

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПЕРИОДИЧНОСТИ КВАЗИПОЛИНОМА

Н.П. ГИРЯ, С.Ю. ФАВОРОВ

Аннотация. Мы рассматриваем функции из класса Δ , введенного М.Г. Крейном и Б.Я. Левиным в 1949 году. Этот класс состоит из целых почти периодических функций экспоненциального типа, нули которых лежат в горизонтальной полосе конечной ширины. В частности, этот класс содержит конечные экспоненциальные суммы с чисто мнимыми показателями. Другое описание класса Δ — это аналитические продолжения в комплексную плоскость почти периодических функций на оси с ограниченным спектром, у которых точные верхняя и нижняя грани спектра ему принадлежат.

В заметке доказано, что если у функции класса Δ множество разностей нулей дискретно, то функция с точностью до множителя $C \exp\{i\beta z\}$, β вещественно является конечным произведением сдвигов функции $\sin \omega z$.

Ключевые слова: Почти периодическая функция, целая функция экспоненциального типа, множество нулей, дискретное множество.

В 1949 году М.Г. Крейн и Б.Я. Левин в статье [1] (см. также [2], п.2, гл.6 и Приложение б) ввели и исследовали класс Δ целых почти периодических функций экспоненциального типа с нулями в горизонтальной полосе конечной ширины. Этот класс является естественным расширением класса конечных экспоненциальных сумм вида

$$\sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n z}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

М.Г. Крейн и Б.Я. Левин получили полное описание нулевых множеств функций этого класса, в частности, показали, что множество нулей функций класса Δ является в некотором смысле почти периодическим.

Если нули функции $f \in \Delta$ образуют периодическое множество с периодом T , то функция имеет вид

$$f(z) = C e^{i\beta z} \prod_{j=1}^K \sin(\omega z + b_j), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad C, b_j \in \mathbb{C}, \quad \omega = \pi/T \quad (2)$$

(см. Лемму 1 настоящей заметки).

Заметим, что периодическое дискретное множество в полосе обязательно имеет вид $E + T\mathbb{Z}$, где E — конечное множество. Основным нашим результатом является простое условие, когда такой вид имеет множество нулей функции класса Δ , и, следовательно, сама функция имеет вид (2).

Прежде всего напомним некоторые определения (см., например, [2], [3]).

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется относительно плотным, если существует такое $L < \infty$, что $E \cap [a, a + L] \neq \emptyset$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

N.P. GIRYA, S.YU. FAVOROV, CRITERIUM OF PERIODICITY FOR QUASIPOLYNOMIALS.

© Гиря Н.П., Фаворов С.Ю. 2012.

Поступила 21 декабря 2011 г.

Непрерывная функция $f(x)$ на \mathbb{R} называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε -почти периодов f

$$E_\varepsilon = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon\}$$

является относительно плотным.

Непрерывная функция $f(z)$ называется *почти периодической* в полосе

$$S_{(a,b)} = \{z : a < \operatorname{Im} z < b\},$$

если для любой меньшей полосы $S' = S_{(\alpha,\beta)}$, $a < \alpha < \beta < b$, и любого $\varepsilon > 0$ множество (S', ε) -почти периодов f

$$E_{(S',\varepsilon)} = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{z \in S'} |f(z + \tau) - f(z)| < \varepsilon\}$$

является относительно плотным; в частности, если $a = -\infty$, $b = +\infty$, то $f(z)$ будет почти периодической функцией в \mathbb{C} .

Спектром почти периодической функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется множество

$$\operatorname{spf} = \{\lambda \in \mathbb{R} : a(\lambda, f) \neq 0\},$$

где

$$a(\lambda, f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

коэффициент Фурье функции, соответствующий показателю λ .

Например, спектром конечной экспоненциальной суммы (1) (при условии $\lambda_n \neq \lambda_m$ для $m \neq n$) является множество $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, а a_n являются коэффициентами Фурье, соответствующими показателям λ_n .

Спектр любой почти периодической функции не более чем счетен ([3]).

Теорема 1 ([2], Гл.6, [3], ч.2, Гл.1). *Любая почти периодическая функция на \mathbb{R} с ограниченным спектром продолжается до целой почти периодической функции экспоненциального типа, и наоборот, сужение любой такой целой функции на \mathbb{R} имеет ограниченный спектр. При этом нули этой целой функции лежат в горизонтальной полосе ограниченной ширины (т.е. функция принадлежит классу Δ) тогда и только тогда, когда точные верхняя и нижняя грани спектра ему принадлежат.*

Таким образом, функции класса Δ являются естественным объектом исследований.

Множество $A \subset D$, где D область в \mathbb{C} , будем называть дискретным, если оно не имеет предельных точек в D . Близким к нему является понятие *дивизора* в D — это множество нулей некоторой голоморфной в D функции. Точки дивизора, в отличие от точек множества, могут иметь конечную кратность, т.е. дивизор является мультимножеством. Дивизор можно также представлять как последовательность $\{a_n\} \subset D$ без точек сгущения в D . Дискретное множество можно рассматривать как частный случай дивизора.

Множество (или дивизор) $Z = \{a_n\}$, являющееся нулевым множеством голоморфной функции в горизонтальной полосе $S_{(a,b)}$, называется почти периодическим, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой меньшей полосы $S' = S_{(\alpha,\beta)}$, $a < \alpha < \beta < b$, найдется относительно плотное множество $E_{(S',\varepsilon)} \subset \mathbb{R}$, что для каждого $\tau \in E_{(S',\varepsilon)}$ существует биекция $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, при которой справедлива импликация

$$a_n \in S' \bigvee a_{\sigma(n)} \in S' \implies |a_n + \tau - a_{\sigma(n)}| < \varepsilon.$$

(см. [4]).

В случае, когда $a = -\infty$, $b = \infty$, т.е. $S_{(a,b)} = \mathbb{C}$, а дивизор лежит в горизонтальной полосе ограниченной ширины, определение почти периодического дивизора появилось ранее в следующей форме: для любого $\varepsilon > 0$ найдется относительно плотное множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ такое, что для каждого $\tau \in E_\varepsilon$ при некоторой биекции $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n + \tau - a_{\sigma(n)}| < \varepsilon$$

(см. [2], Приложение 6, п. 2). Другое определение почти периодического дивизора, использующее понятие обобщенной функции, рассматривалось в [5], [6]. Эквивалентность определений доказана в [7].

Заметим, что если почти периодический дивизор в \mathbb{C} весь попадает в какую-нибудь горизонтальную полосу конечной ширины, то количество точек дивизора (с учетом кратности) на множестве $\{z : x_0 \leq \operatorname{Re} z \leq x_0 + 1\}$ ограничено равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}$. Действительно, это количество не превосходит количества точек на множестве $\{z : -1 \leq \operatorname{Re} z \leq L + 1\}$, где L выбрано так, что любой сегмент вещественной оси длины L содержит 1-почти периоды дивизора.

Теорема 2 ([2], Приложение 6, п. 2). *Дивизор любой функции класса Δ является почти периодическим.*

В нашей заметке мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Если для дивизора $Z_f = \{z_n\}$ функции $f \in \Delta$ множество разностей $z_n - z_m$ является дискретным, то f имеет вид (2).*

Заметим, что обратное утверждение является очевидным.

Следствие 1. *Если для дивизора $\{z_n\}$ экспоненциального полинома*

$$P(z) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n z}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

множество разностей $z_n - z_m$ является дискретным, то

$$P(z) = C e^{i\beta z} \prod_{j=1}^K \sin(\omega z + b_j), \quad \omega, \beta \in \mathbb{R}, \quad C, b_j \in \mathbb{C}.$$

Докажем вначале следующие леммы.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in \Delta$ найдется число $R < \infty$ такое, что любая замкнутая вертикальная полоса ширины R содержит нули функции f .*

Доказательство леммы. По Теореме 2 дивизор Z_f функции f почти периодический. Поэтому найдется число $L < \infty$ такое, что каждый сегмент вещественной оси длины L содержит 1-почти период дивизора функции f . Для любых точек $a \in Z_f$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ можно найти 1-почти период $\tau \in [x_0 - \operatorname{Re} a - L/2, x_0 - \operatorname{Re} a + L/2]$, и поэтому точка дивизора, находящаяся на расстоянии не больше 1 от $a + \tau$, попадет в вертикальную полосу

$$\{z : x_0 - (L/2 + 1) \leq \operatorname{Re} z \leq x_0 + (L/2 + 1)\}.$$

Таким образом, утверждение леммы выполняется для $R = L + 2$.

Лемма 2. *Если множество нулей Z функции $f \in \Delta$ имеет период T , то функция имеет вид (2).*

Доказательство леммы. Так как нули функции f лежат в горизонтальной полосе конечной ширины и не имеют точек сгущения, то множество $\{z = x + iy : 0 \leq x < T\}$

содержит конечное число корней функции f , пусть это будут точки c_1, \dots, c_K . Тогда множество корней может быть записано в виде $\{c_1, \dots, c_K\} + T\mathbb{Z}$. Положим $\omega = \frac{\pi}{T}$, $b_k = -\omega c_k$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Функция

$$\frac{f(z)}{\prod_{k=1}^K \sin(\omega z + b_k)} \quad (3)$$

является целой без нулей. Так как знаменатель равномерно отграничен от нуля вне кругов одинакового малого радиуса с центрами в корнях, а из почти периодичности функции f следует ее ограниченность в любой горизонтальной полосе конечной ширины, то функция (3) имеет экспоненциальный рост в плоскости, ограничена на вещественной оси и поэтому равна $Ce^{i\beta z}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}$.

Доказательство теоремы. Выберем число H так, что для любых нулей z_n, z_m функции f выполняется неравенство $|\operatorname{Im}(z_n - z_m)| \leq H$, и пусть R число из Леммы 1.

По условию множество, состоящее из разностей точек из Z_f , дискретно. Поэтому можно выбрать столь маленькое $\varepsilon > 0$, чтобы для любых точек $a, b, c, d \in Z_f$ таких, что

$$|a - b| < R + H + 2, \quad |c - d| < R + H + 2, \quad a - b \neq c - d,$$

всегда выполнялось неравенство $\varepsilon < |(c - d) - (a - b)|$. Можно также считать, что $\varepsilon < 1$. В частности, при $c = d$ получаем, что $\varepsilon < |a - b|$, если только $a, b \in Z_f$ и $a \neq b$.

Зафиксируем $a \in Z_f$, и пусть $\tau \in \mathbb{R}$ произвольный $(\varepsilon/2)$ -почти период Z_f . Заметим, что существует единственное $c \in Z_f$ такое, что $|a + \tau - c| < \varepsilon/2$. Действительно, в противном случае мы имеем

$$|c - c'| \leq |a + \tau - c| + |a + \tau - c'| < \varepsilon,$$

что невозможно ввиду выбора ε .

Далее, положим $T = c - a$. Для любого $a' \in Z_f$ найдется $a'' \in Z_f$ такое, что $|a' + \tau - a''| < \varepsilon/2$, и поэтому

$$|a' + T - a''| \leq |a' + \tau - a''| + |c - a - \tau| < \varepsilon.$$

Таким образом, T является ε -почти периодом дивизора Z_f . Покажем, что в действительности T является периодом этого дивизора.

Пусть $b \in Z_f$ такое, что $b \neq a$ и $|\operatorname{Re}(b - a)| < R + 1$. Так как T является ε -почти периодом Z_f , найдется точка $d \in Z_f$ такая, что $|b + T - d| < \varepsilon$, и поэтому

$$|(a - b) - (c - d)| = |d - T - b| < \varepsilon.$$

Так как

$$|a - b| \leq |\operatorname{Re}(a - b)| + |\operatorname{Im}(a - b)| < R + H + 1$$

и

$$|c - d| \leq |a - b| + |b + T - d| < R + H + 2,$$

мы ввиду выбора ε получаем, что $a - b = c - d$, следовательно, $d = b + T$. Повторим эти рассуждения для всех $b \in Z_f$ таких, что $|\operatorname{Re}(b - a)| < R + 1$. После этого, для всех $b' \in Z_f$ таких, что $|\operatorname{Re}(b' - b)| < R + 1$ для какой-либо точки b , выбранной ранее. После конечного или счетного числа шагов мы построим множество $Z' \subset Z_f$ такое, что $a + T \in Z'$ для всех $a \in Z'$.

Покажем, что $Z' = Z_f$. Если разность $Z_f \setminus Z'$ непустое множество, положим

$$R_1 = \inf\{|\operatorname{Re}(a - b)| : a \in Z', b \in Z_f \setminus Z'\}.$$

Мы имеем $R_1 \geq R + 1$, поскольку в противном случае хотя бы одна точка из $Z_f \setminus Z'$ участвовала бы в нашей процедуре и поэтому принадлежала бы Z' . Выберем $a' \in Z'$ и

$b' \in Z_f \setminus Z'$ так, что $R_1 \leq |\operatorname{Re}(a' - b')| < R_1 + 1$ и положим $x_0 = \operatorname{Re}(a' + b')/2$. Тогда для любой точки $c \in Z'$ имеем

$$|\operatorname{Re} c - x_0| = \left| \operatorname{Re}(c - b') - \operatorname{Re} \frac{a' - b'}{2} \right| > R_1 - \frac{R_1 + 1}{2} \geq R/2,$$

и для любой точки $d \in Z_f \setminus Z'$ имеем

$$|\operatorname{Re} d - x_0| = \left| \operatorname{Re}(d - a') - \operatorname{Re} \frac{b' - a'}{2} \right| > R_1 - \frac{R_1 + 1}{2} \geq R/2.$$

Поэтому полоса

$$\{z : x_0 - R/2 \leq \operatorname{Re} z \leq x_0 + R/2\}$$

не пересекается с Z_f , что, как было отмечено в Лемме 1, невозможно. Итак, $Z_f = Z'$ и T является периодом Z_f . Применяв Лемму 2, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Так как дивизор Z_f лежит в горизонтальной полосе конечной ширины, то период T с необходимостью будет вещественным.

Отметим, что в доказательстве теоремы 3 участвовали не все возможные разности нулей функции, а только разности, не большие, чем $R + H + 2$. Поэтому условие теоремы можно ослабить.

Теорема 4. Пусть для нулей $\{z_n\}$ функции $f \in \Delta$ (или конечной экспоненциальной суммы) множество

$$\{z = z_n - z_m, |z| \leq R + H + 2\}$$

конечно; здесь H ширина горизонтальной полосы, в которой лежат все нули, а R такое, что любая вертикальная полоса ширины R содержит хотя бы один нуль. Тогда для f справедливо представление (2).

Заметим, что условие принадлежности функции классу Δ снять нельзя, как показывает следующий пример.

Пусть

$$Z = \{z_{n,k} = 2^n \pi + i3^k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$$

дискретное множество в полосе $S_{(-\infty, \infty)} = \mathbb{C}$. Легко видеть, что этот дивизор является почти периодическим, причем разности его точек образуют дискретное множество. Заметим, что проекция множества Z на мнимую ось не плотна в ней, поэтому по Теореме 1 работы [7] найдется целая почти периодическая функция с дивизором Z , не являющаяся функцией из класса Δ . Для нее, очевидно, представление в виде конечного произведения синусов не имеет места.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М.Г., Левин Б.Я. *О целых почти периодических функциях экспоненциального типа* // ДАН СССР. 1949. Т. LXIV, № 2. С. 285–287.
2. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*. Госиздат. тех.-теор. лит., Москва, 1956. 632 с.
3. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции*. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
4. Н. Tornehave *Systems of zeros of holomorphic almost periodic functions*, Kobenhavns Universitet Matematisk Institut, Preprint No. 30, 1988, 52 p.
5. J.C. Lagarias *Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction* // Directions in Mathematical Quasicrystals, M. Baake and R. Moody, eds., CRM Monograph series, Vol. 13, AMS, Providence RI. 2000. P. 61–93.
6. L.I. Ronkin *Almost periodic distributions and divisors in tube domains*, Zap. Nauchn. Sem. POMI **247** (1997). P. 210–236 (Russian).
7. S.Yu. Favorov, A.Yu. Rashkovskii, A.I. Ronkin *Almost periodic divisors in a strip*, J. d'Analyse Math., Vol 74 (1998). P. 325–345.

Наталья Петровна Гиря,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61022, г. Харьков, Украина
E-mail: n_girya@mail.ru

Сергей Юрьевич Фаворов,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61022, г. Харьков, Украина
E-mail: sfavorov@gmail.com