\chi(r)dx.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Интегрируя по частям при малых $t>0$, имеем:

$$\int\limits_{t<r<2}\nabla r^{2-n}\nabla\chi(r)dx = (n-2)|S_n|.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t\to 0$, в силу (4.11) получаем справедливость равенства (4.8).

Аналогично доказывается равенства (4.9) и (4.10). □

Лемма 4.5. *Пусть $n=2$. Тогда существует функция $E_0\in\mathcal{A}_0$, имеющая при $r\to 0$ асимптотику*

$$\begin{aligned}&E_0(x) = -\ln r + O(r\ln r), && \text{если } \psi_0(0)\neq 0,\\ &E_0(x) = -\ln r + c(\Omega) + O(r\ln r), && \text{если } \psi_0(0)=0,\end{aligned}\tag{4.12}$$

и удовлетворяющая в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнению

$$H_0E_0 = \lambda_0E_0 + \Lambda_0\psi_0, \quad \text{где } \Lambda_0 = -2\pi\psi_0(0),$$

если λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и имеющая при $r\to 0$ асимптотику (4.12) и удовлетворяющая в $\Omega\backslash\{0\}$ уравнению

$$H_0E_0 = \lambda_0E_0 + \Lambda_0^{(1)}\psi_0^{(1)} + \Lambda_0^{(2)}\psi_0^{(2)},$$

где собственные функции $\psi_0^{(m)}(x)$ ортонормированы в соответствии с (2.9),

$$\Lambda_0^{(1)} = -2\pi\psi_0^{(1)}(0), \qquad \Lambda_0^{(2)} = 0,$$

если λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$.

Доказательство. С учетом леммы 4.3 доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству леммы 4.4. Отсутствие постоянной $c(\Omega)$ в (4.12) очевидным образом вытекает из того, что функция E_0 определена с точностью до слагаемого $C\psi_0(x)$ для любого C в случае, когда λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, и с точностью до произвольной линейной комбинации собственных функций $\psi_0^{(s)}(x)$ в случае, когда λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. □

Из лемм 4.2, 4.4, 4.5 вытекает

Следствие 2. *Пусть λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$ и собственные функции $\psi_0^{(s)}(x)$ ортонормированы в соответствии с (2.9). Тогда для любых $Z_k(x)$, $k \geqslant 1$, $F \in \mathcal{A}^k$ существует решение $E \in \mathcal{A}^k$ уравнения*

$$H_0 E = \lambda_0 E + F + \Lambda\psi_0^{(2)},$$

в $\Omega\backslash\{0\}$ при некоторой постоянной, имеющее главный член асимптотики в нуле $\Phi_0(x) = Z_k(x)r^{-2k+n-2}$.

Обозначим

$$z_m^{(1)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y)y_m V(y)dy \quad \text{при } m = 1, \dots, n.$$

Из определения функций $z_0^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}$ вытекает

Лемма 4.6. *Функции $z_0^{(1)}, \dots, z_n^{(1)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют уравнениям*

$$\Delta z_0^{(1)} = V, \qquad \Delta z_m^{(1)} = x_m V, \quad m = 1, \dots, n$$

в $\mathbb{R}^n$ и имеют при $r \to \infty$ дифференцируемые асимптотики

$$z_q^{(1)}(x) = -c_{q,0}^{(1)} \ln r + \left(c_{q,1}^{(1)} x_1 r^{-2} + c_{q,2}^{(1)} x_2 r^{-2}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(1,q)}(x) r^{-2i} \quad \text{при } n = 2,$$
$$z_q^{(1)}(x) = c_{q,0}^{(1)} r^{2-n} + \sum_{m=1}^{n} c_{q,m}^{(1)} x_m r^{-n} + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(1,q)}(x) r^{-2i-n+2} \qquad \text{при } n \geqslant 3,$$

где

$$c_{0,0}^{(1)} = -\frac{\langle V\rangle}{2\pi} \quad \text{при } n = 2, \qquad c_{0,0}^{(1)} = -\frac{\langle V\rangle}{(n-2)|S_n|} \qquad \text{при } n \geqslant 3,$$
$$c_{0,m}^{(1)} = c_{m,0}^{(1)} = -\frac{\langle V\rangle_m}{|S_n|}, \qquad c_{p,m}^{(1)} = -\frac{\langle V\rangle_{pm}}{|S_n|} \quad \text{при } p, m = 1, \dots, n,$$

а $Y_i^{(1,q)}(x)$ — однородные гармонические полиномы порядка i.

При $k \geqslant 2$ рекуррентно определим следующие функции:

$$z_q^{(k)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y)V(y)z_q^{(k-1)}(y)dy, \quad \text{при } q = 0, 1, \dots, n.$$

Лемма 4.7. *Функции $z_0^{(k)}, \dots, z_n^{(k)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 2$, удовлетворяют в $\mathbb{R}^n$ уравнениям*

$$\Delta z_q^{(k)} = V z_q^{(k-1)}$$

и имеют при $r\to\infty$ дифференцируемые асимптотики

$$
\begin{aligned}
z_p^{(k)}(x) =& - c_{p,0}^{(k)}\ln r + \left(c_{p,1}^{(k)}x_1 r^{-2} + c_{p,2}^{(k)}x_2 r^{-2}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(k,p)}(x) r^{-2i} \quad \text{при } n=2,\\
z_p^{(k)}(x) =& c_{p,0}^{(k)} r^{2-n} + \sum_{m=1}^{n} c_{p,m}^{(k)} x_m r^{-n} + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i^{(k,p)}(x) r^{-2i-n+2} \qquad \text{при } n\geqslant 3,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_{0,0}^{(2)} =& \frac{1}{2\pi}\left\|\nabla z_0^{(1)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \qquad \text{при } n=2,\\
c_{0,0}^{(2)} =& \frac{1}{(n-2)|S_n|}\left\|\nabla z_0^{(1)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{при } n\geqslant 3.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Доказательство. Справедливость утверждений леммы за исключением равенств (4.13) следует непосредственно из определения функций $z_q^{(k)}(x)$.

Покажем справедливость (4.13). Из определения $z_0^{(2)}(x)$ и $z_0^{(1)}(x)$ последовательно получаем

$$
\begin{aligned}
c_{0,0}^{(2)} &= -\frac{\left\langle V z_0^{(1)}\right\rangle}{2\pi} \qquad \text{при } n=2, \qquad c_{0,0}^{(2)} = -\frac{\left\langle V z_0^{(1)}\right\rangle}{(n-2)|S_n|} \qquad \text{при } n\geqslant 3,\\
c_{0,0}^{(2)} &= -\frac{\left\langle z_0^{(1)}\Delta z_0^{(1)}\right\rangle}{2\pi} \qquad \text{при } n=2, \qquad c_{0,0}^{(2)} = -\frac{\left\langle z_0^{(1)}\Delta z_0^{(1)}\right\rangle}{(n-2)|S_n|} \qquad \text{при } n\geqslant 3.
\end{aligned}
$$

Интегрируя по частям правые части последних двух равенств, получаем справедливость (4.13). □

При $j\geqslant 0$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{B}}_j$ множество рядов вида

$$
\sum_{i=0}^{\infty} T_{j-i}(x) + \delta(n)\ln r\sum_{s=0}^{j} P_{j-s}(x).
$$

Через $\mathcal{B}_j$ будем обозначать множество функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, имеющих на бесконечности дифференцируемые асимптотики из $\widetilde{\mathcal{B}}_j$. Из этого определения, в частности, следует, что $z_j^{(p)}\in\mathcal{B}_0$.

Лемма 4.8. *Пусть $S\in\mathcal{B}_q$, а ряд $\widetilde{V}\in\widetilde{\mathcal{B}}_{q+2}$ является асимптотическим решением уравнения*

$$
\Delta V = S \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{4.14}
$$

при $r\to\infty$. Тогда существует решение $V\in\mathcal{B}_{q+2}$ этого уравнения, имеющее на бесконечности асимптотику

$$
\begin{aligned}
V(\xi) =& \widetilde{V}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(x) r^{-2i-n+2} \qquad \text{при } n\geqslant 3,\\
V(x) =& \widetilde{V}(x) + b\ln r + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(x) r^{-2i} \quad \text{при } n=2.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{V}_N$ частичную сумму ряда $\widetilde{V}$ до членов порядка r^{-N-n} включительно. Решение уравнения (4.14) будем искать в виде

$$
V_N(x) = \widetilde{V}_N(x)(1-\chi(r)) + w_N(x). \tag{4.15}
$$

Подставляя (4.15) в (4.14), получаем уравнение для w_N:

$$\Delta w_N = S_N, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.16}$$

где

$$S_N = S - (1-\chi)\Delta\widetilde{V}_N + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\frac{\partial \widetilde{V}_N}{\partial x_i}.$$

Следовательно, $S_N(x) = O(r^{-N-n-3})$ при $r \to \infty$. Тогда функция

$$w_N(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(x-y)S_N(y)dy$$

является решением уравнения (4.16) и при $r \to \infty$ имеет асимптотику

$$w_N(x) = b\ln r + \sum_{i=1}^{N+1} Z_i(x)r^{-2i} + o(r^{-N-2}) \quad \text{при } n = 2,$$

$$w_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} Z_i(x)r^{-n-2i+2} + o(r^{-N-n}) \qquad \text{при } n \geqslant 3.$$

Отсюда и из (4.15) следует, что при $r \to \infty$

$$\begin{aligned} V_N(x) =& \widetilde{V}_N(x) + b\ln r + \sum_{i=1}^{N+1} Z_i(x)r^{-2i} + o(r^{-N-2}) \quad \text{при } n = 2,\\ V_N(x) =& \widetilde{V}_N(x) + \sum_{i=0}^{N+1} Z_i(x)r^{-n-2i+2} + o(r^{-N-n}) \qquad \text{при } n \geqslant 3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Разность $V_{N_1} - V_{N_2}$ является гармонической в $\mathbb{R}^n$ функцией, убывающей на бесконечности. Следовательно, $V_{N_1} - V_{N_2} = 0$, то есть V_N не зависит от N. Поэтому из (4.17) в силу произвола в выборе N следует справедливость утверждения доказываемой леммы. □

5. Вывод структуры внутреннего разложения собственной функции в случае нечетномерной области

Всюду далее в этом и трех следующих разделах λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. В этом случае из следствия 1 вытекает, что для нормированной в $L_2(\Omega)$ собственной функции $\psi_{\mu,\varepsilon}$, соответствующей собственному значению $\lambda_{\mu,\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda_0$, имеет место сходимость $\psi^{\mu,\varepsilon} \to \psi_0$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому вне окрестности начала координат (где и сосредоточено возмущение оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$) приближение $\psi^{ex}(x,\mu,\varepsilon)$ (*внешнее разложение*) функции $\psi^{\mu,\varepsilon}$ естественно искать в виде $\psi^{ex}(x,\mu,\varepsilon) \approx \psi_0(x)$. В окрестности же начала координат приближение ψ^{in} (*внутреннее разложение*) функции $\psi_{\mu,\varepsilon}$ также естественно искать в виде разложения по функциям, зависящим от переменой $\xi = x\varepsilon^{-1}$, соответствующей аргументу возмущающего потенциала $V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Ряд Тейлора функции ψ_0 в нуле имеет вид:

$$\psi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x), \qquad r \to 0, \tag{5.1}$$

где

$$P_0(x) = \psi_0(0), \quad P_1(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)x_m, \tag{5.2}$$

причем, в силу уравнения

$$H_0\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \tag{5.3}$$

и равенства (4.1) справедливы равенства

$$\begin{aligned}\Delta P_0 =&0, \qquad \Delta P_1 = \left(Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D)\right) P_0 = 0,\\ \Delta P_k =& \sum_{i=2}^{k} \left(Q_{i,2}(x,D) + Q_{i-1,1}(x,D) + Q_{i-2,0}(x,D)\right) P_{k-i}\\ &+ \left(Q_{1,2}(x,D) + Q_{0,1}(x,D)\right) P_{k-1} - \lambda_0 P_{k-2} \qquad \text{при } k \geqslant 2.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Замечание 5.1. *Всюду далее через $P_k(x)$ обозначаются только члены ряда Тейлора в нуле функции $\psi_0(x)$, а через $P_k^{(s)}(x)$ — функций $\psi_0^{(s)}(x)$.*

Обозначим $\rho = |\xi|$. Переписывая правую часть (5.1) в переменной ξ, с учетом (5.2) получаем:

$$\psi^{ex}(x,\mu,\varepsilon) \approx \psi_0(x) = \psi_0(0) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi), \qquad \rho\varepsilon^{-1} = r \to 0.$$

Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений [7], получаем, что внутреннее разложение следует искать в виде

$$\psi^{in}(\xi,\mu,\varepsilon) \approx \psi_0^{in}(\xi,\varepsilon) = v_{0,0}(\xi) + \varepsilon v_{1,0}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k v_{k,0}(\xi), \tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned} v_{0,0}(\xi) \sim& \psi_0(0), \quad v_{1,0}(\xi) \sim \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad \rho \to \infty,\\ v_{k,0}(\xi) \sim& P_k(\xi), \quad k \geqslant 2, \quad \rho \to \infty.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Подставляя $\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0$, (4.1) и (5.5) в уравнение

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon}, \tag{5.7}$$

переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, получаем рекуррентную систему уравнений для $v_{k,0}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}: &\quad \Delta_\xi v_{0,0} = 0,\\ \varepsilon^{-1}: &\quad \Delta_\xi v_{1,0} = \left(Q_{1,2}(\xi,D_\xi) + Q_{0,1}(\xi,D_\xi)\right) v_{0,0},\\ \varepsilon^{k-2}: &\quad \Delta_\xi v_{k,0} = \sum_{i=2}^{k} \left(Q_{i,2}(\xi,D_\xi) + Q_{i-1,1}(\xi,D_\xi) + Q_{i-2,0}(\xi,D_\xi)\right) v_{k-i,0}\\ &\qquad + \left(Q_{1,2}(\xi,D_\xi) + Q_{0,1}(\xi,D_\xi)\right) v_{k-1,0} - \lambda_0 v_{k-2,0}, \quad k \geqslant 2\end{aligned} \tag{5.8}$$

и дополнительные требования на эти функции:

$$\varepsilon^i\mu^{-1}: \quad V(\xi)v_{i,0}(\xi) = 0, \quad i \geqslant 0. \tag{5.9}$$

Замечание 5.2. *Здесь Δ_ξ означает Лапласа по переменной ξ. Аналогично, символ дифференцирования D_ξ означает, что дифференцирование ведется по переменной ξ. Так как всюду в дальнейшем в уравнениях для коэффициентов внутренних разложений оператор Лапласа и символ дифференцируемости используются только в таком смысле, то для упрощения обозначений будем в Δ_ξ и D_ξ опускать этот индекс ξ.*

В силу (5.4), (5.2) и (5.8) функции

$$v_{0,0} \equiv \psi_0(0), \qquad v_{1,0}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \qquad v_{k,0}(\xi) = P_k(\xi), \quad k \geqslant 2, \tag{5.10}$$

очевидно, являются решениями уравнений (5.8), удовлетворяющими условию (5.6) (условию согласования асимптотических разложений).

Однако, также очевидно, что условия (5.9) не выполняются. Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, во внутреннее разложение необходимо добавить новые члены:

$$\psi^{in}(\xi,\mu,\varepsilon) \approx \psi_1^{in}(\xi,\mu,\varepsilon) = \psi_0^{in}(\xi,\varepsilon) + \mu^{-1}\left(\varepsilon^2 v_{2,1}(\xi) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k v_{k,1}(\xi)\right). \tag{5.11}$$

Подставляя $\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0$, (4.1) и (5.11) (вместо (5.5)) в уравнение (5.7), переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, получаем вновь рекуррентную систему уравнений (5.8), новую рекуррентную систему уравнений для функций $v_{2+k,1}(\xi)$, из которых первые два имеют вид:

$$\mu^{-1}: \quad \Delta v_{2,1} = V v_{0,0}, \tag{5.12}$$

$$\varepsilon\mu^{-1}: \quad \Delta v_{3,1} = (Q_{1,2}(\xi,D) + Q_{0,1}(\xi,D))\, v_{2,1} + V v_{1,0} \tag{5.13}$$

и дополнительные требования на эти функции (вместо условий (5.9)):

$$\varepsilon^i\mu^{-2}: \quad V(\xi) v_{i,1}(\xi) = 0, \quad i \geqslant 2. \tag{5.14}$$

Очевидно, что равенства (5.14), вообще говоря, не выполняются. И чтобы заменить эти равенства на уравнения типа (5.12), (5.13) во внутреннем разложении (5.11), нужно добавить слагаемые $\mu^{-2}\varepsilon^{i+2} v_{i+2,2}$ (аналогично тому, как это было проделано в случае равенств (5.10)). Эти новые слагаемые, в свою очередь, влекут требования вида (5.9), (5.14) при $\mu^{-3}\varepsilon^i$, $i \geqslant 4$, для устранения которых придется вводить слагаемые $\mu^{-3}\varepsilon^{i+2} v_{i+2,3}$, и т.д. Поэтому внутреннее разложение естественно искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{odd}^{in}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \psi_{odd}^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_{i,0}(\xi) \\ &+ \varepsilon^2\mu^{-1} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty} \varepsilon^i \mu^{-j} v_{2+i,j+1}(\xi), \qquad \text{если } \psi_0(0) \neq 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Подставляя $\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0$, (4.1) и (5.15) (вместо (5.11)) в уравнение (5.7), переходя к переменной ξ и приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^k\mu^{-l}$, получаем при $l = 0$ систему уравнений (5.8), а при $l = j+1 \geqslant 1$ — рекуррентную систему уравнений для функций $v_{2+k,j+1}(\xi)$, из которых первые два (при фиксированном $j \geqslant 0$) имеют вид

$$\varepsilon^{2j}\mu^{-j-1}: \ \Delta v_{2j+2,j+1} = V v_{2j,j}, \tag{5.16}$$

$$\varepsilon^{2j+1}\mu^{-j-1}: \ \Delta v_{2j+3,j+1} = (Q_{1,2}(\xi,D) + Q_{0,1}(\xi,D))\, v_{2j+2,j+1} + V v_{2j+1,j}, \tag{5.17}$$

включающий, в частности, при $j = 0$ и уравнения (5.12), (5.13).

В силу равенств (5.10) и лемм 4.6, 4.7 функции

$$v_{2j+2,j+1}(\xi) = \psi_0(0) z_0^{(j+1)}(\xi), \qquad j \geqslant 0, \tag{5.18}$$

являются решениями уравнений (5.16).

Замечание 5.3 (случай $\psi_0(0) = 0$)**.** *Если $\psi_0(0) = 0$, то опять же в силу равенств (5.10) и лемм 4.6, 4.7 функции*

$$\begin{gathered} v_{2j+2,j+1}(\xi) \equiv 0, \quad v_{2j+3,j+1}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) z_m^{(j+1)}(\xi), \quad j \geqslant 0, \\ \text{если } \psi_0(0) = 0, \end{gathered} \tag{5.19}$$

являются решениями уравнений (5.16), (5.17).

Из (5.10), (5.19) и (5.15), в частности, следует, что

$$\begin{aligned}\psi^{in}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon) =&\psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}(\xi)\\ &+\varepsilon^3\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}v_{3+i,j+1}(\xi), \qquad \text{если } \psi_0(0)=0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Замечание 5.4 (о четности n)**.** *Подчеркнем, что приведенный выше алгоритм пока никоим образом не зависит от нечетности n. Дальнейшее согласование внутреннего и внешнего асимптотических разложений собственных функций оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, приводимое ниже, покажет, что внутреннее асимптотическое разложение действительно имеет вид (5.15), (5.20), (5.10), (5.18), (5.19) для нечетных n, но имеет более громоздкую структуру для четных n, нежели (5.15), (5.20). Случай четного n будет исследован ниже в разделе 10.*

6. Вывод структуры внешнего асимптотического разложения собственной функции и асимптотики собственного значения в случае нечетномерной области

Временно будем считать равными нулю пока неопределенные коэффициенты в (5.15) и (5.20), т.е. полагать, что

$$\begin{aligned}\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j+2}\mu^{-j-1}v_{2j+2,j+1}(\xi), \qquad \psi_0(0)\neq 0,\\ \psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j+3}\mu^{-j-1}v_{2j+3,j+1}(\xi), \qquad \psi_0(0)=0.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Тогда, заменяя в (6.1) коэффициенты $v_{i,0}$, $v_{2j+2,j+1}$ и $v_{2j+3,j+1}$ на их асимптотики при $\rho\to\infty$ и переписывая полученную сумму в переменных x, с учетом равенств (5.10), (5.18), (5.19) и утверждений лемм 4.6, 4.7 получаем, что

$$\begin{aligned}\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)+\varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\varphi^{(1)}_{n+i,j+1}(x)\\ &+\delta^2_n d_1(\mu,\varepsilon)\ln\varepsilon, \qquad \psi_0(0)\neq 0,\\ \psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon) =& \sum_{k=1}^{\infty}P_k(x)+\varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\varphi^{(2)}_{n+i+1,j+1}(x)\\ &+\delta^2_n d_2(\mu,\varepsilon)\ln\varepsilon, \qquad \psi_0(0)=0,\end{aligned}\tag{6.2}$$

где (напомним) δ^q_p — символ Кронекера,

$$\begin{aligned}d_1(\mu,\varepsilon) =&\varepsilon^2\mu^{-1}\psi_0(0)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j}\mu^{-j}c^{(j+1)}_{0,0},\\ d_2(\mu,\varepsilon) =&\varepsilon^3\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j}\mu^{-j}\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}_{2+2j,j+1}(x) =& -\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\ln r, \qquad j\geqslant 0, \quad n=2,\\ \varphi^{(2)}_{2+2j+1,j+1}(x) =& -\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}\ln r, \quad j\geqslant 0, \quad n=2,\end{aligned}\tag{6.3}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(1)}_{n+2j,j+1}(x) =&\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}r^{-n+2}, \qquad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3,\\
\varphi^{(2)}_{n+2j+1,j+1}(x) =& \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}r^{-n+2}, \quad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3,
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

а $\varphi^{(s)}_{n+i+q-1,j+1}(x)$ с остальными нижними индексами являются конечными суммами однородных функций не меньше, чем $(-n-i+2j+2)$-го порядка.

Замечание 6.1 (о случае $n=2$)**.** *К вопросу о слагаемых $d_q(\mu,\varepsilon)\ln\varepsilon$ в (6.2) при $n=2$ вернемся ниже в замечании 7.2. Пока же не будем обращать внимание на них.*

Следуя методу согласования асимптотических разложений и учитывая равенства (6.2), (6.3), (6.4) и замечание 6.1, внешнее разложение будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
\psi^{ex}_{odd}(x,\mu,\varepsilon) =&\psi^{ex,1}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)\\
=&\psi_0(x)+\varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i,j+1}(x), \quad \psi_0(0)\neq 0,\\
\psi^{ex}_{odd}(x,\mu,\varepsilon) =&\psi^{ex,2}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)\\
=&\psi_0(x)+\varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i+1,j+1}(x), \quad \psi_0(0)= 0,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

где, в частности,

$$
\begin{aligned}
\psi_{2+2j,j+1}(x) \sim& -\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\ln r, \qquad j\geqslant 0, \quad n=2, \quad \psi_0(0)\neq 0,\\
\psi_{3+2j,j+1}(x) \sim& -\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}\ln r, \quad j\geqslant 0, \quad n=2, \quad \psi_0(0)=0,\\
\psi_{n+2j,j+1}(x) \sim& \,\psi_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}r^{-n+2}, \qquad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3, \quad \psi_0(0)\neq 0,\\
\psi_{n+2j+1,j+1}(x) \sim& \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,0}r^{-n+2}, \quad j\geqslant 0, \quad n\geqslant 3, \quad \psi_0(0)=0,
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

при $r\to 0$.

Так как внешнее разложение должно описывать поведение собственной функции почти во всей области Ω (за исключением малой окрестности нуля), то по аналогии с (6.5) (и с учетом замечания 6.1) асимптотику собственного значения естественно искать в виде

$$
\lambda_{odd}(\mu,\varepsilon)=\lambda^1_{odd}(\mu,\varepsilon)=\lambda_0+\varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\lambda_{n+i,j+1}, \quad \psi_0(0)\neq 0, \tag{6.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{odd}(\mu,\varepsilon) =&\lambda^2_{odd}(\mu,\varepsilon)\\
=&\lambda_0+\varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\lambda_{n+i+1,j+1}, \quad \psi_0(0)=0.
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Замечание 6.2 (о структуре асимптотик собственного значения)**.** *Для нечетного n ряд (6.7) имеет вид (2.1), но в критическом случае $\psi_0(0)=0$ вид ряда (6.8) отличается от вида ряда (2.6). Для того чтобы ряд (6.8) имел вид (2.6), не хватает только равенства $\lambda_{n+2j+1,j+1}=0$. Соображения о выполнении этого равенства будут приведены ниже в замечание 7.1.*

7. Вывод уравнений для коэффициентов асимптотических разложений в случае нечетномерной области

Так как внешнее разложение рассматривается вне окрестности начала координат и $H_0 = H_{\mu,\varepsilon}$ вне окрестности начала координат, то, подставляя в уравнение

$$H_0\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} \tag{7.1}$$

ряды (6.5), (6.7), (6.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, получаем заведомо выполняющееся уравнение (5.3) и рекуррентную систему уравнений в $\Omega\backslash\{0\}$ для остальных коэффициентов внешнего разложения (6.5):

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{n+i}\mu^{-1}: &\quad (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i,1} = \lambda_{n+i,1}\psi_0, \quad i\geqslant 0,\\
\varepsilon^{n+i+2j}\mu^{-1-j}: &\quad (H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i+2j,j+1} = \lambda_{n+i+2j,j+1}\psi_0, \quad 0\leqslant i\leqslant n-3,\\
&\quad (H_0-\lambda_0)\psi_{n+i+2j,j+1} = \lambda_{n+i+2j,j+1}\psi_0\\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{s=0}^{j-1}\lambda_{n+k+2s,s+1}\psi_{i-k+2(j-s),j-s},\\
&\qquad\qquad i\geqslant n-2, \quad j\geqslant 1,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

где

$$\psi_{n+2j,j+1}(x) = \lambda_{n+2j,j+1} = 0, \qquad \text{если } \psi_0(0)=0, \tag{7.3}$$

силу (6.5) и (6.8).

Замечание 7.1 (о структуре асимптотики собственного значения в случае $\psi_0(0)=0$)**.** *Из (7.2), (7.3) получаем следующее уравнение:*

$$H_0\psi_{n+2j+1,j+1} = \lambda_0\psi_{n+2j+1,j+1} + \lambda_{n+2j+1,j+1}\psi_0, \qquad \psi_0(0)=0, \tag{7.4}$$

при $j\geqslant 0$. В силу лемм 4.4, 4.5 функции

$$\psi_{n+2j+1,j+1}(x) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}^{(j+1)}E_0(x), \quad j\geqslant 0, \qquad \psi_0(0)=0, \tag{7.5}$$

имеют асимптотики (6.6) и являются решениями уравнений (7.4) при

$$\lambda_{n+2j+1,j+1} = 0, \qquad j\geqslant 0, \qquad \text{если } \psi_0(0)=0. \tag{7.6}$$

С учетом равенств (7.6), во-первых, ряд (6.8) уже принимает вид (2.6) для нечетного n, а во-вторых, в уравнениях (7.2) условие (7.3) заменяется на следующее:

$$\psi_{2+2j,j+1}(x) = \lambda_{2+2j,j+1} = \lambda_{3+2j,j+1} = 0 \qquad \text{при } \psi_0(0)=0 \tag{7.7}$$

для коэффициентов внешнего разложения.

Конечно, даже с позиции построения полных формальных асимптотических разложений собственных значений и соответствующих собственных функций равенства (7.7) остаются пока лишь ожидаемыми и правдоподобными. Подтверждение справедливости в этом смысле равенства (7.7) будет приведено в следующем разделе 8 при построении полных формальных асимптотических разложений (см., например, вывод равенства (8.13)).

Замечание 7.2 (о четности n)**.** *Вновь подчеркнем, что приведенный выше алгоритм пока никоим образом не зависит от четности-нечетности $n\geqslant 3$. Дальнейшее согласование внутреннего и внешнего асимптотических разложений собственных функций оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, приводимое ниже, покажет, что внешнее асимптотические разложение действительно имеет вид (6.5) для нечетных n. Однако для четных n ситуация усложняется. Например, для того чтобы в (6.2) согласовать слагаемые, содержащие*

$\ln\varepsilon$ при $n=2$, во внутренних разложениях (5.15) для $\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ и (5.20) для $\psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ необходимо добавлять слагаемые, содержащие $\ln\varepsilon$:

$$\ln\varepsilon\, d_1(\mu,\varepsilon), \quad \ln\varepsilon\, d_2(\mu,\varepsilon)$$

соответственно. Подобная ситуация будет возникать на следующих шагах согласования асимптотических разложений и для четных $n\geqslant 4$, так как, например, асимптотика в нуле функции $E_0(x)$ из равенств (7.5) содержит при четных n логарифмические члены. Вывод структуры полных асимптотических разложений собственных значений и собственных будет приведен ниже в разделе 10.

В заключении раздела выведем уравнения для коэффициентов внутреннего разложения. Подставляя ряды (5.15), (5.20), (6.7) и (6.8) в уравнение

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon},$$

переходя в нем к внутренним переменным ξ и выписывая равенства при одинаковых степенях ε и μ, получаем для коэффициентов внутренних разложений уравнения (5.8), которые выполняются для функций, определяемых равенствами (5.10), и уравнения

$$\begin{aligned}
\Delta v_{2j+2,j+1} &= V v_{2j,j},\\
\Delta v_{2j+3,j+1} &= \left(Q_{1,2}(\xi,D)+Q_{0,1}(\xi,D)\right) v_{2j+2,j+1} + V v_{2j+1,j},\\
\Delta v_{i+4+2j,j+1} &= \sum_{q=2}^{i}\Big(Q_{q,2}(\xi,D)+Q_{q-1,1}(\xi,D)\\
&\qquad\qquad + Q_{q-2,0}(\xi,D)\Big) v_{i+4-q+2j,j+1}\\
&\quad + \left(Q_{1,2}(\xi,D)+Q_{0,1}(\xi,D)\right) v_{i+3+2j,j+1} + V v_{i+2j+2,j}\\
&\quad - \lambda_0 v_{i+2j+2,j+1}, \quad i<n,\\
\Delta v_{i+4+2j,j+1} &= \sum_{q=2}^{i}\Big(Q_{q,2}(\xi,D)+Q_{q-1,1}(\xi,D)\\
&\qquad\qquad + Q_{q-2,0}(\xi,D)\Big) v_{i+4-q+2j,j+1}\\
&\quad + \left(Q_{1,2}(\xi,D)+Q_{0,1}(\xi,D)\right) v_{i+3+2j,j+1} + V v_{i+2j+2,j}\\
&\quad - \sum_{p=0}^{i-n}\sum_{l=0}^{j} v_{p+2l,l}\lambda_{i+2(j-l)-p+2,j-l+1}\\
&\quad - \lambda_0 v_{i+2j+2,j+1}, \quad i\geqslant n, \quad j\geqslant 0,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

где

$$v_{2j+2,j+1}(\xi) = \lambda_{n+2j+2,j+1} = \lambda_{n+1+2j+2,j+1} = 0, \quad \text{если } \psi_0(0)=0. \tag{7.9}$$

в силу (5.19), (7.7).

8. Построение полных формальных асимптотических разложений в случае нечетномерной области

На рядах $U(x,\varepsilon,\mu)$ вида (6.5) определим операторы $\mathcal{K}_{q,m}$ и $\mathcal{K}$ следующим образом. Коэффициенты ряда $U(x,\varepsilon,\mu)$ разложим в ряды при $r\to 0$ и перейдем к переменным ξ. В полученных рядах оставим только члены вида $\varepsilon^q\mu^{-m}\Phi(\xi)$. Этот ряд обозначим $\mathcal{K}_{q,m}(U(x,\varepsilon,\mu))$ и положим

$$\mathcal{K} = \sum_{q,m}\mathcal{K}_{q,m}.$$

Коэффициенты асимптотики собственного значения и внешнего разложения собственной функции будем строить в следующем виде

$$\lambda_{n+i+2j,j+1} = \sum_{t=0}^{i} \Lambda^{(t)}_{n+i+2j,j+1}, \quad j \geqslant 0, \tag{8.1}$$

$$\psi_{n+i+2j,j+1}(x) = \sum_{t=0}^{i} \Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x), \quad j \geqslant 0. \tag{8.2}$$

Обозначим

$$\Phi^{(N)}_{n+i+2j,j+1}(x) := \sum_{t=0}^{\min\{i,N\}} \Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x).$$

В этих обозначениях $\Phi^{(N)}_{n+i+2j,j+1}(x) = \psi_{n+i+2j,j+1}(x)$ при $N \geqslant i$ в силу (8.2). Через $\Phi^{ex}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ будем обозначать ряды вида (6.5), где коэффициенты $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$ заменены на $\Phi^{(N)}_{n+i+2j,j+1}(x)$.

Из определения $\mathcal{A}^m$, $\mathcal{A}_m$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$, $\mathcal{K}_{m,l}$, $\mathcal{K}$, $\Phi^{ex}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ и (8.1), (8.2) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 8.1. *Если коэффициенты $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$ рядов (6.5) принадлежат $\mathcal{A}^i$, то*

$$\mathcal{K}(\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)) = \Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon),$$

где $\Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ — ряды вида (5.15), (5.20), в которых коэффициенты $v_{2+i,j+1}(\xi)$ заменены на ряды $V_{2+i,j+1}(\xi) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i-2j}$.

Если $\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x) \in \mathcal{A}_{i-t}$, то функции $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемые равенством (8.2), принадлежат $\mathcal{A}^i$ и имеют место следующие равенства:

$$V_{2j+2+t,j+1}(\xi) = \widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(2j+2+t,j+1)}_k(\xi)\rho^{-n+2-2k},$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_{2j+2,j+1}(\xi) \equiv& 0,\\ \widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}(\xi) =& \varepsilon^{-2j-2-t}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+2+t,j+1}\left(\Phi^{ex}_{odd,t-1}(x,\mu,\varepsilon)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_t, \quad t \geqslant 1, \end{aligned}$$

(т.е. $\widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}$ не зависит от $\Psi^{(m)}_{p,q}$ при $m \geqslant t-1$), а $Z^{(2j+2+t,j+1)}_k r^{-n+2-2k}$ – главный член асимптотики $\Psi^{(t)}_{n+2j-t+k,j+1}$ в нуле.

Если, к тому же, функции $\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ являются в $\Omega\backslash\{0\}$ решениями уравнений

$$\begin{aligned} (H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t)}_{n+i,1} =& \Lambda^{(t)}_{n+i,1}\psi_0, \quad i \geqslant 0,\\ (H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1} =& \Lambda^{(t)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-3,\\ (H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t)}_{n+i+2j,j+1} =& \Lambda^{(t)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0 \\ &+ \sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{s=0}^{j-1}\sum_{p=0}^{t} \Lambda^{(p)}_{n+k+2s,s+1}\Psi^{(t-p)}_{i-k+2(j-s),j-s},\\ & i \geqslant n-2, \quad j \geqslant 1, \end{aligned} \tag{8.3}$$

то функции $\psi_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемые равенствами (8.2), являются решениями уравнений (7.2) при $\lambda_{n+i+2j,j+1}$, определяемыми равенствами (8.1), ряды $\widetilde{V}_{2j+2+t,j+1}$ являются формальными асимптотическими решениями уравнений (7.8) при $\rho \to \infty$, где в правой части функции $v_{m,q}(\xi)$ заменены на ряды $V_{m,q}(\xi)$ при $q > 0$.

Теорема 8.1. *Пусть n — нечетно, λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ψ_0 — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция.*

Тогда существуют ряды (2.1), (2.6), (6.5), (5.15) и (5.20) такие, что:
1) выполняются равенства (2.2), (2.3), (2.4), (2.7);
2) функции $\psi_{n+2j+i,j+1} \in \mathcal{A}^i$ являются решениями уравнений (7.2), (7.7);
3) функции $v_{i,0}$ определяются равенствами (5.10), а функции $v_{2j+2+i,j+1} \in \mathcal{B}_i$ являются решениями уравнений (7.8), (7.9);
4) выполняется следующее равенство

$$\mathcal{K}(\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)) = \psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon), \qquad \rho \to \infty.$$

Доказательство. С учетом утверждений леммы 8.1 для доказательства теоремы достаточно показать, что, правильно выбирая на t-ом шаге согласования главные члены асимптотик в нуле функций $\Psi^{(t)}_{n+2j-t+k,j+1}(x)$, можно добиться того, чтобы существовали ряды (5.15), (5.20) такие, что их коэффициенты $v_{2j+2+t,j+1}(\xi) \in \mathcal{B}_t$ являлись решениями уравнений (7.8), (7.9) и имели при $\rho \to \infty$ асимптотики $V_{2j+2+t,j+1}$ из формулировки леммы 8.1.

Начнем с определения $\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x)$ Как было показано уже ранее (см., (5.10), (5.8), (5.18), (5.16)), функции

$$v_{0,0} \equiv \psi(0), \quad v_{2j+2,j+1}(\xi) = \psi_0(0) z_0^{(j+1)}(\xi) \in \mathcal{B}_0, \qquad j \geqslant 0, \tag{8.4}$$

являются решениями уравнений (5.8) и (7.8) (в первой строчке) и согласно леммам 4.6, 4.7 имеют при $\rho \to \infty$ следующие асимптотики

$$V_{2j+2,j+1}(\xi) = \psi_0(0)\left(c^{(j+1)}_{0,0}\rho^{2-n} + \sum_{m=1}^{n} c^{(j+1)}_{0,m}\xi_m\rho^{-n} + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(\xi)\rho^{-2k-n+2}\right).$$

Отсюда в силу леммы 8.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x)$:

$$\begin{aligned} \Psi^{(0)}_{n+2j,j+1}(x) &\sim \psi_0(0) c^{(j+1)}_{0,0} r^{2-n}, \\ \Psi^{(0)}_{n+2j+1,j+1}(x) &\sim \psi_0(0)\sum_{m=1}^{n} c^{(j+1)}_{0,m} x_m r^{-n}, \\ \Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x) &\sim \psi_0(0) Y_k(x) r^{-2k-n+2}, \qquad k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{8.5}$$

В силу леммы 4.2 существуют функции $\Psi^{(0)}_{n+2j+q,j+1}(x) \in \mathcal{A}_q$, имеющие требуемые асимптотики в нуле и удовлетворяющие уравнениям (8.3) при некоторых $\Lambda^{(0)}_{n+2j+q,j+1}$. Следовательно, в частности, подтверждены представления (2.1) и (6.5) для случая $\psi_0(0) \neq 0$.

Кроме этого, во-первых, функции

$$\begin{aligned} \Psi^{(0)}_{n+2j,j+1}(x) &= \psi_0(0) c^{(j+1)}_{0,0} E_0(x), \\ \Psi^{(0)}_{n+2j+1,j+1}(x) &= \psi_0(0)\sum_{m=1}^{n} c^{(j+1)}_{0,m} E_m(x) \end{aligned} \tag{8.6}$$

имеют требуемые асимптотики (8.5) и удовлетворяют уравнениям (8.3) при

$$\Lambda^{(0)}_{n+2j,j+1} = \psi_0(0) c^{(j+1)}_{0,0}\Lambda_0, \qquad \Lambda^{(0)}_{n+2j+1,j+1} = \psi_0(0)\sum_{m=1}^{n} c^{(j+1)}_{0,m}\Lambda_m \tag{8.7}$$

в силу леммы 4.4, а во-вторых, очевидны, представления

$$\begin{aligned} \Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x) &= \psi_0(0)\widetilde{\Psi}^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x), \\ \Lambda^{(0)}_{n+2j+k,j+1} &= \psi_0(0)\widetilde{\Lambda}^{(0)}_{n+2j+k,j+1}, \qquad k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Замечание 8.1 (вывод формул (2.2) и (2.3)). *В силу (8.1), (8.2), (8.6) и (8.7) получаем, что*

$$\lambda_{n+2j,j+1} = \psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}\Lambda_0, \quad \psi_{n+2j,j+1}(x) = \psi_0(0)c_{0,0}^{(j+1)}E_0(x) \in \mathcal{A}^0. \tag{8.9}$$

Подставляя в эти равенства для $\lambda_{n,1}$ и $\lambda_{n+2,2}$ значения постоянных Λ_0, $c_{0,0}^{(1)}$ и $c_{0,0}^{(2)}$ из лемм 4.4, 4.6, 4.7, получаем равенства (2.2) и (2.3).

Замечание 8.2 (случай $\psi_0(0) = 0$). *В силу (8.5)–(8.8), (8.9) и представлений (8.1), (8.2) последовательно получаем, что*

$$\begin{gathered}\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x) = \Lambda^{(0)}_{n+2j+k,j+1} = 0, \quad k \geqslant 1, \\ \lambda_{n+2j,j+1} = \psi_{n+2j,j+1}(x) = 0 \quad \textit{если } \psi_0(0) = 0.\end{gathered} \tag{8.10}$$

Следовательно, в частности, подтверждено представление (6.5) и для случая $\psi_0(0) = 0$, а в силу леммы 8.1 справедливо равенство

$$\widetilde{V}_{2j+3,j+1}(\xi) \equiv 0.$$

Следующий шаг ($t = 1$). В силу леммы 8.1 получаем, что ряды

$$\widetilde{V}_{2j+3,j+1}(\xi) = \varepsilon^{-2j-3}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+3,j+1}\left(\Phi^{ex}_{odd,0}(x,\mu,\varepsilon)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$$

являются асимптотическими решениями при $\rho \to \infty$ вторых уравнений в (7.8), где в правой части функции $v_{2q+2,q+1}$ заменены на их асимптотики $V_{2q+2,q+1}$ при $\rho \to \infty$, а $v_{1,0} = P_1$. В силу леммы 4.8 существуют функции $v_{2j+3,j+1} \in \mathcal{B}_1$, являющиеся решениями вторых уравнений в (7.8) и имеющие при $\rho \to \infty$ асимптотики $V_{2j+3,j+1}$, такие, что

$$V_{2j+3,j+1}(\xi) = \widetilde{V}_{2j+3,j+1}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\xi)\rho^{-n+2-2k}. \tag{8.11}$$

Отсюда в силу леммы 8.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}(x)$:

$$\Psi^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}(x) \sim Z_k(x)r^{-n+2-2k}, \qquad k \geqslant 0. \tag{8.12}$$

В силу леммы 4.2 существуют функции $\Psi^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}(x) \in \mathcal{A}_k$, имеющие требуемые асимптотики в нуле и удовлетворяющие уравнениям (8.3) при некоторых $\Lambda^{(1)}_{n+2j+1+k,j+1}$.

А так как на предыдущем шаге были определены $\Psi^{(0)}_{n+2j+k,j+1}(x) \in \mathcal{A}_k$ и $\Lambda^{(0)}_{n+2j+k,j+1}$, то в соответствии с (8.1), (8.2) окончательно определены коэффициенты $\lambda_{n+2j+1,j+1}$ и $\psi_{n+2j+1,j+1}(x) \in \mathcal{A}^1$.

Замечание 8.3 (случай $\psi_0(0) = 0$). *Отметим, что*

$$\Lambda^{(1)}_{n+2j+1,j+1} = 0, \quad \textit{если } \psi_0(0) = 0$$

в силу (8.12) и леммы 4.4. Из этого равенства и (8.10), (8.1) следует, что

$$\lambda_{n+2j+1,j+1} = \lambda_{n+2j,j+1} = 0, \quad \textit{если } \psi_0(0) = 0. \tag{8.13}$$

Таким образом подтверждено и представление (2.6).

Для того чтобы на следующем шаге получить равенство (2.7) для $\lambda_{n+2,1}$ в критическом случае $\psi_0(0) = 0$, заметим, что

$$v_{0,0}(\xi) = v_{2,1}(\xi) \equiv 0, \qquad v_{1,0}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad \textit{если } \psi_0(0) = 0$$

(см., (5.10), (8.4)). Поэтому уравнение (7.8) для $v_{3,1}(\xi)$ (второе при $j=0$) приобретает вид

$$\Delta v_{3,1} = V v_{1,0} = V(\xi)\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m. \tag{8.14}$$

В силу леммы 4.6 функция

$$v_{3,1}(\xi) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)z_m^{(1)}(\xi) \tag{8.15}$$

является решением этого уравнения и имеет при $\rho\to\infty$ следующее асимптотическое разложение $V_{3,1}(\xi)$:

$$\begin{aligned} V_{3,1}(\xi) =& \rho^{2-n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}^{(1)} \\ &+\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,k}^{(1)}\xi_k\rho^{-n} + O(\rho^{-n}), \quad \textit{если } \psi_0(0)=0. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Из (8.11), (8.12) и (8.16) следует, что

$$\Psi_{n+2,1}^{(1)}(x) \sim \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,k}^{(1)}x_k r^{-n}. \tag{8.17}$$

В силу леммы 4.4 функция

$$\Psi_{n+2,1}^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,k}^{(1)}E_k(x)$$

имеет в нуле асимптотику (8.17) и является решением уравнения (8.3) при

$$\Lambda_{n+2,1}^{(1)} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,k}^{(1)}\Lambda_k. \tag{8.18}$$

Перейдем к следующему шагу ($t=2$). В силу леммы 8.1 получаем, что ряды

$$\widetilde{V}_{2j+4,j+1}(\xi) = \varepsilon^{-2j-4}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+4,j+1}\left(\Phi_{odd,1}^{ex}(x,\mu,\varepsilon)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_2$$

являются асимптотическими решениями при $\rho\to\infty$ уравнений (7.8), где функции $v_{2j+3,j+1}(\xi)$ заменены на их асимптотики $V_{2j+3,j+1}(\xi)$, а при $j>0$ и функции и $v_{2j+2,j}(\xi)$ заменены на на их асимптотики $V_{2j+2,j}(\xi)$. В силу леммы 4.8 существуют функции $v_{2j+4,j+1}(\xi)\in\mathcal{B}_2$, являющиеся решениями уравнений (7.8) и имеющие при $\rho\to\infty$ следующие асимптотики $V_{2j+4,j+1}(\xi)$:

$$V_{2j+4,j+1}(\xi) = \widetilde{V}_{2j+4,j+1}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty}Z_k^{(2j+4,j+1)}(\xi)\rho^{-n+2-2k}.$$

Отсюда в силу леммы 8.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi_{n+2j+2+k,j+1}^{(2)}(x)$:

$$\Psi_{n+2j+2+k,j+1}^{(2)}(x) \sim Z_k^{(2j+4,j+1)}(x)r^{-n+2-2k}, \qquad k\geqslant 0.$$

В силу леммы 4.2 существуют функции $\Psi_{n+2j+2+k,j+1}^{(1)}(x)\in\mathcal{A}_k$, имеющие требуемые асимптотики в нуле и удовлетворяющие уравнениям (8.3) при некоторых $\Lambda_{n+2j+2+k,j+1}^{(2)}$.

Так как уже определены $\Psi_{n+2j+k,j+1}^{(0)}$, $\Psi_{n+2j+1+k,j+1}^{(1)}\in\mathcal{A}_k$ и $\Lambda_{n+2j+k,j+1}^{(0)}$, $\Lambda_{n+2j+1+k,j+1}^{(1)}$, то в соответствии с (8.1), (8.2) окончательно определены и коэффициенты $\lambda_{n+2j+2,j+1}$ и $\psi_{n+2j+2,j+1}\in\mathcal{A}^2$.

И так далее.

Замечание 8.4 (вывод формулы (2.7)). *Отметим, что*

$$\Lambda^{(2)}_{n+2,1} = 0, \quad \text{если } \psi_0(0) = 0 \tag{8.19}$$

в силу (8.12) и леммы 4.4. Из (8.10), (8.18), (8.19) и (8.1) следует, что

$$\lambda_{n+2,1} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,k}\Lambda_k, \quad \text{если } \psi_0(0) = 0.$$

Подставляя в это равенство значения постоянных Λ_k и $c^{(1)}_{m,k}$ из лемм 4.4, 4.6, получаем равенство (2.7).

Замечание 8.5 (вывод формулы (2.4)). *Если $H_0 = -\Delta + a$, то уравнение (7.8) для $v_{3,1}(\xi)$ вновь имеет вид (8.14). Его решение определяется равенством (8.15) и имеет при $\rho \to \infty$ асимптотику (8.16). Из (8.11), (8.12) и (8.16) следует, что*

$$\Psi^{(1)}_{n+1,1}(x) \sim r^{2-n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}, \quad r \to 0.$$

В силу леммы 4.4 функция

$$\Psi^{(1)}_{n+1,1}(x) = E_0(x) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}.$$

имеет в нуле требуемую асимптотику и является решением уравнения (8.3) при

$$\Lambda^{(1)}_{n+1,1} = \Lambda_0 \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}. \tag{8.20}$$

Из (8.7), (8.20) и (8.1) следует, что

$$\lambda_{n+1,1} = \psi_0(0) \sum_{m=1}^{n} c^{(1)}_{0,m}\Lambda_m + \Lambda_0 \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c^{(1)}_{m,0}.$$

Подставляя в это равенство значения постоянных Λ_k и $c^{(1)}_{m,k}$ из лемм 4.4, 4.6, получаем равенство (2.4).

Теорема доказана полностью. □

Частичные суммы рядов $\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ до степеней M по ε включительно обозначим через $\widehat{\psi}^{ex,s}_{odd,M}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\widehat{\psi}^{in,s}_{odd,M}(\xi,\mu,\varepsilon)$, соответственно. А через $\widehat{\lambda}^{1}_{odd,M}(\mu,\varepsilon)$ и $\widehat{\lambda}^{2}_{odd,M}(\mu,\varepsilon)$ обозначим аналогичные частичные сумм рядов (2.1) и (2.6) соответственно. Из пунктов 2)–4) доказанной теоремы 8.1 вытекает

Следствие 3. *Справедливы следующие равенства*

$$\begin{aligned}
\left(H_0 - \widehat{\lambda}^{s}_{odd,n+2N}(\mu,\varepsilon)\right)\widehat{\psi}^{ex,s}_{odd,n+2N}(x,\mu,\varepsilon) =& O\left(\mathcal{G}_n(r)\left(\left(\varepsilon r^{-1}\right)^2 + \varepsilon^2\mu^{-1}\right)^{N-1}\right) \\
& \text{при } r \to 0,\ \varepsilon r^{-1} \to 0, \\
\left(H_{\mu,\varepsilon} - \widehat{\lambda}^{s}_{odd,n+2N}(\mu,\varepsilon)\right)\widehat{\psi}^{in,s}_{odd,2(N+1)}(\xi,\mu,\varepsilon) =& O\left((\varepsilon\rho)^{-1}\left((\varepsilon\rho)^2 + \varepsilon^2\mu^{-1}\right)^{N}\right) \\
& \text{при } \rho \to \infty,\ \varepsilon\rho \to 0, \\
\widehat{\psi}^{ex,s}_{odd,n+2N}(x,\mu,\varepsilon) - \widehat{\psi}^{in,s}_{odd,2(N+1)}(\xi,\mu,\varepsilon) =& O\left(\left(r^2 + \varepsilon^2\mu^{-1} + \rho^{-2}\right)^{N}\right) \\
& \text{при } r \to 0, \quad \rho \to \infty,
\end{aligned}$$

причем, последнее равенство дифференцируемо по x_m *(с учетом того, что* $\xi = \varepsilon^{-1}x$*).*

9. Построение полных формальных асимптотических разложений в случае двукратного собственного значения λ_0 и нечетномерной области

В рассмотренном в предыдущих разделах случае простого собственного λ_0 при построении асимптотического разложения собственного значения можно было начинать построение не с функции $\psi_0(x)$, а например, с функции $\psi_0(x) + \varepsilon^q C\psi_0(x) = (1 + \varepsilon^q C)\psi_0(x)$ для любых $q > 0$ и C, что, очевидно, в силу линейности рассматриваемых операторов, привело бы к той же асимптотике собственного значения. Поэтому начинать построение асимптотик с подобных функций и не имело смысла. В рассматриваемом же в настоящем разделе случае , когда λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ситуация — иная, так как этому собственному значению соответствуют две собственные функции $\psi_0^{(1)}(x)$ и $\psi_0^{(2)}(x)$. Поэтому при построении асимптотических разложений, соответствующих собственным функциям оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, сходящимся к собственным функциям $\psi_0^{(s)}(x)$, будем начинать построение со следующих асимптотических рядов:

$$\psi_0^{(s)}(x) + \varepsilon\psi_0^{(s^*)}(x)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\alpha_{i+1,j}^{(s)}\varepsilon^i\mu^{-j}, \tag{9.1}$$

где $s^* = 2$, если $s = 1$ и, наоборот, $s^* = 1$, если $s = 2$, а $\alpha_{i+1,j}^{(s)}$ — пока произвольные постоянные.

Замечание 9.1. *Интуитивные соображения присутствия последних сумм в (9.5) (обоснованность которых будет видна из дальнейшего согласования асимптотических разложений собственных функций) заключается в следующем наблюдении: ничто не запрещает при построении внешнего разложения собственной функции, сходящейся к* $\psi_0^{(1)}(x)$ *(к* $\psi_0^{(2)}(x)$*), добавлять на каждом последующем шагу построения функцию пропорциональную* $\psi_0^{(2)}(x)$ *(пропорциональную* $\psi_0^{(1)}(x)$*).*

Начиная построение асимптотических разложений с (9.1) и следуя методу согласования асимптотических разложений (повторяя алгоритм, приведенный в разделе 5), последовательно получаем сначала функции $v_{p,0}^{(s)}$ и главные члены (по нарастанию отрицательных степеней μ) внутренних разложений:

$$\begin{aligned} v_{0,0}^{(1)} \equiv{}& \psi_0^{(1)}(0), \qquad v_{q,0}^{(1)}(\xi) = P_q^{(1)}(\xi) + \alpha_{1,0}^{(1)}P_q^{(2)}(\xi), \quad q \geqslant 1,\\ v_{1,0}^{(2)}(\xi) ={}& \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)\xi_m + \alpha_{1,0}^{(2)}\psi_0^{(1)}(0), \quad v_{k,0}^{(2)}(\xi) = P_k^{(2)}(\xi) + \alpha_{1,0}^{(2)}P_k^{(1)}(\xi), \quad k \geqslant 2, \end{aligned}$$

$$v_{2j+2,j+1}^{(1)}(\xi) = \psi_0^{(1)}(0)z_0^{(j+1)}(\xi), \qquad j \geqslant 0, \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned} v_{2j+3,j+1}^{(2)}(\xi) ={}& \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)z_m^{(j+1)}(\xi)\\ &+ \psi_0^{(1)}(0)\left(\sum_{k=0}^{j}\alpha_{2k+1,k}^{(2)}z_0^{(j+1-k)}(\xi) + \alpha_{2j+3,j+1}^{(2)}\right), \quad j \geqslant 0; \end{aligned} \tag{9.3}$$

затем структуры внутренних асимптотических разложений:

$$\begin{aligned}
\psi_{odd}^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}v_{2+i,j+1}^{(1)}(\xi),\\
\psi_{odd}^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_{i,0}^{(2)}(\xi) + \varepsilon^3\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}v_{3+i,j+1}^{(2)}(\xi)
\end{aligned}\tag{9.4}$$

(аналог (5.15), (5.20)); потом предполагаемые структуры внешних асимптотических разложений:

$$\begin{aligned}
\psi_{odd}^{ex,1}(x,\mu,\psi_0^{(1)}(x) &+ \varepsilon^n\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i,j+1}^{(1)}(x)\\
&+ \varepsilon\psi_0^{(2)}(x)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\alpha_{i+1,j}^{(1)}\varepsilon^i\mu^{-j},\\
\psi_{odd}^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon) = \psi_0^{(2)}(x) &+ \varepsilon^{n+1}\mu^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\varepsilon^i\mu^{-j}\psi_{n+i+1,j+1}^{(2)}(x)\\
&+ \varepsilon\psi_0^{(1)}(x)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=2j}^{\infty}\alpha_{i+1,j}^{(2)}\varepsilon^i\mu^{-j},
\end{aligned}\tag{9.5}$$

(аналог (6.5)) и ожидаемые структуры (2.10), (2.11) асимптотических разложений собственных значений (аналог (2.1), (2.6)).

Подставляя ряды (2.10), (2.11), (9.5) в уравнение (7.1), получаем заведомо выполняющиеся уравнения

$$H_0\psi_0^{(s)} = \lambda_0\psi_0^{(s)} \quad \text{в } \Omega$$

и рекуррентные системы уравнений в $\Omega\backslash\{0\}$ для остальных коэффициентов внешних разложений (9.5):

$$\begin{aligned}
(H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+2j,j+1}^{(s)} =& \lambda_{n+2j,j+1}^{(s)}\psi_0^{(s)}, \qquad j\geqslant 0\\
(H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i,1}^{(s)} =& \lambda_{n+i,1}^{(s)}\psi_0^{(s)} + \psi_0^{(s^*)}\sum_{p=1}^{i}\alpha_{p,0}^{(s)}\lambda_{n+i-p,1}^{(s)} \quad i\geqslant 1,\\
(H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i+2j,j+1}^{(s)} =& \lambda_{n+i+2j,j+1}^{(s)}\psi_0^{(s)}\\
&+ \psi_0^{(s^*)}\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\alpha_{2q+p,q}^{(s)}\lambda_{n+i-p+2(j-q),j-q+1}^{(s)},\\
&1\leqslant i\leqslant n-3, \quad j\geqslant 1,\\
(H_0-\lambda_0)\,\psi_{n+i+2j,j+1}^{(s)} =& \lambda_{n+i+2j,j+1}^{(s)}\psi_0^{(s)}\\
&+ \sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{q=0}^{j-1}\lambda_{n+k+2q,q+1}^{(s)}\psi_{i-k+2(j-q),j-q}^{(s)}\\
&+ \psi_0^{(s^*)}\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\alpha_{2q+p,q}^{(s)}\lambda_{n+i-p+2(j-q),j-q+1}^{(s)},\\
&i\geqslant n-2, \quad j\geqslant 1,
\end{aligned}\tag{9.6}$$

(аналог (7.2)), где

$$\psi_{n+2j,j+1}^{(2)}(x) = \lambda_{n+2j,j+1}^{(2)} = \lambda_{n+1+2j,j+1}^{(2)} = 0 \tag{9.7}$$

(аналог (7.3), (8.13)).

Подставляя ряды (2.10), (2.11), (9.4) в уравнение (7.1), получаем для коэффициентов внутренних разложений (9.4) уравнения (7.8), в которых коэффициенты $v_{p,q}$, $\lambda_{k,l}$ заменены $v^{(s)}_{p,q}$, $\lambda^{(s)}_{k,l}$, а равенство (7.9) заменяется на следующее:

$$v^{(2)}_{0,0}(\xi) = v^{(2)}_{2j+2,j+1}(\xi) = \lambda^{(2)}_{n+2j+2,j+1} = \lambda^{(2)}_{n+1+2j+2,j+1} = 0. \tag{9.8}$$

Поэтому далее для коэффициентов внутренних разложения будем ссылаться на уравнения (7.8), подразумевая, что в них добавлены упомянутые выше соответствующие индексы.

По аналогии с предыдущем разделом коэффициенты асимптотических разложений собственных значений и внешних разложений собственных функций будем строить в виде

$$\lambda^{(s)}_{n+i+2j,j+1} = \sum_{t=0}^{i} \Lambda^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}, \quad j,i \geqslant 0, \tag{9.9}$$

$$\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x) = \sum_{t=0}^{i} \Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x), \quad j,i \geqslant 0, \tag{9.10}$$

$$\alpha^{(s)}_{2j+i,j} = \sum_{t=0}^{i} \alpha^{(t,s)}_{2j+t,j}, \quad j,i \geqslant 0, \tag{9.11}$$

и обозначим через $\Phi^{ex,s}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ ряды вида (9.5), где $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ и $\alpha^{(s)}_{2j+i,j}$ заменены на

$$\Phi^{(N,s)}_{n+i+2j,j+1}(x) = \sum_{t=0}^{\min\{i,N\}} \Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x), \quad j \geqslant 0,$$

$$\Theta^{(N,s)}_{2j+i,j+1} = \sum_{t=0}^{\min\{i,N\}} \alpha^{(t,s)}_{2j+i,j+1}, \quad j \geqslant 0,$$

соответственно.

Для дальнейшего согласования рядов $\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ из (9.5) и (9.4) понадобится следующий аналог леммы 8.1, справедливость которого также вытекает из определения $\mathcal{A}^m$, $\mathcal{A}_m$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$, $\mathcal{K}_{m,l}$, $\mathcal{K}$, $\Phi^{ex,s}_{odd,N}(x,\mu,\varepsilon)$ и (9.9), (9.10), (9.11).

Лемма 9.1. *Если коэффициенты $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ рядов (9.5) принадлежат $\mathcal{A}^i$, то*

$$\mathcal{K}(\psi^{ex,s}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)) = \Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon),$$

где $\Psi^{in,s}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ — ряды вида (9.4), в которых коэффициенты $v^{(s)}_{2+i,j+1}(\xi)$ заменены на ряды $V^{(s)}_{2+i,j+1}(\xi) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i-2j}$.

Если $\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x) \in \mathcal{A}_{i-t}$, то функция $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемая равенством (9.10), принадлежит $\mathcal{A}^i$ и имеют место следующие равенства:

$$V^{(s)}_{2j+2+t,j+1}(\xi) = \widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(2j+2+t,j+1,s)}_k(\xi)\rho^{-n+2-2k},$$

где $\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2,j+1}(\xi) \equiv 0$,

$$\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}(\xi) = \varepsilon^{-2j-2-t}\mu^{j+1}\mathcal{K}_{2j+2+t,j+1}\left(\Phi^{ex,s}_{odd,t-1}(x,\mu,\varepsilon)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_t, \quad t \geqslant 1,$$

(т.е. $\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}$ не зависит от $\Psi^{(m,s)}_{p,q}$ при $m \geqslant t-1$), а $Z^{(2j+2+t,j+1,s)}_k r^{-n+2-2k}$ — главный член асимптотики $\Psi^{(t,s)}_{n+2j-t+k,j+1}(x)$ в нуле.

Если, к тому же, функции $\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$ являются в $\Omega\backslash\{0\}$ решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+2j,j+1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+2j,j+1}\psi^{(s)}_0, \qquad j\geqslant 0\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi^{(s)}_0+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\alpha^{(s)}_{p,0}\Lambda^{(t,s)}_{n+i-p,1}\quad i\geqslant 1,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi_0,\quad i\geqslant 0,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0\\
&+\sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{p=0}^{t}\Lambda^{(p,s)}_{n+k+2q,q+1}\Psi^{(t-p,s)}_{i-k+2(j-q),j-q}\\
&+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\alpha^{(s)}_{2q+p,q}\Lambda^{(t,s)}_{n+i-p+2(j-q),j-q+1},\\
&i\geqslant 1\quad j\geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{9.12}
$$

или уравнений

$$
\begin{aligned}
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+2j,j+1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+2j,j+1}\psi^{(s)}_0, \qquad j\geqslant 0\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi^{(s)}_0+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\sum_{l=0}^{t}\alpha^{(l,s)}_{p,0}\Lambda^{(t-l,s)}_{n+i-p,1}\quad i\geqslant 1,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i,1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+i,1}\psi_0,\quad i\geqslant 0,\\
(H_0-\lambda_0)\,\Psi^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1} =& \Lambda^{(t,s)}_{n+i+2j,j+1}\psi_0\\
&+\sum_{k=0}^{i-n+2}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{p=0}^{t}\Lambda^{(p,s)}_{n+k+2q,q+1}\Psi^{(t-p,s)}_{i-k+2(j-q),j-q}\\
&+\psi^{(s^*)}_0\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{j}\sum_{l=0}^{t}\alpha^{(l,s)}_{2q+p,q}\Lambda^{(t-l,s)}_{n+i-p+2(j-q),j-q+1},\\
&i\geqslant 1\quad j\geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{9.13}
$$

то функции $\psi^{(s)}_{n+i+2j,j+1}(x)$, определяемые равенствами (9.10), являются решениями уравнений (9.6), (9.7), при $\lambda^{(s)}_{n+i+2j,j+1}$, определяемыми равенствами (9.9), а ряды $\widetilde{V}^{(s)}_{2j+2+t,j+1}$ являются формальными асимптотическими решениями уравнений (7.8) при $\rho\to\infty$, где в правой части $v_{p,q}$ и $\lambda_{p,q}$ заменены на $V^{(s)}_{p,q}$ и и $\lambda^{(s)}_{p,q}$ при $q>0$.

Вначале займемся согласованием рядов $\psi^{ex,1}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$. В этом случае будем использовать уравнения (9.13). Следуя алгоритму доказательства теоремы 8.1, видим, что функции $v^{(1)}_{2j+2,j+1}(\xi)$, $j\geqslant 0$, определяемые равенствами (9.2), принадлежат $\mathcal{B}_0$, являются решениями уравнений (7.8) (в первой строчке), и в силу лемм 4.6, 4.7 имеют при $\rho\to\infty$ следующие асимптотики

$$V^{(1)}_{2j+2,j+1}(\xi)=\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\rho^{2-n}+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\xi)\rho^{-2k-n+2},\quad j\geqslant 0.$$

Отсюда в силу леммы 9.1 получаем главные члены асимптотик в нуле для функций $\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x)$:

$$\begin{aligned}\Psi^{(0,1)}_{n+2j,j+1}(x) \sim&\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}r^{2-n},\\ \Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x) \sim&Y_k(x)r^{-2k-n+2}, \qquad k\geqslant 1.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Функции

$$\Psi^{(0,1)}_{n+2j,j+1}(x) =\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}E_0(x) \tag{9.15}$$

имеют требуемую асимптотику в нуле и в силу леммы 4.4 удовлетворяет соответствующим уравнениям

$$(H_0-\lambda_0)\Psi^{(0,1)}_{n+2j,j+1}=\Lambda^{(0,1)}_{n+2j,j+1}\psi^{(1)}_0, \quad j\geqslant 0$$

из (9.13) при

$$\Lambda^{(0,1)}_{n+2j,j+1}=\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\Lambda_0. \tag{9.16}$$

Замечание 9.2 (вывод формулы (2.12))**.** *В силу (9.9), (9.10), (9.16) и (9.15), в частности, получаем, что*

$$\lambda^{(1)}_{n+2j,j+1}=\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\Lambda_0, \quad \psi_{n+2j,j+1}(x)=\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}E_0(x)\in\mathcal{A}^0.$$

Подставляя в эти равенства значения Λ_0, $c^{(1)}_{0,0}$ из лемм 4.4, 4.6, получаем равенство (2.12) для $\lambda^{(1)}_{n,1}$.

При $k\geqslant 1$ уравнения (9.13) для $\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}(H_0-\lambda_0)\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}=&\Lambda^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}\psi^{(1)}_0\\ &+\psi^{(2)}_0\sum_{m=1}^{k}\sum_{q=0}^{j-1}\alpha^{(0,1)}_{2q+m,q}\Lambda^{(0,1)}_{n+2(j-q)+k-m,(j-q)+1}.\end{aligned}$$

В силу леммы 4.2 из условия разрешимости этих уравнений с заданными в (9.14) особенностями в нуле решений, во-первых, определяем $\Lambda^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}$ и $\Psi^{(0,1)}_{n+2j+k,j+1}(x)\in\mathcal{A}_k$, а во-вторых, учитывая, что $\Lambda^{(0,1)}_{n,1}=\lambda^{(1)}_{n,1}\neq 0$ в силу (2.12) и условия $\langle V\rangle\neq 0$, находим $\alpha^{(0,1)}_{2j+k,j+1}$. Отметим, что $\alpha^{(1)}_{2j+1,j}=\alpha^{(0,1)}_{2j+1,j}$ в силу (9.11).

На следующем шаге аналогично определяются $\Psi^{(1,1)}_{n+2j+1+k,j+1}$, $\Lambda^{(1,1)}_{n+2j+1+k,j+1}$ и $\alpha^{(1,1)}_{2j+k+2,j}$ при $k\geqslant 0$, а следовательно в силу (9.9), (9.10) и (9.11) окончательно находятся $\psi^{(1)}_{n+2j+1,j+1}$, $\lambda^{(1)}_{n+2j+1,j+1}$ и $\alpha^{(1)}_{2j+2,j}$. И так далее.

В результате получаем справедливость следующего аналога теоремы 8.1 и ее следствия 3.

Теорема 9.1. *Пусть n — нечетно, $\langle V\rangle\neq 0$, λ_0 – двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, $\psi^{(1)}_0$ и $\psi^{(2)}_0$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, удовлетворяющие условию (2.8) и выбранные в соответствии с (2.9).*

Тогда существуют ряд $\psi^{ex,1}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ вида (9.5), ряд $\psi^{in,1}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ вида (9.4) и ряд (2.10) такие, что:

1) выполняется равенство (2.12);

2) $\psi^{(1)}_{n+2j+i,j+1}\in\mathcal{A}^i$, $v^{(1)}_{2j+2+i,j+1}\in\mathcal{B}_i$;

3) для их частичных сумм справедливы утверждения следствия 3.

Перейдем к согласованию рядов $\psi^{ex,2}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$. В этом случае будет достаточно использовать уравнения (9.12). Следуя приведенному выше алгоритму, видим, что функции $v^{(2)}_{2j+3,j+1}(\xi)$, $j \geqslant 0$, определяемые равенствами (9.3), принадлежат $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1$, являются решениями уравнений (7.8) (с учетом равенств (9.8)) и в силу лемм 4.6, 4.7 имеют при $\rho \to \infty$ следующие асимптотики

$$\begin{aligned}V^{(2)}_{2j+3,j+1}(\xi) = &\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0) c^{(j+1)}_{m,0} + \alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\right)\rho^{2-n}\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_i}(0) c^{(j+1)}_{m,i} + \alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,i}\right)\xi_i\rho^{-n}\\ &+ \sum_{k=2}^{\infty}\left(Y^{(j+1,0,2)}_k(\xi) + \alpha^{(2)}_{2j+1,j}Y^{(j+1,0,1)}_k(\xi)\right)\rho^{-2k-n+2}.\end{aligned}$$

Отсюда, во-первых, в силу (9.9), (9.10) последовательно вытекает, что

$$\begin{aligned}\Psi^{(0,2)}_{n+2j+k,j+1}(x) =& \Lambda^{(0,2)}_{n+2j+k,j+1} = 0, \quad k \geqslant 0,\\ \psi^{(2)}_{n+2j,j+1}(x) =& \lambda^{(2)}_{n+2j,j+1} = 0,\end{aligned} \tag{9.17}$$

а во-вторых, в силу леммы 9.1 получаем, что $\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}(x)$:

$$\Psi^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1}(x) \sim \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0) c^{(j+1)}_{m,0} + \alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}\right)\rho^{2-n}, \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}(x) \sim \sum_{i=1}^{n}\Bigg(&\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0) c^{(j+1)}_{m,i}\\ &+ \alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,i}\Bigg)\xi_i\rho^{-n},\end{aligned} \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}(x) \sim \Big(&Y^{(j+1,0,2)}_k(\xi)\\ &+ \alpha^{(2)}_{2j+1,j}Y^{(j+1,0,1)}_k(\xi)\Big)\rho^{-2k-n+2}, \qquad k \geqslant 2,\end{aligned} \tag{9.20}$$

при $r \to 0$. Уравнения (9.12) для этих функций с учетом равенств (9.17) принимают следующий вид:

$$(H_0 - \lambda_0)\Psi^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1} = \Lambda^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1}\psi^{(2)}_0, \tag{9.21}$$

$$(H_0 - \lambda_0)\Psi^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1} = \Lambda^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}\psi^{(2)}_0, \tag{9.22}$$

$$(H_0 - \lambda_0)\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1} = \Lambda^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}\psi^{(2)}_0, \quad k \geqslant 2. \tag{9.23}$$

В силу леммы 4.4 уравнения (9.21) имеют решения с асимптотикой (9.18) в нуле только, если множитель в (9.18) равен нулю, т.е.

$$\alpha^{(2)}_{2j+1,j} = -\frac{1}{\psi^{(1)}_0(0)c^{(j+1)}_{0,0}}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \psi^{(2)}_0}{\partial x_m}(0) c^{(j+1)}_{m,0}, \tag{9.24}$$

что, в свою очередь, влечет равенства

$$\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1} = \Psi^{(1,2)}_{n+2j+1,j+1} = 0. \tag{9.25}$$

Замечание 9.3 (о структуре внешнего разложения). *Из (9.25), (9.17) и (9.9), (9.10) вытекают равенства*

$$\psi^{(2)}_{n+2j,j+1}(x) = \psi^{(2)}_{n+2j+1,j+1}(x) = \lambda^{(2)}_{n+2j,j+1} = \lambda^{(2)}_{n+1+2j,j+1} = 0,$$

являющиеся более детальными, нежели равенства (9.7).

Так же в силу леммы 4.4 функции

$$\Psi^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1}(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,i} + \alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi_0^{(1)}(0)c^{(j+1)}_{0,i}\right)E_i(x)$$

имеют асимптотики (9.19) и является решениями уравнений (9.22) при

$$\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+2,j+1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial x_m}(0)c^{(j+1)}_{m,i} + \alpha^{(2)}_{2j+1,j}\psi_0^{(1)}(0)c^{(j+1)}_{0,i}\right)\Lambda_i^{(2)}. \tag{9.26}$$

И, наконец, в силу следствия 2 существуют функции $\Psi^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1} \in \mathcal{A}^k$, имеющие асимптотики (9.20) и являющиеся решениями уравнений (9.23) при некоторых $\Lambda^{(1,2)}_{n+2j+k+1,j+1}$.

На следующем шаге, аналогично, из условия разрешимости уравнений (9.12) для $\Psi^{(2,2)}_{n+2j+2,j+1}(x)$ находим $\alpha^{(2)}_{2j+2,j}$ и получаем, что

$$\Lambda^{(2,2)}_{n+2j+2,j+1} = \Psi^{(2,2)}_{n+2j+2,j+1} = 0. \tag{9.27}$$

Далее, в силу следствия 2 существуют функции $\Psi^{(2,2)}_{n+2j+k+2,j+1} \in \mathcal{A}^k$, $k \geqslant 1$, имеющие асимптотики, требуемые асимптотики и являющиеся решениями уравнений (9.12) при некоторых $\Lambda^{(2,2)}_{n+2j+k+2,j+1}$. И так далее.

Замечание 9.4 (вывод формулы (2.13))**.** *Так как $\Lambda^{(2)}_{n+2,1} = \Lambda^{(1,2)}_{n+2,1}$ в силу (9.9) и (9.17), (9.27), то, подставляя в (9.26) значения $\alpha^{(2)}_{1,0}$ из (9.24) и Λ_k, $c^{(1)}_{m,k}$ из лемм 4.4, 4.6, выводим равенство (2.13).*

В результате получаем справедливость следующего аналога теоремы 8.1 и ее следствия 3.

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1.*

Тогда существуют ряд $\psi^{ex,2}_{odd}(x,\mu,\varepsilon)$ вида (9.5), ряд $\psi^{in,2}_{odd}(\xi,\mu,\varepsilon)$ вида (9.4) и ряд (2.11) такие, что:

1) выполняется равенство (2.13);

2) $\psi^{(2)}_{n+2j+i,j+1} \in \mathcal{A}^i$, $v^{(2)}_{2j+2+i,j+1} \in \mathcal{B}_i$;

3) для их частичных сумм справедливы утверждения следствия 3.

10. Построение полных формальных асимптотических разложений в случае четномерных областей

Для случая четных областей асимптотические разложения более громоздкие и содержат степени $\ln\varepsilon$. Это связано с тем, что асимптотики в нуле коэффициентов внешнего разложения содержат логарифмические члены, которые при переписывании во внутренних переменных порождают слагаемые, содержащие $\ln\varepsilon$. Поэтому во внутреннем и внешнем разложениях собственных функций и разложении собственного значения последовательно возникают слагаемые вида $\varepsilon^i\mu^{-j}\ln\varepsilon\, v_{i,j,1}(\xi)$, $\varepsilon^i\mu^{-j}\ln\varepsilon\,\psi_{i,j,1}(x)$ и $\varepsilon^i\mu^{-j}\ln\varepsilon\,\lambda_{i,j,1}$. В свою очередь, переписывание асимптотики в нуле коэффициентов внешнего разложения $\psi_{i,j,1}(x)$ во внутренних переменных последовательно порождает слагаемые, содержащие $\ln^2\varepsilon$, во внутреннем, внешнем разложениях собственных функций и в разложении собственного значения. Используя применяемый в предыдущих разделах алгоритм метода согласования асимптотических разложений, легко проследить, что для четных n в случае простого собственного значения λ_0 цепочка возникновения первых членов, содержащих повышающиеся степени $\ln\varepsilon$, выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& v_{0,0} = \psi_0(0), \quad v_{k,0} = P_k, \quad k \geqslant 1 \\
\Rightarrow\ & \varepsilon^{2+2j}\mu^{-j-1} : v_{2+2j,j+1} = \psi_0(0) z_0^{(j+1)} j \geqslant 0 \\
\Rightarrow\ & \varepsilon^{n+2j}\mu^{-j-1} : \psi_{n+2j,j+1} = \psi_0(0) c_{0,0}^{(j+1)} E_0; \quad \lambda_{n+2j,j+1} = \psi_0(0) c_{0,0}^{(j+1)} \Lambda_0 \\
\Rightarrow\ & \varepsilon^{n+2j}\mu^{-j-1}\ln\varepsilon : v_{n+2j,j+1,1} = \psi_0(0) A_j^{(1)}, \quad v_{n+2j+k,j+1,1}(\xi) = \psi_0(0) R_k^{(1)}(\xi) \\
\Rightarrow\ & \ldots \\
\Rightarrow\ & \varepsilon^{qn+2j}\mu^{-j-q}\ln^q\varepsilon : v_{qn+2j,j+q,q} = \psi_0(0) A_j^{(q)}, \\
& v_{qn+2j+k,j+q,q} = \psi_0(0) R_k^{(q)} \\
\Rightarrow\ & \varepsilon^{qn+2j+2}\mu^{-j-q-1}\ln^q\varepsilon : v_{qn+2j+2,j+q+1,q} = \psi_0(0) A_j^{(q)} z_0^{(j+1)} \\
\Rightarrow\ & \varepsilon^{3n+2j}\mu^{-j-3}\ln^q\varepsilon : \psi_{(q+1)n+2j,j+q+1,q} = \psi_0(0) c_{0,0}^{(j+1)} A_j^{(q)} E_0; \\
& \qquad\qquad \lambda_{(q+1)n+j,j+q+1,q} = \psi_0(0) c_{0,0}^{(j+1)} A_j^{(q)} \Lambda_0 \\
\Rightarrow\ & \varepsilon^{(q+1)n+2j}\mu^{-j-q-1}\ln^{q+1}\varepsilon : v_{(q+1)n+2j,j+q+1,q+1} = \psi_0(0) A_j^{(q+1)}, \\
& v_{(q+1)n+2j+k,j+q+1,q+1} = \psi_0(0) R_k^{(q+1)} \Rightarrow \ldots
\end{aligned}
$$

Из этой цепочки и приведенного в предыдущем разделе согласования асимптотических разложений следует, что если $\psi_0(0) = 0$, то внутреннее разложение имеет вид

$$
\psi_{even}^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon) = \sum_{q=0}^{\infty} \mu^{-q}\varepsilon^{qn}\ln^q\varepsilon\, \psi_q^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon), \tag{10.1}
$$

где $s = 1$, ряд $\psi_0^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon)$ из (5.15), а ряды $\psi_l^{in,1}(\xi,\mu,\varepsilon)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру, внешнее разложение имеет вид

$$
\psi_{even}^{ex,s}(\xi,\mu,\varepsilon) = \sum_{q=0}^{\infty} \mu^{-q}\varepsilon^{qn}\ln^q\varepsilon\, \psi_q^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon), \tag{10.2}
$$

где $s = 1$, ряд $\psi_0^{ex,1}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{ex,1}(x,\mu,\varepsilon)$ из (6.5), а ряды $\psi_l^{ex,1}(\xi,\mu,\varepsilon) + \psi_0(x)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру, а асимптотическое разложение собственного значения имеет вид

$$
\lambda_{even}^{s}(\mu,\varepsilon) = \sum_{q=0}^{\infty} \mu^{-q}\varepsilon^{qn}\ln^q\varepsilon\, \lambda_q^{s}(\mu,\varepsilon), \tag{10.3}
$$

где $s = 1$, ряд $\lambda_0^1(\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\lambda_{odd}^1(\mu,\varepsilon)$ из (6.7), а ряды $\lambda_l^1(\mu,\varepsilon) + \lambda_0$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру. Следовательно, ряд $\lambda_{even}^1(\mu,\varepsilon)$ имеет вид (2.1).

Если же $\psi_0(0) = 0$, то для четных $n \geqslant 4$ в случае простого собственного значения λ_0 цепочка возникновения первых членов, содержащих повышающиеся степени $\ln\varepsilon$, имеет следующий вид:

$$v_{0,0}=\psi_0(0)=0 \quad v_{1,0}(\xi)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m, \quad v_{k,0}=P_k, \quad k\geqslant 2$$

$$\Rightarrow\ v_{3+2j,j+1}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)z_m^{(j+1)}, \quad j\geqslant 0$$

$$\Rightarrow\ \psi_{n+2j+1,j+1}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}^{(j+1)}E_0;$$

$$\psi_{n+2j+2,j+1}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,i}^{(j+1)}E_i+B_j^{(1)}E_0;$$

$$\lambda_{n+2j+2,j+1}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,i}^{(j+1)}\Lambda_i$$

$$\Rightarrow\ v_{n+2j+1,j+1,1}=A_j^{(1)}, \quad v_{n+2j+1+l,j+1,1}(\xi)=R_l^{(1)}(\xi), \quad l\geqslant 1$$

$$\Rightarrow\ \dots$$

$$\Rightarrow\ v_{qn+2j+1,j+q,q}=A_j^{(q)}, \quad v_{qn+2j+1+l,j+q,q}=R_l^{(q)}$$

$$\Rightarrow\ v_{qn+2j+3,j+q+1,q}=A_j^{(q)}z_0^{(j+1)}$$

$$\Rightarrow\ \psi_{(q+1)n+2j+1,j+q+1,q}=A_j^{(q)}c_{0,0}^{(j+1)}E_0;$$

$$\psi_{(q+1)n+2j+2,j+q+1,q}=A_j^{(q)}\sum_{i=1}^{n}c_{0,i}^{(j+1)}E_i+B_j^{(q+1)}E_0;$$

$$\lambda_{(q+1)n+2j+2,j+q+1,q}=A_j^{(q)}\sum_{i=1}^{n}c_{0,i}^{(j+1)}\Lambda_i$$

$$\Rightarrow\ v_{2n+2j+1,j+2,2}=A_j^{(q+1)}, \quad v_{(q+1)n+2j+2,j+q+1,q+1}=R_l^{(k+1)}\ \Rightarrow\ \dots$$

Замечание 10.1 (случай $\psi_0(0)=0$, $n=2$)**.** *Так как в рассматриваемом случае*

$$E_0(x)=-\ln r+c(\Omega)+O(r\ln r), \quad r\to 0,$$

в силу леммы 4.5, то для согласования главных членов внешнего и внутреннего асимптотических разложений собственной функции в приведенной выше цепочке достаточно выбирать

$$v_{3+2j,j+1}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)\left(z_m^{(j+1)}+c_{m,0}^{(j+1)}c(\Omega)\right),$$

$$v_{qn+2j+3,j+q+1,q}=A_j^{(q)}\left(z_0^{(j+1)}+c_{0,0}^{(j+1)}c(\Omega)\right), \quad j\geqslant 0,\ q\geqslant 1.$$

Из этой цепочки и приведенного в предыдущем разделе согласования асимптотических разложений следует, что если $\psi_0(0)=0$, то внутреннее разложение имеет вид (10.1), где $s=2$, ряд $\psi_0^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon)$ из (5.20), а ряды $\psi_l^{in,2}(\xi,\mu,\varepsilon)$ при $l\geqslant 1$ имеют такую же структуру с точностью до постоянного слагаемого, внешнее разложение имеет вид (10.2), где $s=2$, ряд $\psi_0^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\psi_{odd}^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon)$ из (6.5), а ряды $\psi_l^{ex,2}(x,\mu,\varepsilon)+\psi_0(x)$ при $l\geqslant 1$ имеют такую же структуру, а асимптотическое разложение собственного значения имеет вид (10.3), где $s=2$, ряд $\lambda_0^2(\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядом $\lambda_{odd}^2(\mu,\varepsilon)$ из (6.7), а ряды $\lambda_l^2(\mu,\varepsilon)+\lambda_0$ при $l\geqslant 1$ имеют такую же структуру. Следовательно, ряд $\lambda_{even}^2(\mu,\varepsilon)$ имеет вид (2.6).

Замечание 10.2. *Уравнения для коэффициентов асимптотических разложений (10.1), (10.2) собственных функций выводятся так же, как и в предыдущих разделах. Ряды (10.2) и (10.3) подставляются в уравнение*

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{\mu,\varepsilon}, \tag{10.4}$$

и выписываются равенства при одинаковых степенях $\varepsilon, \ln\varepsilon$ и μ. В результате получаем уравнения на коэффициенты внешнего разложения (10.2). Аналогично, подстановкой рядов (10.1) и (10.3) в уравнение (10.4), переходом в нем ко внутренней переменной ξ и выписыванием равенств при одинаковых степенях $\varepsilon, \ln\varepsilon$ и μ получаются уравнения на коэффициенты внутреннего разложения (10.1). Если коэффициенты разложений удовлетворяют полученным таким образом уравнениям, то будем говорить, что ряды (10.1), (10.2), (10.3) являются асимптотическими решениями уравнения (10.4).

По аналогии с индексами, используемыми в приведенных выше цепочках, при $l \geqslant 1$ для коэффициентов рядов $\psi_l^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$, $\psi_l^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ и $\lambda_l^{(s)}(\mu,\varepsilon)$ при $\varepsilon^i\mu^k$ будем использовать обозначения $v_{i,k,l}$, $\psi_{i,k,l}$ и $\lambda_{i,k,l}$ соответственно.

Следуя процедуре согласования асимптотических разложений, приведенной в разделе 8, легко получить справедливость следующего утверждения.

Теорема 10.1. *Пусть λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, ψ_0 — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция. Тогда при четных n существуют ряды (10.1), (10.2), (10.3) такие, что:*

1) они являются асимптотическими решениями уравнения (10.4);

2) ряды $\lambda^1_{even}(\mu,\varepsilon)$, $\lambda^2_{even}(\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами (2.1), (2.6), соответственно, причем, для них выполняются равенства (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) (последнее с учетом утверждения леммы 4.6 для $n = 2$);

3) ряды ряды $\psi_0^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами $\psi_{odd}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ из (6.5);

4) $\psi_{n+2j+i,j+1}$, $\psi_{n+2j+nl+i,j+1,l} \in \mathcal{A}^i$, $v_{2j+2+i,j+1}$, $v_{2j+ln+2+i,j+1,l} \in \mathcal{B}_i$;

5) для частичных сумм рядов (10.1), (10.2), (10.3) справедливы утверждения следствия 3 (с заменой индекса "odd" на "even"в формулировке).

Сформулируем аналог этой теоремы для случая кратного λ_0. Следуя алгоритму, приведенному в предыдущем разделе 9, легко выписать цепочки возникновения первых членов, содержащих повышающиеся степени $\ln\varepsilon$, и в случае двукратного собственного значения λ_0, и убедиться, что асимптотические разложения имеют вид (10.1), (10.2), (10.3), где ряды $\psi_0^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядами $\psi_{odd}^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$ из (9.4), а ряды $\psi_l^{in,s}(\xi,\mu,\varepsilon)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру (последние с точностью до постоянного слагаемого), ряды $\psi_0^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадает с рядами $\psi_{odd}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ из (9.5), а ряды $\psi_l^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon) + \psi_0^{(s)}(x)$ при $l \geqslant 1$ имеют такую же структуру, а асимптотические разложения собственных значений имеет вид (2.10), (2.11). Аналогично предыдущему разделу доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 10.2. *Пусть λ_0 — двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, $\langle V\rangle \neq 0$, $\psi_0^{(1)}$ и $\psi_0^{(2)}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, удовлетворяющие (2.8), выбраны в соответствии с (2.9). Тогда при четных n существуют ряды (10.1), (10.2), (10.3) такие, что:*

1) они являются асимптотическими решениями уравнения (10.4);

2) ряды $\lambda^1_{even}(\mu,\varepsilon)$, $\lambda^2_{even}(\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами (2.10) и (2.11) соответственно, причем, для них выполняются равенства (2.12) и (2.13);

3) ряды ряды $\psi_0^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ совпадают с рядами $\psi_{odd}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)$ из (9.5);

4) $\psi^{(s)}_{n+2j+i,j+1}$, $\psi^{(s)}_{n+2j+nl+i,j+1,l} \in \mathcal{A}^i$, $v^{(s)}_{2j+2+i,j+1}$, $v^{(s)}_{2j+ln+2+i,j+1,l} \in \mathcal{B}_i$;

5) для частичных сумм рядов (10.1), (10.2), (10.3) справедливы утверждения следствия 3 (с заменой индекса "odd" на "even"в формулировке).

Построение формальных асимптотических разложений (2.1)–(2.13) собственных значений, соответствующих собственных функций методом согласования асимптотических разложений закончено. Заметим также, что при построении асимптотик условие (1.9) не использовалось. Очевидно, что ряды (2.1), (2.6), (2.10), (2.11) являются асимптотическими и при более слабом условии (1.6).

11. Обоснование асимптотических разложений

Всюду далее, во-первых, асимптотические разложения собственных функций и собственных значений считаются выбранными в соответствии с утверждениями теорем 8.1, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2, а во-вторых, так как дальнейшее изложение не зависит от четности n, то в обозначениях этих рядов и их частичных сумм будем опускать индексы "odd" и "even". С учетом утверждений упомянутых теорем обоснование построенных асимптотических разложений достаточно стандартно (см., например, [8]).

Обозначим

$$\widetilde{\psi}_N^{(s)}(x,\mu,\varepsilon) := \left(1-\chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)\widehat{\psi}_{n+2N}^{ex,s}(x,\mu,\varepsilon)+\chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\widehat{\psi}_{2(N+1)}^{in,s}\left(\frac{x}{\varepsilon},\mu,\varepsilon\right)$$

где, напомним, $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t<1$ и нулю при $t>2$. Из утверждений теорем 8.1, 9.1, 10.1, 10.2 вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 11.1. *Для $\widetilde{\psi}_N^{(s)}$ справедливы равенства*

$$\|\widetilde{\psi}_N^{(s)}-\psi_0^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0, \tag{11.1}$$

$$\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\widetilde{\psi}_N^{(s)} = \widehat{\lambda}_{n+2N}^{s}\widetilde{\psi}_N^{(s)}+f_N^{(s)}, \tag{11.2}$$

причем, если выполнено условие (1.9), то

$$\|f_N^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{M(N)}\right), \qquad M(N)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty. \tag{11.3}$$

Обозначим через $\sigma\left(\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\right)$ спектр оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$. В силу хорошо известной оценки резольвенты (см., например, [1, Глава 5, § 3]) имеем

$$\left\|\widetilde{\psi}_N^{(s)}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|f_N^{(s)}\|_{L_2(\Omega)}}{\operatorname{dist}\left\{\sigma\left(\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\right),\widehat{\lambda}_{n+2N}^{s}\right\}}.$$

Из этой оценки и (11.1), (11.3) вытекает, что

$$\operatorname{dist}\left\{\sigma\left(\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\right),\widehat{\lambda}_{n+2N}^{s}\right\} = O\left(\varepsilon^{M(N)}\right), \qquad M(N)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Это равенство в силу теоремы 2.1, ее следствия 1 и произвола в выборе N обосновывает асимптотические разложения (2.1)–(2.13) собственных значений и, в частности, заканчивает доказательство теорем 2.2, 2.3.

Отметим также, что в случае двукратного собственного значения λ_0

$$\left|\lambda^{\mu,\varepsilon,2}-\lambda^{\mu,\varepsilon,1}\right| \geqslant c\varepsilon^n\mu^{-1}, \quad c>0, \tag{11.4}$$

в силу (2.10)–(2.12) и неравенства $\langle V\rangle\neq0$. Следовательно, собственные значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$ – простые, и для окончательного доказательства теоремы 2.4 осталось показать, что

$$\|\psi^{\mu,\varepsilon,s}-\psi_0^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0. \tag{11.5}$$

Разложим $\widetilde{\psi}_N^{(1)}$ на прямую сумму:

$$\widetilde{\psi}_N^{(1)} = b_N(\mu,\varepsilon)\psi^{\mu,\varepsilon,1} + \psi^{\perp}_{\mu,\varepsilon}, \tag{11.6}$$

$$\text{где} \qquad b_N(\mu,\varepsilon) = \left(\widetilde{\psi}_N^{(1)}, \psi^{\mu,\varepsilon,1}\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad \left(\psi^{\perp}_{\mu,\varepsilon}, \psi^{\mu,\varepsilon,1}\right)_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{11.7}$$

В силу (11.2), (11.6) получаем, что

$$\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\psi^{\perp}_{\mu,\varepsilon} = \lambda^{\mu,\varepsilon,1}\psi^{\perp}_{\mu,\varepsilon} + \widetilde{f}_N^{(1)}, \tag{11.8}$$

$$\text{где} \qquad \widetilde{f}_N^{(1)} = \left(\widehat{\lambda}^1_{n+2N} - \lambda^{\mu,\varepsilon,1}\right)\left(b_N(\mu,\varepsilon)\psi^{\mu,\varepsilon,1} + \psi^{\perp}_{\mu,\varepsilon}\right) + f_N^{(1)}.$$

Из последнего равенства и из (11.7), (11.1) и (11.3) вытекает, что

$$\|\widetilde{f}_N^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{M(N)}\right), \qquad M(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{11.9}$$

Так как к λ_0 сходятся два простых собственных значения $\lambda^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\lambda^{\mu,\varepsilon,2}$, то из (11.8) и второго равенства в (11.7) следует, что

$$\left\|\psi^{\perp}_{\mu,\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|\widetilde{f}_N^{(1)}\|_{L_2(\Omega)}}{\left|\lambda^{\mu,\varepsilon,2} - \lambda^{\mu,\varepsilon,1}\right|}.$$

Из этого неравенства, (11.9) и (11.4) следует, что

$$\left\|\psi^{\perp}_{\mu,\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда и из (11.6) и (11.1) получаем сходимость (11.5) при $s = 1$. В свою очередь, из этой сходимости, следствия 1 и ортонормированности $\psi^{\mu,\varepsilon,1}$ и $\psi^{\mu,\varepsilon,2}$ в $L_2(\Omega)$ вытекает сходимость (11.5) и при $s = 2$. Теорема 2.4 доказана полностью.

Первый автор признателен за гостеприимство Казахскому национальному университету им. Аль-Фараби, где была выполнена часть настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* Мир, М., 1972.
2. Бикметов А.Р. *Асимптотики собственных элементов краевых задач оператора Шредингера с большим потенциалом, локализованным на малом множестве* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 79, № 4. С. 666–681.
3. Бикметов А.Р., Гадыльшин Р.Р. *О спектре оператора Шредингера с растущим потенциалом, локализованным на сжимающемся множестве* // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 787–790.
4. Головатий Ю.Д., Манько С.С. *Точнi моделi для операторiв Шредингера з δ' подобнiми потенцiалами* // Український математичний вiсник. Т.6, № 2. 2009. С. 173–207.
5. Хуснуллин И.Х. *Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т.50, № 4. 2010. С. 679–698.
6. Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х. *Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом* // Уфимский матем. журнал. Т.3, №3. 2011. С. 55–66.
7. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач* Наука, М., 1989.
8. Гадыльшин Р.Р. *Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задачи для оператора Лапласа* // Современная математика и ее приложения. Т.5. 2003. С. 3–32.
9. Олейник О.А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред* Изд-во МГУ, М., 1990.

10. O.A. Oleinik, J. Sanchez-Hubert, Yosifian G.A. *On vibrations of a membrane with concentrated masses* // Bull. Sc. math. Ser. 2 1991. V. 115. P. 1–27.
11. Ильин А.М. *Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием* // Матем. сб. 1977. Т. 103, № 2. С. 265–284.

Бикметов Айдар Ренатович,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской рев., 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: bikmetovar@yandex.ru

Гадыльшин Рустем Рашитович,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской рев., 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gadylshin@yandex.ru