ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 2015/2016 УЧЕБНЫЙ ГОД

Муниципальный этап

9 класс

ПУБЛИКАЦИЮ ПОДГОТОВИЛИ

М.В. САХАНЕВИЧ, К.В. ТРУНОВ

Аннотация. Приводятся задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике за 2015/2016 учебный год для 9-х классов. Для каждой задачи приведены решения, критерии оценок и указания.

Ключевые слова: квадратичная функция, нули функции, составное число, площадь треугольника, биссектриса.

1. Известно, что квадратичная функция $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет нули x_1, x_2 и $f(2014) = f(2016)$. Найдите $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

Составитель Трунов К.В.

2. С четырехзначным числом проделывают следующую операцию: первую и вторую цифру в записи этого числа записывают в конец, и первую цифру стирают (**12**34→2341**2**), тоже самое делают с получившимся пятизначным числом (**23**412→3412**23**) и т.д. Докажите, что для любого четырехзначного числа после нескольких таких операции получится составное число.

Составитель Трунов К.В.

3. На левой половине доски записано число 21, а на правой число 15. Разрешается взять произвольное число а с левой половины доски и произвольное число b с правой половины доски, вычислить числа $ab, a^3 + b^3$ и записать ab на левую, а $a^3 + b^3$ на правую сторону доски соответственно. Можно ли при помощи таких операций получить на доске число 2013201420152016?

Составитель Трунов К.В.

4. В треугольнике ABC с биссектрисой AE построены описанные окружности треугольников AEB, AEC, которые пересекают сторону AC в точке N, а AB в точке M соответственно. Докажите равенство площадей треугольников BME, CNE.

Составитель Луценко В.И.

5. Известно, что на шахматной доске можно расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Школьнику Пете не нравится шахматная раскраска доски, и он раскрасил доску в 32 цвета, так что клеток каждого цвета ровно две. Сможет ли он теперь расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга и стояли на клетках разного цвета?

Составитель Трунов К.В.

Поступила 25 января 2016 г.

Общие рекомендации по проверке

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс

1. Известно, что квадратичная функция $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет нули x_1, x_2 и $f(2014) = f(2016)$. Найдите $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

Ответ: 2015.

Первое решение.
Так как график квадратичной функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = -a\backslash 2$ и $f(2014) = f(2016)$. $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то $-\frac{a}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2014+2016}{2} = 2015$.

Второе решение.
Так как $f(2014) = f(2016)$, то $2014^2 + 2014a + b = 2016^2 + 2016a + b \Leftrightarrow 2a = -2 \cdot 4030 \Leftrightarrow a = -4030$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -a \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a}{2} = 2015$

Рекомендации по проверке.
Указан только ответ: 0 баллов.
Найдено только значение a: 4 балла.

2. С четырехзначным числом проделывают следующую операцию: первую и вторую цифру в записи этого числа записывают в конец, и первую цифру стирают (**12**34→234**12**), тоже самое делают с получившимся пятизначным числом (**23**412→3412**23**) и т.д. Докажите, что для любого четырехзначного числа после нескольких таких операции получится составное число.

Решение.
Пусть четырехзначное число имеет вид $\overline{abcd}$, проделаем с ним четыре такие операции. Получим:
$\overline{abcd} \to \overline{bcdab} \to \overline{cdabbc} \to \overline{dabbccd} \to \overline{abbccdda}$. Число $\overline{abbccdda}$ делится на 11, так как (a+d+c+b)-(d+c+b+a)=0 $\vdots 11$.

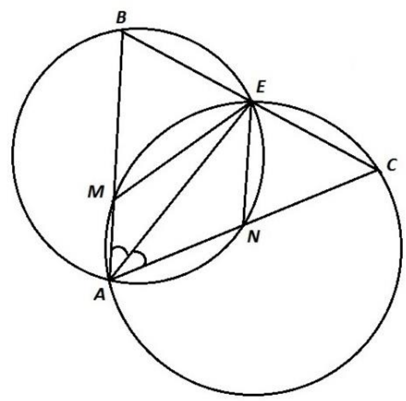
3. На левой половине доски записано число 21, а на правой число 15. Разрешается взять произвольное число a с левой половины доски и произвольное число b с правой половины доски, вычислить числа ab, a^3+b^3 и записать ab на левую, а a^3+b^3 на правую сторону доски соответственно. Можно ли при помощи таких операций получить на доске число 2013201420152016?

Ответ: нет.

Первое решение.
Заметим, что число $21 \vdots 7$, а 15 дает остаток 1. Значит после первой операции число $ab \vdots 7$, а число a^3+b^3 при делении на 7 дает остаток 1. Таким образом получаем, что на левой доске мы запишем число кратное 7, а на правой число дающее остаток 1 при делении на 7. Следовательно, после нескольких таких операции на левой доске будут записаны числа кратные 7, а на правой числа дающие остаток 1, но число 2013201420152016 дает остаток 3 при деление на 7.

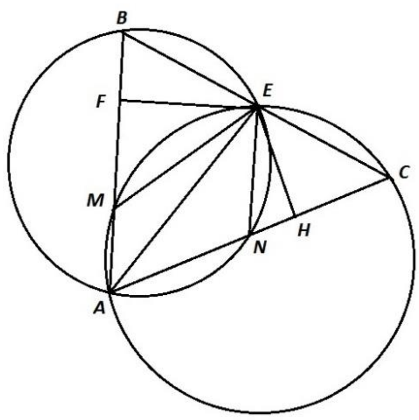
Второе решение.
Заметим, что число $21 \vdots 3$, а $15 \vdots 3$. Значит после первой операции число $ab \vdots 9$, а число $a^3+b^3 \vdots 9$. Таким образом получаем, что на левой и на правой доске мы запишем число кратное 9. Следовательно, после нескольких таких операции на доске будут записаны числа кратные 9 (кроме 21 и 15), но число 2013201420152016 не делится на 9.

4. В треугольнике ABC с биссектрисой AE построены описанные окружности треугольников AEB, AEC, которые пересекают сторону AC в точке N, а AB в точке M соответственно. Докажите равенство площадей треугольников BME, CNE.



Решение. Из точки B проведены две секущие ко второй окружности, следовательно $BE \cdot BC = BM \cdot BA$, аналогично $CE \cdot CB = CN \cdot CA$. Разделим второе равенство на первое и получим $\frac{CE}{BE} = \frac{CN}{BM} \cdot \frac{CA}{BA}$.
Учитывая, что биссектриса делит сторону на пропорциональные отрезки, т.е. $\frac{CA}{BA} = \frac{CE}{BE}$ Подставим в предыдущее равенство и после сокращения увидим, что $CN = BM$. Далее можно закончить решение двумя способами:

1) Так как пары дуг BE, EN и ME, EC равны (опираются равные углы), то и соответствующие хорды равны:



2) $BE = EN, ME = EC$. Следовательно, треугольники BME, CNE равны по трем сторонам. Поэтому площади одинаковые.

3) Так как AE биссектриса угла BAC, то высоты опущенные на основания $CN = BM$ одинаковые. Поэтому площади искомых треугольников одинаковые.

5. Известно, что на шахматной доске можно расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Школьнику Пете не нравится шахматная раскраска доски, и он раскрасил доску в 32 цвета, так что клеток каждого цвета ровно две. Сможет ли он теперь расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга и стояли на клетках разного цвета?

Ответ: Да.

Решение. Заметим, что общее число способов расставить 8 ладей на доске так, чтобы они не били друг друга равно $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=8!$ (на первой вертикали 8 способами, на второй 7 и т.д.) .

Теперь подсчитаем количество способов расстановки 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета: пару ладей стоящих на клетках одного цвета можно расставить не более чем 32 способами (их может быть меньше, так как если клетки одного цвета стоят на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем). Остальные 6 ладей можно расставить 6! способами. Значит общее число способов расстановки в этом случае $k\le 32\cdot 6!$

Предположим, что ему не удастся это сделать. Это означает, что $k\ge 8!$, но тогда $32\cdot 6!\ge 8!\Leftrightarrow 32\ge 8\cdot 7$. Получаем противоречие.

Рекомендации по проверке.
Найдено только количество способов расстановки 8 ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга: 2 балла
Найдена оценка на количество расстановок 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета: 4 балла
Задача в целом решена, но не учитывается, что если клетки одного цвета стоят на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем: не более 6 баллов.

Саханевич Михаил Владимирович,
Лицей № 153,
ул. Карла Маркса 12, корпус 8 УГАТУ,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: licey_153@mail.ru

Кирилл Владимирович Трунов,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: trounovkv@mail.ru