Уфимский математический журнал (приложение). Том 1. №1 (2016).

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 2015/2016 УЧЕБНЫЙ ГОД

Муниципальный этап

10 класс

ПУБЛИКАЦИЮ ПОДГОТОВИЛИ

К.П. ИСАЕВ, И.Ю. ЧЕРДАНЦЕВ

Аннотация. Приводятся задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике за 2015/2016 учебный год для 10-х классов. Для каждой задачи приведены решения, критерии оценок и указания.

Ключевые слова: натуральные числа, квадратный трехчлен, рациональные числа, окружность, правильный многоугольник.

1. Взяли 2015 последовательных натуральных чисел, делящихся на 2015. Может ли их сумма быть 2015-й степенью некоторого натурального числа?

Составитель ИсаевК.П.

2. В квадратном трёхчлене x^2+px+q p и q - целые числа, дающие при делении на 3 остатки 2. Может ли этот трехчлен иметь рациональные корни?

Составитель ИсаевК.П.

3. На левой половине доски записано число 21, а на правой число 8. Разрешается взять произвольное число a с левой половины доски и произвольное число b с правой половины доски, вычислить числа ab, a^3+b^3 и записать ab на левую, а a^3+b^3 на правую сторону доски соответственно. Можно ли при помощи таких операций получить на доске число 2013201420152016?

Составитель ТруновК.В.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке K. Прямая пересекает большую окружность в точках A и B, а меньшую окружность в точках C и D. Точка C лежит между A и D. Докажите, что $\angle AKC=\angle BKD$.

Составитель ИсаевК.П.

5. В правильном 9-угольнике все стороны и диагонали покрасили в красный или в синий цвета. Оказалось, что нет трех вершин 9-угольника, соединенных отрезками, образующими красный треугольник. Докажите, что найдутся 4 вершины 9-угольника, образующие четырехугольник, все стороны и диагонали которого покрашены в синий цвет.

Составитель ИсаевК.П.

Поступила 25 января 2016 г.

Общие рекомендации по проверке

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10 класс

1. Взяли 2015 последовательных натуральных чисел, делящихся на 2015. Может ли их сумма быть 2015-й степенью некоторого натурального числа?

Ответ: может.

Решение.
Обозначим первое из указанных чисел а. Тогда второе число – a+2015, третье число - $a+2015\cdot 2$ и т.д. Последнее из чисел - $a+2015\cdot 2014$. Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 2015. Их сумма S равна $\dfrac{2a+2015\cdot 2014}{2}\cdot 2015=(a+1007\cdot 2015)\cdot 2015.$

Возьмем, например, $a=2015^{2014}-1007\cdot 2015.$ Тогда $S=2015^{2015}$.

Рекомендации по проверке.
Ответ без указания чисел – 0 баллов.
Любой пример, показывающий, что такие числа существуют - 7 баллов.

2. В квадратном трёхчлене x^2+px+q p и q - целые числа, дающие при делении на 3 остатки 2. Может ли этот трехчлен иметь рациональные корни?

Ответ: не может.

Решение.
По условию $p=3n+2$ и $q=3m+2$, где n и m – некоторые целые числа. Тогда
$D=(3n+2)^2-4(3m+2)=3(3n^2+4n-4m-2)+2.$

Дискриминант дает остаток 2 при делении на 3. Квадрат целого числа не может давать при делении на 3 остаток 2:
1) если $k = 3l$, то $k^2 = 9l^2$ - остаток 0;
2) если $k = 3l + 1$, то $k^2 = 9l^2 + 6l + 1$ - остаток 1;
3) если $k = 3l + 2$, то $k^2 = 9l^2 + 12l + 4$ - остаток 1.
Таким образом, дискриминант нашего квадратного трехчлена не является точным квадратом, поэтому рациональных корней быть не может.

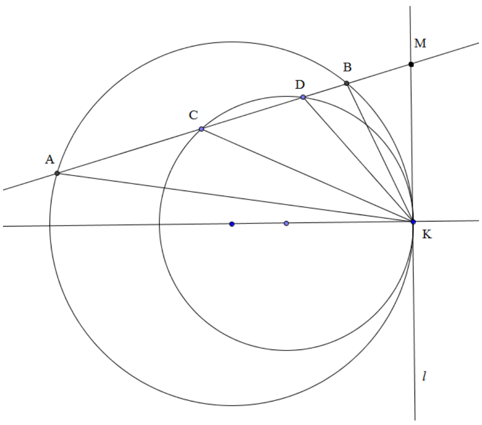
3. На левой половине доски записано число 21, а на правой число 8. Разрешается взять произвольное число a с левой половины доски и произвольное число b с правой половины доски, вычислить числа ab , $a^3 + b^3$ и записать ab на левую, а $a^3 + b^3$ на правую сторону доски соответственно. Можно ли при помощи таких операций получить на доске число 2013201420152016?

Ответ: нет

Решение.
Заметим, что число $21 \vdots 7$, а 8 дает остаток 1. Значит после первой операции число $ab \vdots 7$, а число $a^3 + b^3$ при делении на 7 дает остаток 1. Таким образом получаем, что на левой доске мы запишем число кратное 7, а на правой число дающее остаток 1 при делении на 7. Следовательно, после нескольких таких операции на левой доске будут записаны числа кратные 7, а на правой числа, дающие остаток 1, но число 2013201420152016 дает остаток 3 при деление на 7.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке K. Прямая пересекает большую окружность в точках A и B, а меньшую окружность в точках C и D. Точка C лежит между A и D. Докажите, что $\angle AKC = \angle BKD$.

Решение.



Пусть l – общая касательная к окружностям в точке K, $l \cap (AB) = M$.
$\angle BKD = \angle DKM - \angle BKM$.
$\angle BKM$ - угол между касательной и секущей большей окружности. Следовательно, $\angle BKM = \angle BAK$.
$\angle DKM$ - угол между касательной и секущей меньшей окружности. Следовательно, $\angle DKM = \angle DCK$.
Итак, $\angle BKD = \angle DCK - \angle BAK$. Из ΔACK

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle BAK - \angle ACK = 180^\circ - \angle BAK - (180^\circ - \angle DCK) =$$
$$= \angle DCK - \angle BAK = \angle BKD,$$
что и требовалось доказать.

5. В правильном 9-угольнике все стороны и диагонали покрасили в красный или в синий цвета. Оказалось, что нет трех вершин 9-угольника, соединенных отрезками, образующими красный треугольник. Докажите, что найдутся 4 вершины 9-угольника, образующие четырехугольник, все стороны и диагонали которого покрашены в синий цвет.

Решение.
Предположим, что существует вершина A, из которой выходит 4 или более красных отрезков: AB, AC, AD, AE. Так как красных треугольников быть не может, то вершины B, C, D и E соединены синими отрезками. Искомый четырехугольник нашелся.
Рассмотрим случай, когда из каждой вершины выходит менее 4 красных отрезков. Тогда найдется вершина A, из которой выходит менее трех красных отрезков, потому что если бы из всех 9 вершин выходило ровно 3 красных отрезка, то их было бы $\frac{9\cdot 3}{2}$ - не целое число.
Тогда из A выходит не менее 6 ребер синего цвета. Рассмотрим 6 соответствующих вершин. Если среди них есть три вершины, соединенных отрезками, образующими синий треугольник, то искомый четырехугольник образуют эти три точки и точка A.
Но среди шести вершин всегда найдется 3, соединенных отрезками одного цвета. Действительно, возьмем любую из этих 6 вершин X. Из нее выходит по крайней мере три одноцветных отрезка. Три конца этих отрезков либо попарно соединены отрезками другого цвета, либо среди них найдутся две точки, соединенных отрезком того же цвета, что и с X. В обоих случаях получается одноцветный треугольник.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Игорь Юрьевич Черданцев,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия