Уфимский математический журнал. Том 1. № 1 (2009). С. 77-83.

УДК 517.538.2

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НА ЛУЧЕ И ХАРАКТЕРИСТИКА КОРЕНБЛЮМА-СЕЙПА

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Пусть $\{\lambda_k\}$ – последовательность точек в правой полуплоскости комплексной плоскости. В терминах характеристики Коренблюма-Сейпа, возникшей при описании распределения нулей функций из равномерных пространств Бергмана в единичном круге, даются достаточные условия полноты экспоненциальной системы $\{e^{-\lambda_k x}\}$ в пространстве функций на положительной полуоси, интегрируемых в p-ой степени со степенным весом.

Ключевые слова: положительная полуось, весовое пространство интегрируемых функций, экспоненциальная система, полнота, единичный круг, пространство Бергмана.

В статье приводятся некоторые достаточные условия полноты системы экспонент в весовых пространствах функций, интегрируемых со степенным весом *на положительной полуоси* $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$ *вещественной оси* $\mathbb{R}$ *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$. В основном мы используем сведения и придерживаемся терминологии, определений и соглашений из книг А.М. Седлецкого [1] – [4], его обзора в соавторстве [5], совместной монографии К. Жу, Б. Коренблюма, Х. Хеденмальма [6], а также нашего обзора по полноте экспоненциальных систем [7].

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant p < +\infty$. Весовое нормированное пространство $L^p_\alpha := L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$ состоит из всех измеримых по мере Лебега на $\mathbb{R}_+$ функций f с почти всюду определенными значениями[1] в $\mathbb{C}$ и с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{R}_+} \bigl|f(x)\bigr|^p x^\alpha \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} .$$

Легко показать, да и известно (см. [3], п. 9.4.1), что при $p > 1$ (топологически) сопряженное к L^p_α пространство (топологически) изоморфно пространству L^q_β с

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad \text{т. е. } q := \frac{p}{p-1}\,, \quad \text{и } \beta := -\frac{\alpha q}{p} = \frac{\alpha}{1-p} \tag{1}$$

в том смысле, что действие (линейного непрерывного) функционала, отождествленного с функцией $g \in L^q_\beta$, на $f \in L^p_\alpha$ задается интегралом $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Его конечность и непрерывность относительно $f \in L^p_\alpha$ обеспечиваются неравенством Гельдера.

Khabibullin B.N. Completeness of exponential systems in spaces of functions on a ray and the Korenblum–Seip's characteristic.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00067а, а также программы господдержки ведущих научных школ РФ, проект НШ–3081.2008.1.

Поступила 9 марта 2009 г.

[1]Как обычно, почти всюду совпадающие функции отождествляются.

Нам потребуется и пространство $L^\infty_\beta := L^\infty_\beta(\mathbb{R}_+)$ с $\beta\in\mathbb{R}$, состоящее из измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций g с конечной нормой

$$\|g\|_{\infty,\beta} := \sup\,\mathrm{ess}\,\{g(t)t^\beta\colon t\in\mathbb{R}_+\},$$

где операция sup ess – *существенная верхняя грань* относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$. Так, сопряженное к L^1_α отождествляется с пространством L^∞_β с $\beta=-\alpha$ и таким же действием функционала с функцией-представителем $g\in L^\infty_\beta$ на $f\in L^1_\alpha$ в виде интеграла, как и выше. Конечность и непрерывность здесь гарантируются уже элементарными оценками сверху модуля интеграла с "вынесением" за его знак величины $\|g\|_{\infty,\beta}$.

Пусть $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ – множество всех натуральных чисел, $\Lambda=\{\lambda_k\}\subset\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$ – пустая, конечная или счетная последовательность точек (чисел) λ_k на (из) $\mathbb{C}$, порождающая *экспоненциальную систему* или *систему* (кратных) *экспонент*

$$\mathrm{Exp}_\Lambda :=\{z^{n-1}e^{\lambda z}\colon \lambda\in\Lambda,\ 1\leqslant n\leqslant \Lambda(\lambda),\ n\in\mathbb{N}\}, \quad z\in\mathbb{C},$$

где $\Lambda(\lambda)$ — число вхождений точки $\lambda\in\mathbb{C}$ в последовательность Λ.

Очевидно, что для каждого $p\in[1,+\infty)$ включение $\mathrm{Exp}_\Lambda\subset L^p_\alpha$ имеет место, если и только если для всех $\lambda_k\in\Lambda$ справедливо неравенство $\mathrm{Re}\,\lambda_k<0$. Система Exp_Λ *полна в* L^p_α, когда замыкание в L^p_α линейной оболочки системы Exp_Λ совпадает с L^p_α.

Приведем ряд известных достаточных условий полноты экспоненциальной системы $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$, $\Lambda\subset\mathbb{C}_+$, $-\Lambda:=\{-\lambda_k\}$, в пространствах вида L^p_α. Далее $D(z,t)$ — *открытый круг радиуса $t>0$ с центром в точке $z\in\mathbb{C}$.*

1. *Полнота системы* $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *в* L^2_0 *эквивалентна условию* (теорема Мюнтца-Саса)
$$\sum_k \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}=+\infty. \tag{2}$$
2. *При* $1<p<+\infty$ *и* $-1<\alpha\leqslant\min\{0,p-2\}$ *условие* (2) *достаточно для полноты системы* $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *в* L^p_α (см. [1] – [3], Теорема 9.6.3, [4]). *Это же условие достаточно для полноты системы* $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *в* L^p_α *при любых* $p\in[1,+\infty)$ *и* $\alpha\in(-1,+\infty)$, *если для* Λ *выполнено дополнительное условие* (см. [3], Теорема 9.4.6)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\inf\limits_k|\lambda_k-iy|}{1+y^2}\,\mathrm{d}y<+\infty. \tag{3}$$
3. *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$ *и* $-1<\alpha<+\infty$, *а* $\varphi\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ — *убывающая функция и* $\int^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$. *Если*
$$\sum_k\frac{\mathrm{Re}\,\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}\,\varphi\Bigl(-\log\frac{\mathrm{Re}\,\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}\Bigr)=+\infty,$$
то $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *полна в* L^p_α (см. [1],8.3, Теорема 1, [3], 9.4).
4. *Пусть* $1<p\leqslant 2$ *и* $p-2<\alpha<+\infty$, *а* $\mathcal{N}_\Lambda(x)$ — *число точек последовательности* Λ *в круге* $D\bigl(x,\sqrt{x^2-1}\bigr)$, $x>1$. *Если*
$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{\mathcal{N}_\Lambda(x)}{x\log x}>\frac{\alpha-(p-2)}{p},$$
то система $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *полна в* L^p_α (см. [1], 8.3, Теорема 8, [3], 9.5, Теорема 9.5.4).
5. *Пусть* $1<p\leqslant 2$ *и* $p-2<\alpha<+\infty$. *Если при некотором* $h>1$
$$\limsup_{x\to+0}\frac{1}{-\log x}\sum_{x<\mathrm{Re}\,\lambda_k<hx}\frac{\mathrm{Re}\,(\lambda_k-x)}{1+|\lambda_k-x|^2}>\frac{\alpha+2-p}{2p}$$
то система $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ *полна в* L^p_α (см. [8],Теорема 3).

По-видимому, А.М. Седлецкий был первым, кто привлек *пространства Бергмана* $A^{-\gamma}$ *в круге* [6] для доказательства теорем о полноте экспоненциальных систем в L^p_α из пп. 3 – 5. Все эти результаты А.М. Седлецкого в том или ином смысле точны [1] – [5], [8]. В настоящей статье также используется описание нулей голоморфных функций из *равномерных* пространства Бергмана $\mathcal{A}^{-\gamma}$, для которых в этом направлении известны весьма точные и глубокие результаты (см. [6], гл. 4).

Через $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ обозначаем *правую полуплоскость* в $\mathbb{C}$. Для формулировки основного результата определим одну характеристику конечной последовательности точек S, лежащей на расширенной мнимой оси $i[-\infty, +\infty]$. Пусть $\{I_n\}$ — система дополнительных к этой последовательности интервалов на $i[-\infty, +\infty]$. Величину $|I_n|$ определим[1] как раствор угла, под которым виден интервал I_n из точки $1 \in \mathbb{C}$, деленный на π. Через нее определяется *характеристика Берлинга-Карлесона* последовательности S (относительно правой полуплоскости)

$$\widehat{\varkappa}(S) := \sum_n |I_n| \ln\bigl(1/|I_n|\bigr). \tag{4}$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в $\mathbb{C}_+$. С каждой точкой iy, $y \in [-\infty, +\infty]$, свяжем дугу $\mathfrak{r}_{iy} \in \mathbb{C}_+$ окружности с центром на мнимой оси, соединяющую точки 1 и iy. Очевидно, при $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ центр этой окружности — пересечение серединного перпендикуляра к отрезку $[1, iy]$ с мнимой осью $i\mathbb{R}$. В крайних же ситуациях $\mathfrak{r}_{i\cdot 0} = (0, 1]$, $\mathfrak{r}_{i\cdot(\pm\infty)} = [1, +\infty)$. Затем положим $\mathfrak{r}_S = \cup\{\mathfrak{r}_{iy} \colon iy \in S\}$ и

$$\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \left(1 - \Bigl|\frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k}\Bigr|^2\right) = 2 \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{|1+\lambda_k|^2} \tag{5}$$

— *характеристика Коренблюма–Сейпа последовательности* Λ *относительно подмножества* $S \subset i[-\infty, +\infty]$ (для правой полуплоскости).

Будет доказана

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$ *и* $-1 < \alpha < +\infty$. *Если*

$$\sup_S \Bigl(\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) - \frac{1+\alpha}{p}\, \widehat{\varkappa}(S) - 2\, \frac{1+\alpha}{p}\, \log \widehat{\varkappa}(S)\Bigr) = +\infty, \tag{6}$$

где sup *берется по всем конечным подмножествам* S *расширенной мнимой оси, то система* $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ *полна в* L^p_α.

Случай $\alpha = 0$ был ранее схематично рассмотрен в нашем обзоре (см. [7], Пример 2.1.1).

Следствие. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$ *и* $-1 < \alpha < +\infty$. *Если*

$$\limsup_{\widehat{\varkappa}(S) \to +\infty} \frac{1}{\widehat{\varkappa}(S)} \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} > \frac{1+\alpha}{2p}\,, \tag{7}$$

то система $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ *полна в* L^p_α.

Доказательство Теоремы

Через const. обозначаем постоянные из $\mathbb{R}_+$. Будем исходить из известного факта (см. [3], Лемма 9.4.1)о том, что неполнота системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в L^p_α влечет за собой существование голоморфной в правой полуплоскости ненулевой функции F, обращающейся в нуль в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}_+$ с кратностью не ниже $\Lambda(\lambda)$, вида

$$G(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, \mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad g \in L^q_\beta, \tag{8}$$

[1]Это гармоническая мера интервала I_n для $\mathbb{C}_+$ в точке 1.

где (см. (1) и ниже)

$$q := \begin{cases} \dfrac{p-1}{p} & \text{при } p>1, \\ \infty & \text{при } p=1, \end{cases} \qquad \beta := \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1-p} & \text{при } p>1, \\ -\alpha & \text{при } p=1. \end{cases}$$

При $p>1$ из представления (8) и неравенства Гельдера для всех $z\in\mathbb{C}_+$ получаем (см. [3], Доказательство теоремы 9.4.1) неравенство

$$\bigl|G(z)\bigr| \leqslant \|g\|_{q,\beta}\left(\int_0^{\infty} e^{-pt\operatorname{Re} z} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} = \\ = \frac{\|g\|_{q,\beta}}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{1+\alpha}{p}}}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{\text{const.}}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{1+\alpha}{p}}}\,. \tag{9}$$

При $p=1$ такое же неравенство с $q=\infty$ следует из элементарной оценки интеграла с “вынесением” $\|g\|_{\infty,\beta}$ из под модуля интеграла.

Замена $F(z) := G\bigl(\frac{1-z}{1+z}\bigr)$, $z\in\mathbb{D}$, определяет голоморфную в единичном круге $\mathbb{D} := \{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$ *ненулевую* функцию F, которая обращается в нуль на последовательности точек $A=\{a_k\}\subset\mathbb{D}$ с кратностью не ниже $A(a)$ в каждой точке $a\in\mathbb{D}$, где $a_k := \frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k}$, а (9) дает

$$\bigl|F(z)\bigr| \leqslant \frac{\text{const.}}{\left(\operatorname{Re}\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{1+\alpha}{p}}} = \frac{\text{const.}\,|1+z|^{2\frac{1+\alpha}{p}}}{\bigl(1-|z|^2\bigr)^{\frac{1+\alpha}{p}}} \leqslant \text{const.}\bigl(1-|z|^2\bigr)^{-\frac{1+\alpha}{p}}\,.$$

Иначе говоря, $\sup_{z\in\mathbb{D}}|F(z)|(1-|z|)^{(1+\alpha)/p}<+\infty$. Это означает, что функция F принадлежит классическому *равномерному пространству Бергмана*

$$\mathcal{A}^{-\gamma} := \Bigl\{f\in\operatorname{Hol}(\mathbb{D})\colon \|f\|_{-\gamma} := \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|)^{\gamma}|f(z)|<+\infty\Bigr\}$$

при $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{p}$ (см. [6], 4.3), где $\operatorname{Hol}(D)$ — пространство голоморфных в области $D\subset\mathbb{C}$ функций. Известны тонкие необходимые условия для (под)последовательностей нулей функций из таких пространств, полученные К. Сейпом (см. [9], Теорема 1), которые мы используем в модификации (см. [6], Теорема 4.24). Для конечной последовательности S точек на *единичной окружности* $\partial\mathbb{D}$ введем обозначение (*для* $\mathbb{D}$)

$$\mathfrak{r}_S := \{rz\in\mathbb{D}\colon 0\leqslant r<1,\ z\in S\}, \tag{10}$$

которое выше использовалось для правой полуплоскости (см. абзац перед (4)). Здесь уже через $|I_n|$ обозначим длины дополнительных к S дуг на $\partial\mathbb{D}$, деленные на 2π, а затем по правилу (4) определим характеристику Берлинга-Карлесона последовательности S (относительно $\mathbb{D}$).

Пусть $A=\{a_k\}$ — последовательность точек в $\mathbb{D}$. Характеристика Коренблюма-Сейпа последовательности A относительно конечной последовательности $S\in\partial\mathbb{D}$ (для единичного круга) определяется как

$$\Sigma(A,\mathfrak{r}_S) := \frac{1}{2}\sum_{a_k\in\mathfrak{r}_S}\bigl(1-|a_k|^2\bigr).$$

Для любой подпоследовательности нулей $A=\{a_k\}$ ненулевой функции $F\in\mathcal{A}^{-\gamma}$ справедливо неравенство (см. [9], [6], Теорема 4.24)

$$\Sigma(A,\mathfrak{r}_S) \leqslant \frac{1}{p}\,\widehat{\varkappa}(S) + \frac{2}{p}\,\log\widehat{\varkappa}(S) + \text{const.}, \tag{11}$$

где const. не зависит от выбора конечной последовательности $S \subset \partial\mathbb{D}$. После "пересадки" этого результата в правую полуплоскость посредством конформного дробно-линейного отображения $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$, $z \in \mathbb{D}$, левая часть (11) преобразуется в характеристику Коренблюма-Сейпа последовательности Λ для правой полуплоскости относительно последовательности, являющейся образом $S \subset \partial\mathbb{D}$ при нашем дробно-линейном отображении и по-прежнему обозначаемой той же буквой $S \subset i[-\infty, +\infty]$, т. е. совпадает с (5). При этом радиальные интервалы из (10) переходят в дуги окружностей $\mathfrak{r}_{iy} \in \mathbb{C}_+$, проходящих через точки 1 (образ нуля) и $iy \in S \subset i[-\infty, +\infty]$ ортогонально мнимой оси в силу конформности дробно-линейного отображения и "хороших" границ круга и полуплоскости. Очевидно, центры этих окружностей лежат на мнимой оси. Таким образом, характеристика Берлинга-Карлесона конечной последовательности $S \subset \partial\mathbb{D}$ относительно $\mathbb{D}$ преобразуется в характеристику Берлинга-Карлесона ее образа на $i[-\infty, +\infty]$ из (4) относительно правой полуплоскости. Отсюда при условии неполноты системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в пространстве L^p_α из (11) получаем

$$\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) \leqslant \gamma\, \widehat{\varkappa}(S) + 2\gamma \log \widehat{\varkappa}(S) + \text{const.},$$

где const. не зависит от конечного подмножества $S \subset i[-\infty, +\infty]$. Это противоположное к (6) неравенство и доказывает теорему.

Замечание 1. В отличие от условия расходимости ряда (2) условие полноты (6) уже тесно связано со значениями показателей p и α.

Замечание 2. Теорема содержательна лишь в двух случаях:

1) при $p = 1$ для любого $\alpha > -1$;
2) при $1 < p < +\infty$, но $\alpha > \min\{0, p-2\}$.

Действительно, выполнение условия (6) обеспечивает по определению (5) расходимость ряда

$$\sum_k \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|1+\lambda_k|^2}\,,$$

вследствие чего неравенство

$$\frac{\operatorname{Re}\lambda}{|1+\lambda|^2} = \frac{\operatorname{Re}\lambda}{1 + 2\operatorname{Re}\lambda + |\lambda|^2} \leqslant \frac{\operatorname{Re}\lambda}{1+|\lambda|^2}\,, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$$

влечет за собой выполнение условия расходимости ряда (2). А тогда уже "работает" утверждение 2 после (2). Из того же утверждения при выполнении условия Ладыгина (3) наша Теорема "проигрывает" условию (2) при всех $p \in [1, +\infty)$ и $\alpha \in (-1, +\infty)$.

Замечание 3. Возможны и другие версии характеристик Берлинга-Карлесона и Коренблюма-Сейпа, а как следствие, и иные формы Теоремы (см. [6], Теорема 4.25), [9], Теорема 1).

Доказательство Следствия Из условия полноты (6) Теремы и определения (5) характеристики Коренблюма-Сейпа следует, что условие

$$\limsup_{\widehat{\varkappa}(S)\to+\infty} \frac{1}{\widehat{\varkappa}(S)} \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|1+\lambda_k|^2} > \frac{1+\alpha}{2p} \tag{12}$$

достаточно для полноты экспоненциальной системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в L^p_α в ограничениях Теоремы или Следствия. Случай существования предельной точки в $\mathbb{C}_+$ для последовательности Λ тривиален (система полна) и вписывается в условие (6), поскольку левая часть этого условия в такой ситуации равна $+\infty$. Поэтому далее предполагаем, что у последовательности Λ нет предельных точек в $\mathbb{C}_+$. Из условия полноты (12) следует, что для доказательства

Следствия достаточно установить следующий факт: *при любом достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *неравенство*

$$\frac{1}{|1+\lambda_k|^2} \geqslant \frac{1}{(1+\varepsilon)\big(1+|\lambda_k|^2\big)}$$

выполнено для всех номеров k*, исключая, быть может, конечное число их.* Другими словами, достаточно установить неравенство

$$(1+\varepsilon)\big(1+|\lambda|^2\big) \geqslant |1+\lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus K_\varepsilon, \tag{13}$$

где K_ε — некоторый компакт в $\mathbb{C}_+$. В полярной форме это неравенство приобретает вид

$$\varepsilon(1+r^2) \geqslant 2r\cos\varphi, \quad \lambda = rei\varphi, \quad r = |\lambda|,\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

При $r < \varepsilon/2$ и $r > 2/\varepsilon$ справедливы, соответственно, неравенства

$$\varepsilon(1+r^2) \geqslant \varepsilon \geqslant 2r \geqslant 2r\cos\varphi \quad \text{ при } r \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

и

$$\varepsilon(1+r^2) \geqslant \varepsilon r^2 \geqslant \varepsilon\frac{2}{\varepsilon}\,r = 2r \geqslant 2r\cos\varphi \quad \text{ при } r \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\,.$$

Кроме того, при $\cos\varphi < \varepsilon$ имеем

$$\varepsilon(1+r^2) \geqslant \varepsilon \cdot 2r \geqslant 2r\cos\varphi.$$

Следовательно, в качестве компакта K_ε в (13) можно выбрать множество

$$K_\varepsilon := \Big\{z = re^{i\varphi} \colon \frac{\varepsilon}{2} \leqslant r \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\,, \quad \cos\varphi \geqslant \varepsilon\Big\}$$

— компакт в $\mathbb{C}_+$.
Следствие доказано.

Замечание 4. Гораздо более сложный вопрос о необходимых условиях полноты системы $\mathrm{Exp}_{-\Lambda}$ в L^p_α в терминах характеристик Берлинга-Карлесона и Коренблюма-Сейпа предполагается рассмотреть позже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sedletskii A.M. *Fourier transforms and approximation.* An Internat. Ser. Monogr. Math. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher. 2000. 261 p.
2. Седлецкий А.М. *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. I.* Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: МАИ. 2003. 152 с.
3. Седлецкий А.М. *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. II.* Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 6. М.: МАИ. 2003. 162 с.
4. Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* М.: Физматлит. 2005. 503 с.
5. Моисеев Е.И., Прудников А.П., Седлецкий А.М. *Базисность и полнота некоторых систем элементарных функций.* М.: Вычислительный центр РАН. 2004. 146 стр.
6. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman spaces.* Graduate Texts in Mathematics. V. 199. N. Y.: Springer-Verlag. 2000. x+289 p.
7. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Уфа: РИЦ БашГУ. 2006; издание второе, дополненное, 2008. xvi+172 с.
8. Седлецкий А.М. *Аппроксимация типа Мюнца-Саса в весовых пространствах L^p и нули функций классов Бергмана в полуплоскости* // Известия вузов. Математика. 2008. № 5. С. 92-100.
9. Seip K. *On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$* // J. d'Analyse Math. 1995. V. 67. P. 307-322.

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru