Уфимский математический журнал. Том 1. № 1 (2009). С. 69-76.

УДК 519.2

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЕ ТАНАКИ

Ф.С. НАСЫРОВ

Аннотация. Для произвольной непрерывной слева предсказуемой функции в случае винеровского процесса найдена обобщенная формула Танаки.

Ключевые слова: Винеровский процесс, симметричный интеграл, расширенный симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича, стохастический интеграл Ито, формула Танаки.

1. Введение

Известно, что одним из ключевых инструментов стохастического исчисления является формула Ито, которую можно рассматривать как формулу, связывающую стохастические интегралы Стратоновича и Ито. В настоящей статье с помощью разработанной в работах [5], [6] техники доказывается обобщенная формула Танаки для непрерывных слева предсказуемых интеграндов.

Введем необходимые обозначения. Множества $R=(-\infty,+\infty)$, $R^+=[0,+\infty)$, $[0,t]$, $t>0$ предполагаются наделенными σ-алгебрами борелевских множеств, которые соответственно обозначаются B, B^1, B_t; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега $\lambda(.)$. Для непрерывной функции $X(s)$, $s\in R^+$ положим $M(t)=\max\{X(s):s{\in}[0,t]\}$, $m(t)=\min\{X(s):s{\in}[0,t]\}$.

Обозначим через $sgn(x)$ знак вещественного числа x, $sgn(0)=0$, а $\mathbf{1}(A)$ обозначает индикатор множества A, то есть функцию, равную 1 на A и 0 вне A; далее всюду $a\wedge b=\min(a,b), a\vee b{=}\max(a,b)$, $\kappa(v,a,b)=sgn(b-a)\mathbf{1}(a\wedge b<v<a\vee b)$.

Приведем некоторые сведения о локальных временах и симметричных интегралах и связанных с ними конструкциях.

1. Пусть $X(s)$, $s\in R^+$, – борелевская вещественнозначная функция, $\tau(.)$ – мера на σ-алгебре B^1 борелевских множеств $[0,+\infty)$. Введем меры $\nu_T(D)=\int_T \mathbf{1}(X(s){\in}D)\tau(ds)$, $D\in B$, $T\in B^1$, тогда $\nu_T(D)$ есть "количество времени", проводимое функцией $X(s)$, $s\in T$, в множестве D. Производная Радона-Никодима $\alpha_\tau(T,u)\equiv\alpha_T(u)=\frac{d\nu_T}{d\lambda}(u)$, $u\in R$, если она существует, называется *локальным временем* функции $X(s)$. Оказывается (см. [10]), существует версия локального времени $\alpha_\tau(t,u)=\alpha_\tau([0,t],u)$, которая измерима как функция двух переменных и является при каждом u неубывающей непрерывной справа функцией по t; меру на B^1, которую она порождает, мы будем обозначать $\alpha_\tau(ds,u)$.

Из определения локального времени следует (см. [10]), что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(s,u)$ справедливо равенство

$$\int_0^t f(s,X(s))\tau(ds)=\int_R\int_0^t f(s,u)\alpha_\tau(ds,u)du. \tag{1}$$

Говорят, что случайный процесс обладает локальным временем, если почти все его траектории имеют локальное время. В случае $\tau(ds)=ds$ положим $\alpha_\tau(t,u)\equiv\alpha(t,u)$. Ряд

Nasyrov F.S. Extended Tanaka formula.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-97031).

Поступила 14 марта 2009 г.

общих сведений о локальных временах детерминированных функций и случайных процессов приведен в работах [1] – [4] ,[8] – [10].

2. Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in R^+$ и $f(s,u)$, $s \in R^+$, $u \in R$ удовлетворяют *условию* (S) *на* $[0,t]$, $t \in R^+$, если:
(a) Функция $X(s)$, $s \in [0,t]$ непрерывна;
(b) При п.в. u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$ имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0,t]$;
(c) При п.в. u справедливо равенство $\int_0^t \mathbf{1}(X(s) = u)|f|(ds,u) = 0$, где при каждом u функция $|f|(s,u)$ есть полное изменение функции $f(p,u)$ по переменной p на отрезке $[0,s]$;
(d) Полное изменение $|f|(t,u)$ функции $f(s,u)$ по переменной s на отрезке $[0,t]$ локально суммируемо по u.

3. Пусть функции $X(s)$ и $f(s,u)$ удовлетворяют условию (S) на отрезке $[0,t]$. Рассмотрим разбиения $T_n, n \in N$, отрезка $[0,t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} \le ... \le t_k^{(n)} \le ... \le t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$ такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max_k \left| t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s), s \in [0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Положим
$\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Симметричным интегралом (см.[5], [7]) называется

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s)) ds \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$. Симметричный интеграл в случае винеровского процесса $X(s)$ является (см. [5], [7]) детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича.

4. Пусть функции $X(s)$ и $f(s,u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0,t]$, тогда (см. [7]) симметричный интеграл $\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s)$ существует и может быть вычислен по формуле:

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) =$$
$$= \int_{X(0)}^{X(t)} f(t,v)dv - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v, X(0), X(\tau)) f(d\tau, v) dv. \qquad (2)$$

В случае, когда $X(s) = X(s,\omega)$ – стандартный винеровский процесс, а детерминированная функция $h(s,u)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial u} h(s,u)$, *формулу Ито* можно записать (см. [7]) в виде

$$\int_0^t h(s,X(s)) * dX(s) = \int_0^t h(s,X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} h(s,X(s)) ds,$$

где первое слагаемое в правой части равенства есть стохастический интеграл Ито.

5. Пусть $X(s), s \in [0,t]$, – непрерывная функция с локальным временем $\alpha(s,u)$, а $f(s), s \in [0,t]$, – суммируемая функция. С функцией $f(s)$ можно связать некоторые специальным образом построенные функции, зависящие только от функций $X(s)$ и $\xi(s) = \alpha(s, X(s))$ и эквивалентные ей по мере Лебега, например,

$$f(s) = f_t^+(\xi(s), X(s))$$

при п.в. $s \in [0,t]$, где $f_t^+(x,u) = f(\gamma(x,u))\mathbf{1}(\alpha(t,u) \ge x)$, $\gamma(x,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) > x\}$. Функция $f_t^+(x,u)$, также как и функция $f_t^+(\xi(s), X(s))$, называется *представлением функции* $f(s)$ на отрезке $[0,t]$. Другое представление функции $f(s)$ может быть получено с помощью непрерывного слева варианта функции $\gamma^*(z,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) \ge z\}$, оно имеет вид

$f_t^*(x,u) = f(\gamma^*(x,u))\mathbf{1}(\alpha(t,u) \geq x)$. Комбинируя эти два представления, можно получить различные представления функции $f(s)$.

Пусть $X(s)$, $s \in R^+$ – непрерывная функция с совместно непрерывным локальным временем $\alpha(t,u)$. *Расширенным симметричным интегралом* называется (см. [5], [7]) интеграл по специальным образом построенному заряду по одному из представлений функции $f(s)$, например:

$$(E)\int_0^t f_t^+(\xi(s), X(s)) * dX(s) \equiv \int_{R^+\times R} f_t^+(x,u)G_t(dxdu),$$

где $G_t(dxdu)$ – заряд, однозначно определяющийся своими значениями на "прямоугольниках" $A \times B$:

$$G_t(A\times B) \equiv \int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}((\alpha(t,u),u) \in A\times B)du-$$

$$-\frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}((\alpha(t,u),u) \in (A\setminus\{0\})\times B)sgn(u-X(0))du+$$

$$+\frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}(u\in B, \alpha(t,u)>0)sgn(u-X(0))du\mathbf{1}(0\in A).$$

Расширенный симметричный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\int_{R^+\times R} f(x,u)G_t(dxdu) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(\alpha(t,u),u)du-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{m(t)}^{M(t)} [f(\alpha(t,u),u) - f(0,u)]sgn(u-X(0))du.$$

Можно показать, что расширенный симметричный интеграл для определенного класса интеграндов *есть несобственный симметричный интеграл*, то есть представляется в виде предела симметричных интегралов.

2. Основной результат

Пусть на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) фиксирован стандартный винеровский процесс $W(s)$, $s \in R^+$, $W(0) = 0$, с локальным временем $\alpha(t,u)$, $t \in R^+$, $u \in R$, совместно непрерывным с вероятностью 1 по переменным (t,u). Обозначим при каждом t через F_t естественную σ-алгебру, порожденную случайными величинами $W(s)$, $s \in [0,t]$. В дальнейшем в этом параграфе мы будем, как правило, опускать выражения "с вероятностью 1" и "почти наверное", считая, что имеем дело с типичной траекторией винеровского процесса. В работе [6] автором был доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $W(s)$, $s \in R^+$ – стандартный винеровский процесс, $g(s), s \in R^+$ – произвольная непрерывная слева предсказуемая функция, для которой конечны стохастический интеграл Ито $\int_0^t g(s)\ dW(s)$ и расширенный симметричный интеграл $\int_{R^+\times R} g(\gamma^*(x,v))\ G_t(dxdv)$.*

Тогда справедлива формула

$$\int_0^t g(s)\ dW(s) = \int_{R^+\times R} g(\gamma^*(x,v))\ G_t(dxdv)-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{2\varepsilon}[g_n(s,W(s)+\varepsilon) - g_n(s,W(s)-\varepsilon)]ds, \tag{3}$$

где $g_n(s,u) = g(s,u)\mathbf{1}(|g(s,u)| \leq n) + n\mathbf{1}(g(s,u) > n) - n\mathbf{1}(g(s,u) < -n)$, $g(s,v) = g(\gamma^*(\alpha(s,v),v))$, а оба предела в правой части формулы (3) есть пределы по вероятности и они существуют.

Естественно, можно попытаться осуществить вывод из формулы (3) формулу обобщенной формулы Танаки, построенной ниже в теореме 2, но для этого необходимы значительные усилия. Целью данной работы является прямой вывод обобщенной формулы Танаки и, как следствие, вывод нового варианта обобщенной формулы Ито.

Наша ближайшая цель – построить обобщенную формулу Танаки.

Теорема 2. *Пусть $g(s) = g(s, \omega)$, $s \in R^+$ – непрерывная слева предсказуемая функция такая, что с вероятностью 1 конечны интегралы*

$$\int_0^t g(s)\alpha(ds, v) \text{ и } \int_0^t g(s)\mathbf{1}(W(s) > v)dW(s).$$

Тогда справедлива обобщенная формула Танаки

$$g(t)\int_{W(0)}^{W(t)} \mathbf{1}(u > v)du - \lim_{n\to+\infty}\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t\int_{W(0)}^{W(s)} \mathbf{1}(u > v)du\ dg_h^{(n)}(s) =$$

$$= \int_0^t g(s)\mathbf{1}(W(s) > v)dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\alpha(ds, v), \tag{4}$$

где $g_h^{(n)}(s) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s g^{(n)}(\tau)\mathbf{1}(\tau > 0)d\tau$,

$$g^{(n)}(\tau) = g(\tau)\mathbf{1}(-n \le g(\tau) \le n) + n\mathbf{1}(g(\tau) > n) - n\mathbf{1}(g(\tau) < -n),$$

оба предела в в левой части формулы (4) есть пределы по вероятности и они существуют.

Доказательство. Рассмотрим формулу Танаки (см.[1], [8]), левую часть которой можно записать в виде симметричного интеграла:

$$\int_0^t \mathbf{1}(W(s) > v) * dW(s) = \int_0^t \mathbf{1}(W(s) > v)dW(s) + \frac{1}{2}\alpha(t, v). \tag{5}$$

Отметим, что формула (5) справедлива для почти всех реализаций процесса $W(s)$ и любых $t \in R^+$, $v \in R$. Пусть $g(s)$, $s \in R^+$, $g(0) = 0$ – ограниченная неубывающая непрерывная предсказуемая функция, тогда в силу монотонности функции $g(s)$ и определения симметричного интеграла для любого $x \ge 0$ справедливы тождества

$$\mathbf{1}(g(t) \le x)\left(\int_0^t \mathbf{1}(W(s) > v) * dW(s) - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \mathbf{1}(W(s) > v, g(s) \le x) * dW(s)\right) = 0,$$

$$\mathbf{1}(g(t) \le x)\left(\alpha(t, v) - \int_0^t \mathbf{1}(g(s) \le x)\alpha(ds, v)\right) = 0.$$

Отметим (см. [2]), что стохастический интеграл Ито можно рассматривать как предел с вероятностью 1 соответствующих ему частичных сумм, если шаг разбиения стремится к нулю с достаточно большой скоростью. Поэтому при условии $g(t) \le x$ выражение

$$\int_0^t \mathbf{1}(W(s) > v)dW(s) - \int_0^t \mathbf{1}(W(s) > v, g(s) \le x)dW(s)$$

равно нулю. Следовательно

$$\mathbf{1}(g(t) \le x)\left(\int_0^t \mathbf{1}(W(s) > v, g(s) \le x) * dW(s) - \right.$$

$$
-\int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v, g(s)\le x)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}(g(s)\le x)\alpha(ds,v)\Bigg) = 0. \qquad (6)
$$

Пусть $t^* = t^*(x) = \min\{s : g(s) = x\}$ – марковский момент, положим $t = t^*$ в формуле (5). Умножим обе части этой формулы на $\mathbf{1}(g(t) > x)$, тогда ввиду свойств марковских моментов, стохастических интегралов Ито и определения симметричного интеграла получим

$$
\mathbf{1}(g(t)>x)\Bigg(\int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v, g(s)\le x) * dW(s) -
$$

$$
-\int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v, g(s)\le x)dW(s) -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}(g(s)\le x)\alpha(ds,v)\Bigg) = 0. \qquad (7)
$$

Сложив формулы (6) и (7), имеем:

$$
\int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v, g(s)\le x) * dW(s) - \int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v, g(s)\le x)dW(s) -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}(g(s)\le x)\alpha(ds,v) = 0.
$$

Вычитая из формулы (5) последнюю формулу, приходим к соотношению

$$
\int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v, g(s)> x) * dW(s) - \int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v, g(s)> x)dW(s) -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}(g(s)> x)\alpha(ds,v) = 0.
$$

Вычислив симметричный интеграл в правой части согласно формуле (2) и интегрируя по переменной $x \in [0, +\infty)$ последнее равенство, в силу теоремы "типа Фубини"для итовских интегралов (см.[1], лемма 4.1), получим следующий вариант формулы типа Танаки:

$$
g(t)\int_{W(0)}^{W(t)} \mathbf{1}(u>v)du - \int_0^t \int_{W(0)}^{W(\tau)} \mathbf{1}(u>v)du dg(\tau) =
$$

$$
= \int_0^t \mathbf{1}(W(s)>v)g(s)dW(s) +
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)\alpha(ds,v). \qquad (8)
$$

Поскольку любая ограниченная неубывающая непрерывная слева предсказуемая функция $g(s)$, $g(0) = 0$ может быть представлена как поточечный предел предсказуемых функций вида $g(s) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s g(\tau)\mathbf{1}(\tau > 0)d\tau$, то в силу теорем о предельных переходах под знаком интегралов Стилтьеса и Ито можно в формуле (8) считать функцию $g(s)$ предсказуемой непрерывной слева неубывающей функцией, $g(0) = 0$.

Далее заметим, что произвольная случайная функция ограниченной вариации представляется в виде разности двух монотонных функций, причем, если она предсказуема и непрерывна слева, то нетрудно убедиться, что таковыми являются и монотонные функции, входящие в разность. Поэтому в силу аддитивности последней формулы можно считать функцию $g(s)$ непрерывной слева функцией с конечным изменением, а условие $g(0) = 0$ в силу равенства (5) может быть опущено.

Пусть теперь $g(s) = g(s,\omega)$, $s \in R^+$, $g(0) = 0$ – непрерывная слева ограниченная предсказуемая функция, тогда функция

$$g_h(s) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^{s} g(\tau)\mathbf{1}(\tau > 0)d\tau$$

есть абсолютно непрерывная функция, поэтому, подставляя $g_h(s)$ в формулу (8), получим

$$\int_0^t g_h(s)\mathbf{1}(W(s) > v) * dW(s) = \int_0^t g_h(s)\mathbf{1}(W(s) > v)dW(s) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_h(s)\alpha(ds, v). \qquad (9)$$

Перейдем к пределу по вероятности при $h \downarrow 0$ в последнем равенстве. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем:

$$\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t g_h(s)\alpha(ds, v) = \int_0^t g(s)\alpha(ds, v).$$

Далее, поскольку ввиду той же теоремы Лебега

$$\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t \left(\frac{1}{h}\int_{s-h}^{h}[g(\tau) - g(s)]d\tau\right)^2 ds = 0,$$

то существует предел по вероятности стохастических интегралов

$$\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t g_h(s)\mathbf{1}(W(s) > v)dW(s) = \int_0^t g(s)\mathbf{1}(W(s) > v)dW(s).$$

Так как ввиду формулы для вычисления симметричных интегралов

$$\int_0^t g_h(s)\mathbf{1}(W(s) > v) * dW(s) = g_h(t)\int_{W(0)}^{W(t)}\mathbf{1}(u > v)du -$$
$$-\int_0^t\int_{W(0)}^{W(s)}\mathbf{1}(u > v)du\; dg_h(s),$$

то, согласно приведенным выше рассуждениям, существует предел по вероятности

$$\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t\int_{W(0)}^{W(s)}\mathbf{1}(u > v)du\; dg_h(s).$$

Таким образом, мы пришли к формуле

$$g(t)\int_{W(0)}^{W(t)}\mathbf{1}(u > v)du - \lim_{h\downarrow 0}\int_0^t\int_{W(0)}^{W(s)}\mathbf{1}(u > v)du\; dg_h(s) =$$
$$= \int_0^t g(s)\mathbf{1}(W(s) > v)dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\alpha(ds, v).$$

Заметим, что в силу формулы Танаки предположение $g(0) = 0$ может быть опущено. Если $g(s)$ – любая случайная функция, удовлетворяющая предположениям теоремы 2, то для любого $M > 0$ для функция $g_h^{(n)}(s)$ в силу приведенных выше рассуждений справедливо последнее соотношение, поэтому, подставляя функцию $g_h^{(n)}(s)$ в последнюю формулу и переходя затем в этой формуле к пределу по вероятности при $n \to \infty$, воспользовавшись теоремами о предельных переходах в интеграле Лебега и стохастическом интеграле, получим формулу (4).

Выделим тот факт, что в приведенной выше обобщенной формуле Ито (3) основная трудность состоит в вычислении пределов в правой части этой формулы. В доказанной ниже теореме 3 эта проблема сводится к вычислению пределов интегралов типа Стилтьеса.

Теорема 3. *Пусть* $g(s) = g(s, \omega)$, $s \in R^+$ *– непрерывная слева предсказуемая функция, а* $f(u)$, $u \in R$ *– непрерывно дифференцируемая функция такие, что с вероятностью 1 конечны интегралы*

$$\int_0^t g(s)f'(W(s))ds \quad \text{и} \quad \int_0^t g(s)f(W(s))dW(s).$$

Тогда справедлива обобщенная формула Ито

$$g(t)\int_{W(0)}^{W(t)} f(u)du - \lim_{n\to+\infty}\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t \int_{W(0)}^{W(s)} f(u)du\ dg_h^{(n)}(s) =$$

$$= \int_0^t g(s)f(W(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)f'(W(s))ds, \tag{10}$$

где $g_h^{(n)}(s) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s g^{(n)}(\tau)\mathbf{1}(\tau > 0)d\tau$,
$g^{(n)}(\tau) = g(\tau)\mathbf{1}(|g(\tau)| \le n) + n\mathbf{1}(g(\tau) > n) - n\mathbf{1}(g(\tau) < -n)$, *оба предела в в левой части формулы (10) есть пределы по вероятности и они существуют.*

Доказательство. Пусть фиксируется непрерывная слева ограниченная предсказуемая функция $g(s) = g(s, \omega)$, $s \in R^+$, $g(0) = 0$. Заметим, что при доказательстве предыдущей теоремы нами была получена формула (9), где $g_h(s) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s g(\tau)\mathbf{1}(\tau > 0)d\tau$. Предположим сначала, что функция $f(u)$, $u \in R$ есть ограниченная снизу монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция, и положим в этой формуле $v = f^{-1}(u) = \inf\{v : f(v) > u\}$, тогда $\mathbf{1}(W(s) > f^{-1}(u)) = \mathbf{1}(f(W(s)) > u)$. Поэтому справедливо равенство

$$\int_0^t g_h(s)\mathbf{1}(f(W(s)) > u) * dW(s) = \int_0^t g_h(s)\mathbf{1}(f(W(s)) > u)dW(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_h(s)\alpha(ds, f^{-1}(u)). \tag{11}$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по $u \in [a, +\infty)$, тогда в силу формулы для вычисления симметричного интеграла и теоремы Фубини левая часть полученного равенства имеет вид

$$\int_0^t g_h(s)[f(W(s)) - a]^+ * dX(s),$$

где $[f(W(s)) - a]^+ = \max(f(W(s)) - a, 0)$, а ввиду “стохастической” теоремы Фубини

$$\int_a^{+\infty}\int_0^t g_h(s)\mathbf{1}(f(W(s)) > u)dW(s)du = \int_0^t g_h(s)[f(W(s)) - a]^+ dW(s).$$

Сделав замену переменных и воспользовавшись формулой (1) для вычисления интегралов с локальными временами для процесса $W(s)$, получим

$$\int_a^{+\infty}\int_0^t g_h(s)\alpha(ds, f^{-1}(u))du = \int_0^t g_h(s)f'(W(s))\ \mathbf{1}(f(W(s)) > a)ds.$$

Таким образом, из соотношения (11) мы получили равенство

$$\int_0^t g_h(s)[f(W(s)) - a]^+ * dW(s) =$$

$$= \int_0^t g_h(s)[f(W(s)) - a]^+ dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g_h(s)f'(W(s))\ \mathbf{1}(f(W(s)) > a)ds. \tag{12}$$

Чтобы упростить эту формулу, положим $a < \inf_{u\in R}(f(u))$ и заметим, что для гладких предсказуемых функций $g(s)$ справедливо соотношение $\int_0^t g(s) * dW(s) = \int_0^t g(s)dW(s)$. В этом, например, можно убедиться, если перейти к пределу при $v \to -\infty$ по вероятности в формуле (8). Тогда из формулы (12) получим

$$\int_0^t g_h(s) f(W(s)) * dW(s) = \int_0^t g_h(s) f(W(s)) dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g_h(s) f'(W(s)) ds. \qquad (13)$$

Ввиду аддитивности этой формулы, она будет справедливой для произвольных ограниченных непрерывно дифференцируемых функций $f(u)$. Аппраксимируя произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $f(u)$ последовательностью ограниченных непрерывно дифференцируемых функций $f_n(u)$, нетрудно убедиться, что формула (13) будет справедлива для произвольных непрерывно дифференцируемых функций $f(u)$.

Перейдем к пределу по вероятности при $h \to 0$ в равенстве (13), тогда правая часть полученного соотношения ввиду непрерывности слева функции $g(s)$ и стандартных теорем о предельных переходах в лебеговских и стохастических интегралах Ито равна

$$\int_0^t g(s) f(W(s)) dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g(s) f'(W(s)) ds.$$

Следовательно существует предел по вероятности при $h \to 0$ в левой части полученного соотношения, который, с учетом формулы для вычисления симметричных интегралов, равен

$$g(t)\int_{W(0)}^{W(t)} f(u)du - \lim_{h\downarrow 0}\int_0^t \int_{W(0)}^{W(s)} f(u)du\ dg_h(s).$$

Если $g(s)$, $s \in R^+$, – произвольная случайная функция, удовлетворяющая всем предположениям теоремы 3, то мы можем воспользоваться рассуждениями, которые применили в аналогичной ситуации при переходе от ограниченной к неограниченной функции $g(s)$ при доказательстве теоремы 2 и завершить доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватанабе С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* М.: Наука. 1986. 448 с.
2. Маккин Г. *Стохастические интегралы.* М.: Мир. 1972. 184 с.
3. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука. 1974. 480 с.
4. Насыров Ф.С. *О локальных временах для функций и случайных процессов 1* // Теория вероятн. и ее примен. Т. 40. в. 4. 1995. С. 798-812.
5. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике* //Труды МИРАН. Т. 237. 2002. С. 265-278.
6. Насыров Ф.С. *Обобщенная формула Ито и потраекторные итовские интегралы* // Вестник УГАТУ. Т. 6. Вып. 1. 2005. С. 33-40.
7. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и стохастический анализ* // Теория вероятн. и ее примен. Т. 51. Вып. 3. 2006. С. 496-517.
8. Чжун К., Уильямс Р. *Введение в стохастическое интегрирование.* М.: Мир. 1987. 152 с.
9. Follmer H., Protter P., Shiryayev A. *Quadratic covariation and an extension of Ito's formula* // Bernoulli. V. 1. 1995. P. 149-169.
10. Geman D., Horowitz J. *Occupation densities* // Ann. Probab. V .8. N 1. 1980. P. 1-67.

Фарит Сагитович Насыров,
Уфимский государственный авиационный
технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: farsagit@yandex.ru