

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.А. КАСАТКИН

Аннотация. Исследуются точечные симметрии систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля. Найдена бесконечномерная алгебра L операторов, порождающих преобразования эквивалентности, и показано, что допускаемые операторы всегда образуют её подалгебру. Поэтому в основу классификации систем по точечным симметриям может быть положена оптимальная система подалгебр алгебры L . Построена оптимальная система одномерных подалгебр для L и полная оптимальная система для её конечномерной части L_6 .

Ключевые слова: дробные производные, симметрии, оптимальная система подалгебр, групповая классификация.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы аппарат дробного интегро-дифференцирования [1] всё более интенсивно используется при построении математических моделей различных процессов. Уравнения с производными дробного порядка различных типов используются при моделировании процессов со сложными нелокальными зависимостями, стохастических эффектов со степенными законами распределения, в теории автоматического управления и т. д.

В работах [2, 3, 4] классические методы группового анализа дифференциальных уравнений [5] адаптируются для исследования уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля и Капуто.

В частности, в [2] показано, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнения с производной порядка $0 < \alpha < 1$ имеют конечномерные группы допускаемых преобразований.

В работе [3] проведена классификация уравнений вида $D_x^\alpha y(x) = f(x, y)$ по допускаемым группам точечных преобразований и построены классы точных решений. В данной работе исследуются системы двух уравнений того же вида

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, u, v), \\ D^\alpha v(t) = g(t, u, v) \end{cases}$$

с дробной производной типа Римана-Лиувилля. Найдены преобразования эквивалентности системы, решена также задача поиска симметрий для известных функций f, g .

A.A. KASATKIN, SYMMETRY PROPERTIES FOR SYSTEMS OF TWO ORDINARY FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.

© КАСАТКИН А.А. 2012.

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО УГАТУ в рамках договора №11.G34.31.0042 по постановлению №220 Правительства РФ.

Поступила 30.12.2011.

Показано, что для системы (1) алгебра допускаемых операторов является некоторой подалгеброй в алгебре операторов L , порождающих преобразования эквивалентности. Поэтому задача классификации систем сводится к построению оптимальной системы подалгебр $\Theta(L)$ [6, 7].

2. СИММЕТРИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В работе рассматривается система двух дифференциальных уравнений с дробными производными

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, u, v), \\ D^\alpha v(t) = g(t, u, v). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь D^α – оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля по t :

$$D^\alpha u(t) \equiv D^m (I^{m-\alpha} u(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \quad (2)$$

при $0 < m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$ ([1]).

Замена переменных

$$\bar{t} = \Phi(t, u, v), \quad \bar{u} = \Psi^u(t, u, v), \quad \bar{v} = \Psi^v(t, u, v) \quad (3)$$

является преобразованием эквивалентности для системы (2), если в новых переменных система имеет ту же самую форму:

$$\begin{cases} D^\alpha \bar{u}(\bar{t}) = \bar{f}(\bar{t}, \bar{u}, \bar{v}), \\ D^\alpha \bar{v}(\bar{t}) = \bar{g}(\bar{t}, \bar{u}, \bar{v}). \end{cases}$$

Функции \bar{f}, \bar{g} при этом являются новыми функциями аргументов $\bar{t}, \bar{u}, \bar{v}$. Если же функции остаются теми же самыми, преобразование (3) называется *допускаемым преобразованием* системы (1).

Однопараметрическая группа преобразований может быть задана *инфинитезимальным оператором*. Для преобразований эквивалентности он имеет вид

$$X = \xi(t, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^u(t, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^v(t, u, v) \frac{\partial}{\partial v} + \nu^u(t, u, v, f, g) \frac{\partial}{\partial f} + \nu^v(t, u, v, f, g) \frac{\partial}{\partial g}. \quad (4)$$

Согласно результатам [2], действие инфинитезимальных преобразований

$$\bar{t} = t + a\xi + o(a), \quad \bar{u} = u + a\eta^u + o(a), \quad \bar{v} = v + a\eta^v + o(a)$$

на дробные производные определяется *формулой продолжения*:

$$D_{\bar{t}}^\alpha \bar{u}(\bar{t}) = D_t^\alpha u(t) + a\zeta_\alpha^u + o(a),$$

где ζ_α^u может быть записано в виде ряда

$$\zeta_\alpha^u = D_t^\alpha(\eta^u) - \alpha D_t(\xi) D_t^\alpha(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\xi). \quad (5)$$

Определяющие уравнения для поиска коэффициентов инфинитезимального оператора (4) преобразований эквивалентности имеют вид

$$\begin{aligned} (\zeta_\alpha^u - \nu^u)|_{D^\alpha u=f, D^\alpha v=g} &= 0, \\ (\zeta_\alpha^v - \nu^v)|_{D^\alpha u=f, D^\alpha v=g} &= 0, \end{aligned}$$

где f и g считаются независимыми переменными.

По аналогии с алгоритмом построения координат допускаемых операторов, предложенным в [2, 3], будем искать симметрии и преобразования эквивалентности из следующего класса:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t), & \xi(0) &= 0, \\ \eta^u &= p^{uu}(t)u + p^{uv}(t)v + q^u(t), & \eta^v &= p^{vu}(t)u + p^{vv}(t)v + q^v(t). \end{aligned} \quad (6)$$

В этом случае $D^\alpha(\eta^u), D^\alpha(\eta^v)$ в формуле продолжения (5) и в её аналоге для ζ_α^v могут быть представлены через дробные производные и интегралы $D^{\alpha-n}u, D^{\alpha-n}v$ с помощью обобщенного правила Лейбница (для дробного дифференцирования сложной функции в общем виде компактных формул не существует).

В результате определяющие уравнения расщепляются по переменным $D^{\alpha-n}u, D^{\alpha-n}v$, и решение полученной бесконечной системы уравнений даёт выражения для координат оператора (4):

$$\begin{cases} \xi = (C_1 + C_2t)t, \\ \eta^u = (\alpha - 1)C_2tu + C_3u + C_4v + q^u(t), \\ \eta^v = (\alpha - 1)C_2tv + C_5u + C_6v + q^v(t), \\ \nu^u = -\alpha fC_1 - (\alpha + 1)C_2tf + C_3f + C_4g + D^\alpha q^u(t), \\ \nu^v = -\alpha gC_1 - (\alpha + 1)C_2tg + C_5f + C_6g + D^\alpha q^v(t), \end{cases} \quad (7)$$

где C_1, \dots, C_6 – произвольные постоянные, а q^u, q^v – произвольные функции t .

При поиске допускаемых операторов вида

$$X = \xi(t, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^u(t, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^v(t, u, v) \frac{\partial}{\partial v},$$

определяющие уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (\zeta_\alpha^u - \xi f_t - \eta^u f_u - \eta^v f_v)|_{D^\alpha u=f(t,u,v), D^\alpha v=g(t,u,v)} &= 0, \\ (\zeta_\alpha^v - \xi g_t - \eta^u g_u - \eta^v g_v)|_{D^\alpha u=f(t,u,v), D^\alpha v=g(t,u,v)} &= 0. \end{aligned}$$

Их решение с теми же ограничениями на класс симметрий (6) приводит к координатам ξ, η^u, η^v того же вида (7), но с дополнительными условиями

$$\begin{cases} (C_1 + C_2t)tf_t + [(\alpha - 1)C_2tu + C_3u + C_4v + q^u(t)]f_u + \\ \quad + [(\alpha - 1)C_2tv + C_5u + C_6v + q^v(t)]f_v = \\ \quad = D_t^\alpha q^u(t) + (C_3 - \alpha C_1 - (\alpha + 1)C_2t)f + C_4g, \\ (C_1 + C_2t)tg_t + [(\alpha - 1)C_2tu + C_3u + C_4v + q^u(t)]g_u + \\ \quad + [(\alpha - 1)C_2tv + C_5u + C_6v + q^v(t)]g_v = \\ \quad = D_t^\alpha q^v(t) + (C_6 - \alpha C_1 - (\alpha + 1)C_2t)g + C_5f. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, при заданных функциях $f(t, u, v), g(t, u, v)$ симметрии системы (1) могут быть найдены путём решения системы (8). Допускаемые операторы образуют подалгебру в алгебре Ли $L = L_6 + L_\infty$, где алгебра L_6 порождается базисными операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= t \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 1)tu \frac{\partial}{\partial u} + (\alpha - 1)tv \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_4 &= v \frac{\partial}{\partial v}, & X_5 &= u \frac{\partial}{\partial v}, & X_6 &= v \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \quad (9)$$

а бесконечномерная алгебра L_∞ – операторами вида

$$X_{q^u} = q^u(t) \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_{q^v} = q^v(t) \frac{\partial}{\partial v}. \quad (10)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае все возможные симметрии системы (1) могут быть получены из алгебры L , порождающей преобразования эквивалентности. При этом,

если две системы вида (1) связаны преобразованием эквивалентности, то и их операторы получаются друг из друга этим же преобразованием (заменой переменных в дифференциальном операторе). Множество таких преобразований в алгебре Ли L соответствует группе *внутренних автоморфизмов* этой алгебры [5],

Таким образом, для решения задачи классификации уравнений по допускаемым группам преобразований (одно-, двухпараметрическим и т.д.) достаточно построить классы неподобных подалгебр алгебры L с точностью до преобразований эквивалентности, что в нашем случае равносильно задаче построения оптимальной системы подалгебр алгебры L (поиска неподобных подалгебр с точностью до внутренних автоморфизмов).

3. ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДАЛГЕБР

Для построения оптимальной системы подалгебр $\Theta(L)$ удобно ввести базис

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3 - X_6, \quad Y_4 = X_4, \quad Y_5 = X_5, \quad Y_6 = X_3 + X_6.$$

Таблица коммутаторов принимает вид

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_{q^u}	Y_{q^v}
Y_1	0	Y_2	0	0	0	0	$\langle tq^u \rangle_u$	$\langle tq^v \rangle_v$
Y_2		0	0	0	0	0	$\langle t^2 q^u - (\alpha - 1) tq^u \rangle_u$	$\langle t^2 q^v - (\alpha - 1) tq^v \rangle_v$
Y_3			0	$-2Y_4$	$2Y_5$	0	$\langle -q^u \rangle_u$	$\langle q^v \rangle_v$
Y_4				0	$-Y_3$	0	0	$\langle -q^v \rangle_u$
Y_5					0	0	$\langle -q^u \rangle_v$	0
Y_6						0	$\langle -q^u \rangle_u$	$\langle -q^v \rangle_v$
Y_{ν^u}							0	0
Y_{ν^v}								0

Часть таблицы ниже главной диагонали достраивается в силу антисимметричности коммутатора. Здесь используются сокращённые обозначения операторов

$$\langle q \rangle_u = q \frac{\partial}{\partial u}, \quad \langle q \rangle_v = q \frac{\partial}{\partial v}.$$

Видно, что совокупность операторов $\{Y_{q^u}, Y_{q^v}\}$ с произвольными функциями $q^u(t), q^v(t)$ является бесконечным абелевым идеалом L_∞ в алгебре L , и алгебра имеет следующую структуру:

$$L = L_\infty \oplus \{Y_1, Y_2\} \oplus \{Y_3, Y_4, Y_5\} \oplus \{Y_6\}.$$

Подалгебры $\{Y_6\}$ и $\{Y_1, Y_2\}$ являются соответственно центром и идеалом в алгебре $L_6 = \{Y_1, \dots, Y_6\}$.

Каждый из операторов $Z \in L$ порождает внутренний автоморфизм исследуемой алгебры L . Его можно построить как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = [Z, \bar{Y}], \quad \bar{Y}|_{s=0} = Y, \quad (11)$$

где операторы определяются своими координатами в заданном базисе:

$$\bar{Y} = \bar{k}^1 Y_1 + \dots + \bar{k}^6 Y_6 + Y_{\bar{q}^u} + Y_{\bar{q}^v}, \quad \bar{k}^i = \bar{k}^i(s, k^1, \dots, k^6, q^u, q^v).$$

Отметим, что внутренний автоморфизм, построенный для операторов Z из центра, всегда является тождественным преобразованием в L_6 .

Решая систему уравнений (11) для Y_1, \dots, Y_5 , получим внутренние автоморфизмы в виде преобразований координат оператора:

	\bar{k}^1	\bar{k}^2	\bar{k}^3	\bar{k}^4	\bar{k}^5	\bar{k}^6
A_1	k^1	$a_1 k^2$	k^3	k^4	k^5	k^6
A_2	k^1	$k^2 - a_2 k^1$	k^3	k^4	k^5	k^6
A_3	k^1	k^2	k^3	$a_3 k^4$	k^5/a_3	k^6
A_4	k^1	k^2	$k^3 - a_4 k^5$	$k^4 + 2a_4 k^3 - a_4^2 k^5$	k^5	k^6
A_5	k^1	k^2	$k^3 + a_5 k^4$	k^4	$k^5 - 2a_5 k^3 - a_5^2 k^4$	k^6

Здесь a_i – произвольные параметры. Добавление дискретных автоморфизмов (преобразований эквивалентности $\bar{u} = -u$) позволяет не накладывать ограничение $a^3 > 0$. Преобразование обращения времени $\bar{t} = -t$ изменяет оператор Римана-Лиувилля и не рассматривается в качестве дискретного преобразования эквивалентности. Поэтому в дальнейшем принимается $a^1 > 0$.

Действие автоморфизмов $A_1 \dots A_5, A_6$ на координаты q^u, q^v выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_1 : \quad & \bar{q}^u = q^u(a_1 t), \quad \bar{q}^v = q^v(a_1 t), \\
 A_2 : \quad & \bar{q}^u = (1 - a_2 t)^{\alpha-1} q^u \left(\frac{t}{1 - a_2 t} \right), \quad \bar{q}^v = (1 - a_2 t)^{\alpha-1} q^v \left(\frac{t}{1 - a_2 t} \right), \\
 A_3 : \quad & \bar{q}^u = \tilde{a}_3 q^u, \quad \bar{q}^v = q^v / \tilde{a}_3, \quad (\tilde{a}_3 = \pm \sqrt{|a_3|}, \tilde{a}_3 a_3 > 0), \\
 A_4 : \quad & \bar{q}^u = q^u - a_4 q^v, \quad \bar{q}^v = q^v, \\
 A_5 : \quad & \bar{q}^u = q^u, \quad \bar{q}^v = q^v - a_5 q^u, \\
 A_6 : \quad & \bar{q}^u = a_6 q^u, \quad \bar{q}^v = a_6 q^v, \quad a_6 > 0,
 \end{aligned}$$

а комбинация автоморфизмов A_{ν^u}, A_{ν^v} имеет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{q}^u &= q^u - (k^1 t + k^2 t^2) \nu^u + (k^3 + k^6 + (\alpha - 1) k^2 t) \nu^u + k^4 \nu^v, \\
 \bar{q}^v &= q^v + k^5 \nu^u - (k^1 t + k^2 t^2) \nu^v + (-k^3 + k^6 + (\alpha - 1) k^2 t) \nu^v.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Особенности построения автоморфизмов и оптимальной системы подалгебр для операторов с произвольными функциями проиллюстрированы, например, в работе [7].

Следуя методике [6], базисы искоемых r -мерных подалгебр алгебры L записываются в виде матриц, строки которых – координаты базиса подалгебры в базисе Y . Элементы матрицы должны удовлетворять условиям подалгебры – требованию замкнутости относительно операции коммутирования. На множестве матриц рассматривается действие группы внутренних автоморфизмов A (линейные преобразования столбцов) и группы B преобразований базиса подалгебры (все линейные невырожденные преобразования строк). Неподобные относительно этих преобразований матрицы и определяют элементы оптимальной системы $\Theta(L)$. При классификации матриц преобразованиями A, B добиваемся максимально возможного числа нулевых координат и минимального числа произвольных постоянных.

Всегда можно построить оптимальную систему, удовлетворяющую дополнительному требованию нормализованности – вместе с каждой подалгеброй $K \in \Theta_A L$ в оптимальной системе должен содержаться её нормализатор $\text{Nor}_L K \in \Theta_A L$. Нормализатором $\text{Nor}_L K$ подалгебры K в L называется наибольшая подалгебра алгебры L , для которой K является идеалом, то есть для всех $X \in K$ и $Y \in \text{Nor}_L K$ выполнено $[X, Y] \in K$.

Построение начинается с алгебры $L_4 = \{Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$. В ней действуют только автоморфизмы A_3, A_4, A_5 . Выражения $k^6, k^3 k^3 - k^4 k^5$ являются инвариантами группы внутренних автоморфизмов. В результате вычислений по описанному выше алгоритму получена нормализованная оптимальная система подалгебр $\Theta(L_4)$, приведённая в таблице 1. В таблицах используются сокращения $\{4 - 5 + 6\} = \{Y_4 - Y_5 + \gamma Y_6\}$, знак „=” в столбце Nor означает, что данная подалгебра самоноормализована.

ТАБЛ. 1. Оптимальная система $\Theta(L_4)$

№	Подалгебра	Nor
4.1	3, 4, 5, 6	=
3.1	3, 4, 6	=
3.2	3, 4, 5	4.1
2.1	3, 6	=
2.2	4 – 5, 6	=
2.3	4, 6	3.1
2.4	3 + β 6, 4	3.1
1.1	3 + γ 6	2.1
1.2	6	4.1
1.3	4 + 6	2.3
1.4	4	3.1
1.5	4 – 5 + γ 6	2.2
	$\gamma \geq 0, \beta \in \mathbf{R}$	

Оптимальная система $\Theta(L_6)$ строится с использованием разложения $L_6 = J \oplus N$, где $N = L_4$ – подалгебра, $J = \{Y_1, Y_2\}$ – идеал. Для каждой подалгебры N_p из оптимальной системы $\Theta_{A_N}(N)$ (в нашем случае из таблицы 1) находится стабилизатор $A_p \subset A$ в L_6 , то есть автоморфизмы L_6 , которые не меняют эту подалгебру (но могут изменить вид соответствующей матрицы). Стабилизатор A_p в рассматриваемом случае включает A_1, A_2 и некоторые комбинации A_3, A_4, A_5 .

Далее с помощью преобразований из A_p происходит упрощение произвольной подалгебры из $J \oplus N_p$ (N_p с произвольной добавленными операторами из идеала) и строится оптимальная система $\Theta_{A_p}(J \oplus N_p) = \{K_{p,q}\}$. Совокупность всех полученных для разных N_p подалгебр и составляет оптимальную систему $\Theta_A(L_6)$.

Построенная таким образом нормализованная оптимальная система с соответствующими номерами N_p и нормализаторов приведена в таблицах 2-5.

Разложение алгебры L на идеал L_∞ и подалгебру L_6 позволяет строить $\Theta(L)$ на базе оптимальной системы $\Theta(L_6)$ по той же методике. Автоморфизмы A_{ν^u}, A_{ν^v} вида (12) изменяют только составляющие $\langle q^u \rangle_u$ и $\langle q^v \rangle_v$ оператора Y . При выполнении для коэффициентов оператора хотя бы одного из условий

$$k^1 \neq 0, \quad k^2 \neq 0, \\ (k^6)^2 - (k^3)^2 - k^4 k^5 \neq 0,$$

выбором функций $\nu^u(t), \nu^v(t)$ можно обратить в нуль произвольные функции q^u, q^v . Таким образом, только элементы 1.1 с $\gamma = 1$ и 1.4 оптимальной системы $\Theta(L_6)$ (а также нулевая подалгебра) порождают новые элементы $\Theta(L)$. Соответствующие подалгебры 1.18 – 1.20 также приведены в таблице 2.

Аналогичным образом могут быть построены подалгебры большей размерности, содержащие $\langle q^u \rangle_u$ и $\langle q^v \rangle_v$. При этом условия подалгебры записываются в виде дифференциальных соотношений.

Для каждой подалгебры K из оптимальной системы путём совместного решения уравнений (8) с известными коэффициентами C_1, \dots, C_6 и функциями $q^u(t), q^v(t)$ можно найти все функции $f(t, u, v), g(t, u, v)$, при которых система (1) допускает заданные операторы. При этом произвольными элементами в этих функциях будут инварианты подалгебры K (как видно из структуры уравнений (8)). Все системы, допускающие подобные K алгебры операторов, приводятся к этому виду преобразованиями эквивалентности.

Результаты вычислений приведены в соответствующих столбцах таблиц 2-5, где F и G являются произвольными функциями инвариантов J_i . Для удобства записи в таблицах иногда используются полярные координаты r, ϕ : $u = r \cos \phi, v = r \sin \phi$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены преобразования эквивалентности системы (1), которые включают общее невырожденное линейное преобразование неизвестных функций u и v , растяжение независимой переменной t , прибавление фиксированных функций $q(t)$ к u и v и проективное преобразование специального вида.

Показано, что допускаемые операторы системы образуют подалгебру алгебры $L = L_\infty \oplus L_6$, порождающей преобразования эквивалентности, и задача классификации систем (1) по допускаемым группам точечных преобразований сводится к построению оптимальной системы подалгебр $\Theta(L)$.

Для построения $\Theta(L)$ применяются классические алгоритмы [6, 7]. В результате вычислена полная нормализованная оптимальная система подалгебр L_6 и оптимальная система одномерных подалгебр L .

Симметрии систем могут быть использованы для получения их решений. Системы вида (1) также возникают при построении классов решений уравнений с частными производными дробного порядка, например, методом инвариантных подпространств [8].

ТАБЛ. 2. Оптимальная система $\Theta_1(L_6 \oplus L_\infty)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
1.1	$3 + \gamma 6$	4.2		$f = uF(t, v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$ $g = vG(t, v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$	$J_1 = t$ $J_2 = v^{1+\gamma}u^{1-\gamma}$
1.2	6	6.1		$f = uF(t, v/u)$ $g = uG(t, v/u)$	$J_1 = t$ $J_2 = v/u$
1.3	$4 + 6$	4.4		$f = v(F + G \ln v)$ $g = vG$	$J_1 = t$ $J_2 = ve^{-u/v}$
1.4	4	5.1		$f = F(t, v) + uG(t, v)$ $g = vG(t, v)$	$J_1 = t$ $J_2 = v$
1.5	$4 - 5 + \gamma 6$	4.3		$f = uF - vG$ $g = vF + uG$	$J_1 = t$ $J_2 = re^{\gamma\phi}$
1.6	1	5.3	0	$f = t^{-\alpha}F(u, v)$ $g = t^{-\alpha}G(u, v)$	$J_1 = u$ $J_2 = v$
1.7	2	6.1	0	$f = t^{-2\alpha}uF$ $g = t^{-2\alpha}vG$	$J_1 = u/v$ $J_2 = vt^{1-\alpha}$
1.8	$k1 + 3 + \gamma 6$	3.8	1.1	$f = t^{-\alpha}uF$ $g = t^{-\alpha}vG$	$J_1 = u^k t^{1-\gamma}$ $J_2 = v^k t^{1-\gamma}$
1.9	$k1 + 6$	5.3	1.2	$f = v^{1-\alpha k}F$ $g = v^{1-\alpha k}G$	$J_1 = vt^{-1/k}$ $J_2 = u/v$
1.10	$k1 + 4 + 6$	3.10	1.3	$f = t^{-\alpha}v(F + G \ln t)$ $g = kt^{-\alpha}vG$	$J_1 = vt^{-1/k}$ $J_2 = ve^{-u/v}$
1.11	$1 + 4$	3.10	1.4	$f = t^{-\alpha}(F + G \ln t)$ $g = t^{-\alpha}G$	$J_1 = v$ $J_2 = u - v \ln t$
1.12	$k1 + \gamma 6 +$ $+4 - 5$	3.9	1.5	$f = t^{-\alpha}(uF - vG)$ $g = t^{-\alpha}(vF + uG)$	$J_1 = t^{1/k}e^\phi$ $J_2 = re^{\gamma\phi}$
1.13	$\pm 2 + 3 + \gamma 6$	3.12 _{0,0}	1.1	$f = t^{-1-\alpha}e^{\mp 1/t}F$ $g = t^{-1-\alpha}e^{\mp 1/t}G$	$J_1 = ut^{1-\alpha}e^{\pm(\gamma+1)/t}$ $J_2 = vt^{1-\alpha}e^{\pm(\gamma-1)/t}$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
1.14	$\pm 2 + 6$	5.4 ₀	1.2	$f = t^{-2\alpha}uF$ $g = t^{-2\alpha}vG$	$J_1 = ut^{1-\alpha}e^{\pm 1/t}$ $J_2 = u/v$
1.15	$\pm 2 + 4 + 6$	3.15 ₀	1.3	$f = t^{-2\alpha}v(F \mp G/t)$ $g = t^{-2\alpha}vG$	$J_1 = u/v \pm 1/t$ $J_2 = vt^{1-\alpha}e^{\pm 1/t}$
1.16	$2 + 4$	4.8 _{-2,0}	1.4	$f = t^{-2\alpha}v(F - G/t)$ $g = t^{-2\alpha}vG$	$J_1 = u/v + 1/t$ $J_2 = vt^{1-\alpha}$
1.17	$\pm 2 + \gamma 6 +$ $+4 - 5$	3.13 _{0,0}	1.5	$f = t^{-2\alpha}(uF - vG)$ $g = t^{-2\alpha}(vF + uG)$	$J_1 = \phi \mp 1/t$ $J_2 = rt^{1-\alpha}e^{\pm \gamma/t}$
1.18	$\langle q^u \rangle_u + \langle q^v \rangle_v$		0	$f = u \frac{D^\alpha q^u(t)}{q^u(t)} + F$ $g = u \frac{D^\alpha q^v(t)}{q^u(t)} + G$	$J_1 = t$ $J_2 = q^v(t) - vq^u(t)$
1.19	$3 + 6 + \langle q^v \rangle_v$		1.1 ₁	$f = uF$ $g = \frac{1}{2}D^\alpha(q^v) \ln u + G$	$J_1 = t$ $J_2 = 2v - q^v \ln u $
1.20	$4 + \langle q^v \rangle_v$		1.4	$f = u \frac{D^\alpha q^v(t)}{q^v(t)} + F + v \frac{G}{q^v}$ $g = \frac{D^\alpha q^v(t)}{q^v(t)}v + G$	$J_1 = t$ $J_2 = 2uq^v(t) - v^2$

$k \neq 0, \gamma \geq 0, \quad 4.8_{-2,0}$ – подалгебра 4.8 при $\delta = -2, \beta = 0$.

ТАБЛ. 3. Оптимальная система $\Theta_2(L_6)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
2.1	3, 6	4.2		$f = uF(t)$ $g = vG(t)$	$J_1 = t$
2.2	4 – 5, 6	4.3		$f = uF(t) - vG(t)$ $g = vF(t) + uG(t)$	$J_1 = t$
2.3	4, 6	5.1		$f = uF(t) + vG(t)$ $g = vF(t)$	$J_1 = t$
2.4	$3 + \beta 6, 4$	5.1		$f = uF(t) + v \frac{\beta+1}{\beta-1} G(t)$ $g = vF(t)$	$J_1 = t$
	$(\beta = 1)$	5.1		$f = uF(t, v)$ $g = vF(t, v)$	$J_1 = t$ $J_2 = v$
2.5	1, 2	6.1	0	$f = t^{-\alpha}u^{1/(1-\alpha)}F(u/v)$ $g = t^{-\alpha}u^{1/(1-\alpha)}G(u/v)$	$J_1 = u/v$
2.6	$1, 3 + \gamma 6$	3.8	1.1	$f = t^{-\alpha}uF(v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$ $g = t^{-\alpha}vG(v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$	$J_1 = v^{1+\gamma}u^{1-\gamma}$
2.7	1, 6	5.3	1.2	$f = t^{-\alpha}uF(u/v)$ $g = t^{-\alpha}uG(u/v)$	$J_1 = u/v$
2.8	1, 4 + 6	3.10	1.3	$f = t^{-\alpha}v(F + G \ln v)$ $g = t^{-\alpha}vG$	$J_1 = ve^{-u/v}$
2.9	1, 4	4.6	1.4	$f = t^{-\alpha}(uF(v) + G(v))$ $g = t^{-\alpha}vF(v)$	$J_1 = v$
2.10	$1, 4 - 5 + \gamma 6$	3.9	1.5	$f = t^{-\alpha}(uF - vG)$ $g = t^{-\alpha}(vF + uG)$	$J = re^{\gamma\phi}$
2.11	$2, \beta 1 + 3 + \gamma 6$	4.2	1.1	$f = t^{-2\alpha}(u/v)^{\alpha\beta/2}uF$ $g = t^{-2\alpha}(u/v)^{\alpha\beta/2}vG$	$J_1 = u^{1-\gamma-\beta+\alpha\beta} \cdot v^{1+\gamma+\beta-\alpha\beta}$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
2.12	$2, \beta 1 + 6$	6.1	1.2	$f = t^{-\alpha - \frac{\alpha}{\lambda}} u^{\frac{\beta+1}{\lambda}} F$ $g = t^{-\alpha - \frac{\alpha}{\lambda}} v^{\frac{\beta+1}{\lambda}} G$	$J_1 = u/v$ $\lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$
2.13	$\beta = 1/(\alpha - 1)$ $2, \beta 1 + 4 + 6$	4.4	1.3	$f = t^{-\alpha - \frac{\alpha}{\lambda}} v^{\frac{\beta+1}{\lambda}} (F + uG/v)$ $g = t^{-\alpha - \frac{\alpha}{\lambda}} v^{\frac{\beta+1}{\lambda}} G$ $f = 0, \quad g = 0$	$J_1 = u/v$ $\lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$ $J_1 = vt^{1-\alpha}$
2.14	$\beta = 1/(\alpha - 1)$ $2, 4$	5.1	1.4	$f = t^{-2\alpha} (vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha}$
2.15	$2, 1 + 4$	4.4	1.4	$f = t^{-2\alpha} e^{\alpha u/v} (vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} e^{\alpha u/v} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha} e^{(\alpha-1)u/v}$
2.16	$2, \beta 1 + 4 - 5 + \gamma 6$	4.3	1.5	$f = t^{-2\alpha} e^{-\alpha\beta\phi} (uF - vG)$ $g = t^{-2\alpha} e^{-\alpha\beta\phi} (vF + uG)$	$J = re^{\gamma\phi}$
2.17	$\gamma 1 + 3, \beta 1 + 6$	3.8	2.1	$f = t^{-\alpha} uF (t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta})$ $g = t^{-\alpha} vG (t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta})$	$J_1 = t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta}$
2.18	$3, \pm 2 + 6$	3.12 _{0,0}	2.1	$f = t^{-2\alpha} uF$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = uv t^{2-2\alpha} e^{\pm 2/t}$
2.19	$2 + 3, \beta 2 + 6$	3.12 _{0,0}	2.1	$f = t^{-2\alpha} uF$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = u^{\beta+1} v^{\beta-1} t^{2\beta(1-\alpha)} e^{2/t}$
2.20	$\gamma 1 + 4 - 5, \beta 1 + 6$	3.9	2.2	$f = t^{-\alpha} (uF - vG)$ $g = t^{-\alpha} (vF + uG)$	$J_1 = tr^{-\beta} e^{\gamma\phi}$
2.21	$4 - 5, \pm 2 + 6$	3.13 _{0,0}	2.2	$f = t^{-2\alpha} (uF - vG)$ $g = t^{-2\alpha} (vF + uG)$	$J_1 = rt^{1-\alpha} e^{1/(\beta t)}$
2.22	$2 + 4 - 5, \beta 2 + 6$	3.13 _{0,0}	2.2	$f = t^{-2\alpha} (uF - vG)$ $g = t^{-2\alpha} (vF + uG)$	$J_1 = r^{\beta} t^{\beta(1-\alpha)} e^{-\phi+1/t}$
2.23	$4, k 1 + 6$	4.6	2.3	$f = t^{-\alpha} (vF + uG)$ $g = t^{-\alpha} vG$	$J_1 = vt^{-1/k}$
2.24	$1 + 4, \beta 1 + 6$	3.10	2.3	$f = t^{-\alpha} (vF + uG)$ $g = t^{-\alpha} vG$	$J_1 = tv^{-\beta} e^{-u/v}$
2.25	$4, \pm 2 + 6$	4.8 _{0,0}	2.3	$f = t^{-2\alpha} (vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha} e^{\pm 1/t}$
2.26	$2 + 4, \pm 2 + 6$	3.15 ₀	2.3	$f = t^{-2\alpha} (vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha} e^{\pm(1/t+u/v)}$
2.27	$2 + 4, 6$	4.8 _{-2,0}	2.3	$f = t^{-2\alpha} (vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = u/v + 1/t$
2.28	$k 1 + 3 + \beta 6, 4$	4.6	2.4	$f = t^{-\alpha} (t^{2/k} vF + uG)$ $g = t^{-\alpha} vG$	$J_1 = vt^{(1-\beta)/k}$
2.29	$\pm 2 + 3 + \beta 6, 4$	4.8 _{0,0}	2.4	$f = t^{-2\alpha} (e^{\mp 2/t} vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha} e^{\pm(\beta-1)/t}$
2.30	$(-2) 1 + 3 + \beta 6,$ $2 + 4$ $k \neq 0, \gamma \geq 0$	3.17	2.4	$f = t^{-\alpha-1} \left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right)^{\frac{\beta-3}{2}} \left(\left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right) F - G/t\right)$ $g = t^{-\alpha-1} \left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right)^{\frac{\beta-3}{2}} G$	$J_1 = \frac{t^{2\alpha-2}}{v^2} \left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right)^{\beta-3+2\alpha}$

ТАБЛ. 4. Оптимальная система $\Theta_3(L_6)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g
3.1	3, 4, 6	5.1		$f = uF(t), \quad g = vF(t)$
3.2	3, 4, 5	6.1		$f = uF(t), \quad g = vF(t)$
3.3	1, 2, 3 + γ 6	4.2	1.1	$f = t^{-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}} C_1 (u/v)^{\frac{\alpha(\gamma+1)}{2(\alpha-1)}}$ $g = t^{-\alpha} v^{\frac{1}{1-\alpha}} C_2 (u/v)^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{2(\alpha-1)}}$
3.4	1, 2, 6	6.1	1.2	$f = 0, \quad g = 0$
3.5	1, 2, 4 + 6	4.4	1.3	$f = t^{-\alpha} v^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{\frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{u}{v}} (C_2 u + C_1 v)$ $g = t^{-\alpha} v^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{\frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{u}{v}} C_2 v$
3.6	1, 2, 4	5.1	1.4	$f = t^{-\alpha} v^{\frac{1}{1-\alpha}} (C_2 u + C_1 v)$ $g = t^{-\alpha} v^{\frac{1}{1-\alpha}} C_2 v$
3.7	1, 2, 4 - 5 + γ 6	4.3	1.5	$f = t^{-\alpha} (r e^{\gamma\phi})^{\frac{1}{1-\alpha}} (C_1 u - C_2 v)$ $g = t^{-\alpha} (r e^{\gamma\phi})^{\frac{1}{1-\alpha}} (C_1 v + C_2 u)$
3.8	1, 3, 6	=	2.1	$f = C_1 t^{-\alpha} u, \quad g = C_2 t^{-\alpha} v$
3.9	1, 4 - 5, 6	=	2.2	$f = t^{-\alpha} (C_1 u - C_2 v)$ $g = t^{-\alpha} (C_2 u + C_1 v)$
3.10	1, 4, 6	4.6	2.3	$f = t^{-\alpha} (C_2 u + C_1 v), \quad g = t^{-\alpha} C_2 v$
3.11	1, 3 + β 6, 4 $\beta = 1$	4.6	2.4	$f = t^{-\alpha} (C_2 u + C_1 v^{\frac{\beta+1}{\beta-1}}), \quad g = t^{-\alpha} C_2 v$ $f = uF(v), \quad g = vF(v)$
3.12	2, γ 1 + 3, β 1 + 6 $\beta = 1/(\alpha - 1)$	4.2	2.1	$f = t^{-\alpha} (t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta})^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)/2} C_1 u$ $g = t^{-\alpha} (t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta})^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)/2} C_2 v$ $f = 0, \quad g = 0$
3.13	2, γ 1 + 4 - 5, β 1 + 6 $\beta = 1/(\alpha - 1)$	4.3	2.2	$f = t^{-\alpha} (t r^{-\beta} e^{\gamma\phi})^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)} (C_1 u - C_2 v)$ $g = t^{-\alpha} (t r^{-\beta} e^{\gamma\phi})^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)} (C_1 v + C_2 u)$ $f = 0, \quad g = 0$
3.14	2, 1 + 4, β 1 + 6 $\beta = 1/(\alpha - 1)$	4.4	2.3	$f = t^{-2\alpha} (v t^{1-\alpha})^{\alpha\beta/\lambda} e^{\alpha/\lambda \cdot u/v} (C_2 u + C_1 v)$ $g = t^{-2\alpha} (v t^{1-\alpha})^{\alpha\beta/\lambda} e^{\alpha/\lambda \cdot u/v} C_2 v, \quad \lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$ $f = 0, \quad g = 0$
3.15	2, 4, β 1 + 6 $\beta = 1/(\alpha - 1)$	5.1	2.3	$f = t^{-\alpha-\alpha/\lambda} v^{\alpha\beta/\lambda} (C_2 u + C_1 v)$ $g = t^{-\alpha-\alpha/\lambda} v^{\alpha\beta/\lambda} C_2 v, \quad \lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$ $f = 0, \quad g = 0$
3.16	2, 4, δ 1 + 3 + β 6 $\beta = 1, \delta = 0$ $\beta = -1 + 2/\alpha, \delta = -2/\alpha$ $\beta = 1 + \alpha\delta - \delta$	5.1	2.4	$f = t^{-2\alpha} (C_1 u + C_2 v (v t^{1-\alpha})^{2/\lambda}) (v t^{1-\alpha})^{\alpha\delta/\lambda}$ $g = t^{-2\alpha} C_2 v (v t^{1-\alpha})^{\alpha\delta/\lambda}$ $f = t^{-2\alpha} u F(v t^{1-\alpha}), \quad g = t^{-2\alpha} v F(v t^{1-\alpha})$ $f = t^{-2\alpha} v F(v t^{1-\alpha}), \quad g = 0$ $f = 0, \quad g = 0$
3.17	(-2)1 + 3, 2 + 4, 6	=	3.1	$f = t^{-\alpha-1} (v + t u)^{-\alpha} (C_1 v^\alpha (v + t u) - C_2 v^{\alpha+1})$ $g = C_2 t^{-\alpha} v^{\alpha+1} (v + t u)^{-\alpha}$
3.18	δ 1 + 3, 4, β 1 + 6 $\delta + \beta = 0$	4.6	3.1	$f = t^{-\alpha} \left(C_1 t^{\frac{2}{\delta+\beta}} v^{\frac{\delta-\beta}{\delta+\beta}} + C_2 u \right), \quad g = t^{-\alpha} C_2 v$ $f = t^{-\alpha} u F(t v^{-\beta}), \quad g = t^{-\alpha} v F(t v^{-\beta})$
3.19	3, 4, $\pm 2 + 6$	4.8 _{0,0}	3.1	$f = t^{-2\alpha} C_1 u + C_2 e^{\pm 2/t} / (v t^2)$ $g = t^{-2\alpha} C_1 v$
3.20	$\pm 2 + 3, 4, \beta 2 + 6$ $\beta = \pm 1$	4.8 _{0,0}	3.1	$f = t^{-2\alpha} \left(C_1 u + C_2 v (v^{-\beta} t^{(\alpha-1)\beta} e^{-1/t})^{\frac{2}{\beta\pm 1}} \right)$ $g = t^{-2\alpha} C_1 v$ $f = t^{-\alpha} u F(v t^{1-\alpha} e^{\mp 1/t})$ $g = t^{-\alpha} v F(v t^{1-\alpha} e^{\mp 1/t})$

ТАБЛ. 5. Оптимальные системы $\Theta_{4,5,6}(L_6)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f	g
4.1	3, 4, 5, 6	6.1		$f = uF(t)$	$g = vF(t)$
4.2	1, 2, 3, 6	=	2.1	$f = 0$	$g = 0$
4.3	1, 2, 4 - 5, 6	=	2.2	$f = 0$	$g = 0$
4.4	1, 2, 4, 6	5.1	2.3	$f = 0$	$g = 0$
4.5	1, 2, 3 + β 6, 4	5.1	2.4	$f = 0$	$g = 0$
	$\beta = 1$			$f = Ct^{-\alpha}uv^{\alpha/(1-\alpha)}$	$g = Ct^{-\alpha}v^{1/(1-\alpha)}$
	$\beta = 2/\alpha - 1$			$f = Ct^{-\alpha}v^{1/(1-\alpha)}$	$g = 0$
4.6	1, 3, 4, 6	4.6	3.1	$f = Ct^{-\alpha}u$	$g = Ct^{-\alpha}v$
4.7	1, 3, 4, 5	5.3	3.2	$f = Ct^{-\alpha}u$	$g = Ct^{-\alpha}v$
4.8	2, δ 1 + 3, 4, β 1 + 6	5.1	3.1	$f = 0$	$g = 0$
	$\delta = -\beta$			$f = Ct^{-\alpha-\alpha/\lambda}v^{\alpha\beta/\lambda}$	$g = Ct^{-\alpha-\alpha/\lambda}uv^{(\beta+1)/\lambda}$
	$\delta = \beta - 2(\beta + 1)/\alpha$			$f = Ct^{-\alpha-\alpha/\lambda}v^{(\beta+1)/\lambda}$	$g = 0, \quad \lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$
4.9	2, 3, 4, 5	6.1	3.2	$f = Ct^{-2\alpha}u$	$g = Ct^{-2\alpha}v$
4.10	k 1 + 6, 3, 4, 5	5.3	4.1	$f = Ct^{-\alpha}u$	$g = Ct^{-\alpha}v$
4.11	\pm 2 + 6, 3, 4, 5	5.4 ₀	4.1	$f = Ct^{-2\alpha}u$	$g = Ct^{-2\alpha}v$
5.1	1, 2, 3, 4, 6	=	3.1	$f = 0$	$g = 0$
5.2	1, 2, 3, 4, 5	6.1	3.2	$f = 0$	$g = 0$
5.3	1, 3, 4, 5, 6	=	4.1	$f = Ct^{-\alpha}u$	$g = Ct^{-\alpha}v$
5.4	β 1 + 6, 2, 3, 4, 5	6.1	4.1	$f = 0$	$g = 0$
	($\beta = 0$)			$f = Ct^{-2\alpha}u$	$g = Ct^{-2\alpha}v$
6.1	1, 2, 3, 4, 5, 6	=	4.1	$f = 0$	$g = 0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
2. Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукашук С.Ю. *Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка* // Вестник УГАТУ. 2007. Т.9, № 3 (21). С. 125–135.
3. *Group-Invariant Solutions of Fractional Differential Equations*. Nonlinear Science and Complexity, Springer. 2011. P. 51–59.
4. R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk *Symmetry properties of fractional diffusion equations*. // Physica Scripta. IOP. 2009. Т 136, 014016.
5. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука. 1978. 400 с.
6. Овсянников Л.В. *Об оптимальных системах подалгебр* // Докл. РАН. 1993. Т. 333, №6. С. 702–704.
7. Хабиров С. В. *Симметричный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры*. Препринт института механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 2004. 37 с.
8. V. Galaktionov, S. Svirshchevskii *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. Chapman & Hall/CRC applied mathematics and nonlinear science series. 2009.

Алексей Александрович Касаткин,
 Уфимский государственный авиационный технический университет,
 ул. Карла Маркса, 12,
 450000, г. Уфа, Россия
 E-mail: alexei_kasatkin@mail.ru