ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 3-9.

УДК 519.2

О ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Э.М. АСАДУЛЛИН, Ф.С. НАСЫРОВ

Аннотация. В работе рассмотрена задача нелинейной фильтрации одномерных диффузионных процессов. Найдена структура наблюдаемого и ненаблюдаемого процессов. Показано, что решение задачи оптимальной фильтрации может быть сведено к решению задачи фильтрации, когда ненаблюдаемый процесс имеет более простую структуру, а наблюдаемый представляет собой винеровский процесс со случайным гладким сносом. Показана связь условного математического ожидания исходной задачи с ненормализованной фильтрационной плотностью редуцированной.

Ключевые слова: диффузионные процессы, задача оптимальной фильтрации, фильтрационная плотность

1. Введение

Пусть задано полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с потоком σ-алгебр $\{F_t\}$, $t \in [0,T]$, и независимые винеровские процессы $W_1(t)$, $W_2(t)$, $t \in [0,T]$, согласованные с потоком $\{F_t\}$. Рассмотрим диффузионный процесс $(x(t),\, y(t))$, удовлетворяющий следующей системе стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_0^t b^1(s, x(s), y(s))\ ds + \int_0^t \sigma^1(s, x(s), y(s))\ dW_1(s) + \\ + \int_0^t \sigma^2(s, x(s), y(s))\ dW_2(s), \end{aligned} \tag{1}$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t b^2(s, x(s), y(s))\ ds + \int_0^t \sigma^0(s, y(s)) dW_2(s), \tag{2}$$

где интегралы по винеровским процессам — стохастические интегралы Ито. Предполагается, что коэффициенты уравнений совместно непрерывны по (t, x, y), локально липшицевы и удовлетворяют условиям линейного роста по (x, y). Эти условия гарантируют существование единственного решения системы (1)–(2). Предполагается также, что функция $\sigma^0(s, y)$ отделена от нуля.

Пусть процесс $y(t)$ доступен наблюдениям, а процесс $x(t)$ – нет. Задача фильтрации диффузионных процессов заключается в нахождении условного математического ожидания $m_t = \mathbf{E}[f(x(t))|Y_t]$, где $Y_t = \sigma\{y(s), s \le t\}$ — σ-алгебра, порожденная значениями процесса $y(s)$ при $s \in [0,t]$, $f(x)$ – детерминированная функция, такая, что $\mathbf{E}|f(x(t))| < \infty$.

В работах Липцера Р.Ш., Ширяева А.Н. [1], Каллианпура Г. [2], Розовского Б.Л. [7] и многих других исследователей данная проблема (в многомерном случае) была сведена к задаче нахождения ненормализованной фильтрационной плотности, которая является решением стохастического дифференциального уравнения в частных производных. Известно (см. [7]), что условное математическое ожидание m_t можно вычислить по формуле

$$m_t = \mathbf{E}[f(x(t))|Y_t] = \int_R f(x)\ \pi(t, x)\ dx, \tag{3}$$

E.M. Asadullin, F.S. Nasyrov, About filtering problem of diffusive processes.

Поступила 22 марта 2011 г.

где $\pi(t,x) = \frac{1}{\int_R V(t,x)dx} V(t,x)$ и $V(t,x)$ – соответственно нормализованная и ненормализованная фильтрационные плотности, причем плотность $V(t,x)$ удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению Ито в частных производных

$$\begin{aligned} V(t,x) - V(0,x) &= \\ &= \int_0^t \left\{ [a(s,x,y(s))\ V(s,x)]''_{xx} - \left[b^1(s,x,y(s))\ V(s,x)\right]'_x \right\}\ ds + \\ &+ \int_0^t \left\{ h(s,x,y(s))\ V(s,x) - \left[\sigma^2(s,x,y(s))\ V(s,x)\right]'_x \right\} d\widetilde{W}(s), \\ &\qquad V(0,x) = \pi(0,x). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $a = \frac{1}{2}[(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2]$, $h = \frac{b^2}{\sigma^0}$, $\pi(0,x)$ — условная плотность $x(0)$ относительно Y_0, а $\widetilde{W}(t)$ — винеровский процесс, полученный в процессе применения теоремы Гирсанова с целью „уничтожения сноса“ в уравнении для наблюдаемой компоненты (2):

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma^0(s,y(s))\ d\widetilde{W}(s), \tag{5}$$

Нормализованная плотность $\pi(t,x)$, в свою очередь, также удовлетворяет некоторому стохастическому дифференциальному уравнению, которое уже нелинейно.

Решить стохастическое дифференциальное уравнение (4) ранее удавалось только в линейном случае (фильтр Калмана-Бьюси), в других отдельных случаях задачу пытались решить методами статистического моделирования, что представляет собой трудоемкую и сложную задачу. В работе [1] данную задачу мы свели к решению пары нестохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, был приведен пример построения решения задачи нелинейной фильтрации диффузионных процессов.

Цель данной работы состоит в том, чтобы упростить само уравнение фильтрации (4), заменив исходную задачу фильтрации (1)–(2) на более простую задачу, для которой стохастическое дифференциальное уравнение для ненормализованной фильтрационной плотности значительно проще, а обновляющий процесс совпадает с новым наблюдаемым процессом. Таким образом, данный результат позволяет упростить решение практических задач фильтрации шумов.

Введем необходимые обозначения. Множества $R = (-\infty, +\infty)$, $[0,T]$, $T > 0$ предполагаются наделенными σ-алгебрами борелевских множеств, которые соответственно обозначаются $B(R)$, $B([0,T])$; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега. Обозначим через $\mathbf{1}(A)$ индикатор множества A, то есть функцию, равную 1 на A и 0 вне A.

2. Структура процессов $x(t)$ и $y(t)$

Приведенные ниже рассуждения во многом базируются на структуре решений системы уравнений (1)–(2). Поэтому наша ближайшая цель – исследовать структуру процессов $x(t)$ и $y(t)$. Перепишем уравнения (1) и (2) со стохастическими интегралами Стратоновича

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_0^t \widetilde{b}^1(s,x(s),y(s))\ ds + \int_0^t \sigma^1(s,x(s),y(s)) * dW_1(s) + \\ + \int_0^t \sigma^2(s,x(s),y(s)) * dW_2(s), \end{aligned} \tag{6}$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \widetilde{b}^2(s,x(s),y(s))\ ds + \int_0^t \sigma^0(s,y(s)) * dW_2(s), \tag{7}$$

где

$$\widetilde{b}^1(s,x(s),y(s)) = b^1(s,x(s),y(s)) - \frac{1}{2}[\sigma^1(\sigma^1)'_x + \sigma_1(\sigma^2)'_x + \sigma_0(\sigma^2)'_y],$$

$$\widetilde{b}^2(s,x(s),y(s)) = b^2(s,x(s),y(s)) - \frac{1}{2}\sigma^0(s,y(s))(\sigma^0)'_y(s,y(s)).$$

Известно [5, 6], что нахождение решения данной системы может быть сведено к решению конечной цепочки систем дифференциальных уравнений, не содержащих стохастические интегралы. Поэтому будем искать решение системы (6)–(7) в виде

$$x(t) = \widetilde{\phi}(t,W_1(t),W_2(t)), \quad y(t) = \widetilde{\psi}(t,W_2(t)),$$

где $\widetilde{\phi}(t,u,v)$, $\widetilde{\psi}(t,u,v)$ – гладкие случайные функции. Имеем

$$\widetilde{\phi}'_u(s,u,W_2(s)) = \sigma^1(s,\widetilde{\phi}(s,u,W_2(s)),\widetilde{\psi}(s,W_2(s))), \tag{8}$$

$$\widetilde{\phi}'_v(s,W_1(s),v) = \sigma^2(s,\widetilde{\phi}(s,W_1(s),v),\widetilde{\psi}(s,v)), \tag{9}$$

$$\widetilde{\psi}'_v(s,v) = \sigma^0(s,\widetilde{\psi}(s,v)). \tag{10}$$

Из формулы (10) следует $\int \frac{d\widetilde{\psi}}{\sigma^0(s,\widetilde{\psi})} = v + C(s)$, значит, $\widetilde{\psi} = \psi(s,v+C(s))$, где $\psi(s,v)$ — уже детерминированная функция, которая определяется из последнего соотношения, а $C(s)$ — неизвестная случайная гладкая функция. Следовательно наблюдаемый процесс представляется в виде

$$y(s) = \psi(s,W_2(s)+C(s)). \tag{11}$$

Далее, проведя аналогичные рассуждения, из соотношения (8) получим

$$x(s) = \phi(s,y(s),W_1(s)+\widetilde{D}(s,y(s))), \tag{12}$$

где $\phi(s,y,u)$ — детерминированная функция, определяемая из равенства $\int \frac{d\phi}{\sigma^1(s,\phi,\psi)} = u + \widetilde{D}(s,\psi)$, здесь $\widetilde{D}(s,\psi)$ — неизвестная функция.

Для нахождения $\widetilde{D}(s,\psi)$ воспользуемся соотношением (9), для этого заметим, что в силу (11)

$$\widetilde{\phi}(s,W_1(s),v) = \phi(s,\psi(s,v+C(s)),W_1(s)+\widetilde{D}(s,\psi(s,v+C(s)))),$$

поэтому соотношение (9) с учетом формул (8) и (10) примет вид

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\phi}'_v(s,W_1(s),v) = \\
&\quad = \phi'_y(s,\psi(s,v+C(s)),W_1(s)+\widetilde{D}(s,\psi(s,v+C(s))))\sigma^0(s,\psi(s,v+C(s)))+ \\
&\quad + \sigma^1\left(s,\phi(s,\psi(s,v+C(s)),W_1(s)+\widetilde{D}(s,\psi(s,v+C(s)))),\psi(s,v+C(s))\right)\times \\
&\quad \times \widetilde{D}'_\psi\left(s,\psi(s,v+C(s))\right)\sigma^0(s,\psi(s,v+C(s))) = \\
&\quad = \sigma^2\left(s,\phi(s,\psi(s,v+C(s)),W_1(s)+\widetilde{D}(s,\psi(s,v+C(s)))),\psi(s,v+C(s))\right).
\end{aligned}$$

Положив в последнем равенстве $\psi = \psi(s,v+C(s))$, получим уравнение на неизвестную функцию $\widetilde{D}$:

$$\widetilde{D}'_\psi(s,\psi) = \\ = \frac{\sigma^2(s,\phi(s,\psi,W_1(s)+\widetilde{D}(s,\psi)),v) - \phi'_\psi(s,\psi,W_1(s)+\widetilde{D}(s,\psi))\sigma^0(s,\psi)}{\sigma^1(s,\phi(s,\psi,W_1(s)+\widetilde{D}(s,\psi)),\psi)\sigma^0(s,\psi)}. \tag{13}$$

Уравнение (13) позволяет найти неизвестную функцию $\widetilde{D}(s,\psi)$ с точностью до неизвестной случайной функции $P(s)$:

$$\widetilde{D}(s,\psi) = D(s,P(s),\psi), \tag{14}$$

где $D(s,p,\psi)$ находится из уравнения (13). В свою очередь, неизвестные функции $C(s)$ и $P(s)$ находятся (см. [6]) из соотношений

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}'_s(s,u,v)|_{u=W_1(s),v=W_2(s)} &= \widetilde{b}^1(s,x(s),y(s)),\\ \widetilde{\psi}'_s(s,v)|_{v=W_2(s)} &= \widetilde{b}^2(s,x(s),y(s)), \end{aligned} \tag{15}$$

которые представляют собой систему дифференциальных уравнений на $C(s)$ и $P(s)$. Действительно, с учетом формул (8)–(14) первое соотношение из (15) примет вид (для краткости записи $C=C(s)$, $P=P(s)$, $W_1=W_1(s)$, $W_2=W_2(s)$)

$$\begin{aligned} &\phi'_s(s,\psi(s,W_2+C),W_1+D(s,P,\psi(s,W_2+C)))+\\ &\quad+\phi'_y(s,\psi(s,W_2+C),W_1+D(s,P,\psi(s,W_2+C)))\times\\ &\quad\times\left[\psi'_s(s,W_2+C)+\sigma^0(s,\psi(s,W_2+C))\;C'\right]+\\ &\quad+\sigma^1(s,\phi(s,\psi(s,W_2+C),W_1+D(s,P,\psi(s,W_2+C)),\psi(s,W_2+C)))\times\\ &\quad\times\left[D'_s(s,P,\psi(s,W_2+C))+D'_p(s,P,\psi(s,W_2+C))P'+\right.\\ &\quad+D'_\psi(s,P,\psi(s,W_2+C))\,(\psi'_s(s,W_2+C)\;+\\ &\quad\left.+\;\sigma^0(s,\psi(s,W_2+C))\;C')\right]=\\ &\quad=\widetilde{b}^1(s,\phi(s,\psi(s,W_2+C),W_1+D(s,P,\psi(s,W_2+C))),\psi(s,W_2+C)). \end{aligned}$$

Аналогичным образом второе соотношение из (15) дает уравнение

$$\begin{aligned} &\psi'_s(s,W_2+C)+\sigma^0(s,\psi(s,W_2+C))C'=\\ &\quad=\widetilde{b}^2(s,\phi(s,\psi(s,W_2+C),W_1+D(s,P,\psi(s,W_2+C))),\psi(s,W_2+C)). \end{aligned}$$

Воспользовавшись последними соотношениями, приходим к задаче Коши

$$C'=\frac{1}{\sigma^0}[\;\widetilde{b}^2-\psi'_s\;], \tag{16}$$

$$P'=\frac{1}{\sigma^1 D'_p}\left[\widetilde{b}^1-\phi'_s-\phi'_y\widetilde{b}^2-\sigma^1 D'_s-\sigma^1 D'_\psi\widetilde{b}^2\right], \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \phi(s,\psi(s,W_2(s)+C(s)),W_1(s)+\widetilde{D}(s,P(s),\psi(s,W_2(s)+C(s))))|_{s=0}&=x_0,\\ \psi(s,W_2(s)+C(s))|_{s=0}&=y_0. \end{aligned}$$

Выше мы опустили аргументы у функций, входящих в уравнения (16) и (17).

Итак, система стохастических уравнений (1)–(2) может быть сведена к решению некоторой цепочки систем дифференциальных уравнений, уже не содержащих стохастические интегралы.

3. Редукция исходной задачи

Дальнейшие рассуждения будут связаны с формулами (11)–(12). Обозначим

$$\widetilde{y}(s)=W_2(s)+C(s),\quad \widetilde{x}(s)=W_1(s)+D(s,P(s),\psi(s,\widetilde{y}(s))), \tag{18}$$

тогда $y(s)=\psi(s,\widetilde{y}(s))$, $x(s)=\phi(s,\psi(s,\widetilde{y}(s)),\widetilde{x}(s))$. Следовательно исходный наблюдаемый процесс $y(s)$ представляет собой детерминированную функцию от процесса $\widetilde{y}(s)$.

Положим $Y_t=\sigma(y(s),s\le t)$, $\widetilde{Y}_t=\sigma(\widetilde{y}(s),s\le t)$.

Лемма 1. *При любом t справедливо равенство $Y_t=\widetilde{Y}_t$.*

Доказательство. Очевидно $Y_t \subseteq \widetilde{Y}_t$, остается проверить обратное включение. Действительно, в силу соотношения (10) и предположений, налагаемых на функцию σ^0, функция $\psi(s,v)$ при каждом s строго монотонна по переменной v. Поэтому для прообразов справедливо равенство $\{\omega : \widetilde{y}(s,\omega) \le x\} = \{\omega : y(s,\omega) = \psi(s,\widetilde{y}(s,\omega)) \le \psi(s,x)\} \in Y_t$.

Рассмотрим задачу фильтрации процессов $(\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$, где первая компонента ненаблюдаема и подлежит оцениванию, а вторая — наблюдаема. Из леммы 1 в силу формул (12) и (11) следует, что условное математическое ожидание m_t для исходной задачи (1)–(2) равно

$$m_t = \mathbf{E}[f(x(t))|Y_t] = \mathbf{E}[f(x(t))|\widetilde{Y}_t] = \mathbf{E}[f(\phi(s,\psi(s,\widetilde{y}(s)),\widetilde{x}(s)))|\widetilde{Y}_t], \tag{19}$$

здесь $f(x)$ и $\phi(s,y,u)$ – детерминированные функции. С другой стороны, ненормализованная условная плотность $\widetilde{V}(t,x)$ для задачи фильтрации $(\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$ существует, и условное математическое ожидание $\widetilde{m}_t$ находится по формуле

$$\widetilde{m}_t = \mathbf{E}[f(\widetilde{x}(t))|Y_t] = \frac{1}{\int_R \widetilde{V}(t,u)\,du} \int_R f(u)\,\widetilde{V}(t,u)\,du. \tag{20}$$

В дальнейшем нам понадобится одно свойство условных математических ожиданий.

Лемма 2. *Условное математическое ожидание m_t из формулы* (19) *равно*

$$m_t = \frac{1}{\int_R \widetilde{V}(t,u)\,du} \int_R f(\phi(t,\psi(t,\widetilde{y}(t)),u))\,\widetilde{V}(t,u)\,du. \tag{21}$$

Доказательство. Заметим, что для доказательства формулы (21) достаточно убедиться, что для любой детерминированной функции $g(t,v,u)$, для которой выполнено $\mathbf{E}|g(t,\widetilde{y}(t),\widetilde{x}(t))| < \infty$, справедливо равенство

$$\mathbf{E}[g(t,\widetilde{y}(t),\widetilde{x}(t))|Y_t] = \frac{1}{\int_R \widetilde{V}(t,u)\,du} \int_R g(t,\widetilde{y}(t),u)\,\widetilde{V}(t,u)\,du. \tag{22}$$

Действительно, взяв в последней формуле $g(t,v,u) = f(\phi(t,\psi(t,v),u))$, приходим к формуле (21).

Пусть $S \in B(R^+), U, V \in B(R)$, тогда, положив $f(u) = \mathbf{1}(u \in U)$ в формуле (20) и умножив обе части этой формулы на $\mathbf{1}((t,\widetilde{y}(t)) \in S \times V)$, в силу свойств условных математических ожиданий и аддитивности интеграла приходим к формуле (22) с функцией $g(t,v,u) = \mathbf{1}((t,v,u) \in S \times V \times U)$. Очевидно, что формула (22) остается справедливой для линейных комбинаций такого вида функций $g(t,y,u)$. Далее, воспользовавшись стандартными предельными переходами, получим, что наша формула (22) будет справедливой для произвольной ограниченной или знакопостоянной функции $g(t,v,u)$ такой, что $\mathbf{E}|g(t,\widetilde{y}(t),\widetilde{x}(t))| < \infty$.

Лемма 3. *Пусть $\widetilde{\pi}(t,x)$ — нормализованная фильтрационная плотность для задачи фильтрации $(\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$. Тогда при любых t и x справедливо равенство*

$$\pi(t,x) = \widetilde{\pi}(t,\phi^{-1}(t,y(t),x))\left(\sigma^1(t,x,Y(t))\right)^{-1}, \tag{23}$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $x = \phi(t,y(t),u)$ в интеграле из правой части соотношения (21), тогда в силу (8) имеем

$$dx = \sigma^1(t,\phi(t,y(t),u),y(t))du, \quad u = \phi^{-1}(t,y(t),x),$$

где $\phi^{-1}(t,y(t),x) = \int \frac{dx}{\sigma^1(t,x,y(t))} - D(t,P(t),y(t))$ — функция, при каждом t обратная к функции $\phi(t,y(t),x)$.

Значит, правая часть формулы (22) равна

$$m_t = \frac{1}{\int_R \widetilde{V}(t,u)\,du} \int_R f(x)\,\widetilde{V}(t,\phi^{-1}(t,y(t),x))\left(\sigma^1(t,x,y(t))\right)^{-1} dx.$$

С другой стороны, согласно (3), имеем $m_t = \int_R f(x)\pi(t,x)dx$, следовательно в силу призвольности функции $f(x)$ приходим к формуле (23).

Итак, для решения задачи фильтрации (1)–(2) достаточно найти ненормализованную фильтрационную плотность $\widetilde{V}(t,u)$ для задачи фильтрации $(\widetilde{x}(s),\widetilde{y}(s))$. Для того чтобы построить стохастическое дифференциальное уравнение для плотности $\widetilde{V}(t,u)$, необходимо знать уравнения, которым удовлетворяют процессы $\widetilde{x}(s)$ и $\widetilde{y}(s)$. Ввиду формул (18) и (16) в силу формулы Ито имеем

$$d\widetilde{y}(s) = B^2(s,\widetilde{x}(s),\widetilde{y}(s))ds + dW_2(s), \tag{24}$$

где

$$B^2(s,u,v) = \frac{1}{\sigma^0(s,\psi(s,v))}\Big[\, b^2(s,\phi(s,\psi(s,v),u)),\psi(s,v))- \\ -\frac{1}{2}\sigma^0(s,\psi(s,v))(\sigma^0)'_\psi(s,\psi(s,v)) - \psi'_s(s,v)\,\Big].$$

Чтобы вывести уравнение для ненаблюдаемой компоненты $\widetilde{x}(s)$, найдем стохастический дифференциал Ито функции $\widetilde{x}(s) = W_1(s) + D(s,P(s),\psi(s,W_2(s)+C(s)))$ и преобразуем полученное выражение с помощью формул (8)–(17), получим

$$d\widetilde{x} = dW_1 + D'_\psi\psi'_v dW_2 + \\ + \left\{D'_s + D'_p P'_s + D'_\psi\psi'_v C' + D'_\psi\psi'_s + \frac{1}{2}[D'_\psi\psi'_v]'_v\right\}ds = dW_1 + \widetilde{\sigma}^2 dW_2 + B^1 ds, \tag{25}$$

где

$$\widetilde{\sigma}^2(s,u,v) = \frac{\sigma^2(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v)) - \phi'_\psi(s,\psi(s,v),u)\sigma^0(s,\psi(s,v))}{\sigma^1(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v))};$$

$$B^1(s,u,v) = \frac{\widetilde{b}^1(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v))}{\sigma^1(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v))} - \\ - \frac{\phi'_s(s,\psi(s,v),u) + \phi'_\psi(s,\psi(s,v),u)\widetilde{b}^2(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v))}{\sigma^1(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v))} + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v)) - \phi'_\psi(s,\psi(s,v),u)\sigma^0(s,\psi(s,v))}{\sigma^1(s,\phi(s,\psi(s,v),u),\psi(s,v))}\right]'_v.$$

Итак, из формул (24) и (25) следует, что процессы $(\widetilde{x}(s),\widetilde{y}(s))$ являются решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_0 + \int_0^t B^1(s,\widetilde{x}(s),\widetilde{y}(s))ds + W_1(t) + \int_0^t \widetilde{\sigma}^2(s,\widetilde{x}(s),\widetilde{y}(s))dW_2(s), \tag{26}$$

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}_0 + \int_0^t B^2(s,\widetilde{x}(s),\widetilde{y}(s))ds + W_2(t), \tag{27}$$

где $\widetilde{x}_0 = \phi^{-1}(0,y_0,x_0)$, $\widetilde{y}_0 = \psi^{-1}(0,y_0)$. Значит, мы можем для задачи фильтрации процессов $(\widetilde{x}(s),\widetilde{y}(s))$ построить уравнение вида (4) для ненормализованной фильтрационной плотности, при этом из формулы (5) вытекает, что наблюдаемый процесс $\widetilde{y}(s)$ совпадает с $\widetilde{W}(t)$.

Теорема 1. *В предположениях, сделанных выше, условное математическое ожидание m_t для задачи фильтрации* (1)–(2) *может быть найдено из соотношения* (21), *где $\widetilde{V}(t,x)$ — ненормализованная фильтрационная плотность для задачи* (26)–(27), *при этом нормализованные фильтрационные плотности для указанных выше задач фильтрации связаны равенством* (23).

В заключение отметим, что решение задачи фильтрации для $(\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$ позволяет решить аналогичную задачу не только для исходных процессов $(x(s), y(s))$, но и для некоторого класса диффузионных процессов, которые могут быть представлены в виде соотношений (11) и (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асадуллин Э. М., Насыров Ф. С. *О решении задачи нелинейной фильтрации одномерных диффузионных процессов* // Вестник УГАТУ. 2009. Т. 12, № 1. С. 161–165.
2. Каллианпур Г. *Стохастическая теория фильтрации.* М.: Наука, 1987. 320 с.
3. Кузнецов Д. Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения.* 4-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 816с.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. *Статистика случайных процессов* М.: Наука, 1974. 696 с.
5. Насыров Ф. С. *Симметричные интегралы и стохастический анализ* // Теория вероятностей и ее применение. 2006. Т. 51, № 3. С. 496–517.
6. Насыров Ф. С. *О решении систем стохастических дифференциальных уравнений с многомерным винеровским процессом* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15, вып. 4. С. 643–644.
7. Розовский Б. Л. *Эволюционные стохастические системы.* М.: Наука, 1983. 208 с.
8. H. Kunita *Nonlinear filtering problems I. Bayes formulae and innovations.* 2009.
9. H. Kunita *Nonlinear filtering problems II. Associated stochastic partial differential equations.* 2009.
10. M. Zakai *On the optimal filtering of diffusion processes* // Z.W. 11, 1969. P. 230–243.

Эльдар Маратович Асадуллин,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: mrsine@mail.ru

Фарит Сагитович Насыров,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: farsagit@yandex.ru