

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УФИМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

Уфа
«ДИАЛОГ»
2017

УДК 517.5+517.53
ББК
Л-47

*Монография издана при финансовой поддержке Академии наук
Республики Башкортостан*

Леонтьев А.Ф. Представление функций рядами экспонент/ Под редакцией доктора физико-математических наук А.М. Гайсина. Уфа: Диалог, 2017. — 128 с.

ISBN

Книга посвящена представлению аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент, исследованию последовательностей полиномов из экспонент, сходящихся в областях, где система экспонент не полна. Она включает вопросы разложения целых функций в ряды экспонент, в том числе — с учетом порядка, типа и индикатрисы роста. Публикуемая монография представляет собой обзор важнейших исследований А.Ф. Леонтьева и по другим проблемам: интерполирования в классе целых функций конечного порядка, решения уравнения свертки в комплексной и действительной областях, изучения структуры инвариантных подпространств.

Для специалистов по теории функций, гармоническому анализу, а также занимающихся в смежных областях анализа, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

ISBN

- © Рукопись — Леонтьев А.Ф., 1986
- © Выявление в архиве, подготовка к публикации — Гайсин А.М., 2017
- © ИМВЦ УНЦ РАН, 2017
- © Редакционно-издательское оформление — Издательство «Диалог», 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	10
Г л а в а I. Представление аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент	13
§ 1. Представление функций, аналитических в замкнутой выпуклой области, рядами экспонент в открытой области	13
1.1 Биортогональные системы функций	13
1.2 Конструкция ряда экспонент	17
1.3 Теорема единственности	18
1.4 Условия сходимости ряда	19
1.5 Интерполирующая функция	23
1.6 Разложение целых функций	24
1.7 Восстановление функции по коэффициентам ее ряда экспонент	26
1.8 Связь с квазианалитическим продолжением	26
§ 2. Представление рядами экспонент функций, аналитических внутри области и непрерывных в замкнутой области	28
§ 3. Представление рядами экспонент функций, аналитических внутри области	30
3.1 Случай аналитической границы	30
3.2 Случай произвольной границы	32
3.3 Представление аналитической функции в многоугольнике в виде суммы периодических	33
3.4 Представление аналитических функций с определенным ростом вблизи границы	35
§ 4. Представление аналитических функций в бесконечных выпуклых областях	36
4.1 Случай полуплоскости	36
4.2 Случай произвольной бесконечной выпуклой области	39
§ 5. Достаточные и слабо достаточные множества	42
§ 6. Представляющие системы	43
§ 7. Разложение в выпуклых многоугольниках	45
7.1 Разложение функций, непрерывных в замкнутом многоугольнике	46
7.2 О разложении функций из класса $E^p(D)$	48
7.3 Разложение на сумму периодических	49
§ 8. Ряды экспонент в вещественной области	51
8.1 Условия полноты и минимальности	51
8.2 Условия сходимости рядов	53

Г л а в а II. Представление целых функций конечного порядка ря-	
дами экспонент	57
§ 1. Представление целых функций конечного порядка	57
1.1 Сопряженные порядки и типы	57
1.2 Конструкция ряда	57
1.3 Теоремы разложимости	58
1.4 Оценка производных	61
1.5 Однородное уравнение бесконечного порядка	62
1.6 Неоднородное уравнение бесконечного порядка	64
§ 2. Представление целых функций с учетом индикатрисы роста . .	65
2.1 Постановка задачи	65
2.2 Свойства функции $H(\varphi)$	66
2.3 Конструкция ряда	68
§ 3. Применения	72
3.1 Оператор бесконечного порядка	72
3.2 Ряды экспонент с редкими показателями	73
3.3 Об одном свойстве решения неоднородного уравнения бесконечного порядка	75
 Г л а в а III. Последовательности полиномов из экспонент	77
§ 1. Оценка полинома из экспонент с вещественными показателями	77
1.1 Общие результаты	77
1.2 Интерполирующая функция	78
1.3 Оценка полинома из экспонент при наличии плотности	79
1.4 Связь с интерполяцией	82
1.5 О целых функциях с нулями в точках измеримой последовательности . . .	83
1.6 Полиномы с показателями, имеющими конечную верхнюю плотность	85
1.7 Оценки целых функций с помощью оценок на оси	87
1.8 Квазианалитические классы функций на кривой	90
1.9 Теорема о стирании особенностей	91
1.10 О росте целой функции экспоненциального типа на последовательности точек	91
1.11 Полнота системы экспонент на дуге	93
§ 2. Полиномы из экспонент с комплексными показателями	93
2.1 Оценка полинома в случае $\sum \lambda_n ^{-1} < \infty$	93
2.2 О квазианалитической непродолжаемости	95
2.3 Случай, когда система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна на вертикальном отрезке	96
2.4 Общий случай, когда показатели лежат в углах	97
2.5 Полиномы с произвольными комплексными показателями	98
2.6 Полиномы с показателями, являющимися нулями функции вполне регуля-	
рного роста	100
2.7 О сходимости подпоследовательностей	101
§ 3. Разрешимость интерполяционной задачи	104
3.1 Интерполирование в классе функций экспоненциального типа	104
3.2 Разрешимость в классе $[\rho, \infty)$	105
3.3 Другие условия разрешимости интерполяционной задачи. Разрешимость в	
классе $[\rho, \infty]$	106
3.4 Разрешимость в классе $[\rho, \infty)$	107
§ 4. Уравнение свертки в действительной области	107
4.1 Суммирование ряда	109

4.2	Продолжение на полуось	110
§ 5.	Инвариантные подпространства	112
5.1	Условия спектрального синтеза	113
5.2	Решение уравнения свертки в комплексной области	115
5.3	Другие результаты	116
5.4	Решение неоднородного уравнения свертки	116
	Литература	118
	Предметный указатель	122
	Именной указатель	124

*Столетию со дня рождения выдающегося
советского математика, основателя
уфимской школы по теории функций
АЛЕКСЕЯ ФЕДОРОВИЧА ЛЕОНТЬЕВА
п о с в я щ а е т с я*



Член-корреспондент АН СССР А.Ф. Леонтьев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выдающийся советский математик, член-корреспондент АН СССР Алексей Федорович Леонтьев в 1971 – 1987 гг. жил в Уфе и занимался активной научно-организационной деятельностью. За эти годы им была создана авторитетная научная школа по теории функций, которая успешно действует и в настоящее время. По его инициативе был создан и Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Плодотворным оказался этот период и для него самого: здесь были получены важнейшие результаты по представлению аналитических функций рядами экспонент и более общими рядами. Подытоживая свои исследования, в Уфе он написал широко известные монографии «Ряды экспонент» (1976), «Последовательности полиномов из экспонент» (1980) и «Обобщения рядов экспонент» (1981), которые в 1989 г. были удостоены Государственной премии СССР.

Специалистам хорошо известны и первая его монография «Ряды полиномов Дирихле и их обобщения» (1951) в «Трудах Математического института имени В.А. Стеклова», а также книга «Целые функции. Ряды экспонент» (М.: Наука, 1983), написанная в качестве вузовского учебника по прочитанным им одноименным спецкурсам для студентов, специализирующихся по теории функций в Башкирском государственном университете.

Имя автора, одного из крупнейших отечественных математиков, хорошо известно не только в России, но и далеко за ее пределами. Кто знаком с трудами А.Ф. Леонтьева, несомненно оценили не только его глубокие и фундаментальные результаты и исключительное аналитическое мастерство, но и чрезвычайную четкость и ясность изложения, стройность доказательств и конструкций, умение сделать понятными и идею, и детали самых сложных рассуждений.

Публикуемая работа Алексея Федоровича «Представление функций рядами экспонент» была составлена им, по всей видимости, в 1986 г. и не

была издана при его жизни. Она носит обзорный характер и подводит некоторый итог исследованиям по данному важнейшему направлению теории функций, созданному им самим.

Аналогичный, но небольшой по объему обзор ученого «Ряды и последовательности полиномов из экспонент» был опубликован в «Трудах Математического института имени В. А. Стеклова» (1987. Т. 176. С. 308 – 325) в последний год его жизни. Более основательный обзор А. Ф. Леонтьева «Ряды Дирихле и связанные с ними функциональные уравнения», включающий обширную библиографию по данной тематике, вышел в свет в 1975 г.¹

Рукопись настоящей монографии Алексея Федоровича, выходит, — последней, была обнаружена в процессе подготовки к 100-летию со дня рождения А. Ф. Леонтьева. И сразу же было принято решение подготовить к публикации эту уникальную находку и издать ее к началу конференции².

В процессе подготовки текста данной работы к изданию были устранены только мелкие недочеты и опечатки, но некоторые не совсем характерные для современного математического языка обозначения, а также некоторые устойчивые обороты вида «конечная выпуклая область», «область $\bar{D}$ » «замкнутая (или открытая) область» и т. п. оставлены без изменений.

Сочинение «Представление функций рядами экспонент» включает оглавление, три главы, разбитые на параграфы и пункты, список литературы, предметный и именной указатели. Во введении эта работа обозначена автором термином статья. Судя по всему, это — обзорная статья для ВИНТИ, предназначенная для специального тома книг серии «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики». В отличие от предыдущего обзора, в ней уделено внимание и к таким важным вопросам, как достаточные и слабо достаточные множества, представляющие системы, разложение функций в многоугольниках,

¹Итоги науки и техники. Математических анализ. ВИНТИ, Москва. 1975. Т. 13. С. 5 – 55.

²Международная конференция по теории функций, посвященная 100-летию А. Ф. Леонтьева (Уфа, 24 – 27 мая 2017 г.). Рукопись и машинопись выявлены автором данных строк 10 марта 2017 г. в личном фонде А. Ф. Леонтьева в Научном архиве УНЦ РАН (НА УНЦ РАН. Ф. 76. Оп. 1. Ед. хр. 1. Рукопись. Подлинник. Л. 1 – 160; Там же. Ед. хр. 2. Машинопись. Подлинник. Л. 1 – 161). Рукопись составлена на обратных сторонах деловых бумаг, видимо, московского происхождения. На правом верхнем углу л. 5 рукописи — почерком автора помета: «2 сент. 86». Над трудночитаемыми словами в рукописи имеются пояснительные надписи карандашом. Судя по почерку, они сделаны секретарем-машинисткой кафедры теории функций и функционального анализа БашГУ М. Г. Мироновой. Видимо, текст работы был напечатан ею на машинке осенью 1986 г. Предположительно рукопись составлена автором летом 1986 г. во время отпуска, скорее всего, по обыкновению, на даче. — *Примечание автора предисловия.*

представление функций из класса Харди-Смирнова, а также рядам Дирихле в вещественной области, спектральному синтезу.

Данная работа Алексея Федоровича, без сомнения, вызовет большой интерес не только у специалистов по теории функций, она окажется полезной и как справочное пособие для широкого круга исследователей, в том числе — аспирантов и студентов старших курсов университетов.

А. М. Гайсин

Уфа, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Книга¹ посвящена представлению аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент, представлению целых функций рядами экспонент, исследованию последовательностей полиномов из экспонент, сходящихся в областях, где система экспонент не полна, рассмотрению ряда других вопросов.

Основной результат, относящийся к представлению аналитических функций $F(z)$ рядами экспонент (гл. I)

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad (0.1)$$

состоит в том, что какова бы ни была выпуклая область D (конечная или бесконечная), существует последовательность показателей $\{\lambda_n\}$, зависящая лишь от области D , такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить в D рядом (0.1) (сходящимся абсолютно в D и равномерно внутри D).

В случае конечной области D показатели λ_n — нули целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$ ($K(\varphi)$ — опорная функция области D). Когда $F(z)$ регулярна в D и непрерывна в $\overline{D}$, для коэффициентов a_n указаны формулы. Если по этим формулам сконструировать ряд (0.1), то он может и не сходиться. Для сходимости ряда, и именно к $F(z)$, необходимо на функцию $L(\lambda)$ наложить дополнительные ограничения.

Интересно отметить, что и без этих ограничений имеет место теорема единственности: если все $a_n = 0$, то $F(z) \equiv 0$. В связи с теоремой единственности возник вопрос о способах восстановления функции $F(z)$ по известным коэффициентам a_n (ведь ряд (0.1) может всюду расходиться). В ряде случаев это восстановление связано с квазианалитическим продолжением аналитических функций.

В случае бесконечной выпуклой области, отличной от всей плоскости,

¹В оригинале — «статья». — А. Г.

показатели λ_n — нули целой функции $L(\lambda)$, которая на некотором луче (например, когда D — полуплоскость) или в некотором угле — функция экспоненциального типа с индикатрисой $h(\varphi) = K(-\varphi)$, а в дополнительном угле — функция по крайней мере первого порядка бесконечного типа. Теория такого рода функций не разработана, и это вызвало при исследовании определенные трудности.

Основной результат, относящийся к представлению целых функций во всей плоскости рядами (0.1) (гл. II), заключается в следующем:

Пусть $H(\varphi)r^\rho$ ($\rho > 1$) — выпуклая функция от $z = re^{i\varphi}$ (из этого условия следует, что $H(\varphi)$ — индикатриса роста некоторой целой функции $f(z)$ порядка ρ) и $H(\varphi) > 0$. Если $F(z)$ — целая функция порядка ρ с индикатрисой $h_F(\varphi) \leq H(\varphi)$, то имеет место представление (0.1), такое, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(re^{i\varphi})}{r^\rho} \leq H(\varphi), \quad \Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|. \quad (0.2)$$

Здесь λ_n — нули целой функции $L(\lambda)$ порядка ρ_1 ,

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1,$$

с индикатрисой роста $h_L(\varphi)$, сопряженной по Юнгу с $H(\varphi)$.

Стоит отметить, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция порядка ρ типа σ , то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \psi(re^{i\varphi})}{r^\rho} = \sigma, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| \quad (0.3)$$

(ряд из модулей не учитывает рост функции $f(z)$ вдоль лучей). Условие (0.2) настолько шире условия (0.3), насколько понятие выпуклой области шире понятия круга.

Представление целых функций рядами (0.1) со свойством (0.2) позволило выделить класс целых функции $F(z)$ порядка ρ конечного типа, удовлетворяющих условию: их индикатрисы роста определяются модулями коэффициентов a_n .

В тесной связи с указанными выше результатами находится следующая задача: пусть система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна в области D и пусть функция $F(z)$ все же представляется в этой области D в виде

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z), \quad P_n(z) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z}$$

(сходимость внутри D — равномерная). Что можно сказать о функции $F(z)$ кроме того, что она регулярна в D ? Оказывается, при тех или иных условиях на $\{\lambda_n\}$ сказать о функции $F(z)$ можно многое. Например, если $\lambda_n > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$$

(в этом случае система полна в горизонтальной полосе шириной $2\pi\sigma$), и D содержит в себе вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$ с серединой в точке z_0 , то $F(z)$ будет регулярной в некоторой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < a, \operatorname{Re} z_0 < a \leq \infty\}$.

Исследованию сформулированной задачи посвящена гл. III. Здесь же рассмотрены и другие вопросы: интерполирование в классе целых функций конечного порядка, решение уравнений свертки в комплексной и действительной областях, изучение структуры инвариантных подпространств.

ГЛАВА I

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

Множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \quad (1.1)$$

выпукло. Открытая область абсолютной сходимости ряда (1.1) — выпукла. При условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0 \quad (1.2)$$

(это условие в дальнейшем всегда будет считаться выполненным) открытая область сходимости ряда (1.1) совпадает с открытой областью абсолютной сходимости этого ряда. Следовательно, при условии (1.2) открытая область сходимости ряда (1.1) выпукла (внутри открытой области сходимости ряд сходится равномерно). Отсюда следует, что если ставится вопрос о возможности представления произвольных аналитических функций в данной области D рядами (1.1) при условии (1.2), то область D надо считать выпуклой.

Результаты, на которые не указаны ссылки, взяты из монографии А. Ф. Леонтьева[35].

§ 1. Представление функций, аналитических в замкнутой выпуклой области, рядами экспонент в открытой области

1.1. Биортогональные системы функций. Возьмем систему функций

$$e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \dots, e^{\lambda_n z}, \dots, \quad (1.1.1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — различные комплексные числа, причем $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$. Требуется найти функции $\psi_\nu(z)$ ($\nu = 1, 2, \dots$), аналитические вне некоторого круга и обладающие свойством:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda_\mu t} \psi_\nu(t) dt = \delta_{\mu, \nu} \quad (\mu = 1, 2, \dots; \quad \nu = 1, 2, \dots), \quad (1.1.2)$$

где C — окружность, на которой и вне которой все функции $\psi_\nu(t)$ —

аналитические, и

$$\delta_{\mu,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{при } \mu = \nu. \end{cases}$$

Систему со свойством (1.1.2) будем называть *биортогональной* к системе $\{e^{\lambda_n z}\}$.

Если биортогональная система существует, то необходимо выполняется условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma < \infty. \quad (1.1.3)$$

Условие (1.1.3) является не только необходимым, но и достаточным для существования биортогональной системы $\{\psi_\nu(t)\}$. Укажем, как строятся при условии (1.1.3) функции $\psi_\nu(t)$.

Пусть $L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа, для которой $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — простые нули (кроме этих нулей у $L(\lambda)$ могут быть и другие нули). В качестве $L(\lambda)$ можно, например, взять функцию

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right), \quad (1.1.4)$$

если $\lambda_1 \neq 0$, или функцию

$$\lambda \prod_{\nu=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right),$$

если $\lambda_1 = 0$ (штрих у знака произведения означает, что в произведении все скобки различны). То, что эти произведения изображают целые функции экспоненциального типа, следует из условия (1.1.3).

Положим

$$L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \lambda^n.$$

Пусть

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n+1}} \quad (1.1.5)$$

— функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$. Если $L(\lambda)$ имеет тип σ , то ряд (1.1.5) сходится при $|t| > \sigma$. Обозначим $\overline{D}$ наименьшее замкнутое выпуклое множество, которое содержит в себе все особенности функции $\gamma(t)$. Пусть $\psi_\nu(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией

$$\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\nu)L'(\lambda_\nu)}.$$

Она регулярна вне $\overline{D}$, $\psi_\nu(\infty) = 0$. Если C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, то выполняется условие (1.1.2). Указанные функции, таким образом, образуют биортогональную систему.

Заметим, что

$$\psi_\nu(t) = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\nu)L'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda t} d\lambda$$

(интегрирование происходит по лучу $\arg \lambda = \varphi$). Интеграл сходится в полуплоскости, ограниченной прямой, касающейся границы области D и перпендикулярной лучу $\arg t = -\varphi$. При изменении φ полуплоскость опишет внешность $\overline{D}$.

Функция $\psi_\nu(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi'_\nu(t) + \lambda_\nu \psi_\nu(t) = -\frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \gamma(t).$$

Решая его, получим для $\psi_\nu(t)$ другое представление:

$$\psi_\nu(t) = -\frac{e^{-\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)} \int_{t_0}^t \gamma(t) e^{\lambda_\nu t} dt + A e^{-\lambda_\nu t},$$

где точка t взята вне $\overline{D}$, и A — постоянная.

Этим представлением удобно пользоваться в конкретных случаях.

Пусть, например,

$$L(\lambda) = \sin i\pi\lambda = \frac{e^{-\pi\lambda} - e^{\pi\lambda}}{2i}.$$

Тогда нули этой функции — ni ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

$$\gamma(t) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t + \pi} - \frac{1}{t - \pi} \right).$$

Используя формулы $e^{bt} = e^{ba} + (t - a)\varphi(t)$ ($\varphi(t)$ — целая функция),

$$\int_{t_0}^t \frac{e^{bt} dt}{t - a} = e^{ba} \int_{t_0}^t \frac{dt}{t - a} + \int_{t_0}^t \varphi(t) dt = e^{ba} \ln(t - a) + \text{целая функция},$$

получим

$$\int_{t_0}^t \gamma(t) e^{int} dt = \frac{(-1)^n}{2i} \ln \frac{t + \pi}{t - \pi} + \text{целая функция}$$

и, следовательно,

$$\psi_n(t) = \frac{e^{-int}}{2\pi} \ln \frac{t + \pi}{t - \pi} + \text{целая функция} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.1.6)$$

В рассматриваемом случае $\overline{D}$ — отрезок $[-\pi, \pi]$, вне его функция $\ln \frac{t+\pi}{t-\pi}$ (берем какую-нибудь ветвь) — однозначная.

Полученная система биортогональна к классической системе $\{e^{inz}\}$.

Во втором примере $L(\lambda) = \cos a\lambda \cos ib\lambda$ ($a > 0, b > 0$) или

$$L(\lambda) = A \sum_{n=1}^4 e^{\alpha_n \lambda}, \quad (1.1.7)$$

где $A = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = b + ia$, $\alpha_2 = -b + ia$, $\alpha_3 = -b - ia$, $\alpha_4 = b - ia$,
а

$$\gamma(t) = A \sum_{n=1}^4 \frac{1}{t - \alpha_n}.$$

Нули λ_ν — точки

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}, \quad i \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{b} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.1.8)$$

область $\overline{D}$ — прямоугольник с вершинами в точках α_k ($k = 1, 2, 3, 4$).

Имеем

$$\psi_\nu(t) = -A \frac{e^{-\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)} \sum_{n=1}^4 e^{\lambda_\nu \alpha_n} \ln(t - \alpha_n) + \text{целая функция}. \quad (1.1.9)$$

При обходе вокруг $\overline{D}$ сумма получает приращение

$$2\pi i \sum_{n=1}^4 e^{\lambda_\nu \alpha_n} = \frac{2\pi i}{A} L(\lambda_\nu) = 0.$$

Следовательно, функция $\psi_\nu(t)$, как и должно быть, — однозначная вне $\overline{D}$.

Пусть

$$h(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r}$$

— индикатриса роста функции $L(\lambda)$, $K(\varphi)$ — опорная функция множества $\overline{D}$:

$$K(\varphi) = \max_{t \in \overline{D}} \operatorname{Re}(te^{-i\varphi}).$$

Согласно теореме Поля, $h(\varphi) = K(-\varphi)$.

Возьмем произвольную выпуклую замкнутую и ограниченную область

$\overline{D}$. Обозначим $K(\varphi)$ опорную функцию области $\overline{D}$. Доказано, что всегда существует целая функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n ($n = 1, 2, \dots$) и индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Построенные по указанному выше правилу функции $\psi_\nu(t)$ регулярны вне $\overline{D}$ и образуют систему, биортогональную к системе $\{e^{\lambda_n z}\}$. При построении биортогональной системы можно, таким образом, отправляться или от функции $L(\lambda)$, или от заданной области $\overline{D}$.

1.2. Конструкция ряда экспонент. Пусть $\overline{D}$ — ограниченная выпуклая замкнутая область. Обозначим $K(\varphi)$ ее опорную функцию. Пусть, далее, $L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа с простыми нулями λ_n ($n = 1, 2, \dots$) и индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Такая функция (их бесконечно много), как отмечалось в предыдущем пункте, всегда существует. Рассмотрим систему $\{\psi_\nu(t)\}$, биортогональную к системе $\{e^{\lambda_n z}\}$. Функции $\psi_\nu(t)$ регулярны вне $\overline{D}$.

Возьмем функцию $f(z)$, аналитическую на $\overline{D}$. Ей сопоставим ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad (1.1.10)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \psi_n(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.1.11)$$

(C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого $f(t)$ — аналитическая функция).

В случае классической системы $\{e^{inz}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ функции $\psi_\nu(t)$ имеют вид (1.1.9). В этом случае

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \frac{e^{-int}}{2\pi} \ln \frac{t + \pi}{t - \pi} dt$$

(C охватывает отрезок $[-\pi, \pi]$) или

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Это — классические формулы Фурье. Таким образом, ряд (1.1.10) является естественным обобщением на случай выпуклых областей обычного ряда Фурье, соответствующего отрезку.

В случае системы $\{e^{\lambda_n z}\}$, где λ_n — числа (1.1.8), функции $\psi_\nu(t)$ имеют

вид (1.1.9) (в этом случае $L(\lambda) = \cos a\lambda \cos ib\lambda$, $\overline{D}$ — прямоугольник с вершинами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, указанными в (1.1.7)). Поэтому

$$a_\nu = -\frac{A}{2\pi i L'(\lambda_\nu)} \int_C f(t) e^{-\lambda_\nu t} \sum_{n=1}^4 e^{\lambda_\nu \alpha_n} \ln(t - \alpha_n) dt$$

(C охватывает прямоугольник $\overline{D}$) или

$$a_\nu = \frac{A}{L'(\lambda_\nu)} \sum_{n=1}^4 e^{\lambda_\nu \alpha_n} \int_0^{\alpha_n} f(t) e^{-\lambda_\nu t} dt. \quad (1.1.12)$$

1.3. Теорема единственности.

ТЕОРЕМА 1.1.1. Пусть функции $f(z)$, аналитической на $\overline{D}$, соответствует ряд (1.1.10) с коэффициентами (1.1.11). Если все $a_n = 0$, то $f(z) \equiv 0$.

Из теоремы единственности вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1.2. Система $\{\psi_\nu(t)\}$ полна в области $\mathbb{C}/\overline{D}$ в классе функций, аналитических вне $\overline{D}$ и обращающихся в нуль в бесконечности.

В связи с последней теоремой интересно отметить, что существуют примеры, когда система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна не только в области D (открытой части $\overline{D}$), но и в любой подобласти области D (соответствующий пример построен в [35], с. 277).

В качестве примера применения теоремы единственности отметим следующий факт: ряд (1.1.10) не может вообще сходиться в области $G \supset \overline{D}$. В самом деле, пусть ряд (1.1.10) сходится в $G \supset \overline{D}$ к функции $F(z)$, т. е.

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in G.$$

Умножив левую и правую части на $\frac{1}{2\pi i} \psi_n(z)$ и проинтегрировав по контуру C , получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_n(t) dt = a_n.$$

В силу теоремы единственности, тогда $F(z) = f(z)$. Выходит, что если ряд (1.1.10) сходится в $G \supset \overline{D}$, то он сходится к своей функции. При малых $|z|$ получаем

$$M(f) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(t + z) dt = 0, \quad (1.1.13)$$

т.е. $f(z)$ удовлетворяет уравнению свертки. Но такому уравнению удовлетворяет не любая функция. Например, для функции $f(z) = e^{\lambda z}$, $\lambda \neq \lambda_k$ ($k=1, 2, \dots$) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(t+z) dt = L(\lambda) e^{\lambda z} \neq 0.$$

Последние рассуждения показывают, что вопрос о представлении произвольных аналитических функций $f(z)$ рядами (1.1.10) с коэффициентами (1.1.11) может рассматриваться лишь в области D .

Будем предполагать в дальнейшем, что $0 \in D$ (это не нарушит общности).

1.4. Условия сходимости ряда. Коэффициенты (1.1.11) имеют следующую асимптотику:

$$a_\nu = -\frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \left\{ \sum_{m=0}^k \frac{[M(f)]_0^{(m)}}{\lambda_\nu^{m+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}}\right) \right\},$$

где $M(f)$ — выражение (1.1.13).

Пусть $M(f) \not\equiv 0$ и пусть p — наименьшее целое, такое, что $[M(f)]_0^p \neq 0$. Тогда

$$a_\nu \approx -\frac{[M(f)]_0^{(p)}}{\lambda_k^{p+1} L'(\lambda_k)}, \quad \nu \rightarrow \infty. \quad (1.1.14)$$

В случае, когда $M(f) \equiv 0$, коэффициенты a_ν убывают быстрее.

Из асимптотики (1.1.14) видно, что на сходимость ряда (1.1.10) влияет поведение величин $|L'(\lambda_\nu)|$. Отметим, что

$$e^{\lambda z} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}. \quad (1.1.15)$$

Класс функций $f(z)$, аналитических на $\overline{D}$, обозначим $A(\overline{D})$. Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\lambda)$, $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.1. Пусть $\lambda \neq \lambda_n$ ($n \geq 1$). Если ряд (1.1.15) сходится в области D , то выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$

$$\ln |L'(\lambda_n)| > [h(\varphi_n) - \varepsilon] |\lambda_n|, \quad n > n_0(\varepsilon). \quad (1.1.16)$$

При выполнении условия (1.1.16) ряд (1.1.10) сходится в области D , какова бы ни была функция $f(z) \in A(\overline{D})$. Если $0 \in D$ (а это мы условились предполагать), то индикатриса производной $L'(\lambda)$ равна $h(\varphi)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$\ln |L'(\lambda_n)| < [h(\varphi_n) + \varepsilon] |\lambda_n|, \quad n > n_1(\varepsilon).$$

Если иметь это ввиду, то условие (1.1.16) означает, что производная $L'(\lambda)$ в точках λ_n растет максимально возможным образом.

ТЕОРЕМА 1.1.3. *Для того, чтобы ряд (1.1.10) сходиллся к своей функции $f(z)$ (какова бы ни была $f(z) \in A(\overline{D})$), необходимо и достаточно выполнения одного из условий:*

1)

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) e^{\lambda_n z}, \quad z \in \overline{D}, \quad t \notin \overline{D};$$

2)

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}, \quad z \in D, \quad \lambda - \text{любое};$$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)} = 0, \quad z \in D;$$

4)

$$\ln |L'(\lambda_n)| > [h(\varphi_n) - \varepsilon] |\lambda_n|, \quad n > n_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 - \text{любое},$$

и существуют $p > 0$ и r_n , $0 < r_n \uparrow \infty$, такие, что

$$|L(\lambda)| > e^{p|\lambda|}, \quad |\lambda| = r_n \quad (n \geq 1);$$

5)

$$\ln |L'(\lambda_n)| > [h(\varphi_n) - \varepsilon] |\lambda_n|, \quad n > n_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 - \text{любое},$$

и $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста;

6) существуют ε_n , $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что кружки

$$K_m: |\lambda - \lambda_m| < \bar{e}^{\varepsilon_m |\lambda_m|} \quad (m \geq 1)$$

не пересекаются и вне этих кружков

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r, \quad r > r_0, \quad \varepsilon > 0 - \text{любое};$$

7) существуют замкнутые кривые Γ_n ($n \geq 1$), обладающие свойством: $\rho_n = \max_{\lambda \in \Gamma_n} |\lambda| = O\left(\min_{\lambda \in \Gamma_n} |\lambda|\right)$, длина Γ_n есть $O(\rho_n)$, на Γ_n

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r, \quad n > n_0,$$

$\varepsilon > 0$ — любое, внутри Γ_n лежат точки $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и только они из

последовательности $\{\lambda_m\}$;

8) любая целая функция экспоненциального типа $\Phi(\lambda)$ при условии, что у ассоциированной с ней по Борелю функции все особенности лежат в D , разлагается в ряд Лангранжа

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}.$$

Отметим, что $L(\lambda)$ есть функция вполне регулярного роста, если равномерно

$$\frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} \rightarrow h(\varphi)$$

при $r \rightarrow \infty$, $r \notin E_0$, где E_0 — некоторое множество нулевой относительной меры:

$$\frac{\text{mes } E_0 \cap [0, r]}{r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Доказательство достаточности идет следующим путем. Из условия 4) выводится условие 2), а из условия 2) — условие 1). Из условия же 1) разложение в ряд (1.1.10) получается очевидным образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.2. Пусть $\bar{D}$ — ограниченная замкнутая выпуклая область, $K(\varphi)$ — ее опорная функция. Тогда существует функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n и индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$, которая удовлетворяет условию 4).

На основании этого предложения получаем:

ТЕОРЕМА 1.1.4. Пусть $\bar{D}$ — ограниченная выпуклая область. Существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$, зависящие только от области $\bar{D}$, такие, что каждая $f(z) \in A(\bar{D})$ представляется в D рядом (1.1.10) с коэффициентами (1.1.11).

Функция $L(\lambda) = \cos a\lambda \cos ib\lambda$ удовлетворяет условию 4). Поэтому каждую $f(z) \in A(\bar{D})$, где $\bar{D}$ — прямоугольник с вершинами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (α_n приведены в (1.1.7)), можно в D представить рядом (1.1.10), в котором λ_ν — точки (1.1.8), а коэффициенты вычисляются по формулам (1.1.12).

В случае произвольного выпуклого многоугольника $\bar{D}$ с вершинами $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ в качестве $L(\lambda)$ можно взять квазиполином

$$P(\lambda) = \sum_{n=1}^s A_n e^{\gamma_n \lambda}. \quad (1.1.17)$$

В этом случае

$$\gamma(t) = \sum_{n=1}^s \frac{A_n}{t - \gamma_n}.$$

Если λ_ν — нули $P(\lambda)$, то

$$\psi_\nu(t) = -\frac{e^{-\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)} \sum_{n=1}^s A_n e^{\lambda_\nu \gamma_n} \ln(t - \gamma_n) + \text{целая функция},$$

$$a_\nu = -\frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \sum_{n=1}^s A_n e^{\lambda_\nu \gamma_n} \int_0^{\gamma_n} f(t) e^{-\lambda_\nu t} dt.$$

Удовлетворяет ли квазиполином условиям теоремы 1.1.4? На этот вопрос отвечает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.3. Пусть $P(\lambda)$ — квазиполином (1.1.17). Тогда:

- 1) вдали от начала координат все нули $P(\lambda)$ — простые;
- 2) вдали от начала координат нули $P(\lambda)$, обозначим их $z_m^{(n)}$, имеют вид

$$z_m^{(n)} = \frac{2\pi m i}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} + p_n + \delta_m^{(n)}, \quad \left| \delta_m^{(n)} \right| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0$$

($n = 1, 2, \dots, s; m > m_0$), где p_n — некоторые фиксированные числа;

- 3) вдали от начала координат расстояния между нулями больше $\beta > 0$;

- 4) имеет место оценка

$$\left| P(re^{i\varphi}) \right| < Ae^{h(\varphi)r}, \quad h(\varphi) = K(-\varphi),$$

где $K(\varphi)$ — опорная функция многоугольника $\overline{D}$;

- 5) вне окружностей радиуса $\varepsilon_0 > 0$ с центрами в нулях $P(\lambda)$ выполняется оценка

$$\left| P(re^{i\varphi}) \right| > Be^{h(\varphi)r}, \quad r > r_0;$$

- 6) имеются числа $p > 0$ и $p_n \uparrow \infty$, $p_{n+1} - p_n < 2\alpha$ (α — любое фиксированное число), такие, что

$$\left| P(re^{i\varphi}) \right| \geq Be^{h(\varphi)r}, \quad p_n - p \leq r \leq p_n + p, \quad n > n_0,$$

причем между соседними окружностями $|\lambda| = p_n$ и $|\lambda| = p_{n+1}$ лежит не более фиксированного числа нулей;

- 7) если λ_n ($n \geq 1$) — нули $P(\lambda)$, $|\lambda_n| \uparrow \infty$, то

$$\left| P'(\lambda_n) \right| \geq Ce^{h(\varphi_n)|\lambda_n|}, \quad \lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}, \quad n > n_0.$$

Видим, что если все нули $P(\lambda)$ — простые, то $P(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.4.

1.5. Интерполирующая функция. Введем функцию

$$\omega(\mu, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t f(t-\eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) dt, \quad (1.1.18)$$

где контур C охватывает $\overline{D}$). Это — целая функция экспоненциального типа. Оказывается коэффициент (1.1.11) можно представить и в таком виде:

$$a_n = \frac{\omega(\lambda_n, f)}{L'(\lambda_n)} \quad (n \geq 1).$$

По этой причине функция (1.1.18) и называется *интерполирующей функцией*.

С помощью интерполирующей функции общий член ряда (1.1.10) приобретает форму

$$a_n e^{\lambda_n z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\omega(\mu, f) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)},$$

где C_n — окружность с центром в точке λ_n , внутри которой нет нулей $L(\lambda)$, отличных от λ_n .

Интерполирующая функция существенно используется в ряде доказательств. В частности, она использована при доказательстве теоремы единственности.

Интерполирующую функцию удобно применять также в случае, когда у $L(\lambda)$ кратные нули. Пусть λ_n — нуль $L(\lambda)$ кратности m_n ($n \geq 1$). Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\omega(\mu, f) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = P_n(z) e^{\lambda_n z}$$

(контур C_n тот же, что и выше), где $P_n(z)$ — многочлен степени меньше или равной $m_n - 1$.

ТЕОРЕМА 1.1.5. Пусть $\overline{D}$ — ограниченная выпуклая область. $K(\varphi)$ — ее опорная функция, $L(\lambda)$ — целая функция с нулями λ_n (вообще кратными) и индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$, удовлетворяющая условию: имеются окружности $|\lambda| = r_n$, $r_n \uparrow \infty$, на которых

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r, \quad r = r_n, \quad n > n_0, \quad \varepsilon > 0 \text{ — любое.}$$

Тогда для функции $f(z) \in A(\overline{D})$ имеется разложение

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < r_n} P_\nu(z) e^{\lambda_\nu z}, \quad z \in D.$$

1.6. Разложение целых функций. В том случае, когда $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, включающем $\overline{D}$, функцию $\omega(\mu, f)$ можно представить в виде

$$\omega(\mu, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[f^{(n-1)}(0) + \mu f^{(n-2)}(0) + \dots + \mu^{(n-1)} f(0) \right], \quad (1.1.19)$$

где коэффициенты c_n находятся из разложения $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$.

Формула (1.1.19) имеет смысл не только тогда, когда $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа.

Обозначим $A(L)$ класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left[|f^{(n-1)}(0)| + |\mu| |f^{(n-2)}(0)| + \dots + |\mu|^{n-1} |f(0)| \right] < \infty, \quad |\mu| < \infty. \quad (1.1.20)$$

При этом условии $\omega(\mu, f)$ — целая функция. Если у $L(\lambda)$ только простые нули λ_n ($n \geq 1$), то функции $f \in A(L)$ сопоставляем ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad a_n = \frac{w(\lambda_n, f)}{L'(\lambda_n)}. \quad (1.1.21)$$

Что можно сказать о сходимости этого ряда?

Будем предполагать, что $L(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\rho(r) > 1$ и типа $\delta \neq 0, \infty$. При этом функция $\rho(r)$ ($r > 0$) называется *уточненным порядком*, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

Далее, если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r \rho(r)} = \sigma \neq 0, \infty, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|,$$

то $\rho(r)$ называется *уточненным порядком* $F(z)$, а σ — типом этой функции при уточненном порядке $\rho(r)$.

Тип σ целой функции $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ уточненного порядка $\rho(r)$ определяется равенством

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

где $r = \varphi(t)$ — функция, обратная к функции $t = r^{\rho(r)}$.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция типа σ при уточненном порядке $\rho(r)$,

удовлетворяющем условию $\frac{t}{\varphi(y)} \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ (при этом условии $L(\lambda)$ не есть целая функция экспоненциального типа).

Обозначим $B(L)$ класс целых функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, коэффициенты которых таковы, что

$$B(L) : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\varphi(n)} \sqrt[n]{|b_n|} < e(\sigma e \rho)^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Оказывается, $B(L) \subset A(L)$. Отметим следующие два факта:

1) если $L(\lambda)$ — целая функция обычного порядка $\rho > 1$ конечного типа $\sigma > 0$, то принадлежность $f(z)$ классу $B(L)$ означает, что $f(z)$ принадлежит классу $[\rho_1, \sigma_1]$ (порядок ее меньше ρ_1 или равен ρ_1 , но тогда тип меньше σ_1), где ρ_1 и σ_1 находятся из равенств

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1, \quad (\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}} (\sigma_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = 1;$$

2) Если $L(\lambda)$ — целая функция обычного порядка $\rho > 1$ (конечного или бесконечного типа), то классу $B(L)$ принадлежат по крайней мере все целые функции, порядки ν которых удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\nu} > 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.4. Для того, чтобы ряд (1.1.21) сходилась во всей плоскости, какова бы ни была функция $f(z) \in B(L)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |L'(\lambda_n)| = +\infty. \quad (1.1.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.5. Для того, чтобы любая целая функция $f(z)$ из класса $B(L)$ представлялась во всей плоскости рядом (1.1.21), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (1.1.22) и условие: существуют окружности $|\lambda| = q_n \uparrow \infty$ со следующим свойством:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} \min_{|\lambda|=q_n} \ln |L(\lambda)| = +\infty. \quad (1.1.23)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.6. Пусть $f(z)$ — произвольная целая функция. Имеется целая функция $L(\lambda)$ со свойствами (1.1.22) и (1.1.23), такая, что $f(z)$ входит в класс $B(L)$.

ТЕОРЕМА 1.1.6. Любую целую функцию можно во всей плоскости представить рядом (1.1.21).

Интересно отметить, что нули λ_n можно выбрать расположенными на трех лучах. Но уже функция $f(z) \equiv z$ не может быть представлена

во всей плоскости рядом, у которого показатели расположены на одном или двух лучах. Это вытекает из следующих соображений. Ряд экспонент, у которого показатели расположены на одном луче, представляет собой функцию, ограниченную в определенной полуплоскости (например, если показатели положительны, то сумма ряда ограничена в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < a, a < \infty\}$). Отсюда вытекает, что если показатели расположены на двух лучах, то сумма ряда ограничена в общей части соответствующих полуплоскостей (эта общая часть есть либо угол, либо полоса). Следовательно, в обоих случаях сумма ряда не может равняться $f(z) \equiv z$.

Заметим, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}|$ может расти значительно быстрее, чем $|f(z)|$. В главе II будут рассмотрены разложения, когда эта сумма в смысле роста будет близка к росту $|f(z)|$ (при этом функции $f(z)$ будут предполагаться функциями конечного порядка).

1.7. Восстановление функции по коэффициентам ее ряда экспонент. Ряд (1.1.10) может и всюду расходиться. Но, согласно теореме единственности 1.1.1, если известны a_n ($n \geq 1$), то принципиально по этим данным можно восстановить $f(z)$. Задача заключается в выяснении, какими способами можно это сделать.

В. В. Напалков [49] предложил следующий способ.

Система функций $\{\psi_k(t)\}$, по теореме 1.1.2, полна вне $\overline{D}$ в классе функций, аналитических вне $\overline{D}$ и обращающихся в нуль в бесконечности. Поэтому для фиксированного $z \in \overline{D}$

$$\frac{1}{t - z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p_m(z)} a_k^{(m)}(z) \psi_k(t), \quad t \in C$$

(C – контур, охватывающий $\overline{D}$), причем сходимость на C является равномерной.

Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p_m(z)} a_k^{(m)}(z) a_k, \quad z \in \overline{D}.$$

1.8. Связь с квазианалитическим продолжением. Другой способ восстановления по известным коэффициентам связан с иной постановкой самой задачи восстановления. Эта задача рассматривается в случае, когда все нули λ_n функции $L(\lambda)$ вещественны, и функция

$L(\lambda)$ на вещественной оси имеет вещественные значения. В этом случае область $\overline{D}$ симметрична относительно вещественной оси.

Пусть $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$ — окружности, на которых

$$|L(\lambda)| > e^{-h|\lambda|}, \quad |\lambda| = r_k, \quad k \geq 1.$$

Это же неравенство при подходящем h будет выполняться и в углах

$$\psi_0 \leq |\arg \lambda| \leq \pi - \psi_0, \quad 0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}, \quad |\lambda| \geq r_0.$$

Положим

$$f^+(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{0 < \lambda_\nu < r_k} a_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad f^-(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{0 < -\lambda_\nu < r_k} a_\nu e^{\lambda_\nu z}.$$

Функция $f^-(z)$ регулярна в угле $|\arg(z - \alpha^-)| < \varphi_0$, а функция $f^+(z)$ — в угле $|\arg(z - \alpha^+) - \pi| < \varphi_0$, где φ_0 — произвольно в границах $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, а вещественные $\alpha^-, \alpha^+, \alpha^+ < 0 < \alpha^-$, зависят от φ_0 .

Задача заключается в том, чтобы восстановить $f(z)$ с помощью функций $f^+(z)$ и $f^-(z)$.

Решение задачи состоит в следующем. Показывается ([35], стр. 387 – 420), что возможны три случая:

1) функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$ аналитически продолжаются на некоторый интервал вещественной оси и на этом интервале $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$;

2) функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$ аналитически продолжаются до начала координат (в этом случае $\overline{D}$ — начало координат и $z = 0$ — особая точка по крайней мере для одной из функций $f^+(z)$, $f^-(z)$, причем существуют $\lim_{x \rightarrow -0} (f^+)^{(k)}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} (f^-)^{(k)}(x)$, и

$$\lim_{x \rightarrow -0} (f^+)^{(k)}(x) + \lim_{x \rightarrow +0} (f^-)^{(k)}(x) = f^{(k)}(0) \quad (k \geq 0),$$

так что $f(z)$ можно восстановить с помощью ряда Тейлора;

3) функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ квазианалитически продолжаются на некоторый интервал вещественной оси, и на нем $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$.

Приведем пример, когда реализуется случай 3).

Возьмем положительные числа ρ_k так, чтобы выполнялись условия

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\rho_n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-1} = \infty, \quad \rho_{n+1} - \rho_n \geq \tau \quad (n \geq 1),$$

и положим

$$\lambda_\nu = \rho_\nu \quad (m_{2k} < \nu \leq m_{2k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_\nu = -\rho_\nu \quad (m_{2k+1} < \nu \leq m_{2k+2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}.$$

Пусть α — фиксированное положительное число. При определенном выборе чисел m_k ($k = 1, 2, \dots$) для функции $L(\lambda)$ соответствующее множество $\overline{D}$ — отрезок $[-\alpha, \alpha]$.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая на отрезке $[-\alpha, \alpha]$. В рассматриваемом случае

$$f^+(z) = \sum_{\lambda_\nu > 0} a_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad f^-(z) = \sum_{\lambda_\nu < 0} a_\nu e^{\lambda_\nu z}.$$

Предположим, что $f(z)$ не удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(z+t) dt = 0.$$

Тогда ряд для $f^+(z)$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z < -\alpha$, а ряд для $f^-(z)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$. Поскольку плотность $\Delta = 0$, и $|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| = \rho_{k+1} - \rho_k > \tau > 0$, прямая $\operatorname{Re} z = -\alpha$ — естественная граница для функции $f^+(z)$, прямая $\operatorname{Re} z = \alpha$ — естественная граница для функции $f^-(z)$.

Оказывается, что $f^+(z)$ квазианалитически продолжается из полуплоскости $\operatorname{Re} z < -\alpha$ по вещественной оси до некоторой точки b , $b > \alpha$, а функция $f^-(z)$ квазианалитически продолжается из полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$ по вещественной оси до некоторой точки c , $c < -\alpha$. На интервале $[a, b]$

$$f^+(x) + f^-(x) = f(x).$$

§ 2. Представление рядами экспонент функций, аналитических внутри области и непрерывных в замкнутой области

Пусть $\overline{D}$ — ограниченная выпуклая область, $K(\varphi)$ — ее опорная функция, $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Предположим, что функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_ν ($\nu \geq 1$) и индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1, \quad r > 0. \quad (1.2.1)$$

В этом случае функции $\gamma(t)$ и $\psi_k(t)$ ($k \geq 1$) регулярны вне $\overline{D}$ и непрерывны вплоть до границы $\partial \overline{D}$.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в D (D — открытая часть $\overline{D}$) и непрерывная в $\overline{D}$ (класс таких функций обозначим $C(\overline{D})$). Ей сопоставляем ряд (1.1.10), где

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \psi_\nu(t) f(t) dt \quad (\nu \geq 1). \quad (1.2.2)$$

Коэффициенты a_ν также можно записать в виде

$$a_\nu = \frac{\omega(\lambda_\nu, f)}{L'(\lambda_\nu)}, \quad (1.2.3)$$

где

$$\omega(\mu, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \left(\int_0^t f(t - \eta) e^{\mu \eta} d\eta \right) dt.$$

Для коэффициентов a_ν имеет место оценка

$$|a_\nu| \leq \frac{A}{|L'(\lambda_\nu)|} \quad (\nu \geq 1), \quad (1.2.4)$$

где A — постоянная.

В рассматриваемом случае сохраняется теорема единственности: если все $a_\nu = 0$, то $f(z) \equiv 0$.

Отметим, что если ряд (1.1.10) сходится равномерно в $\overline{D}$ к $f(z)$, то необходимо имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \gamma(t) f(t) dt = 0.$$

Но для функции $f(z) = e^{\lambda z}$, $\lambda \neq \lambda_\nu$ ($\nu \geq 1$) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \gamma(t) f(t) dt = L(\lambda) \neq 0.$$

Следовательно, не для всякой функции $f(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$ ряд (1.1.10) может сходиться равномерно в $\overline{D}$. Поэтому речь пойдет об условиях сходимости ряда (1.1.10) к $f(z)$ в области D .

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.2.1). Для того, чтобы ряд (1.1.10) с коэффициентами (1.2.2) сходился в D к своей функции $f(z)$ (какова бы ни была $f(z) \in C(\overline{D})$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий 1) — 8), указанных в теореме 1.1.3.

Существуют ли функции $L(\lambda)$ с нужными свойствами?

ТЕОРЕМА 1.2.2. Пусть $\overline{D}$ — ограниченная замкнутая выпуклая область, имеющая внутренние точки, $K(\varphi)$ — ее опорная функция, $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Пусть, далее, $\varphi(r)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \varphi(r) \uparrow \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(r)}{r} = 0.$$

Тогда существует целая функция $F(z)$ вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_ν ($\nu \geq 1$), которая имеет следующую оценку сверху:

$$|F(re^{i\psi})| < M \frac{e^{h(\psi)r}}{\varphi(r)}, \quad r > 0.$$

Точки $|\lambda_\nu|$ ($\nu \geq 1$) лежат вне заданного множества E_0 нулевой относительной меры, и

$$\ln |F'(\lambda_\nu)| > [h(\varphi_\nu) - \varepsilon] |\lambda_\nu|, \quad \varphi_\nu = \arg \lambda_\nu, \quad \nu > \nu_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 — \text{любое}.$$

Функция $\varphi(r) = r^\mu$, $\mu > 1$, удовлетворяет указанным условиям. Следовательно, функция $L(\lambda)$, удовлетворяющая условию (1.2.1) и условиям теоремы 1.1.2, всегда существует.

Отсюда, в качестве следствия, вытекает

ТЕОРЕМА 1.2.3. Пусть $\overline{D}$ — ограниченная выпуклая область. Существуют $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, зависящие только от области $\overline{D}$, такие, что каждая $f(z) \in C(\overline{D})$ представляется в D рядом (1.1.10) с коэффициентами (1.2.2). При этом точки $|\lambda_\nu|$ ($\nu \geq 1$) можно выбрать вне заданного множества E_0 нулевой относительной меры.

В случае многоугольника с вершинами $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ в качестве $L(\lambda)$ можно взять функцию

$$L(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{(\lambda - a)(\lambda - b)},$$

где $P(\lambda)$ — квазиполином (1.1.17), а a и b — какие-нибудь нули $P(\lambda)$.

§ 3. Представление рядами экспонент функций, аналитических внутри области

3.1. Случай аналитической границы. Будем предполагать, что граница $\partial \overline{D}$ области D является правильной аналитической кривой. При этом кривая $z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, называется правильной аналитической кривой, если $\lambda(t)$ — аналитическая функция парамет-

ра t на $[\alpha, \beta]$ и $\lambda'(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$.

От функции $f(z)$ будем требовать, чтобы она была аналитической в D и только это. В этом случае формулы (1.2.2) и (1.2.3) не годятся.

Используя полиномы Фабера, интерполирующую функцию $\omega(\mu, f)$ представим в другом, соответствующем ситуации, виде.

Пусть $w = \Phi(z)$ — функция, конформно отображающая внешность $\overline{D}$ на внешность круга $|w| \leq \rho$, причем

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1.$$

Вследствие того, что $\partial\overline{D}$ — правильная аналитическая кривая, функция $w = \Phi(z)$ является аналитической на $\partial\overline{D}$, и она осуществляет конформное отображение некоторой кривой C_1 , лежащей в D , на внешность круга $|w| \leq \rho_1$, где $\rho_1 < \rho$.

В окрестности бесконечно удаленной точки функция $\Phi(z)$ имеет разложение

$$\Phi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots,$$

а $[\Phi(z)]^n$ (n — целое неотрицательное число) — разложение вида

$$[\Phi(z)]^n = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \dots.$$

Многочлены

$$\Phi_n(z) = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

называются *многочленами Фабера*, порожденными кривой $\partial\overline{D}$. В рассматриваемом случае функция $w = \Phi(z)$ конформно отображает не только внешность $\partial\overline{D}$ на внешность круга $|w| \leq \rho$, но и внешность кривой C_1 на внешность круга $|w| \leq \rho_1$. Поэтому указанные полиномы одновременно являются полиномами Фабера, порожденными кривой C_1 . Возьмем функцию $f(z)$, аналитическую в области D . Поскольку граница этой области $\partial\overline{D}$ есть прообраз окружности $|w| = \rho$ при отображении $w = \Phi(z)$ ($\rho > \rho_1$), то (см., например, Маркушевич А.И. [42], с. 422) в D имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Phi_n(z), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Сходимость внутри D — равномерная.

Пусть, как и выше, $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями λ_ν ($\nu \geq 1$) и индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$, где $K(\varphi)$ — опорная функция области $\overline{D}$.

Обозначим $\gamma(\mu, t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с функцией

$$\frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

(как функцией λ). Она регулярна по переменному t вне $\overline{D}$. Вне $\overline{D}$ имеется представление

$$\gamma(\mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(\mu) \Phi'(t)}{[\Phi(t)]^{n+1}}$$

(сходимость внутри области $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ — равномерная). Функции $c_n(\mu)$ — целые. Оказывается, что если $L(\lambda)$ будет удовлетворять условию

$$|L(re^{i\psi})| < A \frac{e^{h(\psi)r}}{\varphi(r)}, \quad 0 < \varphi(r) \uparrow \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(r)}{r} = 0,$$

при подходяще выбранной функции $\varphi(r)$, то ряд

$$\gamma(\mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n c_n(\mu) \quad (1.3.1)$$

будет равномерно сходиться в любой ограниченной области, его сумма — целая функция, и она-то и будет функцией $\omega(\mu, f)$. Функцию $L(\lambda)$, согласно теореме 1.2.2, подобрать можно.

Образуем ряд (1.1.10), где

$$a_n = \frac{\omega(\lambda_n, f)}{L'(\lambda_n)} \quad (n \geq 1). \quad (1.3.2)$$

ТЕОРЕМА 1.3.1. Пусть D — выпуклая конечная область, ограниченная правильной аналитической кривой. Тогда любую функцию $f(z)$, аналитическую в D , можно представить в D рядом (1.1.10) с коэффициентами (1.3.2) ($\omega(\mu, f)$ — сумма ряда (1.3.1)). Показатели λ_n при этом можно выбрать так, что $|\lambda_n|$ ($n \geq 1$) лежат вне заданного множества E_0 нулевой относительной меры.

3.2. Случай произвольной границы. Решение вопроса о представлении рядами экспонент в произвольной выпуклой области D функций $f(z)$, аналитических в D , основано на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.3.2. Пусть D — конечная открытая выпуклая область и C — ее граница. Проведем открытые круги радиуса $\frac{1}{n}$ с центрами в точках границы C . Эти круги при $n > n_0$ образуют кольцевую область, внутреннюю границу ее обозначим C_n . Пусть $\{M_n\}$ — воз-

растущая последовательность положительных чисел. Обозначим $A(\{M_n\})$ класс функций $F(z)$, аналитических в D и удовлетворяющих условию $|F(z)| \leq M_n$, $z \in C_n$, $n > n_0$. Тогда в зависимости от класса $A(\{M_n\})$ можно сконструировать целую функцию $M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ с ростом не выше первого порядка минимального типа, которая обладает свойством: для любой функции $F(z)$ из класса $A(\{M_n\})$ найдется функция $f(z)$, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, такая, что

$$M(D)f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z) = F(z), \quad z \in D. \quad (1.3.3)$$

Любая функция $F(z)$, аналитическая в D , войдет в некоторый класс $A(\{M_n\})$. Действительно, в качестве M_n можно взять числа

$$M_n = \max_{z \in C_n} |F(z)|.$$

Пусть $F(z)$ — функция, аналитическая в области D . По теореме 1.3.2, найдутся $f(z)$ и $M(\lambda)$ со свойством (1.3.3). Функцию $f(z)$, по теореме 1.2.3, представим рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

Тогда, в силу (1.3.3),

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M(\lambda_n) e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1.3.3. Пусть D — конечная выпуклая область. Тогда имеется последовательность показателей $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области, такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно в D разложить в ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

Показатели λ_n при этом можно выбрать так, что $|\lambda_n|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

3.3. Представление аналитической функции в многоугольнике в виде суммы периодических. Пусть $\overline{D}$ — многоугольник

с вершинами $\gamma_1, \dots, \gamma_s$.

Положим

$$w_m^{(n)} = \frac{2\pi i}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} m \quad (n = 1, 2, \dots, s; m = 1, 2, \dots), \quad \gamma_{s+1} = \gamma_1,$$

$$Q(z) = z^{s/2} e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{w_m^{(s)}}\right), \quad \text{если } s \text{ — четное,}$$

$$Q_1(z) = z^{\frac{s-1}{2}} e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{w_m^{(s)}}\right), \quad \text{если } s \text{ — нечетное.}$$

Показывается, что при подходящем γ функция $Q(z)$ обладает свойствами:

$$|Q(re^{i\varphi})| < Ae^{h(\varphi)r}$$

($h(\varphi) = K(-\varphi)$, $K(\varphi)$ — опорная функция многоугольника $\overline{D}$); вне кружков постоянного радиуса с центрами в нулях функции $Q(z)$

$$|Q(re^{i\varphi})| > Be^{h(\varphi)r}, \quad B > 0;$$

если λ_n — нули $Q(z)$, отличные от начала координат, то

$$|Q'(\lambda_n)| > Ce^{h(\varphi_n)|\lambda_n|}, \quad \lambda_n = |\lambda_n|e^{i\varphi_n}, \quad n \geq 1, \quad C > 0.$$

При подходящем γ функция $Q_1(z)$ обладает свойствами:

$$|Q_1(re^{i\varphi})| < Ae^{h(\varphi)r};$$

вне кружков постоянного радиуса с центрами в нулях $Q_1(z)$

$$|Q_1(re^{i\varphi})| > B \frac{e^{h(\varphi)r}}{r}, \quad B > 0;$$

если λ_n — нули $Q_1(z)$, отличные от начала координат, то

$$|Q_1'(\lambda_n)| > Ce^{h(\varphi)|\lambda_n|}, \quad n \geq 1, \quad C > 0.$$

Если положить

$$L(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{\lambda^{\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{w_i^{(1)}}\right)}$$

при s четном и

$$L(\lambda) = \frac{Q_1(\lambda)}{\lambda^{\frac{s-1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{w_i^{(1)}}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{w_i^{(2)}}\right)}$$

при s нечетном, то в качестве чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ в теоремах 1.2.3 и 1.3.3 можно взять нули этой функции $L(\lambda)$.

Отметив, что

$$e^{w_m^{(n)}[z+\gamma_{n+1}-\gamma_n]} = e^{w_m^{(n)}z},$$

из теоремы 1.3.3 получим следующее заключение.

ТЕОРЕМА 1.3.4. Пусть D — выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_s$. Тогда функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить в виде

$$F(z) = \sum_{n=1}^s F_n(z), \quad z \in D,$$

где $F_n(z)$ — функция, аналитическая в полуплоскости D_n , которая ограничена прямой, проходящей через вершины γ_n и γ_{n+1} (в полуплоскости D_n лежит D), $F_n(z)$ — периодическая функция с периодом, равным $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

3.4. Представление аналитических функций с определенным ростом вблизи границы. Теорема 1.3.2 допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 1.3.5. Пусть функция $F(z)$ регулярна в выпуклой области D и при приближении к границе удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$

$$|F(z)| < \exp \left(\frac{1}{r} \right)^{q+\varepsilon}, \quad r = \rho(z, \partial D), \quad r < r_0(\varepsilon) \quad (1.3.4)$$

(r — расстояние от z до границы). Тогда существуют целая функция $M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ порядка $\frac{q}{q+1}$ и функция $f(z)$, регулярная в D и непрерывная в $\overline{D}$, такие, что

$$M(D)f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z) = F(z), \quad z \in D.$$

В теореме 1.3.3 коэффициенты $b_n = a_n M(\lambda_n)$, причем коэффициенты a_n имеют оценку (1.2.4). Если D — многоугольник и в качестве $L(\lambda)$ взять

$$\frac{P(\lambda)}{(\lambda - a)(\lambda - b)}$$

(a и b — какие-то два нуля квазиполинома $P(\lambda)$), то, в силу утверждения 7) предложения 1.1.3, получим

$$|b_n| < e^{-h(\varphi_n)|\lambda_n|} e^{\lambda_n^{p+\varepsilon}}, \quad p = \frac{q}{q+1}, \quad n > n_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 — \text{любое.}$$

Отсюда вытекает оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n e^{\lambda_n z}| < \exp \left(\frac{1}{r} \right)^{q+\varepsilon}, \quad r = \rho(z, \partial D), \quad r < r_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 - \text{любое.} \quad (1.3.5)$$

ТЕОРЕМА 1.3.6. Пусть D — выпуклый многоугольник. Если функция $F(z)$ регулярна в D и удовлетворяет условию (1.3.4), то ее можно в D представить рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z},$$

удовлетворяющим условию (1.3.5).

Если в качестве $L(\lambda)$ взять функцию из предыдущего пункта, то в качестве следствия из теоремы 1.3.6 получим следующие утверждения (уточнение теоремы 1.3.4).

СЛЕДСТВИЕ 1.3.1. Пусть D — выпуклый многоугольник с вершинами $\gamma_1, \dots, \gamma_s$. Тогда функцию $F(z)$, аналитическую в D с оценкой (1.3.4), можно представить в виде

$$F(z) = \sum_{n=1}^s F_n(z),$$

где $F_n(z)$, как и в теореме 1.3.4, аналитичны и периодичны в соответствующих полуплоскостях и имеют при приближении к границам полуплоскостей оценку вида (1.3.4) (с тем же q).

Теоремы 1.3.5, 1.3.6 и следствие из теоремы 1.3.6 получены А. Ф. Леонтьевым в статье [36].

Р.С. Юлмухаметов [68] распространил теорему 1.3.6 при $q > 1$ на случай произвольной выпуклой ограниченной области D .

В.В. Напалков [53] условие (1.3.4) заменил на значительно более общее и получил (своим путем) соответствующий результат.

§ 4. Представление аналитических функций в бесконечных выпуклых областях

4.1. Случай полуплоскости. Пусть D — левая полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$. Речь пойдет сначала о функциях $f(z)$, которые аналитичны в D , непрерывны в $\overline{D}$ и при больших $|z|$ в $\overline{D}$

$$f(z) = O(|z|^{-\mu}), \quad \mu > 1, \quad z \in \overline{D}. \quad (1.4.1)$$

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями λ_n ($n \geq 1$) и такая, что

$$L(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\right), \quad \alpha > 1, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (1.4.2)$$

Положим

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^{+\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (n \geq 1).$$

Функции $\psi_n(t)$ регулярны в правой полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$, ограничены в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} t \geq 0$ и непрерывны здесь (исключая, возможно, бесконечно удаленную точку).

Рассматриваемой функции $f(z)$ (с условием (1.4.1)) сопоставляем ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}, \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} f(t) \psi_n(t) dt. \quad (1.4.3)$$

Предположим, что имеются замкнутые кривые Γ_n ($n \geq 1$) с такими свойствами:

1) контур Γ_n содержит в себе точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; длина контура Γ_n есть $O(\max_{z \in \Gamma_n} |z|)$,

$$\max_{z \in \Gamma_n} |z| = O(\min_{z \in \Gamma_n} |z|), \quad \min_{z \in \Gamma_n} |z| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty;$$

2) каково бы ни было $\gamma > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\substack{\lambda \in \Gamma_n \\ |\arg \lambda| \leq \gamma}} \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|} \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\substack{\lambda \in \Gamma_n \\ \gamma \leq |\arg \lambda| \leq \pi}} \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|} = +\infty.$$

3) имеются положительные число h и q , такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\lambda \in G_n} \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|} \geq 0,$$

где G_n — круг радиуса $h r_n^{-q}$ с центром в точке r_n (точки пересечения Γ_n с положительной полуосью $\lambda > 0$); точки контура Γ_n , лежащие вне круга G_n , удалены от точек $\lambda > 0$ на расстояния, не меньшие $h_1 r_n^{-q}$, $h_1 > 0$.

Из второго из условий 2) вытекает, что $L(\lambda)$ — целая функция по меньшей мере первого порядка бесконечного типа.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и удовле-

творяет условию (1.4.1). Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями λ_n ($n \geq 1$), которая удовлетворяет условию (1.4.2) и для которой имеются кривые Γ_n с указанными выше свойствами. Тогда $f(z)$ в D представляется рядом (1.4.3).

Приведем пример функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей условиям теоремы.

Возьмем функцию Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\frac{n}{\rho} + 1)}, \quad 1 < \rho < \frac{3}{2},$$

и положим

$$A(z) = E_\rho(ze^{-i\psi}) + E_\rho(ze^{i\psi}) + E_\rho(-z), \quad \psi = \frac{\pi}{2\rho}.$$

Функция $A(z)$ — целая порядка ρ , ее нули, начиная с некоторого, — простые: нули из правой полуплоскости (начиная с некоторого) — вещественны, обозначим их $\mu_1, \mu_2, \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n^\rho} = \tau < \infty;$$

остальные нули (начиная с некоторого) лежат в малых углах с биссектрисами $l_1: \arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}$ и $l_2: \arg z = -(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2})$. Оказывается, функция

$$L(\lambda) = \frac{Q(\lambda)A(\lambda)}{P(\lambda)}, \quad P(z) = z^m + \dots + \alpha_m, \quad Q(z) = z^{m-2} + \dots + \beta_m \quad (m \geq 2)$$

при подходящих $P(z)$ и $Q(z)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы.

Пусть μ'_n — нули $L(\lambda)$, отличные от μ_n . Имеем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 e^{\mu_n z} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' e^{\mu_n' z}.$$

Оказалось, что сумма второго ряда — целая функция.

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 e^{\mu_n z} + \text{целая функция}, \quad \mu_n > 0. \quad (1.4.4)$$

ТЕОРЕМА 1.4.2 (аналог теоремы 1.3.2). Пусть $F(z)$ — функция, регулярная в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Тогда имеются функция $f(z)$, регулярная в $\operatorname{Re} z < 0$, непрерывная в $\operatorname{Re} z \leq 0$ и удовлетворяющая в $\operatorname{Re} z \leq 0$ условию $f(z) = O(z^{-2})$, целая функция $M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$

с ростом не выше первого порядка минимального типа и целая функция $\Phi(z)$, такие, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f^{(n)}(z) + \Phi(z), \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Из этой теоремы и представления (1.4.4) вытекает

ТЕОРЕМА 1.4.3. Пусть $F(z)$ — функция, регулярная в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Тогда имеется не зависящая от $F(z)$ последовательность показателей $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n^\rho} = \tau,$$

$0 < \tau < \infty$ (ρ — любое > 1), такая, что имеет место представление

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\mu_n z} + \text{целая функция}, \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Целую функцию, согласно теореме 1.1.6, можно во всей плоскости представить рядом экспонент. Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1.4.1. Любая функция $F(z)$, аналитическая в полуплоскости, представляется в полуплоскости рядом экспонент.

Используя этот результат и теорему 1.3.3, можно доказать следующее:

Пусть D — бесконечная выпуклая область, граница которой состоит из двух лучей и дуги, соединяющей начала этих лучей. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая лишь от области D , такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить в D рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}.$$

4.2. Случай произвольной бесконечной выпуклой области.

Изложим вначале результат из работы [33].

Пусть D — бесконечная выпуклая область, отличная от всей плоскости. Будем считать, что $0 \in D$, луч $(-\infty, 0]$ принадлежит D и если $x \cos \varphi + y \sin \varphi - K(\varphi) = 0$ — опорная прямая области D , то φ меняется в пределах $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$ (это не нарушает общности рассуждений). Угол φ может равняться и φ_0 , если граница ∂D , начиная с некоторого места, идет по прямой; в аналогичной ситуации может быть $\varphi = -\varphi_0$. В случае, если D — полуплоскость, $\varphi = \varphi_0 = 0$. Положим $h(\varphi) = K(-\varphi)$ для допустимых значений φ .

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция, удовлетворяющая условию

$$|L(re^{i\varphi})| < \frac{e}{1+r^\alpha} e^{h(\varphi)r}, \quad \alpha > 1, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \quad (1.4.5)$$

(в случаях, указанных выше, φ может равняться φ_0 или $-\varphi_0$). Допустим, что λ_n ($n \geq 1$) — ее нули, и все они простые. Положим

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^{\infty e^{i\varphi}} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (n \geq 1), \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0.$$

В силу (1.4.5), функция $\psi_n(t)$ регулярна вне $\overline{D}$, непрерывна вплоть до границы (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки) и ограничена по модулю (константой, зависящей от номера n).

Возьмем функцию $f(z)$, аналитическую в области D , непрерывную вплоть до границы, причем

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|^\mu}\right), \quad \mu > 1, \quad z \in \overline{D}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.4.6)$$

Сопоставим ей ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(t) \psi_n(t) dt.$$

Речь идет о сходимости этого ряда.

Пусть функция $L(\lambda)$ удовлетворяет дополнительно следующему условию: имеется система замкнутых кривых Γ_n ($n \geq 1$) и система, содержащих эти контуры криволинейных колец

$$P_n = \bigcup_{t \in \Gamma_n} \{z : |z - t| \leq e^{-\varepsilon_n r_n}\}, \quad r_n = \min_{z \in \Gamma_n} |z|, \quad 0 < \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

со свойствами:

а) каковы бы ни были $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\lambda \in \Gamma'_n} H(\lambda) = +\infty, \quad H(\lambda) = \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|},$$

функция $H(\lambda)$ при $|\lambda| > K(\gamma, \varepsilon)$ больше $h(\varphi) - \varepsilon$ на P'_n , больше $h(\varphi_0 - \gamma) - \varepsilon$ на P''_n , больше $h(-\varphi_0 + \gamma) - \varepsilon$ на P'''_n , где Γ'_n — часть Γ , лежащая в дополнении к углу $|\varphi| < \varphi_0 + \gamma$, P'_n — часть P_n , лежащая в угле $|\varphi| < \varphi_0 - \gamma$, P''_n и P'''_n — части P_n , лежащие, соответственно, в малых углах $|\varphi - \varphi_0| < \gamma$, $|\varphi + \varphi_0| < \gamma$;

б) если C'_n и C''_n — части, на которые Γ_n разбивает границу криволи-

нейного полукольца $P'_n \cup P''_n \cup P'''_n$ (при этом пусть C''_n лежит внутри Γ_n), то длины кривых Γ'_n , C'_n , C''_n при $n \rightarrow \infty$ суть $\exp[o(1)r_n]$;

в) между Γ_n и Γ_{n+1} лежит только один нуль функции $L(\lambda)$.

При этих условиях имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.1. В области D

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}. \quad (1.4.7)$$

К случаю (1.4.6) общий случай сводится на основании следующего результата из работы [34].

ТЕОРЕМА 1.4.4. Пусть $F(z)$ — функция, аналитическая в бесконечной выпуклой области D . Имеются функция $f(z)$, аналитическая в D , непрерывная в $\overline{D}$, удовлетворяющая условию (1.4.6), целая функция $\Phi(z)$ и целая функция $M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ с ростом не выше первого порядка нулевого типа, такие, что

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z) + \Phi(z).$$

На основании (1.4.7) и этой теоремы получаем

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z} + \Phi(z), \quad z \in D, \quad b_n = a_n M(\lambda_n).$$

Заметим, что функцию $\Phi(z)$ во всей плоскости можно разложить в ряд экспонент. Поэтому

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\mu_n z}, \quad z \in D. \quad (1.4.8)$$

Существование функции $L(\lambda)$ со всеми указанными выше свойствами было установлено Р. С. Юлмухаметовым [67] в 1982 г. на основе метода аппроксимации *субгармонической функции* логарифмом модуля целой функции.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1.4.5. Пусть D — бесконечная выпуклая область и $F(z)$ — функция, аналитическая в D . Тогда в D имеет место представление (1.4.8).

Возможность представления аналитических функций в бесконечных выпуклых областях рядами экспонент была установлена ранее и иным способом Ю. Ф. Коробейником [11] (см. §6).

§ 5. Достаточные и слабо достаточные множества

Приведем другой способ представления аналитических функций рядами экспонент. Он основан на понятиях достаточных и слабо достаточных множеств.

В пространстве $\mathbb{C}$ (можно было бы в пространстве $\mathbb{C}^n$) рассмотрим последовательность непрерывных функций $g_m(z)$ ($m \geq 1$), удовлетворяющих условиям:

$$1) 0 < g_1(z) \leq g_2(z) \leq \dots; 2) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g_m(z)}{g_{m+1}(z)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Через K обозначим множество всех непрерывных функций $k(z)$, определенных в $\mathbb{C}$ и таких, что для всех $m = 1, 2, \dots$ выполняется соотношение $k(z) \geq \varepsilon g_m(z)$, где $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(m, k(z))$. Введем множество E всех целых функций $\varphi(z)$, для которых имеет место неравенство

$$|\varphi(z)| \leq c g_m(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad c = c(\varphi), \quad m = m(\varphi).$$

Для произвольного замкнутого в $\mathbb{C}$ множества S на множестве E рассмотрим две топологии: τ_S и μ_S . Топология τ_S определяется как топология индуктивного предела нормированных пространств

$$E_{S,m} = \left\{ \varphi(z) \in E : \|\varphi\|_{S,m} = \sup_{z \in S} \frac{|\varphi(z)|}{g_m(z)} < \infty \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Топология μ_S определяется с помощью семейства полунорм на E вида

$$\|\varphi\|_{S,k} = \sup_{z \in S} \frac{|\varphi(z)|}{k(z)}, \quad k(z) \in K.$$

Множество S называется *достаточным* (слабо достаточным) для E , если $\mu_{\mathbb{C}} = \mu_S$ ($\tau_{\mathbb{C}} = \tau_S$).

Достаточные и отдельно слабо достаточные множества изучались Эренпрайсом [78], Тейлором [91], Шнайдером [87] и другими.

Отметим следующий общий результат В. В. Напалкова [52]

ТЕОРЕМА 1.5.1. *Если множество S является слабо достаточным для E , то $\tau_S = \mu_S$.*

Из этой теоремы вытекает, что понятия слабой достаточности и достаточности множества совпадают. Значение теоремы состоит также и в том, что проверить условие слабой достаточности значительно проще, чем условие достаточности.

Из теоремы получаем, что, в частности, $\tau_{\mathbb{C}} = \mu_{\mathbb{C}}$. В случае, когда функции $g_m(z)$ удовлетворяют дополнительным условиям, последнее

равенство установлено Тейлором [91].

Проследим существо теоремы в задаче разложения функций в ряды экспонент.

Пусть D — выпуклая область (ограниченная или неограниченная), K_m ($m \geq 1$) — выпуклые компакты, $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$, $\bigcup_m K_m = D$, $h_m(-\varphi)$ — опорная функция компакта K_m ,

$$g_m(z) = \exp[h_m(\varphi)r], \quad z = re^{i\varphi}, \quad m \geq 1.$$

Известно, что если S — достаточное множество для пространства E , построенного на системе указанных функций $g_m(z)$, то для всякой функции $F(z)$, аналитической в D , имеет место интегральное представление

$$F(z) = \int_S e^{\lambda z} \frac{d\mu(\lambda)}{k(\lambda)}, \quad z \in D,$$

где μ — комплексная мера на $\mathbb{C}$ (ограниченной вариации), $k(z) \in K$. Если при этом окажется, что S — последовательность $\{\mu_m\}_{m=1}^\infty$, то отсюда получается представление $F(z)$ рядом (1.4.8).

На основании теоремы 1.5.1 получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.1. *Если $S = \{\mu_m\}_{m=1}^\infty$ — слабо достаточное множество, то для любой функции $F(z)$, аналитической в D , имеет место представление (1.4.8).*

В работах [50], [51] В. В. Напалков привел общий способ построения «минимальных» слабо достаточных множеств $\{\mu_m\}$ в случае произвольных выпуклых областей D . Свойство минимальности множества понимается в том смысле, что если из него удалить подмножество точек положительной плотности, то оставшееся множество уже не будет, вообще говоря, слабо достаточным.

Таким образом, на основе нового метода получается

ТЕОРЕМА 1.5.2. *Любую функцию $F(z)$, аналитическую в выпуклой области, можно представить в этой области рядом экспонент.*

Более подробно о достаточных и слабо достаточных множествах изложено в обзорной статье В. В. Напалкова [54].

§ 6. Представляющие системы

Понятие абсолютно представляющей системы введено Ю. Ф. Коробейником [10]. Применительно к системе экспонент оно выглядит следующим образом.

Пусть D — выпуклая область (ограниченная или неограниченная), K_m ($m \geq 1$) — компакты, $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$, $\bigcup_m K_m = D$,

$$p_m(f) = \max_{z \in K_m} |f(z)|.$$

Система $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$ называется *абсолютно представляющей* в D , если любую функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D, \quad (1.6.1)$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| p_m(e^{\lambda_n z}) < \infty \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.6.2)$$

При условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0$$

из сходимости ряда (1.6.1) в области D вытекает (1.6.2).

Приведем результаты Ю. Ф. Коробейника.

Пусть D — выпуклая область, $K(\varphi)$ — ее опорная функция, $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Функция $h(\varphi)$ для некоторых φ может быть равной и бесконечности. Пусть $\{h_n(\varphi)\}$ — последовательность ограниченных тригонометрически выпуклых функций со следующими свойствами:

- 1) $h(\varphi) > h_{n+1}(\varphi) > h_n(\varphi)$ ($n \geq 1$), $\varphi \in [0, 2\pi]$;
- 2) если $g(\varphi)$ — произвольная тригонометрически выпуклая функция, такая, что $g(\varphi) < h(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, то $h_n(\varphi) > g(\varphi)$ при $n > N(g)$.

Такая последовательность $\{h_n(\varphi)\}$ всегда существует.

В [11] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.1. Система $\{e^{\lambda_n z}\}$ является абсолютно представляющей в D тогда и только тогда, когда для каждого $n \geq 1$ существуют $m \geq 1$ и $A_n \in (0, +\infty)$, такие, что для каждой функции экспоненциального типа $y(z)$ с индикатрисой роста $h_y(\varphi) < h(\varphi)$ выполняется условие

$$\sup_{|z| < \infty} \frac{|y(z)|}{\exp[h_m(\arg z)|z|]} \leq A_n \sup_{k \geq 1} \frac{|y(\lambda_k)|}{\exp[h_n(\arg \lambda_k)|\lambda_k|]}. \quad (1.6.3)$$

Если взять достаточно «густую» последовательность $\{\lambda_n\}$, то условие (1.6.3) будет выполняться и, следовательно, $\{e^{\lambda_n z}\}$ будет абсолютно представляющей системой в D .

ТЕОРЕМА 1.6.1. Существует последовательность $\{\lambda_n\}$, такая,

что система $\{e^{\lambda_n z}\}$ — абсолютно представляющая в любой выпуклой области.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.2 ([12], с. 87). Для того, чтобы система $\{e^{\lambda_n z}\}$ была абсолютно представляющей в D , необходимо и достаточно, чтобы множество $\{\lambda_n\}$ было слабо достаточным.

ТЕОРЕМА 1.6.2. Пусть D — ограниченная выпуклая область, $K(\varphi)$ — ее опорная функция, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_n ($n \geq 1$). Для того, чтобы система $\{e^{\lambda_n z}\}$ была абсолютно представляющей в D , необходимо и достаточно, чтобы функция $L(\lambda)$ была функцией вполне регулярного роста и выполнялось условие: существует целая функция $c(\lambda)$ с ростом не выше первого порядка нулевого типа, $c(\lambda) \not\equiv 0$, такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{c(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| + h(\varphi_n) \right] \leq 0, \quad \varphi_n = \arg \lambda_n.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.6.1. Если $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_n ($n \geq 1$) и удовлетворяет условию

$$\ln |L'(\lambda_n)| > [h(\varphi_n) - \varepsilon] |\lambda_n|, \quad n > n_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 — \text{любое},$$

то $\{e^{\lambda_n z}\}$ — абсолютно представляющая система в области D .

Следующий результат характеризует свойство предельного перехода.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.3. Пусть D — ограниченная выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$, $\{D_n\}$ — последовательность выпуклых областей, лежащих в D с опорными функциями $h_n(-\varphi)$, такими, что

$$h_n(\varphi) < h_{n+1} < h(\varphi), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\varphi) = h(\varphi).$$

Тогда, если $\{e^{\lambda_n z}\}$ — абсолютно представляющая система в каждой области D_n ($n \geq 1$), то $\{e^{\lambda_n z}\}$ — абсолютно представляющая система в D .

Предложение установлено А. В. Абаниным (см. [12], с. 102); в случае, когда $D_n = q_n D$, $0 < q_n \uparrow 1$, — Ю. Ф. Коробейником.

Более подробно о представляющих системах смотрите обзорную статью [12].

§ 7. Разложение в выпуклых многоугольниках

Здесь более подробно будут изложены результаты о разложении ана-

литических функций в выпуклых многоугольниках.

7.1. Разложение функций, непрерывных в замкнутом многоугольнике. Пусть $\overline{D}$ — выпуклый многоугольник с вершинами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, $C(\overline{D})$ — класс функций, аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$.

Возьмем функцию

$$L(\lambda) = \int_{\partial D} e^{\lambda t} d\sigma(t), \quad \text{var } \sigma < \infty. \quad (1.7.1)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — ее нули и (ради простоты) пусть все они простые. Система функций

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_{\alpha_n}^t e^{\lambda_n u} d\sigma(u) \quad (\alpha_n, t \in \partial D)$$

биортогональна к системе $\{e^{\lambda_k z}\}$:

$$\int_{\partial D} e^{\lambda_k t} \psi_m(t) dt = \delta_{k,m} \quad (k, m \geq 1).$$

Функции $f(z) \in C(\overline{D})$ сопоставим ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad (1.7.2)$$

где

$$a_n = \int_{\partial D} f(t) \psi_n(t) dt.$$

Пусть $K(\varphi)$ — опорная функция $\overline{D}$ и $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Допустим, что $L(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $L'(\lambda_n) > A e^{h(\varphi_n)|\lambda_n|}$, $\varphi_n = \arg \lambda_n$, $n \geq 1$, $A > 0$;
- 2) существуют числа $p > 0$ и $r_n \uparrow \infty$, такие, что

$$|L(re^{i\varphi})| > B e^{h(\varphi)r}, \quad r_n - p \leq r \leq r_n + p \quad (n \geq 1), \quad B > 0.$$

При этих условиях установлено ([35], с. 318)

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7.1. Если $f, f' \in C(\overline{D})$, то ряд (1.7.2) сходится к $f(z)$ равномерно на $\overline{D}_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — любое), где $\overline{D}_\varepsilon$ получается из $\overline{D}$ удалением окрестностей $|z - \gamma_n| < \varepsilon$ ($n = 1, 2, \dots, s$) вершин.

Условием, накладываемым на $L(\lambda)$, удовлетворяет квазиполином

$$L(\lambda) = \sum_{n=1}^s A_n e^{\gamma_n \lambda}. \quad (1.7.3)$$

Приведем теперь результаты из работ В. К. Дзядыка ([6]), А. М. Седлецкого ([58], [62]), Ю. И. Мельника ([44], [46]), в них получен ряд аналогов известных признаков сходимости рядов Фурье.

В [6] установлен аналог признака Дини.

ТЕОРЕМА 1.7.1. Пусть $L(\lambda)$ — квазиполином (1.7.3) с $A_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots, s$). Если $f \in C(\overline{D})$, ее модуль непрерывности $\omega_f(\delta)$ на $\overline{D}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega_f(t)}{t} dt < \infty,$$

и выполнено еще условие

$$\sum_{n=1}^s A_n f(\gamma_n) = 0$$

(оно необходимо), то ряд (1.7.2) сходится к $f(z)$ равномерно на $\overline{D}$.

В [58] установлен аналог признака Дирихле-Жордана. Функция $L(\lambda)$ задается в виде (1.7.1), причем $\sigma(t)$ имеет скачки в точках $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$. Для удобства считаем, что $|\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta > 0$ при $n \neq m$.

ТЕОРЕМА 1.7.2. Пусть $f \in C(\overline{D})$ и $\text{var } f(z)$ на $\partial \overline{D}$ конечна. Тогда:

- 1) ряд (1.7.2) сходится к $f(z)$ равномерно на $\overline{D}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — любое;
- 2) в каждой вершине γ_i ряд (1.7.2) сходится к значению

$$f(\gamma_i) - \frac{\pi - \alpha_i}{2\pi h_i} \int_{\partial D} f(t) d\sigma(t)$$

(α_i — внутренний угол при вершине γ_i , а h_i — скачок $\sigma(t)$ в вершине γ_i);

- 3) если выполнено условие

$$\int_{\partial D} f(t) d\sigma(t) = 0,$$

то ряд (1.7.2) сходится к $f(z)$ равномерно на $\overline{D}$.

Назовем ряд $\sum_n f_n(z)$ нормально сходящимся на множестве E , если сходится ряд

$$\sum_n \max_{z \in E} |f_n(z)|.$$

В [62] показано, что если $L(\lambda)$ — квазиполином, и выполнено одно из

следующих условий:

$$1) \omega_f(\delta) \leq c\delta^\alpha, \quad \alpha > \frac{1}{2}; \quad 2) \omega_f(\delta) \leq c\delta^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

и $\text{var } f(z)$ на ∂D конечна, то ряд (1.7.2) сходится нормально на $\overline{D}$.

В [44] для случая, когда $L(\lambda)$ — квазиполином (1.7.3) и $A_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots, s$), дано следующее достаточное условие абсолютной сходимости ряда (1.7.2) на $\overline{D}$:

$$\int_0 t^{-\frac{3}{2}} \omega_f(t) dt < \infty.$$

В [46] установлена оценка скорости сходимости ряда (1.7.2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7.2. Пусть $L(\lambda)$ — квазиполином. Если $f, f', \dots, f^{(r)} \in C(\overline{D})$ и $f^{(r)} \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, на $\overline{D}$, то

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n e^{\lambda_n z} - f(z) \right| < \frac{C}{N^{2+\alpha}} \ln N, \quad z \in \overline{D}.$$

7.2. О разложении функций из класса $E^p(D)$. Через $E^p(D)$ обозначается класс Харди-Смирнова на D .

В работе Б. Я. Левина и Ю. И. Любарского [28] исследованы разложения в ряды экспонент функций класса $E^2(D)$ в случае, когда $L(\lambda)$ — так называемая функция типа синуса. Рассмотрим множество

$$\Pi_j(K) = \{\lambda : \text{Re}(\lambda e^{-i\varphi_j}) > 0, \quad \text{Im}(\lambda e^{-i\varphi_j}) < K\},$$

где φ_j — угол наклона внешней нормали к стороне (γ_j, γ_{j+1}) многоугольника D ($\gamma_{s+1} = \gamma_1$). Множество $\Pi_j(K)$ есть полуполоса, ортогональная стороне $(\gamma_j^*, \gamma_{j+1}^*)$ сопряженного многоугольника D^* . Пусть $K(\varphi)$ — опорная функция D .

Целую функцию $L(\lambda)$ экспоненциального типа назовем функцией типа синуса (относительно D), если при некотором K вне объединения полуполос $\Pi_j(K)$ ($j = 1, 2, \dots, s$) выполняются неравенства

$$0 < c < |L(\lambda)| \exp(-|\lambda|K(-\arg \lambda)) < C < \infty.$$

Класс функций типа синуса включает в себя класс функций (1.7.1), если $\sigma(t)$ имеет скачки в вершинах, но это включение — собственное. Поскольку функция типа синуса может и не представляться в виде (1.7.1), то функции $\psi_n(t)$ биортогональной системы определяются по-другому, а именно, как преобразования Лапласа пронормированных

соответствующим образом функций

$$\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}.$$

Основной результат из работы [28] состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.7.3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — нули целой функции типа синуса, причем все они простые и отделимы: $|\lambda_n - \lambda_m| > \delta > 0$ при $n \neq m$. Тогда система

$$\{e^{\lambda_n z} e^{-|\lambda_n|K(-\arg \lambda_n)}\}_{n=1}^{\infty}$$

образует базис Рисса в пространстве $E^2(D)$.

Наряду с этим (а также с указанием скорости убывания коэффициентов a_n) в [28] доказаны две теоремы равносходимости.

Первая из них гласит:

ТЕОРЕМА 1.7.4. Пусть $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\}$ — нули двух функций $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ типа синуса и

$$f(z) \sim \sum a_n e^{\lambda_n z}, \quad f(z) \sim \sum b_n e^{\mu_n z}, \quad f(z) \in E^2(D),$$

— соответствующие ряды. Тогда равномерно на $\overline{D}_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — любое)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\sum_{|\lambda_n| < R} a_n e^{\lambda_n z} - \sum_{|\mu_n| < R} b_n e^{\mu_n z} \right) = 0.$$

Если в качестве $M(\lambda)$ взять квазиполином, то это утверждение позволяет переносить на рассматриваемые ряды некоторые признаки сходимости, сформулированные выше.

Вторая теорема дает возможность судить о локальном поведении ряда в неугловых точках многоугольника $\overline{D}$. Она утверждает, что в любой внутренней точке стороны (γ_j, γ_{j+1}) ($j = 1, 2, \dots, s$), ряд (1.7.2) равносходится с обычным рядом Фурье функции $f(z)$, построенным относительно этой стороны (и соответствующей тригонометрической системы).

В статье А. М. Седлецкого [59] доказана

ТЕОРЕМА 1.7.5. Пусть $\{\lambda_n\}$ — нули квазиполинома (1.7.3). Тогда система $\{e^{\lambda_n z}\}$ образует базис в пространстве $E^p(D)$, $1 < p < \infty$.

Описаны некоторые свойства этого базиса. Без указания этих свойств отмеченный результат был передоказан Ю. И. Мельником [43].

7.3. Разложение на сумму периодических. Будем писать

$f \in C^n(E)$, если $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(E)$. Пусть $\overline{D}_n$ — полуплоскость, ограниченная прямой, на которой лежит сторона (γ_n, γ_{n+1}) многоугольника D ($\overline{D} \subset \overline{D}_n$).

В работе [32] показано, что если число вершин — четное, $f \in C^m(\overline{D})$ ($m \geq 2$), то

$$f(z) = q(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_s(z), \quad (1.7.4)$$

где $q(z)$ — многочлен, а функция $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots, s$) аналитична в D_n , периодична с периодом $(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ и $f_n \in C^{m-2}(\overline{D}_n)$.

Присутствие многочлена определенной степени $q(z)$ в представлении (1.7.4) по существу.

Пусть число вершин по-прежнему четное. В [59] установлено, что если $f \in E^p(D)$, $1 < p < \infty$, то имеет место представление (1.7.4), где $f_n \in E^p(G_n)$ (G_n — произвольная многоугольная область, $G_n \subset D_n$).

В [62] найдено условие на $f \in C^m(\overline{D})$, необходимое и достаточное для того, чтобы $f_n \in C^m(\overline{D}_n)$ ($n = 1, 2, \dots, s$). Оно состоит в сходимости интеграла

$$\int_0 \left\{ \sum_{j=1}^s (-1)^j \left[f^{(m)}(\gamma_j + te^{i \arg(\gamma_{j+1} - \gamma_j)}) - f^{(m)}(\gamma_j) \right] \right\} \frac{dt}{t}.$$

Это условие характеризует поведение функции $f^{(m)}(z)$ в окрестностях вершин многоугольника.

В той же работе показано, что если $f^{(m)} \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то и $f_n^{(m)} \in \text{Lip } \alpha$.

В работе Ю. И. Мельника [45] доказано следующее: если $f \in C(\overline{D})$ и $\omega_f(\delta) \leq C\omega(\delta)$, причем

$$\int_0^h \frac{\omega(t)}{t} dt + h \int_h^{2\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq Ah,$$

то

$$\omega_{f_n}(\delta) \leq C_n \omega(\delta).$$

Менее сильные результаты получены, когда число вершин — нечетное. Так, в [32] установлено, что если $f \in C^m(\overline{D})$ ($m \geq 4$), то $f_n \in C^{m-2}(\overline{D}_n)$. В [63] сообщено, что если $f \in E^p(D)$, $1 < p < 2$, то $f_n \in E^p(G_n)$ (G_n — произвольная многоугольная область, $G_n \subset D_n$).

Интересно отметить, что при $p = 2$ это утверждение уже неверно.

§ 8. Ряды экспонент в вещественной области

Здесь будут изложены вопросы полноты, сходимости и разложения в ряды экспонент на интервале вещественной оси. В этом случае систему экспонент удобно записывать в виде

$$\{e^{i\lambda_n t}\}. \quad (1.8.1)$$

Будем обозначать $\Lambda = \{\lambda_n\}$.

Многие приводимые ниже результаты принадлежат А. М. Седлецкому, большинство из них изложено в его обзорной статье [61].

8.1. Условия полноты и минимальности. В книге Левинсона [83] получено следующее достаточное условие полноты системы (1.8.1) в $L^p(-\pi, \pi)$ ($1 < p < \infty$):

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt - 2R + \frac{1}{p} \ln R \right) > -\infty. \quad (1.8.2)$$

Здесь $n_\Lambda(t)$ — число точек из Λ в круге $|z| < t$ (считаем, что $0 \notin \Lambda$, в силу чего $n_\Lambda(t) = 0$ в некоторой окрестности нуля).

СЛЕДСТВИЕ 1.8.1. Если $|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1}{2p}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то система $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ полна в $L^p(-\pi, \pi)$.

Этот результат точен в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ система

$$\left\{ \exp \left[it \left(n + \left(\frac{1}{2p} + \varepsilon \right) \operatorname{sgn} n \right) \right] \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

уже не полна в $L^p(-\pi, \pi)$.

Условие (1.8.2) означает, что точек λ_n «достаточно много». Но если говорить о желательности минимальности системы (1.8.1), то точек λ_n не должно быть «слишком много». Одновременное совмещение этих двух свойств (полноты и минимальности) не всегда является делом легким.

В [83] доказано, что если $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ и при $1 < p \leq 2$

$$\sup_n |\lambda_n - n| < \frac{1}{2q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

то система (1.8.1) полна и минимальна в $L^p(-\pi, \pi)$. Эту теорему можно рассматривать как утверждение об устойчивости и минимальности тригонометрической системы $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ в $L^p(-\pi, \pi)$.

Следующий результат о такой устойчивости принадлежит А. М. Седлецкому [61]:

Пусть $1 \leq p \leq 2$, $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$, $\sup_n |\operatorname{Im} \lambda_n| < \infty$ и при некотором $\varepsilon > 0$

$$-\frac{1}{2q} + \varepsilon \leq (\operatorname{Re} \lambda_n - n) \operatorname{sgn} n \leq \frac{1}{2p}, \quad \text{когда } p > 1,$$

$$-\frac{1}{2q} + \varepsilon \leq (\operatorname{Re} \lambda_n - n) \operatorname{sgn} n \leq \frac{1}{2p} - \varepsilon, \quad \text{когда } p = 1.$$

Тогда система (1.8.1) полна и минимальна в $L^p(-\pi, \pi)$.

Введем понятие избытка системы (1.8.1) в $L^p = L^p(a, b)$ ($0 < a < b < \infty$, a и b фиксированы), $1 \leq p \leq \infty$ (под $L^\infty(a, b)$ понимаем $C[a, b]$). Если система (1.8.1) полна (не полна) в L^p , то ее избыток $E_p(\Lambda)$ в L^p равен (взятому со знаком минус) числу экспонент, при удалении (присоединении) которых новая система полна и минимальна в L^p .

Ряд авторов исследовали вопрос об устойчивости избытка. Вот результат Александера-Редхеффера [71]:

Если $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $M = \{\mu_n\} \subset \mathbb{C}$,

$$\sum_n |\lambda_n - \mu_n| < \infty, \quad (1.8.3)$$

то $E_p(\Lambda) = E_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Петерсон [86] показал, что если $\omega(n) > 0$ и $\inf_n \omega(n) = 0$, то найдутся $\Lambda, M \subset \mathbb{R}$, такие, что

$$\sum_n \omega(n) |\lambda_n - \mu_n| < \infty, \quad (1.8.4)$$

и $E_2(\Lambda) \neq E_2(M)$.

Таким образом, если вес $\omega(n)$ не отделен от нуля, то достаточное условие (1.8.3) нельзя заменить условием (1.8.4).

А. М. Седлецкий рассматривал вещественные последовательности Λ, M .

Пусть $\Lambda(t)$ — число точек Λ на $[0, t]$ при $t > 0$ и взятое со знаком минус число точек Λ при $t < 0$. Пусть, далее, $M(t)$ — аналогичная функция по отношению к M . В [57] доказано, что если

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^2} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+u} |\Lambda(t) - M(t)| dt \right\} < \infty, \quad (1.8.5)$$

то $E_2(\Lambda) = E_2(M)$.

В [60] выяснено, что достаточное условие (1.8.5) устойчивости избытка в L^2 в определенном смысле неулучшаемо.

Вот еще результат Эльснера[79]:

Если

$$\sup_n |\operatorname{Im} \lambda_n|, \quad \sup_n |\operatorname{Im} \mu_n| < \infty, \quad (1.8.6)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_n = \operatorname{Re} \mu_n \quad \text{для любого } n, \quad (1.8.7)$$

то $E_2(\Lambda) = E_2(M)$.

В статье [64] показана существенность условия (1.8.6) для этого утверждения, а также доказана теорема сравнения:

Пусть Λ, M лежат в полосе $\{z : |y| \leq \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ ($x > 0$) — положительная неубывающая функция с условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(n)}{n^2} < \infty,$$

и пусть выполнено условие (1.8.7). Если $|\operatorname{Im} \lambda_n| \geq |\operatorname{Im} \mu_n|$, то $E_2(\Lambda) \geq E_2(M)$.

8.2. Условия сходимости рядов. Предположим, что система (1.8.1) минимальна в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда она обладает биортогональной системой $\{h_n(t)\} \subset L^q(-\pi, \pi)$. Произвольной функции $f \in L^p(-\pi, \pi)$ ставим в соответствие ряд

$$f(t) \sim \sum_n c_n e^{i\lambda_n t}, \quad c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt. \quad (1.8.8)$$

Прежде всего, интересна сходимость рядов (1.8.8) по норме $L^p(-\pi, \pi)$, их равномерная равносходимость внутри $(-\pi, \pi)$ с обычным рядом Фурье функции $f(t)$, их равномерная сходимость на $[-\pi, \pi]$.

Винер и Пэли [85] доказали, что если $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и

$$\sup_n |\lambda_n - n| < \frac{1}{\pi^2}, \quad (1.8.9)$$

то система (1.8.1) образует базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$ и для любой функции $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ряд (1.8.8) равномерно равносходится внутри $(-\pi, \pi)$ с рядом Фурье функции $f(t)$: равномерно внутри $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-N}^N c_n e^{i\lambda_n t} - \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{ixt} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-ixu} du \right) = 0. \quad (1.8.10)$$

Вопрос о базисах Рисса из экспонент в L^2 рассматривался многими авторами.

М. И. Кадец [9] показал, что в (1.8.9) можно заменить $\frac{1}{\pi^2}$ на $\frac{1}{4}$; из результатов Левинсона [83] следует, что $\frac{1}{4}$ — неулучшаемая постоянная.

Б. Я. Левин [27] и В. Д. Головин [3] доказали теорему другого сорта:

Если $\{\lambda_n\}$ — все нули некоторой целой функции типа синуса (относительно $(-\pi, \pi)$), т.е. вне некоторой горизонтальной полосы

$$0 < c \leq |L(\lambda)|e^{-\pi|\operatorname{Im} \lambda|} \leq C < \infty,$$

то система (1.8.1) — базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$.

Здесь условие на λ_n задается в терминах целой функции, чье множество нулей совпадает с Λ . В таких терминах окончательное решение вопроса о базисах Рисса в L^2 дано Б. С. Павловым [55]:

Пусть $\{\lambda_n\}$ — все нули целой функции $L(z)$ экспоненциального типа π в полуплоскостях $\operatorname{Im} z \leq 0$, точки λ_n отделены и находятся в полосе $0 < \delta \leq \operatorname{Im} \lambda_n \leq H < \infty$ (все условия с точностью до переноса полосы необходимы для базисности по Риссу системы (1.8.1) в L^2); пусть точки λ_n — простые. Тогда система (1.8.1) образует базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$ в том и только в том случае, когда $|L(x)|$ удовлетворяет условию (A_2) .

Под (A_p) принято понимать так называемое условие Макенхаупта (I — произвольный интервал в $\mathbb{R}$):

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |L(x)| dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I |L(x)|^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty. \quad (A_p)$$

Вопросы сходимости и суммируемости рядов (1.8.8) освещены в обзорной статье А. М. Седлецкого [61]. Остановимся вкратце только на некоторых результатах ее автора.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — нули целой функции $L(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t)$ и выполнено одно из условий:

$$\sigma(\pi) \neq \sigma(\pi - 0), \quad \sigma(-\pi) \neq \sigma(-\pi + 0) \quad (1.8.11)$$

или $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\sigma'(t) = \frac{K(t)}{(\pi - |t|)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \operatorname{var} K < \infty, \quad K(\pm\pi \mp 0) \neq 0. \quad (1.8.12)$$

Тогда для любой функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\| (\pi - |t|) \left\{ \sum_{|\lambda_n| < R} c_n e^{i\lambda_n t} - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ixt} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-ixu} du \right\} \right\|_{C(-\pi, \pi)} = 0.$$

В случае (1.8.11) при рассмотрении равномерной сходимости рядов (1.8.8) справедливы аналоги классических признаков Дини, Дини-Липшица, Дирихле-Жордана. Только вместо обычной периодичности на функцию $f(t)$ накладывается условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\sigma(t) = 0.$$

Скажем, что система (1.8.1) есть *система распространения сходимости* в L^p , если из сходимости в $L^p(-\pi, \pi)$ последовательности линейных комбинаций функций системы следует всегда ее сходимость в $L^p(-a, a)$, для любого $a \in (\pi, \infty)$. Назовем базис (1.8.1) *подпространства $L^p(-\pi, \pi)$ продолжающим*, если произвольный ряд по этой системе, сходящийся в $L^p(-\pi, \pi)$, будет сходиться в $L^p(-a, a)$ для любого $a \in (\pi, \infty)$.

Оказалось, что если последовательность $\{\lambda_n\}$ отделима, то следующие условия эквивалентны:

- 1) система (1.8.1) — система распространения сходимости в L^p , $1 < p < \infty$;
- 2) базис (1.8.1) — продолжающий базис в замыкании своей линейной оболочки в $L^p(-\pi, \pi)$.

Доказано, что при условии (1.8.11) система (1.8.1) образует продолжающий базис в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$. Если выполнены условия (1.8.12), то система (1.8.1) — продолжающий базис 1) в $L^p(-\pi, \pi)$ ($1 < p < \infty$) при $\alpha > \frac{1}{q}$, 2) в замыкании своей линейной оболочки в $L^p(-\pi, \pi)$ при $\alpha < \frac{1}{q}$. Если $\alpha = \frac{1}{q}$, то система (1.8.1) не является базисом.

Приводится в качестве примера система

$$\{\exp[it(n + \beta \operatorname{sgn} n)]\}_{n=-\infty}^{+\infty}. \quad (1.8.13)$$

Ее показатели удовлетворяют условию (1.8.12) при подходящих α и $K(t)$. Оказывается, что при $1 < p < \infty$ эквивалентны следующие условия:

- 1) система (1.8.13) — базис в $L^p(-\pi, \pi)$;
- 2) система (1.8.13) — продолжающий базис в $L^p(-\pi, \pi)$;
- 3) система (1.8.13) — базис в $L^p(-\pi, \pi)$, изоморфный тригонометрическому;

$$4) -\frac{1}{2q} < \beta < \frac{1}{2p}.$$

В. А. Ильин [8] получил в терминах биортогональной системы $\{h_n(z)\}$ следующее необходимое и достаточное условие равносходимости в классе $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$:

Пусть система (1.8.1) полна и минимальна в $L^p(-\pi, \pi)$ ($1 < p < \infty$), точки λ_n расположены в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq H$, причем их число в прямоугольнике $|\operatorname{Im} z| \leq H, t < \operatorname{Re} z < t + 1$ ($t \in \mathbb{R}$) равномерно ограничено. Тогда для любой функции $f \in L^p(-\pi, \pi)$ равносходимость (1.8.10) имеет место в том и только в том случае, когда нормы $\|h_n\|$ в $L^q(-\pi, \pi)$ ограничены в совокупности.

ГЛАВА II

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

§ 1. Представление целых функций конечного порядка

Результаты этого параграфа взяты из монографии А. Ф. Леонтьева [39].

1.1. Сопряженные порядки и типы. Как уже отмечалось в гл. I, $\rho(r)$ — уточненный порядок, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

Пусть $\rho_1(r)$ — уточненный порядок, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1$, причем $\rho_1 > 1$. Пусть $r = \varphi_1(t)$ — функция, обратная к функции $t = r^{\rho_1(r)}$. Положим

$$\varphi_2(t) = \frac{t}{\varphi_1(t)}$$

и обозначим $t = r^{\rho_2(r)}$ функцию, обратную к функции $r = \varphi_2(t)$. Оказывается, $\rho_2(r)$ — уточненный порядок:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_2(r) = \rho_2, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho_2'(r) \ln r = 0.$$

Числа ρ_1 и ρ_2 связаны соотношением

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 1.$$

Порядки $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ называются *сопряженными порядками*. Величины σ_1 и σ_2 , связанные соотношением

$$(\sigma_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} (\sigma_2 \rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} = 1,$$

назовем *сопряженными типами*.

1.2. Конструкция ряда. Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ — целая функция типа σ_1 при уточненном порядке $\rho_1(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1 > 1$, с простыми

нулями λ_n ($n \geq 1$), $F(z)$ — целая функция,

$$\omega(\mu, F) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [F^{(n-1)}(0) + \mu F^{(n-2)}(0) + \dots + \mu^{n-1} F(0)]. \quad (2.1.1)$$

Это — интерполирующая функция. Пусть $A(L)$ — класс целых функций, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| [F^{(n-1)}(0) + |\mu| F^{(n-2)}(0) + \dots + |\mu|^{n-1} F(0)] < \infty, \quad |\mu| < \infty.$$

Обозначим $B(L)$ класс целых функций $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$,

$$B(L) : \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi_2(n) \sqrt[n]{|b_n|} < (\sigma_2 e \rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}, \quad (2.1.2)$$

где $r = \varphi_2(t)$ — функция, обратная к функции $t = r^{\rho_2(r)}$, а $\rho_2(r)$ — уточненный порядок, сопряженный с уточненным порядком $\rho_1(r)$, σ_2 — тип, сопряженный с типом σ_1 .

Условие (2.1.2) означает, что каждая функция из $B(L)$ растет не быстрее целой функции уточненного порядка $\rho_2(r)$ и некоторого типа $\tau < \sigma_2$.

Показывается, что $B(L) \subset A(L)$.

Функции $F(z) \in A(L)$ сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}, \quad A_n = \frac{\omega(\lambda_n, F)}{L'(\lambda_n)}.$$

1.3. Теоремы разложимости.

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть $F(z)$ — целая функция из класса $[\rho_2(r), \sigma_2]$ (ее тип не превосходит σ_2 при уточненном порядке $\rho_2(r)$, причем $1 < \rho_2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_2(r)$, $0 < \sigma_2 < \infty$). Пусть $\rho_1(r)$ и σ_1 — сопряженный порядок и тип. Тогда, каково бы ни было $\gamma < \sigma_1$, имеется последовательность $\{\lambda_n\}$ (λ_n — нули целой функции типа $\tilde{\sigma}_1$, $\gamma < \tilde{\sigma}_1 < \sigma_1$, при порядке $\rho_1(r)$), такая, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}, \quad A_n = \frac{\omega(\lambda_n, F)}{L'(\lambda_n)}, \quad |z| < \infty, \quad (2.1.3)$$

причем при любом $\varepsilon > 0$

$$|A_n| < C(\varepsilon) \exp \left[-(\gamma - \varepsilon) |\lambda_n|^{\rho_1(|\lambda_n|)} \right] \quad (n \geq 1). \quad (2.1.4)$$

Точки λ_n можно выбрать на m лучах $\arg \lambda = \varphi_0 + \frac{2n\pi}{m}$ ($n = 0, 1, \dots, m-1$), где m удовлетворяет условиям $m > 2\rho_1$ и $\cos \frac{\pi\rho_1}{m} > \frac{\gamma}{\sigma_1}$. При этом их можно выбрать еще так, что $|\lambda_n|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры. В то же время, если $F(z)$ — целая функция типа σ_2 при порядке $\rho_2(r)$, то не существует разложения при условии

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = H < \infty,$$

в котором коэффициенты A_n удовлетворяли бы условию

$$|A_n| < C \exp \left[-(\sigma_1 + \varepsilon_0) |\lambda_n|^{\rho_1(|\lambda_n|)} \right] \quad (n \geq 1, \quad \varepsilon_0 > 0).$$

Из оценки (2.1.4) вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1.2. Пусть $F(z)$ принадлежит классу $[\rho_2(r), \sigma_2]$ ($\rho_2 > 1, \quad 0 < \sigma_2 < \infty$) и пусть β_2 — фиксированное число, большее σ_2 . Обозначим γ число, сопряженное с β_2 :

$$(\gamma\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} (\beta_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} = 1.$$

Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$ (λ_n — нули целой функции некоторого типа $\tilde{\sigma}_1 < \sigma_1$ при порядке $\rho_1(r)$), такая, что имеет место разложение (2.1.3), причем для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{rr_n} < \exp \left[(\beta_2 + \varepsilon) r^{\rho_2(r)} \right], \quad r > r_0(\varepsilon), \quad (2.1.5)$$

где $r = |z|$, $r_n = |\lambda_n|$. Точки λ_n можно выбрать на лучах: $\arg \lambda = \varphi_0 + \frac{2n\pi}{m}$ ($n = 0, 1, \dots, m-1$), где целое m удовлетворяет условиям: $m > 2\rho_1$ и $\cos \frac{\pi\rho_1}{m} > \frac{\gamma}{\sigma_1}$. При этом их можно выбрать еще так, что $|\lambda_n|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. При фиксированном $\beta_2 > \sigma_2$ для всех функций $F(z)$ из класса $[\rho_2(r), \sigma_2]$ последовательность $\{\lambda_n\}$ будет одной и той же.

Из теоремы 2.1.2 вытекают следующие два предложения, касающиеся целых функций $F(z)$ обычного порядка ρ_2 и типа σ_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.1. Пусть $F(z)$ — целая функция обычного порядка $\rho_2 > 1$ (ее тип σ_2 может быть равен и бесконечности). Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho_1}} = 0,$$

такая, что имеет место разложение (2.1.3), причем для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{r r_n} < \exp r^{\rho_2 + \varepsilon}, \quad r = |z|, \quad r_n = |\lambda_n|, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Точки λ_n можно выбрать на m лучах: $\arg \lambda = \varphi_0 + \frac{2n\pi}{m}$ ($n = 0, 1, \dots, m-1$), где $m > 2\rho_1$, причем так, что $|\lambda_n|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.2. Пусть $F(z)$ — целая функция обычного порядка $\rho_2 > 1$ и нулевого типа. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$ (λ_n — нули целой функции $L(\lambda)$ конечного типа при порядке $\rho_1(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1$), такая, что имеет место разложение (2.1.3), причем для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{r r_n} < \exp(\varepsilon r^{\rho_2}), \quad r = |z|, \quad r_n = |\lambda_n|, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Точки λ_n можно выбрать на m лучах: $\arg \lambda = \varphi_0 + \frac{2n\pi}{m}$ ($n = 0, 1, \dots, m-1$), где $m > 2\rho_1$, причем так, что $|\lambda_n|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

Идея вывода, например, предложения 2.1.2 из теоремы 2.1.2 — следующая. Имеем

$$|F(z)| < \exp [\beta(r) r^{\rho_2}], \quad |z| = r, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) = 0.$$

Положим $\beta_1(r) = \max_{t \geq r} \beta(t)$, $\alpha(r) = \max [\beta_1(r), \frac{1}{\ln r}]$. Имеем

$$0 < \alpha(r) \downarrow 0, \quad \alpha(r) \geq \frac{1}{\ln r}.$$

При этих условиях существует уточненный порядок

$$\rho_2(r) = \rho_2 - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}, \quad \psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

такой, что $\alpha(r) r^{\rho_2} < r^{\rho_2(r)}$. В силу этого, функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho_2(r), \sigma_2]$, $\sigma_2 = 1$.

Возьмем целое $m > 2\rho_1$, но подберем γ столь малым, чтобы выполнялось условие $\cos \frac{\pi \rho_1}{m} > \frac{\gamma}{\sigma_1}$. Получаем разложение (2.1.3) с оценкой (2.1.5). Но

$$\frac{(\beta_2 + \varepsilon) r^{\rho_2(r)}}{r^{\rho_2}} = (\beta_2 + \varepsilon) e^{-\psi(\ln r)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

откуда и следует предложение 2.1.2.

ТЕОРЕМА 2.1.3. Пусть $F(z)$ — целая функция обычного порядка $\rho_2 > 1$ и типа не выше σ_2 , $0 < \sigma_2 < \infty$. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho_1}} < \infty,$$

такая, что имеет место разложение (2.1.3), причем для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{r r_n} < B(\varepsilon) \exp[(\sigma_2 + \varepsilon) r^{\rho_2}], \quad r = |z|, \quad r_n = |\lambda_n|.$$

Точки λ_n при этом можно выбрать так, что $|\lambda_n|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

Эта теорема не вытекает из теоремы 2.1.2. Она доказывается особо.

1.4. Оценка производных. Пусть $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция из класса $[\rho_1, \gamma]$, $\gamma \leq \sigma_1$ ($\rho_1 > 1$), $F(z) \in [\rho_2, \tau_2]$, $\tau_2 < \sigma_2$, где ρ_1, ρ_2 — сопряженные порядки, а σ_1, σ_2 — сопряженные типы. Тот факт, что тип σ_2 сопряжен с типом σ_1 , будем отмечать записью: $\sigma_2 = \psi(\sigma_1)$.

Введем функцию

$$M_L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.3. При указанных условиях верна оценка: для любого $\varepsilon > 0$

$$|M_L(F)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n F^{(n)}(z)| < C(\varepsilon) \exp[(\beta + \varepsilon) r^{\rho_2}],$$

где $\beta = \psi(\tau_1 - \gamma)$, $\tau_2 = \psi(\tau_1)$.

Функция $F(z)$, согласно теореме 2.1.1, представляется рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\mu_n z}, \quad |z| < \infty,$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots$ — нули некоторой целой функции $L_0(\lambda)$ порядка ρ_1 и типа τ_1 , причем для любого $\varepsilon > 0$

$$|A_n| < A(\varepsilon) \exp[-(\tau_1 - \varepsilon) |\mu_n|^{\rho_1}], \quad n \geq 1.$$

Далее,

$$M_L(F) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n L(\mu_n) e^{\mu_n z},$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$|A_n L(\mu_n)| < B(\varepsilon) \exp[-(\tau_1 - \gamma - \varepsilon)|\mu_n|^{\rho_1}], \quad n \geq 1.$$

Отсюда и вытекает искомая оценка.

Из найденной оценки получаем

$$|F^{(n)}(z)| < \frac{C(\varepsilon)}{|c_n|} \exp[(\beta + \varepsilon)r^{\rho_2}].$$

Отсюда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.4. Пусть $F(z) \in [\rho_2, \tau_2]$, $\tau_2 < \sigma_2$. Пусть, далее, d_n ($n \geq 0$) — числа, удовлетворяющие условиям: $d_n > 0$ ($n \geq 0$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho_1}} \sqrt[n]{d_n} = (\sigma_1 e \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка (при любых z)

$$|F^{(n)}(z)| < \frac{C(\varepsilon)}{d_n} \exp[(\beta + \varepsilon)r^{\rho_2}] \quad (n \geq 0), \quad \beta = \psi(\tau_1 - \sigma_1), \quad \tau_2 = \psi(\tau_1).$$

1.5. Однородное уравнение бесконечного порядка. Рассматривается уравнение

$$M_L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z) = 0. \quad (2.1.6)$$

Для него функция $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — характеристическая. Предполагаем, что $L(\lambda)$ — целая функция из класса $[\rho_1, \sigma_1]$ ($\rho_1 > 1$), $0 \leq \sigma_1 < \infty$ с нулями $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем они могут быть и кратными, их кратность обозначим, соответственно, $m_1, m_2, \dots$.

Исследование уравнения (2.1.6) основано на следующих свойствах интерполирующей функции (2.1.1):

1) Если $F(z) \in B(L)$ и нули λ_n функции $L(\lambda)$ — простые, то

$$|\omega_n(\lambda_n, F)| < \frac{C}{|L'(\lambda_n)|}, \quad n \geq 1;$$

2) Пусть $L_1(\lambda), L_2(\lambda)$ — целые функции из классов $[\rho_1, \tau_1]$ и $[\rho_1, \tau_2]$, соответственно, $\sigma_1 = \tau_1 + \tau_2$, $F(z)$ — целая функция из класса $[\rho_2, b]$, $b < \sigma_2$ (ρ_1 и ρ_2 — сопряженные порядки, σ_1 и σ_2 — сопряженные типы). Тогда

$$\omega_{L_1 L_2}(\mu, F) = L_2(\mu) \omega_{L_2}(\mu, F) + \omega_{L_1}(\mu, \Phi), \quad \Phi(z) = M_{L_2}(F)$$

(через $\omega_L(\mu, F)$ обозначена функция (2.1.1)).

Согласно второму свойству, если $F(z)$ удовлетворяет уравнению (2.1.6), то

$$\frac{\omega_{LN}(\mu, F)}{L(\mu)N(\mu)} = \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)}.$$

Здесь $N(\mu)$ — произвольная целая функция из класса $[\rho_1, a]$, где a подобрано так, чтобы $F(z) \in B(LN)$.

При соответствующем выборе функции $N(\mu)$ с хорошими оценками снизу удастся представить $F(z)$ в виде

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_m} \frac{\omega_{LN}(\mu, F)}{L(\mu)N(\mu)} e^{\mu z} d\mu,$$

где $|\mu| = r_m \uparrow \infty$ — некоторые окружности.

Прежде, чем сформулировать соответствующий результат, введем определение.

Будем говорить, что последовательность целых функций $f_n(z)$ из класса $[q, p]$ сходится в смысле $[q, p]$, если она сходится равномерно на компактах и выполняется условие: для каждого $\varepsilon > 0$ имеется $r_0(\varepsilon)$, не зависящее от n , такое, что

$$|f_n(z)| < \exp[(p + \varepsilon)|z|^q], \quad |z| > r_0(\varepsilon), \quad n \geq 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.5. Пусть $L(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$, $\rho_1 > 1$, $0 \leq \sigma_1 < \infty$ и $F(z)$ — решение уравнения (2.1.6) из класса $[\rho_2, \frac{\sigma_2}{R^{\rho_2}}]$, $R > 1$. Тогда:

1) если $|\lambda| = r_m \uparrow \infty$ — окружности, на которых для каждого $\varepsilon > 0$ и $m > m_0(\varepsilon)$

$$|L(\lambda)| > e^{(\gamma - \varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}}, \quad -\infty < \gamma \leq \sigma_1, \quad |\lambda| = r_m, \quad (2.1.7)$$

и $R > \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma_1}\right)^{1/\rho_1}$, $\sigma_1 > 0$, то

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(z), \quad P_m(z) = \sum_{|\lambda_\nu| < r_m} \sum_{n=0}^{m_\nu-1} \alpha_{\nu n} z^n e^{\lambda_\nu z}, \quad (2.1.8)$$

причем сходимость $\{P_m(z)\}$ будет в смысле $[\rho_2, \frac{\sigma_2}{q^{\rho_2}}]$,

$$q = \left[R^{\rho_1} - \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma_1}\right)\right]^{1/\rho_1};$$

2) если в оценке (2.1.7) величина $\gamma = \sigma_1$, то последовательность $\{P_m(z)\}$ будет сходиться в смысле $[\rho_2, \frac{\sigma_2}{R^{\rho_2}}]$;

3) если $\sigma_1 = 0$ и $F(z) \in [\rho_2, p]$ ($p < \infty$), то имеет место представ-

ление (2.1.8) со сходимостью $\{P_m(z)\}$ в смысле $[\rho_2, p]$;

4) если $F(z) \in [\rho_2, 0]$, то $(\sigma_1 \geq 0)$ имеет место представление (2.1.8) со сходимостью $P_m(z)$ в смысле $[\rho_2, 0]$.

Здесь речь шла о сходимости подпоследовательности частных сумм ряда (его члены вычисляются по указанной выше формуле), причем сходимость зависит от оценки (2.1.7).

Сейчас приведем теорему аппроксимационного характера.

ТЕОРЕМА 2.1.4. Пусть $L(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$, $0 \leq \sigma_1 < \infty$, $F(z)$ — решение уравнения (2.1.6) из класса $[\rho_2, p]$, $p < \infty$. Тогда

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} \sum_{n=0}^{m_\nu-1} \alpha_{\nu n}^n z^n e^{\lambda_\nu z},$$

причем сходимость — в смысле $[\rho_2, p]$.

Доказательство основано на иных соображениях.

В случае простых нулей представляет интерес следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1.5. Пусть $L(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$ и у $L(\lambda)$ только простые нули λ_n ($n \geq 1$). Для того, чтобы любое решение уравнения (2.1.6) из класса $[\rho_2, 0]$ представлялось рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z},$$

сходящимся в смысле $[\rho_2, 0]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho_1}} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty.$$

1.6. Неоднородное уравнение бесконечного порядка. Рассматривается уравнение

$$M_L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z) = \Phi(z). \quad (2.1.9)$$

Его любое решение есть сумма сумм решений однородного уравнения и какого-нибудь решения неоднородного уравнения. Поэтому речь идет о существовании какого-нибудь решения неоднородного уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.6. Пусть $L(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$, $\rho_1 > 1$, $0 \leq \sigma_1 < \infty$, а $\Phi(z) \in [\rho_2, p]$, $p < \infty$. Тогда:

1) если $p = 0$, то имеется решение $F(z)$ уравнения (2.1.9) из класса $[\rho_2, 0]$;

2) если для любого $\varepsilon > 0$

$$|L(\lambda)| > A(\varepsilon)e^{(\sigma_1 - \varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}}, \quad |\lambda| \notin E_0, \quad \sigma_1 > 0,$$

(E_0 — некоторое множество нулевой относительной меры), то уравнение (2.1.9) имеет решение $F(z)$ из класса $[\rho_2, q]$, где

$$q = p [1 + (p\sigma_2^{-1})^\alpha]^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha = \rho_1\rho_2^{-1}$$

(величина $q < \sigma_2$);

3) если $\sigma_1 = 0$, то имеется решение из класса $[\rho_2, p]$.

§ 2. Представление целых функций с учетом индикатрисы роста

Результаты этого параграфа взяты из работы А. Ф. Леонтьева [38].

2.1. Постановка задачи. Мы видели (теорема 2.1.3), что любую целую функцию $f(z)$ порядка $\rho_2 > 1$ и типа $\sigma_2 < \infty$ можно разложить в ряд экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \quad (2.2.1)$$

так, что будет выполняться условие: для каждого $\varepsilon > 0$

$$F(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}| < e^{(\sigma_2 + \varepsilon)|z|^{\rho_2}}, \quad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Пусть теперь $f(z)$ — целая функция порядка ρ_2 с индикатрисой роста $h(\varphi)$. Положим

$$H(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln F(ze^{i\varphi})}{r^{\rho_2}}, \quad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|.$$

ЗАДАЧА 2.2.1. Можно ли получить такое разложение (2.2.1), чтобы выполнялось условие $H(\varphi) = h(\varphi)$?

Ответ, как увидим, — вообще отрицательный: существуют такие $h(\varphi)$, что совпадение $H(\varphi)$ с $h(\varphi)$ невозможно.

Обозначим A_ρ класс функций $h(\varphi)$ — индикатрис роста всевозможных целых функций порядка ρ конечного типа. Характерное свойство $h(\varphi)$ — ρ -тригонометрическая выпуклость:

$$h(\varphi_1) \sin \rho(\varphi_2 - \varphi_3) + h(\varphi_2) \sin \rho(\varphi_3 - \varphi_1) + h(\varphi_3) \sin \rho(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 0$$

при $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ и $\varphi_3 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\rho}$.

Будем говорить, что $H(\varphi) \in B_\rho$, если $H(\varphi) < \infty$, и существуют $\{b_n\}$ и $\{\mu_n\}$, $0 < |\mu_n| \uparrow \infty$, такие, что

$$H(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(re^{i\varphi})}{r^\rho}, \quad \Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n e^{\mu_n z}|.$$

Видим, что если $\rho < 1$, то $\Phi(z) \equiv 0$, а если $\rho = 1$, то $\Phi(z)$ — конечная комбинация. Эти случаи неинтересны. Поэтому будем считать $\rho > 1$.

Нам надо выяснить свойства функции $H(\varphi)$.

2.2. Свойства функции $H(\varphi)$. Отметим следующие свойства.

1) Пусть $\arg z = \psi_j$ ($j = 1, 2, 3$) — лучи, удовлетворяющие условию: углы между соседними лучами меньше π . Если

$$H(\psi_j) < \infty \quad (j = 1, 2, 3),$$

то при всех φ будет $H(\varphi) \leq a < \infty$.

2) Всегда $H(\varphi) \geq 0$.

3) Пусть $\mu_n > 0$. Тогда

$$H(\varphi) = \begin{cases} H(0) \cos^\rho \varphi, & |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{для остальных } \varphi. \end{cases}$$

4) Пусть $H(\varphi)$ имеет наибольшее значение при $\varphi = 0$. Тогда

$$H(\varphi) \geq H(0) \cos^\rho \varphi, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}.$$

5) Пусть μ_n расположены на лучах $\arg z = \psi_j$ ($1 \leq j \leq m$). Тогда

$$H(\varphi) = \max_j [\sigma_j \widetilde{\cos}^\rho(\varphi + \psi_j)], \quad (2.2.2)$$

где

$$\widetilde{\cos} \varphi = \begin{cases} \cos \varphi, & |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{для остальных } \varphi. \end{cases}$$

Функцию $H(\varphi)$ вида (2.2.2) будем называть простейшей функцией из класса B_ρ . Она — непрерывная функция.

6) Пусть $H(\varphi) \in B_\rho$. По данному $\varepsilon > 0$ можно найти простейшую функцию $\tilde{H}(\varphi)$ из класса B_ρ , удовлетворяющую условию

$$|H(\varphi) - \tilde{H}(\varphi)| < \varepsilon, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

7) Пусть $H(\varphi) \in B_\rho$. Тогда $H(\varphi)r^\rho$ — выпуклая функция переменного $z = re^{i\varphi}$.

Утверждение 7) очевидно, если $H(\varphi) = \sigma \widetilde{\cos}^\rho \varphi$, ибо в этом случае

$$H(\varphi)r^\rho = \begin{cases} \sigma x^\rho, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Но тогда утверждение верно, если $H(\varphi)$ — простейшая функция вида (2.2.2) (максимум из выпуклых функций есть выпуклая функция). В общем случае в справедливости утверждения убеждаемся на основании свойства 6).

8) Пусть $H(\varphi) \in B_\rho$. Тогда $H(\varphi) \in A_\rho$. Иными словами, $B_\rho \subset A_\rho$.

Действительно, в силу свойства 7), функция $H(\varphi)r^\rho$ — субгармоническая. Но тогда функция $H(\varphi)$ — ρ -тригонометрически выпуклая и, следовательно, принадлежит классу A_ρ .

9) Существуют неотрицательные функции $h(\varphi)$, которые не являются функциями $H(\varphi)$.

Примером такой функции $h(\varphi)$ может служить индикатриса роста функции Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}.$$

Для этой функции индикатриса роста равна

$$h(\varphi) = \begin{cases} \cos \rho \varphi, & |\varphi| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \\ 0, & \text{для остальных } \varphi. \end{cases}$$

Если бы $h(\varphi) = H(\varphi)$, то, в силу свойства 4), мы имели бы $H(\varphi) \geq \cos^\rho \varphi$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, и, значит, выполнялось бы соотношение

$$\cos^\rho \varphi \leq \cos \rho \varphi.$$

Но оно не выполняется и при малых $\varphi \neq 0$. Действительно, функция $\alpha(r) = \cos^\rho \varphi - \cos \rho \varphi$ обладает свойствами:

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(r) = \rho(\sin \rho \varphi - \cos^{\rho-1} \varphi \sin \varphi) > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2\rho}$$

(мы здесь учли, что $\rho > 1$). Поэтому $\alpha(r) > 0$, если $0 < \varphi < \frac{\pi}{2\rho}$.

10) Пусть $H(\varphi) \in B_\rho$ и $H(\varphi) > 0$. Положим

$$h(\varphi)r^{\rho_1} = \max_{t \in \mathbb{C}} [\operatorname{Re}(zt) - H(\psi)|z|^\rho], \quad z = re^{i\varphi}, \quad t = |t|e^{i\psi},$$

где $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1$. Тогда $h(\varphi) \in B_{\rho_1}$, и

$$H(\varphi)r^\rho = \max_{t \in \mathbb{C}} [\operatorname{Re}(zt) - h(\psi)|z|^{\rho_1}].$$

Функции $H(\varphi)$ и $h(\varphi)$ будем называть *сопряженными функциями* (сопряженными по Юнгу).

Тот факт, что $H(\varphi)r^\rho$ — выпуклая функция переменного $z = re^{i\varphi}$ — характерное свойство функций $H(\varphi) \in B_\rho$.

2.3. Конструкция ряда. Задача ставится так. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho > 1$ с индикатрисой $h(\varphi)$ и пусть $H(\varphi)$ функция из B_ρ , такая, что $h(\varphi) \leq H(\varphi)$. Требуется разложить $f(z)$ в ряд экспонент таким образом, чтобы индикатриса роста ряда из модулей членов не превосходила $H(\varphi)$.

Вопрос сводится к тому, как построить соответствующий ряд.

Пусть $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция порядка ρ_1 ($\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1$) с индикатрисой роста $h_L(\varphi)$. Положим

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \Gamma\left(\frac{n}{\rho_1} + 1\right)}{t^{n+1}}.$$

Эта функция называется ассоциированной с $L(\lambda)$ по функции Миттаг-Леффлера $E_{\rho_1}(z)$. Ряд сходится при $|t| > \sigma_1^{1/\rho_1}$, если σ_1 — тип $L(\lambda)$. Будем предполагать, что $h_L(\varphi) > 0$ при всех φ .

Рассмотрим кривую

$$r = \left(\frac{a}{\cos \rho_1(\varphi - \varphi_0)} \right)^{1/\rho_1}, \quad |\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2\rho_1}.$$

При больших $a > 0$ она лежит в области $|z| > \sigma_1^{1/\rho_1}$. Будем уменьшать величину a до тех пор, когда кривая не соприкоснется с особенностями функции $\gamma(t)$. Пусть соприкосновение произошло, когда $a = a_0 = K(\varphi_0)$. Показывается (см. [5], с. 335), что если $h_L(-\varphi_0) > 0$ (а это мы предполагаем), то $K(\varphi_0) = h_L(-\varphi_0)$.

Функция $K(\varphi)$ называется опорной функцией, а кривая

$$r = \left(\frac{K(\psi)}{\cos \rho_1(\varphi - \psi)} \right)^{1/\rho_1}, \quad |\varphi - \psi| < \frac{\pi}{2\rho_1}, \quad t = re^{i\varphi} \quad (2.2.3)$$

— опорной кривой. При нашем предположении всегда $K(\psi) = h_L(-\psi)$. При изменении ψ область D_ψ , ограниченная кривой (2.2.3) (области D_ψ не принадлежит начало координат), заметет внешность некоторой замкнутой конечной области $\overline{D}$. Область $\overline{D}$ — наименьшая ρ_1 -выпуклая область, содержащая все особенности функции $\gamma(t)$. Кривая (2.2.3)

— опорная кривая области $\overline{D}$, $K(\psi)$ — опорная функция области $\overline{D}$. Заметим, что при условии $h_L(\varphi) > 0$ всегда $0 \in D$ (D — открытая часть области $\overline{D}$).

Введем функции

$$\frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(\mu) \lambda^m,$$

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \lambda^m$$

(здесь Γ — замкнутый контур, на котором $L(\mu) \neq 0$, а λ лежит внутри Γ),

$$\gamma(\mu, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m(\mu) \Gamma\left(\frac{m}{\rho_1} + 1\right)}{t^{m+1}},$$

$$\gamma(t, z, \Gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(z) \Gamma\left(\frac{m}{\rho_1} + 1\right)}{t^{m+1}}.$$

Показывается, что функции $\gamma(\mu, t)$ и $\gamma(t, z, \Gamma)$ как функции переменного t регулярны вне введенного выше множества $\overline{D}$.

Пусть теперь $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ — целая функция порядка $\rho > 1$ с индикатрисой роста $h_f(\varphi)$. Положим

$$\Phi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m! \beta_m}{\Gamma\left(\frac{m}{\rho_1} + 1\right)} t^m.$$

ЛЕММА 2.2.1. Если $h_f(\varphi) \leq H(\varphi)$, $H(\varphi) \in B_\rho$ и $L(\lambda)$ такова, что функция $h_L(\varphi)$ сопряжена с $H(\varphi)$, то функция $\Phi(t)$ регулярна в области D (открытой части введенного выше множества $\overline{D}$).

Это — очень существенная лемма.

Возьмем фиксированное $\varepsilon > 0$. В классе B_ρ всегда найдется функция $H_1(\varphi)$, например, простейшая, которая удовлетворяет условию:

$$H(\varphi) < H_1(\varphi) < H(\varphi) + \varepsilon.$$

Выберем функцию $L(\lambda)$ так, чтобы функция $h_L(\varphi)$ была сопряжена с функцией $H_1(\varphi)$. При этом условии функция $\Phi(z)$ будет регулярной на множестве $\overline{D}$.

Имея это в виду, положим

$$\omega_L(\mu, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(\mu, t) \Phi(t) dt, \quad (2.2.4)$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого $\Phi(z)$ — аналитическая функция.

Оказывается, что если $L(\lambda) \in [\rho_1, \sigma_1]$, $f(z) \in [\rho, \sigma)$ (σ и σ_1 — сопряженные типы, у $f(z)$ тип меньше σ), то функция (2.2.4) совпадает с интерполирующей функцией (2.1.1).

Формула (2.2.4) — распространение на более общий случай формулы (2.1.1).

ЛЕММА 2.2.2. Если λ_n — нули $L(\lambda)$, то

$$|\omega_L(\lambda_n, f)| \leq M \quad (n \geq 1).$$

ЛЕММА 2.2.3. Имеет место формула

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, f) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t, z, \Gamma) \Phi(t) dt,$$

где C — замкнутый контур, на котором $L(\mu) \neq 0$, и C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого $\Phi(t)$ — аналитическая функция.

Из леммы 2.2.3 выводится следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2.4. Пусть функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |L'(\lambda_n)| = +\infty,$$

и имеются окружности $|\lambda| = q_n \uparrow \infty$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} \min_{|\lambda|=q_n} \ln |L(\lambda)| = +\infty.$$

Тогда во всей плоскости

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad a_n = \frac{\omega_L(\lambda_n, f)}{L'(\lambda_n)}. \quad (2.2.5)$$

ЛЕММА 2.2.5. Пусть

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n e^{\lambda_n z}|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0,$$

причем для каждого $\varepsilon > 0$

$$|A_n| < B(\varepsilon) \exp \{[-h(\varphi_n) + \varepsilon] |\lambda_n|^{\rho_1}\}, \quad \varphi_n = \arg \lambda_n.$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(re^{i\varphi})}{r^\rho} \leq H(\varphi),$$

где $H(\varphi)$ — функция, сопряженная с $h(\varphi)$.

Выберем функцию $L(\lambda)$ вполне регулярного роста с условием: для любого $\varepsilon > 0$

$$\ln |L'(\lambda_n)| > [h_L(\varphi_n) - \varepsilon] |\lambda_n|, \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Тогда, на основании леммы 2.2.2, формулы (2.2.5) и леммы 2.2.5, получим следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho > 1$ с индикатрисой роста $h_f(\varphi) \leq H(\varphi)$, $H(\varphi) \in B_\rho$. Для данного $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{\lambda_n\}$, такая, что

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad a_n = \frac{\omega_L(\lambda_n, f)}{L'(\lambda_n)},$$

причем

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln F(re^{i\varphi})}{r^\rho} \leq H(\varphi) + \varepsilon,$$

где

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|.$$

Точки λ_n можно выбрать так, что $|\lambda_n|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

Н. И. Рахимкулов [56], используя теорию достаточных и слабо достаточных множеств, освободился от ε и получил следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.2.2. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho > 1$ с индикатрисой роста $h_f(\varphi) \leq H(\varphi)$, $H(\varphi) \in B_\rho$. Тогда имеется представление

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z},$$

причем

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln F(re^{i\varphi})}{r^\rho} \leq H(\varphi),$$

где

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n e^{\lambda_n z}|.$$

Для коэффициентов b_n формул нет.

§ 3. Применения

Результаты взяты из работы А. Ф. Леонтьева [40].

3.1. Оператор бесконечного порядка. Рассмотрим оператор

$$M_L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z), \quad L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n.$$

Из предложения 2.1.3 следует, что если $f(z)$ — целая функция порядка $\rho > 1$ и типа σ , а $L(\lambda)$ — целая функция из класса $[\rho_1, 0]$ $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1\right)$, то $M_L(f)$ — целая функция из класса $[\rho, \sigma]$. Этот результат дополним следующим результатом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.1. Пусть $L(\lambda) \in [\rho_1, 0]$, а $f(z)$ — целая функция порядка ρ с индикатрисой роста $h(\varphi)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$|M_L(f)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n f^{(n)}(z)| < A(\varepsilon) \exp \{[h_0(\varphi) + \varepsilon] r^\rho\}, \quad z = r e^{i\varphi},$$

где

$$h_0(\varphi) = \begin{cases} h(\varphi), & h(\varphi) \geq 0, \\ 0, & h(\varphi) < 0. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. Пусть функция $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n$ принадлежит классу $[\rho_1, 0]$ и $f(z)$ — целая функция порядка ρ с индикатрисой роста $h(\varphi)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и при всех z

$$|f^{(n)}(z)| < \frac{A(\varepsilon)}{|c_n|} \exp \{[h_0(\varphi) + \varepsilon] r^\rho\}, \quad n \geq 0.$$

Доказательство предложения 2.3.1 основано на теореме 2.2.1, лемме 2.2.5 и следующей лемме.

ЛЕММА 2.3.1. Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста некоторой целой функции порядка $\rho_1 > 1$ и пусть $h(\varphi_0) > 0$. Тогда существует функция $H(\varphi)$ из класса B_{ρ_1} , такая, что

$$h(\varphi) \leq H(\varphi), \quad h(\varphi_0) = H(\varphi_0).$$

Следующая теорема дополняет предложение 2.1.6.

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть $L(\lambda) \in [\rho_1, 0]$, и $F(z)$ — целая функция порядка ρ с индикатрисой роста $h_F(\varphi)$. Если $h_F(\varphi) \leq H(\varphi)$, $H(\varphi) \in B_\rho$ и $H(\varphi) > 0$, то уравнение

$$M_L(f) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z) = F(z)$$

имеет решение $f(z)$ порядка ρ с индикатрисой $h_f(\varphi) \leq H(\varphi)$.

При доказательстве правая часть представляется в виде

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\mu_n z},$$

а решение — в виде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\mu_n z}, \quad b_n = \frac{a_n}{L(\mu_n)}.$$

3.2. Ряды экспонент с редкими показателями. *Рядом экспонент с редкими показателями* называем ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \quad (2.3.1)$$

со следующими свойствами: коэффициенты удовлетворяют оценкам:

$$|a_n| < e^{-\delta |\lambda_n|^{\rho_1}}, \quad \delta > 0, \quad n > n_0, \quad \rho_1 > 1, \quad (2.3.2)$$

а показатели λ_n — условиям: $0 < |\lambda_n| \uparrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho_1}} = 0, \quad (2.3.3)$$

и существует целая функция $L(\lambda)$ из класса $[\rho_1, 0]$ такая, что $L(\lambda_n) = 0$ ($n \geq 1$) (у $L(\lambda)$ могут быть и другие нули), и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho_1}} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| = 0. \quad (2.3.4).$$

Заметим, что если $L(\lambda) \in [\rho_1, 0]$ и $L(\lambda_n) = 0$ ($n \geq 1$), то выполняется условие (2.3.3). Заметим еще, что если выполнено условие (2.3.3) и при некотором $\alpha > 0$

$$|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| > d |\lambda_n|^{1-\rho_1} \quad (n \geq 1),$$

то имеется целая функция $L(\lambda) \in [\rho_1, 0]$ с нулями в точках λ_n ($n \geq 1$), удовлетворяющая условию (2.3.4).

Класс рассматриваемых функций $f(z)$ обозначим P_ρ .

В [39, с. 125] доказано: для того, чтобы функция (2.3.1) из класса P_ρ была функцией порядка ρ и типа σ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n|^{\rho_1}}{\ln \left| \frac{1}{a_n} \right|} = \frac{1}{\sigma_1}, \quad (2.3.5)$$

где

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1, \quad (\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}} (\sigma_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = 1. \quad (2.3.6)$$

Видим, что тип σ определяется модулями коэффициентов.

Эта теорема усиливается следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Пусть выполнены условия (2.3.1), (2.3.3), (2.3.4) и пусть функция (2.3.1) — целая функция порядка $\rho > 1$ с индикатрисой роста $h_f(\varphi)$. Тогда при всех φ , при которых $h_f(\varphi) \geq 0$, имеет место соотношение

$$h_f(\varphi) \equiv \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r^\rho} \equiv H(\varphi),$$

где

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|.$$

Принципиально новое здесь в том, что в точках φ , где $h_f(\varphi) \geq 0$, индикатриса роста $h_f(\varphi)$ определяется через модули коэффициентов ряда.

Когда все $\lambda_n > 0$, индикатриса $H(\varphi)$ функции $F(z)$ имеет вид $H(\varphi) = \sigma \widetilde{\cos}^\rho \varphi$, где σ определяется из формул (2.3.5) и (2.3.6). Следовательно, в этом случае

$$h_f(\varphi) = \sigma \cos^\rho \varphi, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Когда λ_n расположены на лучах $\arg z = \psi_j$ ($1 \leq j \leq m$),

$$H(\varphi) = \max_j [\sigma_j \widetilde{\cos}^\rho(\varphi + \psi_j)].$$

Здесь σ_j также вычисляются через модули тех коэффициентов a_n , которые соответствуют λ_n , лежащим на луче $\arg z = \psi_j$. В тех точках, где $H(\varphi) > 0$, имеем $h_f(\varphi) = H(\varphi)$.

Любопытно отметить, что, какова бы ни была функция $H(\varphi) \in B_\rho$, $H(\varphi) > 0$, имеется функция (2.3.1) из класса P_ρ с индикатрисой роста $h_f(\varphi) = H(\varphi)$.

Это утверждение устанавливается в виде следующей леммы.

ЛЕММА 2.3.2. Пусть $H(\varphi) \in B_\rho$, $H(\varphi) > 0$ и $h(\varphi)$ — функция, сопряженная с $H(\varphi)$. Пусть, затем, $|\lambda_n| \uparrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0,$$

и множество $\{\varphi_n : \varphi_n = \arg \lambda_n\}$ всюду плотно на $[0, 2\pi]$. Если для каждого $\varepsilon > 0$ при некоторых $B_1(\varepsilon) > 0$ и $B_2(\varepsilon) > 0$

$$B_1(\varepsilon)e^{-[h(\varphi_n)+\varepsilon]|\lambda_n|^{\rho_1}} < |a_n| < B_2(\varepsilon)e^{-[h(\varphi_n)-\varepsilon]|\lambda_n|^{\rho_1}} \quad (n \geq 1),$$

то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(re^{i\varphi})}{r^\rho} = H(\varphi), \quad \Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|.$$

Остановимся еще на вопросе о необходимости условий (2.3.3) и (2.3.4) для справедливости теоремы 2.3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.2. Пусть $\lambda_n > 0$ ($n \geq 1$), $\lambda_{n+1} - \lambda_n > d\lambda_n^{1-\rho_1}$ ($n \geq 1$), $d > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho_1}} = \Delta > 0.$$

Тогда существует функция (2.3.1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2.3.2), такая, что $h_f(0) < H(0)$, $H(0) > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.3. Пусть выполнено условие (2.3.3), а вместо условия (2.3.4) — условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho_1}} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| = q, \quad 0 < q < \infty.$$

Тогда существует функция (2.3.1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2.3.2), такая, что $h_f(0) < H(0)$, $H(0) > 0$.

3.3. Об одном свойстве решения неоднородного уравнения бесконечного порядка. В связи с теоремой 2.3.1 возникает вопрос: если $L(\lambda) \in [\rho_1, 0]$, $F(z)$ — целая функция порядка ρ ($\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1$) с индикатрисой роста $h_F(\varphi)$, то уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z) = F(z) \tag{2.3.7}$$

не всегда ли имеет решение $f(z)$ порядка ρ с индикатрисой роста $h_f(\varphi) = h_F(\varphi)$?

Ответ — отрицательный.

Строится следующий пример. Пусть $\lambda_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n > 1$ ($n \geq 1$).

Положим

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right).$$

Функция $L(\lambda)$ из класса $[1, 0] \subset [\rho_1, 0]$. Возьмем в качестве $F(z)$ функцию

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{zt} dt}{e^{\alpha_1 t^{\rho_1}}}, \quad \rho_1 > 1, \quad \alpha_1 > 0.$$

Показывается, что

$$h_F(\varphi) \leq \alpha \widetilde{\cos} \rho \varphi, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad (\alpha \rho)^{\frac{1}{\rho}} (\alpha_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = 1.$$

Положим теперь

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{e^{zt} dt}{L(t) e^{\alpha_1 t^{\rho_1}}},$$

где Γ — луч: $\arg z = \varphi_0$, $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Функция $f(z)$ — решение уравнения (2.3.7), причем $f(z)$ порядка ρ с индикатрисой роста $h_f(\varphi) = \alpha \cos \rho \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2\rho}$), $h_f(\varphi) = \alpha \cos^\rho \varphi$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$).

Пусть Γ_1 — луч: $\arg z = -\varphi_0$, и

$$f_1(z) = \int_{\Gamma_1} \frac{e^{zt} dt}{L(t) e^{\alpha_1 t^{\rho_1}}}.$$

Функция $f_1(z)$ — тоже решение уравнения (2.3.7), она — порядка ρ и ее индикатриса роста

$$h_{f_1}(\varphi) = \alpha \cos^\rho \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}), \quad h_{f_1}(\varphi) = \alpha \cos \rho \varphi \quad (-\frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq 0).$$

Показывается, на основании теоремы 2.1.5, что всякое другое решение $\psi(z)$ уравнения (2.3.7) обладает свойством: либо $h_\psi(\varphi) \geq h_f(\varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2\rho}$), либо $h_\psi(\varphi) \geq h_{f_1}(\varphi)$ ($-\frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

Поскольку $\cos^\rho \varphi > \cos \rho \varphi$ ($0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}$) и $h_F(\varphi) \leq \alpha \cos \rho \varphi$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\rho}$), то, следовательно, либо $h_\psi(\varphi) > h_F(\varphi)$ ($-\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < 0$), либо $h_\psi(\varphi) > h_F(\varphi)$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2\rho}$).

ГЛАВА III

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ ИЗ ЭКСПОНЕНТ

Рассматривается система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ в области G , в которой эта система не полна. Пусть

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Основная задача, исследуемая в главе, — изучение свойств последовательностей $\{P_n(z)\}$, сходящихся равномерно внутри области G .

Многие результаты взяты из монографии А. Ф. Леонтьева [37].

§ 1. Оценка полинома из экспонент с вещественными показателями

Предполагаем, что система $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна во всей плоскости. Это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty.$$

При этом условии всегда имеются функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа, которые имеют в точках λ_k простые нули (у $L(\lambda)$ могут быть и другие нули).

1.1. Общие результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.1. Пусть система $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна в односвязной области E . Если последовательность

$$P_m(z) = \sum_{\nu=1}^{p_m} a_\nu^{(m)} e^{\lambda_\nu z} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.1.1)$$

равномерно сходится внутри E , то существуют пределы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_\nu^{(m)} = a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.2. Пусть система $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна в односвязной области E . Если последовательность (3.1.1) и последовательность

$$Q_m(z) = \sum_{\nu=1}^{q_m} b_{\nu}^{(m)} e^{\lambda_{\nu} z} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

равномерно сходятся внутри E к одной и той же функции $P(z)$, то пределы соответствующих коэффициентов равны:

$$a_{\nu} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\nu}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{\nu}^{(m)} = b_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

При дополнительном условии, что E — выпуклая область, верно и обратное утверждение: если последовательности $\{P_m(z)\}$ и $\{Q_m(z)\}$ равномерно сходятся внутри E и пределы соответствующих коэффициентов равны, то эти последовательности сходятся к одной и той же функции.

Предложение 3.1.1 и первая часть предложения 3.1.2 доказываются просто. Вторая часть предложения 3.1.2 доказывается с помощью теоремы единственности (теорема 1.1.1 из гл. I).

1.2. Интерполирующая функция. Пусть $L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа, которая в точках λ_k имеет простые нули; $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$. Введем функцию

$$\omega_L(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) dt, \quad (3.1.2)$$

где α — параметр, C — замкнутый контур, на котором и вне которого $\gamma(t)$ — аналитическая функция.

Пусть

$$P(z) = \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k z}. \quad (3.1.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.3. Пусть $P(z)$ — полином (3.1.3). Имеют место формулы

$$a_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, \alpha, P)}{L'(\lambda_k)} \quad (k \geq 1),$$

$$a_k e^{\lambda_k t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P) e^{\mu t} d\mu}{L(\mu)} \quad (k \geq 1) \quad (3.1.4)$$

(при $k > n$ считаем $a_k = 0$), где C_k — окружность с центром в точке λ_k , внутри которой нет нулей $L(\mu)$, кроме λ_k .

В силу первой из формул, функцию (3.1.2) называем интерполирую-

щей функцией. В отличие от интерполирующей функции, рассмотренной ранее, она содержит параметр α .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.4. Пусть $\overline{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, причем $0 \in \overline{D}$, C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, C_α — сдвиг C на вектор α , $F(z)$ — функция, аналитическая на C_α и внутри C_α . Тогда функция (3.1.2) имеет оценку

$$|\omega_L(\mu, \alpha, F)| < A(\varepsilon) |e^{-\alpha\mu}| e^{[h(\varphi)+\varepsilon]r} \max_{u \in C_\alpha} |F(u)|, \quad \mu = re^{i\varphi}, \quad (3.1.5)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое и $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$.

1.3. Оценка полинома из экспонент при наличии плотности.

Пусть $\lambda_k > 0$, существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \sigma < \infty$$

(величина σ называется плотностью $\{\lambda_k\}$). Положим

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Эта функция обладает свойствами:

1) для $\lambda = re^{i\varphi}$, $\varphi \neq 0$, π существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} = \pi\sigma |\sin \varphi|;$$

2) имеются число p и числа r_n , $r_n \uparrow \infty$, $\frac{r_{n+1}}{r_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [\pi\sigma |\sin \varphi| - \varepsilon]r, \quad r_n - p \leq r \leq r_n + p, \quad n > N(\varepsilon).$$

Особенности функции $\gamma(t)$ лежат на отрезке $[-\pi\sigma i, \pi\sigma i]$ мнимой оси. Положим

$$P(z) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad Q(z) = \sum_{\nu=1}^n b_\nu e^{-\lambda_\nu z},$$

$$R(z) = P(z) + Q(z).$$

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $\{\lambda_k\}$ имеет плотность σ . Обозначим E односвязную область, которая внутри содержит вертикальный замкнутый отрезок длины $2\pi\sigma$ с серединой в начале координат, $E(z_0)$ — сдвиг E на вектор z_0 . Тогда при малом $\varepsilon_0 > 0$ верны оценки:

1) в угле $|\pi - \arg[z - (z_0 + \varepsilon_0)]| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$

$$|P(z)| < A \max_{z \in \bar{E}(z_0)} |R(z)|;$$

2) в угле $|\arg[z - (z_0 - \varepsilon_0)]| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$

$$|Q(z)| < A \max_{z \in \bar{E}(z_0)} |R(z)|,$$

где постоянные A и ε_0 не зависят от $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ и z_0 .

Утверждение 1) основано на формуле

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, R) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}$$

(она следует из (3.1.4) и оценки (3.1.5)). Здесь Γ — граница угла $|\arg \mu| < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Утверждение 2) основано на аналогичной формуле.

Положим

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_{\nu}^{(n)} e^{\lambda_{\nu} z}, \quad Q_n(z) = \sum_{\nu=1}^{q_n} b_{\nu}^{(n)} e^{-\lambda_{\nu} z},$$

$$R_n(z) = P_n(z) + Q_n(z) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из теоремы 3.1.1 вытекает

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет плотность σ и пусть $E(z_0)$ — область, содержащая внутри себя замкнутый вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$ с серединой в точке z_0 . Если последовательность $\{R_n(z)\}$ равномерно сходится внутри области $E(z_0)$, то:

1) последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < \beta$, $\beta > \operatorname{Re} z_0$, причем в любом угле $|\pi - \arg(z - z_1)| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} z_1 < \beta$, сходится равномерно;

2) последовательность $\{Q_n(z)\}$ сходится в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$, $\alpha < \operatorname{Re} z_0$, причем в любом угле $|\arg(z - z_2)| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} z_2 > \alpha$, сходится равномерно;

3) в силу 1) и 2), последовательность $\{R_n(z)\}$ сходится в полосе $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$, причем на любом компакте из этой полосы сходится равномерно.

Теорема 3.1.2 установлена в [29], при $R_n(z) = P_n(z)$ — также Каханом [81].

ТЕОРЕМА 3.1.3. Пусть $\{P_n(z)\}$ — последовательность из теоремы 3.1.2 и $P(z)$ — ее предельная функция. Тогда:

1) функция $P(z)$ регулярна в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < \beta$,

$\beta \leq b \leq \infty$, причем при $b < \infty$ в каждом замкнутом отрезке длины $2\pi\sigma$ прямой $\operatorname{Re} z = b$ у $P(z)$ имеется хотя бы одна особая точка;

2) в полуплоскости $\operatorname{Re} z < b$ имеет место представление

$$P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu < r_n} a_\nu e^{\lambda_\nu z},$$

причем сходимость в любом угле $|\pi - \arg(z - z_1)| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} z_1 < \beta$, — равномерная. Здесь $a_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} a_\nu^{(n)}$ и r_n — числа, фигурирующие в свойстве 2) функции $L(\lambda)$.

Полуплоскость $\operatorname{Re} z < b$ называется *полуплоскостью голоморфизма* функции $P(z)$, прямая $\operatorname{Re} z = b$ — *прямой голоморфизма* функции $P(z)$, число b — *абсциссой голоморфизма* функции $P(z)$.

Отметим еще следующие факты:

1) для того, чтобы последовательность $\{P_n(z)\}$ из теоремы 3.1.3 сходилась равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \gamma - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое, необходимо и достаточно, чтобы имели место оценки: для любого $\varepsilon > 0$

$$\left| a_\nu^{(n)} \right| < A(\varepsilon) e^{-(\gamma - \varepsilon)\lambda_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_n; n = 1, 2, \dots),$$

где $A(\varepsilon)$ не зависит от ν и n ;

2) для того, чтобы функция $P(z)$ — предельная для последовательности $\{P_n(z)\}$, была ограниченной в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \gamma - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$P(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad \operatorname{Re} z < \gamma. \quad (3.1.6)$$

Следующий результат представляет собой теорему о суммировании.

ТЕОРЕМА 3.1.4. Пусть $P(z)$ — предельная функция последовательности $\{P_n(z)\}$ из теоремы 3.1.3. Тогда

$$P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n a_\nu L_n(\lambda_\nu) e^{\lambda_\nu z}, \quad \operatorname{Re} z < b,$$

где $L_n(\lambda) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$. Сходимость в любом угле $|\pi - \arg(z - z_1)| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} z_1 < b$, — равномерная.

Введем величину

$$\delta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right|$$

— индекс конденсации последовательности $\{\lambda_k\}$.

Оказывается, что разность между абсциссой голоморфизма функции $P(z)$ из теоремы 3.1.3 и абсциссой сходимости ряда (3.1.6) не превосходит величины δ .

Для функции

$$\Phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu < r_n} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)}$$

(последовательность равномерно сходится внутри полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$) эта разность в точности равна δ .

В случае $\delta = \infty$ класс функций, представимых в форме пределов последовательностей $\{P_n(z)\}$ вида (3.1.1), шире класса функций, представимых рядами экспонент.

При $\delta = \infty$ имеются даже целые функции $P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ ($P_n(z)$ имеет вид (3.1.1), сходимости — равномерная на компактах), для которых соответствующие ряды всюду расходятся.

Пусть $H\{\lambda_n\}$ — класс целых функций $P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ ($P_n(z)$ имеют вид (3.1.1), сходимости — равномерная на компактах).

Справедливо утверждение:

Для того, чтобы ряды, соответствующие функциям $P(z) \in H\{\lambda_n\}$, сходились, необходимо и достаточно, чтобы индекс конденсации δ последовательности $\{\lambda_n\}$ был конечен.

1.4. Связь с интерполяцией. Рассмотрим класс A целых функций экспоненциального типа. Пусть $\lambda_k > 0$, и последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет плотность $\sigma < \infty$. Ставится задача об отыскании функции $f(z) \in A$, удовлетворяющей условиям

$$f(\lambda_k) = a_k \quad (k \geq 1), \quad (3.1.7)$$

где $\{a_k\}$ — заданная последовательность комплексных чисел. Если функция $f(z) \in A$, удовлетворяющая условию (3.1.7), существует, то необходимо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k} < \infty. \quad (3.1.8)$$

Верна

ТЕОРЕМА 3.1.5. *Для того, чтобы для данной последовательности $\{a_k\}$ имела функция $f(z) \in A$ со свойством (3.1.7), необходимо и достаточно, чтобы последовательность полиномов*

$$P_n(z) = \sum_{\lambda_\nu < r_n} \frac{a_\nu}{L'(\lambda_\nu)} e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

или последовательность

$$Q_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_\nu L_n(\lambda_\nu)}{L'(\lambda_\nu)} e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходились равномерно внутри некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < b$.

Доказательство достаточности просто: если $P(z)$ — предельная функция последовательности $\{P_n(z)\}$ и $\operatorname{Re} \alpha < b$, то функция

$$f(z) = \omega_L(z, \alpha, P)$$

искомая.

ТЕОРЕМА 3.1.6. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ фиксирована. Для того, чтобы интерполяционная задача (3.1.7) была всегда разрешима в классе A при любой последовательности $\{a_k\}$, удовлетворяющей естественному условию (3.1.8), необходимо и достаточно, чтобы индекс конденсации δ последовательности $\{\lambda_k\}$ был конечен.

Зная величины $\delta < \infty$ и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k} = a < \infty,$$

можно дать оценку для типа интерполирующей функции: при данном $\varepsilon > 0$ имеется интерполирующая функция $f(z)$, тип τ которой удовлетворяет условию

$$\tau \leq \begin{cases} \pi\sigma, & a + \delta < 0, \\ \sqrt{(a + \delta + \varepsilon)^2 + (\pi\sigma)^2}, & a + \delta \geq 0. \end{cases}$$

Существует в то же время последовательность $\{a_k\}$, такая, что не имеется интерполирующей функции, тип τ которой был бы меньше величины

$$\sqrt{(a + \delta)^2 + (\pi\sigma)^2}.$$

1.5. О целых функциях с нулями в точках измеримой последовательности. Пусть $F(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\gamma_F(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю, $h_F(\varphi)$ — индикатриса роста $F(z)$, $K_F(\varphi)$ — опорная функция наименьшего выпуклого замкнутого множества $\overline{D}_F$, содержащего все особенности $\gamma_F(t)$. Известно, что $K_F(\varphi) = h_F(-\varphi)$. Отсюда, в частности, следует, что прямая $\operatorname{Re} t = h_F(0)$ есть правая вертикальная опорная прямая к множеству $\overline{D}_F$.

ТЕОРЕМА 3.1.7. Пусть $\lambda_k > 0$ и $\{\lambda_k\}$ имеет плотность $\sigma < \infty$.

Если целая функция экспоненциального типа $F(z) \not\equiv 0$ обращается в нуль в точках λ_k ($k \geq 1$), то на правой опорной вертикальной прямой $\operatorname{Re} t = h_F(0)$ у функции $\gamma_F(t)$ имеются особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\sigma$.

Эта теорема доказывается на основе следующего утверждения (которое имеет и самостоятельный интерес):

Пусть

$$M_L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(t+z) dt$$

($\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, C охватывает вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$ с центром в начале координат). Пусть, далее, функция $f(z)$ регулярна на вертикальном интервале (a, b) , $\operatorname{Im}(b-a) > 2\pi\sigma$. Если точка a — особая для $f(z)$, то точка $a + \pi\sigma i$ — особая для функции $M_L(f)$; если же b — особая точка для $f(z)$, то $b - \pi\sigma i$ — особая точка для $M_L(f)$.

Сформулированное утверждение, в свою очередь, может быть доказано на основе теоремы 1.3.3 гл. I.

Из теоремы 3.1.7 можно вывести следующее заключение:

Пусть $\{\lambda_k\}$ имеет плотность σ и конечный индекс конденсации δ . Пусть, затем, $F(z)$ — целая функция экспоненциального типа. Если

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_k)|}{\lambda_k} < h_F(0) - \delta,$$

то на правой опорной прямой $\operatorname{Re} t = h_F(0)$ у функции $\gamma_F(t)$ имеются особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\sigma$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Если все особенности функции $\gamma_F(t)$ на правой опорной прямой $\operatorname{Re} t = h_F(0)$ расположены в отрезке длины, меньшей $2\pi\sigma$, то

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_k)|}{\lambda_k} \geq h_F(0) - \delta.$$

Здесь содержится следующий результат Бернштейна В. [74] (см. также [75], с. 185):

Если $\{\lambda_k\}$ имеет плотность σ , $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$ ($k \geq 1$) и если $h_F(\varphi) \leq a \cos \varphi + b |\sin \varphi|$, $|\varphi| \leq \alpha$, $b < \pi\sigma$, $a = h_F(0)$, то

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_k)|}{\lambda_k} = h_F(0).$$

Заметим, что при условии $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$ ($k \geq 1$) величина $\delta = 0$.

На основании теоремы 3.1.7 доказывается теорема о полноте системы экспонент в криволинейной полосе.

ТЕОРЕМА 3.1.8. Пусть $\lambda_k > 0$ и $\{\lambda_k\}$ имеет плотность σ . Тогда система $\{e^{\lambda_k z}\}$ полна в полосе

$$f(x) < y < f(x) + 2\pi\sigma, \quad z = x + iy, \quad -\infty < x < \infty,$$

где $y = f(x)$ — непрерывная кривая, определенная на всей вещественной оси.

Теорема доказана в [30], независимо и другим путем Левиным Б. Я. [26], а в случае прямолинейной полосы — Карлеманом [76].

Из теоремы 3.1.8 вытекает, что в теореме 3.1.2 требование, чтобы область $E(z_0)$ содержала в себе замкнутый вертикальный отрезок длины именно $2\pi\sigma$, является существенным.

1.6. Полиномы с показателями, имеющими конечную верхнюю плотность. Пусть

$$0 < \lambda_k \uparrow \infty, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \tau < \infty.$$

Величину τ называем верхней плотностью последовательности $\{\lambda_k\}$.

Положим, как и выше,

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$$

и для этой функции наряду с индикатрисой роста $h(\varphi)$ введем новую характеристику [31]

$$H(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| \frac{1}{L(re^{i\varphi})} \right|, \quad \varphi \neq 0, \pi.$$

Если $\{\lambda_k\}$ имеет плотность, то $H(\varphi) = -h(\varphi)$. В общем случае функция $H(\varphi)$ неограничена при $\varphi \rightarrow 0$.

При оценке $H(\varphi)$ при малых φ нам понадобится величина

$$L = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r) - n(r\xi)}{r}$$

(она была введена Байетт [72]), где $n(r)$ — число чисел λ_k , меньших r .

Имеем: $L \leq \tau$. Отсюда, если $\tau < \infty$, то $L < \infty$. Верно и обратное: если $L < \infty$, то и $\tau < \infty$. В случае, когда $\{\lambda_k\}$ имеет плотность, $L = 0$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 3.1.1. При любом $\varepsilon > 0$ верно соотношение

$$(L - \varepsilon) \ln \frac{1}{|\varphi|} < H(\varphi) < (L + \varepsilon) \ln \frac{1}{|\varphi|}, \quad 0 < |\varphi| < \varphi_0(\varepsilon). \quad (3.1.9)$$

Лемма приведена в [72], [73], а в [31] ранее было показано, что всегда

$$H(\varphi) < (\tau + \varepsilon) \ln \frac{1}{|\varphi|},$$

и при данном τ можно так подобрать $\{\lambda_k\}$ с

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \tau,$$

что при любом $\varepsilon > 0$ и малых $|\varphi|$ будет

$$H(\varphi) > (\tau - \varepsilon) \ln \frac{1}{|\varphi|}.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$, затем φ , $0 < \varphi < \varphi_0(\varepsilon)$, где $\varphi_0(\varepsilon)$ взято из неравенства (3.1.9). Обозначим $E(\varphi, \varepsilon)$ угол

$$|\arg(z - a)| < \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad a = \frac{L_1 \ln \frac{1}{\varphi}}{\cos \varphi}, \quad L_1 = L + \varepsilon.$$

Пусть $D(\varphi, \varepsilon, \delta)$ — объединение угла $E(\varphi, \varepsilon)$ и угла

$$|\arg z| < \frac{\pi}{4} - \delta, \quad \delta \geq 0.$$

ТЕОРЕМА 3.1.9. Пусть $\{\lambda_k\}$ имеет конечную верхнюю плотность τ . Пусть, далее, $\overline{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, ассоциированной по Борелю с $L(\lambda)$, E — область, содержащая $\overline{D}$, и

$$Q(z) = \sum_{\nu=1}^n b_\nu e^{-\lambda_\nu z}.$$

Тогда имеется постоянная A_φ , не зависящая от $Q(z)$, такая, что

$$|Q(z)| < A_\varphi \max_{t \in E} |Q(t)|, \quad z \in D(\varphi, \varepsilon, \delta).$$

Следствием этой теоремы является следующая

ТЕОРЕМА 3.1.10. Пусть последовательность

$$Q_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} b_\nu^{(n)} e^{-\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

равномерно сходится внутри области $G \supset \overline{D}$. Тогда она равномерно сходится внутри некоторой области $G\{Q_n\}$, обладающей свойством:

область $G\{Q_n\}$ содержит область G , угол $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$, а также область $G(\alpha, x_0) = \{z = x + iy : |y| < e^{\alpha x}, x > x_0\}$ при любом α , $0 < \alpha < \frac{1}{L}$, и любом достаточно большом x_0 .

Теорема доказана при замене L на τ в [31], в общем случае — в [73].

Если $L > 0$, то имеется последовательность $\{Q_n(z)\}$, которая сходится равномерно в области $G \supset \bar{D}$ и для которой соответствующая область $G\{Q_n\}$ обладает следующим свойством: она не содержит в себе область $G(\beta, x_0)$, если $\beta > \frac{1}{L}$, и x_0 — любое.

Возникает вопрос: при каких дополнительных условиях на $\{\lambda_k\}$ область $G\{Q_n\}$ всегда содержит в себе некоторую полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$.

Ответ состоит в следующем:

Для того, чтобы из равномерной сходимости $\{Q_n(z)\}$ в области $G \supset \bar{D}$ вытекала всегда ее равномерная сходимость внутри некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$, необходимо и достаточно, чтобы индикатриса роста $H(\varphi)$ функции $\frac{1}{L(\lambda)}$ была ограниченной: $H(\varphi) < M$.

Пусть $\Delta_\sigma(x)$ — круг $\{t : |t - x| < \sigma h\}$, $n_\sigma(x)$ — число точек λ_k в круге $\Delta_\sigma(x)$. Красичков И. Ф. [13] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1.11. Для того, чтобы было $H(\varphi) < M$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{\varepsilon}^1 \frac{n_\sigma(x)}{\sigma} d\sigma < \infty.$$

Из теоремы 3.1.9 можно вывести еще следующее утверждение:

Пусть $Q(z)$ — предельная функция последовательности $\{Q_n(z)\}$, указанной в теореме 3.1.10, — целая. Если в горизонтальной полосе S , содержащей область $\bar{D}(\alpha_0)$ ($\bar{D}(\alpha_0)$ — смещение $\bar{D}$ на вектор α),

$$|Q(z)| < H(x), \quad z = x + iy,$$

где $H(x)$ — невозрастающая функция, то в полосе $S_1 = \{z : |\operatorname{Im} z| < \gamma\}$

$$|Q(z)| < H(x - q), \quad q > 0,$$

где q зависит от полос S и S_1 , но не зависит от $Q(z)$ и $H(x)$.

1.7. Оценки целых функций с помощью оценок на оси. Отметим результаты, когда поведение целой функции, представленной в виде последовательности полиномов из экспонент, оценивается через поведение этой функции на вещественной оси.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.5. Пусть $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, причем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \tau < \infty.$$

Если последовательность

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_{\nu}^{(n)} e^{\lambda_{\nu} z} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.1.10)$$

сходится на вещественной оси и на вещественной оси

$$|P_n(x)| < A \exp(\alpha e^{\rho x}) \quad (n \geq 1)$$

(A и α не зависят от n), причем $\rho < \frac{1}{2\tau}$, то тогда $\{P_n(z)\}$ сходится во всей плоскости (равномерно внутри) и в любой горизонтальной полосе

$$|P_n(z)| < B \exp(\beta e^{\rho x}), \quad z = x + iy, \quad |y| < h,$$

где B и β не зависят от n (они зависят от h).

С помощью замены $t = e^{\rho z}$ имеем:

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_{\nu}^{(n)} t^{\mu_{\nu}} = R_n(t), \quad \mu_{\nu} = \frac{\lambda_{\nu}}{\rho}.$$

Тогда применением преобразования

$$\gamma_n(u) = \int_0^{+\infty} R_n(t) e^{-ut} dt = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_{\nu}^{(n)} \Gamma(\mu_{\nu} + 1) u^{-(\mu_{\nu} + 1)},$$

$$\tilde{\gamma}_n(s) = \gamma_n(e^s) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_{\nu}^{(n)} \Gamma(\mu_{\nu} + 1) e^{-(\mu_{\nu} + 1)s},$$

доказательство сводится к исследованию последовательности $\tilde{\gamma}_n(s)$, используя теорему 3.1.9.

Если выполняется более сильное условие — $\{\lambda_k\}$ имеет плотность τ , то в любой горизонтальной полосе

$$|P_n(z)| < A(\varepsilon) \exp \left[\left(\frac{\alpha}{\cos \pi \tau \rho} + \varepsilon \right) e^{\rho x} \right], \quad n \geq 1,$$

где $A(\varepsilon)$ не зависит от n и $\varepsilon > 0$ — любое.

Отметим следующее дополнение к предложению 3.1.5:

Пусть выполнены условия теоремы 3.1.5 и пусть предельная функция последовательности $\{P_n(z)\}$ на вещественной оси удовлетворяет условию

$$|P(x)| < A_1 \exp(\alpha_1 e^{\rho_1 x}), \quad \rho_1 < \rho. \quad (3.1.11)$$

Тогда в любой горизонтальной полосе

$$|P(z)| < A_2 \exp(\alpha_2 e^{\rho_1 x}), \quad \alpha_2 = \alpha_1 \gamma,$$

где γ не зависит от α_1 и $P(z)$.

Если вместо условия (3.1.11) выполняется более сильное условие

$$|P(x)| < C e^{\mu x}, \quad \mu \geq 0, \quad x > x_0,$$

то

$$P(z) = \sum_{\lambda_\nu \leq \mu} a_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad a_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} a_\nu^{(n)},$$

а при $\mu < \lambda_1$ имеем $P(z) \equiv 0$.

В этом последнем утверждении содержится следующая теорема единственности из работы Евграфова М. А., Чегис И. А. [7]:

Пусть

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z},$$

причем $\lambda_k > 0$,

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{C}{k^{2+\varepsilon_0}}, \quad \varepsilon_0 > 0 \quad (k \geq 1), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Если

$$|F(x)| < C < \infty, \quad -\infty < x < \infty,$$

то $F(z) \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 3.1.12. Пусть λ_k , $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, являются нулями целой функции $L(\lambda) \not\equiv 0$ экспоненциального типа, такой, что

$$|L(\pm ir)| \leq B e^{Ar}.$$

Пусть, далее, последовательность (3.1.10) равномерно сходится на компактах к функции $P(z)$. Если в любой горизонтальной полосе

$$|P(z)| < \exp[o(e^{\frac{\pi}{2A}x})], \quad x \rightarrow +\infty, \quad z = x + iy,$$

а на вещественной оси

$$|P(x)| < e^{\mu x}, \quad x > x_0,$$

то

$$P(z) = \sum_{\lambda_\nu \leq \mu} a_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad a_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} a_\nu^{(n)},$$

а при $\mu < \lambda_1$ имеем $P(z) \equiv 0$.

С помощью теоремы 3.1.12 доказана следующая теорема относительно

гармонических функций.

ТЕОРЕМА 3.1.13. Пусть $u(r, \varphi, x)$ — гармоническая функция в цилиндре

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < x < \infty.$$

Если выполнены условия

$$u(a, \varphi, x) = 0, \quad \max_{r, \varphi} |u(r, \varphi, x)| < \exp \left[o \left(e^{\frac{\pi|x|}{2a}} \right) \right],$$

$$\left| \frac{\partial u(a, \varphi, x)}{\partial r} \right| < C e^{\mu|x|}, \quad \mu < \frac{\lambda_{01}}{a},$$

где λ_{01} — наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_0(x)$, то

$$u(r, \varphi, x) \equiv 0.$$

При условиях

$$u(a, \varphi, x) = 0, \quad \left| \frac{\partial u(a, \varphi, x)}{\partial r} \right| < C,$$

$$\max_{r, \varphi} |u(r, \varphi, x)| < C_1 \exp e^{\frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)}}, \quad \varepsilon > 0,$$

теорема доказана в [7], а в случае, когда вместо последнего условия выполняется условие

$$\max_{r, \varphi} |u(r, \varphi, x)| < C_1 \exp e^{\frac{\pi|x|}{2a} - (1+\varepsilon) \ln|x|}, \quad \varepsilon > 0,$$

— в работе [66].

1.8. Квазианалитические классы функций на кривой.

Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая. Рассмотрим точку $z \in \Gamma$. По определению, производная функции $f(z)$ в точке z на Γ есть

$$f'(z) = \lim_{\substack{t \rightarrow z \\ t \in \Gamma}} \frac{f(t) - f(z)}{t - z}.$$

Тогда $f''(z) = (f'(z))'$ и т.д.

Пусть $C \{m_n\}$ — класс бесконечно дифференцируемых на Γ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq K_f^k m_k \quad (k \geq 0), \quad z \in \Gamma.$$

Класс $C \{m_n\}$ назовем квазианалитическим, если из того, что $f, \varphi \in C \{m_n\}$ и $f^{(n)}(z_0) = \varphi^{(n)}(z_0)$ ($n \geq 0$), $z_0 \in \Gamma$, следует $f(z) \equiv \varphi(z)$.

ТЕОРЕМА 3.1.14. Каждое из следующих условий является достаточным для квазианалитичности класса $C\{m_n\}$ на кусочно-гладкой дуге Γ :

- 1) если $\beta_n = \inf_{k \geq n} m_k^{\frac{1}{k}}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty$;
- 2) если $T(r) = \sup_{k \geq 0} \frac{r^k}{m_k}$, то $\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty$.

Упоминание об этой теореме (без доказательства) имеется в работе Коревара [82].

Условия 1) и 2) — необходимые и достаточные для квазианалитичности класса $C\{m_n\}$ на отрезке вещественной оси $[a, b]$.

Условие 1) — условие Карлемана, условие 2) — условие Островского.

1.9. Теорема о стирании особенностей. На основе теоремы 3.1.14 доказывается следующая

ТЕОРЕМА 3.1.15. Пусть Γ — гладкая дуга, удовлетворяющая условию: в каждой своей точке $z_0 = r_0 e^{i\psi_0}$ она пересекается с лучом $\arg z = \psi_0$ под углом, меньшим $\pi/4$. Положим $R_0 = \min_{z \in \Gamma} |z|$, $R = \max_{z \in \Gamma} |z|$. Пусть, далее,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-p_k}, \quad |z| > R,$$

где p_k — целые положительные числа. Положим $\{\mu_k\} = \{k\}_1^{\infty} \setminus \{p_k\}$. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-1} = \infty$ и функция $f(z)$ регулярна и ограничена при $|z| > R_0$ вне дуги Γ , то $f(z)$ регулярна при $|z| > R_0$.

Угол $\pi/4$ здесь появился в силу следующего обстоятельства: если

$$L_0(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_k^2}\right), \quad \frac{1}{m_n} = \min_{r>0} \frac{|L_0(re^{i\varphi_0})|}{r^n} \quad (n \geq 0),$$

то при $\varphi_0 > \pi/4$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty$$

— этот факт и был использован при доказательстве теоремы 3.1.15.

1.10. О росте целой функции экспоненциального типа на последовательности точек. Известна теорема (см., например, [75], с. 109):

Пусть $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ вещественной оси, причем вблизи точки b слева она не является постоянной. Тогда для функции

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} d\sigma(t)$$

выполняется равенство

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(\lambda)|}{\lambda} = b.$$

Известна также следующая теорема (см. [75], с. 200):

Пусть $f(z)$ — функция, регулярная и экспоненциального типа в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |f(iy)|}{1+y^2} dy < \infty.$$

Если $0 < \lambda_n$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ ($n \geq 1$), $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(\lambda_n)|}{\lambda_n} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x)|}{x}.$$

Из этих двух результатов получаем, что если

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} d\sigma(t),$$

причем $\sigma(t)$ не является постоянной вблизи точки b , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n} = b, \quad 0 < \lambda_n, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty.$$

Следующая теорема обобщает этот результат.

ТЕОРЕМА 3.1.16. Пусть C — конечная гладкая дуга, удовлетворяющая условию: угол между касательной к C в любой точке и вещественной осью по абсолютной величине меньше $\pi/4$. Пусть, далее, $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на C , не равная постоянной вблизи правого конца b дуги C . Тогда для функции

$$F(\lambda) = \int_C e^{\lambda t} d\sigma(t)$$

выполняется равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n} = \operatorname{Re} b, \quad 0 < \lambda_n, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty.$$

Теорема доказывается с помощью теоремы 3.1.15 и теоремы 3.1.7.

1.11. Полнота системы экспонент на дуге. Из теоремы 3.1.16 вытекает следующий результат о полноте.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.6. Пусть $\gamma : y = f(x)$ — непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких дуг $\gamma_s : y = f_s(x)$, причем $|f'_s(x)| < 1$. Если $0 < \lambda_n, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ ($n \geq 1$), $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, то система $\{e^{\lambda_n z}\}$ полна на γ в метрике C .

В [82] показано, что для полноты $\{e^{\lambda_n z}\}$ на кусочно гладкой кривой γ достаточно лишь условия $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$. С другой стороны, Коревар [82], Маллявен и Сиддики [84] показали, что если γ — аналитическая дуга и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, то система $\{e^{\lambda_n z}\}$ на γ не полна.

§ 2. Полиномы из экспонент с комплексными показателями

2.1. Оценка полинома в случае $\sum |\lambda_n|^{-1} < \infty$. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} < \infty.$$

Тогда система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна ни на каком отрезке, в частности, ни на каком отрезке $[a, b]$ вещественной оси. Поэтому имеется функция

$$L(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} d\sigma(t)$$

($\sigma(t)$ — ограниченной вариации на $[a, b]$), не равная тождественно нулю, для которой точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — нули.

Этой функции соответствует следующая интерполирующая функция

$$\omega_L(\mu, \alpha, f) = \int_a^b d\sigma(t) \left(\int_0^t f(t + \alpha - \xi) e^{\mu \xi} d\xi \right).$$

Обозначим $R(z)$ конечную линейную комбинацию из экспонент $e^{\lambda_n z}$, $P(z)$ — сумму слагаемых из $R(z)$, соответствующих λ_n , у которых $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, $Q(z)$ — сумму остальных слагаемых. С помощью интерполирующей функции устанавливается

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-1} < \infty$ и λ_n ($n \geq 1$) лежат в углах

$$|\arg \lambda| \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \quad |\pi - \arg \lambda| \leq \varphi_0. \quad (3.2.1)$$

Если $[a, b]$ — отрезок вещественной оси, то имеют место неравенства:

$$1) \text{ в угле } |\pi - \arg(z - b_1)| \leq \psi_0 < \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \quad a < b_1 < b,$$

$$|P(z)| \leq A \max_{t \in [a, b]} |R(t)|;$$

$$2) \text{ в угле } |\arg(z - a_1)| \leq \psi_0, \quad a < a_1 < b,$$

$$|Q(z)| \leq A \max_{t \in [a, b]} |R(t)|,$$

где постоянная A не зависит от $P(z)$, $Q(z)$ и $R(z)$.

В случае вещественных λ_n теорема доказана Шварцем Л. [88].

Пусть $R_n(z)$ ($n \geq 1$) — конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_n z}$, $P_n(z)$ — сумма слагаемых из $R_n(z)$, соответствующих λ_n , у которых $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, $Q_n(z)$ — сумма слагаемых с $\operatorname{Re} \lambda_n < 0$.

Следствием теоремы 3.2.1 является следующий результат:

Пусть последовательность $\{R_n(z)\}$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Тогда последовательность $\{P_n(z)\}$ равномерно сходится в любом угле

$$|\pi - \arg(z - b_1)| \leq \psi_0 < \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \quad a < b_1 < b,$$

а последовательность $\{Q_n(z)\}$ равномерно сходится в любом угле

$$|\arg(z - a_1)| \leq \psi_0, \quad a < a_1 < b.$$

При вещественных λ_n этот результат установлен в [88], в случае комплексных λ_n , лежащих в угле $|\arg \lambda| \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, в работе Джрбашяна М. М. [4].

Дополнением к теореме 3.2.1 будет следующее утверждение:

В условиях теоремы 3.2.1 область существования предельной функции $R(z)$ последовательности $\{R_n(z)\}$ выпукла. В этой области

$$R(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_n| < r_n} a_n e^{\lambda_n z},$$

где a_ν — пределы при $n \rightarrow \infty$ соответствующих коэффициентов.

Пусть теперь $\lambda_\nu > 0$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-1} < \infty$ и функция $P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ — целая. Можно утверждать следующее:

1) если на вещественной оси

$$|P(x)| \leq H(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.2.2)$$

где $H(x)$ — положительная неубывающая функция, то для данных $\varepsilon > 0$ и $h > 0$ имеется постоянная, не зависящая от $P(z)$ и $H(z)$, такая, что в полосе $\{z : |y| \leq h \ (z = x + iy)\}$ имеет место оценка

$$|P(z)| < AH(x + \varepsilon), \quad |y| \leq h;$$

2) если выполняется условие (3.2.2) и

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ имеется постоянная A , не зависящая от $P(z)$ и $H(x)$, такая, что во всей плоскости

$$|P(z)| < AH(x + \delta + \varepsilon).$$

2.2. О квазианалитической непродолжаемости. В силу теоремы 3.1.3, в случае

$$0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0,$$

представление

$$P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu < r_n} a_\nu e^{\lambda_\nu z} \quad (3.2.3)$$

имеет место либо во всей плоскости, либо в полуплоскости $\operatorname{Re} z < b$, в последнем случае прямая $\operatorname{Re} z = b$ сплошь состоит из особых точек функции $P(z)$, значит, функция $P(z)$ аналитически не продолжается через прямую голоморфизма $\operatorname{Re} z = b$. Оказывается, при условии $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ можно высказать более сильное утверждение: функция $P(z)$ и квазианалитически не продолжатся через прямую $\operatorname{Re} z = b$.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$. Будем говорить, что $f(z)$ продолжается квазианалитически через прямую $\operatorname{Re} z = a$, если имеется горизонтальный отрезок $\Delta : \operatorname{Im} z = y_0, \alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta$ ($\alpha < a < \beta$) и на нем бесконечно дифференцируемая функция $F(z)$ из некоторого квазианалитического класса $C\{m_n\}$, такая, что

$$F(z) = f(z), \quad z \in \Delta, \quad \operatorname{Re} z < a.$$

Если продолжения в указанном смысле нет, будем говорить, что функция $f(z)$ через прямую $\operatorname{Re} z = a$ квазианалитически не продолжается.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Пусть $\lambda_n > 0$ ($n \geq 1$), $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ и функция (3.2.3) имеет конечную абсциссу голоморфизма. Тогда функция $P(z)$ квазианалитически не продолжается через прямую $\operatorname{Re} z = b$.

Доказательство основано на следующем результате:

Пусть система $\{e^{\mu_n x}\}$ не полна ни на каком отрезке вещественной оси. Если $f(x)$ аппроксимируется с любой точностью линейными комбинациями экспонент из $\{e^{\mu_n x}\}$ внутри интервала (a, b) и принадлежит некоторому квазианалитическому классу $C\{m_n\}$ на интервале (c, d) , причем $c < b < d$, то $f(x)$ аппроксимируется с любой точностью линейными комбинациями экспонент из $\{e^{\mu_n x}\}$ внутри интервала (c, d) .

Интересно отметить, что если

$$0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty,$$

то функция

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu < r_n} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)}, \quad L(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right)$$

(сходимость имеет место в $\operatorname{Re} z < 0$, прямая $\operatorname{Re} z = 0$ — прямая голоморфизма для $f(z)$), продолжается квазианалитически через прямую голоморфизма (продолжается на всю вещественную ось).

2.3. Случай, когда система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна на вертикальном отрезке. Пусть $|\arg \lambda_\nu| \leq \varphi_0 < \pi/2$ ($\nu \geq 1$) и система $\{e^{\lambda_\nu z}\}$ не полна на отрезке мнимой оси длины $2q$. Пусть, далее, $[ai, bi]$ — отрезок мнимой оси длины $b - a \geq 2q$, l_1 — луч: $\arg [z - (b - \varepsilon_0)i] = \pi/2 + \varepsilon$, l_2 — луч: $\arg [z - (a + \varepsilon_0)i] = -(\pi/2 + \varepsilon)$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, G — область, ограниченная лучами l_1 и l_2 и отрезком $[(a + \varepsilon_0)i, (b - \varepsilon_0)i]$, $P(z)$ — конечная линейная комбинация экспонент из системы $\{e^{\lambda_n z}\}$.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Имеется постоянная A , не зависящая от $P(z)$, такая, что

$$|P(z)| \leq A \max_{t \in [ai, bi]} |P(t)|, \quad z \in G.$$

Ясно, что оценка имеет место и на границе области G .

Это — не простая теорема.

Не будем приводить очевидных результатов относительно области сходимости $\{P_n(z)\}$, если $\{P_n(z)\}$ равномерно сходится на $[ai, bi]$.

2.4. Общий случай, когда показатели лежат в углах. Пусть λ_ν ($\nu \geq 1$) лежат в углах (3.2.1). Пусть, затем, $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ обозначают те же линейные комбинации экспонент, что и в п. 2.1, и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty.$$

При этом условии система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна во всей плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.1. Пусть система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна в области E , звездообразной относительно начала координат. Тогда при некотором $a > 0$ имеют место неравенства:

$$1) \text{ в угле } |\pi - \arg(z + a)| \leq \psi_0 < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$$

$$|P(z)| \leq A \max_{u \in \bar{E}} |R(u)|;$$

$$2) \text{ в угле } |\arg(z - a)| \leq \psi_0$$

$$|Q(z)| \leq A \max_{u \in \bar{E}} |R(u)|;$$

3) при $\varepsilon_0 < \pi/4$ в качестве a можно взять любое положительное число. Здесь A — постоянная, не зависящая от $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$.

Пусть

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_n z} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.2.4)$$

Если $\{P_n(z)\}$ сходится равномерно в $\bar{E}$, то, в силу утверждения 1), она равномерно сходится в соответствующем угле.

Предположим, что последовательность (3.2.4) равномерно сходится в угле $|\pi - \arg(z + a_0)| \leq \psi_0 < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ к функции $P(z)$. Пусть T — горизонтальная звезда голоморфности функции $P(z)$ (точка $z_0 \in T$, если функцию $P(z)$ можно аналитически продолжить в точку z_0 по горизонтали из указанного угла). Речь пойдет о представлении $P(z)$ в звезде T .

Положим

$$S_q(z, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{a_\nu^{(n)}}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_\nu)} \left(\int_0^q e^{-\xi \alpha \lambda_\nu} d\xi \right) e^{\lambda_\nu z}, \quad \alpha > 0, \quad q > 0.$$

Оказывается, функция $S_q(z, \alpha)$ — целая относительно переменного z .

ТЕОРЕМА 3.2.4. Пусть K — компакт, $K \subset T$, S — расстояние от K до границы звезды T . Тогда при $\alpha < 2\delta/\pi$ на компакте K равномерно

$$\lim_{q \rightarrow \infty} S_q(z, \alpha) = P(z).$$

Это — распространение на последовательности полиномов из экспонент известного метода Рисса М. суммирования ряда Дирихле.

2.5. Полиномы с произвольными комплексными показателями. Предположим, что λ_ν ($\nu \geq 1$) — простые нули целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$, причем других нулей у $L(\lambda)$ нет. Пусть, затем, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\bar{D}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, $\{\psi_k(t)\}$ — система, биортогональная к системе $\{e^{\lambda_\nu z}\}$ и построенная с помощью функции $L(\lambda)$. Система $\{\psi_k(t)\}$, согласно теореме 1.1.2 гл. I, полна вне $\bar{D}$ в классе функций, аналитических вне $\bar{D}$ и равных нулю в бесконечности. В силу этого,

$$\frac{1}{t} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{q_m} \alpha_k^{(m)} \psi_k(t), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}.$$

Пусть последовательность (3.2.4) равномерно сходится к $P(z)$ внутри области $E \supset \bar{D}$ и пусть $G_0(P)$ — следующая (связная) область: ей принадлежит начало координат и всякая другая точка α , такая, что $\bar{D}(\alpha)$ (смещение $\bar{D}$ на вектор α) лежит в области регулярности $P(z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.2. Внутри области $G_0(P)$ равномерно

$$P(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{q_m} \alpha_k^{(m)} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)}.$$

Пусть выполнено условие

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty. \quad (3.2.5)$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)}, \quad (3.2.6)$$

при $\delta \geq 0$ сходится во всякой точке $\alpha \in G_0(P)$, удаленной от границы области $G_0(P)$ на расстояние $\rho(\alpha) > \delta$, а при $\delta < 0$ сходится в круге $|z - \alpha| < |\delta|$ с центром в любой точке $\alpha \in G_0(P)$.

Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$. Если выполнено условие

$$|L'(\lambda_n)| > e^{[h(\varphi_n) - \varepsilon]r_n}, \quad \lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}, \quad n \geq n_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \text{ — любое,}$$

то ряд (3.2.6) сходится к функции $P(z)$ во всяком случае в области

$$Q = \bigcup_{\alpha \in G_0(P)} \overline{D}(\alpha).$$

Эта область — выпуклая.

Пусть $H\{\lambda_n\}$ — класс целых функций $P(z)$, представленных в виде пределов последовательностей (3.2.4), сходящихся в области $E \supset \overline{D}$. Тогда, для того, чтобы соответствующие ряды (3.2.6) сходились, необходимо и достаточно, чтобы величина δ , определяемая формулой (3.2.5), была конечной.

В том случае, когда

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right)$$

(у $L(\lambda)$ могут быть и кратные нули), последние утверждения формулируются иначе. С этой целью возьмем три угла G_1, G_2, G_3 с вершиной в начале координат, которые удовлетворяют условиям: они покрывают плоскость (кроме начала координат), любые два соседние угла имеют общую часть (в виде угла), каждый угол имеет раствор меньше π . Положим

$$L_\nu(\lambda) = \prod_{\lambda_k \in G_\nu} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right) \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

(у функции $L_\nu(\lambda)$ нули простые). Введем величины

$$\delta_\nu = \overline{\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda_n \in G_\nu}}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{L'_\nu(\lambda_n)} \right| \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.3. *Для того, чтобы функции $P(z) \in H\{\lambda_n\}$ представлялись рядами (3.2.6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\delta_\nu < \infty$ ($\nu = 1, 2, 3$).*

Отметим еще один результат.

Пусть $|\lambda| = r_n \uparrow \infty$ — окружности, на которых

$$|L(\lambda)| > e^{-h|\lambda|}, \quad h > 0. \quad (3.2.7)$$

Пусть, далее, Γ — путь, начинающийся и оканчивающийся в ∞ (лежащий в своей бесконечной части в угле раствора, меньшего π), на

котором также выполняется оценка (3.2.7), причем длина части Γ , лежащей в круге $|\lambda| \leq r$, есть, например, $O(r^2)$; G — область, ограниченная контуром Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.4. *Если $P(z)$ — предельная функция последовательности (3.2.4), является целой функцией, то последовательность*

$$Q_m(z) = \sum_{|\lambda_\nu| < r_m} a_\nu e^{\lambda_\nu z} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

сходится во всей плоскости (равномерно внутри). Если последовательность (3.2.4) сходится во всей плоскости (равномерно внутри), то последовательность

$$\tilde{P}_n(z) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \lambda_\nu \in G}}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

также сходится во всей плоскости (равномерно внутри).

Отметим, что окружности и путь Γ , на которых имеет место оценка (3.2.7), всегда имеются. В частности, каждую из бесконечных ветвей контура Γ можно выбрать лежащей (в своей бесконечной части) в сколь угодно малом угле.

Из последнего предположения вытекает утверждение:

Пусть $P(z)$ — предельная функция последовательности (3.2.4), является целой. Тогда во всей плоскости (равномерно внутри)

$$P(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < r_m} a_\nu e^{\lambda_\nu z}.$$

2.6. Полиномы с показателями, являющимися нулями функции вполне регулярного роста. Пусть точки λ_ν ($\nu \geq 1$) — нули целой функции экспоненциального типа и вполне регулярного роста $L(\lambda)$. Пусть, как и ранее, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, $\bar{D}(\alpha)$ — смещение $\bar{D}$ на вектор α .

ТЕОРЕМА 3.2.5. *Пусть α_1, α_2 — произвольные фиксированные точки, D_1 и D_2 — области, такие, что $D_1 \supset \bar{D}(\alpha_1)$, $D_2 \supset \bar{D}(\alpha_2)$. Тогда в некоторой области G , содержащей множество*

$$\bigcup_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \bar{D}(\alpha),$$

для полинома $P(z) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{\lambda_\nu z}$ имеет место оценка

$$|P(z)| \leq N \max(M_1, M_2), \quad z \in G, \quad M_j = \max_{t \in \overline{D}_j} |P(t)| \quad (j = 1, 2),$$

где N не зависит от $P(z)$ (зависит от D_1, D_2 и $L(\lambda)$).

Отметим следствия из этой теоремы.

Введем множество Q_0 . Считаем, что $\alpha \in Q_0$, если имеется область $E \supset \overline{D}(\alpha)$, в которой последовательность (3.2.4) ограничена.

Положим

$$A_0 = \bigcup_{\alpha \in Q_0} \overline{D}(\alpha).$$

Утверждается, что A_0 — выпуклая область.

Введем множество Q_c . Будем считать, что $\alpha \in Q_c$, если имеется область $E \supset \overline{D}(\alpha)$, в которой последовательность (3.2.4) сходится равномерно. Положим

$$A_c = \bigcup_{\alpha \in Q_c} \overline{D}(\alpha).$$

Утверждается, что A_c — выпуклая область.

Введем еще следующее связное множество Q_p : точка $\alpha \in Q_p$, если имеется область $E \supset \overline{D}(\alpha)$, в которой предельная функция $P(z)$ последовательности (3.2.4) (последовательность (3.2.4) предполагается сходящейся в некоторой области $E_0 \supset \overline{D}(\alpha_0)$) регулярна. Положим

$$A_p = \bigcup_{\alpha \in Q_p} \overline{D}(\alpha).$$

Утверждается, что A_p — выпуклая область и во всей области A_p

$$P(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu < r_m} a_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad a_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} a_\nu^{(n)}.$$

Последний результат установлен (другим методом) И. Ф. Красичковым-Терновским [16].

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

то A_p — область регулярности функции $P(z)$. Следовательно, в этом случае область регулярности — выпуклая область.

2.7. О сходимости подпоследовательностей. Из теоремы 3.1.2 следует, что когда последовательность $R_n(z)$ сходится в полосе, подпоследовательности $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ также сходятся в этой полосе. Это явление можно распространить и на случая произвольных показателей.

Приведем ряд результатов.

Пусть $H\{\mu_n\}$ — класс целых функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} a_{\nu}^{(n)} e^{\mu_{\nu} z}.$$

Предположим сначала, что λ_k ($k \geq 1$) — простые нули некоторой целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$ (других нулей у $L(\lambda)$ нет) и

$$L(\lambda) = L_1(\lambda) L_2(\lambda),$$

где $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ — функции экспоненциального типа. Нули $L_1(\lambda)$ обозначим λ'_n ($n \geq 1$), нули $L_2(\lambda)$ обозначим λ''_n ($n \geq 1$). Из работы Напалкова В. В. [47] вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2.6. *Для того, чтобы выполнялось соотношение*

$$H\{\lambda_n\} = H\{\lambda'_n\} + H\{\lambda''_n\}, \quad (3.2.8)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1 = L_1(\lambda)\varphi_1(\lambda) + L_2(\lambda)\varphi_2(\lambda), \quad \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda) \in [1, \infty).$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда λ_n удовлетворяют лишь условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

В этом случае не всегда существует функция экспоненциального типа $L(\lambda)$, для которой λ_n ($n \geq 1$) были бы простыми нулями и у $L(\lambda)$ не было бы других нулей. Пусть $\{\lambda_n\} = \{\lambda'_n\} \cup \{\lambda''_n\}$. Возьмем три угла G_1 , G_2 , G_3 с вершинами в начале координат, которые удовлетворяют условиям: они покрывают всю плоскость (кроме начала координат), любые два соседних угла имеют общую часть (а виде угла), каждый угол имеет раствор меньше π .

Положим

$$L_{\nu,1}(\lambda) = \prod_{\lambda'_n \in G_{\nu}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda'_n)^2}\right), \quad L_{\nu,2}(\lambda) = \prod_{\lambda''_n \in G_{\nu}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda''_n)^2}\right), \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Имеет место утверждение [41]:

ТЕОРЕМА 3.2.7. *Для того, чтобы выполнялось соотношение (3.2.8), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$1 = L_{\nu,1}(\lambda)\varphi_{\nu,1}(\lambda) + L_{\nu,2}(\lambda)\varphi_{\nu,2}(\lambda), \\ \varphi_{\nu,1}(\lambda), \varphi_{\nu,2}(\lambda) \in [1, \infty) \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Если эти условия выполняются и $P(z) \in H(\lambda_\nu)$ представляется в виде

$$P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z},$$

то соответствующие функции $P_1(z)$, $P_2(z)$ из $H\{\lambda'_n\}$ и $H\{\lambda''_n\}$ представляются в виде

$$P_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \lambda_\nu \in \{\lambda'_n\}}}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z}, \quad P_2(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \lambda_\nu \in \{\lambda''_n\}}}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z}.$$

Заметим, что условие

$$1 = L_1(\lambda)\varphi_1(\lambda) + L_2(\lambda)\varphi_2(\lambda),$$

где все участвующие функции экспоненциального типа, эквивалентно (см. работу Хёрмандера [30]) условию: имеются постоянные $a > 0$, $A > 0$, такие, что при любых λ

$$|L_1(\lambda)| + |L_2(\lambda)| > Ae^{-a|\lambda|}.$$

Рассмотрим случай, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

В этом случае максимальная область D , внутри которой последовательность

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится равномерно, — выпукла. Пусть D — выпуклая область и $H(\lambda_n, D)$ — класс функций $F(z)$, аналитических в D , которые в D представляются в виде

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z}, \quad z \in D$$

(сходимость внутри — равномерная).

Имеет место следующее утверждение, доказанное Тимофеевым А. Ю. [65].

ТЕОРЕМА 3.2.8. Пусть $\{\lambda_n\} = \{\lambda'_n\} \cup \{\lambda''_n\}$. Чтобы имело место соотношение

$$H(\{\lambda_n\}, D) = H(\{\lambda'_n\}, D) + H(\{\lambda''_n\}, D), \quad (3.2.9)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1 = L_{\nu,1}(\lambda)\varphi_{\nu,1}(\lambda) + L_{\nu,2}(\lambda)\varphi_{\nu,2}(\lambda),$$

где $\varphi_{\nu,1}(\lambda), \varphi_{\nu,2}(\lambda) \in [1, 0]$.

Функции $L_{\nu,1}(\lambda), L_{\nu,2}(\lambda)$ были введены выше.

Отметим еще случай, рассмотренный также в [65], когда $\lambda_n > 0$ и имеется плотность

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma < \infty.$$

В этом случае область сходимости последовательности из полиномов из экспонент — полуплоскость $\operatorname{Re} z < c$.

ТЕОРЕМА 3.2.9. Пусть $\{\lambda_n\} = \{\lambda'_n\} \cup \{\lambda''_n\}$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda'_n} = \sigma_1 > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda''_n} = \sigma_2 > 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma.$$

Пусть, далее, D — полуплоскость $\operatorname{Re} z < c$. Чтобы имело место соотношение (3.2.9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: при любом $\varepsilon > 0$

$$|L_1(\lambda)| + |L_2(\lambda)| > A(\varepsilon)e^{-\varepsilon|\lambda|}, \quad A(\varepsilon) > 0,$$

где

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda'_n)^2}\right), \quad L_2(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda''_n)^2}\right).$$

§ 3. Разрешимость интерполяционной задачи

В п. 1.4 из §1 рассматривался вопрос о решении интерполяционной задачи (3.1.7), когда узлы λ_n лежат на положительной части вещественной оси. Здесь будет рассмотрен случай произвольных узлов.

3.1. Интерполирование в классе функций экспоненциального типа. Пусть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty.$$

Пусть, далее, δ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) — величины, введенные в п. 2.5 из §2. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|} < \infty. \quad (3.3.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.1. Для того, чтобы для любой системы $\{a_n\}$, удовлетворяющей естественному условию (3.2.1), нашлась целая функция экспоненциального типа $f(z)$ со свойством

$$f(\lambda_n) = a_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.3.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\delta_\nu < \infty$ ($\nu = 1, 2, 3$).

3.2. Разрешимость в классе $[\rho, \infty)$. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} < \infty, \quad 0 < \rho < \infty. \quad (3.3.3)$$

Пусть целое $m > 2\rho$, G_s ($s = 1, 2, \dots, p$) — углы с вершинами в начале координат и раствора, меньшего $\frac{2\pi}{m}$, причем смежные углы имеют общие части. Положим $\mu_n = \lambda_n^\rho$. Пусть $\lambda_n \in G_s$. Если $\arg z = \varphi_s^0$ — биссектриса угла G_s , $\varphi_n = \arg \lambda_n$, то считаем, что $|\varphi_n - \varphi_s^0| < \frac{\pi}{m}$. Имея это в виду, полагаем $\mu_m = |\lambda_n|^\rho e^{i\psi_n}$, $\psi_n = \rho\varphi_n$, $\lambda_n \in G_s$. Эти точки μ_n лежат в угле D_s раствора, меньшего π , ибо

$$|\psi_n - \rho\varphi_s^0| < \frac{\pi\rho}{m} < \frac{\pi}{2}.$$

Положим

$$L_s(z) = \prod_{\mu_n \in D_s} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, p).$$

Это — функции экспоненциального типа. Пусть $|z| = r_n^{(s)}$ ($n = 1, 2, \dots$) — окружности, на которых имеет место оценка

$$|L_s(z)| > e^{-a|z|}, \quad |z| = r_n^{(s)} \quad (n \geq 1), \quad a < \infty$$

(такие окружности всегда существуют).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.2. Для того, чтобы имелась целая функция $f(z) \in [\rho, \infty)$ со свойством (3.3.2), необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$P_{n,s}(z) = \sum_{\substack{|\mu_\nu| < r_n^{(s)} \\ \mu_\nu \in D_s}} \frac{a_\nu e^{\mu_\nu z}}{L'_s(\mu_\nu)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

равномерно сходилась в некотором угле K_s .

Если $f(z) \in [\rho, \infty)$ со свойством (3.3.2) имеется, то необходимо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|^\rho} < \infty. \quad (3.3.4)$$

Введем величины

$$\delta_s = \overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu_n \in D_s}} \frac{1}{|\mu_n|} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| \quad (s = 1, 2, \dots, p).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.3. *Для того, чтобы по любой системе чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей естественному условию (3.3.4), можно было найти функцию $f(z) \in [\rho, \infty)$ со свойством (3.3.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\delta_s < \infty \quad (s = 1, 2, \dots, p).$$

3.3. Другие условия разрешимости интерполяционной задачи. Разрешимость в классе $[\rho, \infty]$. Пусть узлы λ_n ($n \geq 1$) удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\lambda_n|} \leq \rho.$$

Выясним, каковы должны быть числа a_n ($n \geq 1$), чтобы в классе $[\rho, \infty]$ имелась по крайней мере одна функция $f(z)$ со свойством (3.3.2).

Обозначим $\mu_1^{(n)}$ ($\mu_1^{(n)} = \lambda_n$), $\mu_2^{(n)}, \dots, \mu_{q_n}^{(n)}$ — те точки из $\{\lambda_m\}$, которые лежат в круге $|z - \lambda_n| < |\lambda_n|^{-h}$ ($h > 0$ — фиксированное число), а $\alpha_1^{(n)}$ ($\alpha_1^{(n)} = a_n$), $\alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_{q_n}^{(n)}$ — те числа из $\{a_m\}$, которые соответствуют указанным точкам в силу соответствия $\lambda_m \rightarrow a_m$. Введем величины

$$A_1^{(n)} = \mu_1^{(n)} \alpha_1^{(n)}, \dots, A_k^{(n)} = \mu_1^{(n)} \dots \mu_k^{(n)} \sum_{p=1}^k \frac{\alpha_p^{(n)}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^k (\mu_j^{(n)} - \mu_p^{(n)})} \quad (k = 2, \dots, q_n) \quad (3.3.5)$$

(сумма справа — разделенная разность) и обозначим β_n максимум из их модулей.

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Для того, чтобы в классе $[\rho, \infty]$ имелась функция $f(z)$ со свойством (3.3.2), необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \beta_n}{\ln |\lambda_n|} \leq \rho.$$

Если такая функция со свойством (3.3.2) имеется, то необходимо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |a_n|}{\ln |\lambda_n|} \leq \rho. \quad (3.3.6)$$

ТЕОРЕМА 3.3.2. *Для того, чтобы по любой системе чисел $\{a_n\}$ удовлетворяющей условию (3.3.6), можно было найти функцию $f(z) \in [\rho, \infty]$ со свойством (3.3.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \frac{1}{|\eta_n|}}{\ln |\lambda_n|} \leq \rho, \quad \eta_n = \prod_{\substack{|\lambda_m - \lambda_n| < |\lambda_n|^{-h} \\ m \neq n}} |\lambda_m - \lambda_n| \quad (h > 0).$$

3.4. Разрешимость в классе $[\rho, \infty)$. Пусть узлы удовлетворяют условию (3.3.3). Обозначим $\mu_1^{(n)}$ ($\mu_1^{(n)} = \lambda_n$), $\mu_2^{(n)}, \dots, \mu_{q_n}^{(n)}$ те точки из $\{\lambda_m\}$, которые лежат в круге $\{z : |z - \lambda_n| < \delta |\lambda_n|\}$, где δ , $0 < \delta < 1$, — фиксированное число, а $\alpha_1^{(n)}$ ($\alpha_1^{(n)} = a_n$), $\alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_{q_n}^{(n)}$ — те числа из $\{a_m\}$, которые соответствуют указанным точкам в силу соответствия $\lambda_m \rightarrow a_m$.

Введем величины $A_k^{(n)}$ по формулам (3.3.5). Максимум из их модулей обозначим β_n .

ТЕОРЕМА 3.3.3. *Для того, чтобы в классе $[\rho, \infty)$ имелась интерполирующая функция $f(z)$ со свойством (3.3.2), необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \beta_n}{|\lambda_n|^\rho} < \infty.$$

ТЕОРЕМА 3.3.4. *Для того, чтобы по любой системе чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию (3.3.4), можно было найти функцию $f(z) \in [\rho, \infty)$ со свойством (3.3.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{|\eta_n|}}{|\lambda_n|^\rho} < \infty, \quad \eta_n = \prod_{\substack{|\lambda_m - \lambda_n| < \delta_1 |\lambda_n| \\ m \neq n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \right|, \quad \delta_1 > 0.$$

В работах [1], [2], [24], [25] рассматривается кратная интерполяция, т.е. учитываются не только значения в узлах, но и значения производных до определенного порядка в этих узлах.

§ 4. Уравнение свертки в действительной области

Уравнение свертки в действительной области — это уравнение

$$\int_a^b f(x+t) d\sigma(t) = 0, \quad (3.4.1)$$

где $[a, b]$ — отрезок вещественной оси и $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Если $f(x)$ непрерывна на $(a_1, b_1) \supset [a, b]$, то левая часть в (3.4.1) имеет смысл для $x \in (a_1 - a, b_1 - b)$. Решения уравнения (3.4.1) называются периодическими в среднем функциями. Периодические в среднем функции были введены Дельзартом [77].

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $a = -q$, $b = q$, $q > 0$ и вблизи концов $-q$ и q функция $\sigma(t)$ не является постоянной. Из этого будет следовать, что характеристическая функция

$$L(\lambda) = \int_{-q}^q e^{\lambda t} d\sigma(t)$$

обладает свойствами: для почти всех φ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} = q |\cos \varphi|; \quad (3.4.2)$$

имеются число p и числа r_k , $0 < r_k \uparrow \infty$, $\frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [q |\cos \varphi| - \varepsilon] r, \quad r_k - p \leq r \leq r_k + p, \quad k > K(\varepsilon).$$

Пусть λ_ν ($\nu \geq 1$) — нули $L(\lambda)$ кратности m_ν . Функции

$$e^{\lambda_\nu z}, z e^{\lambda_\nu z}, \dots, z^{m_\nu-1} e^{\lambda_\nu z} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

— частные решения уравнения (3.4.1).

Положим

$$\omega(\mu, f) = \int_{-q}^q d\sigma(t) \left(\int_0^t f(t-\eta) e^{\mu\eta} d\eta \right),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{\omega(\mu, f)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = \sum_{k=0}^{m_\nu-1} a_{\nu,k} z^k e^{\lambda_\nu z} = P_\nu(z) e^{\lambda_\nu z},$$

где C_ν — окружность малого радиуса (с центром в точке λ_ν), в которой нет других нулей $L(\mu)$, кроме точки λ_ν . Функции $f(x)$, непрерывной на $(c, d) \supset [-q, q]$ и удовлетворяющей уравнению (3.4.1), сопоставляем ряд

$$f(x) \sim \sum P_\nu(x) e^{\lambda_\nu x}. \quad (3.4.3)$$

4.1. Суммирование ряда. Сформулируем результат о суммировании этого ряда методом Абеля к $f(x)$:

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть $\beta \geq 0$ — малое число, такое, что на лучах $\arg \lambda = \beta$, $\arg \lambda = \pi - \beta$ функция $L(\lambda)$ не обращается в нуль (за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$, где она может быть равной нулю), и существует предел (3.4.2). Указанные лучи (в окрестности начала координат их соединим дугой, на которой $L(\lambda) \neq 0$) разобьют круг $|\lambda| \leq r_k$ на две области: нижнюю D_k^- и верхнюю D_k^+ . Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на интервале $(c, d) \supset [-q, q]$ и удовлетворяющая уравнению (3.4.1) на меньшем интервале $(c+q, d-q)$. При этих условиях, каково бы ни было $\delta > 0$, в области $y > 0$, $-|c| + \delta < x < d - \delta$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_n \in D_k^+} P_n(z) e^{\lambda_n z} = F^+(z)$$

(стремление к пределу в области $y > \delta_1$, $-|c| + \delta < x < d - \delta$, $0 < \delta_1 < \delta$, — равномерно), в области

$$-\frac{\delta}{4 \sin \beta} < y < 0, \quad -|c| + \delta < x < d - \delta$$

существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_n \in D_k^-} P_n(z) e^{\lambda_n z} = F^-(z)$$

(стремление к пределу в области

$$-\frac{\delta}{4 \sin \beta} < y < -\delta_1, \quad -|c| + \delta < x < d - \delta, \quad 0 < \delta_1 < \frac{\delta}{2},$$

— равномерно). Наконец, при $y \rightarrow 0$ для всех x , $-|z| + \delta < x < d - \delta$, равномерно

$$\lim_{y \rightarrow 0} [F^-(x - iy) + F^+(x + iy)] = f(x).$$

В случае, когда $f(x)$ непрерывна на всей оси и удовлетворяет уравнению (3.4.1) на всей оси, результат установлен Шварцем Л.[90].

СЛЕДСТВИЕ 3.4.1 (теорема единственности). Пусть $f(x)$ непрерывна на $(c, d) \supset [-q, q]$ и удовлетворяет уравнению (3.4.1). Если все $P_v(x) \equiv 0$, то $f(x) = 0$ в интервале (c, d) .

СЛЕДСТВИЕ 3.4.2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $(c, d) \supset [-q, q]$ и удовлетворяет уравнению (3.4.1). Если $f(x) = 0$ в интервале $[-q, q]$, то $f(x) = 0$ и в интервале (c, d) .

Пусть $\{\lambda_n\} = \{\lambda'_n\} \cup \{\lambda''_n\}$, $\operatorname{Im} \lambda'_n \geq 0$, $\operatorname{Im} \lambda''_n < 0$, и пусть

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \arg \lambda'_n = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg \lambda''_n = -\frac{\pi}{2}.$$

При этих условиях, если функция $f(x)$ регулярна на $(c, d) \supset [-q, q]$ и удовлетворяет уравнению (3.4.1) в $(c+q, d-q)$, то подпоследовательность частных сумм ряда (3.4.3)

$$\sum_{|\lambda_v| < r_k} P_v(z) e^{\lambda_v z} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

равномерно сходится внутри полосы

$$-\infty \leq y_1 < \operatorname{Im} z < y_2 \leq +\infty, \quad y_1 < 0 < y_0,$$

содержащей вещественную ось, причем сходится к $f(x)$ (следовательно, функция $f(z)$ — аналитическая в указанной полосе).

4.2. Продолжение на полуось. Пусть $f(x)$ непрерывна на $(c, d) \supset [-q, q]$ и удовлетворяет уравнению (3.4.1) в $(c+q, d-q)$. Возникает вопрос: можно ли $f(x)$ продолжить непрерывно на больший интервал $(c_1, d_1) \supset (c, d)$ так, чтобы уравнения (3.4.1) удовлетворялись в (c_1+q, d_1-q) ?

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Чтобы получить положительный ответ, надо ввести ограничения.

Приведем результаты А. М. Седлецкого (они имеются в [37]).

ТЕОРЕМА 3.4.2. Пусть функция $\sigma(t)$ имеет скачок в точке q . Тогда:

1) функцию $f(x)$, непрерывную на $[-q, q]$ и удовлетворяющую условию

$$\int_{-q}^q f(t) d\sigma(t) = 0, \quad (3.4.4)$$

можно продолжить периодически в среднем (единственным образом) на полуось $[-q, \infty)$;

2) каким бы ни был интервал $[-q, p]$ ($p > q$), имеется постоянная A , не зависящая от $f(x)$, такая, что

$$|f(x)| \leq A \max_{-q \leq t \leq q} |f(t)|, \quad x \in [-q, p];$$

3) если в $[-q, q]$

$$\max_{|x_2 - x_1| \leq \delta} |f(x_2) - f(x_1)| = M_0(\delta),$$

то и в интервале $[-q, p]$ ($p > q$),

$$\max_{|x_2 - x_1| \leq \delta} |f(x_2) - f(x_1)| = AM_0(\delta),$$

где A не зависит от $f(x)$;

4) если $f(x)$ в $[-q, q]$ имеет ограниченную вариацию v_0 , то и в интервале $[-q, p]$ ($p > q$), она имеет ограниченную вариацию v , причем $v < Av_0$, где A не зависит от $f(x)$.

Аналогичное утверждение имеет место, когда $\sigma(t)$ имеет скачок в левом конце $-q$.

Видим, что когда $\sigma(t)$ имеет скачки в левом и правом концах, непрерывная функция $f(x)$, произвольным образом заданная на $[-q, q]$ так, чтобы выполнялось условие (3.4.4), продолжается (единственным образом) периодически в среднем на всю вещественную ось. Отсюда следует, что решение уравнения (3.4.1) единственным образом определяется заданием произвольным образом $f(x)$ на $[-q, q]$, лишь бы соблюдалось условие (3.4.4).

В последующем будем предполагать, что $\sigma(t)$ имеет скачки в точках $-q$ и q .

При этих условиях функция $L(\lambda)$ обладает свойствами:

1) все нули $L(\lambda)$ лежат в некоторой вертикальной полосе $|\operatorname{Re} \lambda| \leq h$, причем число нулей в прямоугольнике $|\operatorname{Re} \lambda| \leq h, k \leq \operatorname{Im} \lambda \leq k+1$ ограничено постоянной, не зависящей от $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

2) для данного $\delta > 0$ имеется постоянная m_s , такая, что вне кружков радиуса δ с центрами в нулях $L(\lambda)$ справедлива оценка

$$|L(\lambda)| > m_s e^{q|\operatorname{Re} \lambda|};$$

3) для данного $p > 0$ найдутся окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty, r_{k+1} - r_k < p$ ($k = 1, 2, \dots$), такие, что

$$|L(\lambda)| > m_0 e^{q|\operatorname{Re} \lambda|}, \quad |\lambda| = r_k \quad (k \geq 1), \quad m_0 > 0.$$

Положим

$$S_R(x, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=R} \frac{U(m, f)}{L(\mu)} e^{\mu x} d\mu.$$

Это — частная сумма ряда (3.4.3), соответствующая тем λ_ν , которые лежат в круге $\{\lambda : |\lambda| < R\}$.

ТЕОРЕМА 3.4.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению (3.4.1) на всей оси. Тогда разность

$$S_{r_k}(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_c^d f(\eta) \frac{\sin r_k(x - \eta)}{x - \eta} d\eta$$

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ равномерно в интервале $(c + \Delta, d - \Delta)$, $\Delta > 0$, где (c, d) — произвольный интервал вещественной оси.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.3. Если $f(x)$ непрерывна на всей вещественной оси, имеет ограниченную вариацию в $[-q, q]$ и удовлетворяет уравнению (3.4.1) на всей оси, то в любом интервале вещественной оси равномерно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{r_k}(x, \gamma) = f(x).$$

Заметим, что частным случаем уравнения (3.4.1) является разностное уравнение

$$a_1 f(x + h_1) + \dots + a_n f(x + h_n) = 0,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — постоянные коэффициенты, а $h_1, \dots, h_n$ ($h_1 < h_2 < \dots < h_n$) — постоянные разности. Чтобы записать это уравнение в виде (3.4.1), надо взять функцию $\sigma(t)$ со скачками a_j в точках h_j и постоянную в интервалах (h_j, h_{j+1}) . Здесь тот случай, когда $\sigma(t)$ в конечных точках имеет скачки. Следовательно, к решениям разностного уравнения применимы указанные выше результаты.

§ 5. Инвариантные подпространства

Пусть G — односвязная область, H — пространство функций, аналитических в G , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Замкнутое подпространство $W \subset H$ назовем *инвариантным*, если оно инвариантно относительно оператора дифференцирования: если $f(z) \in W$, то и производная $f'(z) \in W$.

Все H и подпространство, состоящее из тождественного нуля, — тривиальные инвариантные подпространства.

Примером нетривиального инвариантного подпространства является замкнутая линейная оболочка неполной системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$.

Другой пример — совокупность решений уравнения свертки в комплексной области. Уравнение свертки — это уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(z) f(t + z) dt = 0. \quad (3.5.1)$$

Здесь $\gamma(t)$ — функция, аналитическая вне некоторого замкнутого выпуклого множества $\overline{D}$, причем $\gamma(\infty) = 0$. C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$. Пусть $G \supset \overline{D}$ и W — совокупность решений уравнения (3.5.1), аналитических в G . Ясно, что если $f(z)$ удовлетворяет

уравнению (3.5.1), то и $f'(z)$ удовлетворяет этому уравнению. Поэтому W — инвариантное подпространство.

Заметим, что если инвариантное подпространство W содержит экспоненциальный одночлен $z^n e^{\lambda z}$, то W содержит экспоненциальные одночлены

$$e^{\lambda z}, z e^{\lambda z}, \dots, z^{n-1} e^{\lambda z}.$$

В связи с этим естественно ввести понятие спектра инвариантного подпространства.

Пусть Λ — множество пар (λ_i, n_i) из точек λ_i в комплексной плоскости и целых чисел n_i . Это множество называется *спектром нетривиального подпространства* W , если W содержит экспоненциальные одночлены

$$e^{\lambda_i z}, \dots, z^{n_i-1} e^{\lambda_i z}, \quad (\lambda_i, n_i) \in \Lambda, \quad (3.5.2)$$

и не содержит никаких других.

Спектр нетривиального инвариантного подпространства всегда дискретный.

Будем говорить, что W допускает *спектральный синтез*, если W совпадает с замкнутой линейной оболочкой системы экспоненциальных одночленов (3.5.2).

Задача спектрального синтеза: выяснить условия, при которых W допускает спектральный синтез.

В случае, когда G — вся плоскость, W допускает спектральный синтез. Это — результат Шварца Л. [90].

Приводимые ниже результаты принадлежат И.Ф. Красичкову-Терновскому ([14], [15], [16]).

5.1. Условия спектрального синтеза. Введем понятие аннуляторного подмодуля инвариантного подпространства.

Пусть H^* — пространство, сопряженное с W . Рассмотрим отображение T , которое каждому линейному непрерывному функционалу S ставит в соответствие его характеристическую функцию $\varphi(\lambda) = \langle S, e^{\lambda z} \rangle$. Функция $\varphi(\lambda)$ — целая экспоненциального типа, у функции, ассоциированной с ней по Борелю, все особенности лежат внутри G . Когда S пробегает все H^* , φ пробегает класс P всех таких функций. Класс P представляет собой линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; кроме того, P выдерживает умножение на многочлены. Таким образом, с алгебраической точки зрения P — модуль над кольцом многочленов. Наделим P локально выпуклой топологией, индуцированной из H^* отображением T .

Алгебраические операции в этом модуле согласованы с его топологией. Поэтому P — топологический модуль.

Пусть W^0 — ортогональное подпространство:

$$W^0 = \{S \in H^* : \langle S, f \rangle = 0 \quad \forall f \in W\}$$

и $I = T(W^0)$ — образ W^0 при отображении T . Оказывается, что I обладает структурой замкнутого подмодуля модуля P . I называется *аннуляторным подмодулем* инвариантного подпространства W .

Точка λ называется нулем подмодуля $I \subset P$ кратности n , если любая функция f из I обращается в точке λ в нуль с кратностью не ниже, чем n и существует функция $f \in I$, которая обращается в точке λ в нуль с кратностью, точно равной n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.1. *Спектр инвариантного подпространства W совпадает с множеством нулей, с учетом их кратностей, его аннуляторного подмодуля I .*

Пусть I — подмодуль в P , $\Lambda = (\lambda_i, n_i)$ — множество его нулей. Подмодуль I называется *обильным*, если из того, что $f \in P$ обращается в каждой точке λ_i в нуль с кратностью не ниже n_i , следует $f \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.2. *Для того, чтобы инвариантное подпространство допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы его аннуляторный подмодуль был обильным.*

Указанные утверждения верны для произвольной односвязной области G .

В случае выпуклой области G свойство обильности можно охарактеризовать в терминах устойчивости.

Пусть $f(z)$ — целая функция, a — точка комплексной плоскости. Обозначим $m_f(a)$ — целое число, равное нулю, если a не есть нуль $f(z)$, и равное m , если a — нуль $f(z)$ кратности m . Аналогично, если I — подмодуль в P , то $m_I(a) = 0$, если a не есть нуль I и $m_I(a) = m$, если a есть нуль $f(z)$ кратности m .

Подмодуль $I \subset P$ устойчив в точке a , если из того, что $f \in I$, $m_f(a) > m_I(a)$, следует $f(z)(z-a)^{-1} \in I$. Подмодуль устойчив, если он устойчив в любой точке.

Следующее утверждение является центральным в теории спектрального синтеза.

ТЕОРЕМА 3.5.1. *Пусть G — выпуклая область. Для того, чтобы замкнутый подмодуль $I \subset P$ был обильным, необходимо и достаточно, чтобы он был устойчив.*

Доказательство этого результата опирается на следующий аналитиче-

ский факт, представляющий самостоятельный интерес.

Пусть φ , Φ — целые функции экспоненциального типа с индикатрисами роста

$$h_\varphi(\theta), h_\Phi(\theta) < H(\theta),$$

где $H(\theta)$ — заданная тригонометрически выпуклая функция. Предположим, что φ и Φ обращаются в нуль (с учетом кратностей) на последовательности $\Lambda = (\lambda_i, n_i)$ кратных точек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.3. *Существует последовательность рациональных функций $p_n q_n^{-1}$, такая, что:*

- 1) *функции $p_n q_n^{-1} \Phi$ — целые и обращаются в нуль на Λ ;*
- 2) *$p_n q_n^{-1} \Phi \rightarrow \varphi$ равномерно на компактах;*
- 3) *выполняется равномерная оценка*

$$\left| \frac{p_n(z)}{q_n(z)} \Phi(z) \right| < A \exp [H(\theta)|z|], \quad z = |z|e^{i\theta}.$$

На основании предположения 3.5.2 и теоремы 3.5.1 получаем:

ТЕОРЕМА 3.5.2. *Пусть G — выпуклая область. Для того, чтобы инвариантное подпространство $W \subset H$ допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль $I \subset P$ подпространства W был устойчив.*

Теорема 3.5.2 позволяет разрешать задачи спектрального синтеза в случаях, когда область G — выпуклая.

5.2. Решение уравнения свертки в комплексной области.

Рассмотрим уравнение (3.5.1). Положим

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{\lambda t} dt. \quad (3.5.3)$$

Это — характеристическая функция уравнения (3.5.1). Пусть W — совокупность решений уравнения, аналитических в области $G \supset \overline{D}$. Аннуляторный подмодуль I подпространства W является главным с образующей φ (I представляет собой замыкание в топологии P множества функций $p\varphi$, где p — многочлен). Для главных подмодулей устойчивость легко проверяется. Применяя теорему 3.5.2, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.5.3 (аппроксимационная теорема). *Пусть G — выпуклая область, $G \supset \overline{D}$. Каждое решение уравнения (3.5.1), аналитическое в G , аппроксимируется равномерно внутри G линейными комбинациями элементарных решений $z^n e^{\lambda_i z}$.*

Аналогичное утверждение для системы уравнений свертки уже не верно. Приводится пример системы двух уравнений свертки, подпространство решений которой нетривиально, а решений в виде экспоненциальных одночленов не содержит.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.1. Если нули функции (3.5.3) — простые, то решение $f(z)$ уравнения (3.5.1) в выпуклой области $G \supset \overline{D}$ представляется в виде предела последовательности вида (3.2.4). Поскольку система $\{e^{\lambda_n z}\}$ в области G не полна, то, значит, на указанные последовательности распространяются соответствующие результаты, установленные в предыдущих параграфах.

5.3. Другие результаты. Теорема 3.5.2 используется и при доказательстве следующего результата.

ТЕОРЕМА 3.5.4. Если область G — выпуклая и неограниченная, то всякое замкнутое инвариантное подпространство W допускает спектральный синтез.

Это утверждение позднее другим методом было доказано в [37].

Следующие результаты касаются аппроксимации функций из W в области более широкой, чем G .

ТЕОРЕМА 3.5.5. Пусть G — выпуклая область, $W \subset H$ — нетривиальное инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез и $f \in W$. Обозначим через G_f полный след, оставляемый G при непрерывном и поступательном движении G как геометрической фигуры по римановой поверхности f . Тогда G_f — однолистная и односвязная область и функция $f(z)$ равномерно внутри G_f аппроксимируется полиномами из экспонент из W .

ТЕОРЕМА 3.5.6. Пусть f — решение однородного уравнения свертки (3.5.1), $\overline{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции, ассоциированной по Борелю с функцией (3.5.3), D_f — полный след, оставляемый $\overline{D}$ при непрерывном и поступательном движении по римановой поверхности f . Тогда D_f — однолистная и односвязная область; функция f равномерно внутри D_f аппроксимируется полиномами экспонент из W .

Дальнейшее развитие задачи спектрального синтеза можно найти в работах [17] — [23].

5.4. Решение неоднородного уравнения свертки. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(t+z) dt = F(z). \quad (3.5.4)$$

Пусть $\overline{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$. Предположим, что правая часть регулярна в выпуклой области G . Если

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D,$$

то решением уравнения (3.5.4) будет функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\varphi(\lambda_n)} e^{\lambda_n z},$$

где $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция (3.5.4).

Ю. Ф. Коробейник показал, что верна

ТЕОРЕМА 3.5.7. *Если $\varphi(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста, то при подходящем выборе показателей λ_n функция $f(z)$ будет регулярной в области $D + G$ (точка z принадлежит этой области, если $z = u + v$ и $u \in D, v \in G$).*

В. В. Напалков [48] доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.5.8. *Если уравнение (3.5.4) имеет решение $f(z)$, аналитическое в области $D + G$, какова бы ни была выпуклая область G , то характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Братищев А.В., *Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций*, Сиб. матем. ж-л 17(1976), № 1, 30–43.
- [2] Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф., *Краткая интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 40(1976), № 5, 1102–1127.
- [3] Головин В.Д., *О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций*, Записки мех.-мат. фак-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. общ. 30(1964), сер. 4, 18–29.
- [4] Джрбашян М.М., *О пополнении и замыкании неполной системы функций*, Докл. АН СССР 141(1961), № 3, 539–542.
- [5] Джрбашян М.М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966.
- [6] Дзядык В.К., *Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках*, Матем. сб. 95(1974), № 4, 475–493.
- [7] Евграфов М.А., Чегис И.А., *Обобщение теоремы Фрагмена-Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве*, Докл. АН СССР 134(1960), № 2, 259–262.
- [8] Ильин В.А., *Необходимое и достаточное условие базисности в L^p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системам экспонент*, Докл. АН СССР 273(1983), № 4, 789–793.
- [9] Кадец М.И., *Точное значение постоянной Палея-Винера*, Докл. АН СССР 155(1964), № 6, 1253–1254.
- [10] Коробейник Ю.Ф., *Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше*, Матем. сб. 97(1975), № 2, 193–229.
- [11] Коробейник Ю.Ф., *Представляющие системы*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 42(1978), № 2, 325–355.
- [12] Коробейник Ю.Ф., *Представляющие системы*, Успехи матем. наук 36(1981), вып. 1, 73–126.
- [13] Красичков И.Ф., *О сходимости полиномов Дирихле*, Сиб. матем. ж-л 7(1966), № 5, 1039–1058.
- [14] Красичков-Терновский И.Ф., *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях*, Матем. сб. 87(1972), № 4, 459–488.
- [15] Красичков-Терновский И.Ф., *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях*, Матем. сб. 88(1972), № 1, 3–30.
- [16] Красичков-Терновский И.Ф., *Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза*, Матем. сб. 88(1972), № 3, 331–352.
- [17] Красичков-Терновский И.Ф., *Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 37(1973), № 4, 931–945.
- [18] Красичков-Терновский И.Ф., *Инвариантные подпространства аналитических функций. Коэффициенты Дирихле*, Функциональный анализ и его приложения 7(1973), № 4, 38–43.

- [19] Красичков-Терновский И.Ф., *Методы аппроксимации функций из инвариантных подпространств полиномами Дирихле*, Сиб. матем. ж-л 16(1979), № 5, 1020–1030.
- [20] Красичков-Терновский И.Ф., *Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей*, Матем. сб. 111(1980), № 1, 3–41.
- [21] Красичков-Терновский И.Ф., *Спектральный синтез аналитических функций на системах неограниченных выпуклых областей*, Матем. сб. 111(1980), № 3, 384–401.
- [22] Красичков-Терновский И.Ф., *Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей. Распространение синтеза*, Матем. сб. 112(1980), № 1, 94–114.
- [23] Красичков-Терновский И.Ф., *Для каждого инвариантного подпространства, допускающего спектральный синтез, существует метод аппроксимации*, Сиб. матем. ж-л 22(1981), № 3, 74–90.
- [24] Лапин Г.П., *Интерполирование в классе целых функций конечного порядка и конечного типа*, Матем. сб. 29(1951), 565–580.
- [25] Лапин Г.П., *О целых функциях конечного порядка, принимающих вместе с производными заданные значения в заданных точках*, Сиб. матем. ж-л 6(1965), № 6, 1267–1281.
- [26] Левин Б.Я., *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [27] Левин Б.Я., *О базисах показательных функций в L^2* , Записки Матем. отд. Физ.-мат. фак-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. общ. 27(1961), сер. 4, 39–48.
- [28] Левин Б.Я., Любарский Ю.И., *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 39(1975), № 3, 657–702.
- [29] Леонтьев А.Ф., *О классе функций, определенных рядами полиномов Дирихле*, Ученые зап. МГУ. Математика 3(1949), 3–58.
- [30] Леонтьев А.Ф., *О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе*, Матем. сб. 36(1955), 555–568.
- [31] Леонтьев А.Ф., *О сходимости последовательности полиномов Дирихле*, Докл. АН СССР 108(1956), 23–26.
- [32] Леонтьев А.Ф., *О представлении аналитической функции в виде суммы периодических*, Матем. сб. 93(1974), № 4, 512–528.
- [33] Леонтьев А.Ф., *К вопросу о представлении аналитических функций в бесконечной выпуклой области рядами Дирихле*, Докл. АН СССР 225(1975), № 5, 1013–1015.
- [34] Леонтьев А.Ф., *Об одном представлении аналитической функции в бесконечной выпуклой области*, Anal. Math. 2(1976), 125–148.
- [35] Леонтьев А.Ф., *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [36] Леонтьев А.Ф., *Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 44(1980), № 6, 1308–1328.
- [37] Леонтьев А.Ф., *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.
- [38] Леонтьев А.Ф., *Представление целых функций рядами экспонент*, Труды МИАН 157(1981), 58–89.
- [39] Леонтьев А.Ф., *Обобщения рядов экспонент*, Наука, М., 1981.
- [40] Леонтьев А.Ф., *Применение разложений целых функций в ряды экспонент*, Матем. сб. 126(1985), № 2, 147–171.
- [41] Леонтьева Л.А., Леонтьева Т.А., *Разбиение класса функций, представляемых последовательностями полиномов Дирихле, на подклассы*, Матем. зам. 27(1980), № 2, 225–236.
- [42] Маркушевич А.И., *Теория аналитических функций*, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
- [43] Мельник Ю.И., *О рядах Дирихле функций, регулярных в выпуклых многоугольниках*, Укр. матем. ж-л 32(1980), № 6, 837–843.

- [44] Мельник Ю.И., *Об абсолютной сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции*, Укр. матем. ж-л 35(1983), № 6, 778–782.
- [45] Мельник Ю.И., *Представление регулярных функций в виде суммы периодических*, Матем. заметки 36(1984), № 6, 847–856.
- [46] Мельник Ю.И., *О скорости сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклом многоугольнике функции*, Укр. матем. ж-л 37(1985), № 6, 719–722.
- [47] Напалков В.В., *Факторизация оператора типа свертки*, Матем. заметки 15(1974), № 1, 165–171.
- [48] Напалков В.В., *Об одном классе неоднородных уравнений типа свертки*. Успехи мат. наук, 1974, 29, № 3, 217–218.
- [49] Напалков В.В., *Об одном методе восстановления функции по ее коэффициентам Дирихле*, Матем. заметки 225(1975), № 5, 1013–1015.
- [50] Напалков В.В., *О дискретных достаточных множествах в некоторых пространствах целых функций*, Докл. АН СССР 250(1980), № 4, 809–812.
- [51] Напалков В.В., *О дискретных слабо достаточных множествах в некоторых пространствах целых функций*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 45(1981), № 5, 1088–1099.
- [52] Напалков В.В., *О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций*, Докл. АН СССР 264(1982), № 4, 827–830.
- [53] Напалков В.В., *Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 51(1987), № 2, 287–305¹.
- [54] Напалков В.В., *Об инвариантном представлении с экспоненциальным ядром аналитических функций*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления².
- [55] Павлов Б.С., *Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта*, Докл. АН СССР 247(1979), № 1, 37–40.
- [56] Рахимкулов Н.И., *Достаточные множества в некоторых пространствах целых функций и их применение*, Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3371–81 Деп.
- [57] Седлецкий А.М., *Избытки систем показательных функций*, Матем. заметки 22(1977), № 6, 803–814.
- [58] Седлецкий А.М., *О разложениях функций в ряды Дирихле на замкнутых выпуклых многоугольниках*, Сиб. мат. ж-л 19(1978), № 4, 878–888.
- [59] Седлецкий А.М., *Базисы из экспонент в пространствах E^p на выпуклых многоугольниках*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 42(1978), № 5, 1101–1119.
- [60] Седлецкий А.М., *Избытки систем экспоненциальных функций*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 44(1980), № 1, 203–218.
- [61] Седлецкий А.М., *Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси*, Успехи матем. наук 37(1982), № 5, 51–95.
- [62] Седлецкий А.М., *Разложение аналитической функции на сумму периодических*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 48(1984), № 4, 833–853.
- [63] Седлецкий А.М., *Разложение аналитической в многоугольнике функции на сумму периодических*, Докл. АН СССР 284(1985), № 5, 1073–1075.
- [64] Седлецкий А.М., *О чисто мнимых возмущениях показателей в системе $\{\exp(i\lambda_k t)\}$* , Сиб. матем. ж-л 26(1985), № 4, 151–158.
- [65] Тимофеев А.Ю., *Расщепление последовательности полиномов из экспонент*, Докл. АН СССР 260(1981), № 1, 43–46.
- [66] Чегис И.А., *Теорема типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре*, Докл. АН СССР 136(1961), № 3, 556–559.

¹В оригинале: Разложение аналитических функций заданного роста вблизи границы в ряд экспонент. Изв. АН СССР. Выходные данные не указаны. — А.Г.

²Выходные данные предполагаемой публикации не были указаны. Эту работу обнаружить не удалось. — А.Г.

- [67] Юлмухаметов Р.С., *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций*, Докл. АН СССР 264(1982), № 4, 839–841.
- [68] Юлмухаметов Р.С., *Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы*, Матем. заметки 32(1982), вып. 1, 41–58.
- [69] Юлмухаметов Р.С., *Асимптотические аппроксимации субгармонических функций*, Сиб. матем. ж-л 26(1985), № 4, 159–175.
- [70] Юлмухаметов Р.С., *Аппроксимация субгармонических функций*, Anal. Math. 11(1985), № 3, 257–282.
- [71] Alexander W.O., Redheffer R., *The excess of sets of complex exponentials*, Duke Math. J. 34(1967), № 1, 59–72.
- [72] Bailette A., *Approximations de fonctions par des sommes d'exponentielles*, Cr. Acad. Sci. 249(1959), № 23, 2470–2471.
- [73] Bailette A., *Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles*, J. Analyse math. 10(1962–1963), № 2, 91–114.
- [74] Bernstein V., *Lecons sur les progrès de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, 1933.
- [75] Boas R.P., *Entire Functions*, Academie press, New York, 1954.
- [76] Carleman T., *Über die Approximation analytischer Functionen durch lineare Aggregate von Vorgegebenen Potenzen*, Arkiv für Mathematik, Astr. och Fysik 17(1922), № 9, 1–30.
- [77] Delsarte J., *Les fonctions Mogenne-périodiques*, J. Math. Pures Appl. 14(1935), 403–453.
- [78] Ehrenpreis L., *Analytically uniform spaces and some applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 101(1961), 52–74.
- [79] Elsner J., *Zulässige Abendeungen von Exponential sistems im $L^p(-A, A)$* , Math. Z. 120(1971), 211–220.
- [80] Hörmander L., *Generators for some rings of analytic functions*, Bull. A. M. S. 73(1967), № 6, 943–949.
- [81] Kahane J.P., *Sur quelques problèmes l'unicite de prolongment relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielle*, Ann. Inst. Fourier 5(1955), 39–130.
- [82] Korevaar J., *Approximation on curves by linear combinations of exponentials*, Approxim. Theory, New-York-London, 1973, 387–399.
- [83] Levinson N., *Gap and density theorems*, Publ. Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [84] Malliavin P., Siddiqi J., *Approximation polynomiale sur un arc analytique dans le plan complexe*, C. R. Acad. Sci. 273(1971), № 2, A105–A106.
- [85] Paley R., Wiener N., *Fourier transforms in the complex domain*, Publ. Amer. Math. Soc., New York, 1934.
- [86] Peterson D., *The excess of sets of complex exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc. 44(1974), № 2, 321–325.
- [87] Schneider D.M., *Sufficient sets for some spaces of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 197(1974), 161–180.
- [88] Schwartz L., *Etude des sommes d'exponentielles réeles*, Paris: Hermann, 1943.
- [89] Schwartz L., *Approximation d'une fonction quelconque par les sommes d'exponentielles imaginaires*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Universite de Toulouse 4(1943), VI, 111–174.
- [90] Schwartz L., *Théorie générale des fonctions mogenne-périodiques*, Ann. de Math. 48(1947), № 4, 857–928.
- [91] Taylor B.A., *Discrete sufficient sets for some spaces of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 163(1972), № 1, 207–214.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- абцисса голоморфизма гл. III, §1, п. 1.3
- базис продолжающий гл. I, §8, п. 8.2
 - Рисса гл. I, §8, п. 8.1
- выпуклость ρ -тригонометрическая гл. II, §2, п. 2.1
- избыток системы гл. I, §8, п. 8.1
- индекс конденсации гл. III, §1, п. 1.3
- индикатриса роста гл. I, §1, п. 1.1
- квазиполином гл. I, §1, п. 1.4
- класс квазианалитический гл. III, §1, п. 1.8
- множество достаточное гл. I, §5
 - нулевой относительной меры гл. I, §1, п. 1.4
 - слабо достаточное гл. I, §5
- непродолжаемость квазианалитическая гл. III, §2, п. 2.2
- подмодуль аннуляторный гл. III, §5, п. 5.1
 - устойчивый гл. III, §5, п. 5.1
- подпространство инвариантное гл. III, §5
- полином Фабера гл. I, §3, п. 3.1
- полуплоскость голоморфизма гл. III, §1, п. 1.3
- порядок сопряженный гл. II, §1, п. 1.1
 - уточненный гл. I, §1, п. 1.6
- продолжение квазианалитическое гл. I, §1, п. 1.8
- прямая голоморфизма гл. III, §1, п. 1.3
- ряд Лагранжа гл. I, §1, п. 1.4
 - нормально сходящийся гл. I, §7, п. 7.1
 - экспонент с редкими показателями гл. II, §3, п. 3.2
- синтез спектральный гл. III, §5
- система биортогональная гл. I, §1, п. 1.1
 - представляющая гл. I, §6
 - распространения сходимости гл. I, §8, п. 8.2
- спектр нетривиального подпространства гл. III, §5
- теорема единственности гл. I, §1, п. 1.3

- об интерполировании гл. III, §1, п. 1.4; §3, п. 3.1, п. 3.2, п. 3.3
- о разложении в выпуклой области гл. I, §3, п. 3.2; §4, п. 4.2
- о целой функции гл. II, §2, п. 2.3
- о росте целой функции на последовательности точек гл. III, §1, п. 1.10
- о суммировании гл. III, §4, п. 4.1
- типы сопряженные гл. II, §1, п. 1.1
- уравнение свертки в действительной области гл. III, §4, п. 4.1, п. 4.2
 - в комплексной области гл. III, §5, п. 5.2
- функция, ассоциированная по Борелю гл. I, §1, п. 1.1
 - вполне регулярного роста гл. I, §1, п. 1.4
 - выпуклая гл. II, §2, п. 2.2
 - интреполирующая гл. I, §1, п. 1.5
 - Миттаг-Леффера гл. I, §4, п. 4.1
 - опорная гл. I, §1, п. 1.1
- сопряженная гл. II, §2, п. 2.2
 - субгармоническая гл. I, §4, п. 4.2
 - уточненного порядка гл. I, §1, п. 1.6

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Александр (Alexander), 52
Байетт (A. Bailette), 85
Бернштейн (V. Bernstein), 84
Винер (N. Wiener), 53
Головин В.Д., 54
Дельзарт (J. Delsarte), 108
Джрбашян М.М., 94
Дзядык В.К., 47
Евграфов М.А., 89
Елснер (J. Elsner), 53
Ильин В.А., 56
Кадец М.И., 54
Карлеман (T. Carleman), 85, 91
Кахан (J.P. Kahane), 80
Коревар (J. Korevaar), 91, 93
Коробейник Ю.Ф., 41, 43–45, 117
Красичков И.Ф., 87
Красичков-Терновский И.Ф., 101, 113
Левин Б.Я., 54, 85
Левинсон (N. Levinson), 51, 54
Леонтьев А.Ф., 6–8, 13, 36, 57, 65, 72, 77
Маллявен (P. Malliavin), 93
Маркушевич А.И., 31
Мельник Ю.И., 47, 49, 50
Напалков В.В., 26, 36, 42, 43, 102, 117
Павлов Б.С., 54
Петерсон (D. Peterson), 52
Пэли (R. Paley), 53
Рахимкулов Н.И., 71
Редхеффер (R. Redheffer), 52
Седлецкий А.М., 52
Сиддики (J. Siddiqi), 93
Тейлор (B.A. Taylor), 27, 42, 43
Тимофеев А.Ю., 103
Хермандер (L. Hörmander), 103
Чегис И.А., 89
Шварц (L. Schwartz), 94, 109, 113
Эренпрайс (L. Ehrenpreis), 42
Юлмухаметов Р.С., 36, 41

Научное издание

Леонтьев Алексей Федорович

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

Монография

Научный редактор: *А. М. Гайсин*

Корректурa: *Г. А. Гайсина*

Верстка: *Р. А. Гайсин, Р. Н. Гарифуллин*

Компьютерный набор: *Н. Н. Аиткужина, Р. А. Бахмаков,
Р. А. Гайсин, Г. А. Гайсина, К. П. Исаев, О. А. Кривошеева,
А. У. Муллабаева, И. Х. Мусин, А. Н. Сабиров, К. В. Трунов.*

Формат 60x84/16

Гарнитура Times New Roman. Тираж 150 экз. Заказ № .

тел./факс: (347)2-51-78-29

450003, г. Уфа, ул. Гафури, 54.