Уфимский математический журнал. Том 1. № 1 (2009). С. 38-68.

УДК 517.956.223

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕКОМПАКТНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Л.М. КОЖЕВНИКОВА

Аннотация. Выделен класс единственности решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений в областях с некомпактными границами. Ограничение на рост решения формулируется в терминах геометрической характеристики неограниченной области Ω, введенной ранее в работах автора для квазиэллиптических уравнений. Доказано существование решения, принадлежащего установленному классу единственности.

Ключевые слова: псевдодифференциальные эллиптические уравнения, задача Дирихле, класс единственности, неограниченная область, область с некомпактной границей, существование решения, геометрическая характеристика.

1. Введение

В настоящей работе исследуются вопросы корректности постановки задачи Дирихле для некоторого класса псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}_{n+1} = \{\overline{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y}) = (y_0, \mathbf{y}) \mid x \in \mathbb{R},\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n\},\ n \geq 1$.

Доказательству теорем типа Фрагмена-Линделефа, принципа Сен-Венана или выделению классов единственности решений для эллиптических уравнений посвящены работы Е.М. Ландиса [1], О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [2] – [4], А.Ф. Тедеева, А.Е. Шишкова [5] – [8]. Перечисленные утверждения, несмотря на внешние различия, характеризуют близкие качественные свойства решений эллиптических уравнений. Подробный обзор работ по рассматриваемой тематике приведен в [9]. Здесь процитируем лишь результаты, сравнимые с результатами настоящей работы.

В работах О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [2] – [4] получена априорная оценка обобщенного решения смешанной задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка, аналогичная оценкам, выражающим принцип Сен-Венана в теории упругости. При этом рассматриваются области с конечным числом ветвей, достаточно произвольным образом уходящими в бесконечность. Граница области поделена на три части, на которых соответственно ставятся краевые условия первого, второго и третьего типа. Приведем характерное следствие из теорем 1, 2 работы [3] для решения задачи Дирихле

$$L_2 u \equiv -\sum_{i,j=0}^{n} \left(a_{ij}(\overline{\mathbf{y}}) u_{y_i}\right)_{y_j} = \Phi(\overline{\mathbf{y}}), \tag{1. 1}$$

Kojevnikova L.M. On existence and uniqueness of solutions of the Dirichlet's problem for pseudodifferential elliptic equations in domains with non-compact boundaries.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00440-а).
Поступила 27 февраля 2009 г.

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1. 2}$$

Для области Ω, лежащей в полупространстве $\mathbb{R}^+_{n+1} = \{\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > 0\}$, положим $\mathcal{A}(u) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} a_{ij}(\overline{\mathbf{y}}) u_{y_i} u_{y_j}$, $\Omega^r = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \mid x < r\}$, $\gamma_r = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \mid x = r\}$,

$$0 < \nu(r) = \inf \left\{ \int\limits_{\gamma_r} \mathcal{A}(g) d\mathbf{y} \;\middle|\; g(\overline{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega), \int\limits_{\gamma_r} g^2 d\mathbf{y} = 1 \right\}, \quad r > 0. \tag{1. 3}$$

Доказано, что обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) с $\Phi(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ в Ω подчиняется оценке

$$\int\limits_{\Omega^r} \mathcal{A}(u) d\overline{\mathbf{y}} \leqslant C \exp\left(- \int\limits_r^R \sqrt{\nu(x)} dx \right) \int\limits_{\Omega^R} \mathcal{A}(u) d\overline{\mathbf{y}}, \quad r < R.$$

Отсюда вытекает следующая теорема единственности. Пусть $u(\overline{\mathbf{y}})$ – решение задачи (1.1), (1.2) с нулевой правой частью. Если для некоторой последовательности $R_N \to \infty$

$$\int\limits_{\Omega^{R_N}} \mathcal{A}(u) d\overline{\mathbf{y}} \leqslant \varepsilon(R_N) \exp\left(\int\limits_1^{R_N} \sqrt{\nu(x)} dx \right), \tag{1. 4}$$

где $\varepsilon(R_N) \to 0$ при $R_N \to \infty$, то $u \equiv 0$ в Ω.

А.Е. Шишковым в работах [5] – [8] установлены энергетические априорные оценки решений задачи Дирихле для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка с нелинейностью порядка $p-1$, $p > 1$ в неограниченных областях с некомпактными границами. На их основе доказываются альтернативные теоремы типа Фрагмена-Линделефа о поведении решений на бесконечности. В качестве геометрической характеристики неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1}$ используется функция нелинейной частоты сечений $\gamma(r) = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \mid |\overline{\mathbf{y}}| = r\}$:

$$\nu_p(r) = \inf \left\{ \int\limits_{\gamma(r)} |\nabla_\gamma g|^p ds \;\middle|\; g(\overline{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega), \int\limits_{\gamma(r)} |g|^p ds \right\}, \quad r > 0, \tag{1. 5}$$

где $\nabla_\gamma g$ — проекция ∇g на плоскость, касательную к $\gamma(r)$. Очевидно, функция $\nu_p(r)$ при $p = 2$ является обобщением функции $\nu(r)$.

Кроме того, в работе [10] А.Е. Шишковым для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка доказано существование решения задачи Дирихле в областях с некомпактными границами, относящимися к классу "узких" в окрестности бесконечности, при экспоненциальном росте правой части.

С нашей точки зрения, геометрические характеристики неограниченной области Ω, рассматриваемые на сечениях этой области некоторым семейством гиперповерхностей, такие, как $\nu(r)$, $\nu_p(r)$, недостаточно эффективны для областей с нерегулярным поведением границы.

Прежде чем перейти к изложению наших результатов, введем некоторые обозначения. Положим: $\|\cdot\|_Q$ — норма в пространстве $L_2(Q)$, аргумент $Q = \Omega$ может быть опущен; $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \mid r_1 < x < r_2\}$, причем значения $r_1 = -\infty$, $r_2 = \infty$ могут отсутствовать.

Определим область вращения

$$\Omega(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \Big| \, x > 0, \mid \mathbf{y} \mid < f(x)\} \tag{1. 6}$$

с положительной функцией $f(x)$. От функции f будем требовать только то, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью.

Пусть, например,

$$\Omega(f_a),\ f_a(x)=\max(1,x^a);\quad \Omega(\widetilde{f}_a),\ \widetilde{f}_a(x)=\infty,\ x\neq i,\ \widetilde{f}_a(i)=i^a,\ i\in\mathbb{N};$$

$$\Omega(\widehat{f}_a),\ \widehat{f}_a(x)=f_a(x),\ x\neq i,\ \widehat{f}_a(i)=i^b,\ i\in\mathbb{N},\quad 0<b<a<1.$$

Очевидно, что $\nu(r,\Omega(f_a))=\nu(r,\Omega(\widehat{f}_a))$ при всех $r>0$, за исключением натуральных точек, поэтому классы единственности (1.4) для областей $\Omega(f_a)$ и $\Omega(\widehat{f}_a)$ совпадают. Однако, в работе [9] для области $\Omega(\widehat{f}_a)$ нами установлен существенно более широкий и точный класс единственности, такой же, как для области $\Omega(f_b),\ f_b(x)=\max(1,x^b)$:

$$\lim_{r\to\infty}\exp(-\kappa_b r^{1-b})\|u\|_{\Omega_r^{r+1}(\widehat{f}_a)}=0.$$

Далее, поскольку $\nu(r,\Omega(\widetilde{f}_a))=0,\ r\neq i,\ i\in\mathbb{N}$, то класс единственности (1.4) для области $\Omega(\widetilde{f}_a)$ не пригоден. Для области $\Omega(\widetilde{f}_a)$ также получен точный класс единственности, такой же, как и для области $\Omega(f_a)$:

$$\lim_{r\to\infty}\exp(-\kappa_a r^{1-a})\|u\|_{\Omega_r^{r+1}(\widetilde{f}_a)}=0.$$

Будем предполагать, что неограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}_{n+1}$ представлена в виде объединения $\Omega=\bigcup\limits_{N=0}^{\infty}\Omega^{(N)}$ последовательности вложенных $\Omega^{(N)}\subset\Omega^{(N+1)}$ ограниченных областей, удовлетворяющих следующим дополнительным требованиям. Дополнения $\Omega^{(N)}_{(N-1)}=\Omega^{(N)}\setminus\overline{\Omega^{(N-1)}}$ распадаются на конечное число подобластей $\omega_i^{(N)},\ i=\overline{1,p^{(N)}}$: $\Omega^{(N)}_{(N-1)}=\bigcup\limits_{i=1}^{p^{(N)}}\omega_i^{(N)},\ N=\overline{1,\infty}$. Пересечение $(\partial\Omega^{(N)})\bigcap\Omega$ распадается на конечное число гиперповерхностей $S_i^{(N)},\ i=\overline{1,p^{(N)}},\ N=\overline{0,\infty}$.

Для множества $Q\subset\Omega$ введем обозначение

$$\lambda(Q)=\inf\left\{\|\nabla g\|_Q^2\ \middle|\ g(\overline{\mathbf{y}})\in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_Q=1\right\}. \tag{1. 7}$$

Определим векторы $t^{(N)}=(t_1^{(N)},...,t_{p^{(N)}}^{(N)})$ и $\lambda^{(N)}=(\lambda_1^{(N)},...,\lambda_{p^{(N)}}^{(N)})$ формулами $t_i^{(N)}=\mathrm{dist}(S_i^{(N)},S_i^{(N-1)}),\ \lambda_i^{(N)}=\lambda\left(\omega_i^{(N)}\right),\ i=\overline{1,\,p^{(N)}},\ N=\overline{1,\,\infty}.$

Будем предполагать, что существует число $\theta>0$ такое, что выполняются неравенства:

$$1\leqslant\theta\lambda_i^{(N)}(t_i^{(N)})^2,\quad i=\overline{1,p^{(N)}},\quad N=\overline{1,\infty}. \tag{1. 8}$$

Описанное выше представление $\Omega=\bigcup\limits_{N=0}^{\infty}\Omega^{(N)}$ при выполнении неравенств (1.8) назовем λ-разбиением области Ω. Понятие λ-разбиения можно считать обобщением понятия λ-последовательности, введенного в [11] для области, расположенной вдоль выделенной оси Ox. А именно, предполагается, что неограниченная область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}^+_{n+1}$ и сечение γ_r не пусто при любом $r>0$. Множества $\Omega^{(N)}=\Omega^{x_N}$ определяются неограниченной возрастающей последовательностью положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^\infty$. При этом последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ называется λ-последовательностью, а условие (1.8) для разбиения $\Omega=\bigcup\limits_{N=0}^{\infty}\Omega^{x_N}$ принимает вид

$$1\leqslant\theta\lambda(x_N,x_{N+1})\Delta_N^2,\quad N=\overline{0,\infty}, \tag{1. 9}$$

где $\lambda(x_N,x_{N+1})=\lambda(\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}),\ \Delta_N=x_{N+1}-x_N.$

Суть оценок сен-венановского типа состоит в отслеживании убывания "энергии среды" при движении вдоль линии, составляющей "ось среды". Нами предложен способ построения точек на этой линии (лямбда-последовательности) таких, что при переходе к следующей точке происходит спад "энергии среды" в фиксированное число раз. Доказательство точных сен-венановских оценок состоит в установлении верхней и нижней границы для этого числа.

Построение лямбда-последовательности основано на оценке первого собственного значения оператора, соответствующего уравнению, в области, заключенной между трансверсальными к "оси среды" поверхностями, проходящими через соседние точки последовательности.

До некоторого времени понятие λ-последовательности считалось новым изобретением, пока не была обнаружена работа О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [12], в которой по существу использовался прототип этой последовательности для системы уравнений теории упругости. Приведем результаты этой работы для одного уравнения (1.1) с непрерывными в $\overline{\Omega}$ симметричными коэффициентами, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности.

В работе [12] определяется неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел $\{R_N\}_{N=0}^{\infty}$ такая, что

$$1 \leqslant \Theta(R_{N+1} - R_N)^2 \chi(R_N, R_{N+1}), \quad N = \overline{0, \infty},$$

где

$$\chi(r_1, r_2) = \inf \left\{ \lambda(Q) \;\middle|\; \Omega(r_2) \setminus \overline{\Omega(r_1)} \subset Q \subset \Omega(r_2) \right\}, \quad r_1 < r_2,$$

$\Omega(r) = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \mid |\overline{\mathbf{y}}| < r\}$, число Θ зависит лишь от n и констант равномерной эллиптичности.

О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян доказали следующую теорему единственности. Если обобщенное решение $u(\overline{\mathbf{y}})$ задачи (1.1), (1.2) в Ω удовлетворяет условиям

$$\|\nabla u\|_{\Omega(R_N)} \leqslant \varepsilon(R_N) \exp N, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{1. 10}$$

где $\varepsilon(R_N) \to 0$ при $N \to \infty$, то $u = 0$ в Ω.

Отметим, что в работе [12] не выделен класс областей, для которых существует последовательность $\{R_N\}_{N=0}^{\infty}$ и не установлена точность класса единственности (1.10).

Приведем необходимое и достаточное условие существования λ-последовательности:

$$\text{при любом } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0, \tag{1. 11}$$

(см. [11], § 3, следствие 1 к утверждению 2). При этом λ-последовательность можно построить, начиная с любого $x_0 > 0$. Таким образом, λ-последовательность существует для очень широкого класса неограниченных областей.

Ради некоторого упрощения формулировок результатов потребуем выполнение условия

$$\lambda^{(0)} = \lambda\left(\Omega^{(0)}\right) > 0. \tag{1. 12}$$

Определим невозрастающую последовательность

$$\lambda(N) = \min\{\lambda^{(0)}, \lambda_1^{(1)}, ..., \lambda_{p^{(1)}}^{(1)}, \lambda_1^{(N)}, ..., \lambda_{p^{(N)}}^{(N)}\}, \quad N = \overline{1, \infty}. \tag{1. 13}$$

Если выполнено условие (1.12), то $\lambda(N) > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\lambda(N)\|g\|^2_{\Omega^{(N)}} \leqslant \|\nabla g\|^2_{\Omega^{(N)}}, \quad g(\overline{\mathbf{y}}) \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1. 14}$$

Назовем $\overline{\lambda}$-последовательность $\{\overline{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ с числом $\overline{\theta} > 0$ оптимальной, если существует положительная постоянная $C(\overline{\theta})$ такая, что для любой другой λ-последовательности $\{x_J\}_{J=0}^{\infty}$

с числом $\theta > 0$ справедлива импликация

$$(x_L \leqslant \overline{x}_N) \Rightarrow (L \leqslant CN). \tag{1. 15}$$

Установлено, что оптимальной является $\overline{\lambda}$-последовательность с минимально возможными, без нарушения условия (1.9), интервалами $(\overline{x}_\nu, \overline{x}_{\nu+1})$ (см. [11], утверждение 3).

Для областей вращения вида (1.6) приведем способ построения λ-последовательности. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ определим индуктивно

$$x_{N+1} = \sup\left\{ r \;\Big|\; \inf_{x \in [x_N, r]} f(x) \geq (r - x_N) \right\}, \quad N = \overline{0, \infty}, \tag{1. 16}$$

начиная с $x_0 = 1$. Эту последовательность назовем П-последовательностью функции f. Установлено, что П-последовательность является λ-последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. [9], следствие 3.1).

Если существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\left\{ f(z) \;\big|\; z \in [x - f(x), x + f(x)] \right\} \leqslant \omega f(x), \quad x \geq 1, \tag{1. 17}$$

то П-последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ является оптимальной $\overline{\lambda}$-последовательностью для $\Omega(f)$, и существуют постоянные c, $\overline{\omega} \geq 1$ такие, что справедливы оценки

$$c^{-1} \int\limits_1^{x_N} \frac{dx}{f(x)} \leq N \leq c \int\limits_1^{x_N} \frac{dx}{f(x)}, \quad N \geq 1, \tag{1. 18}$$

$$\overline{\omega}^{-1} \leqslant \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{x_{N+1} - x_N} \leqslant \overline{\omega}, \quad N = \overline{0, \infty}, \tag{1. 19}$$

(см. [9], следствие 3.3).

Приведем результаты, установленные для решения задачи Дирихле в случае уравнения

$$-L_2 u \equiv \sum_{i,j=0}^{n} \left(a_{ij}(\overline{\mathbf{y}}) u_{y_i}\right)_{y_j} = \sum_{i=0}^{n} (\Phi_i(\overline{\mathbf{y}}))_{y_i} - \Phi(\overline{\mathbf{y}}), \tag{1. 20}$$

с граничным условием

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \Psi\Big|_{\partial\Omega}. \tag{1. 21}$$

Действительные коэффициенты уравнения (1.20) считаем измеримыми в Ω и ограниченными для п.в. $\overline{\mathbf{y}} \in \Omega$ функциями

$$| a_{ij}(\overline{\mathbf{y}}) | \leqslant \overline{a}, \quad i, j = \overline{0, n}, \tag{1. 22}$$

для любых $\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}_{n+1}$ и п.в. $\overline{\mathbf{y}} \in \Omega$ удовлетворяющими условию

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(\overline{\mathbf{y}}) z_i z_j \geq \widehat{a} |\overline{\mathbf{z}}|^2. \tag{1. 23}$$

Рассмотрим вопросы существования и единственности решения задачи с локально суммируемыми данными $\Phi(\overline{\mathbf{y}})$, $\mathbf{\Phi}(\overline{\mathbf{y}}) = (\Phi_0(\overline{\mathbf{y}}), \Phi_1(\overline{\mathbf{y}}), \ldots, \Phi_n(\overline{\mathbf{y}}))$, $\Psi(\overline{\mathbf{y}})$. В § 3 выделен класс единственности решений задачи (1.20), (1.21), для областей с нерегулярным поведением границы этот класс может быть шире класса единственности (1.4). В случае уравнения Лапласа установлена точность найденного класса единственности.

Через $\Xi_2 = \{n,\ \theta,\ \widehat{a},\ \overline{a}\}$ обозначим набор постоянных, зависимость других постоянных от этого набора будем указывать в круглых скобках.

Теорема 1. *Пусть* $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^{\infty}$ *— произвольная последовательность положительных чисел. Пусть для области* Ω *существует* λ*-разбиение* $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$*, удовлетворяющее условию* (1.12)*. Тогда найдется положительная постоянная* $\kappa_2(\Xi_2)$ *такая, что, если для решения* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.20)*,* (1.21) *с* $\mathbf{\Phi}(\overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$*,* $\Phi(\overline{\mathbf{y}}) = \Psi(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ *выполнено одно из условий*

$$\lim_{N\to\infty} \exp(-\kappa_2 N)\varepsilon_N^{-1}\|u\|_{\Omega_{(N)}^{(N)+\varepsilon_N}} = 0, \tag{1. 24}$$

$$\lim_{N\to\infty} \exp(-\kappa_2 N)\|\nabla u\|_{\Omega_{(N)}^{(N+1)}} = 0, \tag{1. 25}$$

то $u = 0$ *в* Ω*. Здесь* $\Omega_{(N)}^{(N)+\varepsilon_N} = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^{(N)}} \mid \operatorname{dist}(\overline{\mathbf{y}}, S^{(N)}) < \varepsilon_N\}$.

Точность установленных классов единственности доказана нами для областей вращения, поэтому приведем следствие теоремы 1 для областей, расположенных вдоль оси Ox.

Теорема 1$'$. *Пусть* $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^{\infty}$ *— произвольная последовательность положительных чисел. Пусть для области* Ω *существует* λ*-последовательность* $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$*, подчиняющаяся требованию* (1.12)*. Тогда найдется положительная постоянная* $\kappa_2(\Xi_2)$ *такая, что, если для решения* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.20)*,* (1.21) *с* $\mathbf{\Phi}(\overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$*,* $\Phi(\overline{\mathbf{y}}) = \Psi(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ *выполнено одно из условий*

$$\lim_{N\to\infty} \exp(-\kappa_2 N)\varepsilon_N^{-1}\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} = 0, \tag{1.24$'$}$$

$$\lim_{N\to\infty} \exp(-\kappa_2 N)\|\nabla u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+1}} = 0, \tag{1.25$'$}$$

то $u = 0$ *в* Ω*.*

Отметим, что класс единственности (1.25$'$) близок к классу (1.10). При $\varepsilon_N = x_{N+1} - x_N$ для достаточно больших N, очевидно, ограничение (1.24$'$) слабее, чем (1.25$'$).

Конечно, классы единственности (1.24), (1.25) зависят от представления $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$. Поскольку мы не следим за точным значением κ_2, можно считать, что оптимальная $\overline{\lambda}$-последовательность при фиксированном $\overline{\theta}$ обеспечивает "наиболее быстро убывающую" с ростом $x = \overline{x}_N$ экспоненту в (1.24$'$). Отметим, что постоянная κ_2 определяется параметром θ, и согласно (3.4) $\kappa_2 \leqslant C/\sqrt{\theta}$.

Следующая теорема является следствием теоремы 1$'$ для области вращения.

Теорема 2. *Существует положительная постоянная* $\kappa_2(\Xi_2)$ *такая, что, если для решения* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.20)*,* (1.21) *в области* $\Omega(f)$ *с* $\mathbf{\Phi}(\overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$*,* $\Phi(\overline{\mathbf{y}}) = \Psi(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ *выполнено условие*

$$\lim_{r\to\infty} \exp\left(-\kappa_2 \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)}\right) \|u\|_{\Omega_r^{r+1}} = 0, \tag{1. 26}$$

то $u = 0$ *в* $\Omega(f)$*.*

Для задачи Дирихле в области вращения $\Omega(f)$ в случае уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1. 27}$$

в [9, теорема 0.3] построен следующий пример неединственности решения.

Теорема 3. *Пусть для функции* $f(x)$*,* $x > 0$ *существует положительная функция* $\overline{f}(x) \leqslant f(x)$*,* $x > 0$ *такая, что* Π*-последовательность* $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ *функции* $\overline{f}(x)$ *удовлетворяет условию* (1.19)*. Тогда в области вращения* $\Omega(f)$ *существует неотрицательное ненулевое решение задачи* (1.27)*,* (1.2)*, подчиняющееся оценке*

$$u(\overline{\mathbf{y}}) \leqslant \exp\left(\kappa_* N\right), \quad \overline{\mathbf{y}} \in \Omega^{x_N}(f), \quad N \geq 1, \tag{1. 28}$$

с положительной постоянной κ_**, зависящей только от* n*.*

Для областей вращения $\Omega(f)$ в условиях теоремы 3 при дополнительном требовании того, что существует постоянная $\omega_1 \geq 1$ такая, что для П-последовательности $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ функции $\overline{f}(x)$ справедливы неравенства

$$\inf_{[x_N, x_{N+1}]} f(x) \leqslant \omega_1 \Delta_N, \quad N = \overline{1, \infty}, \tag{1. 29}$$

получено ([9], следствие 4.1) следствие оценки (1.28)

$$\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} \leqslant M \exp(K_* N) \Delta_N, \quad N \geq 0. \tag{1. 30}$$

Таким образом, установлена точность класса единственности ($1.24'$) для области $\Omega(f)$. Действительно, применим теорему 3 в ситуации, когда выполнено условие (1.29). Поскольку П-последовательность функции $\overline{f}$ является λ-последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. утверждение 3.1 [9]), то сравнивая ($1.24'$) при $\varepsilon_N = \Delta_N$, $N = \overline{0, \infty}$, и (1.30), приходим к выводу, что в случае уравнения Лапласа постоянная κ_2 в классе единственности ($1.24'$) для области $\Omega(f)$ не может быть заменена на неограниченно возрастающую последовательность $\{\kappa_N\}_{N=0}^{\infty}$. В этом смысле, построенный пример показывает, что найденный класс единственности для области $\Omega(f)$ нельзя существенно расширить.

Понятие λ-последовательности, введенное для уравнений второго порядка в случае областей, расположенных вдоль оси Ox, несложным образом обобщается на некоторый класс уравнений, которые являются дифференциальными по выделенной переменной x и псевдодифференциальными по остальным переменным, в том числе на уравнения высокого порядка.

Через $B(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$ будем обозначать непрерывные положительные при п.в. $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$ функции такие, что

$$B(\mathbf{z}) \leqslant C|\mathbf{z}|^b, \quad b, C > 0, \quad |\mathbf{z}| \geq 1.$$

На множестве комплекснозначных функций $g(\overline{\mathbf{y}}) = g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}_{n+1})$ при каждом $x \in \mathbb{R}$ определим функционал

$$\|g(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} = \|D_x^k g(x, \mathbf{y})\|^2_{\mathbb{R}_n} + X_{k-q}\|D_x^q g(x, \mathbf{y})\|^2_{\mathbb{R}_n} + \|BF_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[g]\|^2_{\mathbb{R}_n}, \tag{1. 31}$$

где $F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[g]$ — преобразование Фурье, k — натуральное число, q — целое неотрицательное число, $q \leqslant k$. Здесь и далее используется обозначение $X_0 = 0$, $X_p = 1$ при $p \neq 0$.

Для $g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ положим $\|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(a,b)} = \int\limits_a^b \|g(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} dx$, индекс $(-\infty, \infty)$ заменяем на $\mathbb{R}$.

Обозначим

$$\lambda[\mathcal{B}_{k,q}](r_1, r_2) = \inf\left\{ \|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(r_1,r_2)} \;\middle|\; g(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega),\ \|g\|_{\Omega_{r_1}^{r_2}} = 1 \right\}, \quad r_1 < r_2. \tag{1. 32}$$

Для неотрицательных ρ положим

$$\rho^{[a,b]} = \begin{cases} \rho^a, & \rho < 1, \\ \rho^b, & \rho \geq 1, \end{cases} \quad a,\ b \geq 0.$$

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_J\}_{J=0}^{\infty}$ назовем $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательностью области Ω, если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$1 \leqslant \theta \lambda(x_J, x_{J+1}) \Delta_J^{2[k,q]}, \quad J = \overline{0, \infty}, \tag{1. 33}$$

где $\lambda(x_J, x_{J+1}) = \lambda[\mathcal{B}_{k,q}](x_J, x_{J+1})$, $\Delta_J = x_{J+1} - x_J$.

Необходимое и достаточное условие существования $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательности формулируется также, как и в случае уравнений второго порядка (см. условие (1.11)). При этом

λ-последовательность можно построить начиная с любого $x_0 > 0$ (при $q > 0$ доказательство аналогично тому, как это было сделано в [11] (§ 3, следствие 1 к утверждению 2). А при $q = 0$ неравенство $\|g(x)\|_{\mathcal{B}_{k,0}} \geq \|g\|_{\mathbb{R}_n},\ x \in \mathbb{R}$ влечет неравенство

$$\lambda[\mathcal{B}_{k,0}](r_1, r_2) \geq 1, \quad r_1 < r_2. \tag{1. 34}$$

Поэтому $\lambda[\mathcal{B}_{k,0}]$-последовательность можно построить всегда начиная с любого $x_0 > 0$. Действительно, выбирая $\theta \geq 1$, можно положить, например, $x_{J+1} = x_J + 1,\ J = \overline{0, \infty}$.

Ради некоторого упрощения формулировок результатов потребуем, чтобы

$$\lambda^0 = \lambda[\mathcal{B}_{k,q}](-\infty, x_0) > 0. \tag{1. 35}$$

В случае $q = 0$ требование (1.35) выполняется всегда, поскольку, как уже отмечалось, $\lambda^0 \geq 1$.

Определим невозрастающую последовательность

$$\lambda[\mathcal{B}_{k,q}](N) = \min\{\lambda[\mathcal{B}_{k,q}](-\infty, x_0), \lambda[\mathcal{B}_{k,q}](x_0, x_1), ..., \lambda[\mathcal{B}_{k,q}](x_{N-1}, x_N)\}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1. 36}$$

Если выполнено условие (1.35), то $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}](N) > 0,\ N \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\lambda[\mathcal{B}_{k,q}](N)\|g\|^2_{\Omega^{x_N}} \leqslant \|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_N)}, \quad g(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}^\infty_0(\Omega), \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1. 37}$$

Назовем $\overline{\lambda}[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательность $\{\overline{x}_\nu\}^\infty_{\nu=0}$ с числом $\overline{\theta} > 0$ оптимальной, если существует положительная постоянная $C(\overline{\theta}, k, q)$ такая, что для любой другой $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательности $\{x_J\}^\infty_{J=0}$ с числом $\theta > 0$ справедлива импликация (1.15).

Установлено, что оптимальной является $\overline{\lambda}[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательность с минимально возможными, без нарушения условия (1.33), интервалами $(\overline{x}_\nu, \overline{x}_{\nu+1})$ (при $q > 0$ доказывается аналогично тому, как это было сделано в [11] в утверждении 3 , при $q = 0$ см. [13], утверждение 4).

Для областей вращения приведем примеры $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательностей. С этой целью определим понятие $\Pi[k, q, \phi]$-последовательности. При этом на функцию $B(\mathbf{z})$ накладываются следующие ограничения.

Потребуем, чтобы функции $B_s(z_s) = B(0, \dots, z_s, \dots, 0),\ z_s \in \mathbb{R},\ s = \overline{1, n}$ были четными возрастающими при $z_s > 0$ и существовали положительные числа $c_1,\ c_2$ такие, что

$$B_s(hz) \leq c_1 B_s(z) B_s(h), \quad h > 0, \quad z > 0, \tag{1. 38}$$

$$B_s(z) \leq c_2|z|, \quad |z| \leqslant 1. \tag{1. 39}$$

Будем предполагать также справедливость неравенств

$$B(\mathbf{z}) \geq B_s(z_s), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}_n, \quad s = \overline{1, n}. \tag{1. 40}$$

Положим

$$\phi_s(r) = \frac{1}{B_s(\frac{1}{r})}, \quad \phi(r) = \min_{s=\overline{1,n}} \phi_s(r), \quad r > 0. \tag{1. 41}$$

Потребуем, чтобы $\lim\limits_{z\to\infty} B_s(z) = \infty, \quad s = \overline{1, n}$, следствием чего является $\lim\limits_{r\to 0} \phi_s(r) = 0,\ s = \overline{1, n}$.

Например, для функции $B^2(\mathbf{z}) = \sum\limits_{s=1}^{n} \left\{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\right\}$ соответствующие функции определяются равенствами $B^2_s(z) = z^{2m_s} + z^{2l_s},\ \phi^2_s(r) = \frac{r^{2(m_s+l_s)}}{r^{2m_s}+r^{2l_s}},\ r > 0,\ l_s, m_s \in \mathbb{N},\ l_s \leqslant m_s,\ s = \overline{1, n}$. При этом выполняются условия (1.38) – (1.40). Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}} r^{[m,l]} \leqslant \phi(r) \leqslant r^{[m,l]},\ r > 0,$$

где $m = \max\limits_{s=\overline{1,n}} m_s,\ l = \min\limits_{s=\overline{1,n}} l_s$.

При $q>0$ неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_J\}_{J=0}^{\infty}$ определим индуктивно следующим образом:

$$x_{J+1}=\sup\left\{r \;\Big|\; \inf_{x\in[x_J,r]}\phi(f(x))\geq (r-x_N)^{[k,q]}\right\}, \quad J=\overline{0,\infty}, \qquad (1.\ 42)$$

начиная с $x_0=1$. Эту последовательность назовем $\Pi[k,q,\phi(r)]$-последовательностью функции f. Аналогично, при $q=0$ полагаем

$$x_{J+1}=\sup\left\{r \;\Big|\; \inf_{x\in[x_J,r]}\phi(f(x))\geq (r-x_J)^{k},\ r\leqslant x_J+1\right\}, \quad J=\overline{0,\infty}, \qquad (1.42')$$

начиная с $x_0=1$. Эту последовательность обозначим через $\Pi[k,0,\phi(r)]$. При этом обозначение $\Pi[1,1,r]$ будем сокращать до Π. В [13](следствие 1 к утверждению 5) установлено, что при $q\geq 0$ $\Pi[k,q,\phi(r)]$-последовательность является $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательностью для области $\Omega(f)$.

Пусть существует положительная постоянная c_3 такая, что справедливо неравенство:

$$B(h\mathbf{z})\leqslant c_3B(\mathbf{z})\max_{s=\overline{1,n}}B_s(h), \quad \mathbf{z}\in\mathbb{R}_n, \quad h>0. \qquad (1.\ 43)$$

Если при этом найдется постоянная $\omega\geq 1$ такая, что

$$\sup\left\{f(z)\;\Big|\; z\in\left[x-\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}, x+\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}\right]\right\}\leqslant \omega f(x), \quad x\geq 1, \qquad (1.\ 44)$$

то $\Pi[k,q,\phi(r)]$-последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ является оптимальной $\overline{\lambda}[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательностью для $\Omega(f)$ и существует положительная постоянная c такая, что справедливы оценки (см. [13], утверждение 7) (1.19) и

$$c^{-1}\int\limits_1^{x_N}\frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}}\leq N\leq c\int\limits_1^{x_N}\frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}}, \quad N\geq 1. \qquad (1.\ 45)$$

Здесь $\sigma(q)=0$, если $q=0$, и $\sigma(q)=1/q$ в ином случае. В частности, $\Pi[k,q,r^{[m,l]}]$-последовательность функции $f(x)$ является оптимальной $\overline{\lambda}\,[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательностью с $B^2(\mathbf{z})=\sum\limits_{s=1}^{n}\left\{z_s^{2m_s}+z_s^{2l_s}\right\}$ для $\Omega(f)$ (при $q=0$ считаем, что $l=l_s=1$).

Рассмотрим псевдодифференциальное эллиптическое уравнение:

$$\mathcal{L}u\equiv\sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}}(-1)^jD_x^j\widehat{T}^{\overline{\beta}}(a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}})T^{\overline{\alpha}}D_x^iu)=\Phi, \quad \overline{\mathbf{y}}\in\Omega. \qquad (1.\ 46)$$

Множество индексов $\overline{\alpha}=(i,\alpha)$, $\overline{\beta}=(i,\beta)\in\mathcal{S}$ имеет вид:

$$\mathcal{S}=\left\{\overline{\alpha}=(i,\alpha)\;\Big|\; i=\overline{0,k},\ \alpha=\overline{1,N^i}\right\}, k\in\mathbb{N}. \qquad (1.\ 47)$$

Псевдодифференциальные операторы $T^{\overline{\alpha}}$ с комплексными символами $A^{\overline{\alpha}}(x,\mathbf{z})$ определяются равенствами

$$T^{\overline{\alpha}}u=F^{-1}_{\mathbf{z}\to\mathbf{y}}[A^{\overline{\alpha}}(x,\mathbf{z})F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[u]],$$

а псевдодифференциальные операторы $\widehat{T}^{\overline{\alpha}}$ имеют комплексносопряженный символ $\overline{A^{\overline{\alpha}}(x,\mathbf{z})}$.

На измеримые комплекснозначные функции $A^{\overline{\alpha}}(x,\mathbf{z})$, $\overline{\alpha}=(i,\alpha)\in\mathcal{S}$ наложим следующие условия. Существуют число $A>0$ и функция $B(\overline{\mathbf{z}})$ такие, что для п.в. $(x,\mathbf{z})\in\mathbb{R}_{n+1}$ справедливы неравенства

$$|\,A^{\overline{\alpha}}(x,\mathbf{z})\,|\leqslant\begin{cases} AB^{1-i/k}(\mathbf{z}), & \text{при } B(\mathbf{z})\geq 1;\\ AB^{\max(0,1-i/q)}(\mathbf{z}), & \text{при } B(\mathbf{z})<1.\end{cases} \qquad (1.\ 48)$$

Здесь и ниже при $q=0$ считаем, что дробь i/q равна ∞.

Потребуем эллиптичность оператора $\mathcal{L}$ в следующем виде. Пусть существует положительное число $\widehat{a}$ и функция $B(\mathbf{z})$ такие, что в дополнение к (1.48) для формы $\mathcal{G}(g) = \sum\limits_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}} a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}) T^{\overline{\alpha}} D_x^i g \overline{T^{\overline{\beta}} D_x^j g}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{R}_{n+1}} \mathcal{G}(g) d\overline{\mathbf{y}} \geq \widehat{a} \|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},\mathbb{R}}, \quad g(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega), \tag{1. 49}$$

в котором имеется ввиду естественное вложение $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$.

Комплекснозначные функции $a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}),\ \overline{\alpha},\overline{\beta} \in \mathcal{S}$ будем считать измеримыми в Ω, продолженными нулем вне Ω, ограниченными для п.в. $\overline{\mathbf{y}} \in \Omega$

$$\mid a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}) \mid \leqslant \overline{a}. \tag{1. 50}$$

Для уравнения (1.46) с $\Phi \in \overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^*_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$, $\Psi(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$ рассматривается комплекснозначное решение задачи Дирихле из пространства $\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$ с граничным условием

$$u(\overline{\mathbf{y}}) - \Psi(\overline{\mathbf{y}}) \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega). \tag{1. 51}$$

Определения пространств $\overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^*_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega),\ \mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega),\ \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$ приведены в § 1.

Естественно, что вещественное уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}} (-1)^{|\overline{\alpha}|} D_{\overline{\mathbf{y}}}^{\overline{\beta}} (a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}) D_{\overline{\mathbf{y}}}^{\overline{\alpha}} u) = \Phi \tag{1. 52}$$

является примером псевдодифференциального уравнения (1.46). Здесь $\overline{\alpha} = (i,\alpha) =$ $= (i,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндексы с целыми неотрицательными числами $i,\ \alpha_s,\ s=\overline{1,n}$, $\mid \overline{\alpha} \mid = i+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. Множество $\mathcal{S}$ определяется параметрами $q,k,\ q\leqslant k,\ l_s$, $m_s \in \mathbb{N},\ l_s \leqslant m_s,\ s=\overline{1,n}$ следующим образом:

$$\mathcal{S} = \left\{ \overline{\alpha} = (i,\alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu(\overline{\alpha}) = \dfrac{i}{q} + \dfrac{\alpha_1}{l_1} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{l_n} \geq 1, \\ \nu(\overline{\alpha}) = \dfrac{i}{k} + \dfrac{\alpha_1}{m_1} + \dfrac{\alpha_2}{m_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{m_n} \leqslant 1 \end{array} \right\}. \tag{1. 53}$$

При $q=0$ будем требовать $l_s=1,\ s=\overline{1,n}$.

Для уравнения (1.52) ставится задача Дирихле, определяемая следующими граничными условиями:

$$D_x^i u\Big|_{\partial\Omega} = D_x^i \Psi\Big|_{\partial\Omega}, \quad i<k; \quad D_{y_s}^{\alpha_s} u\Big|_{\partial\Omega} = D_{y_s}^{\alpha_s}\Psi\Big|_{\partial\Omega}, \quad \alpha_s < m_s,\ s=\overline{1,n}. \tag{1. 54}$$

Потребуем, чтобы для коэффициентов уравнения (1.52) для действительных функций $g(\overline{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнялось следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega \sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}} a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}) D_{\overline{\mathbf{y}}}^{\overline{\alpha}} g D_{\overline{\mathbf{y}}}^{\overline{\beta}} g d\overline{\mathbf{y}} \geq \widehat{a} \left(\sum_{s=1}^n \left\{ \|D_{y_s}^{l_s} g\|^2 + \|D_{y_s}^{m_s} g\|^2 \right\} + \|D_x^k g\|^2 + \|D_x^q g\|^2 \right). \tag{1. 55}$$

Установлено, что решение задачи (1.52), (1.54) будет действительным (см. [13], § 1, замечание).

Задача Дирихле (1.20), (1.21) является частным случаем задачи Дирихле (1.46), (1.51). Если выполнено условие (1.23), то справедливо неравенство (1.49) с параметрами $k=q=1,\ B^2(\mathbf{z}) = \sum\limits_{s=1}^n z_s^2$.

Далее через $\Xi = \{n,\ k,\ q,\ \theta,\ \widehat{a},\ \overline{a},\ A\}$ обозначим набор постоянных.

В § 2 выделен класс единственности решений задачи Дирихле (1.46), (1.51) с локально суммируемыми данными.

Теорема 4. *Пусть* $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^{\infty}$ *— произвольная последовательность положительных чисел. Пусть для области* Ω *существует* $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$*-последовательность, удовлетворяющая условию* (1.35), *и выполнены требования* (1.48) – (1.50). *Тогда существует положительная постоянная* $\kappa(\Xi)$ *такая, что, если для решения* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.46), (1.51) *с* $\Phi = 0,\ \Psi(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ *выполнено условие*

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N^{-[k,q]} \exp(-\kappa N)\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} = 0, \tag{1. 56}$$

то $u = 0$ *в* Ω.

Несложным следствием теоремы 4 в случае областей вращения является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (1.48) – (1.50), (1.38) – (1.40), *тогда существует положительная постоянная* $\kappa(\Xi)$ *такая, что, если решение* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.46), (1.51) *в области* $\Omega(f)$ *с* $\Phi = 0,\ \Psi(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ *подчиняется требованию*

$$\lim_{r\to\infty} \exp\left(-\kappa \int\limits_1^r \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}}\right) \|u\|_{\Omega_r^{r+1}} = 0, \tag{1. 57}$$

то $u = 0$ *в* $\Omega(f)$.

Для области $\Omega(f_a)$ с функцией $f_a(x) = \max\{1, x^a\},\ a > 0,\ x > 0$ класс единственности (1.57) решения задачи (1.52), (1.54) при $q \geq 0$ приводится к виду

$$\lim_{r\to\infty} \exp\left(-\kappa_a r^{1-al\sigma(q)}\right) \|u\|_{\Omega_r^{r+1}(f_a)} = 0,$$

где при $q > 0$ предполагается $a < q/l$. В области $\Omega(f_{-a})$ с функцией $f_{-a}(x) = \min\{1, x^{-a}\}$, $a > 0,\ x > 0$ класс единственности (1.57) решения задачи (1.52), (1.54) при $q \geq 0$ приводится к виду

$$\lim_{r\to\infty} \exp\left(-\kappa_{-a} r^{1+am/k}\right) \|u\|_{\Omega_r^{r+1}(f_{-a})} = 0.$$

Таким образом, для расширяющихся областей младшие, а для сужающихся областей старшие члены уравнения (1.52) играют определяющую роль в формировании предлагаемого здесь класса единственности.

При $n = 1$ для уравнений $u_{xxxx} = u_{yy}$ и $u_{xx} = u_{yyyy}$ в области $\Omega(f_a)$ класс единственности (1.57) принимает вид, соответственно,

$$\lim_{r\to\infty} \exp\left(-\kappa_a r^{1-a/2}\right) \|u\|_{\Omega_r^{r+1}(f_a)} = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \exp\left(-\kappa_a r^{1-2a}\right) \|u\|_{\Omega_r^{r+1}(f_a)} = 0.$$

Таким образом, классы единственности зависят от направления, в котором расположена область, то есть классы единственности для одного и того же уравнения анизотропны.

В § 4 доказана теорема существования решения задачи (1.46), (1.51) с экспоненциально растущими данными $\Phi,\ \Psi(\overline{\mathbf{y}})$, принадлежащими классу единственности, определяемому условием (1.56).

2. Вспомогательные утверждения

Для функций $v, w \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}_{n+1})$ введем следующие обозначения:

$$(w, v)_{\mathcal{B}_{k,q}} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} B^2(\mathbf{z}) F[w]\overline{F[v]} d\mathbf{z} + \int\limits_{\mathbb{R}_n} \left\{ D_x^k w \overline{D_x^k v} + X_{k-q} D_x^q w \overline{D_x^q v} \right\} d\mathbf{y},$$

$$(w, v)_{\mathcal{B}_{k,q},(a,b)} = \int\limits_a^b (w(x), v(x))_{\mathcal{B}_{k,q}} dx,$$

$$\mathcal{G}(w,v)=\sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}} a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}})T^{\overline{\alpha}}D_x^i w\overline{T^{\overline{\beta}}D_x^j v},\quad (w,v)_{\mathcal{G},(a,b)}=\int\limits_a^b\int\limits_{\mathbb{R}_n}\mathcal{G}(w,v)dxd\mathbf{y},$$

индекс $(-\infty,\infty)$ заменяем на $\mathbb{R}$.

Гильбертовы пространства $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^r)$, $\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^r)$, $r\geq 0$ определим как пополнения пространств комплекснозначных функций $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega^r)$, $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ по нормам $\|v\|_{\mathcal{B}_{k,q},\mathbb{R}}$, $(\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},\mathbb{R}}+X_q\|v\|^2_{\Omega^r})^{1/2}$, соответственно. Отметим, что нормы пространств $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,0}}(\Omega^r)$, $\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,0}}(\Omega^r)$ совпадают. Пространства $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$, $\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$ составим из функций $u(\overline{\mathbf{y}})$, определенных в Ω, для которых при любом $r>0$ найдется функция из пространства $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$, $\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$, соответственно, совпадающая с функцией $u(\overline{\mathbf{y}})$ в Ω^r. Поскольку локальность мы понимаем здесь в необычном смысле, то индекс loc заменен на lc.

Через $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^r)$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^r)$, $r\geq 0$. Определим пространства $\overset{\circ}{\mathbf{G}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)=\bigcup\limits_{N=0}^{\infty}\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^N)$, $\overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)=\bigcap\limits_{N=0}^{\infty}\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^N)$. Очевидно, $\overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)=\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{pr}\,\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^N)$ и справедливо вложение $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)\subset\overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (1.46) назовем функцию $u(\overline{\mathbf{y}})$ из пространства $\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(u,v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}=\Phi(v) \tag{2. 1}$$

для любой функции $v(\overline{\mathbf{y}})\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ и условию (1.51). Если ввести обозначение $w(\overline{\mathbf{y}})=u(\overline{\mathbf{y}})-\Psi(\overline{\mathbf{y}})\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$, то (2.1) перепишется в эквивалентном виде

$$(w,v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}=\Phi(v)-(\Psi,v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}},\quad\forall\, v(\overline{\mathbf{y}})\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2. 2}$$

Пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ определим как пополнения пространств вещественных функций $C_0^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ по нормам $\|\nabla v\|$, $(\|\nabla v\|^2+\|v\|^2)^{1/2}$, соответственно. Пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\mathrm{lc}}(\Omega)$, $W^1_{2,\mathrm{lc}}(\Omega)$ составим из функций $u(\overline{\mathbf{y}})$, определенных в Ω, для которых при любом $r>0$ найдется функция из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$, соответственно, совпадающая с функцией $u(\overline{\mathbf{y}})$ в Ω^r.

Для функций $v,w\in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ введем обозначения:

$$(w,v)=\int\limits_\Omega wvd\overline{\mathbf{y}},\quad (w,v)_{\mathcal{A}}=\sum_{i,j=0}^{n}(a_{ij}()w_{x_i},v_{x_j}).$$

Для уравнения (1.20) с $\Phi(\overline{\mathbf{y}})\in L_{2,\mathrm{lc}}(\Omega)$, $\mathbf{\Phi}(\overline{\mathbf{y}})\in\mathbf{L}_{2,\mathrm{lc}}(\Omega)$, $\Psi(\overline{\mathbf{y}})\in W^1_{2,\mathrm{lc}}(\Omega)$ рассматривается действительное решение задачи (1.20), (1.21). Обобщенным решением задачи (1.20), (1.21) назовем функцию $u(\overline{\mathbf{y}})\in W^1_{2,\mathrm{lc}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(u,v)_{\mathcal{A}}=(\mathbf{\Phi},\nabla v)+(\Phi,v) \tag{2. 3}$$

для любой функции $v(\overline{\mathbf{y}})\in C_0^\infty(\Omega)$ и условию

$$u(\overline{\mathbf{y}})-\Psi(\overline{\mathbf{y}})\in\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\mathrm{lc}}(\Omega).$$

Если ввести обозначение $w(\overline{\mathbf{y}})=u(\overline{\mathbf{y}})-\Psi(\overline{\mathbf{y}})\in\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\mathrm{lc}}(\Omega)$, то (2.3) перепишется в эквивалентном виде

$$(w,v)_{\mathcal{A}}=(\mathbf{\Phi},\nabla v)+(\Phi,v)-(\Psi,\nabla v)_{\mathcal{A}},\quad\forall\, v(\overline{\mathbf{y}})\in C_0^\infty(\Omega). \tag{2. 4}$$

Вопросы существования решения краевых задач для псевдодифференциальных эллиптических уравнений рассматривались многими авторами (см. работы [14], [15] и др.). Здесь формулируется теорема существования решения задачи (1.46), (1.51), доказательство которой приведено в работе [13].

Теорема 6. *Пусть для области Ω существует $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$, выполнены условия (1.35), (1.48) – (1.50). Тогда существует единственное обобщенное решение $u(\overline{\mathbf{y}})$ задачи (1.46), (1.51) с функционалом $\Phi \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{*}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$ и функцией $\Psi(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$, удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{k,q},\mathbb{R}} \leqslant C(\|\Phi\| + \|\Psi\|_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)}). \tag{2. 5}$$

Лемма 1. *Для любой функции $g(x) \in C^{\infty}[a,b]$ и любого $\varepsilon \leqslant (b-a)^2$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_a^b (D_x^p g)^2 dx \leqslant \varepsilon^{-p} \int\limits_a^b \left\{\varepsilon^i (D_x^i g)^2 + G_i g^2\right\} dx, \quad p = \overline{0,i}, \tag{2. 6}$$

где $G_i \geq 1$ — постоянная, зависящая только от i, причем $G_{i+1} \geq G_i$. Здесь i — произвольное натуральное число.

Доказательство леммы см. в работе [11].

Следствие 1. *Пусть $\Delta = b-a$, $\Pi_a^b = \{\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}_{n+1} \mid a < x < b\}$, $q \geq 0$, тогда существует положительная постоянная $\widetilde{C}(k,q)$ такая, что для любой функции $g(x,\mathbf{y}) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_{n+1})$ при любом $\epsilon \in (0,1]$ для $i = \overline{q,k}$, $p = \overline{0,i-1}$ справедливы неравенства:*

$$\frac{\|D_x^p g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2i-2p}} \leqslant \epsilon \left\{\|D_x^k g\|^2_{\Pi_a^b} + X_{k-q}\|D_x^q g\|^2_{\Pi_a^b}\right\} + \frac{\widetilde{C}\epsilon \|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\epsilon^{\frac{k}{i-p}}\Delta^{2[k,q]}}; \tag{2. 7}$$

$$\|D_x^i g\|^2_{\Pi_a^b} \leqslant \widetilde{C}\left\{\|D_x^k g\|^2_{\Pi_a^b} + X_{k-q}\|D_x^q g\|^2_{\Pi_a^b}\right\} + \frac{\widetilde{C}\|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2[k,q]}}. \tag{2.7$'$}$$

Доказательство. Из (2. 6) при $\varepsilon = \widehat{\epsilon}\Delta^2$, $\widehat{\epsilon} \in (0,1]$ следуют неравенства

$$\int\limits_a^b \frac{(D_x^p g)^2}{\Delta^{2k-2p}} dx \leqslant \widehat{\epsilon}^{k-p} \int\limits_a^b (D_x^k g)^2 dx + \frac{G_k}{\widehat{\epsilon}^p \Delta^{2k}} \int\limits_a^b g^2 dx, \quad p = \overline{0,i}, \quad i = \overline{0,k}.$$

Делая в них замену $\epsilon = \widehat{\epsilon}^{k-p}$, $\epsilon \in (0,1]$, при $\Delta \leqslant 1$ выводим неравенства

$$\int\limits_a^b \frac{(D_x^p g)^2}{\Delta^{2i-2p}} dx \leqslant \epsilon \int\limits_a^b (D_x^k g)^2 dx + \frac{G_k \epsilon}{\epsilon^{\frac{k}{i-p}}\Delta^{2k}} \int\limits_a^b g^2 dx, \quad p = \overline{0,i-1}, \quad i = \overline{1,k},$$

$$\int\limits_a^b (D_x^i g)^2 dx \leqslant \epsilon \int\limits_a^b (D_x^k g)^2 dx + \frac{G_k \epsilon}{\epsilon^{\frac{k}{k-i}}\Delta^{2k}} \int\limits_a^b g^2 dx, \quad i = \overline{0,k-1}. \tag{2. 8}$$

Проинтегрировав их по $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}_n$, устанавливаем неравенства (2.7), (2.7$'$) при $\Delta \leqslant 1$. Пусть теперь $\Delta > 1$, применяя неравенство (2.6) при $\varepsilon = 1$ для $D_x^q g$, выводим

$$\int\limits_a^b (D_x^i g)^2 dx \leqslant \int\limits_a^b \left\{(D_x^k g)^2 + X_{k-q}G_{k-q}(D_x^q g)^2\right\} dx, \quad i = \overline{q,k}. \tag{2. 9}$$

Проинтегрировав (2.9) по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$, получаем (2.7$'$).

Снова запишем неравенство (2.6) при $\varepsilon = \widehat{\delta}\Delta^2,\ \widehat{\delta} \in (0,1)$

$$\Delta^{2p-2i} \int_a^b (D_x^p g)^2 dx \leqslant \widehat{\delta}^{i-p} \int_a^b (D_x^i g)^2 dx + \frac{G_i}{\widehat{\delta}^p \Delta^{2i}} \int_a^b g^2 dx, \quad p = \overline{1, i-1}. \tag{2. 10}$$

Соединив (2.10) с (2.9), при $\Delta > 1,\ p = \overline{1, i-1},\ i = \overline{q, k}$ получаем

$$\Delta^{2p-2i} \int_a^b (D_x^p g)^2 dx \leqslant \widehat{\delta}^{i-p} \int_a^b \left\{ (D_x^k g)^2 + X_{k-q} G_{k-q} (D_x^q g)^2 \right\} dx + \frac{G_i}{\widehat{\delta}^p \Delta^{2i}} \int_a^b g^2 dx. \tag{2. 11}$$

Полагая $\widehat{\epsilon} = \widehat{\delta}^{i-p}$, из (2.11) при $p = \overline{1, i-1},\ i = \overline{q, k}$ выводим неравенства

$$\Delta^{2p-2i} \int_a^b (D_x^p g)^2 dx \leqslant \widehat{\epsilon} \int_a^b \left\{ (D_x^k g)^2 + X_{k-q} G_{k-q} (D_x^q g)^2 \right\} dx + \frac{\widehat{\epsilon} G_k}{\widehat{\epsilon}^{\frac{k}{i-p}} \Delta^{2q}} \int_a^b g^2 dx.$$

В итоге, делая замену $\epsilon = G_{k-q}\widehat{\epsilon}$, проинтегрировав их по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$, получаем (2.7).

Лемма 2. *Пусть* $\Delta = b - a,\ q \geq 0,\ \overline{\alpha} = (i, \alpha)$ *и символ* $A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z})$ *псевдодифференциального оператора* $T^{\overline{\alpha}}$ *удовлетворяет условию* (1.48). *Тогда существует положительная постоянная* $\widetilde{C}(A, k, q)$ *такая, что для любой функции* $g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ *при любом* $\epsilon \in (0, 1]$ *справедливы неравенства:*

$$\frac{\|T^{\overline{\alpha}} D_x^p g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2(i-p)}} \leqslant \epsilon \|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q,(a,b)}} + \frac{\epsilon \widetilde{C} \|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\epsilon^{\frac{k}{i-p}} \Delta^{2[k,q]}}, \quad p = \overline{0, i-1}, \tag{2. 12}$$

$$\|T^{\overline{\alpha}} D_x^i g\|^2_{\Pi_a^b} \leqslant \widetilde{C} \left(\|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q,(a,b)}} + \frac{\|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2[k,q]}} \right), \quad \overline{\alpha} \in \mathcal{S}. \tag{2.12$'$}$$

Доказательство. Сначала для $\Pi_0^1,\ \overline{\alpha} \in \mathcal{S},\ p = \overline{0, i-1},\ \epsilon \in (0, 1]$ установим неравенства

$$\frac{\|T^{\overline{\alpha}} D_{\widehat{x}}^p g\|^2_{\Pi_0^1}}{\Delta^{2i}} \leqslant \epsilon \left(\|BF[g]\|^2_{\Pi_0^1} + \frac{\|D_{\widehat{x}}^k g\|^2_{\Pi_0^1}}{\Delta^{2k}} + X_{k-q} \frac{\|D_{\widehat{x}}^q g\|^2_{\Pi_0^1}}{\Delta^{2q}} + \widetilde{C} \frac{\|g\|^2_{\Pi_0^1}}{\epsilon^{\frac{k}{i-p}} \Delta^{2[k,q]}} \right), \tag{2. 13}$$

$$\frac{\|T^{\overline{\alpha}} D_{\widehat{x}}^i g\|^2_{\Pi_0^1}}{\Delta^{2i}} \leqslant \widetilde{C} \left(\|BF[g]\|^2_{\Pi_0^1} + \frac{\|D_{\widehat{x}}^k g\|^2_{\Pi_0^1}}{\Delta^{2k}} + X_{k-q} \frac{\|D_{\widehat{x}}^q g\|^2_{\Pi_0^1}}{\Delta^{2q}} + \frac{\|g\|^2_{\Pi_0^1}}{\Delta^{2[k,q]}} \right). \tag{2.13$'$}$$

Далее, чтобы получить (2.12), (2.12$'$), достаточно сделать замену переменной $x = a + \widehat{x}\Delta$ в (2.13), (2.13$'$).

На первом шаге будем рассматривать функции $g(\widehat{x}, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Pi_0^1)$. Для них справедливо разложение в ряд Фурье

$$g(\widehat{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^\infty a_j(\mathbf{y}) \sin j\pi\widehat{x}, \quad a_j(\mathbf{y}) = 2 \int_0^1 g(\widehat{x}, \mathbf{y}) \sin j\pi\widehat{x} d\widehat{x}. \tag{2. 14}$$

Продифференцировав (2.14) p раз по $\widehat{x}$ и применив оператор $T^{\overline{\alpha}}$, получаем равенства Парсеваля

$$\int_0^1 |T^{\overline{\alpha}} D_{\widehat{x}}^p g|^2 d\widehat{x} = E_p \sum_{j=1}^\infty j^{2p} |T^{\overline{\alpha}} a_j(\mathbf{y})|^2, \quad p = \overline{0, i}.$$

Интегрируя их по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ и пользуясь равенством Планшереля, получаем

$$\|T^{\overline{\alpha}} D^p_{\widehat{x}} g\|^2_{\Pi^1_0} = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int\limits_{\mathbb{R}_n} |\ A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 |\widetilde{a}_j(\mathbf{z})\ |^2\ d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \tag{2. 15}$$

Здесь функции $\widetilde{a}_j(\mathbf{z})$ являются преобразованием Фурье функций $a_j(\mathbf{y})$. В частности, справедливо соотношение

$$\|D^p_{\widehat{x}} g\|^2_{\Pi^1_0} = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int\limits_{\mathbb{R}_n} |\widetilde{a}_j(\mathbf{z})\ |^2\ d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \tag{2.15$'$}$$

Установим для $\overline{\alpha} \in \mathcal{S},\ p = \overline{0, i-1},\ \widehat{\epsilon} \in (0,1)$ неравенства

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant \widehat{\epsilon} \left\{ X_{k-q} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2q} + \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} + B^2(\mathbf{z}) + \frac{A^{2k/(i-p)}}{\widehat{\epsilon}^{k/(i-p)} \Delta^{2[k,q]}} \right\}, \tag{2. 16}$$

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2i}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 \left\{ X_{k-q} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2q} + \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} + B^2(\mathbf{z}) + \frac{1}{\Delta^{2[k,q]}} \right\}. \tag{2.16$'$}$$

Рассмотрим сначала случай $\Delta < 1,\ B(\mathbf{z}) < 1$. Используя условие (1.48) и неравенство Юнга при $p = \overline{1, i-1}$, для $p = \overline{0, i-1}$ получаем оценки

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2p} \frac{A^2}{\Delta^{2(k-p)}} \leqslant X_p \widehat{\epsilon} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} + \frac{A^{2k/(i-p)} \widehat{\epsilon}}{\widehat{\epsilon}^{k/(i-p)} \Delta^{2k}}. \tag{2. 17}$$

В случае $p = i$ также выводим

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2i}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2i} \leqslant A^2 \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k}, \quad i = \overline{0, k}. \tag{2.17$'$}$$

Далее рассмотрим случай $B(\mathbf{z}) \geq 1$. Согласно условию (1.48), используя неравенство Юнга для $i = \overline{1, k-1}$, выводим

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} B^{2(1-i/k)}(\mathbf{z}) \leqslant X_{k-i} \widehat{\epsilon} B^2(\mathbf{z}) + \frac{A^{2k/i} j^{2pk/i}}{\widehat{\epsilon}^{(k-i)/i} \Delta^{2k}}, \quad i = \overline{1, k}. \tag{2. 18}$$

Применяя еще раз неравенство Юнга при $p = \overline{1, i-1}$, для $\widehat{\delta} \in (0,1)$ устанавливаем неравенства

$$j^{2pk/i} A^{2k/i} \leqslant X_p \widehat{\delta} j^{2k} + \frac{A^{2k/(i-p)}}{\widehat{\delta}^{p/(i-p)}}, \quad p = \overline{0, i-1}. \tag{2. 19}$$

Положим $\widehat{\delta} = \widehat{\epsilon}^{k/i}$, тогда $\widehat{\epsilon}^{(k-i)/i} \widehat{\delta}^{p/(i-p)} = \widehat{\epsilon}^{-1} \widehat{\epsilon}^{k/(i-p)}$. Соединяя (2.18) и (2.19), получаем

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant \widehat{\epsilon} \left(B^2(\mathbf{z}) + \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} + \frac{A^{2k/(i-p)}}{\widehat{\epsilon}^{k/(i-p)} \Delta^{2k}} \right), \quad p = \overline{0, i-1}. \tag{2. 20}$$

Для $p = i$, применяя неравенство Юнга при $i = \overline{1, k-1}$, для $i = \overline{0, k}$ выводим

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2i}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 B^{2(1-i/k)} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2i} \leqslant A^2 \left(X_{k-i} B^2(\mathbf{z}) + X_i \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} \right). \tag{2.20$'$}$$

Пусть $\Delta \geq 1,\ B(\mathbf{z}) < 1$, тогда, ввиду (1.48), справедливы неравенства

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 B^{2\max(0, 1-i/q)}(\mathbf{z}) \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}}. \tag{2. 21}$$

Пусть $i \geq q \geq 0$, тогда из (2.21), воспользовавшись неравенством Юнга при $p = \overline{1, i-1}$, выводим неравенства

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2p} \frac{A^2}{\Delta^{2(i-p)}} \leqslant X_p \widehat{\epsilon} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2i} + \frac{A^{2i/(i-p)} \widehat{\epsilon}}{\widehat{\epsilon}^{i/(i-p)} \Delta^{2i}} \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{\epsilon} \left(X_{k-q} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2q} + \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} + \frac{A^{2k/(i-p)}}{\widehat{\epsilon}^{k/(i-p)} \Delta^{2q}} \right), \quad p = \overline{0, i-1}. \qquad (2.\ 22)$$

Для $p = i$ из (2.21) получаем неравенства

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2i}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2i} \leqslant A^2 \left(\left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} + X_{k-q} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2q} \right). \qquad (2.22')$$

При $i < q,\ q > 0$, применяя неравенство Юнга для $i = \overline{1, q-1}$, из (2.21) выводим

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 B^{2(1-i/q)}(\mathbf{z}) \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant \widehat{\epsilon} B^2(\mathbf{z}) + \frac{A^{2q/i} j^{2pq/i}}{\widehat{\epsilon}^{(q-i)/i} \Delta^{2q}}. \qquad (2.\ 23)$$

Используя неравенство Юнга для $p = \overline{1, i-1}$, устанавливаем

$$j^{2pq/i} A^{2q/i} \leqslant X_p \widehat{\delta} j^{2q} + \frac{A^{2q/(i-p)}}{\widehat{\delta}^{p/(i-p)}}, \quad p = \overline{0, i-1}. \qquad (2.\ 24)$$

Положим $\widehat{\delta} = \widehat{\epsilon}^{q/i}$, тогда $\widehat{\epsilon}^{(q-i)/i} \widehat{\delta}^{p/(i-p)} = \widehat{\epsilon}^{-1} \widehat{\epsilon}^{q/(i-p)}$. Соединяя (2.23), (2.24) устанавливаем неравенства

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leqslant \widehat{\epsilon} \left(B^2(\mathbf{z}) + \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2q} + \frac{A^{2q/(i-p)}}{\widehat{\epsilon}^{q/(i-p)} \Delta^{2q}} \right), \quad p = \overline{0, i-1}. \qquad (2.\ 25)$$

При $p = i$ из (2.21), применяя неравенство Юнга для $i = \overline{1, q-1}$, для $i = \overline{0, q-1}$ выводим неравенства

$$|A^{\overline{\alpha}}(\widehat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2i}}{\Delta^{2i}} \leqslant A^2 B^{2(1-i/q)}(\mathbf{z}) \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2i} \leqslant A^2 \left(B^2(\mathbf{z}) + X_i \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2q} \right). \qquad (2.25')$$

Установленные неравенства (2.17), (2.20), (2.22), (2.25), (2.17′), (2.20′), (2.22′), (2.25′) обеспечивают, соответственно, неравенства (2.16), (2.16′).

Подставляя (2.16) в (2.15), для $\widehat{\epsilon} \in (0, 1)$ при $\overline{\alpha} \in \mathcal{S},\ p = \overline{0, i-1}$ получим

$$\frac{\|T^{\overline{\alpha}} D^p_{\widehat{x}} g\|^2_{\Pi^1_0}}{\Delta^{2i}} \leqslant \widehat{\epsilon} E_p \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2k} + X_{k-q} \left(\frac{j}{\Delta}\right)^{2q} + B^2(\mathbf{z}) + \frac{A^{2k/(i-p)}}{\widehat{\epsilon}^{k/(i-p)} \Delta^{2[k,q]}} \right\} \|\widetilde{a}_j(\mathbf{z})\|^2_{\mathbb{R}_n}. \qquad (2.\ 26)$$

Пользуясь (2.15), (2.15′), из последнего выводим (2.13) с $\widetilde{C} = (A^2 E_p)^{k/(i-p)},\ \epsilon = \widehat{\epsilon} E_p$.

Докажем теперь неравенства (2.13) для функции $g(\widehat{x}, \mathbf{y}) \in C^\infty_0(\mathbb{R}_{n+1})$. Известно (см. [16], гл. III, § 4, п. 2), что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует оператор продолжения $E_{\widehat{x}} : C^\infty(\Pi^1_0) \to C^\infty(\Pi^2_{-1})$ такой, что $\overline{g}(\widehat{x}, \mathbf{y}) = E_{\widehat{x}}(g(\widehat{x}, \mathbf{y}))$, $\overline{g}\Big|_{\Pi^1_0} = g$. При этом справедливы неравенства

$$\|D^i_{\widehat{x}} \overline{g}\|^2_{\Pi^2_{-1}} \leqslant C_i \|D^i_{\widehat{x}} g\|^2_{\Pi^1_0}. \qquad (2.\ 27)$$

Поскольку оператор $E_{\widehat{x}}$ коммутирует с преобразованием Фурье по $\mathbf{y}$, то справедливо неравенство

$$\|BF[\overline{g}]\|^2_{\Pi^2_{-1}} \leqslant C_0 \|BF[g]\|^2_{\Pi^1_0}. \qquad (2.\ 28)$$

Пусть $\omega(\widehat{x}) \in C_0^\infty(-1,2)$ – срезающая функция, не превосходящая единицы, равная единице на $[0,1]$. Тогда для функции $v=\overline{g}\omega$, принадлежащей $C_0^\infty(\Pi^2_{-1})$, при помощи (2.13) для $\overline{\epsilon}\in(0,1]$, $p=\overline{0,i-1}$, $\overline{\alpha}\in\mathcal{S}$ можно установить, что

$$\frac{\|T^{\overline{\alpha}}D^p_{\widehat{x}}v\|^2_{\Pi^2_{-1}}}{\Delta^{2i}} \leqslant \overline{\epsilon}\frac{(AE_p)^{2k/(i-p)}\|v\|^2_{\Pi^2_{-1}}}{\overline{\epsilon}^{k/(i-p)}\Delta^{2[k,q]}}+ \\ +\overline{\epsilon}\left\{3^{2k}\frac{\|D^k_{\widehat{x}}v\|^2_{\Pi^2_{-1}}}{\Delta^{2k}}+X_{k-q}3^{2q}\frac{\|D^q_{\widehat{x}}v\|^2_{\Pi^2_{-1}}}{\Delta^{2q}}+\|B(\mathbf{z})F[v]\|^2_{\Pi^2_{-1}}\right\}. \tag{2. 29}$$

Поскольку срезающая функция $\omega(\widehat{x})$ зависит только от $\widehat{x}$, то следствием неравенства (2.28) является оценка

$$\|BF[v]\|^2_{\Pi^2_{-1}} \leqslant C_0\|BF[g]\|^2_{\Pi^1_0}. \tag{2. 30}$$

Кроме того, пользуясь (2.27), для $i=\overline{0,k}$ выводим соотношения

$$\|D^i_{\widehat{x}}v\|^2_{\Pi^2_{-1}} \leqslant \left(\sum_{r=0}^{i} C_i^r\|D^{i-r}_{\widehat{x}}\omega D^r_{\widehat{x}}\overline{g}\|_{\Pi^2_{-1}}\right)^2 \leqslant E_1(i)\sum_{r=0}^{i}\|D^r_{\widehat{x}}\overline{g}\|^2_{\Pi^2_{-1}} \leqslant E_1(i)\sum_{r=0}^{i}C_r\|D^r_{\widehat{x}}g\|^2_{\Pi^1_0}.$$

Далее применим неравенства (2.6) с $\varepsilon=1$, имеющие в данном случае следующий вид:

$$\|D^r_{\widehat{x}}g\|^2_{\Pi^1_0} \leqslant \|D^i_{\widehat{x}}g\|^2_{\Pi^1_0}+G_i\|g\|^2_{\Pi^1_0}, \quad r=\overline{0,i}.$$

В результате получаем

$$\|D^i_{\widehat{x}}v\|^2_{\Pi^2_{-1}} \leqslant E_2(i)\left(\|D^i_{\widehat{x}}g\|^2_{\Pi^1_0}+\|g\|^2_{\Pi^1_0}\right), \quad i=\overline{0,k}. \tag{2. 31}$$

Подставляя (2.31), (2.30) в (2.29) для $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$, для $p=\overline{0,i-1}$ выводим неравенства

$$\frac{\|T^{\overline{\alpha}}D^p_{\widehat{x}}g\|^2_{\Pi^1_0}}{\Delta^{2i}} \leqslant \overline{\epsilon}\overline{C}\left(\|BF[g]\|^2_{\Pi^1_0}+\frac{\|D^k_{\widehat{x}}g\|^2_{\Pi^1_0}}{\Delta^{2k}}+X_{k-q}\frac{\|D^q_{\widehat{x}}g\|^2_{\Pi^1_0}}{\Delta^{2q}}+\frac{\|g\|^2_{\Pi^1_0}}{\overline{\epsilon}^{k/(i-p)}\Delta^{2[k,q]}}\right), \tag{2. 32}$$

Делая замену $\epsilon=\overline{\epsilon}\overline{C}$, выводим (2.13) для $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$. Сложив неравенства (2.13), записанные для действительной и мнимой частей, устанавливаем (2.13) для $g\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$. Итак, (2.13) доказано в общей ситуации.

Неравенства (2.13′) выводятся из (2.16′) аналогичным образом. Лемма доказана.

Определим невозрастающую функцию $\eta(x)\in C^\infty(-\infty,1)$, равную 1 и 0 при $x\leqslant 0$ и $x\geq 1$, соответственно, и на интервале $\left(\frac{1}{2},1\right)$ равную $1-x$. Для $x\in(0,1)$ справедливы неравенства

$$|D^s\eta|\leqslant \widehat{c}_s, \quad s=\overline{0,\infty}.$$

Рассмотрим функцию $\eta_{a,b}(x)=\eta\left(\frac{x-a}{\Delta}\right)$, $\Delta=b-a$, для нее справедливы неравенства

$$|D^s\eta_{a,b}|\leqslant\frac{\widehat{c}_s}{\Delta^s}, \quad s=\overline{0,\infty}. \tag{2. 33}$$

Нетрудно показать, что

$$D^p\eta^k_{a,b}=\sum_{s=1}^{p}B_{sp}^{p_0p_1\dots p_s}\prod_{\substack{p_1+\dots+sp_s=p\\ p_0+p_1\dots+p_s=k}}\eta^{p_0}_{a,b}(D\eta_{a,b})^{p_1}\cdots(D^s\eta_{a,b})^{p_s}, \quad p=\overline{1,k},$$

где $B_{sp}^{p_0p_1\dots p_s}$ – целые неотрицательные числа. Очевидно, $p_0\geq k-p$.

Ввиду (2.33) при $x\in(a,b)$, $p=\overline{1,k}$ справедливы неравенства

$$|\ D^p\eta^k_{a,b}\ |\leqslant\sum_{s=1}^{p}B_{sp}^{p_0p_1\dots p_s}\prod_{\substack{p_1+\dots+sp_s=p\\ p_0+p_1+\dots+p_s=k}}\eta^{p_0}_{a,b}\left(\frac{\widehat{c}_1}{\Delta}\right)^{p_1}\left(\frac{\widehat{c}_s}{\Delta^s}\right)^{p_s}\leqslant\frac{c_{p,k}\eta^{k-p}_{a,b}}{\Delta^p}. \tag{2. 34}$$

Для функции $\rho^{[a,b]}$ приведем некоторые неравенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\text{если } \rho \leqslant \varrho, \text{ то } \rho^{[a,b]} \leqslant \varrho^{[a,b]}; \tag{2. 35}$$

$$\text{если } c \geq 1, \text{ то } (c\rho)^{[a,b]} \leqslant \rho^{[a,b]} c^{\max(a,b)}. \tag{2. 36}$$

Лемма 3. *Пусть* $\Delta = b - a$, $q \geq 0$, $\overline{\alpha} = (i, \alpha)$ *и символ* $A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z})$ *псевдодифференциального оператора* $T^{\overline{\alpha}}$ *удовлетворяет условию* (1.48), *тогда существует положительная постоянная* $C(A, k, q)$ *такая, что для любой функции* $g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ *при любом* $\delta \in (0, 1]$ *для* $p = \overline{0, i-1}$ *справедливы неравенства:*

$$\frac{\|\eta_{a,b}^{k-i+p} T^{\overline{\alpha}} D_x^p g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2(i-p)}} \leqslant \delta \int\limits_a^b \eta_{a,b}^{2k} \|g(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} dx + \frac{C\delta}{\delta^{\frac{k}{i-p}}} \frac{\|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2[k,q]}}, \tag{2. 37}$$

$$\|\eta_{a,b}^k T^{\overline{\alpha}} D_x^i g\|^2_{\Pi_a^b} \leqslant C \left(\int\limits_a^b \eta_{a,b}^{2k} \|g(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} dx + \frac{\|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2[k,q]}} \right), \ \overline{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}; \tag{2.37$'$}$$

$$\frac{\|\eta_{a,b}^{k-i+p} D_x^p g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2(i-p)}} \leqslant \delta \int\limits_a^b \eta_{a,b}^{2k} \left(\|D_x^k g(x)\|^2_{\mathbb{R}_n} + X_{k-q} \|D_x^q g(x)\|^2_{\mathbb{R}_n} \right) dx + \frac{C\delta}{\delta^{\frac{k}{i-p}}} \frac{\|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2[k,q]}}, \tag{2. 38}$$

$$\|\eta_{a,b}^k D_x^i g\|^2_{\Pi_a^b} \leqslant C \int\limits_a^b \eta_{a,b}^{2k} \left(\|D_x^k g(x)\|^2_{\mathbb{R}_n} + X_{k-q} \|D_x^q g(x)\|^2_{R_n} \right) dx + C \frac{\|g\|^2_{\Pi_a^b}}{\Delta^{2[k,q]}}, \quad i = \overline{q, k}. \tag{2.38$'$}$$

Доказательство. Положим $b_r = b - \frac{\Delta}{2^r}$, $\Delta_r = \frac{\Delta}{2^{r+1}}$, $r = \overline{0, \infty}$. Для функции $\eta_{a,b}(x)$ справедливы равенства

$$\max_{[b_r, b_{r+1}]} \eta_{a,b}(x) = \frac{1}{2^r}, \quad \min_{[b_r, b_{r+1}]} \eta_{a,b}(x) = \frac{1}{2^{r+1}}, \quad r = \overline{0, \infty}. \tag{2. 39}$$

Сначала выведем неравенства (2.37). Применяя (2.39), (2.12), (2.35), (2.36), для $p = \overline{0, i-1}$, $r = \overline{0, \infty}$ оценим интегралы

$$\int\limits_{\Pi_{b_r}^{b_{r+1}}} \frac{\eta_{a,b}^{2(k-i+p)} |T^{\overline{\alpha}} D_x^p g|^2}{\Delta^{2(i-p)}} dx d\mathbf{y} \leqslant 2^{-2(rk+i-p)} \left(\epsilon \int\limits_{b_r}^{b_{r+1}} \|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} dx + \frac{\epsilon \widetilde{C} 2^{2k(r+1)}}{\epsilon^{\frac{k}{i-p}} \Delta^{2[k,q]}} \|g\|^2_{\Pi_{b_r}^{b_{r+1}}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon 2^{2(k-i+p)} \int\limits_{b_r}^{b_{r+1}} \eta_{a,b}^{2k} \|g(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} dx + \frac{\epsilon \widetilde{C} 2^{2(k-i+p)}}{\epsilon^{\frac{k}{i-p}} \Delta^{2[k,q]}} \|g\|^2_{\Pi_{b_r}^{b_{r+1}}}.$$

Положим $\epsilon = \delta 2^{-2(k-i+p)}$, $\delta \in (0, 1]$. Для $p = \overline{0, i-1}$ имеем

$$\frac{\epsilon 2^{2(k-i+p)}}{\epsilon^{\frac{k}{i-p}}} = \left(\frac{2^{2k}}{\delta} \right)^{\frac{k-i+p}{i-p}} \leqslant \frac{\delta}{\delta^{\frac{k}{i-p}}} 2^{2k(k-1)}.$$

Таким образом, для $p = \overline{0, i-1}$, $r = \overline{0, \infty}$ установлены неравенства

$$\int\limits_{\Pi_{b_r}^{b_{r+1}}} \frac{\eta_{a,b}^{2(k-i+p)} |T^{\overline{\alpha}} D_x^p g|^2}{\Delta^{2(i-p)}} dx d\mathbf{y} \leqslant \delta \int\limits_{b_r}^{b_{r+1}} \eta_{a,b}^{2k} \|g(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} dx + \frac{C\delta}{\Delta^{2[k,q]} \delta^{\frac{k}{i-p}}} \|g\|^2_{\Pi_{b_r}^{b_{r+1}}}.$$

Суммируя их по $r = \overline{0, \infty}$, выводим (2.37).

Применяя (2.39), (2.12′), (2.35), (2.36) выводим неравенства

$$\int\limits_{\Pi_{b_r}^{b_{r+1}}} \eta_{a,b}^{2k}|T^{\overline{\alpha}}D_x^i g|^2 dxd\mathbf{y} \leqslant 2^{-2rk}\widetilde{C}\left(\int\limits_{b_r}^{b_{r+1}} \|g(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}}dx + \frac{2^{2k(r+1)}}{\Delta^{2[k,q]}}\|g\|^2_{\Pi_{b_s}^{b_{s+1}}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2k}\widetilde{C}\int\limits_{b_r}^{b_{r+1}} \eta_{a,b}^{2k}\|g\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}}dx + \widetilde{C}\frac{2^{2k}}{\Delta^{2[k,q]}}\|g\|^2_{\Pi_{b_r}^{b_{r+1}}}, \quad r=\overline{0,\infty}.$$

Суммируя их по $r=\overline{0,\infty}$, выводим (2.37′). Неравенства (2.38), (2.38′) выводятся аналогичным образом с применением неравенств (2.7), (2.7′).

3. Теоремы единственности

Установим оценку Сен-Венановского типа для эллиптического уравнения второго порядка (1.20).

Предложение 1. *Пусть для области* Ω *существует* λ*-разбиение* $\Omega=\bigcup\limits_{N=0}^{\infty}\Omega^{(N)}$, *подчиняющееся требованию* (1.12) *и* $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^{\infty}$ — *произвольная последовательность положительных чисел. Тогда найдутся положительные постоянные* $\kappa_2(\Xi_2)$ *и* $M_1,\ M_2(\Xi_2)$ *такие, что если* $\Phi(\overline{\mathbf{y}})=\Psi(\overline{\mathbf{y}})=0,\ \mathbf{\Phi}(\overline{\mathbf{y}})=\mathbf{0}$ *в* $\Omega^{(N)+\varepsilon_N}$ *при некотором* $N\in\mathbb{N}$*, то для решения* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.20)*,* (1.21) *при всех* $\nu=\overline{0,N-1}$ *справедливы оценки*

$$\|\nabla u\|_{\Omega^{(\nu)}} \leqslant M_1\frac{\exp\{-\kappa_2(N-\nu)\}}{\varepsilon_N}\|u\|_{\Omega_{(N)}^{(N)+\varepsilon_N}}; \tag{3. 1}$$

если $\Psi(\overline{\mathbf{y}})=0,\ \mathbf{\Phi}(\overline{\mathbf{y}})=\mathbf{0}$ *в* $\Omega^{(N+1)}$ *при некотором* $N\in\mathbb{N}$*, то для решения* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.20)*,* (1.21) *при всех* $\nu=\overline{0,N-1}$ *имеют место неравенства*

$$\|\nabla u\|_{\Omega^{(\nu)}} \leqslant M_2\exp\{-\kappa_2(N-\nu)\}\,\|\nabla u\|_{\Omega_{(N)}^{(N+1)}}. \tag{3. 2}$$

Доказательство. Пусть $\xi_2(\overline{\mathbf{y}})$ липшицева неотрицательная срезающая функция такая, что $\mathbf{\Phi}\xi_2\equiv\mathbf{0},\ \Phi\xi_2=\Psi\xi_2\equiv 0$. Положим в (2.3) $v=(u-\Psi)\xi_2^2\in\overset{\circ}{H}{}_2^1(\Omega)$, установим тождество

$$(u,u\xi_2^2)_{\mathcal{A}}=0.$$

Используя (1.23), (1.22), получаем

$$\widehat{a}\int\limits_{\Omega}\xi_2^2\mid\nabla u\mid^2 d\overline{\mathbf{y}} \leqslant 2\overline{a}(n+1)\int\limits_{\Omega}\mid u\mid\mid\nabla u\mid\mid\nabla\xi_2\mid\xi_2 d\overline{\mathbf{y}}=I_2. \tag{3. 3}$$

Зафиксируем натуральное число N и целое неотрицательное число $\nu\leqslant N-1$. Выберем κ_2 так, чтобы

$$2\sqrt{\theta}\kappa_2 e^{2\kappa_2}\overline{a}(n+1)\leqslant\widehat{a}. \tag{3. 4}$$

Построим определенную в Ω липшицеву функцию $\overline{\xi}_2(\overline{\mathbf{y}})$, удовлетворяющую условиям

$$\overline{\xi}_2(\overline{\mathbf{y}})=\begin{cases} 1, \quad \overline{\mathbf{y}}\in\overline{\Omega^{(\nu)}}; \\ \quad\exp\left(-\kappa_2(j-\nu)\right)\exp\left(\kappa_2\min\left(1,\dfrac{\operatorname{dist}(S_i^{(j)},\overline{\mathbf{y}})}{t_i^{(j)}}\right)\right), \\ \quad\overline{\mathbf{y}}\in\omega_i^{(j)}, \quad i=\overline{1,p^{(j)}}, \quad j=\overline{\nu+1,N}; \\ \exp\left(-\kappa_2(N-\nu)\right)\min\left(1,\dfrac{\operatorname{dist}(S^{(N)+\varepsilon_N},\overline{\mathbf{y}})}{\varepsilon_N}\right), \quad \overline{\mathbf{y}}\in\Omega_{(N)}^{(N)+\varepsilon_N}; \\ 0, \quad \overline{\mathbf{y}}\in\Omega\setminus\Omega^{(N)+\varepsilon_N}. \end{cases}$$

Здесь $S^{(N)+\varepsilon_N} = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^{(N)}} \mid \mathrm{dist}(\overline{\mathbf{y}}, S^{(N)}) = \varepsilon_N\}$. Нетрудно установить следующие соотношения

$$|\nabla\overline{\xi}_2| \leqslant \frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{\varepsilon_N}, \quad \overline{\mathbf{y}} \in \Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}; \tag{3. 5}$$

$$|\nabla\overline{\xi}_2| \leqslant \frac{\kappa_2\overline{\xi}_2}{t_i^{(j)}}, \quad \overline{\mathbf{y}} \in \omega_i^{(j)}, \quad i = \overline{1, p^{(j)}}, \quad j = \overline{\nu+1, N}; \tag{3. 6}$$

$$\max_{\omega_i^{(j)}} \overline{\xi}_2(\overline{\mathbf{y}}) = e^{\kappa_2} \min_{\omega_i^{(j)}} \overline{\xi}_2(\overline{\mathbf{y}}), \quad i = \overline{1, p^{(j)}}, \quad j = \overline{\nu+1, N}. \tag{3. 7}$$

В неравенстве (3.3) положим $\xi_2 = \overline{\xi}_2$, пользуясь тем, что $\nabla\overline{\xi}_2 \equiv 0$ вне $\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(\nu)}$, применяя (3. 5), (3. 6), выводим:

$$\overline{I}_2 = 2\overline{a}(n+1)\sum_{j=\nu}^{N-1} \int\limits_{\Omega^{(j+1)}_{(j)}} \overline{\xi}_2|u||\nabla u||\nabla\overline{\xi}_2|d\overline{\mathbf{y}} + 2\overline{a}(n+1)\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} \overline{\xi}_2|u||\nabla u||\nabla\overline{\xi}_2|d\overline{\mathbf{y}} \leqslant \tag{3. 8}$$

$$\leqslant 2\overline{a}(n+1)\sum_{j=\nu+1}^{N}\sum_{i=1}^{p^{(j)}} \int\limits_{\omega_i^{(j)}} |u||\nabla u|\frac{\kappa_2\overline{\xi}_2^2}{t_i^{(j)}}d\overline{\mathbf{y}} + 2\overline{a}(n+1)\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} \overline{\xi}_2|u||\nabla u|\frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{\varepsilon_N}d\overline{\mathbf{y}}.$$

Для $j = \overline{1, \infty}$ установим соотношения

$$\int\limits_{\omega_i^{(j)}} \frac{|\, u \,||\, \nabla u \,|}{t_i^{(j)}} d\overline{\mathbf{y}} \leqslant \sqrt{\theta}\int\limits_{\omega_i^{(j)}} |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}}, \quad i = \overline{1, p^{(j)}}. \tag{3. 9}$$

Для этого достаточно воспользоваться определением (1.7) и условием (1.8):

$$\int\limits_{\omega_i^{(j)}} \frac{|u||\nabla u|}{t_i^{(j)}} d\overline{\mathbf{y}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\omega_i^{(j)}} |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\omega_i^{(j)}} \frac{u^2}{\left(t_i^{(j)}\right)^2} d\overline{\mathbf{y}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\omega_i^{(j)}} |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} + \frac{\theta\lambda_i^{(j)}}{2\varepsilon}\int\limits_{\omega_i^{(j)}} u^2 d\overline{\mathbf{y}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{\theta}{\varepsilon}\right)\int\limits_{\omega_i^{(j)}} |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}}.$$

Выбрав $\varepsilon = \sqrt{\theta}$, выводим (3. 9). Ввиду (3. 7) из (3. 9) получаем неравенства

$$\int\limits_{\omega_i^{(j)}} \frac{\overline{\xi}_2^2|u||\nabla u|}{t_i^{(j)}} d\overline{\mathbf{y}} \leqslant e^{2\kappa_2}\sqrt{\theta}\int\limits_{\omega_i^{(j)}} \overline{\xi}_2^2|\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}}, \quad i = \overline{1, p^{(j)}}, \quad j = \overline{\nu+1, N}. \tag{3. 10}$$

Далее оценим интеграл

$$\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} \overline{\xi}_2|u||\nabla u|\frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{\varepsilon_N}d\overline{\mathbf{y}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} \overline{\xi}_2^2|\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} + \frac{\exp\left(-2\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{2\varepsilon_N^2\varepsilon}\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} u^2 d\overline{\mathbf{y}}.$$

Выбрав $\varepsilon = 2e^{2\kappa_2}\sqrt{\theta}\kappa_2$, установим неравенство

$$\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} \overline{\xi}_2|u||\nabla u|\frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{\varepsilon_N}d\overline{\mathbf{y}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{2\kappa_2}\sqrt{\theta}\kappa_2\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} \overline{\xi}_2^2|\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} + \frac{\exp\left(-2\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{4e^{2\kappa_2}\sqrt{\theta}\kappa_2\varepsilon_N^2}\int\limits_{\Omega^{(N)+\varepsilon_N}_{(N)}} u^2 d\overline{\mathbf{y}}.$$

Пользуясь (3. 10) и последним неравенством, из (3. 8) получим оценку

$$\overline{I}_2 \leqslant 2\overline{a}(n+1)\kappa_2\sqrt{\theta}e^{2\kappa_2} \int\limits_{\Omega_{(\nu)}^{(N)+\varepsilon_N}} \overline{\xi}_2^2|\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} +$$

$$+\frac{\overline{a}(n+1)}{2\sqrt{\theta}\kappa_2}\frac{\exp(-2\kappa_2\{N-\nu+1\})}{\varepsilon_N^2}\int\limits_{\Omega_{(N)}^{(N)+\varepsilon_N}} u^2 d\overline{\mathbf{y}}. \qquad (3.\ 11)$$

Соединяя (3.3) при $\xi_2 = \overline{\xi}_2$ и (3.11), пользуясь (3.4), выводим соотношение

$$\|\nabla u\|^2_{\Omega^{(\nu)}} \leqslant \frac{\overline{a}(n+1)}{2\widehat{a}\sqrt{\theta}\kappa_2}\frac{\exp\left(-2\kappa_2\{N-\nu+1\}\right)}{\varepsilon_N^2}\|u\|^2_{\Omega_{(N)}^{(N)+\varepsilon_N}}.$$

Неравенство (3.1) доказано.

Теперь докажем неравенство (3.2). Построим определенную в Ω липшицеву функцию $\widehat{\xi}_2(\overline{\mathbf{y}})$ такую, что

$$\widehat{\xi}_2(\overline{\mathbf{y}}) = \begin{cases} \overline{\xi}_2(\overline{\mathbf{y}}), \quad \overline{\mathbf{y}} \in \Omega^{(N)}; \\ \exp\left(-\kappa_2(N-\nu)\right)\min\left(1, \dfrac{\operatorname{dist}(S^{(N+1)}, \overline{\mathbf{y}})}{t_i^{(N+1)}}\right), \\ \overline{\mathbf{y}} \in \omega_i^{(N+1)}, \quad i = \overline{1, p^{(N+1)}}; \\ 0, \quad \overline{\mathbf{y}} \in \Omega \setminus \Omega^{(N+1)}. \end{cases}$$

Очевидно, справедливы неравенства

$$|\nabla\widehat{\xi}_2| \leqslant \frac{\exp(-\kappa_2\{N-\nu\})}{t_i^{(N+1)}}, \quad \overline{\mathbf{y}} \in \omega_i^{(N+1)}, \quad i = \overline{1, p^{(N+1)}}. \qquad (3.\ 12)$$

В неравенстве (3.3) положим $\xi_2 = \widehat{\xi}_2$, пользуясь тем, что $\nabla\widehat{\xi}_2 \equiv 0$ вне $\Omega_{(\nu)}^{(N+1)}$, применяя (3. 12), (3. 6), выводим:

$$\widehat{I}_2 = 2\overline{a}(n+1)\sum_{j=\nu}^{N-1}\int\limits_{\Omega_{(j)}^{(j+1)}} \overline{\xi}_2|u||\nabla u||\nabla\overline{\xi}_2| d\overline{\mathbf{y}} +$$

$$+2\overline{a}(n+1)\int\limits_{\Omega_{(N)}^{(N+1)}} \widehat{\xi}_2|u||\nabla u||\nabla\widehat{\xi}_2| d\overline{\mathbf{y}} \leqslant 2\overline{a}(n+1)\sum_{j=\nu+1}^{N}\sum_{i=1}^{p^{(j)}}\int\limits_{\omega_i^{(j)}} |u||\nabla u|\frac{\kappa_2\overline{\xi}_2^2}{t_i^{(j)}} d\overline{\mathbf{y}} + \qquad (3.\ 13)$$

$$+2\overline{a}(n+1)\sum_{i=1}^{p^{(N+1)}}\int\limits_{\omega_i^{(N+1)}} \widehat{\xi}_2|u||\nabla u|\frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{t_i^{(N+1)}} d\overline{\mathbf{y}}.$$

Оценим интегралы

$$\int\limits_{\omega_i^{(N+1)}} \widehat{\xi}_2|u||\nabla u|\frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{t_i^{(N+1)}} d\overline{\mathbf{y}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\omega_i^{(N+1)}} \widehat{\xi}_2^2|\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} + \frac{\exp\left(-2\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{2\varepsilon}\int\limits_{\omega_i^{(N+1)}} \frac{u^2}{\left(t_i^{(N+1)}\right)^2} d\overline{\mathbf{y}}, \quad i = \overline{1, p^{(N+1)}},$$

выбрав $\varepsilon = 2e^{2\kappa_2}\sqrt{\theta}\kappa_2$, воспользовавшись (1.7), (1.8), установим неравенства

$$\int\limits_{\omega_i^{(N+1)}} \widehat{\xi}_2 |u||\nabla u| \frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{t_i^{(N+1)}} d\overline{\mathbf{y}} \leqslant e^{2\kappa_2}\sqrt{\theta}\kappa_2 \int\limits_{\omega_i^{(N+1)}} \widehat{\xi}_2^2 |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} +$$

$$+\frac{\sqrt{\theta}\exp\left(-2\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{4e^{2\kappa_2}\kappa_2} \int\limits_{\omega_i^{(N+1)}} |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}}, \quad i=\overline{1,p^{(N+1)}}.$$

Пользуясь (3. 10) и последним неравенством, из (3. 13) получим оценку

$$\widehat{I}_2 \leqslant 2\overline{a}(n+1)\kappa_2\sqrt{\theta}e^{2\kappa_2} \int\limits_{\Omega_{(\nu)}^{(N+1)}} \widehat{\xi}_2^2 |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}} + \frac{\overline{a}(n+1)\sqrt{\theta}}{2\kappa_2} \exp(-2\kappa_2\{N-\nu+1\}) \int\limits_{\Omega_{(N)}^{(N+1)}} |\nabla u|^2 d\overline{\mathbf{y}}.$$

Соединяя (3.3) при $\xi_2 = \widehat{\xi}_2$ и последнюю оценку, пользуясь (3.4), выводим соотношение

$$\|\nabla u\|^2_{\Omega^{(\nu)}} \leqslant \frac{\overline{a}(n+1)\sqrt{\theta}}{2\widehat{a}\kappa_2} \exp\left(-2\kappa_2\{N-\nu+1\}\right) \|\nabla u\|^2_{\Omega_{(N)}^{(N+1)}}.$$

Неравенство (3.2) доказано.

Доказательство теоремы 1. При $\nu = \overline{0, N-1}$, $N \geq 1$ из предложения 1 вытекает справедливость неравенств

$$\|\nabla u\|_{\Omega^{(\nu)}} \leqslant M_1 \frac{\exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right)}{\varepsilon_N} \|u\|_{\Omega_{(N)}^{(N)+\varepsilon_N}},$$

$$\|\nabla u\|_{\Omega^{(\nu)}} \leqslant M_2 \exp\left(-\kappa_2\{N-\nu\}\right) \|\nabla u\|_{\Omega_{(N)}^{(N+1)}}.$$

Переходя в правой части к пределу при $N \to \infty$ либо на основе (1.24), либо (1.25), выводим равенства

$$\exp(-\kappa_2\nu)\|\nabla u\|_{\Omega^{(\nu)}} = 0, \quad \nu = \overline{0,\infty},$$

из которых следует утверждение теоремы.

Далее установим оценку Сен-Венановского типа для псевдодифференциального эллиптического уравнения (1.46).

Предложение 2. *Пусть для области* Ω *существует* $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$*-последовательность* $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$*, подчиняющаяся требованию* (1.35)*, выполнены условия* (1.48) – (1.50) *и* $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^{\infty}$ *– произвольная последовательность положительных чисел. Тогда найдутся положительные постоянные* $\kappa(\Xi)$ *и* $M(\Xi)$ *такие, что если* $\operatorname{supp}\Phi \subset \Omega_{x_N+\varepsilon_N}$, $\Psi(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ *в* $\Omega^{x_N+\varepsilon_N}$ *при некотором* $N \in \mathbb{N}$*, то для решения* $u(\overline{\mathbf{y}})$ *задачи* (1.46), (1.51) *при всех* $\nu = \overline{0, N-1}$ *справедливы оценки*

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_\nu)} \leqslant M \frac{\exp\left(-\kappa\{N-\nu\}\right)}{\varepsilon_N^{[k,q]}} \|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}}. \tag{3. 14}$$

Доказательство. Пусть $\varpi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – неубывающая функция, равная 0 и 1 при $t \leqslant 0$ и $t \geq 1$, соответственно. Пусть

$$\widehat{a}_i = \max_{t\in[0,1]} \mid D^i\varpi(t) \mid, \quad a_i = 3^i\widehat{a}_i, \quad i=\overline{0,\infty}. \tag{3. 15}$$

Из теоремы Лагранжа следует, что $\widehat{a}_{i+1} \geq \widehat{a}_i$, тем более $a_{i+1} \geq a_i$.

Выберем число $e_* > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C_3(1+\theta)\exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \leqslant e_*\widehat{a}, \tag{3. 16}$$

где C_3 – постоянная, определяемая ниже и зависящая только от Ξ.

Зафиксируем натуральное число N и целое неотрицательное число $\nu \leqslant N-1$. Рассмотрим кусочно-постоянную функцию $\beta(x)$, $x \in \mathbb{R}$ такую, что $\beta(x)=\delta_J$, $x\in[x_J,x_{J+1})$, причем $\delta_J^{-1}=e_*\Delta_J$, $J=\overline{\nu,N-1}$ и $\beta(x)=0$ при $x\notin[x_\nu,x_N)$.

Построим функцию $\alpha(x)\leqslant\beta(x)$, сглаживая функцию $\beta(x)$ по следующему правилу. Если $\delta_{J-1}<\delta_J$, то на отрезке $[x_J,x_J+\Delta_J/3]$ функция $\alpha(x)$ определяется так:

$$\alpha(x)=\delta_{J-1}+(\delta_J-\delta_{J-1})\varpi\left(\frac{3(x-x_J)}{\Delta_J}\right).$$

Если же $\delta_J>\delta_{J+1}$, то на отрезке $[x_{J+1}-\Delta_J/3,x_{J+1}]$ полагаем

$$\alpha(x)=\delta_J-(\delta_J-\delta_{J+1})\varpi\left(1+\frac{3(x-x_{J+1})}{\Delta_J}\right).$$

В оставшихся точках считаем $\alpha(x)=\beta(x)$.

Установим оценки интеграла $\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\alpha(t)dt$, $J=\overline{\nu,N-1}$:

$$\frac{1}{3e_*}=\frac{\delta_J\Delta_J}{3}=\int\limits_{x_J+\frac{\Delta_J}{3}}^{x_J+\frac{2\Delta_J}{3}}\delta_J dt\leqslant\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\alpha(t)dt\leqslant\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\delta_J dt=\delta_J\Delta_J=\frac{1}{e_*}. \quad (3.\ 17)$$

Очевидно, что во всех случаях производные функции $\alpha(x)$ подчиняются оценкам

$$|\ D^i\alpha(x)\ |\leqslant\left(\frac{3}{\Delta_J}\right)^i\delta_J\max_{t\in[0,1]}|\ D^i\varpi(t)\ |\leqslant\frac{a_i\delta_J}{\Delta_J^i}=\frac{a_i}{e_*\Delta_J^{i+1}}, \quad (3.\ 18)$$

при $x\in[x_J,x_{J+1}]$, $J=\overline{\nu,N-1}$, $i\in\mathbb{N}$.

Определим дифференциальные полиномы $P_p(\alpha)$ от гладкой функции $\alpha(x)$ условиями $P_0(\alpha)=1$, $P_p(\alpha)=(D+\alpha)P_{p-1}$. Тогда для $p=\overline{1,\infty}$ имеем

$$P_p(\alpha)=(D+\alpha)^{p-1}\alpha=\sum_{s=1}^{p}A_{sp}^{p_1p_2\ldots p_s}\prod_{p_1+2p_2+\ldots+sp_s=p}\alpha^{p_1}(D\alpha)^{p_2}(D^{s-1}\alpha)^{p_s}, \quad (3.\ 19)$$

где $A_{sp}^{p_1p_2\ldots p_s}$ — целые неотрицательные числа.
Положим

$$b_p=\sum_{s=1}^{p}A_{sp}^{p_1p_2\ldots p_s}\prod_{p_1+2p_2+\ldots+sp_s=p}a_0^{p_1}a_1^{p_2}\cdots a_{s-1}^{p_s}; \quad (3.\ 20)$$

очевидно $b_{p+1}\geq b_p$.

Следовательно, полиномы $P_p(\alpha)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\ P_p(\alpha)\ |\leqslant\sum_{s=1}^{p}A_{sp}^{p_1p_2\ldots p_s}\prod_{p_1+2p_2+\ldots+sp_s=p}\left(\frac{a_0}{e_*\Delta_J}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{a_{s-1}}{e_*\Delta_J^s}\right)^{p_s}\leqslant\frac{b_p}{e_*\Delta_J^p},$$
$$x\in[x_J,x_{J+1}],\quad J=\overline{\nu,N-1},\quad p\in\mathbb{N}. \quad (3.\ 21)$$

Определим невозрастающую гладкую функцию $\overline{\xi}(x)$ на $\mathbb{R}$ условиями

$$\overline{\xi}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant x_\nu;\\ \exp\left(-\int\limits_{x_\nu}^{x}\alpha(t)dt\right), & x_\nu\leqslant x\leqslant x_N;\\ \overline{\xi}(x_N)\eta^k_{x_N,x_N+\varepsilon_N}(x), & x_N\leqslant x\leqslant x_N+\varepsilon_N;\\ 0, & x\geq x_N+\varepsilon_N.\end{cases}$$

На промежутке $[x_\nu, x_N]$, очевидно, $\overline{\xi}' = -\alpha\overline{\xi}$, и ввиду (3.17) справедливы неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{3e_*}\right) \leqslant \frac{\overline{\xi}(x_J)}{\overline{\xi}(x_{J+1})} \leqslant \exp\left(\frac{1}{e_*}\right), \quad J = \overline{\nu, N-1}. \tag{3. 22}$$

Перемножая эти неравенства, находим, что $\exp\left(\dfrac{N-\nu}{3e_*}\right) \leqslant \dfrac{\overline{\xi}(x_\nu)}{\overline{\xi}(x_N)}$ и

$$\overline{\xi}(x_N) \leqslant \exp\left(-\frac{N-\nu}{3e_*}\right). \tag{3. 23}$$

Нетрудно доказать, что на промежутке $[x_\nu, x_N]$ справедливы соотношения

$$D^p\overline{\xi} = \overline{\xi}P_p(-\alpha), \quad D^p\overline{\xi}^2 = \overline{\xi}^2 \sum_{l=0}^{p} C_p^l P_l(-\alpha)P_{p-l}(-\alpha), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Далее, пользуясь (3.21), выводим

$$|\ D^p\overline{\xi}\ | \leqslant \overline{\xi}\frac{b_p}{e_*\Delta_J^p}, \quad |\ D^p\overline{\xi}^2\ | \leqslant \overline{\xi}^2\frac{2^p b_p^2}{e_*\Delta_J^p}, \quad x \in [x_J, x_{J+1}], \quad J = \overline{\nu, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{3. 24}$$

Оценим производные $D^p\overline{\xi},\ D^p\overline{\xi}^2,\ p = \overline{1,k}$, на отрезке $[x_N, x_N + \varepsilon_N]$. Ввиду (2.34) имеем

$$|\ D^p\overline{\xi}(x)\ | \leqslant \overline{\xi}(x_N)\frac{c_p\eta^{k-p}}{\varepsilon_N^p}, \quad |\ D^p\overline{\xi}^2(x)\ | \leqslant \overline{\xi}^2(x_N)\frac{2^p c_p^2\eta^{2k-p}}{\varepsilon_N^p}, \quad x \in [x_N, x_N + \varepsilon_N]. \tag{3. 25}$$

Положим в (2.1) $v = (u - \Psi)\overline{\xi}^2(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$, учитывая то, что $\Phi(\overline{\xi}) = 0,\ \ \Psi\overline{\xi} \equiv 0$, получим равенство

$$(u, u\overline{\xi}^2)_{\mathcal{G},\mathbb{R}} = 0.$$

Применяя (1.49), выводим неравенство

$$\begin{gathered} \widehat{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\xi}^2\|u(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}}dx \leqslant \\ \leqslant \widehat{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{\xi}^2\|u(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}} - \|\overline{\xi}u(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}}\right)dx + \mathrm{Re}\left\{(u\overline{\xi}, u\overline{\xi})_{\mathcal{G},\mathbb{R}} - (u, u\overline{\xi}^2)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}\right\} = \overline{I}. \end{gathered} \tag{3. 26}$$

Оценим интегралы в $\overline{I}$ с учетом того, что $D^p\overline{\xi} \equiv 0,\ D^p(\overline{\xi}^2) \equiv 0,\ p \in \mathbb{N}$ вне промежутка $[x_\nu, x_N + \varepsilon_N]$. Пользуясь (1.50), выводим неравенство

$$\begin{gathered} \overline{I} \leqslant C_1 \int\limits_{x_\nu}^{x_N+\varepsilon_N}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\left\{\sum_{i=q,k}\left(|D_x^i u|\overline{\xi}\sum_{p=0}^{i-1}|D_x^p u||D_x^{i-p}\overline{\xi}| + \left(\sum_{p=0}^{i-1}|D_x^p u||D_x^{i-p}\overline{\xi}|\right)^2\right) + \right. \\ + \sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}}\left(\sum_{p=0}^{i-1}|T^{\overline{\alpha}}D_x^p u||D_x^{i-p}\overline{\xi}|\sum_{p=0}^{j-1}|T^{\overline{\beta}}D_x^p u||D_x^{j-p}\overline{\xi}| + \right. \\ \left.\left. +|T^{\overline{\beta}}D_x^j u|\sum_{p=0}^{i-1}|T^{\overline{\alpha}}D_x^p u|\left\{|D_x^{i-p}\overline{\xi}|\xi + |D_x^{i-p}\overline{\xi}^2|\right\}\right)\right\}dxd\mathbf{y}. \end{gathered} \tag{3. 27}$$

Для случая $q = 0$ считаем, что сумма $\sum\limits_{i=q,k}$ содержит лишь одно слагаемое при $i = k$.

Используя на промежутках $[x_J, x_{J+1}]$, $J=\overline{\nu, N-1}$, (3.24), а на промежутке $[x_N, x_N+\varepsilon_N]$ применяя (3.25), устанавливаем, что

$$\overline{I}\leqslant C_2\sum_{J=\nu}^{N-1}\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\overline{\xi}^2\left[\mu\left(\sum_{i=q,k}\mid D_x^i u\mid^2+\sum_{\overline{\alpha}\in\mathcal{S}}\mid T^{\overline{\alpha}}D_x^i u\mid^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mu e_*^2}\left(\sum_{i=q,k}\sum_{p=0}^{i-1}\frac{\mid D_x^p u\mid^2}{\Delta_J^{2(i-p)}}+\sum_{\overline{\alpha}\in\mathcal{S}}\sum_{p=0}^{i-1}\frac{\mid T^{\overline{\alpha}}D_x^p u\mid^2}{\Delta_J^{2(i-p)}}\right)\right]dxd\mathbf{y}+ \tag{3. 28}$$

$$+C_2\overline{\xi}^2(x_N)\int\limits_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\left[\mu\left(\sum_{i=q,k}\eta_{x_N,x_N+\varepsilon_N}^{2k}\mid D_x^i u\mid^2+\sum_{\overline{\alpha}\in\mathcal{S}}\eta_{x_N,x_N+\varepsilon_N}^{2k}\mid T^{\overline{\alpha}}D_x^i u\mid^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mu}\left(\sum_{i=q,k}\sum_{p=0}^{i-1}\frac{\mid D_x^p u\mid^2\,\eta_{x_N,x_N+\varepsilon_N}^{2(k-i+p)}}{\varepsilon_N^{2(i-p)}}+\sum_{\overline{\alpha}\in\mathcal{S}}\sum_{p=0}^{i-1}\frac{\mid T^{\overline{\alpha}}D_x^p u\mid^2\,\eta_{x_N,x_N+\varepsilon_N}^{2(k-i+p)}}{\varepsilon_N^{2(i-p)}}\right)\right]dxd\mathbf{y}\equiv\overline{I}_I+\overline{I}_{II},$$

где $\overline{I}_I$ содержит интегралы по (x_ν, x_N), а $\overline{I}_{II}$ по $(x_N, x_N+\varepsilon_N)$, $\mu\in(0,1]$ — произвольное число.

Пользуясь неравенствами (2.7), (2.7′), (2.12), (2.12′) с $\Delta=\Delta_J$, $\epsilon=1$, применив определение $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательности (1.33), (1.32), находим для $J=\overline{0,\infty}$, $p=\overline{0,i}$, что

$$J_J'=\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\frac{\|D_x^p u\|_{\mathbb{R}_n}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}}dx\leqslant\widetilde{C}\left(\|u\|_{\mathcal{B}_{k,q},(x_J,x_{J+1})}^2+\frac{\|u\|_{\Omega_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2[k,q]}}\right)\leqslant\widetilde{C}(1+\theta)\|u\|_{\mathcal{B}_{k,q},(x_J,x_{J+1})}^2,\quad i=\overline{q,k}, \tag{3. 29}$$

$$J_J''=\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\frac{\|T^{\overline{\alpha}}D_x^p u\|_{\mathbb{R}_n}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}}dx\leqslant\widetilde{C}\left(\|u\|_{\mathcal{B}_{k,q},(x_J,x_{J+1})}^2+\frac{\|u\|_{\Omega_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2[k,q]}}\right)\leqslant\widetilde{C}(1+\theta)\|u\|_{\mathcal{B}_{k,q},(x_J,x_{J+1})}^2,\quad\overline{\alpha}\in\mathcal{S}.$$

Отсюда, ввиду (3.22) для $J=\overline{\nu,N-1}$, $p=\overline{0,i}$, сразу следует, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\overline{\xi}^2\frac{\|D_x^p u\|_{\mathbb{R}_n}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}}dx\leqslant\widetilde{C}(1+\theta)\exp\left(\frac{2}{e_*}\right)\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\overline{\xi}^2\|u(x)\|_{\mathcal{B}_{k,q}}^2dx,\quad i=\overline{q,k},\\ \int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\overline{\xi}^2\frac{\|T^{\overline{\alpha}}D_x^p u\|_{\mathbb{R}_n}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}}dx\leqslant\widetilde{C}(1+\theta)\exp\left(\frac{2}{e_*}\right)\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\overline{\xi}^2\|u(x)\|_{\mathcal{B}_{k,q}}^2dx,\quad\overline{\alpha}\in\mathcal{S}.\end{gathered} \tag{3. 30}$$

Теперь, выбрав $\mu=1/e_*$, применив (3.30), оценим интеграл $\overline{I}_I$

$$\overline{I}_I\leqslant\frac{C_3(1+\theta)}{e_*}\exp\left(\frac{2}{e_*}\right)\int\limits_{x_\nu}^{x_N}\overline{\xi}^2\|u(x)\|_{\mathcal{B}_{k,q}}^2dx. \tag{3. 31}$$

Далее, используя (2.38), (2.38′), (2.37), (2.37′) при $\Delta=\varepsilon_N$, полагая $\delta=1/e_*^2$, оценим интеграл $\overline{I}_{II}$

$$\overline{I}_{II}\leqslant\frac{C_3}{e_*}\overline{\xi}^2(x_N)\int\limits_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}\eta_{x_N,x_N+\varepsilon_N}^{2k}\|u(x)\|_{\mathcal{B}_{k,q}}^2dx+C_4(e_*)\overline{\xi}^2(x_N)\frac{\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}}^2}{\varepsilon_N^{2[k,q]}}. \tag{3. 32}$$

Соединив оценки (3.31) – (3.32), установим неравенство

$$\overline{I} \leqslant \frac{C_3(1+\theta)}{e_*}\exp\left(\frac{2}{e_*}\right)\int\limits_{x_\nu}^{x_N+\varepsilon_N}\overline{\xi}^2\|u(x)\|^2_{\mathcal{B}_{k,q}}dx + C_4\overline{\xi}^2(x_N)\frac{\|u\|^2_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}}}{\varepsilon_N^{2[k,q]}}. \qquad (3.\ 33)$$

Комбинируя последнюю оценку с (3.26) и выбирая e_* согласно (3.16), заключаем, что

$$\widehat{a}\|u\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_\nu)} \leqslant C_4\overline{\xi}^2(x_N)\frac{\|u\|^2_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}}}{\varepsilon_N^{2[k,q]}}.$$

Таким образом, согласно (3.23), установлено неравенство (3.14) с $\kappa = \dfrac{1}{3e_*} < \dfrac{1}{3}$.

Доказательство теоремы 4. При $\nu = \overline{0, N-1}$, $N \geq 1$ из предложения 2 вытекает справедливость неравенств

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_\nu)} \leqslant M\frac{\exp\left(-\kappa\{N-\nu\}\right)}{\varepsilon_N^{[k,q]}}\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}},$$

из которых, согласно (1.37), заключаем

$$\exp(-\kappa\nu)\lambda^{1/2}(\nu)\|u\|_{\Omega^{x_\nu}} \leqslant M\frac{\exp(-\kappa N)}{\varepsilon_N^{[k,q]}}\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}}.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу при $N \to \infty$ и применяя (1.56), выводим равенства

$$\exp(-\kappa\nu)\lambda^{1/2}(\nu)\|u\|_{\Omega^{x_\nu}} = 0, \quad \nu = \overline{0,\infty},$$

из которых следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 5. Для $\Pi[k,q,\phi(r)]$-последовательности, ввиду (1.42), (1.42′), справедливы неравенства

$$\int\limits_{x_J}^{x_{J+1}}\frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}} \leqslant \frac{\Delta_J}{\inf\limits_{[x_J,x_{J+1})}\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}} \leqslant 1, \quad J = \overline{0,\infty}, \qquad (3.\ 34)$$

суммируя которые выводим

$$\int\limits_{1}^{x_N}\frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}} \leqslant N. \qquad (3.\ 35)$$

В условии (1.57) положим $r = x_N$, где $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ — $\Pi[k,q,\phi(r)]$-последовательность функции $f(x)$. Получим

$$\lim_{N\to\infty}\exp\left(-\kappa\int\limits_{1}^{x_N}\frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k},\sigma(q)\right]}}\right)\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+1}} = 0. \qquad (3.\ 36)$$

Соединяя (3.36) и (3.35), несложно установить соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\exp\left(-\kappa N\right)\|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+1}} = 0.$$

Поскольку $\Pi[k,q,\phi(r)]$-последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ является $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательностью области $\Omega(f)$, то, согласно теореме 4 с $\varepsilon_N = 1$, $N = \overline{0,\infty}$, получаем $u(\overline{\mathbf{y}}) = 0$ для п.в. $\overline{\mathbf{y}} \in \Omega(f)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогичным образом.

4. Теорема существования

Пусть $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ – $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательность области Ω. Покажем ограниченность величины $(w,v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}$ в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$. Для этого сначала для $\overline{\alpha}\in\mathcal{S}$, $v\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$ установим оценку

$$I=\|T^{\overline{\alpha}}D_x^i v\|^2_{\mathbb{R}_{n+1}}\leqslant C_1\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},\mathbb{R}},\quad q\geq 0. \tag{4. 1}$$

Для $q>0$, применяя неравенства $(2.12')$ при $\Delta=1$ для первых сумм и $\Delta=\Delta_J$ для вторых сумм, устанавливаем соотношения

$$I=\sum_{N=-\infty}^{-1}\|T^{\overline{\alpha}}D_x^i v\|^2_{\Pi_{x_0+N}^{x_0+N+1}}+\sum_{N=0}^{\infty}\|T^{\overline{\alpha}}D_x^i v\|^2_{\Pi_{x_N}^{x_{N+1}}}\leqslant$$

$$\leqslant\widetilde{C}\left(\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_0)}+\|v\|^2_{\Omega^{x_0}}\right)+\widetilde{C}\sum_{N=0}^{\infty}\left\{\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_N,x_{N+1})}+\frac{\|v\|^2_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}}}{\Delta_N^{2[k,q]}}\right\}.$$

Используя условие (1.35) и определение (1.32), (1.33) $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательности, выводим неравенство

$$I\leqslant\widetilde{C}(1+\lambda_0^{-1})\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_0)}+\widetilde{C}(1+\theta)\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_0,\infty)},$$

из которого следует (4.1). Пользуясь неравенством $(2.12')$ при $\Delta=1$, для $v\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,0}}(\Omega)$ устанавливаем соотношение

$$I=\sum_{N=-\infty}^{\infty}\|T^{\overline{\alpha}}D_x^i v\|^2_{\Pi_N^{N+1}}\leqslant\widetilde{C}\left(\|v\|^2+\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,0},\mathbb{R}}\right), \tag{4. 2}$$

из которого следует (4.1).

Теперь оценим $(w,v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}$, $w,v\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$. Для $q\geq 0$, пользуясь условием (1.50), применяя (4.1), выводим соотношения

$$|(w,v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}|\leqslant\overline{a}\sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}}\|T^{\overline{\alpha}}D_x^i w\|_{\mathbb{R}_{n+1}}\|T^{\overline{\beta}}D_x^j v\|_{\mathbb{R}_{n+1}}\leqslant C_2\|w\|_{\mathcal{B}_{k,q},\mathbb{R}}\|v\|_{\mathcal{B}_{k,q},\mathbb{R}}. \tag{4. 3}$$

Обозначим через $x_{-1}=-\infty$. Определим гладкие функции $\omega_N(x)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $N\geq 0$ с носителем на $[x_{N-1},x_{N+1}]$. Положим

$$\omega_N(x)=\varpi\left(\frac{x-x_{N-1}}{\Delta_{N-1}}\right)-\varpi\left(\frac{x-x_N}{\Delta_N}\right),\quad \omega_0(x)=1-\varpi\left(\frac{x-x_0}{\Delta_0}\right).$$

Здесь $\varpi(t)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ – функция из предложения 2. Очевидно, справедливы равенства

$$\omega_N(x)+\omega_{N+1}(x)=1,\quad x\in[x_N,x_{N+1}],\quad N\geq 0.$$

Ввиду (3.16) при $i=\overline{0,\infty}$ имеют место неравенства

$$|D^i\omega_N|\leqslant\frac{\widehat{a}_i}{\Delta_{N-1}^i},\quad x\in(x_{N-1},x_N),\quad |D^i\omega_N|\leqslant\frac{\widehat{a}_i}{\Delta_N^i},\quad x\in(x_N,x_{N+1}). \tag{4. 4}$$

Обозначим через $\|\Phi\|_{(a,b)}$ норму сужения функционала Φ на $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega_a^b)$.

Теорема 7. *Пусть для области Ω существует $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательность, подчиняющаяся условию* (1.35), *и выполнены требования* (1.48) – (1.50). *Если существуют число*

$\widehat{\kappa} \in (0, \kappa)$ *и положительная постоянная* $\widehat{C}$ *такие, что при каждом целом* $N \geq 0$ *функция* $\Psi(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$ *и функционал* $\Phi \in \overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^*_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$\|\Phi\|^2_{(x_{N-1},x_{N+1})} \leqslant \widehat{C}\exp(2\widehat{\kappa}N),$$
$$\|\Psi\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_{N+1}}_{x_{N-1}})} + \sum_{J=N-1,N} \lambda(x_J, x_{J+1})\|\Psi\|^2_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}} \leqslant \widehat{C}\exp(2\widehat{\kappa}N), \tag{4. 5}$$

то существует решение задачи Дирихле (1.46), (1.51), *подчиняющееся требованию* (1.56) *с* $\varepsilon_N = \Delta_N,\ N = \overline{0,\infty}$.

Доказательство. Согласно теореме 6 при каждом $N = \overline{0,\infty}$ существует единственное решение $u^N(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_{N+1}})$ задачи Дирихле (1.46), (1.51) с функционалом $\Phi_N(v) = \Phi(\omega_N v)$, $v \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$ и функцией $\Psi_N(\overline{\mathbf{y}}) = \Psi(\overline{\mathbf{y}})\omega_N(x)$, $N = \overline{0,\infty}$. Положим $w_N = u_N - \Psi_N \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_{N+1}})$, $N = \overline{0,\infty}$. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{N=0}^{\infty} w_N(\overline{\mathbf{y}}). \tag{4. 6}$$

Покажем, что он сходится по норме пространства $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^r)$ для любого $r > 0$. Согласно (3.14) при $\varepsilon_N = \Delta_N$, применяя (1.32), (1.33), для $\nu = \overline{-1, N-4}$, $N \geq 3$ имеем неравенства

$$\|w_N\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_{\nu+1})} \leqslant M^2\frac{\exp(-2\kappa(N-\nu-3))}{\Delta_N^{2[k,q]}}\|w_N\|^2_{\Omega^{x_{N-1}}_{x_{N-2}}} \leqslant$$
$$\leqslant \theta M^2\exp(-2\kappa(N-\nu-3))\|w_N\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_{N-2},x_{N-1})},$$

из которых, применяя (2.5), получим

$$\|w_N\|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_{\nu+1})} \leqslant CM\sqrt{\theta}\exp(3\kappa)\exp(-\kappa(N-\nu))\left(\|\Phi_N\| + \|\Psi_N\|_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)}\right). \tag{4. 7}$$

Оценим нормы $\|\Phi_N\|$, $\|\Psi_N\|_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)}$, $N = \overline{0,\infty}$. Для $N \geq 1$, $v(\overline{\mathbf{y}}) \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$ имеем:

$$|\Phi_N(v)| = |\Phi(v\omega_N)| \leqslant \|\Phi\|_{(x_{N-1},x_{N+1})}\|\omega_N v\|_{\mathcal{B}_{k,q},(x_{N-1},x_{N+1})}. \tag{4. 8}$$

Далее оценим норму

$$\|\omega_N v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_{N-1},x_{N+1})} = \|\omega_N v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_{N-1},x_N)} + \|\omega_N v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_N,x_{N+1})} =$$
$$= \sum_{J=N-1,N}\int\limits_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}}\left(|D^k_x(v\omega_N)|^2 + X_{k-q}|D^q_x(v\omega_N)|^2\right)d\mathbf{y}dx + \int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} B^2(\mathbf{z})\omega_N^2|F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[v]|^2 d\mathbf{z}dx.$$

Применяя (4.4), выводим неравенства

$$\|\omega_N v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_{N-1},x_{N+1})} \leqslant \sum_{J=N-1,N}\int\limits_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}}\sum_{i=q,k}\left(\sum_{p=0}^{i} C^p_i|D^p_x v||D^{i-p}_x\omega_N)|\right)^2 d\mathbf{y}dx+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} B^2(\mathbf{z})|F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[v]|^2 d\mathbf{z}dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{J=N-1,N}\int\limits_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}}\sum_{i=q,k}\sum_{p=0}^{i}\frac{|D^p_x v|^2}{\Delta_J^{2(i-p)}}d\mathbf{y}dx + \int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} B^2(\mathbf{z})|F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[v]|^2 d\mathbf{z}dx.$$

Пользуясь неравенствами (2.7), (2.7$'$) с $\Delta = \Delta_J$, $\epsilon = 1$, определением λ-последовательности (1.32), (1.33), устанавливаем соотношения

$$\|\omega_N v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_{N-1},x_{N+1})} \leqslant C_2 \sum_{J=N-1,N} \left(\|D^k_x v\|^2_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}} + X_{k-q}\|D^q_x v\|^2_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}} + \frac{\|v\|^2_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}}}{\Delta^{2[k,q]}_J} \right) + \\ + \|BF_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[v]\|^2_{\Pi^{x_{N+1}}_{x_{N-1}}} \leqslant C_3^2\|v\|^2_{\mathcal{B}_{k,q},(x_{N-1},x_{N+1})}. \tag{4. 9}$$

Соединяя (4.8), (4.9), для $N \geq 1$ выводим

$$\|\Phi_N\| \leqslant C_3\|\Phi\|_{(x_{N-1},x_{N+1})}. \tag{4. 10}$$

Для $N \geq 1,\ v(\overline{\mathbf{y}}) \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)$ имеем:

$$\|\Psi_N\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)} = \|\Psi\omega_N\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)} = \|\Psi\omega_N\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_N}_{x_{N-1}})} + \|\Psi\omega_N\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_{N+1}}_{x_N})}.$$

Используя (4.4), устанавливаем оценку

$$\|\Psi_N\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega^{x_{N+1}}_{x_{N-1}}} |\Psi|^2 d\mathbf{y}dx + \int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} B^2(\mathbf{z})|F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[\Psi]|^2 d\mathbf{z}dx +$$

$$+ C_1 \sum_{J=N-1,N} \int\limits_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}} \sum_{i=q,k}\sum_{p=0}^{i} \frac{|D^p_x\Psi|^2}{\Delta^{2(i-p)}_J} d\mathbf{y}dx.$$

Применяя неравенства (2.7), (2.7$'$) с $\Delta = \Delta_J,\ \epsilon = 1$, определением λ-последовательности (1.33) устанавливаем соотношения

$$\|\Psi_N\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)} \leqslant C_4 \left(\|\Psi\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_{N+1}}_{x_{N-1}})} + \sum_{J=N-1,N} \frac{\|\Psi\|^2_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}}}{\Delta^{2[k,q]}_J} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(\|\Psi\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_{N+1}}_{x_{N-1}})} + \theta \sum_{J=N-1,N} \lambda(x_J, x_{J+1})\|\Psi\|^2_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}} \right).$$

В результате, при всех $N \geq 1$ получим оценки

$$\|\Psi_N\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)} \leqslant C_5 \left(\|\Psi\|^2_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_{N+1}}_{x_{N-1}})} + \sum_{J=N-1,N} \lambda(x_J, x_{J+1})\|\Psi\|^2_{\Omega^{x_{J+1}}_{x_J}} \right). \tag{4. 11}$$

Отметим, что для $N = 0$ неравенства (4.10), (4.11) также остаются верными.

При помощи (4.5), из (4.10), (4.11) заключаем справедливость оценок

$$\|\Phi_N\| \leqslant C_6 \exp(\widehat{\kappa}N), \quad \|\Psi_N\|_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)} \leqslant C_6 \exp(\widehat{\kappa}N), \quad N = \overline{0,\infty}. \tag{4. 12}$$

Далее, воспользовавшись (4.12), из (4.7) выводим

$$\|w_N\|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_{\nu+1})} \leqslant C_7 \exp(-\kappa(N-\nu)) \exp(\widehat{\kappa}N),$$

для $\nu = \overline{-1, N-4},\ N \geq 3$. Таким образом, ряд (4.6) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{N=\nu+4}^{\infty} \|w_N\|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty,x_{\nu+1})} \leqslant C_7 \exp(\widehat{\kappa}\nu) \sum_{N=\nu+4}^{\infty} \exp(-(\kappa-\widehat{\kappa})(N-\nu)) = \\ = C_7 \exp(\widehat{\kappa}\nu) \sum_{i=4}^{\infty} \exp(-(\kappa-\widehat{\kappa})i) \leqslant C_8 \exp(\widehat{\kappa}\nu). \tag{4. 13}$$

Следовательно при любом целом $\nu \geq 0$ ряд (4.6) сходится по норме пространства $\overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega^{x_\nu})$ к функции $w \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$.

Покажем, что $u(\overline{\mathbf{y}}) = w(\overline{\mathbf{y}}) + \Psi(\overline{\mathbf{y}})$ является обобщенным решением задачи (1.46), (1.51). Для этого запишем интегральные тождества (2.2) для функций $w_N,\ N = \overline{0, L}$ и сложим их, тогда для любого целого $L \geq 0$ получим равенство

$$\sum_{N=0}^{L} (w_N, v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}} = \sum_{N=0}^{L} \Phi_N(v) - \sum_{N=0}^{L} (\Psi_N, v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}},$$

справедливое для любой функции $v(\overline{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Для достаточно большого L такого, что $\operatorname{supp} v \subset \Omega^{x_\nu},\ \nu \leqslant L$, его можно переписать в виде

$$\left(\sum_{N=0}^{L} w_N, v \right)_{\mathcal{G},\mathbb{R}} = \Phi(v) - (\Psi, v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}.$$

Применяя (4.3), выводим неравенства

$$\left| (w - \sum_{N=0}^{L} w_N, v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}} \right| \leqslant C_2 \| w - \sum_{N=0}^{L} w_N \|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty, x_\nu)} \| v \|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty, x_\nu)},$$

из которых следует, что $\lim\limits_{L\to\infty} (\sum\limits_{N=0}^{L} w_N, v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}} = (w, v)_{\mathcal{G},\mathbb{R}}$. Выполнив в последнем тождестве предельный переход при $L \to \infty$, установим тождество (2.2) для суммы ряда $\sum\limits_{N=0}^{\infty} w_N$. Значит, функция $u = \Psi + w \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q},\mathrm{lc}}(\Omega)$ является обобщенным решением уравнения (1.46) с граничным условием (1.51).

Для построенного решения $u(\overline{\mathbf{y}})$ установим соотношение (1.56). Применяя (2.5), (4.12), выводим неравенства

$$\sum_{N=0}^{\nu+3} \| w_N \|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty, x_{\nu+1})} \leqslant C \sum_{N=0}^{\nu+3} \left(\| \Phi_N \| + \| \Psi_N \|_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}_{k,q}}(\Omega)} \right) \leqslant C_9 \sum_{N=0}^{\nu+3} \exp\left(\widehat{\kappa} N\right). \tag{4. 14}$$

Соединяя (4.13), (4.14), получаем

$$\begin{aligned} \| w \|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty, x_{\nu+1})} \exp\left(-\kappa\nu\right) \leqslant \exp\left(-\kappa\nu\right) \left\{ \sum_{N=0}^{\nu+3} \| w_N \|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty, x_{\nu+1})} + \sum_{N=\nu+4}^{\infty} \| w_N \|_{\mathcal{B}_{k,q},(-\infty, x_{\nu+1})} \right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\left(-\kappa\nu\right) \left\{ C_9 \sum_{N=0}^{\nu+3} \exp\left(\widehat{\kappa} N\right) + C_8 \exp\left(\widehat{\kappa}\nu\right) \right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\left(-(\kappa - \widehat{\kappa})\nu\right) \left\{ C_{10} \sum_{i=0}^{\nu+3} \exp\left(-\widehat{\kappa} i\right) + C_8 \right\} \leqslant C_{11} \exp\left(-(\kappa - \widehat{\kappa})\nu\right). \end{aligned} \tag{4. 15}$$

Применяя определение $\lambda[\mathcal{B}_{k,q}]$-последовательности (1.32), (1.33), устанавливаем

$$\begin{aligned} \| u \|_{\Omega_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}} \exp(-\kappa\nu) \Delta_\nu^{-[k,q]} \left(\| w \|_{\Omega_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}} + \| \Psi \|_{\Omega_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}} \right) \exp(-\kappa\nu) \Delta_\nu^{-[k,q]} \leqslant \\ \leqslant \theta^{1/2} \left(\| w \|_{\mathcal{B}_{k,q},(x_\nu, x_{\nu+1})} + \| \Psi \|_{\Omega_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}} \lambda^{1/2}(x_\nu, x_{\nu+1}) \right) \exp(-\kappa\nu). \end{aligned}$$

Воспользовавшись (4.5), (4.15), в итоге выводим

$$\| u \|_{\Omega_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}} \exp\left(-\kappa\nu\right) \Delta_\nu^{-[k,q]} \leqslant C_{12} \exp\left(-(\kappa - \widehat{\kappa})\nu\right), \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Ввиду того, что правая часть последнего неравенства при $\nu \to \infty$ стремится к нулю, равенство (1.56) при $\varepsilon_N = \Delta_N,\ N = \overline{0, \infty}$ установлено. Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландис Е.М. *О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // ДАН СССР. Т. 31. 1974. С. 35-58.
2. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Аналог принципа Сен-Венана для эллиптического уравнения второго порядка и единственность решений краевых задач в неограниченных областях* // УМН. Т. 31, № 4. 1976. С. 261-262.
3. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Энергетические оценки обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и их приложения* // ДАН СССР. Т. 232, № 6. 1977. С. 1257-1260.
4. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Об устранимых особенностях на границе и единственности решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений второго порядка* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 11, вып. 3. 1977. С. 54-67.
5. Тедеев А.Ф., Шишков А.Е., *О качественных свойствах решений и субрешений квазилинейных эллиптических уравнений* // Изв. вузов. Математика. Т. 260, № 1. 1984. С. 62-68.
6. Шишков А.Е. *Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // Сибирский матем. ж-л. Т. 28, № 6. 1987. С. 134-146.
7. Шишков А.Е. *Квазилинейные дивергентные эллиптические уравнения в неограниченных областях* // Диффер. уравнения. Т. 24, № 8. 1988. С. 1410-1423.
8. Шишков А.Е. *Принцип Фрагмена-Линделера для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка* // Успехи мат. наук. Т. 43, вып. 4. 1988. С. 231-232.
9. Кожевникова Л.М. *Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений* // Изв. РАН. Т. 70, № 6. 2006. С. 93-128.
10. Шишков А.Е. *Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности* // Укр. матем. журнал. Т. 47, № 2. 1995. С. 277-289.
11. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196, № 7. 2005. С. 67-100.
12. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О единственности решения смешанной задачи для уравнений теории упругости в неограниченной области* // УМН. Т. 31, № 5. 1976. С. 247-248.
13. Кожевникова Л.М. *Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Матем. сб. Т. 199, № 8. 2008. С. 61-94.
14. Агранович М.С., Вишик М.И. *Псевдодифференциальные операторы.* М.: Наука, 1968.
15. Эскин Г.И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1973.
16. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983.
17. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973.

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакская госпедакадемия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: `kosul@mail.ru`