ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 64-86.

УДК 517.946

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Л.М. КОЖЕВНИКОВА, А.А. ЛЕОНТЬЕВ

Аннотация. Для некоторого класса анизотропных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью в цилиндрической области $D = (0, \infty) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача с однородным краевым условием Дирихле и финитной начальной функцией. Установлены оценки сверху, характеризующие зависимость скорости убывания решений при $t \to \infty$ от геометрии неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 3$. Существование сильных решений доказывается методом галеркинских приближений, способ построения которых для модельного изотропного уравнения ранее был предложен Ф.Х. Мукминовым, Э.Р. Андрияновой. На основе галеркинских приближений получена оценка допустимой скорости убывания решения в неограниченной области, доказывающая точность оценки сверху.

Ключевые слова: анизотропное уравнение, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, существование решения, скорость убывания решения.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $n \geq 3$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного квазилинейного параболического уравнения второго порядка рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(u_{x_\alpha}^2) u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad k \geq 2, \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s \geq 0$, $\alpha = \overline{1, n}$, подчиняются условиям: $a_\alpha(0) = 0$, $a_\alpha(s) \in C^1(0, \infty)$,

$$\overline{a} s^{(p_\alpha - 2)/2} \leqslant a_\alpha(s) \leqslant \widehat{a} s^{(p_\alpha - 2)/2}, \tag{4}$$

$$\frac{p_1}{2} a_\alpha(s) \leqslant a_\alpha(s) + a'_\alpha(s) s \leqslant \widehat{b} a_\alpha(s), \tag{5}$$

с положительными константами $\widehat{a} \geq \overline{a}$, $2\widehat{b} \geq p_1 > k$ $(p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n)$. Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha - 2)/2}$, $\alpha = \overline{1, n}$, $\widehat{b} = p_n$.

Работа посвящена изучению скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения задачи (1)–(3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$.

L.M. Kozhevnikova, A.A. Leotiev, Estimates of solutions of an anisotropic doubly nonlinear parabolic equation.

© Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. 2011.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00440-а).

Поступила 15 июля 2011 г.

Начало изучению скорости убывания при больших значениях времени решений смешанных задач для параболических уравнений в неограниченных областях с начальной функцией, ограниченной в одной из L_p-норм, было положено в работах [1], [2]. В широком классе неограниченных областей в терминах простой геометрической характеристики $v(r) = \text{mes}\ \Omega(r),\ \ \Omega(r) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| < r\}$ А.К. Гущиным установлены точные оценки решений второй смешанной задачи для линейного параболического уравнения второго порядка в дивергентной форме.

Исследованию поведения решений смешанных задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \to \infty$ посвящены работы В.И. Ушакова [3], [4], Ф.Х. Мукминова [5], [6], А.Ф. Тедеева [7] – [9], И.М. Биккулова, Ф.Х. Мукминова [10], Л.М. Кожевниковой, Ф.Х. Мукминова [11], [12], Л.М. Кожевниковой [13], [14], Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримова [15] и др. Обзоры соответствующих результатов можно найти в [11], [13], [15].

В изотропном случае, т.е. когда все p_α равны между собой и равны $p,\ p \geq 2$, при $k = 2$ задача (1)–(3) исследовалась в работе [15]. Анизотропный случай для смешанных задач является малоизученным. Оценки скорости убывания решения задачи Коши для параболического вырождающегося уравнения с анизотропным p-лапласианом и двойной нелинейностью установлены в работе С.П. Дегтярева, А.Ф. Тедеева [16] .

Ради простоты ограничимся рассмотрением областей, расположенных вдоль выделенной оси $Ox_s,\ s \in \overline{2, n-1}$ (область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}_n^+[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \,|\, x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Ниже будет использовано обозначение: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\}$, при этом значения $a = 0,\ b = \infty$ опускаются.

Для изучения убывания решения задачи (1) – (3) при $x_s \to \infty$ будем пользоваться геометрической характеристикой, которую определим следующим образом. Положим

$$\nu_\alpha(r) = \inf\left\{ \|g_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\gamma_r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_\alpha}(\gamma_r)} = 1 \right\}, \quad r > 0, \tag{6}$$

$\nu(r) = \min\{\nu_1(r), \nu_n(r)\}$. Будем считать, что область Ω удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^\infty \nu(r)dr = \infty. \tag{7}$$

Предполагается, что начальная функция имеет ограниченный носитель так, что

$$\text{supp}\ \varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть* $k \geq 2$ *и выполнены условия* (7), (8). *Тогда найдутся положительные числа* $\kappa(p_s, k),\ \ \mathcal{M}(p_s, k)$ *такие, что обобщенное решение* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *при всех* $t \geq 0,\ r \geq 2R_0$ *удовлетворяет оценке*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_r)} \leqslant \mathcal{M} \exp\left(-\kappa \int\limits_1^r \nu(\rho)d\rho \right) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}. \tag{9}$$

На основе оценки (9) устанавливаются результаты об убывании решения задачи (1)–(3) при $t \to \infty$.

Допустимая скорость стабилизации решения изотропного квазилинейного параболического уравнения высокого порядка при $k = 2$ изучалась А.Ф. Тедеевым [17] для первой смешанной задачи и N. Alikakos, R. Rostmanian [18] для задачи Коши. В следующей теореме получена оценка снизу для решения задачи (1)–(3).

Теорема 2. *Пусть* $2 \leqslant k < p_1$ *и выполнены условия* (7), (8). *Тогда существует положительное число* $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b})$ *такое, что обобщенное решение* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3)

при всех $t \geq 0$ подчиняется оценке

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t+1\right)^{-1/(p_1-k)}. \tag{10}$$

Определим функцию

$$\mu_1(r) = \inf\left\{ \|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1 \right\}, \quad r > 0. \tag{11}$$

Будем исследовать убывание в областях, для которых выполнено условие

$$\lim_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0. \tag{12}$$

Показано, что если это условие не выполнено, то достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant Mt^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0, \tag{13}$$

(см. следствие 2).

Пусть $r(t)$ — произвольная положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$(\mu_1^{p_1}(r(t))t)^{-1/(p_1-k)} \exp\left(\kappa \int\limits_1^{r(t)} \nu(\rho)d\rho\right) \geq 1, \quad t > 0. \tag{14}$$

Существование такой функции следует из (12).

Теорема 3. *Пусть $2 \leqslant k < p_1$ и выполнены условия (7), (8), (12). Тогда найдется положительное число $M(p_s, p_1, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)})$ такое, что для решения $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant M\left(t\mu_1^{p_1}(r(t))\right)^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0. \tag{15}$$

Если для $r > 1$ выполнены условия:

$$\int\limits_1^r \nu(\rho)d\rho \geq b\ln r, \tag{16}$$

$$\mu_1(r) \geq Cr^{-a} \tag{17}$$

с положительными постоянными a, b, C, то можно положить

$$r(t) = t^{1/(ap_1+\kappa b(p_1-k))}, \quad t > 0,$$

и оценка (15) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant Mt^{-\kappa/\left(\frac{a}{b}p_1+\kappa(p_1-k)\right)}, \quad t > 0. \tag{18}$$

Если же вместо неравенства (16) выполнено условие:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \nu(\rho)d\rho = \infty, \tag{19}$$

то можно выбрать

$$r(t) = t^{\varepsilon/(ap_1)}, \quad t > 0, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{20}$$

и оценка (15) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad t > 0. \tag{21}$$

Выбор функции $r(t)$ формулой (20) является удовлетворительным, поскольку оценка (21) имеет показатель степени близкий к показателю $1/(p_1-k)$ оценки снизу (10).

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f)[s] = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \,|\, x_s > 0,\ |\mathbf{x}'_s| < f(x_s)\right\}, \quad s \in \overline{2, n-1}, \tag{22}$$

$\mathbf{x}'_s = (x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n)$, с положительной функцией $f(x_s) < \infty$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)[s]$ было областью.

Для таких областей справедливо соотношение

$$\nu(r) = \frac{c}{f(r)}, \quad r > 0, \tag{23}$$

поэтому условие (19) принимает вид

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \frac{d\rho}{f(\rho)} = \infty. \tag{24}$$

Для областей вращения вида (22) выразим оценки (9), (15) через функцию $f(x)$. Соединяя (9), (23), получаем следующую оценку

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_r)} \leqslant \widetilde{\mathcal{M}} \exp\left(-\widetilde{\kappa} \int\limits_1^r \frac{d\rho}{f(\rho)}\right) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}, \quad t \geq 0, \quad r \geq 2R_0. \tag{25}$$

Для областей вращения, удовлетворяющих условию (24), выбор функции $r(t)$ формулой (20) оправдан и справедлива оценка (21). Однако, для таких областей можно получить более тонкие оценки.

Следствием теоремы 3 для областей вращения вида (22) является следующая оценка (см. утверждение 1)

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega(f))} \leqslant \widetilde{M} t^{-1/(p_1-k)} \widetilde{g}(t), \quad t \geq 1, \tag{26}$$

где функция $\widetilde{g}(t)$ растет медленнее любой степенной функции $t^\gamma, \gamma > 0$.

В области $\Omega(f_a)[s]$ с функцией $f_a(x) = x^a,\ 0 \leqslant a < 1,\ x > 0$, для решения задачи (1)–(3) оценка (26) принимает вид (см. пример 1 §5)

$$\begin{gathered} \|u(t)\|_{L_k(\Omega(f))} \leqslant \widetilde{M}_a t^{-1/(p_1-k)} (\ln t)^{\chi/(1-a)}, \quad t \geq e, \\ \chi = a\frac{p_1}{p_1 - k} + a\frac{n-1}{k} + \frac{1}{k}. \end{gathered} \tag{27}$$

В области $\Omega(f)[s]$ с функцией $f(x) = e,\ 0 < x < e,\ \ f(x) = x/\ln x,\ x \geq e$, для решения задачи (1)–(3) оценка (26) принимает вид (см. пример 2 §5)

$$\begin{gathered} \|u(t)\|_{L_k(\Omega(f))} \leqslant \widetilde{M} t^{-1/(p_1-k)} (\ln t)^{-\sigma/2} \exp\left(\varrho (\ln t)^{1/2}\right), \quad t \geq e, \\ \sigma = \frac{p_1}{p_1 - k} + \frac{n-1}{k}, \quad \varrho > 0. \end{gathered} \tag{28}$$

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в $L_p(Q),\ p > 1$, $(\cdot,\cdot)_Q$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$, причем значения $p = 2,\ Q = \Omega$ опускаются. Через $D_a^b = (a, b) \times \Omega$ обозначим цилиндр, значения $a = 0$ и $b = \infty$ могут отсутствовать.

Банахово пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha} + \|u\|_k.$$

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам

$$\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T},$$

$$\|u\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \|u_t\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T}.$$

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *назовем функцию* $u(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T} \left(-|u|^{k-2} u v_t + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(u^2_{x_\alpha}) u_{x_\alpha} v_{x_\alpha} \right) d\mathbf{x}dt = \tag{29}$$

$$= -\int\limits_{\Omega} |u(T,\mathbf{x})|^{k-2} u(T,\mathbf{x}) v(T,\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^{k-2} \varphi(\mathbf{x}) v(0,\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *при всех* $T > 0$.

Определение обобщенного решения корректно, поскольку входящие в (29) интегралы конечны. Действительно, ввиду неравенства Гельдера, благодаря (4), для функций $u(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{D^T} |a_\alpha(u^2_{x_\alpha})||u_{x_\alpha}||v_{x_\alpha}| d\mathbf{x}dt \leqslant \widehat{a} \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{D^T} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha - 1} |v_{x_\alpha}| d\mathbf{x}dt \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{a} \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|^{p_\alpha-1}_{p_\alpha,D^T} \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T},$$

$$\int\limits_{D^T} |u|^{k-1} |v_t| d\mathbf{x}dt \leqslant \|u\|^{k-1}_{k,D^T} \|v_t\|_{k,D^T}.$$

Из условий (5) следуют неравенства

$$(p_1 - 1) a_\alpha(s) \leqslant a_\alpha(s) + 2a'_\alpha(s)s \leqslant \widehat{c} a_\alpha(s), \quad \widehat{c} = 2\widehat{b} - 1, \quad s \geq 0, \quad \alpha = \overline{1,n}, \tag{30}$$

которые можно переписать в виде

$$0 \leqslant (a_\alpha(z^2) z)' \leqslant \widehat{c} a_\alpha(z^2), \quad z \in \mathbb{R}, \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{31}$$

Положим $A_\alpha(s) = \int\limits_0^s a_\alpha(\tau) d\tau$, тогда, пользуясь условиями (5), выводим неравенства

$$\frac{p_1}{2} A_\alpha(s) \leqslant a_\alpha(s)s \leqslant \widehat{b} A_\alpha(s), \quad s \geq 0, \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{32}$$

Лемма 1. *Любое ограниченное множество рефлексивного банахова пространства слабо компактно (см.* [19, гл. V, §19.7, теорема 1]*).*

Замечание 1. *Пространства* $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *являются рефлексивными сепарабельными банаховыми пространствами. Действительно, пространство* $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *является замыканием образа отображения* $I : v(t,\mathbf{x}) \in C_0^\infty(D^{T+1}_{-1}) \mapsto (v, v_{x_1}, v_{x_2}, ..., v_{x_n}) \in$ $\in L_k(D^T) \oplus L_{p_1}(D^T) \oplus ... \oplus L_{p_n}(D^T)$. *Поскольку пространства* $L_k(D^T), L_{p_1}(D^T), ..., L_{p_n}(D^T)$ *рефлексивны, то подпространство* $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *рефлексивного пространства* $L_k(D^T) \oplus L_{p_1}(D^T) \oplus ... L_{p_n}(D^T)$ *также является рефлексивным.*

Замечание 2. *В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа "из последовательности* u^M *можно выделить подпоследовательность* u^{M_i}, *сходящуюся в* $L_2(\Omega)$ *при* $i \to \infty$ *будем говорить просто "последовательность* u^M *выборочно сходится в* $L_2(\Omega)$ *при* $M \to \infty$". *Соответственно, будем использовать термин "выборочно слабо сходится" и т.п.*

Лемма 2. *Пусть* $g^M(t,\mathbf{x})$, $M=\overline{1,\infty}$, $g(t,\mathbf{x})$ *— такие функции из* $L_p((0,T)\times Q)$, $1<p<\infty$, *что*

$$\|g^M\|_{p,(0,T)\times Q}\leqslant C,\quad g^M\to g \text{ при } M\to\infty \text{ почти всюду в } (0,T)\times Q,$$

тогда $g^M\rightharpoonup g$ *при* $M\to\infty$ *слабо в* $L_p((0,T)\times Q)$ *(см.* [20, гл. I, §1.4, лемма 1.3]*).*

Лемма 3. *Пусть система функций* $\psi_i(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega)$, $i=\overline{1,\infty}$, *линейно независима, и её линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$. *Через* P_L *обозначим совокупность функций* $\sum\limits_{i=1}^{L}d_i(t)\psi_i(\mathbf{x})$, *где* $d_i(t)\in C^\infty[0,T]$. *Тогда множество* $P=\bigcup\limits_{L=1}^{\infty}P_L$ *плотно в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *(см.* [21, гл. II, §4, лемма 4.12]*).*

Лемма 4. *Пусть последовательность* $\{u^M(t,\mathbf{x})\}_{M=1}^\infty$ *ограничена в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $k\leqslant p_1$. *Тогда найдется счетное плотное множество* $\{t_j\}_{j=1}^\infty\subset[0,T]$ *такое, что* $\{u^M(t_j,\mathbf{x})\}_{M=1}^\infty$ *выборочно сильно сходится в пространстве* $L_k(Q)$ *для любой ограниченной области* $Q\subset\Omega$ *с гладкой границей при* $M\to\infty$ *для каждого фиксированного* t_j, $j=\overline{1,\infty}$.

Доказательство проведем по схеме, предложенной Ж.-Л. Лионсом [20, гл. I, §12.2, теорема 12.1]. Из условия леммы следуют неравенства

$$\|u^M\|^k_{k,D^T}+\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,D^T}\leqslant C,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{33}$$

Рассмотрим множество E точек $t\in[0,T]$, для которых

$$\lim_{M\to\infty}\left(\|u^M(t)\|^k_k+\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}(t)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha}\right)=\infty.$$

Мера E равна 0, так как иначе

$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^T\left(\|u^M(t)\|^k_k+\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}(t)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha}\right)dt\geq$$

$$\geq\lim_{M\to\infty}\int\limits_E\left(\|u^M(t)\|^k_k+\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}(t)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha}\right)dt=\infty,$$

что противоречит неравенствам (33). Тогда для почти всех $t\in[0,T]$ справедливы неравенства

$$\|u^M(t)\|^k_k+\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}(t)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha}\leqslant C_1(t),\quad M=\overline{1,\infty},$$

из которых, ввиду условия $k\leqslant p_1$, для любой ограниченной области $Q\subset\Omega$ с гладкой границей вытекают неравенства

$$\|u^M(t)\|_{W^1_k(Q)}\leqslant C_2(t),\quad M=\overline{1,\infty}.$$

Из компактности вложения $W^1_k(Q)\subset L_k(Q)$ следует, что для любого $t\in[0,T]\setminus E$ последовательность $u^M(t,\mathbf{x})$ выборочно сильно сходится к $u(t,\mathbf{x})$ при $M\to\infty$ в $L_k(Q)$.

Пусть последовательность $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ плотна на отрезке $[0,T]$ и $t_j\notin E$. С помощью диагонального процесса можно выделить подпоследовательность u^{M_i} такую, что $u^{M_i}(t_j)\to u(t_j)$ сильно сходится при $i\to\infty$ в $L_k(Q)$ для любого j. □

Вопросы существования и единственности решения изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью рассматривались в работах P.A. Raviart [22], Ж.Л. Лионс [20], A. Bamberger [23], O. Grange, F. Mignot [24], H.W. Alt, S. Luckhaus [25], F. Bernis [26] и других. В основном рассматривались задачи в ограниченных областях. Сильное решение задачи в ограниченной области было установлено P.A. Raviart путем замены эволюционной производной разностным отношением. A. Bamberger установил единственность сильного положительного решения задачи. F. Bernis доказал существование слабого решения задачи в неограниченной области предельным переходом от решений, построенных в ограниченных областях O. Grange, F. Mignot. Слабое решение задачи Коши для анизотропного уравнения при $k=2$ было построено M. Bendahmane, K.H. Karlsen [27]. Однако для получения оценки снизу убывания решения при $t\to\infty$ нужна его дополнительная гладкость.

Ф.Х. Мукминов, Э.Р. Андриянова[28] предложили обычный способ построения сильного решения для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью сразу в неограниченной области на основе галеркинских приближений. Здесь этот метод адаптирован на некоторый класс анизотропных параболических уравнений вида (1).

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(\mathbf{x})\in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $p_1>1$, $k\geq 2$, *тогда существует обобщенное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3), *для любого* $T>0$, *удовлетворяющее условиям*

$$u\in L_\infty((0,T),\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)); \tag{34}$$

$$|u|^{(k-2)/2}u_t\in L_2(D^T),\quad \|u(t)\|_k\in C([0,T]); \tag{35}$$

$$|u|^{k-2}u_t\in L_{k'}(D^T),\quad k'=\frac{k}{k-1}. \tag{36}$$

При этом справедливы неравенства

$$(k-1)\|u(t)\|_k^k+k\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_0^t\|u_{x_\alpha}(\tau)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}d\tau\leqslant(k-1)\|\varphi\|_k^k,\quad t\geq 0; \tag{37}$$

$$(k-1)\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k+k\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}(t)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}\leqslant 0,\quad t>0. \tag{38}$$

Доказательство. Выберем линейно независимую систему функций $\psi_i(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega)$, $i=\overline{1,\infty}$, такую, что ее линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$. Будем считать, что эта система является ортонормированной в $L_2(\Omega)$.

Зафиксируем произвольное $T>0$. Приближенные решения $u^M(t,\mathbf{x})$ будем искать в виде $u^M(t,\mathbf{x})=\sum\limits_{i=1}^{M}c_i^M(t)\psi_i(\mathbf{x})$, $M=\overline{1,\infty}$. При этом функции $c_i^M(t)$, $t\in[0,T]$, определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\left(\frac{u^M}{b^M}+|u^M|^{k-2}u^M\right)_t,\psi_j\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},(\psi_j)_{x_\alpha}\right)=0,\quad j=\overline{1,M}, \tag{39}$$

(числа $b^M>0$ выберем позже) и начальных условий

$$c_i^M(0)=c_i^M,\quad i=\overline{1,M}, \tag{40}$$

подобранных так, что

$$u^M(0,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} c_i^M \psi_i(\mathbf{x}) \to \varphi(\mathbf{x}) \text{ в } \overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega) \text{ при } M \to \infty. \tag{41}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\|u^M(0)\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} \leqslant E_1(\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}), \quad M = \overline{1,\infty}. \tag{42}$$

Убедимся, что уравнения (39) разрешимы относительно производных $\dfrac{d}{dt}c_i^M(t)$. Очевидно, что уравнения (39) имеют вид

$$\sum_{i=1}^{M} A_{ji}(c_1^M(t),...,c_M^M(t))\frac{d}{dt}c_i^M(t) = F_j(c_1^M(t),...,c_M^M(t)), \quad j = \overline{1,M}, \tag{43}$$

$$A_{ji}(c_1,\dots,c_M) = \left(\left(\frac{1}{b^M} + (k-1)\left|\sum_{l=1}^{M} c_l\psi_l\right|^{k-2}\right)\psi_i,\psi_j\right) = (\psi_i,\psi_j)_M,\ i,j = \overline{1,M},$$

$$F_j(c_1,\dots,c_M) =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{M} c_i\left(a_\alpha\left(\left(\sum_{l=1}^{M} c_l^M(\psi_l)_{x_\alpha}\right)^2\right)(\psi_i)_{x_\alpha},(\psi_j)_{x_\alpha}\right), \quad j = \overline{1,M}.$$

Нетрудно проверить, что $(g,h)_M,\ g,h \in C_0^\infty(\Omega)$, является скалярным произведением. Следовательно, матрица коэффициентов $A_{ji}(c_1^M(t),...,c_M^M(t))$ при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов $\psi_i,\ i = \overline{1,M}$, и имеет обратную. Поэтому, систему (39) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}c_i^M(t) = \sum_{j=1}^{M} A_{ij}^{-1}(c_1^M(t),\dots,c_M^M(t))F_j(c_1^M(t),\dots,c_M^M(t)), \quad i = \overline{1,M}. \tag{44}$$

Установим теперь оценки для галеркинских приближений. Умножим j-е уравнение (39) на $c_j^M(t)$, и затем все уравнения сложим по j от 1 до M, в результате получим равенства

$$\left(\left(\frac{u^M}{b^M} + |u^M|^{k-2}u^M\right)_t, u^M\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right) = 0, \quad M = \overline{1,\infty},$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k + \frac{1}{2b^M}\|u^M(t)\|^2\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right) = 0, \quad M = \overline{1,\infty}. \tag{45}$$

После интегрирования от 0 до $t \in [0,T]$ будем иметь

$$\frac{1}{2b^M}\|u^M(t)\|^2 + \frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right)_{D^t} =$$

$$= \frac{1}{2b^M}\|u^M(0)\|^2 + \frac{k-1}{k}\|u^M(0)\|_k^k, \quad M = \overline{1,\infty}. \tag{46}$$

Учитывая (4), полагая $b^M = M\|u^M(0)\|^2$, соединяя (46) и (42), выводим неравенства

$$\frac{1}{b^M}\max_{[0,T]}\|u^M(t)\|^2 + \max_{[0,T]}\|u^M(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,D^T}d\tau \leqslant E_2, \quad M = \overline{1,\infty}. \tag{47}$$

Здесь и ниже постоянные E_i зависят только от $\widehat{a},\overline{a},\widehat{b},\mathbf{p},\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}$.

Неравенства (4), (47) позволяют установить оценки

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\|a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1),D^T}\leq \widehat{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|^{p_\alpha-1}_{p_\alpha,D^T}\leqslant E_3,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{48}$$

Покажем, что все возможные решения решения задачи (40), (44) равномерно ограничены на $[0,T]$. Действительно, пользуясь (47), выводим

$$\max_{[0,T]}|c^M_i(t)|^2\leq\sum_{j=1}^{M}\max_{[0,T]}|c^M_j(t)|^2=\max_{[0,T]}\|u^M(t)\|^2\leq E_2b^M,\quad i=\overline{1,M}.$$

Ввиду непрерывности правой части уравнений (44), существуют абсолютно непрерывные функции $c^M_i(t),\ t\in[0,T],\ i=\overline{1,M}$, которые почти всюду удовлетворяют системе (44) и начальному условию (40) (см. [29, с. 120]).

Умножим теперь j-е уравнение (39) на $\dfrac{d}{dt}c^M_j(t)$, и затем все уравнения сложим по j от 1 до M, в результате получим равенства

$$\left(\left(\frac{u^M}{b^M}+|u^M|^{k-2}u^M\right)_t,u^M_t\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{tx_\alpha}\right)=0,\quad M=\overline{1,\infty},$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{1}{b^M}\|u^M_t\|^2+(k-1)\||u^M|^{(k-2)/2}u^M_t\|^2+\frac12\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega A_\alpha((u^M_{x_\alpha}(t))^2)d\mathbf{x}=0,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{49}$$

После интегрирования от 0 до $t\in[0,T]$, пользуясь (32), будем иметь

$$\frac{1}{b^M}\|u^M_t\|^2_{D^t}+(k-1)\||u^M|^{(k-2)/2}u^M_t\|^2_{D^t}+\frac{1}{2\widehat{b}}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha}(t))^2)u^M_{x_\alpha}(t),u^M_{x_\alpha}(t)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p_1}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha}(0))^2)u^M_{x_\alpha}(0),u^M_{x_\alpha}(0)\right),\quad M=\overline{1,\infty}.$$

Применяя (4), пользуясь (42), выводим

$$\||u^M|^{(k-2)/2}u^M_t\|^2_{D^T}+\max_{[0,T]}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}(t)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha}\leqslant E_3,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{50}$$

Из неравенств (47), (50) следует ограниченность последовательности $\{u^M\}_{M=1}^\infty$ в пространствах $C([0,T],\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega))$, $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ и $\{|u^M|^{(k-2)/2}u^M_t\}_{M=1}^\infty$ в $L_2(D^T)$. Кроме того, из неравенств (48), следует ограниченность последовательностей $a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}$ в пространствах $L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T)$, $\alpha=\overline{1,n}$. Установленные факты обеспечивают выборочную слабую сходимость указанных последовательностей при $M\to\infty$ в соответствующих пространствах:

$$u^M\rightharpoonup u\quad\text{в}\quad \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T),$$

$$a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}\rightharpoonup b_\alpha\quad\text{в}\quad L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T),\quad \alpha=\overline{1,n},$$

$$v^M_t=\left(|u^M|^{(k-2)/2}u^M\right)_t=\frac{k}{2}|u^M|^{(k-2)/2}u^M_t\rightharpoonup g\quad\text{в}\quad L_2(D^T).$$

Ниже докажем, что u^M выборочно почти всюду в D^T сходится к u, это позволит установить, что $g=v_t=(|u|^{(k-2)/2}u)_t$.

Последовательность $u^M\in C([0,T],\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega))$, $M=\overline{1,\infty}$, ограничена в этом пространстве. Для каждой ограниченной области $Q\subset\Omega$ с гладкой границей имеем компактность вложения $L_1(Q) \subset W_1^1(Q)$. Поэтому диагональным процессом можно установить выборочную сильную сходимость $u^M(t_j,\mathbf{x}) \to h(t_j,\mathbf{x})$ в $L_1(Q)$ на счетном плотном множестве $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0,T]$. Можно также считать, что $u^M(t_j,\mathbf{x}) \to h(t_j,\mathbf{x})$ выборочно почти всюду в Q при каждом t_j, $j=\overline{1,\infty}$. Совершенно аналогично, при $k \le p_1$ можно также считать, что последовательность $u^M(t_j,\mathbf{x}) \to h(t_j,\mathbf{x}))$ сильно в $L_k(Q)$ при каждом t_j, $j=\overline{1,\infty}$.

Следуя Ж.Л. Лионсу [20, гл. I, §12.2], докажем выборочную сильную сходимость последовательности v^M в пространстве $C([0,T],L_1(Q))$. Сначала установим равностепенную непрерывность по t последовательности $v^M = |u^M|^{(k-2)/2}u^M$ в $L_2(\Omega)$:

$$\|v^M(t_2)-v^M(t_1)\| = \left\|\int\limits_{t_1}^{t_2} v_t^M(t)dt\right\| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\|v_t^M(t)\|dt \leqslant$$

$$\leqslant |t_2-t_1|^{1/2}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2}\|v_t^M(t)\|^2dt\right)^{1/2} \leqslant E_4|t_2-t_1|^{1/2}, \quad t_1,t_2\in[0,T], \quad M=\overline{1,\infty}. \tag{51}$$

Из неравенств (47) заключаем равномерную по $t\in[0,T]$ ограниченность последовательности $v^M(t,\mathbf{x})$ в $L_2(\Omega)$:

$$\|v^M(t)\| = \|u^M(t)\|_k^{k/2} \leqslant E_5, \quad M=\overline{1,\infty}.$$

Ввиду ограниченности последовательности $v^M(t,\mathbf{x})$, $M=\overline{1,\infty}$, в пространстве $C([0,T],L_2(\Omega))$ она выборочно слабо сходится в $L_2(\Omega)$ при тех же t_j, что и выше. Из установленной выше выборочной сходимости $u^M(t_j,\mathbf{x}) \to h(t_j,\mathbf{x})$ почти всюду в Q при каждом t_j следует выборочная сходимость $v^M(t_j,\mathbf{x}) \to v(t_j,\mathbf{x}) = |h(t_j,\mathbf{x})|^{(k-2)/2}h(t_j,\mathbf{x})$ почти всюду в Q. Далее, на основе теоремы Егорова для любого $\delta>0$ устанавливается равномерная сходимость $v^M(t_j,\mathbf{x}) \rightrightarrows v(t_j,\mathbf{x})$ на Q_δ, $\mathrm{mes}(Q\backslash Q_\delta) < \delta$. Отсюда, ввиду справедливости неравенств

$$\|v^M(t_j)-v(t_j)\|_{1,Q} \leqslant \mathrm{mes}\, Q \max_{\mathbf{x}\in Q_\delta}|v^M(t_j,\mathbf{x})-v(t_j,\mathbf{x})| + \|v^M(t_j)-v(t_j)\|_{1,Q\backslash Q_\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{mes}\, Q \max_{\mathbf{x}\in Q_\delta}|v^M(t_j,\mathbf{x})-v(t_j,\mathbf{x})| + \delta^{1/2}\|v^M(t_j)-v(t_j)\|_{2,Q\backslash Q_\delta},$$

следует сильная сходимость $v^M(t_j,\mathbf{x}) \to v(t_j,\mathbf{x})$ в $L_1(Q)$ при каждом t_j.

Для ограниченной области Q из (51) нетрудно установить равномерную фундаментальность последовательности $v^M(t,\mathbf{x})$ по норме $L_1(Q)$:

$$\|v^N(t)-v^M(t)\|_{1,Q} = \|v^N(t)-v^N(t_{j_l})+v^N(t_{j_l})-v^M(t_{j_l})+v^M(t_{j_l})-v^M(t)\|_{1,Q} \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{mes}\, Q)^{1/2}E_6|t-t_{j_l}|^{1/2} + \|v^N(t_{j_l})-v^M(t_{j_l})\|_{1,Q}.$$

Выбрав конечный набор чисел t_{j_l} с малым шагом и затем увеличивая N,M, добиваемся равномерной по t малости правой части.

Итак, установлена выборочная сильная сходимость $v^M \to v$ в $C([0,T],L_1(Q))$. Сходимость будет также и в $L_1((0,T)\times Q)$, поэтому $v^M \to v$ выборочно сходится почти всюду в $(0,T)\times Q$. Благодаря произвольности Q последовательность v^M выборочно сходится к v почти всюду в D^T. Тогда и последовательность $u^M(t,\mathbf{x})$ выборочно сходится к $h(t,\mathbf{x})$ почти всюду в D^T. Согласно лемме 2 $u^M(t,\mathbf{x}) \rightharpoonup h(t,\mathbf{x})$ в $L_k(D^T)$, в силу единственности предела $h(t,\mathbf{x}) = u(t,\mathbf{x})$ почти всюду в D^T. Таким образом, v^M выборочно сходится к $v=|u|^{(k-2)/2}u$ почти всюду в D^T.

Согласно лемме 2 $v^M \rightharpoonup v$ слабо в $L_2(D^T)$. Далее, $(v_t^M,w)_{D^T} = -(v^M,w_t)_{D^T}$ для любой функции $w\in C_0^\infty(D^T)$, переходя к пределу при $M\to\infty$, получим

$$(g,w)_{D^T} = -(v,w_t)_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $g = v_t = (|u|^{(k-2)/2}u)_t$. Отметим, что принадлежность $v, v_t \in L_2(D^T)$ влечет $v \in C([0,T], L_2(\Omega))$.

Покажем, что последовательность $(|u^M|^{k-2}u^M)_t = (k-1)|u^M|^{k-2}u_t^M,\ M=\overline{1,\infty}$, ограничена в $L_{k'}(D^T)$. В самом деле

$$\||u^M|^{k-2}u_t^M\|_{k',D^T} = \left(\int\limits_{D^T} |u^M|^{k(k-2)/(2(k-1))}(|u^M|^{(k-2)/2}|u_t^M|)^{k/(k-1)}d\mathbf{x}dt\right)^{(k-1)/k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{k}\|u^M\|_{k,D^T}^{(k-2)/2}\|v_t^M\|_{2,D^T}.$$

Из ограниченности $\||u^M|^{k-2}u_t^M\|_{k',D^T}$ следует, что $(|u^M|^{k-2}u^M)_t \rightharpoonup b$ в $L_{k'}(D^T)$. Из леммы 2 следует $|u^M|^{k-2}u^M \rightharpoonup |u|^{k-2}u$ в $L_{k'}(D^T)$, отсюда $((|u^M|^{k-2}u^M)_t, w)_{D^T} = -(|u^M|^{k-2}u^M, w_t)_{D^T}$, для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$, переходя к пределу при $M \to \infty$, получим

$$(b, w)_{D^T} = -(|u|^{k-2}u, w_t)_{D^T},$$

значит, $b = (|u|^{k-2}u)_t$. Тогда, можно считать, что $(|u^M|^{k-2}u^M)_t \rightharpoonup (|u|^{k-2}u)_t$ слабо в $L_{k'}(D^T)$.

Докажем, что функция $u(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет интегральному тождеству (29). Из (39) следуют тождества

$$\left(\left(\frac{u^M}{b^M} + |u^M|^{k-2}u^M\right)_t, w\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M, w_{x_\alpha}\right)_{D^T} = 0, \quad M=\overline{1,\infty}, \tag{52}$$

справедливые для любой функции $w(\tau,\mathbf{x}) \in P = \bigcup_{L=1}^\infty P_L$.

Отметим, что

$$\frac{1}{b^M}\left(u_t^M, w\right)_{D^T} = \frac{1}{b^M}\left\{-(u^M, w_t)_{D^T} + (u^M(T), w(T)) - (u^M(0), w(0))\right\} \to 0,$$

благодаря ограниченности u^M в $C([0,T], L_k(\Omega))$, и тому, что $b^M \to \infty$ при $M \to \infty$.

В (52) можно перейти к пределу при $M \to \infty$, в результате придем к тождеству

$$\left((|u|^{k-2}u)_t, w\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, w_{x_\alpha})_{D^T} = 0, \tag{53}$$

которое справедливо для любой функции $w \in P$. Ввиду плотности P в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ (лемма 3) тождество (53) справедливо для произвольной $w \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. При этом, пользуемся тем, что $(|u|^{k-2}u)_t \in L_{k'}(D^T),\ b_\alpha \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T),\ \alpha=\overline{1,n}$. В частности, для $w=u$, выводим

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, u_{x_\alpha})_{D^T} + ((|u|^{k-2}u)_t, u)_{D^T} = \\ = \frac{k-1}{k}\left(\|u(T)\|_k^k - \|u(0)\|_k^k\right) + \sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, u_{x_\alpha})_{D^T} = 0.\end{gathered} \tag{54}$$

Докажем, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, v_{x_\alpha})_{D^T} = \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha})_{D^T}. \tag{55}$$

Вычтем из (46) при $t=T$ равенства (52), для $w \in P$ получим соотношения

$$-\left(\left(\frac{u^M}{b^M} + |u^M|^{k-2}u^M\right)_t, w\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M, (u^M - w)_{x_\alpha}\right)_{D^T} +$$

$$+\frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T}+\frac{1}{2b^M}\|u^M(t)\|^2\Big|_{t=0}^{t=T}=0,\quad M=\overline{1,\infty},$$

из которых, используя условие монотонного неубывания функций $a_\alpha(z^2)z,\ z\in\mathbb{R},\ \alpha=\overline{1,n}$, (см. (31)), выводим неравенства

$$-\left(\left(\frac{u^M}{b^M}+|u^M|^{k-2}u^M\right)_t,w\right)_{D^T}+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha},(u^M-w)_{x_\alpha}\right)_{D^T}+$$

$$+\frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T}+\frac{1}{2b^M}\|u^M(t)\|^2\Big|_{t=0}^{t=T}\leqslant 0,\quad M=\overline{1,\infty}.$$

Далее, перейдем к пределу по $M\to\infty$ для фиксированного $w\in P$, при этом используем установленную выше сходимость.

Таким образом, для произвольной $w\in P$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}-\left((|u|^{k-2}u)_t,w\right)_{D^T}+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha},(u-w)_{x_\alpha}\right)_{D^T}+\\+\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T}\leqslant 0.\end{aligned}\tag{56}$$

Согласно лемме 4 множество P плотно в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. Тогда для произвольной функции $w\in\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ найдется такая последовательность $w^l\in P$, что $\|w^l-w\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}\to 0$ при $l\to\infty$. Запишем (56) для $w=w^l$, затем перейдем к пределу при $l\to\infty$.

Обоснуем предельный переход при $l\to\infty$ в интегралах

$$\left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha},(u-w^l)_{x_\alpha}\right)_{D^T}\to\left(a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha},(u-w)_{x_\alpha}\right)_{D^T},\quad \alpha=\overline{1,n}.\tag{57}$$

Для произвольной функции $v\in\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ найдутся $\theta_l\in[0,1]$ такие, что

$$\begin{aligned}&|\left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha}-a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha},v_{x_\alpha}\right)_{D^T}|\leqslant\\&\leqslant\left(|a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha}-a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha}|,|v_{x_\alpha}|\right)_{D^T}\leqslant\\&\leqslant\int\limits_{D^T}|w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}||v_{x_\alpha}|(a_\alpha(z^2)z)'\big|_{z=(\theta^lw^l+(1-\theta^l)w)_{x_\alpha}}d\mathbf{x}dt.\end{aligned}$$

Применяя условия (31), (4), выводим

$$\begin{aligned}&|\left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha}-a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha},v_{x_\alpha}\right)_{D^T}|\leqslant\\&\leqslant\widehat{c}\int\limits_{D^T}|w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}||v_{x_\alpha}|a_\alpha(z^2)\big|_{z=(\theta^lw^l+(1-\theta^l)w)_{x_\alpha}}d\mathbf{x}dt\leqslant\\&\leqslant\widehat{c}\widehat{a}\int\limits_{D^T}|w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}||v_{x_\alpha}|(|w^l_{x_\alpha}|+|w_{x_\alpha}|)^{p_\alpha-2}\leqslant\\&\leqslant\widehat{c}\widehat{a}\||w^l_{x_\alpha}|+|w_{x_\alpha}|\|^{p_\alpha-2}_{p_\alpha,D^T}\|w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T}\|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T}\to 0\end{aligned}\tag{58}$$

при $l\to\infty$, в частности, для $v=u$ и $v=w$. Кроме того, используя (5), устанавливаем

$$\begin{aligned}&|\left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha},w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}\right)_{D^T}|\leqslant\left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)|w^l_{x_\alpha}|,|w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}|\right)_{D^T}\leqslant\\&\leqslant\widehat{a}\int\limits_{D^T}|w^l_{x_\alpha}|^{p_\alpha-1}|w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}|d\mathbf{x}dt\leqslant\widehat{a}\|w^l_{x_\alpha}-w_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T}\|w^l_{x_\alpha}\|^{p_\alpha-1}_{p_\alpha,D^T}\to 0\end{aligned}\tag{59}$$

при $l\to\infty$.

Ввиду справедливости неравенств

$$| \left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha}, w^l_{x_\alpha}\right)_{D^T} - \left(a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha}, w_{x_\alpha}\right)_{D^T} | \leqslant$$
$$\leqslant | \left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha}, w^l_{x_\alpha} - w_{x_\alpha}\right)_{D^T} |+$$
$$+| \left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha} - a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha}, w_{x_\alpha}\right)_{D^T} |,$$

из (58), (59) следует (57). Таким образом, тождество (56) установлено для произвольной $w \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$.

Из (56) вычтем (54) и прибавим (53), в результате выводим неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha} - b_\alpha, (u-w)_{x_\alpha})_{D^T} \leq 0, \tag{60}$$

справедливое для любого $w \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. В (60) положим $w = u + \varepsilon v$, $\varepsilon > 0$, где $v \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, получим

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha((u_{x_\alpha} + \varepsilon v_{x_\alpha})^2)(u_{x_\alpha} + \varepsilon v_{x_\alpha}) - b_\alpha, v_{x_\alpha})_{D^T} \geq 0.$$

Из последнего неравенства при $\varepsilon \to 0$ следует соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha} - b_\alpha, v_{x_\alpha})_{D^T} \geq 0,$$

из которого, ввиду произвольности v, будем иметь равенство (55). Из (53) и (55) для $v \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ заключаем справедливость тождества

$$\left((|u|^{k-2}u)_t, v\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha}\right)_{D^T} = 0. \tag{61}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, приходим к равенству

$$-\left(|u|^{k-2}u, v_t\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha}\right)_{D^T} + (|u|^{k-2}u, v)\Big|_{t=0}^{t=T} = 0, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T).$$

Таким образом, (29) установлено.

Ввиду произвольности $T > 0$, равенство (61) запишем в виде

$$\left((|u|^{k-2}u)_\tau, v\right)_{D^t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha}\right)_{D^t} = 0, \quad t > 0. \tag{62}$$

Положив $v = u$ и воспользовавшись равенством

$$\int_0^t((|u|^{k-2}u)_\tau, u)d\tau = \frac{k-1}{k}\left(\|u(t)\|_k^k - \|\varphi\|_k^k\right),$$

получим тождество

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}, u_{x_\alpha})d\tau = \frac{k-1}{k}\|\varphi\|_k^k, \quad t \geq 0, \tag{63}$$

дифференцируя которое по t, выводим

$$\frac{k-1}{k}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}, u_{x_\alpha}) = 0, \quad t > 0. \tag{64}$$

Далее, применяя (4), из (63), (64) выводим (37), (38). □

3. Допустимая скорость убывания решения

Поскольку единственность решения задачи (1)–(3) не установлена, фактически будет получена оценка снизу только для построенного решения.

Доказательство теоремы 2. Сначала предположим, что область Ω является ограниченной, и докажем оценку (10) для галеркинских приближений.

Введем обозначения

$$G^M(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega} a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)(u^M_{x_\alpha})^2 d\mathbf{x}, \quad H^M(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega} A_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2) d\mathbf{x},$$

$$E^M(t) = \frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k + \frac{1}{2b^M}\|u^M(t)\|^2,$$

пользуясь (32), получим неравенства

$$\frac{p_1}{2} H^M(t) \leqslant G^M(t) \leqslant \widehat{b} H^M(t), \quad t \geq 0. \tag{65}$$

Перепишем равенства (45), (49) в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt} + G^M(t) = 0, \quad t > 0, \tag{66}$$

$$(k-1)\||u^M|^{(k-2)/2}u^M_t(t)\|^2 + \frac{1}{b^M}\|u^M_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{dH^M(t)}{dt} = 0, \quad t > 0. \tag{67}$$

Применяя интегральное неравенство Коши-Буняковского, устанавливаем соотношения

$$\left(\frac{dE^M(t)}{dt}\right)^2 = \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{b^M} + (k-1)|u^M|^{k-2}\right) u^M u^M_t d\mathbf{x}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{b^M}\|u^M(t)\|\|u^M_t(t)\| + (k-1)\|u^M(t)\|_k^{k/2}\||u^M|^{(k-2)/2}u^M_t(t)\|\right)^2.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для сумм, согласно (67), выводим

$$\begin{gathered}\left(\frac{dE^M(t)}{dt}\right)^2 \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{1}{b^M}\|u^M(t)\|^2 + (k-1)\|u^M(t)\|_k^k\right)\left(\frac{1}{b^M}\|u^M_t(t)\|^2 + (k-1)\||u^M|^{(k-2)/2}u^M_t(t)\|^2\right) \leqslant \\ \leqslant -\frac{k}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}\left(\frac{1}{2b^M}\|u^M(t)\|^2 + \frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k\right) = -\frac{k}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}E^M(t).\end{gathered} \tag{68}$$

Из (68), (66), (65) следуют неравенства

$$\frac{k}{2}E^M(t)\frac{dH^M(t)}{dt} \leqslant \frac{dE^M(t)}{dt}G^M(t) \leqslant \frac{p_1}{2}\frac{dE^M(t)}{dt}H^M(t),$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dH^M(t)}{dt}/H^M(t) \leqslant \frac{p_1}{k}\frac{dE^M(t)}{dt}/E^M(t).$$

Решая дифференциальное неравенство, применяя (65), получаем оценки

$$\frac{1}{\widehat{b}}G^M(t) \leqslant H^M(t) \leqslant H^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k}, \quad t > 0. \tag{69}$$

Далее, соединяя (66), (69), (65), выводим соотношения

$$\frac{dE^M(t)}{dt} \geq -\widehat{b}H^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k} \geq$$

$$\geq -\frac{2\widehat{b}}{p_1}G^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k},$$

которое перепишем в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt}/(E^M(t))^{p_1/k} \geq -\frac{2\widehat{b}}{p_1}G^M(0)/(E^M(0))^{p_1/k}.$$

Решая дифференциальное неравенство, получаем оценку

$$E^M(t) \geq E^M(0)\left(t\frac{2(p_1-k)\widehat{b}}{kp_1}G^M(0)/E^M(0)+1\right)^{-k/(p_1-k)}, \quad t>0. \tag{70}$$

При фиксированном $t \in [0,T]$ при $k \leq p_1$ в случае ограниченной области Ω последовательность $u^M(t)$ выборочно сильно сходится при $M \to \infty$ к $u(t)$ в пространстве $L_k(\Omega)$. Положим $b^M = M \max\{\|u^M(0)\|^2, \mathrm{mes}^{(k-2)/2}\Omega\}$, тогда

$$E^M(t) \leqslant \frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k + \frac{\mathrm{mes}^{(k-2)/2}\Omega}{2b^M}\|u^M(t)\|_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k-1}{k}\|u^M(t)\|_k^k + \frac{1}{2M}\|u^M(t)\|_k^2, \quad M=\overline{1,\infty},$$

и

$$\lim_{M\to\infty} E^M(t) \leqslant \frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k.$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$\lim_{M\to\infty} E^M(0) \geq \frac{k-1}{k}\lim_{M\to\infty}\|u^M(0)\|_k^k = \frac{k-1}{k}\|\varphi\|_k^k,$$

$$\lim_{M\to\infty} G^M(0) \leqslant \lim_{M\to\infty}\widehat{a}\sum_{\alpha=1}^n \|u^M_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} = \widehat{a}\sum_{\alpha=1}^n\|\varphi_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}.$$

После предельного перехода в (70) при $M \to \infty$ получим

$$\|u(t)\|_k^k \geq \|\varphi\|_k^k(1+C(\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)}. \tag{71}$$

Установим теперь оценку (71) для решения задачи (1)–(3) в неограниченной области Ω. Пусть $\Omega^{(l)} \subset \Omega$ — ограниченные подобласти такие, что $\Omega^{(l)} \subset \Omega^{(l+1)}$, $l=\overline{1,\infty}$, $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\Omega^{(l)} = \Omega$. Через $u^{(l)}$ обозначим решения в $\Omega^{(l)}$ с финитной начальной функцией ($\mathrm{supp}\ \varphi \subset \Omega^{(1)}$), можно считать эти решения продолженными нулем вне $\Omega^{(l)}$. Из неравенства (37) следует ограниченность последовательности в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ любого $T>0$, тогда, согласно лемме 4, существует счетное плотное множество $\{t_j\}_{j=1}^\infty \subset [0,T]$ такое, что $u^{(l)}$ выборочно сильно сходится в $L_k(\Omega^r)$ при каждом t_j и $r>0$. Благодаря оценке (9) для любого ε существует r, что при всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|u^{(l)}(t)\|_{k,\Omega_r}^k \leqslant \varepsilon.$$

Для $u^{(l)}$ справедлива оценка (71), тогда при $t_j \in (t-\delta, t)$

$$\|u^{(l)}(t_j)\|_{k,\Omega^r}^k \geq \|\varphi\|_k^k(1+C(\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)} - \varepsilon.$$

Пользуясь сильной сходимостью в $L_k(\Omega^r)$, переходим к пределу при $l \to \infty$, затем по $r \to \infty$ ($\varepsilon \to 0$). Далее, пользуясь непрерывностью функции $\|u(t)\|_k$, осуществляем предельный переход при $t_j \to t$. Таким образом, оценка (10) установлена в неограниченной области Ω. $\square$

4. Оценки сверху

В этом параграфе будут доказаны теоремы 1,3 из введения.

Лемма 5. *Если для $\mathbf{x} \in \Omega$ выполнено условие $x_\alpha \neq y_\alpha$ при некотором фиксированном $\alpha \in \overline{1,n}$, то для функции $u(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\left\| \frac{u(\mathbf{x})}{|x_\alpha - y_\alpha|} \right\|_{p_\alpha} \leqslant \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \|u_{x_\alpha}(\mathbf{x})\|_{p_\alpha}. \tag{72}$$

Доказательство. Воспользовавшись равенством

$$\left(\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} \right)'_{x_\alpha} = -\frac{p_\alpha - 1}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}},$$

интегрируя по частям, выводим

$$\int\limits_\Omega \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_\alpha}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} = -\frac{1}{p_\alpha - 1} \int\limits_\Omega |u(\mathbf{x})|^{p_\alpha} \frac{d}{dx_\alpha} \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \int\limits_\Omega |u|^{p_\alpha - 2} u u_{x_\alpha} \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} \leqslant \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \int\limits_\Omega \frac{|u|^{p_\alpha - 1}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha - 1}} |u_{x_\alpha}| d\mathbf{x}.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем соотношение

$$\int\limits_\Omega \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_\alpha}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} \leqslant \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \left(\int\limits_\Omega \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_\alpha}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} \right)^{(p_\alpha - 1)/p_\alpha} \left(\int\limits_\Omega |u_{x_\alpha}(\mathbf{x})|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \right)^{1/p_\alpha},$$

из которого следует (72). $\square$

Следствие 1. *Для функции $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ (Ω — область, расположенная вдоль оси Ox_s), при $0 < a < b$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{b} \|u\|_{p_s, \Omega_a^b} \leqslant \frac{p_s}{p_s - 1} \|u_{x_s}\|_{p_s}. \tag{73}$$

Доказательство. Возьмем $y_s = 0$, из неравенства (72) для $u(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ выводим

$$\left(\int\limits_{\Omega_a^b} |u(\mathbf{x})|^{p_s} d\mathbf{x} \right)^{1/p_s} \leqslant b \left(\int\limits_{\Omega_a^b} \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_s}}{|x_s|^{p_s}} d\mathbf{x} \right)^{1/p_s} \leqslant b \frac{p_s}{p_s - 1} \left(\int\limits_\Omega |u_{x_s}(\mathbf{x})|^{p_s} d\mathbf{x} \right)^{1/p_s}.$$

Отсюда следует, что если последовательность $u^k(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ сходится по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, то она сходится и в $L_{p_s}(\Omega_a^b)$. Выполняя предельный переход, установим неравенство (73) для $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\theta(x)$, $x > 0$, — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \geq r$, нулю при $x \leq R_0$, линейная при $x \in [R_0, 2R_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x) = \delta \nu(x) \theta(x), \quad x \in (2R_0, r), \tag{74}$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим, в частности, что
$$\theta'(x)=\frac{\theta(2R_0)}{R_0}=\frac{1}{R_0}\exp\left(-\delta\int\limits_{2R_0}^{r}\nu(\rho)d\rho\right),\quad x\in(R_0,2R_0).\tag{75}$$

Для любой функции $v(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega)$ из определения функции $\nu(\rho)$ следуют неравенства
$$\nu(\rho)\|v\|_{p_\alpha,\gamma_\rho}\leq\|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,\gamma_\rho},\quad \rho>0,\quad \alpha=1,n,$$
из которых выводим соотношения
$$\int\limits_{2R_0}^{r}\theta^{p_s}(\rho)\nu^{p_\alpha}(\rho)\|v\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\gamma_\rho}d\rho\leq\int\limits_{2R_0}^{r}\theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_\alpha}\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\gamma_\rho}d\rho,\quad \alpha=1,n.\tag{76}$$

Применяя (76) для любой функции $v\in C_0^\infty(\Omega)$ при $s\neq 1,n$ выводим
$$\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_s}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_s}_{p_s,\gamma_\rho}d\rho\leq\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho+\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_n}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_n}_{p_n,\gamma_\rho}d\rho\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{2R_0}^{r}\theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho+\int\limits_{2R_0}^{r}\theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_n}\|^{p_n}_{p_n,\gamma_\rho}d\rho.\tag{77}$$

Отметим, что неравенства (1) справедливы для любой функции $v\in\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ (см. следствие 1).

Пусть $\xi(\mathbf{x})$ липшицева неотрицательная срезающая функция. Положим в (62) $v=u\xi$, получим соотношение
$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u|^k\xi\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}d\mathbf{x}+\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^t}a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}(u\xi)_{x_\alpha}d\mathbf{x}d\tau=0.$$
Положим $\xi(\mathbf{x})=\theta^{p_s}(x_s)$, далее, применяя (4), получаем (с учетом того, что $\theta\varphi=0$)
$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant\tag{78}$$
$$\leqslant\widehat{a}\int\limits_{D^t}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}(\theta^{p_s}(x_s))'d\mathbf{x}d\tau\equiv\widehat{a}I^t.$$
Оценим интеграл
$$I^t=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega|u||u_{x_s}|^{p_s-1}p_s\theta'(x_s)\theta^{p_s-1}(x_s)d\mathbf{x}d\tau.$$
Используя неравенство Юнга, выводим
$$I^t\leqslant\varepsilon(p_s-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega|u_{x_s}|^{p_s}\theta^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+\frac{1}{\varepsilon^{p_s-1}}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}d\tau.\tag{79}$$

Выберем $\varepsilon=\dfrac{\overline{a}}{\widehat{a}}\dfrac{1}{p_s-1}$, соединяя (78), (79), выводим неравенство
$$\frac{k-1}{k}\int\limits_\Omega|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant C_1\int\limits_{D^t}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}d\tau.\tag{80}$$

Пользуясь (74), (75), нетрудно привести (80) к виду

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant \tag{81}$$

$$\leqslant C_1\frac{1}{R_0^{p_s}}\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu(\rho)d\rho\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{R_0}^{2R_0}}|u|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+$$

$$+C_1\delta^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2R_0}^r}|u|^{p_s}\nu^{p_s}(x_s)\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}d\tau=I_1^t+I_2^t.$$

Используя неравенство (73), применяя неравенство (37), выводим

$$I_1^t\leqslant C_2\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu(\rho)d\rho\right)\int\limits_0^t\|u_{x_s}\|_{p_s}^{p_s}d\tau\leqslant C_3\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k. \tag{82}$$

Применяя (1), получаем

$$I_2^t\leqslant C_1\delta^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2R_0}^r}\left(|u_{x_1}|^{p_1}\theta^{p_s}+|u_{x_n}|^{p_n}\theta^{p_s}\right)d\mathbf{x}d\tau. \tag{83}$$

Выбирая $\delta=\left(\dfrac{\overline{a}}{C_1}\right)^{1/p_s}$, соединяя (81) – (83), выводим

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_{k,\Omega_r}^k+\overline{a}\sum_{\alpha=2,\alpha\neq s}^{n-1}\int\limits_0^t\|u_{x_\alpha}(t)\|_{\Omega_r}^{p_\alpha}d\tau\leqslant C_3\exp\left(-\delta p_s\int\limits_1^r\nu(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k.$$

Неравенство (9) доказано. □

Следствие 2. *Если выполнено условие*

$$\mu_1=\inf\left\{\|g_{x_1}\|_{p_1}\;\middle|\;g(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega),\|g\|=1\right\}>0,$$

то для решения $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) справедлива оценка (13).

Доказательство. Из (38) следует, что

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k\leqslant-\frac{\overline{a}k}{k-1}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}\leqslant-\frac{\overline{a}k}{k-1}\|u_{x_1}\|_{p_1}^{p_1}\leqslant-\frac{\overline{a}k}{k-1}\mu_1^{p_1}\|u\|_k^{p_1}.$$

Решая это дифференциальное неравенство, получим оценку

$$\|u(t)\|_k\leqslant t^{-1/(p_1-1)}\left(\frac{(p_1-k)\overline{a}}{k-1}\mu_1^{p_1}\right)^{-1/(p_1-k)},$$

из которой следует неравенство (13). □

Доказательство теоремы 3. Выберем положительное число $r\geq 2R_0$. Согласно теореме 1, вводя обозначение $\varepsilon(r)=\mathcal{M}^k\exp\left(-k\kappa\int\limits_1^r\nu(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k$, имеем соотношение

$$\|u(t)\|_k^k\leqslant\|u(t)\|_{k,\Omega^r}^k+\varepsilon(r),\quad t\geq 0.$$

Из определения (11) следует, что

$$\|u(t)\|_k^k \leqslant \left(\mu_1^{-p_1}(r)\|u_{x_1}(t)\|_{p_1,\,\Omega^r}^{p_1}\right)^{k/p_1} + \varepsilon(r), \quad t \geq 0. \tag{84}$$

Обозначим через t_r точку интервала $[0,\infty)$ такую, что $E(t) = \|u(t)\|_k^k = \varepsilon(r)$. В случае, если $E(t) > \varepsilon(r)$ при любом $t \geq 0$, то считаем $t_r = \infty$. Ввиду монотонного невозрастания функции $E(t)$, для $t \in [0, t_r)$ справедливо неравенство $E(t) > \varepsilon(r)$, тогда соотношение (84) можно переписать в виде

$$(E(t) - \varepsilon(r))^{p_1/k} \leqslant \mu_1^{-p_1}(r) \sum_{\alpha=1}^{n} \| \, u_{x_\alpha}(t)\|_{p_\alpha,\,\Omega^r}^{p_\alpha}, \quad t \in [0, t_r). \tag{85}$$

Соединяя (38) с (85), выводим соотношение

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant -\frac{k\overline{a}}{k-1}\mu_1^{p_1}(r)\,(E(t) - \varepsilon(r))^{p_1/k}\,, \quad t \in (0, t_r). \tag{86}$$

Решая дифференциальное неравенство, получаем

$$(E(t) - \varepsilon(r))^{(p_1-k)/k} \leqslant \frac{k-1}{t\mu_1^{p_1}(r)(p_1-k)}, \quad t \in (0, t_r).$$

Подставив в последнее неравенство значение $\varepsilon(r)$, для $t \in (0, t_r)$ выводим

$$E(t) \leqslant C_1\,(t\mu_1^{p_1}(r))^{-k/(p_1-k)} + \mathcal{M}^k \exp\left(-k\kappa\int_1^r \nu(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k. \tag{87}$$

Отметим, что для $t \in [t_r, \infty)$ выполнено неравенство $E(t) \leqslant \varepsilon(r)$, и оценка (87) также справедлива.

В (87) положим $r = r(t)$ и воспользуемся определением (14) функции $r(t)$, в итоге получаем

$$E(t) \leqslant C_1\,(t\mu_1^{p_1}(r(t)))^{-k/(p_1-k)} + \mathcal{M}^k \exp\left(-k\kappa\int_1^{r(t)} \nu(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k \leqslant$$

$$\leqslant C_2\,(t\mu_1^{p_1}(r(t))^{-k/(p_1-k)}\,, \quad t > 0.$$

Таким образом, установлено неравенство (15). □

Определим функцию

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{p_1,\Omega^r} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{p_1,\Omega^r} = 1\right\}, \quad r > 0.$$

Тогда из определения функции $\lambda_1(r)$ следует неравенство

$$\lambda_1^{p_1}(r)\|g\|_{p_1,\Omega^r}^{p_1} \leqslant \|g_{x_1}\|_{p_1,\Omega^r}^{p_1}, \quad g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \quad r > 0.$$

Применяя неравенство Гельдера для $g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ r > 0$, выводим соотношения

$$\|g\|_{k,\Omega^r}^{p_1} \leqslant \|g\|_{p_1,\Omega^r}^{p_1}\,(\operatorname{mes}\Omega^r)^{(p_1-k)/k} \leqslant \lambda_1^{-p_1}(r)\,(\operatorname{mes}\Omega^r)^{(p_1-k)/k}\,\|g_{x_1}\|_{p_1,\Omega^r}^{p_1},$$

из которых следует неравенство

$$\lambda_1(r) \leqslant \mu_1(r)\,(\operatorname{mes}\Omega^r)^{(p_1-k)/(kp_1)}\,, \quad g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \quad r > 0. \tag{88}$$

5. Оценки сверху для областей вращения

Пусть $\mathcal{P}(\rho, z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \mid z < x < z + \rho,\ 0 < y < \rho\}$ — квадрат со стороной ρ и левой нижней вершиной в точке z оси абсцисс. Для положительной функции $f(x),\ x > 0$, символ $\Gamma^r(f)$ будет обозначать криволинейную трапецию

$$\Gamma^r(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \mid 0 < x < r,\ 0 < y < f(x)\}.$$

Через $\rho_*(r)$ обозначим сторону наибольшего квадрата $\mathcal{P}(\rho_*, z_*)$, содержащегося в $\Gamma^r(f)$. Справедлива оценка

$$\frac{c_1}{\rho_*(r)} \leqslant \lambda_1(r) \leqslant \frac{c_2}{\rho_*(r)}, \quad r > 0 \tag{89}$$

(доказательство аналогичного утверждения имеется в [30]).

Определим монотонно возрастающие функции

$$g(r) = (\operatorname{mes} \Omega^r)^{1/k} \rho_*^{p_1/(p_1-k)}(r), \quad r > 0; \tag{90}$$

$$\widetilde{r}(t): \quad \int\limits_1^{\widetilde{r}} \frac{dx}{f(x)} = \frac{\ln t}{\widetilde{\kappa}(p_1 - k)}, \quad t \geq 1. \tag{91}$$

Утверждение 1. *Пусть выполнено условие* (8)*, тогда существует положительное число* $\widetilde{M}$ *такое что, для решения* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *в цилиндрической области* $D(f) = (0, \infty) \times \Omega(f)[s]$ *с функцией* $f(x)$*, удовлетворяющей условию* (24)*, справедлива оценка* (26).

Доказательство. Соединяя (88) и (89), выводим

$$\mu_1(r) \geq c_1 (\operatorname{mes} \Omega^r)^{-(p_1-k)/(kp_1)} \rho_*{}^{-1}(r) = c_1 g^{-(p_1-k)/p_1}(r), \quad r > 0. \tag{92}$$

Зафиксируем $t \geq 1$, положим $r = \widetilde{r}(t)$. Подставляя (92), (23) в (87), пользуясь определением (91) функции $\widetilde{r}(t)$, получаем соотношения

$$\|u(t)\|_{k,\Omega(f)}^k \leqslant C_2 \exp\left(-k\widetilde{\kappa} \int\limits_1^{\widetilde{r}(t)} \frac{dx}{f(x)}\right) + C_2 g^k(\widetilde{r}(t)) t^{-k/(p_1-k)} \leqslant C_3 g^k(\widetilde{r}(t)) t^{-k/(p_1-k)},$$

откуда следует неравенство (26) с функцией $\widetilde{g}(t) = g(\widetilde{r}(t))$.

Покажем, что функция $\widetilde{g}(t)$ растет медленнее степенной функции. Из условия (24) следует, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует r_0 такое, что

$$\varepsilon \widetilde{\kappa}(p_1 - k) \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)} > \ln r, \quad r \geq r_0.$$

Тогда из определения (91) функции $\widetilde{r}(t)$ следует, что справедливо неравенство

$$\widetilde{r}(t) < t^\varepsilon, \quad t \geq t_0. \tag{93}$$

Далее, из определения (90), применяя формулу

$$\operatorname{mes} \Omega^r(f) = c_n \int\limits_0^r f^{n-1}(x) dx, \tag{94}$$

для $r > 0$ получаем неравенства

$$g(r) \leqslant C_4 \rho_*^{p_1/(p_1-k)}(r) \left(\int\limits_0^r f^{n-1}(x) dx\right)^{1/k} \leqslant C_4 r^{p_1/(p_1-k)+1/k} \max_{[0,r]} f^{(n-1)/k}(x).$$

Применяя следствие неравенства (24):

$$f(x) \leqslant x, \quad x \geq r_0,$$

выводим

$$g(r) \leqslant C_5(r_0) r^{p_1/(p_1-k)+n/k}, \quad r \geq r_0. \tag{95}$$

Соединяя (93), (95) устанавливаем, что функция $\widetilde{g}(t)$ растет медленнее любой степени t. □

Пусть существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\left\{f(z) \;\middle|\; z \in [x - f(x), x + f(x)]\right\} \leqslant \omega f(x), \quad x \geq 1. \tag{96}$$

Для монотонно неубывающей функции f, удовлетворяющей условию (96), справедливо неравенство

$$\omega^{-1} f(r) \leqslant \rho_*(r) \leqslant f(r), \quad r \geq r_0 = 1 + f(1). \tag{97}$$

В самом деле, ввиду монотонного неубывания функции $f(x)$ справедливо равенство $f(z_*) = r - z_* = \rho_*(r)$. Согласно (96) имеем

$$f(r) = \max_{[z_* - f(z_*), z_* + f(z_*)]} f(z) \leqslant \omega f(z_*),$$

откуда следует левое неравенство (97).

Согласно (94), (97), функция $g(r)$ может быть определена

$$g(r) = f^{p_1/(p_1-k)}(r) \left(\int\limits_0^r f^{n-1}(x) dx \right)^{1/k}, \quad r \geq r_0.$$

Пример 1. Для функции $f(x) = x^a,\ 0 \leqslant a < 1,\ x > 0$, можно определить функции

$$\widetilde{r}(t) = (\ln t)^{1/(1-a)}, \quad t \geq t_0, \quad g(r) = r^{\chi}, \quad r \geq r_0.$$

Тогда оценка (26) приобретает вид (27).

Пример 2. Для функции $f(x) = e,\ 0 < x < e,\ f(x) = x/\ln x,\ x \geq e$, находим

$$\widetilde{r}(t) = \exp(\varsigma (\ln t)^{1/2}), \quad t \geq t_0, \quad \varsigma > 0, \quad g(r) = r^{\sigma + 1/k} (\ln r)^{-\sigma}, \quad r \geq r_0.$$

При этом оценка (26) принимает вид (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гущин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка* // Тр. МИАН. Т. 126. 1973. С. 5–45.
2. Гущин А.К. *Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 101(143), №4(12). 1976. С. 459–499.
3. Ушаков В.И. *О поведении решений третьей смешеанной задачи для параболических уравнений второго порядка при $t \to \infty$* // Дифференц. уравнения. Т. 15, №2. 1979. С. 310–320.
4. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Матем. сб. Т. 111(153), №1. 1980. С. 95–115.
5. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 111(153), №4. 1980. С. 503–521.
6. Мукминов Ф.Х. *Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 23, №10. 1987. С. 1172–1180.
7. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 25, №3. 1989. С. 491–498.
8. Тедеев А.Ф. *Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка* // Дифференц. уравнения. Т.27, №10. 1991. С. 1795–1806.

9. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решения третьей смешанной задачи для квазилинейных параболических уравнений второго порядка в нецилиндрической области* // Изв. вузов. Математика. Т. 1. 1991. С. 63–73.
10. Биккулов И.М., Мукминов Ф.Х. *О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области* // Матем. сб. Т. 195, №3. 2004. С. 115–142.
11. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. Т. 191, №2. 2000. С. 91–131.
12. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Убывание решения первой смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка с младшими членами* // Фундамент. и прикл. матем. Т. 12, №4. 2006. С. 113-132.
13. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196, №7. 2005. С. 67–100.
14. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 74, №2. 2010. С. 109-130.
15. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами* // Матем. сб. Т. 201, №9. 2010. С. 3–26.
16. Дегтярев С.П., Тедеев А.Ф. *$L_1 - L_\infty$ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными* // Матем. сб. Т. 198, №5. 2007. С. 45—66.
17. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн. Т. 44, №10. 1992. С. 1441–1450.
18. N. Alikakos, R. Rostamian *Gradient estimates for degenerate diffusion equation. II* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. V. 91, №3-4. 1981/1982. P. 335–346.
19. Треногин В.А. *Функциональный анализ* М.: Наука. 1980. 496 с.
20. Лионс Ж.Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* М.: Мир. 1972. 596 с.
21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* М.: Наука. 1967. 736 с.
22. P.A. Raviart *Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. V. 5. 1970. P. 209-328.
23. A. Bamberger *Etude d'une equation doublement non lineaire* // J. Funct. Anal. V. 24. 1977. P. 148-155.
24. O. Grange, F. Mignot *Sur la resolution d'une equation et d'une inequation paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. V.11. 1972. P. 77-92.
25. H.W. Alt, S. Luckhaus *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z. V. 183. 1983. P. 311-341.
26. F. Bernis *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains* // Math. Ann. V. 279. 1988. P. 373-394.
27. M. Bendahmane, K.H. Karlsen *Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equation in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data* // Dept. of Math. University of Oslo Pure Mathematics. V. 13. 2003. P. 1-15.
28. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. Т. 3, №3. 2011. С.3–14.
29. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* М.: ИИЛ. Т. 2. 1954.
30. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для системы уравнений Навье-Стокса* Дис. докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН. 1994.

Кожевникова Лариса Михайловна,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: `kosul@mail.ru`

Алексей Александрович Леонтьев,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: `axe1erat@mail.ru`