ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 161-165.

УДК 517.547.22

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ С НУЛЯМИ ФИКСИРОВАННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ И ШАГА

О.В. ШЕРСТЮКОВА

Аннотация. Доказана точная оценка снизу типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче через плотности и шаг последовательности нулей.

Ключевые слова: тип целой функции, нижняя, верхняя плотности и шаг последовательности нулей.

Введем необходимые характеристики и дадим точную постановку задачи. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — выписанная в порядке неубывания модулей и стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел; $n_\Lambda(R)$ — число элементов из Λ, попавших в круг $|z| \leqslant R$. Для показателя $\rho > 0$ определяются верхняя и нижняя ρ-плотности Λ :

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{n_\Lambda(R)}{R^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \underline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{n_\Lambda(R)}{R^\rho},$$

а также ρ-шаг этой последовательности: $h_\rho(\Lambda) := \underline{\lim_{n\to\infty}} \left(|\lambda_{n+1}|^\rho - |\lambda_n|^\rho\right)$. Тип целой функции $f(z)$ при порядке $\rho > 0$ является одной из основных характеристик ее роста и задается формулой

$$\sigma_\rho(f) := \overline{\lim_{R\to+\infty}} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)|\,.$$

Нас будет интересовать наименьший возможный рост целых функций f порядка $\rho \in (0;1)$ с множеством положительных нулей Λ_f. Точнее говоря, зафиксируем четыре числа $\rho \in (0;1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0;\beta]$, $h \in [0;\beta^{-1}]$ и поставим следующую экстремальную задачу. Найти точную нижнюю грань

$$s(\alpha,\beta,h;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+,\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha,\, h_\rho(\Lambda) \geq h\right\}. \qquad (1)$$

Отметим, что требование $0 \leqslant h \leqslant \beta^{-1}$ в постановке экстремальной задачи не является искусственным. Оно вызвано тем, что всегда выполняется неравенство $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) h_\rho(\Lambda) \leqslant 1$, которое легко проверить аналогично тому, как это сделано для $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ и $\rho = 1$ в [1].

Задача (1) важна в вопросах комплексного анализа, связанных с полнотой функциональных систем, аналитическим продолжением и др. Начало исследованию таких экстремальных задач положил А.Ю. Попов [2].

Основной результат работы [2] состоит в том, что величина

$$s(\beta;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f) :\ \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}$$

равна $\beta\, C(\rho)$, где $C(\rho) = \max\limits_{a>0} a^{-\rho}\ln(1+a)$. Это дает ответ в задаче (1) при $h = 0$ и $\alpha = 0$, так как, очевидно, $s(0,\beta,0;\rho) = s(\beta;\rho)$.

O.V. Sherstyukova, On extremal type of an entire function of order less than unity with zeros of prescribed densities and step.

Поступила 24 декабря 2011 г.

Следующим шагом в решении задачи (1) можно считать недавний результат В.Б.Шерстюкова [3], рассмотревшего случай $\alpha > 0$ и отыскавшего величину

$$s(\alpha\,,\beta\,;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha\right\}.$$

Оказалось, что

$$s(\alpha\,,\beta\,;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{1+\tau}d\tau.$$

Тем самым, задача (1) решена в случае $h = 0$ при произвольном $\alpha \in [0;\beta]$.

Нам предстоит решить задачу (1) в общем случае $h \in [0;\beta^{-1}]$ и $\alpha \in [0;\beta]$. В статье мы доказываем оценку снизу для типа целой функции порядка $\rho \in (0;1)$ с нулями на луче и обсуждаем схему построения примера, подтверждающего точность этой оценки.

Итак, пусть

$$\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\,,\ 0 < \lambda_n \nearrow +\infty,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{R\to+\infty}\frac{n_\Lambda(R)}{R^\rho} = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta,$$

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{R\to+\infty}\frac{n_\Lambda(R)}{R^\rho} = \varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^\rho} \geq \alpha,\ h_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty}\left(\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho\right) \geq h > 0.$$

Случай $\alpha = 0$, $h \in [0;\beta^{-1}]$ рассмотрен нами в работе [4], поэтому в дальнейшем считаем, что $\alpha > 0$.

Пусть $f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{\lambda_n}\right)$ — целая функция порядка $\rho \in (0;1)$ с нулевым множеством $\Lambda_f = \Lambda$. Как и в работе [3], рассмотрим при фиксированном $R > 0$ функцию $\varphi_R(t) = \dfrac{n_\Lambda(Rt)}{(Rt)^\rho}$, $t > 0$. Ясно, что в условиях задачи имеем

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\varphi_R(t) = \beta,\quad \varliminf_{t\to+\infty}\varphi_R(t) \geq \alpha.$$

В частности, фиксируя произвольно $\alpha_1 \in (0;\alpha)$ и $a > 0$, найдем $c > 0$ так, чтобы при любых $R \geq ac$ и $t \geq c/R$ выполнялось неравенство

$$\varphi_R(t) \geq \alpha_1. \tag{1}$$

Для удобства дальнейшего изложения материала вводим вспомогательную последовательность $\Omega := (\lambda_n^\rho)_{n=1}^{\infty} = (\mu_n)_{n=1}^{\infty}$. Учитывая условие на ρ-шаг $h_\rho(\Lambda)$, запишем $\varliminf\limits_{n\to\infty}(\mu_{n+1} - \mu_n) \geq h$. Отсюда для любого $h_1 \in (0;h)$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n > h_1$ при $n \geq n_0 = n_0(h_1)$ (можно считать, что $n_0 \geq n_\Lambda(c^\rho)$). Оценивая теперь стандартным образом при $c/R \leqslant t \leqslant 1/a$ количество точек последовательности Ω на промежутке $[(Rt)^\rho\,;(R/a)^\rho]$ с учетом ее шага, получаем

$$n_\Omega\left((R/a)^\rho\right) - n_\Omega\left((Rt)^\rho\right) \leqslant \frac{1}{h_1}\left((R/a)^\rho - (Rt)^\rho\right).$$

Поскольку $n_\Omega\left(x^\rho\right) = n_\Lambda(x)$, $x > 0$, то, переходя обратно от Ω к Λ, находим

$$n_\Lambda\left(R/a\right) - n_\Lambda\left(Rt\right) \leqslant \frac{R^\rho}{h_1}\left(\frac{1}{a^\rho} - t^\rho\right).$$

Разделив это неравенство на $(Rt)^\rho$ и обозначив $\eta = \eta(R) := \varphi_R(1/a)$, приходим к оценке

$$\eta\,(at)^{-\rho} - \varphi_R(t) \leqslant h_1^{-1}\left((at)^{-\rho} - 1\right).$$

Отсюда, полагая $b := h_1^{-1}$, окончательно получаем

$$\varphi_R(t) \geq b + (\eta - b)\,(at)^{-\rho}\ ,\ \ t \in [c/R; 1/a]\ . \tag{2}$$

Для $t \geq 1/a$ в силу очевидного неравенства $n_\Lambda\,(Rt) \geq n_\Lambda\,(R/a)$ справедлива оценка

$$\varphi_R(t) = \frac{n_\Lambda(Rt)}{(Rt)^\rho} \geq \frac{n_\Lambda(R/a)}{(Rt)^\rho} = \frac{n_\Lambda(R/a)}{(R/a)^\rho}\,(at)^{-\rho} = \eta\,(at)^{-\rho}\,,\ \text{т.е.}$$

$$\varphi_R(t) \geq \eta\,(at)^{-\rho}\,,\ \ t \geq 1/a\,. \tag{3}$$

Оценка типа целой функции $f(z)$ основана на интегральном представлении логарифма максимума ее модуля (см. [3]):

$$F(R) := R^{-\rho}\ln\max_{|z|=R}|f(z)| = \int\limits_0^{+\infty}\varphi_R(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,.$$

Для упрощения дальнейших выкладок удобно в последнем интеграле сделать замену переменной $t = 1/\tau$, что дает

$$F(R) = \int\limits_0^{+\infty}\varphi_R(1/\tau)\,\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau\,. \tag{4}$$

Перепишем оценки (2) — (4), полученные при любом $R \geq ac$, в промежутках изменения переменной τ :

$$\varphi_R(1/\tau) > \alpha_1\,,\ \ \tau \in (0;\ R/c]\ ; \tag{5}$$

$$\varphi_R(1/\tau) \geq b + (\eta - b)a^{-\rho}\tau^\rho\,,\ \ \tau \in [a;\ R/c]\ ; \tag{6}$$

$$\varphi_R(1/\tau) \geq \eta a^{-\rho}\tau^\rho\,,\ \ \tau \in (0; a]. \tag{7}$$

Для получения точной оценки снизу интеграла в (5) потребуется разбить промежуток $(0;\ R/c]$ на участки, в каждом из которых выбирается наибольшая из правых частей соответствующих неравенств (6) — (8). Обозначая результат такой процедуры наилучшего выбора через $\psi_R(\tau)$ (предварительно сравнив поочередно оценку (6) с оценками (7) и (8) и найдя точки $\tau_1 = a\,(\alpha_1/\eta)^{1/\rho}$, $\tau_2 = a\,((b-\alpha_1)/(b-\eta))^{1/\rho}$), получаем неравенство

$$\varphi_R(1/\tau) \geq \psi_R(\tau),\ \tau \in (0;\ R/c]\,,\ R \geq ac, \tag{8}$$

где

$$\psi_R(\tau) = \begin{cases} \alpha_1,\ \tau \in E := (0;\tau_1] \cup (\tau_2; R/c]\,, \\ \eta a^{-\rho}\tau^\rho,\ \tau \in (\tau_1; a), \\ b + (\eta - b)a^{-\rho}\tau^\rho,\ \tau \in [a;\tau_2]. \end{cases} \tag{9}$$

Промежутки в определении (10) функции $\psi_R(\tau)$ не пусты при достаточно больших R. В самом деле, для таких R справедливо $\alpha_1 < \eta = \varphi_R(1/a) < b$, что следует из (6) при $\tau = a$, а также из неравенства $h\beta \leqslant 1$ и выбора h_1. Из (5) и (9) при $R \geq ac$ находим

$$F(R) \geq \int\limits_0^{R/c}\varphi_R(1/\tau)\,\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau \geq \int\limits_0^{R/c}\psi_R(\tau)\,\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau\,.$$

Подставляя в последний интеграл выражение из определения (10), запишем следующие преобразования:

$$\int_0^{R/c} \psi_R(\tau)\,\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau = \alpha_1 \int_E \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau + \int_{\tau_1}^{a} \frac{\eta a^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau$$

$$+\int_a^{\tau_2} \left(b+(\eta-b)a^{-\rho}\tau^{\rho}\right)\,\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau = \alpha_1 \left(\int_0^{+\infty} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{R/c}^{+\infty}\right)\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau + \int_{\tau_1}^{a}\frac{\eta a^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau$$

$$+\int_a^{\tau_2}\frac{b\tau^{-\rho}+(\eta-b)a^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau = \frac{\pi\alpha_1}{\sin\pi\rho} - \alpha_1\int_{\tau_1}^{a}\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau - \alpha_1\int_a^{\tau_2}\frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau + o(1)$$

$$+\int_{\tau_1}^{a}\frac{\eta a^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau + \int_a^{\tau_2}\frac{b\tau^{-\rho}+(\eta-b)a^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau, \quad R\to+\infty.$$

Группируя первый интеграл с третьим, а второй с четвертым, приходим к оценке

$$F(R) \geq \frac{\pi\alpha_1}{\sin\pi\rho} + \int_{\tau_1}^{a}\frac{\eta a^{-\rho}-\alpha_1\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau + \int_a^{\tau_2}\frac{(b-\alpha_1)\tau^{-\rho}+(\eta-b)a^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau + o(1),\ R\to+\infty.$$

Перейдем здесь к верхнему пределу по последовательности $R_j \to +\infty$, для которой $\eta = \eta(R_j) \to \beta$. Устремим затем α_1 к α, h_1 к h и учтем непрерывную зависимость величин τ_1, τ_2 и b от своих аргументов. В результате получим, что $b \to \dfrac{1}{h}$, $\tau_1 \to a\,(\alpha/\beta)^{1/\rho}$, $\tau_2 \to a\,((1-\alpha h)/(1-\beta h))^{1/\rho}$, и при любом $a>0$ выполняется

$$\sigma_\rho(f) \geq \varlimsup_{R_j\to+\infty} F(R_j) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\frac{\beta a^{-\rho}-\alpha\tau^{-\rho}}{1+\tau}d\tau + \frac{s}{h}\int_a^{a\nu^{1/\rho}}\frac{\nu\tau^{-\rho}-a^{-\rho}}{1+\tau}d\tau$$

(мы для краткости положили $s := 1-\beta h$ и $\nu := (1-\alpha h)/(1-\beta h)$). Пользуясь произвольностью параметра $a>0$, окончательно получаем

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0}\left\{\int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\frac{\beta a^{-\rho}-\alpha\tau^{-\rho}}{1+\tau}d\tau + \frac{s}{h}\int_a^{a\nu^{1/\rho}}\frac{\nu\tau^{-\rho}-a^{-\rho}}{1+\tau}d\tau\right\}. \tag{10}$$

Для завершения доказательства необходимо предъявить пример последовательности Λ, на которой достигается оценка (11). Общий принцип построения таких примеров подробно изложен в [3]. Точки экстремальной последовательности помещаются на промежутки различных типов, каждый из которых отвечает за определенную характеристику распределения последовательности. Конструирование примера в нашем случае в идейном плане ничем не отличается от рассуждений из работы [3], но технически несколько сложнее из-за включения в конструкцию промежутков, обеспечивающих заданный шаг. Детальное обоснование такой конструкции крайне громоздко и заняло бы гораздо больше места, чем доказательство самого неравенства (11), а потому представляется не вполне целесообразным приводить ее здесь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельбройт С. *Ряды Дирихле, принципы и методы.* Мир. М. 1973. 171 с.
2. Попов А.Ю. *Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. №1. 2005. С. 31–36.
3. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0; 1)$ с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. №1. 2011. С. 3–28.
4. Шерстюкова О.В. *О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа* // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. МПГУ. М. 2010. С. 192–195.

Ольга Владимировна Шерстюкова,
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Каширское шоссе, 31,
115409, Москва, Россия
E-mail: `sherov73@mail.ru`