МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЦ УФИЦ РАН
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РАН

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ»

Сборник тезисов
Международной конференции
(г. Уфа, 4 – 7 октября 2021 г.)

УФА
АЭТЕРНА
2021

УДК 517.5+517.98+530.145
ББК 22.31+74.57
Т 11

Сборник издан при финансовой поддержке
Научно-образовательного математического центра
Приволжского федерального округа.

Т 11 **Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации: сборник тезисов Международной конференции (г. Уфа, 4 – 7 октября 2021 г.) / отв. ред. И.Х. Мусин. – Уфа: АЭТЕРНА, 2021. –60с.**

ISBN 978-5-00177-266-8

В сборнике представлены тезисы докладов участников международной математической конференции “Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации”.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

Благодарим компании, оказавших финансовую поддержку в организации и проведении научной конференции

УДК 517.5+517.98+530.145
ББК 22.31+74.57
ISBN 978-5-00177-266-8

SCIENTIFIC EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER
of VOLGA FEDERAL DISTRICT
BASHKIR STATE UNIVERSITY
INSTITUTE of MATHEMATICS of UFRC of RAS
STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE OF RAS

«FUNCTION THEORY, OPERATOR THEORY AND QUANTUM INFORMATION THEORY»

Book of abstracts
of the International Conference
October 4 – 7, 2021

UFA–2021

UDC 517.5+517.98+530.145
BBK 22.31+74.57

The Conference is sponsored
by Scientific Educational Mathematical Center
of Volga Federal District

FUNCTION THEORY, OPERATOR THEORY AND QUANTUM INFORMATION THEORY: Book of abstracts of the International Conference (October 4 – 7, 2021). Ufa, Russia: Aeterna, 2021. – 60 p.

ISBN 978-5-00177-266-8

The book contains abstracts of the talks at International Mathematical Conference "Function Theory, Operator Theory and Quantum Information Theory".
Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 517.5+517.98+530.145
BBK 22.31+74.57
ISBN 978-5-00177-266-8

Содержание

Boundedness and compactness of one class of integral operators with a logarithmic singularity in weighted Lebesgue spaces

@ Abylayeva A.M, Alday M.
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Let $I = (0, \infty)$ and let v, u be almost everywhere positive and locally integrable functions on the interval I. Let $1 < p, q < \infty$ and $p' = \frac{p}{p-1}$. Let us denote by $L_{p,v} \equiv L_p(v, I)$ the set of measurable functions f on I for which $\|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Let W be a strictly increasing and locally absolutely continuous function on the interval I. Let $\frac{dW(x)}{dx} = w(x)$, for almost all $x \in I$.

Consider the operator

$$T_{\alpha,\beta} f(x) = \int\limits_0^x \frac{\left(ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right)^\beta u(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I, \tag{1}$$

where $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$.

The boundedness of the operator (1) from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$ when $\beta = 0$ is obtained in the paper [1] for $\alpha > \frac{1}{p}$, $1 < p \leq q < \infty$ and $0 < q < p < \infty$.

Further, we assume that W is non-negative on I and $\lim\limits_{x \to 0^+} W(x) = 0$. The following theorem holds.

Theorem. Let $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$ and $\beta \geq 0$. Let the function u be non-increasing on I. Then the operator $T_{\alpha,\beta}$, defined by formula (1), is bounded from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$ if and only if $A_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{z>0} A_{\alpha,\beta}(z) < \infty$,

$$A_{\alpha,\beta}(z) = \left(\int\limits_z^\infty v(x) W^{q(\alpha-\beta-1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^z W^{\beta p'}(s) u^{p'}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}},$$

and operator $T_{\alpha,\beta}$ is compact from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$ if and only if $A_{\alpha,\beta} < \infty$ and $\lim\limits_{z \to 0^+} A_{\alpha,\beta}(z) = \lim\limits_{z \to \infty} A_{\alpha,\beta}(z) = 0$. Moreover $\|T_{\alpha,\beta}\| \approx A_{\alpha,\beta}$, where $\|T_{\alpha,\beta}\|$ is the norm of the operator (1) from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$.

[1] Abylayeva A.M., Oinarov R. and Persson L.-E., *Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators.* // Journal, of Inequal. and Appl. (JIA), No. 324, 2016.

Неравенства типа Харди в слабо выпуклых областях

@ Авхадиев Ф.Г.

Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Пусть $\rho(x,\Omega)$ — расстояние от точки $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ до границы области Ω, т. е. $\rho(x,\Omega) := \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$. Пусть $\rho(\Omega) := \sup_{x\in\Omega} \rho(x,\Omega)$. Для $p \in [2,\infty)$ рассмотрим следующие неравенства типа Харди

$$\int_\Omega \rho^{p-2}(x,\Omega)\,|\nabla u(x)|^p dx \geq c_p(\Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{\rho^2(x,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

$$\int_\Omega \rho^{p-2}(x,\Omega)\,|(\nabla u(x), \nabla \rho(x,\Omega))|^p\,dx \geq c_p^*(\Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{\rho^2(x,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где константы $c_p(\Omega) \in [0,\infty)$ и $c_p^*(\Omega) \in [0,\infty)$ предполагаются максимальными из возможных, $\nabla f(x)$ — градиент функции f, $(\nabla u, \nabla \rho)$ — скалярное произведение. Так как $|\nabla \rho(x,\Omega)| = 1$ почти всюду на Ω, то легко показать, что $c_p(\Omega) \geq c_p^*(\Omega)$. Мы дополняем известные результаты о константе $c_p(\Omega)$ (см. [1] — [4]) следующим утверждением.

Теорема. Предположим, что $p \in [2,\infty)$, $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — невыпуклая область, такая, что $\rho(\Omega) < \infty$, и, кроме того, для любой граничной точки $y \in (\partial\Omega) \setminus \infty$ существует внешняя точка $a_y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, такая, что

$$|y - a_y| \geq \rho(\Omega)/\Lambda_n, \quad B_y = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a_y| < |y - a_y|\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Тогда $c_p(\Omega) = c_p^*(\Omega) = c_p(\Omega \times \mathbb{R}^k) = c_p^*(\Omega \times \mathbb{R}^k) = 1/p^p$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

Константы Λ_n введены нами в статье [1], где показано, что $\Lambda_2 \approx 2.49$, $\Lambda_3 = 1$, $\Lambda_4 \approx 0.61$, Λ_n убывает с ростом n, $\Lambda_n > 1/(n-2)$ при $n > 3$.

[1] Авхадиев Ф.Г. Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна 1/4. Изв. РАН. Сер. матем. **78**:5, 3–26, 2014.

[2] Balinsky A.A, Evans W.D. and Lewis R.T. The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality. Universitext, Springer: New York, 2015.

[3] Avkhadiev F. Selected results and open problems on Hardy-Rellich and Poincaré-Friedrichs inequalities. Anal. Math. Phys. 11, 134, 1–20, 2021.

[4] Авхадиев Ф.Г. Неравенства типа Харди, содержащие градиент функции расстояния. Уфим. матем. журн. **13**:3, 3–16, 2021.

Квантовая томография на локально компактных группах

@ Амосов Г.Г.
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия

Значения, которые получаются в результате измерения квантового состояния, не обязаны быть действительными или целыми числам. Например, при измерении фазы логично предположить, что множество значений совпадает с группой единичной окружности. Мы рассматриваем общую ситуацию, когда значения принадлежат некоторой локально компактной группе G с мерой Хаара μ. Обозначим $\hat{G}$ дуальную группу с мерой Хаара ν. Определим проективное унитарное представление $\hat{G}\times G$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(G) = \{f : \int\limits_G |f(g)|^2 d\mu(g) < +\infty\}$ формулой

$$(\pi(\chi, g)f)(a) = \chi(a)f(a+g),\ g, a \in G,\ \chi \in \hat{G}.$$

Обозначим $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ пространство операторов Гильберта-Шмидта. Выпуклое множество квантовых состояний (положительных операторов со следом) $\mathfrak{S}(H) \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Определим отображение Φ на операторах ранга один $|f\rangle\langle h|$ формулой

$$[\Phi(|f\rangle\langle h|)](\chi, g) = \langle h, \pi(\chi, g)f\rangle,\ f, h \in \mathcal{H},\ g \in G,\ \chi \in \hat{G}.$$

Для единичного вектора $f \in \mathcal{H}$ мы называем функцию $\Phi(|f\rangle\langle f|)$, заданную на $\hat{G}\times G$ характеристической функцией чистого состояния $|f\rangle\langle f|$. Для фиксированных $\chi \in \hat{G}$, $g \in G$ определим множество $G_{\chi,g} = \{(\chi', g') : \chi'(g) = \chi(g')\}$. Можно показать, что множество $G_{\chi,g}$ является подгруппой $\hat{G}\times G$. Рассмотрим сужение характеристической функции состояния $|f\rangle\langle f|$ на $G_{\chi,g}$ и определим функцию

$$F_f(\chi', g') = \chi'(g')^{1/2}\Phi(|f\rangle\langle f|)(\chi' g'),\ (\chi', g') \in G_{\chi,g}.$$

Теорема. Существует такая вероятностная мера $\mu^f_{\chi,g}$ на $\hat{G}\times G$, что

$$F_f(\chi', g') = \int\limits_{G_{\chi,g}} X_{\chi',g'}(\chi'', g'')d\mu^f_{\chi,g}(\chi'', g''),\ (\chi', g') \in G_{\chi,g},$$

где $(\chi', g') \to X_{\chi',g'} \in \hat{G}_{\chi,g}$ устанавливает изоморфизм между $G_{\chi,g}$ и $\hat{G}_{\chi,g}$.

Мы называем набор распределений вероятностей $\{\mu^f_{\chi,g},\ \chi \in \hat{G},\ g \in G\}$ квантовой томограммой состояния $|f\rangle\langle f|$. Для случая $G = \mathbb{R}$ она совпадает с оптической квантовой томограммой.

Поддержано Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2020-788.

Оценки норм дифференциальных операторов в весовых пространствах потенциалов

@ Баймурзаева А.Б.
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

Рассматривался дифференциальный оператор

$$\mathrm{L}_0 f = \sum_{|\alpha|\leq\ l} a_\alpha(x) D^\alpha f, \quad f \in C_0^\infty(\Omega),$$

с локально суммируемыми в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ коэффициентами $a_\alpha(x)$. Решена задача о существовании корректно определенного ограниченного продолжения L_0 как оператора, действующего из пространства $H_p^m(\Omega;\rho,\upsilon_m)$ в $H_p^t(\Omega;\rho,\upsilon_t)$, $0 < t < m-l$, $1 < p < \infty$. Для $s > 0$, $1 < p < \infty$ пространство $H_p^s(\Omega;\rho,\upsilon_s)$ определяется как пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций по норме

$$\|f; H_p^s(\Omega;\rho,\upsilon_s)\| = \left[\sum_{j\geq 1}\left(\rho^p(x^j)\|\psi_j f; H_p^s\|^p + \upsilon_s^p(x^j)\|\psi_j f; L_p\|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

В (1) $\upsilon_s(x) = \rho(x)h^{-s}(x)$, функции $\rho(x)$, $0 < h(x) \leq 1$ удовлетворяют условиям погружения $Q(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y_j - x_j| < \frac{h(x)}{2}; 1 \leq j \leq n\} \subset \Omega$ $(x \in \Omega)$ и ограниченного колебания

$$\varkappa^{-1} \leq \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \frac{h(y)}{h(x)} \leq \varkappa, \text{ если } y \in \tau Q(x)(0 < \tau < 1),$$

$\{\psi_j\}$ - разбиение единицы, соотнесенное двойному покрытию типа Безиковича $\{\tau^2 Q(x^j), \tau Q(x^j)\}$ в области Ω (см. [1]).

Семейство $\{H_p^s(\Omega;\rho,\upsilon_s), s > 0\}$ инвариантно относительно комплексной интерполяции, содержит весовые пространства Соболева, Соболева-Слободецкого.

Работа была проделана при поддержке гранта МОН РК AP08856104.

[1] Kussainova L.K., Sultanaev Ya.T., Murat G.K. Approximate Estimates for a Differential Operator in a Weighted Hilbert Space // Differential Equations. 2019. Vol. 55, No 12. P. 1589-1597.

Оценки интегралов от производных рациональных функций в многосвязных областях на плоскости

@ Баранов А.Д., Каюмов И.Р.
Санкт-Петербургский государственный университет, Казанский федеральный университет

Из работ С.Н. Мергеляна (1951), У. Рудина (1955) и Дж. Пиранья-на (1968) хорошо известно, что существуют бесконечные произведения Бляшке B в единичном круге $\mathbb{D}$, для которых $I(B) := \int_{\mathbb{D}} |B'(z)|\, dxdy = \infty$. Возникает естественный вопрос о поведении величины $I(B)$, если B – конечное произведение Бляшке фиксированного порядка n. Нами получен точный порядок роста таких интегралов. А именно, имеет место

Теорема 1. Пусть B –конечное произведение Бляшке порядка n. Тогда

$$I(B) \le \pi(1 + \sqrt{\log n}).$$

С другой стороны, существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует конечное произведение Бляшке степени n, для которого $I(B) \ge c(1 + \sqrt{\log n})$.

Доказательство точности этого неравенства основано на тонких результатах Н.Г. Макарова (1989) и Р. Бануэлоса и Ч.Н. Мура (1991) о граничном поведении функций из пространства Блоха.

Рассмотрим более общий вопрос об оценках производных ограниченных рациональных функций, впервые исследованный Е.П. Долженко (1966) для достаточно гладких областей. Получено следующее неравенство типа Долженко, в котором удалось почти полностью освободиться от условий регулярности области.

Теорема 2. Пусть G – конечносвязная область класса Джона со спрямляемой границей, $1 < p \le 2$. Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G и от p, что для произвольной рациональной функции R степени не выше n выполнены неравенства

$$\int\int_G |R'(z)|^p\, dxdy \le Cn^{p-1} \sup_{z\in G} |R(z)|^p, \quad p \in (1, 2],$$

$$\int\int_G |R'(z)|\, dA(z) \le C \ln(n + 1) \sup_{z\in G} |R(w)|. \tag{1}$$

Показано также, что при дополнительных условиях регулярности области правую часть в (1) можно заменить на $C\sqrt{\ln(n + 1)}\, \sup_{z\in G} |R(z)|$.

Квазиоднородные модельные CR-многообразия

@ Белошапка В.К.
МГУ им.М.В.Ломоносова, Москва

Аналитическая техника формальных степенных рядов и гомологических операторов, восходящая к А.Пуанкаре, эффективно применяется в анализе и геометрии. Ее применения в CR-геометрии (метод модельной поверхности) продолжают совершенствоваться, при этом выявляются связи с другими областями математики (теория Танаки градуированных алгебр Ли, голоморфная динамика, коммутативная алгебра). При этом подходе внимание фокусируется на модельных поверхностях – поверхностях, которые являются графиками специальных вещественных полиномов и являются самыми голоморфно симметричными объектами. В недавних работах базовая конструкция (метод модельной поверхности) стала более гибкой и включила в сферу своей применимости широкий класс CR-многообразий. В 2020-м году была описана соответствующая конструкция, применимая к ростку произвольного порождающего CR-многообразия конечного (по Блуму-Грэму) типа [1]. Веса и градуировки как коммутативных колец, так и алгебр Ли использовались в этом подходе к CR-геометрии очень давно. Однако в классической версии переменные, параметризующие комплексную касательную ростка, имели одинаковые веса. При этом накопилось немало интересных примеров использования *различных* весов внутри комплексной касательной. В 2021-м году была описана "взвешенная" версия метода модельной поверхности. Эта версия адаптирована для работы с произвольными CR-многообразиями конечного типа. При этом используется модификация типа ростка по Блуму-Грэму, описанная в 2018-м году М.Степановой (тип по Блуму-Грэму-Степановой). В рамках этой версии сформулированы и доказаны основные утверждения (максимальная симметричность, структура алгебры инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов и т.д.). Возникли новые открытые вопросы.

Этот подход позволил с единых позиций осмыслить имеющиеся примеры. В частности, новая теория включает в себя гиперповерхности И.Винкельмана, А.Лободы, А.Лабовского, Б.Кругликова, И.Зеленко и их обобщения. Эти гиперповерхности ранее были описаны как самые симметричные в тех или иных классах.

[1] V.K.Beloshapka, CR-Manifolds of Finite Bloom–Graham Type: the Method of Model Surface // RJMP vol. 27, no.2, pp.155–174 (2020).

Traps in quantum control landscapes

@ Volkov B.O.[1,2], Pechen A.N.[1,2,3]

[1] Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies, Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia;

[2] Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, Dolgoprudnyi, Russia;

[3] National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia

Quantum control is an important tool for the development of modern quantum technologies [1]. Control can been realized by applying to the system a time-depended external control action. For example, this control action can been generated by a laser field. A quantum control problem can be formulated as a problem of maximization of some control objective functional. A control is called a trap if it is a point of a local but not global extremum of this functional. The analysis of quantum control landscapes, particularly analysis of traps, is important for numerical and laboratory optimization [2, 3, 4, 5]. In the talk, we will discuss several results on the presence and absence of traps in quantum landscapes for various problems of quantum control.

This talk presents the work partially funded by Russian Federation represented by the Ministry of Science and Higher Education (grant number 075-15-2020-788).

[1] S.J. Glaser, U. Boscain, T. Calarco, C.P. Koch, W. Köckenberger, R. Kosloff, I. Kuprov, B. Luy, S. Schirmer, T. Schulte-Herbrüggen, D. Sugny, F.K. Wilhelm, Training Schrödinger's cat: quantum optimal control, Eur. Phys. J. D. **69**, 279 (2015).

[2] H.A. Rabitz, M.M. Hsieh and C.M. Rosenthal, Quantum Optimally Controlled Transition Landscapes, Science **303**, 1998–2001 (2004).

[3] A.N. Pechen, D.J. Tannor, Are there Traps in Quantum Control Landscapes?, Phys. Rev. Lett. **106**, 120402 (2011).

[4] P. de Fouquieres, S.G. Schirmer, A closer look at quantum control landscapes and their implication for control optimization, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **16**, 1350021 (2013).

[5] B.O. Volkov, O.V. Morzhin, A.N. Pechen, Quantum control landscape for ultrafast generation of single-qubit phase shift quantum gates, J. Phys. A: Math. Theor. **54**, 215303 (2021).

Оценка расстояния от мнимых экспонент до алгебраических полиномов в весовом пространстве

@ Гайсин А.М.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Следуя работе [1], через C^0_τ обозначим весовое пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций f, таких, что $f(t) = \mathrm{o}(T(|t|))$, $t \to \infty$, где $T(\tau)$ — функция следа для заданной последовательности $M = \{M_n\}$ $(M_n > 0)$. Предполагаем, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr < \infty. \tag{1}$$

Норма в C^0_τ определяется как

$$||f||_{C^0_\tau} = \sup_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{T(|t|)}.$$

Через L обозначим замыкание линейной оболочки множества P алгебраических полиномов в C^0_τ. В силу условия (1) P не плотно в C^0_τ. Однако известно, что все функции из C^0_τ, допускающие аппроксимацию полиномами в данном пространстве, являются сужениями некоторых целых функций минимального экспоненциального типа (см. [2], Дополнения и задачи).

Обозначим $d_T(s) = \mathrm{dist}_{C^0_\tau}(L, e_s)$, $e_s(t) = e^{ist}$.

Верна

Теорема. Если выполняется условие (1), то

$$cJ_{M'}(s) \le d_T(s) \le J_M(s), \quad s \in I = [0,1],$$

где

$$J_M(s) = \sup\{|g(s)|: \ \max_I |g^{(n)}(t)| \le M_n, \ f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, n \ge 0\},$$

$$M' = \{M_{n-2}\} \ (M_{-2} = M_{-1} = M_0), \ c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M'_0}{M_0 + M'_0} \right), \ M'_0 = \min_{n \ge 0} M_n.$$

В [1] соответствующие оценки получены в других терминах, но верна только оценка для $d_T(s)$ снизу (она не точна).

[1] Matsaev V., Sodin M. Asymptotics of Fourier and Laplace transforms in weighted spaces of analytic functions // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14, №4. С. 107–140.

[2] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. — 408 с.

Усиленная неполнота систем экспонент в полосе

@ Гайсин Р.А.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть W — класс всех положительных, возрастающих и непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций w, таких, что

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty,$$

а

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad |\lambda| = r.$$

Определение. Систему экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ будем называть *усиленно не полной (относительно прямоугольников)*, если для всех a, b $(0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty)$ и β, $\beta \neq \pm\lambda_n$ $(n \geq 1)$,

$$\inf_{\gamma(-a,a)} \inf_{c_n} \left\| e^{\beta z} - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{\mu_n z} \right\|_{\gamma(-a,a)} = \varepsilon_\beta(a,b) > 0.$$

Здесь $||g||_\gamma = \max\limits_\gamma |g(z)|$, внутренний инфимум берется по всем квазиполиномам $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{\mu_n z}$, $\mu_n = \lambda_n$, $\mu_{-n} = -\lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$, а внешний — по всем спрямляемым кривым $\gamma = \gamma(-a,a)$ из прямоугольника $P(a,b) = \{z = x + iy : |x| \leq a, |y| < b\}$, соединяющим вертикальные стороны (для системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ аналогичное определение дано в [1]).

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполняются условия*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \qquad 2)\ \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\mu(t;\lambda_n)}{t} dt \leq w(\lambda_n) \quad (n \geq 1), \quad w \in W, \qquad (1)$$

где $\mu(t;\lambda_n)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$. Тогда система экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ усиленно не полна относительно полос $P(a,\infty)$.

Отметим, что усиленная неполнота системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$ была ранее доказана в работе [1]. Приведем этот результат.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$, $h(\delta) = h_-(\delta)h_+(\delta)$, *где*

$$h_+(\delta) = \int\limits_0^\infty Q(ir)e^{-\delta r}dr, \qquad h_-(\delta) = \int\limits_0^\infty \left|Q(re^{i\delta})\right|^{-1} e^{-\delta r}dr \quad (\delta > 0).$$

Если функция h *удовлетворяет условию Левинсона*

$$\int\limits_0^d \ln\ln h(\delta)d\delta < \infty, \quad h(d) \geq e, \tag{2}$$

то система $\{e^{\lambda_n z}\}$ *усиленно не полна относительно прямоугольников (здесь* γ *— любая спрямляемая кривая).*

Отметим, что условия (1) и (2) независимы. В докладе будут приведены соответствующие примеры, иллюстрирующие независимость этих условий.

[1] Гайсин А.М. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.

Интегрируемость и мероморфное продолжение

@ Домрин А.В.

МГУ, г.Москва, Россия; ИМ с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Для функции $u(x,t)$ будем обозначать через u_j ее j-ую частную производную по x. Эволюционное уравнение $u_t = F(u, u_1, \dots, u_n)$, $n \geq 2$, $\partial F/\partial u_n \not\equiv 0$, называется интегрируемым, если векторное пространство его высших симметрий (т.е. таких $G(u, u_1, \dots, u_m)$, $m \geq 2$, $\partial G/\partial u_m \not\equiv 0$, что система $u_t = F$, $u_s = G$ на функцию $u(x,t,s)$ формально совместна) бесконечномерно. Известна классификация всех интегрируемых уравнений со взвешенно однородной правой частью. В докладе будут указаны все входящие в эту каласcификацию уравнения, для которых любое локальное голоморфное решение допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфной функции от x при каждом фиксированном t.

Нелокальная разрешимость системы квазилинейных уравнений, где $f_1,\ f_2,\ S_1,\ S_2$ — известные функции

@ Донцова М.В.
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрена задача Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ — неизвестные функции, $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ — известные функции, с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

В [1] получена система интегральных уравнений:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим

$$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\},$$

$$C_\varphi = \max\left\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right|, i=1,2,\ l=\overline{0,2}\right\},$$

$$C_f = \max\left\{\sup_{\Omega_T}|f_i|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_i|, i=1,2\right\},$$

где K — положительное число.

Теорема. Пусть $\varphi_1,\varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1,f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1,S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, $K = C_\varphi + TC_f$ и выполняются условия

1) $\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 > 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 > 0$ на Z_K,

2)$\varphi_1'(x) \ge 0,\ \varphi_2'(x) \ge 0$ на R, 3)$\partial_x f_1 \ge 0,\ \partial_x f_2 \ge 0$ на Ω_T.

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1),(2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

[1] Донцова М.В.Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Журнал Средневолжского математического общества. № 3. Т. 21. 2019. С. 317–328.

Singular integrals and regular BMO space

@ Dubtsov E.S.[1] and Vasin A.V.[2]
[1]St.Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, St.Petersburg, Russia
[2]Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St.Petersburg, Russia

For a positive Radon measure μ on $\mathbb{R}^m$, Tolsa [1] introduced RBMO(μ), the regular BMO space with respect to μ. This space is suitable for the non-doubling measures μ and it has genuine properties of the classical space BMO. Moreover, it is proved in [1] that a bounded on $L^2(\mu)$ Calderón–Zygmund operator maps $L^\infty(\mu)$ into RBMO(μ). Motivated by this result, we obtain a T1 condition sufficient for the boundedness of Calderón–Zygmund operators on RBMO(μ).

By definition, a cube is a closed cube in $\mathbb{R}^m$ with sides parallel to the axes. For a cube Q, let $\ell = \ell(Q)$ denote its side-length. The notation $Q(x, \ell)$ is used to indicate explicitly the center x and the side-length ℓ. Given a finite positive measure μ on $\mathbb{R}^m$ and two cubes $Q \subset R$ in $\mathbb{R}^m$, put

$$K(Q,R) = 1 + \sum_{j=1}^{N_{Q,R}} \frac{\mu(2^jQ)}{\ell^n(2^jQ)},$$

where $N_{Q,R}$ is the minimal integer k such that $\ell(2^kQ) \geq \ell(R)$. Also, for a cube $Q \subset \mathbb{R}^m$, put $K(Q) = K(Q, 2^kQ)$, where k is the smallest positive integer such that $2\mu(2^kQ) > \mu(\mathbb{R}^m)$.

Theorem. Let μ be a finite positive n-dimensional measure on $\mathbb{R}^m$, $0 < n \leq m$. Let T be a Calderón–Zygmund operator with kernel $\mathcal{K}$ and bounded on $L^2(\mu)$. Assume that

$$\left| \int_{Q(x,R)\setminus Q(x,r)} \mathcal{K}(x,y)\, d\mu(y) \right| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}^m,\ 0 < r < R,$$

and for each doubling cube $Q \subset \mathbb{R}^m$, there exists a constant b_Q such that

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |T1 - b_Q|\, d\mu \leq \frac{C}{K(Q)} \text{ for all doubling cubes } Q,$$

$$|b_Q - b_R| \leq C\frac{K(Q,R)}{K(Q)} \text{ for all doubling cubes } Q, R,\ Q \subset R,$$

where $C > 0$ does not depend on Q and R. Then T is bounded on $\mathrm{RBMO}(\mu)$.

[1] Tolsa X. BMO, H^1, and Calderón–Zygmund operators for non doubling measures. Math. Ann. **319** (2001), no.1, 89–149.

Простейший одномерный нехаотический аттрактор и гладкость косого произведения

@ Ефремова Л.С.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород,
МФТИ, Долгопрудный, Россия

Рассматривается отображение $F : M \to M$ ($M = M_1 \times M_2$, где каждое из множеств M_1 или M_2 - отрезок вещественной прямой или единичная окружность в комплексной плоскости) вида

$$F(x,\, y) = (f(x),\, g_x(y)),\ \text{где}\ g_x(y) = g(x,\, y),\ (x,\, y) \in M. \tag{1}$$

Предполагается, что множество $Per(F)$ периодических точек F не пусто, а множество $\tau(F)$ их (наименьших) периодов ограничено.

Следуя [1], замкнутое инвариантное множество $A \subset M$ назовем *нехаотическим аттрактором отображения* F, если A обладает поглощающей окрестностью, и топологическая энтропия $h(F_{|A})$ сужения F на множество A равна 0.

Описана структура притягивающих множеств и показано, что бесконечный нехаотический аттрактор непрерывного отображения вида (1) есть орбита (относительно F) гомеоморфного невырожденному отрезку множества $\{x^0\} \times J,\ J \subseteq M_2$, проектирующаяся на орбиту некоторой периодической точки x^0 факторотображения $f : M_1 \to M_1$.

Доказано, что если M_2 - отрезок, то бесконечные нехаотические аттракторы в рассматриваемых отображениях не существуют в предположении C^k-гладкости при $k \geq 1$; если же M_2 - окружность, то бесконечные нехаотические аттракторы существуют даже в предположении C^∞-гладкости.

Построены примеры отображений (1), удовлетворяющих указанным выше условиям, с бесконечным нехаотическим аттрактором и максимальными дифференциальными свойствами.

Приведенные результаты обобщают соответствующие результаты работ [1], [2].

[1] Ефремова Л.С. Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейшего косого произведения отображений интервала. Матем. сб. **201**:6 2010, 93–130.
[2] Ефремова Л.С. Динамика косых произведений отображений интервала. УМН. **72**:1 2017, 107-192.

Произведение Дюамеля в пространствах голоморфных функций

@ Иванова О.А.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

В настоящее время довольно интенсивно изучается произведение Дюамеля в различных функциональных пространствах. В пространстве Фреше $H(Q)$ всех функций, голоморфных в звездной относительно точки 0 области $Q \subset \mathbb{C}$, произведение Дюамеля $(f * h)(z) = f(0)h(z) + \int\limits_0^z f'(\tau)h(z-\tau)d\tau$ было введено и изучено Н. Уигли [1]. В докладе идет речь о бинарных операциях в пространствах голоморфных функций, частным случаем которых является операция $*$. Схема введения такого умножения $*$ следующая. Пусть E — локально выпуклое пространство голоморфных функций, E' — его топологическое сопряженное. С помощью сдвигов, ассоциированных с одномерным возмущением оператора Поммье, действующего в E, в E' задается умножение $\otimes$, с которым E' является алгеброй. Преобразование Фурье-Лапласа или сопряженное к нему устанавливает алгебраический изоморфизм E' на пространство G. Произведение $*$ является реализацией $\otimes$ в G при таком изоморфизме. Рассматриваются следующие ситуации:
1) E — некоторое пространство целых (в $\mathbb{C}$) функций экспоненциального типа, G — пространство $H(Q)$ функций, голоморфных в выпуклой области Q, содержащей точку 0 [2], [3];
2) E — пространство Фреше $H(\Omega)$ функций, голоморфных в односвязной области Ω, содержащей точку 0; G — соответствующее пространство P_Ω целых функций экспоненциального типа [4].

[1] Wigley N. The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J. 1974. V. 41. P. 211–217.
[2] Ivanova O. A., Melikhov S. N. On invariant subspaces of the Pommiez operator in the spaces of entire functions of exponential type // J. Math. Sci. 2019. V. 241. № 6. P. 760–769.

[3] Ivanova O. A., Melikhov S. N. On the Commutant of the Generalized Backward Shift Operator in Weighted Spaces of Entire Functions // Trends in Mathematics: Operator Theory and Differential Equations. Editors: A.G. Kusraev, Z.D. Totieva. Birkhäuser. 2021. P. 37–48.

[4] Иванова О. А., Мелихов С. Н. Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля // Владикавк. матем. журн. 2020. V. 22. № 3. С. 72–84.

Нули дзета-функции Римана и операторы Штурма–Лиувилля

@ Капустин В.В.

Санкт-Петербургское отделение математического института им.В.А.Стеклова РАН, г.Санкт-Петербург, Россия

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема. Пусть A — оператор Шрёдингера $Au = -u''+qu$ на полуоси $\big(x_0, +\infty\big)$, где

$$x_0 = \log(4\pi), \qquad q(x) = \frac{1}{4}e^{2x} \pm \frac{1}{2}e^{x};$$

в точке x_0 наложено самосопряжённое граничное условие, причём спектр оператора A не содержит точку 0. Тогда существует одномерное возмущение оператора A^{-1}, спектр которого совпадает с множеством

$$\left\{\frac{4}{z^2}: \quad |\mathrm{Im}\, z| < \frac{1}{2}, \quad \zeta\left(\frac{1}{2}+iz\right) = 0\right\} \setminus \left\{\frac{4}{\nu^2}\right\},$$

где ν — вещественное число такое, что дзета-функция Римана ζ имеет простой ноль в точке $\frac{1}{2} + i\nu$.

Для доказательства явно строится пространство де Бранжа, содержащее кси-функцию Римана, делённую на многочлен третьей степени, и соответствующая ему каноническая система вида $J\dot{f}(t) = zH(t)f(t)$ с диагональным гамильтонианом H, представляющим собой локально суммируемую неотрицательную матричнозначную (2×2) функцию на полуоси. С каждой канонической системой естественно связаны гильбертово пространство и оператор в нём. Квадрат оператора такой канонической системы представялет собой прямую сумму двух операторов Штурма–Лиувилля.

О разделимости нелинейного эллиптического дифференциального оператора в весовом пространстве

@ Каримов О.Х., Хакимова З.Дж.
Институт математики им.А.Джураева НАНТ, г.Душанбе, Таджикистан

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[1]-[4] и имеющиеся там ссылки).

Рассмотрим в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ нелинейный дифференциальный оператор вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$- вещественный положительный коэффициент, а $V(x,z)$ -положительная функция. Представим функцию $V(x,z)$ в виде $V(x,z) = F(x,\xi,\eta)$, $\xi = Rez$, $\eta = Imz$. Найдены условия на функцию $F(x,\xi,\eta)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и для всех решений $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| + \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\| +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| \leq M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

[1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

[2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n.-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

[3] A.S.Mohamed, H.A.Atia. Separation of the general second order elliptic differential operator with an operator potential in the weighted Hilbert spaces. - Appl. Math. Comput. 162 (2005), pp.155–163.

[4] Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве - Чебышевский сборник, 2021, т.22, No1(77), с.163-176.

Оценки l_p-норм коэффициентов подчиненных аналитических в круге функций

@ Каюмов И.Р.
Казанский федеральный университет

Пусть функции $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ и $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ голоморфны в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Напомним, что функция g называется подчиненной функции f, если существует голоморфная в круге $\mathbb{D}$ функция φ с неподвижной точкой в начале координат такая, что $|\varphi| < 1$ в $\mathbb{D}$ и $g = f(\varphi)$.

Предположим, что функция g подчинена f. Тогда, как утверждает классическая теорема Литтлвуда, имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k|^p r^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^p r^k, \quad r < 1$$

в случае $p = 2$. Хорошо известно, что такой результат неверен для $p \neq 2$. Однако, он справедлив в случае $p \in [1, 2]$ для $r \le r_p > 0$.

В ходе доклада планируется дать описание результатов об оценке r_p.

Постселективные квантовые измерения и эффект нарушения границы Холево

@ Кенбаев Н.Р.[1,2], Кронберг Д.А.[3]
1 Terra Quantum AG, St. Gallerstrasse 16A, CH-9400 Rorschach, Switzerland,
2 Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия,
3 Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия

Задача различения между квантовыми состояниями играет важную роль в квантовой теории информации и в квантовой криптографии. Хорошо известно, что взаимная информация между входом и выходом ограничена сверху границей Холево [1]. В то же время эта граница имеет место лишь при отсуствии постселекции. Простым примером, показывающим нарушение границы Холево при возможности постселекции, является безошибочное различение двух чистых неортогональных квантовых состояний [2]. При таком измерении на выходе получается либо безошибочная информация о сигнале, либо неопределенный результат, свидетельствующий о неудаче. Если отбросить неопределенные исходы, взаимная информация между входом и выходом будет соответствовать идеальному каналу, что выше величины Холево для двух неортогональных состояний. Однако подобное измерение возможно не всегда, а только в ситуации несовпадающих носителей состояний.

В работе предлагается подход, который позволяет превзойти границу Холево при использовании измерений с постселекцией в более общем случае, включающем в себя и два произвольных некоммутирующих состояния. Это нетривиальное утверждение, так как оно показывает, что даже индивидуальные измерения с постселекцией могут быть более эффективны, чем коллективные измерения без постселекции.

Также в работе рассматривается геометрическая интерпретация построенных измерений, которая демонстрирует роль относительной максимальной энтропии при их применении.

[1] Холево А. С. Проблемы передачи информации. – 1973. – Т. 9. – №. 3. – С. 3-11.

[2] Ivanovic, I. D. Phys. Lett. A, 123(6), 257-259. (1987)

[3] Kenbaev, N. R., Kronberg D. A. AIP Conference Proceedings. Vol. 2362. No. 1. (2021)

Геометрический критерий интерполяции целыми функциями при уточненном порядке Бутру

@ Костенко И.В.[1], Малютин В.А.[2]

[1]Курский государственный университет, г. Курск, Россия

[2]Сумский государственный университет, Сумы, Украина, Riverstone International School, Boise, USA

Пусть $\rho(r)$ — уточнённый порядок в смысле Бутру. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r > 0$ Обозначим через $[\rho(r), \infty)_B$ пространство целых функций $f(z)$, таких, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\ln|f(z)| \leq K_f V(|z|)$, где $K_f > 0$ — постоянная, зависящая от f, не зависящая от z.

Определение. Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ называется интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho(r), \infty)_B$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяющих условию:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln^+|b_n|}{V(|a_n|)} < \infty\,,$$

существует функция $F \in [\rho(r), \infty)_B$, решающая проблему интерполяции

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

В такой постановке задача интерполяции относится к задачам *свободной интерполяции* [1], когда на значения в узлах накладываются минимальные ограничения, обусловленные принадлежностью интерполирующей функции заданному пространству. Мы получаем критерии ее разрешимости в терминах меры, соответствующей узлам интерполяции. По множеству A определяются функции $\Phi_z^+(\alpha)$ (см., например, [2]).

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ является интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho(r), \infty)_B$.

2) Выполняется соотношение:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \sin\theta \int_0^{\delta} \frac{\Phi_z^+(\alpha)\, d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2} < \infty\,.$$

[1] Леонтьев А.Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка // Докл. АН СССР, **5** (1948), 785-787.

[2] Малютин К.Г. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Матем. сб., **184**:2 (1993), 129-144.

Расширение полугрупп с помощью диэдральной группы и полугрупповые C^*-алгебры

@ Липачева Е.В.

Казанский государственный энергетический университет, г.Казань, Россия

В статьях [1, 2] было начато изучение взаимосвязей между расширениями полугрупп и структурой соответствующих полугрупповых C^*-алгебр. В докладе обсуждаются некоторые дальнейшие результаты, полученные в этом направлении. В частности, дан ответ на вопрос профессора Г.Г. Амосова о сюръективном гомоморфизме полугруппы на диэдральную группу, который был задан автору на конференции MPDSIDA–2021 (МФТИ, Долгопрудный, 30 июня – 9 июля, 2021).

Пусть Z – аддитивная группа целых чисел, $Z^{\times} := Z \setminus \{0\}$ – мультипликативная полугруппа целых чисел без нуля, N – мультипликативная полугруппа натуральных чисел и D_p – диэдральная группа порядка p. Построено полупрямое произведение $Z \rtimes_{\varphi} Z^{\times}$, которое является нормальным расширением полугруппы $Z \times N$ с помощью группы D_p. Показано, что построенное расширение полугрупп является шрайеровым.

Изучена структура полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(Z \rtimes_{\varphi} Z^{\times})$. Доказано, что она является топологически градуированной по диэдральной группе D_p и что существует изометрический *-гомоморфизм полугрупповых C^*-алгебр

$$C_r^*(Z \times N) \longrightarrow C_r^*(Z \rtimes_\varphi Z^\times).$$

Исследована структура $C_r^*(Z \times N)$-модуля на подлежащем пространстве C^*-алгебры $C_r^*(Z \rtimes_\varphi Z^\times)$. Показано, что имеет место топологический изоморфизм $C_r^*(Z \times N)$-модулей:

$$C_r^*(Z \rtimes_\varphi Z^\times) \cong \bigoplus_1 C_r^*(Z \times N),$$

где количество слагаемых в прямой l_1-сумме равно $2p$.

[1] Е.В. Липачева. Расширения полугрупп и морфизмы полугрупповых C^*-алгебр. Сибирский математический журнал, 2021, т. 62, No1, стр. 82–96.

[2] Е.В. Липачева. О градуированных полугрупповых C^*-алгебрах и гильбертовых модулях. Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 2021, т. 313, стр. 131–142.

Mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of a beam with a moving boundary

@ Litvinov V.L., Litvinova K.V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Until now, the problems of longitudinal - transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account [1]. In rare cases, the action of the forces of resistance of the external environment was taken into account [6]. Real technical objects are much more complicated, for example, with an increase in the intensity of oscillations, the geometric nonlinearities of the object have a great influence on the oscillatory process. In connection with the intensive development of numerical methods, it became possible to more accurately describe complex mathematical models of longitudinal-transverse oscillations of objects with moving boundaries, taking into account a large number of factors influencing the oscillatory process. The paper presents a new nonlinear mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of a beam with a moving boundary, which takes into account geometric nonlinearity, viscoelasticity, energy exchange across the boundary. The boundary conditions are obtained in the case of interaction between the parts of the object to the left and to the right of the moving boundary. The resulting model is linearized. In this case, the principle of homogeneity is observed: in the particular case of small fluctuations, the obtained linear models coincided with the classical ones, which indicates the correctness of the results obtained. The obtained mathematical model allows one to describe high-intensity vibrations of a beam with a moving boundary.

[1] 1. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70-77.

Геометрический критерий интерполяции для пространств мероморфных функций в полуплоскости

@ Малютин К.Г., Кабанко М.В.
Курский государственный университет, г. Курск, Россия

В работе [1] рассматривались интерполяционные последовательности для пространств мероморфных функций в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$. Обозначим через $\mathcal{M}_+(\phi)$ ($\mathcal{A}_+(\phi)$) пространство мероморфных (аналитических) функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, рост которых $T(r,f) \leqslant A + B\phi(z)$ определяется заданной субгармонической функцией $\phi(z)$ с некоторыми константами $A, B > 0$. Функция $\phi(z)$ удовлетворяет условиям: 1) $\phi(z) \geqslant 0$, 2) $\ln(1+|z|^2) = O(\phi(z))$, 3) $\phi(\zeta) \leqslant C\phi(z) + D$, $|\zeta - z| \leqslant 1$. Пространство $\mathcal{M}_+(\phi)$ при некоторой функции $\phi(z)$ может содержать функции бесконечного порядка. Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность различных комплексных чисел, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой на вещественной оси и бесконечность. Найти условия, при которых для любых заданных последовательностей комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству

$$|b_n| + |c_n| \leqslant A\exp(B\phi(a_n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

существует функция $F \in \mathcal{M}_+(\phi)$, такая, что

$$F(a_n) = b_n,\ F_{-1}(a_n) = c_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $F_{-1}(a_n)$ — коэффициент с индексом (-1) разложения функции $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a_n.

В работе [1] был сформулирован критерий разрешимости интерполяционной проблемы в терминах функции, дивизор нулей которой включает в себя данную последовательность. Мы формулируем этот критерий в терминах меры, определяемой узлами интерполяции:

$$\mu(G) := \sum_{a_n \in G} \sin \arg a_n.$$

[1] Малютин К.Г., Кабанко М.В. Интерполяционные последовательности для пространств мероморфных функций в полуплоскости // Сборник тезисов Международной научной конференции (оз. Банное, 15 – 19 марта 2021 г.) (2021), с. 50.

Мероморфные функции конечного гамма-роста в единичном круге

@ Малютин К.Г., Наумова А.А.

Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Л. Рубел и Б. Тейлор [1] установили связь между ростом мероморфной в комплексной плоскости функции и ростом ее коэффициентов Фурье. Аналогичный результат для полуплоскости был получен в работе [2]. Мы получаем критерий принадлежности мероморфной функции конечного гамма-роста в единичном круге, который формулируется в терминах ее коэффициентов Фурье.

Теорема. Пусть $\gamma(r)$ $(r \in [0, 1))$ — функция роста, f —мероморфная функция в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$,

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| e^{-ik\theta} \, d\theta, \; k \in \mathbb{Z}\,,$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Следующие утверждения эквивалентны:

1) Функция f имеет конечный γ-рост, т.е. существуют положительные постоянные A и B такие, что

$$T(r, f) \leq A\gamma(Br)$$

для всех $r \in [0, 1)$.

2) (a) Коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют неравенству

$$|c_k(r, f)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

при некоторых положительных A, B и всех $r \in [0, 1)$;

(b) последовательность нулей (или полюсов) функции f имеет конечную γ-плотность.

[1] Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 53-96.
[2] Малютин К.Г. Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Матем. сб., **192**:6 (2001), 51-70.

Meromorphic solutions of higher order algebraic differential equations

@ Makhmutov S.A
Sultan Qaboos University, Muscat, Oman

First part concerns pointwise growth estimates for the spherical derivative of solutions of the N-th order algebraic differential equation

$$\left(f^{(N)}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} P_{k,N}(f)\left(f^{(N)}\right)^{n-k} = 0, \tag{1}$$

where

$$P_{k,N}(f) = \sum_{j_0=0}^{m_{k,0}} \sum_{j_1=0}^{m_{k,1}} \cdots \sum_{j_{N-1}=0}^{m_{k,N-1}} a_{k,j_0,\ldots,j_{N-1}} \prod_{\ell=0}^{N-1} \left(f^{(\ell)}\right)^{j_\ell}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

with $a_{k,j_0,\ldots,j_{N-1}}$ are analytic functions in the unit disk $\mathbb{D}$ and $m_{k,j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ for all $j = 0, \ldots, N-1$ and $k = 1, \ldots, n$. The case $N = 1$ reduces to the first order equation

$$(f')^n + \sum_{k=1}^{n} P_k(f)\,(f')^{n-k} = 0,$$

Methods of estimate the spherical derivative of meromorphic solutions of (1) were based on the Lohwater-Pommerenke re-scaling method. In that case we assume that a solution is not a normal function. Our approach allows to obtain a pointwise estimate for the spherical derivative of m-th power of a solution for some integer m. The question arises when for a given class X of meromorphic functions in the unit disk $\mathbb{D}$ and $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $f^m \in X$ implies $f \in X$. In some cases, the answer may be affirmative. We will consider some classes of meromorphic functions that already include normal functions, and the Lovater-Pommerenke method is inapplicable in these cases. This is the second part of the talk.
The talk was prepared in collaboration with Prof. Jouni Rättyä and Mr. Tony Vesikko.

Операторы почти адамаровского типа в пространстве целых функций многих комплексных переменных

@ Мелихов С.Н.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону; Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

Вводится и исследуется класс операторов почти адамаровского типа, для которых все пространства однородных многочленов переменных $z_1, ..., z_N$ над полем $\mathbb{C}$ фиксированной степени являются их инвариантными подпространствами. Потребность в этом возникла, в частности, при изучении коммутанта многомерной версии оператора Харди-Литтлвуда. Введенный класс содержит все адамаровские операторы, для которых каждый моном является их собственным вектором. Почти адамаровские операторы изучены в пространстве $H(\mathbb{C}^N)$ всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций.

Пусть $L_{ah}(H(\mathbb{C}^N))$ — множество (алгебра) операторов почти адамаровского типа в $H(\mathbb{C}^N)$, $\chi_z(f)(t,u) := f\left(\left(\sum\limits_{j=1}^{N} u_j z_j\right) t\right)$, $u, z, t \in \mathbb{C}^N$, $f \in H(\mathbb{C}^N)$. Для локально выпуклого пространства G символ G' обозначает топологическое сопряженное к G.

Теорема. Следующие утверждения равносильны:
(i) $A \in \mathcal{L}_{ah}(H(\mathbb{C}^N))$.
(ii) Существует $L \in H(\mathbb{C}^{2N})'$ такое, что $A(f)(z) = L(\chi_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in H(\mathbb{C}^N)$.

Выяснена связь описания почти адамаровских операторов с представлением операторов адамаровского типа в (уже) стандартном виде мультипликативной свертки, сохраняющей число переменных. С помощью отображения композиции χ_z в топологическом сопряженном к замкнутому подпространству $\Phi(\mathbb{C}^{2N})$ пространства $H(\mathbb{C}^{2N})$, естественно определенному условием почти адамаровости, введено умножение $*$. Алгебра $(\Phi(\mathbb{C}^{2N})', *)$ изоморфна алгебре $\mathcal{L}_{ah}(H(\mathbb{C}^N))$. Упомянутые результаты применены к описанию коммутанта многомерного аналога оператора Харди-Литтлвуда $\mathcal{H}(f)(z) = \int\limits_0^1 f(\tau z)d\tau$ в $H(\mathbb{C}^N)$. Этот оператор является адамаровским, а его коммутант совпадает с $\mathcal{L}_{ah}(H(\mathbb{C}^N))$. Приведенные результаты опубликованы в [1].

[1] Иванова О.А., Мелихов С.Н. Операторы почти адамаровского типа и оператор Харди–Литтлвуда в пространстве целых функций многих комплексных переменных // Матем. заметки. 2021. Т. 110. В. 1. С. 52—64.

Multiple power series continuability into a sectorial domaine

@ Mkrtchyan A. J.
Institute of Mathematics of NAS of RA, Armenia,
Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

One way to explore on analytic function is to expand it to a power series. The coefficients of a power series expansion contain the information of its analytic continuation. One possible approach to treat analytic continuation problem is to interpolate the coefficients by values $\varphi(k)$ of an entire function $\varphi(z)$ at the natural numbers $k \in N$.

In case of a one variable power series, Arakelian gave a criterion for a given arc of a unit circle to be an arc of regularity in terms of the indicator function of the interpolating entire function. Pólya found conditions for analytic continuability of a series to the whole complex plane except for some boundary arc.

We give sufficient conditions for analytic continuability of a multiple power series to a sectorial domain. Consider the multiple power series

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_k z^k. \tag{1}$$

Following V. Ivanov we introduce the set which implicitly contains the notion of the growth indicator of an entire function $\varphi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$:

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln|\varphi(re^{i\theta})| \leq \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n + C_{\nu,\theta}\},$$

where the inequality is satisfied for any $r \in \mathbb{R}^n_+$ with some constant $C_{\nu.\theta}$.

Denote

$$T_\varphi := \bigcap_{\theta_j = \pm\frac{\pi}{2}} T_\varphi(\theta_1, ..., \theta_n).$$

$$\mathcal{M}_\varphi := \{\nu \in [0,\pi)^n : \ \nu + \varepsilon \in T_\varphi, \ \ \nu - \varepsilon \notin T_\varphi \quad \text{for any} \ \ \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Let G be a sectorial set

$$G = \bigcup_{\nu \in \mathcal{M}_\varphi} \{z \in \mathbb{C}^n : \nu_j < \arg z_j < 2\pi - \nu_j, \ j = 1, ..., n, \}. \tag{2}$$

Theorem *The sum of the series* (1) *extends analytically to a sectorial domain G of the form* (2) *if there is an entire function $\varphi(\zeta)$ of exponential type interpolating the coefficients f_k and a vector-function $\nu(\theta)$ on $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$ with values in $\mathcal{M}_\varphi(\theta)$ satisfying the inequalities*

$$\nu_j(\theta) \leq a|\sin\theta_j| + b\cos\theta_j, \ \ j = 1, ..., n,$$

with some constants $a \in [0,\pi)$, $b \in [0,\infty)$.

Optimization of Coherent and Incoherent Controls for Open One- and Two-Qubit Systems

@ Morzhin O.V.[1] and Pechen A.N.[1,2]
[1] Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences;
[2] National University of Science and Technology "MISiS"
morzhin.oleg@yandex.ru; apechen@gmail.com

Developing methods for controlling individual quantum systems is important for modern quantum technologies [1]. In [2], a general method of incoherent control of quantum systems was proposed. In [3], it was shown that using a special combination of coherent and incoherent controls one can approximately generate arbitrary density matrices of generic N-level quantum systems. Based on [2, 3], various aspects of coherent and incoherent control of one-qubit [4–8, 10] and two-qubit [9] quantum systems were studied using the Pontryagin maximum principle and optimization methods including (1) steering an initial density matrix ρ_0 to a target density matrix ρ_{target} in the minimal time T [4–6], with machine learning (kNN and neural networks) [5], or in a fixed time [9]; (2) solving the problem $\langle \rho(T), \rho_{\mathrm{target}} \rangle \to \sup$ with minimizing or fixed T [7]; (3) analysis of reachable and controllability sets [6, 8]. An analytical analysis of reachable and controllability sets for a qubit driven by variable in time coherent and incoherent controls was performed using geometric control theory [10]. The talk represents the results partially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (projects 0718-2020-0025 and 075-15-2020-788) and the RSF (project 17-11-01388).

[1] Glaser S., Boscain U., Calarco T., et al. Eur. Phys. J. D. **69**, 279 (2015).
[2] Pechen A., Rabitz H. Phys. Rev. A. **73**, 062102 (2006).
[3] Pechen A. Phys. Rev. A. **84**, 042106 (2011).
[4] Morzhin O.V., Pechen A.N. Int. J. Theor. Phys. **60**, 576 (2021).
[5] Morzhin O.V., Pechen A.N. Lobachevskii J. Math. **41**, 2353 (2020).
[6] Morzhin O.V., Pechen A.N. Proc. Steklov Inst. Math. **313**, 149 (2021).
[7] Morzhin O.V., Pechen A.N. Lobachevskii J. Math. **40**, 1532 (2019).
[8] Morzhin O.V., Pechen A.N. AIP Conf. Proc. **2362**, 060003 (2021).
[9] Morzhin O.V., Pechen A.N. Lobachevskii J. Math. **40**, 2401 (2021).
[10] Lokutsievsky L., Pechen A. J. Phys. A: Math. Theor. **54**, 395304 (2021).

Оценки в классах поперечниковых идеалов для одного секториального оператора

@ Мурат Г., Кошкарова Б.С., Кусаинова Л.К.
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г.Нур-Султан, Казахстан

В работе исследуется оператор L, ассоциированный с замкнутой формой

$$q[u,f] = \sum_{j=1}^{n} \int \rho_j^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} dx + \int w(x) u f dx,$$

где $\rho_j > 0$, ρ_j и $\frac{1}{\rho_j} \in L_{\infty,loc}$ $(1 \le j \le n)$, $w_0 = \operatorname{Re} w$, $w_1 = \operatorname{Im} w \in L_{loc}$, $w_0 > 0$. Предполагается, что $|\rho_j(x) - \rho_k(x)| > 0$ в $\mathbb{R}^n$ хотя бы для одной пары $j \neq k$.

Получены условия, при которых L является секториальным оператором с областью определения $D(\mathrm{L}) \subset W$ и компактным обратным. Через W обозначено пополнение класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных функций по норме

$$\|f\|_W = \left[\int \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2(x) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right|^2 + w_0(x)|f|^2 \right) dx \right]^{1/2}.$$

Получены оценки линейных поперечников для классов

$$F_\theta = \{u : \|u; (W, L_2)_{\theta,2}\| \le 1\} \cap \{u \in D(L) : \|\mathrm{L}u\|_2 \le 1\},$$

$0 < \theta < 1$, $(W, L_2)_{\theta,2}$ — интерполяционное пространство Петре-Лионса.

Работа была проделана при поддержке гранта МОН РК AP08856104.

[1] Кусаинова Л.К. Теоремы вложения и интерполяции весовых пространств Соболева // Дисс. на соискание докт. физ.-матем. наук. – Алматы: Ин-т матем. МОН РК, 1999.

[2] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. – 740 с.

On Gelfand-Shilov type spaces

@ Musin I.Kh., Gil'mutdinov R.Z.
Institute of Mathematics with Computing Centre of RAS, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

Let $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ be a family of convex separately radial functions $h_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that for each $\nu \in \mathbb{N}$:

1) the restriction of h_ν to $[0,\infty)^n$ is nondecreasing in each variable;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

3) for each $M > 0$ there exists a constant $A_{\nu,M} > 0$ such that

$$h_\nu(x) \le \sum_{1\le j\le n: x_j\ne 0} x_j \ln \frac{x_j}{M} + A_{\nu,M}, \ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,\infty)^n;$$

4) $h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x) \ge \ln 2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} x_j - \gamma_\nu, \ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,\infty)^n$;

5) $h_{\nu+1}(x+y) \le h_\nu(x) + h_\nu(y) + l_\nu, \ x, y \in [0,\infty)^n$.

For each $\nu \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{Z}_+$ define the normed space

$$G_m(h_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,h_\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n, \\ |\alpha|\le m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} < \infty\}.$$

Let $G(h_\nu) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m(h_\nu)$. Endow $G(h_\nu)$ with the topology defined by the family of norms $\|\cdot\|_{m,h_\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Considering $G(\mathcal{H}) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} G(h_\nu)$ supply it with the topology of the inductive limit of spaces $G(h_\nu)$.

For each $\nu \in \mathbb{N}$ define a function φ_ν on $\mathbb{R}^n$ by

$$\varphi_\nu(x) = h_\nu^*(\ln(1+|x_1|), \dots, \ln(1+|x_n|)), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

where h_ν^* is the Young-Fenchel conjugate of a function h_ν.

For each $\nu \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{Z}_+$ consider the normed space

$$E_m(\varphi_\nu) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : p_{\nu,m}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1+\|z\|)^m}{e^{\varphi_\nu(Im\, z)}} < \infty\}.$$

Let $\Phi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ and $E(\Phi) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E(\varphi_\nu)$. With the usual operations of addition and multiplication by complex numbers $E(\Phi)$ is a linear space. Supply $E(\Phi)$ with a topology of the inductive limit of spaces $E(\varphi_\nu)$.

Theorem. The spaces $G(\mathcal{H})$ and $E(\Phi)$ are isomorphic.

A Paley-Wiener-Schwartz type theorem for ultradistributions on an unbounded closed convex set

@ Musin I.Kh., Rakhimova A.I.
Institute of Mathematics with Computer Centre of Ufa Scientific Centre of RAS; Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia

Let C be a proper open convex cone in $\mathbb{R}^n$ with vertex at the origin. Let b be a convex continuous positively homogeneous function of degree 1 on $\overline{C}$. Let $U(b,C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y\rangle \le b(y), \forall y \in C\}$. The closed convex unbounded set $U(b,C)$ does not contain a straight line, the set $V(b,C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ -\langle \xi, y\rangle \ < b(y), \forall y \in \overline{C}\}$ is its interior, $\overline{V(b,C)} = U(b,C)$.

Let $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ be a family of convex separately radial functions $h_m : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ with $h_m(0) = 0$ such that for each $m \in \mathbb{N}$:

1. $\exists\, a_m > 0$ such that $h_m(x) \ge \|x\| \ln(1+\|x\|) - a_m\|x\| - a_m, \ x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (h_m(x) - h_{m+1}(x)) = +\infty$;
3. $\sup\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} (h_{m+1}(\alpha+\beta) - h_m(\alpha)) < \infty$ for $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ with $|\beta| = 1$;
4. $\forall\, p \in \mathbb{N} \ \ \exists\, l = l(m,p) \in \mathbb{N}$ such that $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} e^{\max\limits_{|\beta|\le p} h_{m+l}(\alpha+\beta) - h_m(\alpha)} < \infty.$

Denoting for brevity $U(b,C)$ by U and $V(b,C)$ by V define a space $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ of infinitely differentiable functions f on U as follows. For each $m \in \mathbb{N}$ let $\mathcal{E}_m(U)$ be a space of $C^\infty(U)$-functions f with a finite norm

$$p_m(f) = \sup_{x\in V, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1+\|x\|)^m}{e^{h_m(\alpha)}} \ .$$

Put $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m(U)$. Endow a linear space $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ with a projective limit topology of spaces $\mathcal{E}_m(U)$. For each $m \in \mathbb{N}$ define the function φ_m in $\mathbb{C}^n$ by the rule: $\varphi_m(z) = h_m^*(\ln^+|z_1|, \ldots, \ln^+|z_n|), \ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, where h_m^* is the Young-Fenchel conjugate of h_m.

For each $m \in \mathbb{N}$ introduce the normed spaces

$$A_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in A(T_C) : \|f\|_m = \sup_{z\in T_C} \frac{|f(z)|}{e^{b(Im\, z)+\varphi_m(z)}(1+\frac{1}{d(z)})^m} < \infty \right\} \ .$$

Let $A_{b,\mathcal{H}}(T_C) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{b,m}(T_C)$. Endow the linear space $A_{b,\mathcal{H}}(T_C)$ with a topology of inductive limit of spaces $A_{b,m}(T_C)$. For each linear continuous functional Φ on $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ the function $\hat{\Phi}(z) = \Phi(e^{i\langle\xi,z\rangle})$ is in $A(T_C)$.

Theorem. The mapping $L: \Phi \in \mathcal{E}^*_{\mathcal{H}}(U) \to \hat{\Phi}$ establishes an isomorphism between the spaces $\mathcal{E}^*_{\mathcal{H}}(U)$ and $A_{b,\mathcal{H}}(T_C)$.

Функциональные гильбертовы пространства в квазикруге

@ Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.)
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть некоторая произвольная ограниченная квазиокружность ∂G разбивает расширенную комплексную плоскость $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ на две области G_1 и G_2; $G_1 \bigcup \partial G \bigcup G_2 = \widehat{\mathbb{C}}$. Рассмотрим пространства Бергмана:

$$B_2(G_k) \stackrel{def}{=} \left\{ f \in Hol(G_k) \colon \|f\|^2_{B_2(G_k)} \stackrel{def}{=} \int_{G_k} |f(z)|^2 \, dv(z) < \infty \right\}, \quad k = 1, 2,$$

где $dv(z)$ – плоская мера Лебега. Пусть $y(z)$, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ – квазиконформное отражение Альфорса, и $y_{\overline{z}}$ – функция из работы ([1], стр. 24–25, Лемма 3.1). Также мы рассматриваем пространства

$$B_2^y(G_k) \stackrel{def}{=} \Big\{ h \colon \exists g \in B_2(G_{3-k}),\, h(z) = \overline{g(y(z))},\, z \in G_k,$$
$$\|h\|^2_{B_2^y(G_k)} \stackrel{def}{=} \int_{G_k} |h(\zeta)|^2 |y_{\overline{z}}(\zeta)|^2 \, dv(\zeta) < \infty \Big\}, \quad k = 1, 2.$$

Доказывается, что пространства $B_2^y(G_k)$, $k = 1, 2$ также являются гильбертовыми пространствами с воспроизводящим ядром. Обозначим $m(\zeta) \stackrel{def}{=} \overline{y_{\overline{z}}(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbb{C} \backslash \partial G$, где черта над $y_{\overline{z}}$ означает комплексное сопряжение. Пусть M_k, $k = 1, 2$ – операторы, действующие из пространств $B_2^y(G_k)$, $k = 1, 2$, соответственно, по следующему правилу: если $h \in B_2^y(G_k)$, $k = 1, 2$, то

$$M_k h(\zeta) \stackrel{def}{=} h(\zeta) \cdot m(\zeta),\, \zeta \in G_k,\, k = 1, 2.$$

Теорема. Операторы умножения M_k, $k = 1, 2$ являются линейными непрерывными взаимно-однозначными операторами, действующими из пространства $B_2^y(G_k)$, $k = 1, 2$ на пространство $B_2(G_k)$, $k = 1, 2$, соответственно.

В доказательстве теоремы существенную роль играет интегральное представление функций голоморфных в квазикруге и непрерывных на границе квазикруга (см. [1], стр. 25) и, также, свойство экстремальности коэффициентов разложения по ортоподобной системе (см. [2], стр. 190).

[1] В. И. Белый, Современные методы геометрической теории функции комплексного переменного в задачах аппроксимации, Алгебра и анализ, 9:3 (1997), 3–40.

[2] Т. П. Лукашенко, О свойствах систем разложения, подобных ортогональным, Изв. РАН. Сер. матем., 62:5 (1998), 187–206.

Автопредставление ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$

@ Рассадин А.Э.
Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород, Россия

Пусть $UC_b(\mathbb{R}^m)$ — пространство всех равномерно непрерывных ограниченных функций $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, снабжённое чебышёвской нормой:

$$\|f\| = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^m} |f(\vec{x}\,)|\,,$$

тогда справедливы следующие утверждения:

Теорема. Если $f\in UC_b(\mathbb{R}^m)$, а R и γ — произвольные положительные числа, то

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{|\,\vec{\xi}\,|\le R} \|\, f - S_n^{\gamma}(\vec{\xi})f\,\| = 0\,,$$

где $|\vec{\xi}\,| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2}$, а $S_n^{\gamma}(\vec{\xi}\,)$ — линейный оператор, действующий на функции из $UC_b(\mathbb{R}^m)$ по правилу:

$$(S_n^{\gamma}(\vec{\xi})f)(\vec{x}) = \frac{\exp(\gamma\,|\vec{\xi}\,|)}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{2\,\gamma\,|\vec{\xi}\,|}{n}\right)^k f\left(\vec{x}+\frac{2\,k-n}{n}\,\vec{\xi}\right)$$

(C_n^k — биномиальные коэффициенты).

Следствие. Пусть $f\in UC_b(\mathbb{R}^m)$ и γ — произвольное положительное число, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \|\, f - \sigma_n^{\gamma} f\,\| = 0\,,$$

где σ_n^{γ} — линейный оператор, действующий на функции из $UC_b(\mathbb{R}^m)$ по правилу:

$$(\sigma_n^{\gamma} f)(\vec{x}) = \frac{\exp(\gamma\,|\vec{x}|)}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{2\,\gamma\,|\vec{x}|}{n}\right)^k f\left(\frac{2\,k\,\vec{x}}{n}\right).$$

Доказательство теоремы основано на применении результатов статьи [1] к решению задачи Коши для линейного эволюционного уравнения с постоянными коэффициентами вида ($|\vec{v}|\neq 0$, $\sigma>0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + v_2\,\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + v_m\,\frac{\partial u}{\partial x_m} + \sigma\,u = 0\,,\quad u(\vec{x},0) = f(\vec{x}\,)\,.$$

[1] Remizov I.D. Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients // Journal of Mathematical Physics. 2019. Vol. 6. No. 7. P. 071505-1-8.

Вырождение квантового поиска при амплитудных шумах в канале обращения к оракулу

@ Растёгин А.Э., Шемет А.М.
Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Россия

Поиск Гровера и родственные ему методы используются во многих алгоритмах обработки информации на квантовых носителях. Интерфейс с так называемым оракулом является одной из уязвимостей квантового поиска, которая остаётся недостаточно изученной. Влияние коллективных ошибок амплитудного типа в канале обращения к оракулу на работу квантового алгоритма Гровера рассмотрено в рамках подхода, предложенного в статье [1]. Другим методом квантовый поиск при наличии частично локализованного шума исследуется в работе [2]. Он позволяет сформулировать сценарий поиска при наличии помех разного типа, однако решение полученных уравнений “до конца” требует дальнейших упрощений. Разработана эффективно двумерная модель амплитудных шумов, которая приводит к замкнутым аналитическим выражениям для базовых характеристик, в том числе для вероятности получения корректного ответа как функции числа итераций. Вероятность успеха изменяется с ростом числа шагов таким образом, что не очень высокий уровень ошибок способен привести к быстрому вырождению квантового поиска. Алгоритм Гровера оказывается довольно чувствительным к амплитудным ошибкам, даже если они возникают только в канале обращения к оракулу. Данное заключение согласуется с выводами, полученными при изучении поиска при наличии фазовых ошибок [1]. Эти результаты следует учитывать при анализе разнообразных применений квантового поиска для решения практичеких задач.

[1] Rastegin A.E. Degradation of Grover’s search under collective phase flips in queries to the oracle // Front. Phys. **13**, 130318 (2018)
[2] Reitzner D., Hillery M. Grover search under localized dephasing // Phys. Rev. A **99**, 012339 (2019)

Предельные теоремы для композиций случайных операторов

@ Сакбаев В.Ж.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г.Москва, Россия

Получение аналогов предельных теорем для композиций операторнозначных случайных величин является важной задачей некоммутативного анализа. Для ее решения в работе [1] вводится обобщеная слабая сходимость мер, позволяющая выбирать в качестве пространства задающих топологию функционалов подходящее локально выпуклое пространство функций вместо пространства непрерывных ограниченных функций. Обобщенная слабая сходимость мер задает обобщенную сходимость по распределению случайных величин.

Пусть E – гильбертово пространство, $B(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов в пространстве E, $L_2(E)$ – пространство функций, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно изоморфизмов мере на пространстве E.

Теорема 1. *Пусть* $\xi(t),\ t \geq 0$, *– случайный процесс со значениями в пространстве* $B(E)$*;* $\{\xi_n\}$ *– последовательность независимых случайных процессов, одинаково распределенных с процессом* ξ*. Пусть* X *– банахово пространство функций* $u:\ E \to \mathbb{C}$ *такое, что для любого* $t \geq 0$ *линейный оператор* $u \to \mathbf{F}(t)u = \mathrm{M}(u(\xi(t)\cdot))$ *определен на пространстве* X*. Если функция* $\mathbf{F}(t)$, $t \geq 0$, *сильно непрерывна,* $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$, $\|\mathbf{F}(t)\|_X \leq 1$ *и оператор* $\mathbf{F}'(0)$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве* X*, то последовательность случайных процессов* $\{\eta_n(t),\ t \geq 0\}$*, где* $\eta_n(t) = \xi_n(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \xi_1(\frac{t}{n})$*, сходится по распределению к марковскому случайному процессу, порождающему полугруппу* $\exp(\mathbf{F}'(0)t)$, $t \geq 0$*. Здесь обобщенная слабая сходимость мер определена как сходимость операторов свертки с мерой в сильной операторной топологии пространства* $B(X)$*.*

Установлен гомеоморфизм между локально выпуклым пространством операторнозначных отображений $\mathbb{R}_+ \to B(L_2(E))$ и локально выпуклым пространством случайных процессов со значениями в $B(E)$. Введенный гомеоморфизм и теорема 1 позволяют установить условия сходимости итераций случайных процессов со значениями в группе ортогональных преобразований евклидова пространства E к марковскому процессу, описывающему диффузию на сфере в пространстве E.

[1] Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Рандомизированное квантование гамильтоновых систем. Доклады РАН, 2021, Т. 498, С. 31-36.

Boundedness of generalized Riemann-Liouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces

@ Senouci M.A.
S.M. Nikolskii Mathematical Institute, RUDN University, Moscow, Russia

The aim of this work is to establish the boundedness of the generalized Riemann-Liouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces.

Definition 1. [1, 3] A function $f(t)$ is said to be in the $L_{p,k}[0,\infty)$ space if

$$L_{p,k}[0,\infty) = \left\{ f : \|tf\|_{L_{p,k}[0,\infty)} = \left(\int_a^b |f(t)|^p t^k dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \le p < \infty, k \ge 0 \right\}.$$

For $k = 0$,

$$L_p[0,\infty) = \left\{ f : \|f\|_{L_p[0,\infty)} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \le p < \infty \right\}.$$

Definition 2. [1, 3] Let $f \in L_{1,k}[0,\infty)$. The Generalized Riemann-Liouville fractional integral $I^{\alpha,k}f(x)$ of order $\alpha \ge 0$ and $k \ge 0$ is defined by

$$I^{\alpha,k}f(x) = \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^{k+1} - t^{k+1})^{\alpha-1} t^k f(t) dt,$$

$$I^{0,k}f(x) = f(x),$$

where Γ is the gamma function.

Definition 3. [2] Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a Lebesgue measurable set, $1 \le p \le \infty, 0 \le \lambda \le \dfrac{n}{p}$. The weighted Morrey space $M^{\lambda}_{p,k}(\Omega)$, is the space of all functions f Lebesgue measurable on Ω for which

$$\|f\|_{M^{\lambda}_{p,k}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_{p,k}(B(x,r) \bigcap \Omega)} < \infty. \tag{1}$$

If $\lambda = 0$, then

$$M^0_{p,k}(\Omega) = L_{p,k}(\Omega). \tag{2}$$

If $\lambda = \dfrac{n}{p}$, then

$$M^{\frac{n}{p}}_{p,k}(\Omega) = L_{\infty,k}(\Omega). \tag{3}$$

Theorem 1. *Let $n = 1, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} < \alpha < 1,$ and $0 \le \lambda, \mu \le 1, 0 \le \lambda \le \frac{1}{p}, 0 \le \mu \le \frac{1}{q}, 0 < T < \infty$. Then $I^{\alpha,k}$ is bounded from $M^{\lambda}_{p,k}(0,T)$ to $M^{\mu}_{q,k}(0,T)$.*

[1] U.N. Katugampola. Approach to a generalized fractional integral. Applied Mathematics and Computation. V. 218(3), 860-865, 2011.
[2] C.B. Morrey. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Amer. Math. Soc. V. 43, 126-166, 1938
[3] H. Yildirim, Z. Kirtay. Ostrowski inequality for generalized fractional integral and related inequalities. Malaya Journal of Matematik. V. 2 (3). 322-329, 2014.

Эффективное равновесное состояние для резонансных наблюдаемых

@ Сергеев А.Г.
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия

Одной из целей некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа на язык банаховых алгебр. Этот перевод осуществляется с помощью процедуры квантования, устанавливающей соответствие между функциональными пространствами и алгебрами ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. Указанное соответствие, называемое квантовым, сопоставляет дифференциалу df функции f коммутатор ее операторного образа с некоторым оператором симметрии S, являющимся самосопряженным оператором в H с квадратом $S^2 = I$. Образ df при этом называется квантовым дифференциалом $d^q f$ функции f и этот дифференциал, в отличие от дифференциала df, корректно определен даже для негладких функций f. Возникающее операторное исчисление называется квантовым.

В докладе будет приведен целый ряд утверждений из этого исчисления, касающихся интерпретации идеалов Шэттена компактных операторов в гильбертовом пространстве в терминах функциональных пространств на окружности и вещественной прямой. Главное внимание уделяется случаю операторов Гильберта–Шмидта. Роль оператора симметрии S выполняет при этом преобразование Гильберта. В случае функциональных пространств нескольких вещественных переменных оператор симметрии удается определить в терминах операторов Рисса и матриц Дирака.

«Контрпримеры» в CR-геометрии

@ Степанова М.А.
МГУ им. М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия

Недавние продвижения в теории модельных CR-многообразий связаны со взвешенно однородными поверхностями и поверхностями бесконечного типа по Блуму-Грэму. Мы обсудим некоторые примеры, которые иллюстрируют интересные эффекты, возникшие в этом новом контексте.

В частности, мы рассмотрим:

– многообразие равномерно бесконечного типа (т.е. бесконечного всюду), размерность алгебры инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов которого конечна на собственном аналитическом подмножестве многообразия и бесконечна всюду вне этого собственного аналитического множества,

– многообразие равномерно бесконечного типа, уравнения которого нельзя записать в приведенной форме специального вида на собственном аналитическом подмножестве (вне некоторого собственного аналитического подмножества приведенная форма такого вида всегда существует для любого многообразия равномерно бесконечного типа).

Structura of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model. Third triplet state

@ Tashpulatov S.M. and Parmanova R.T.
Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

We consider of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model, and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the third triplet state. The system Hamiltonian has the form [1] $H = A\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^{+}_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^{+}_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_\gamma a^{+}_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^{+}_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^{+}_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^{+}_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^{+}_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}$. Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B > 0$ ($B_0 > 0$) is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites, the summation over τ ranges the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index, and $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. The Hamiltonian H

acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathtt{H}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathtt{H}_{as}$. The third triplet state corresponds basic functions $t^3_{n,k,p,q\in Z^\nu} = a^+_{n,\uparrow}a^+_{k,\downarrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}\varphi_0$. We denote via $\mathtt{H}^t_3$ the subspace, corresponding to the third triplet state, via H^t_3 denote the restriction of operator H to the subspace $\mathtt{H}^t_3$.

Theorem 1. Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 > 2B$). Then the essential spectrum of the operator H^t_3 is consists of the union of no more than eight segments: $\sigma_{ess}(H^t_3) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A-6B+z] \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and discrete spectrum of the operator H^t_3 is consists of a no more than three eigenvalues: $\sigma_{disc}(H^t_3) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, where $z = A+\varepsilon_1$, and z_3, and z_4 are the additional eigenvalues of the operator H^t_3.

Theorem 2. Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 > 0$, and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$, and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$). Then the essential spectrum of the operator H^t_1 is consists of the union of ten or of thirteen, or of sixteen segments, and discrete spectrum of the operator H^t_1 is consists of a four, or seven, or ten eigenvalues.

Theorem 3. Let $\nu = 1$, and $-2B < \varepsilon_2 < 0$. Then the essential spectrum of the operator H^t_3 is consists of a union of no more than three segments, and discrete spectrum of the operator H^t_3 is empty set.

[1] Tashpulatov S. M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state. Lobachevskii Journal of Mathematics.2017. V. 38 (3). P. 530-541.

Эффективное равновесное состояние для резонансных наблюдаемых

@ Теретёнков А.Е.

Отдел математических методов квантовых технологий,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия

Пусть динамика квантовой системы описывается гамильтонианом вида $H(\lambda) = H_0 + \lambda H_I$, где H_0 будем называть свободным гамильтонианом, а H_I — гамильтонианом взаимодействия. Будем рассматривать зависящие от времени наблюдаемые вида $A(t) = e^{-iH_0t}Ae^{iH_0t}$ в представлении Шрёдингера, то есть такие, что в представлении взаимодействия они являются постоянными. Будем называть такие наблюдаемые резонансными.

Для описания поведения таких наблюдаемых на больших временах оказывается полезным состояние $\mathcal{P}\rho_\beta(\lambda)$ (эффективное равновесное состояние), где $\mathcal{P}$ — проектор, связанный с усреднением по свободной динамике

$$\mathcal{P}\rho = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{iH_0 t}\rho e^{-iH_0 t}dt,$$

а $\rho_\beta(\lambda)$ — гиббсовское состояние с обратной температурой β, соответствующее гамильтониану $H(\lambda)$. Если представить эффективное равновесное состояние в виде, подобном гиббсовскому

$$\mathcal{P}\rho_\beta(\lambda) = \frac{1}{Z}e^{-\beta\tilde{H}_\beta(\lambda)}, \qquad Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta\tilde{H}_\beta(\lambda)},$$

где $\tilde{H}_\beta(\lambda)$ — некоторый эффективный гамильтониан, то возникает естественная задача вычисления асимптотического разложения $\tilde{H}_\beta(\lambda)$ по степеням λ при $\lambda \to 0$. Если ограничиться случаем, когда как H_0, так и H_I — ограниченные операторы, то верна следующая теорема.

Теорема. Коэффициенты разложения $\tilde{H}_\beta(\lambda) = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\kappa_n$ определяются формулами (при условии конечности интергаллов ниже)

$$\kappa_n \equiv -\beta^{-1}\sum_{k_0+\dots+k_m=n, k_0\geqslant 1}\frac{(-1)^m}{m+1}\mathcal{M}_{k_0}(\beta)\mathcal{M}_{k_1}(\beta)\cdots\mathcal{M}_{k_m}(\beta),$$

$$\mathcal{M}_k(\beta) \equiv (-1)^k\int_0^\beta d\beta_1\dots\int_0^{\beta_{k-1}} d\beta_k \mathcal{P}H_I(\beta_1)\dots H_I(\beta_k),$$

$$H_I(\beta) \equiv e^{\beta H_0}H_I e^{-\beta H_0}.$$

Будет также рассмотрен ряд следствий и приложений данного результата.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение No 075-15-2020-788).

Ядро уравнения Накажимы–Цванцига для открытой квантовой системы, взаимодействующей с коррелированным окружением в модели столкновений

@ Филиппов С.Н.

1. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия; 2. Физико-технологический институт им. К.А. Валиева РАН, г. Москва, Россия

В докладе представлено исследование корреляционных свойств немарковских квантовых процессов на примере вывода ядра памяти в уравнении Накажимы–Цванцига [1, 2] при взаимодействии системы с коррелированным окружением в модели столкновений. Получено явное выражение для ядра памяти в случае частиц окружения, находящихся в коррелированном состоянии матричного произведения, и установлена его связь с коррелятором, характеризующим свойства окружения. Показано, что эффекты памяти в динамике открытой квантовой системы проявляются тем сильнее, чем больше характерное время убывания нормы ядра памяти. Полученные результаты обобщают частные случаи немарковской динамики, рассмотренные ранее в литературе [3, 4] без использования уравнения Накажимы–Цванцига.

Работа выполнена при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2020-788).

[1] Nakajima S. On quantum theory of transport phenomena: steady diffusion // Progress of Theoretical Physics. – 1958. – V. 20, N. 6. – PP. 948-959.

[2] Zwanzig R. Nonlinear generalized Langevin equations // Journal of Statistical Physics. – 1973. – V. 9, N. 3. – P. 215-220.

[3] Rybar T., Filippov S.N., Ziman M., Buzek V. Simulation of indivisible qubit channels in collision models // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2012. – V. 45, N. 15. – P. 154006.

[4] Filippov S.N., Piilo J., Maniscalco S., Ziman M. Divisibility of quantum dynamical maps and collision models // Physical Review A. – 2017. – V. 96, N. 3. – P. 032111.

О расстояние Харнака в области

@ Хабибуллин Б.Н.

Башкирский государственный университет, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Для *области* $D \subset \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ *расстояние Гарнака* между $x \in D$ и $y \in D$ — это точная нижняя грань чисел $d > 0$, для которых $1/d \le h(x)/h(y) \le d$ при всех гармонических функциях h на D без нулей на D. Для оценок расстояния Харнака на компактных подмножествах $S \subset D$ используется как развитие одного из ключевых для цикла работ [1] понятия *энтропии линейной связности,* так и, по-видимому, новое понятие *показателя разделённости S в D*. Пусть $\mathsf{dist}(\cdot,\cdot)$ — *евклидово расстояние в $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$. Разделённость $\mathsf{sep}_D(x,y) \in \mathbb{R}^+$ точек $x \in D$ и $y \in D$ внутри D* — дробь $\mathsf{sep}_D(x,y) := \dfrac{\mathsf{dist}(x,y)}{\mathsf{dist}(x,\mathbb{R}^{\mathsf{d}} \setminus D) + \mathsf{dist}(y,\mathbb{R}^{\mathsf{d}} \setminus D)}$. *Разделённость $\mathsf{sep}_D(x_0,\dots,x_l)$ последовательности $x_0,x_1,\dots,x_l \in D$ внутри D* равна $\max\limits_{k=1,\dots,l} \mathsf{sep}_D(x_{k-1},x_k)$. *Разделённость $\mathsf{sep}_D(S;x_0,l)$ подмножества $S \subset D$ при начале $x_0 \in D$ по длине $l \in \mathbb{N}$ внутри D* — это $\mathsf{sep}_D(S;x_0,l) := \sup\limits_{x_l \in S} \inf\limits_{x_1,\dots,x_{l-1} \in D} \mathsf{sep}_D(x_0,\dots,x_l)$.

Теорема. *Если $S \subset D$ и $\mathsf{sep}_D(S;x_0,l) \le q < 1$, то расстояние Харнака от x_0 до любой точки $x \in S$ не превышает $2^{2\mathsf{d}l} \,/\, (1-q)^{(\mathsf{d}-1)l}$.*

Оценки расстояния Харнака будут применяться к сравнению различных характеристик роста мероморфных функций и разностей субгармонических функций на D вблизи границы ∂D, как следствие, к оценкам снизу для голоморфных и субгармонических функций и связаны с определением некасательно достижимых (NTA-)областей [2].

Исследование выполнялось в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

[1] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова, *Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности.* I–II // Алгебра и анализ, **20**:1 (2008), 146–236; English transl.: B. N. Khabibullin, F. B. Khabibullin, L. Yu. Cherednikova, *Zero subsequences for classes of holomorphic functions: stability and the entropy of arcwise connectedness.* I–II // St. Petersburg Math. J., **20**:1 (2009), 101–162.

[2] Capogna L., Kenig, C. E., Lanzani L. Harmonic Measure: Geometric and Analytic Points of View. University Lecture Series. **35**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.

О делимых квантовых процессах

@ Хажин Р.Л., Гумеров Р.Н.
Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Рассматриваются однопараметрические семейства квантовых каналов. Такие семейства называются квантовыми процессами или квантовыми динамическими отображениями. В докладе обсуждается их делимость. Различные виды делимости квантовых каналов и процессов изучались в работах ряда авторов (см. [1, 2, 3, 4] и ссылки в них).

Пусть $\mathcal{H}$ – конечномерное гильбертово пространство над полем комплексных чисел, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ – C^*-алгебра всех линейных операторов на $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ обозначается множество квантовых каналов, состоящее из сохраняющих след вполне положительных операторов на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{I}$ – тождественный канал.

Далее, фиксируя $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, мы рассматриваем семейства вида

$$\Phi := \{\Phi_t \in \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Phi_0 = \mathcal{I}\}.$$

Квантовое динамическое отображение Φ называется CP-делимым (см. [4, Определение 5.1]), если для каждой пары чисел s и t, удовлетворяющих условию $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, существует $\Phi_{t,s} \in \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$, такой, что выполняется равенство

$$\Phi_t = \Phi_{t,s} \circ \Phi_s.$$

Для квантовых процессов Φ и Ψ в докладе приводятся достаточные условия делимости процессов вида

$$\{\Psi_t \circ \Phi_t \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

[1] Wolf M. M., Cirac J. I., Dividing quantum channels. Commun. Math. Phys: 2008. –279. – P. 147–168.
[2] Breuer H.-P., Laine E.-M., Piilo J., Vacchini B., Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum systems. Rev. Mod. Phys: 88 (2016) 021002.
[3] Filippov S. N., Piilo J., Maniscalco S., Ziman M., Divisibility of quantum dynamical maps and collision models. Phys. Rev. A: 96 (2017) 032111.
[4] Chruściński D., Introduction to Non-Markovian Evolution of n-Level Quantum Systems. Open quantum systems: A mathematical perspective, ed. by Bahns D., A. Pohl A., Witt I, Birkhauser, Cham, 2019, 55-76.

Достижимая информация квантового гауссовского ансамбля состояний

@ Холево А.С.
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г.Москва, Россия

Достижимая информация квантового ансамбля состояний, которая является одной из базовых величин в квантовой теории информации [1], [2], определяется как максимальное количество информации Шеннона, которое может быть получено путем всевозможных квантовых измерений над данным ансамблем. В настоящей работе достижимая информация вычислена для общего квантового гауссовского ансамбля состояний при выполнении определенного "порогового условия" [3]. Показано, что максимизирующее измерение является гауссовским и представляет собой далеко идущее обобщение процедуры оптического гетеродинирования. Это существенно расширяет предыдущий результат [4], касающийся калибровочно-инвариантного случая. Предложено простое достаточное условие, которое влечет пороговое условие для общего гауссовского ансамбля. Результаты проиллюстрированы на примере одной бозонной моды.

[1] Нильсен М. А., Чанг И., Квантовые вычисления и квантовая информация, М.: Мир, 2006.
[2] Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация, М.: МЦНМО, 2010. http://www.mcnmo.ru/free-books/holevo-quantum.pdf
[3] Holevo A. S. "Accessible information of a general quantum Gaussian ensemble". https://arxiv.org/pdf/2102.01981.pdf
[4] Holevo A. S. "Gaussian maximizers for quantum Gaussian observables and ensembles," IEEE Trans. Inform. Theory **66**:9, 5634-5641 (2020).

Boundary uniqueness theorem for $A(z)$-analytic functions

@ Husenov B.E.
Bukhara state university, c.Bukhara, Uzbekistan

Let $A(z)$ be some function in the domain $D \subset \mathbb{C}$. We introduce the operator: $\partial_A = \partial - \bar{A} \cdot \bar{\partial}$, where ∂ is the differentiation operator by z, and $\bar{\partial}$ is the differentiation operator by $\bar{z}$.

Definition 1.[1] If for a differentiable function $f(z)$ in the D :

$$\bar{\partial_A} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

then such a function $f(z)$ is called an $A(z)-$analytic function and we will denote it is a $f \in O_A(D)$, where $|A(z)| \leq C < 1, C =$const, $A(z)-$antianalytic: $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$. Equality (1) is called the Beltrami equation. If in the domain of $D : \partial_A f = \frac{\partial f}{\partial z} - \bar{A}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, then the $f(z)$ function $A(z)-$antianalytic function.

The set $L\left(a;r\right) = \left\{ |\psi\left(z;a\right)| = \left| z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a;z)} A(\tau)d\tau} \right| < r \right\}$ is open in D. For sufficiently small $r > 0$ it compactly belongs to D and contains the point a. This set is called $A(z)-$lemniscate with center a and denoted by $L(a;r)$. It is simply connected domain.

Let $A(z)$ is anti-analytic, $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ in D.

Definition 2. $F(z)$ a function is called belonging to the Hardy class if the function satisfies the following inequality in the lemniscate $L(a;r)$:

$$H_A^p(f) = \lim_{\rho \to r} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} |f(z)|^p |dz + A d\bar{z}| < \infty, \quad (2)$$

where $z \in \partial L(a;\rho), 0 < \rho < r, p > 0$.

The Hardy class in the domain of D $A(z)-$analytic functions is denoted as $H_A^p(D)$.

When studying the boundary properties of functions of a complex variable the fundamental value has the property of uniqueness of its definition by boundary values. Let us first consider this property for $A(z)-$analytic bounded functions.

Proposition 1. If the $f(z)-$function, $A(z)-$analytic and bounded in the lemniscate $L(a;r)$, tends along the radius to the value zero on the set of points $M \subset \partial L(a;r)$ of a positive Lebesgue measure, then $f(z)$ is identically equal to zero.

If $f(z) \in H_A^1(L(a;r))$, then the angular limit of $f(\varsigma) = \lim\limits_{\substack{z \to \varsigma \\ \measuredangle}} f(z)$ exists and is finite for almost all $\varsigma \in \partial L(a;r)$. It particular, it is true:

Result. If the $A(z)-$ analytic function $f(z)$ is bounded in the lemniscate $L(a;r)$, then it has angular limit values almost everywhere on $\partial L(a;r)$.

Proposition 2. Let $f(z) \in H_A^1(L(a;r))$. Suppose that for some set $M \subset \partial L(a;r)$ of the Lebesgue positive measure $f(\varsigma) = 0$ at $\varsigma \in M$. Then $f(z) \equiv 0$.

Now we show that the analog of the Lusin-Privalov theorem is $A(z)-$analytic function.

Theorem(analogue of the Lusin-Privalov theorem). Let $f(z) \in O_A(L(a;r))$. Suppose that M is the of a Lebesgue positive measure on the boundary of $\partial L(a;r)$, such that

$$\lim_{\substack{z \to \varsigma \\ \measuredangle}} f(z) = 0,$$

where $\varsigma \in M$. Then the $f(z)$ functions identically equal to zero.

[1] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. Москва.: Гостехиздат, 1950.
[2] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. Москва.: Мир, 1984.
[3] Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions//J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2016. Volume 9, Issue 3. 374-383 p.

Один случай задачи Римана для обобщенных аналитических функций с сингулярным коэффициентом

@ Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г.Казань, Россия.

В плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z = x + iy = re^{i\theta}$ рассмотрим верхнюю полуплоскость $E^+ = \{z : Im\ z > 0\}$, нижнюю полуплоскость $E^- = \{z : Im\ z < 0\}$, и вещественную ось $\Gamma = \{z : Im\ z = 0\}$. В областях E^+ или E^- рассмотрим обобщенную систему Коши-Римана

$$\partial_{\overline{z}} U - A(z)U = F(z),\ A(z) = \frac{a(z)}{\overline{z} + z},\ a(z), F(z) \in C(\overline{\mathbb{C}}). \quad (1)$$

Следуя [1],[2] мы будем предполагать, что для $A(z)$ существует такая аналитическая в E^+ (E^-) функция $a_0^+(z)$ ($a_0^-(z)$), что

$$A_0^{\pm}(z) := \frac{a(z) - a_0^{\pm}(z)}{\overline{z} + z} \in L^p(E^{\pm}),\ F(z) \in L^p(E^{\pm}),\ p > 2.$$

Граничные значения функций $a_0^{\pm}(z)$, т.е. функции $a_0^+(t)$, $a_0^-(t)$ будем считать непрерывными по Гёльдеру на вещественной оси Γ, включая окрестность бесконечно удаленной точки.

Кроме того, на функции $a_0^{\pm}(z)$ дополнительно налагаем следующие ограничения:

$$|a_0^{\pm}(z) - a_0^{\pm}(-\overline{z})| \le K(x,y)(|z + \overline{z}|^{\alpha}), \quad \alpha < 1,$$
$$a_0^{\pm}(x) = a_0^{\pm}(\infty) + O(|x|^{-\beta}), \quad \pm x \to +\infty,\ \beta > 0;$$

кроме того, положим что $a_0^{\pm}(0) = \beta_0^{\pm} + i\beta_0^{\pm}$, $a_0^{\pm}(\infty) = \beta_{\infty}^{\pm} + i\beta_{\infty}^{\pm}$. Привлекая идеи работ [1],[2] выведем формулу общего решения системы (1):

$$U^{\pm}(z) = e^{\Omega^{\pm}(z)}[(T(e^{-\Omega^{\pm}}F^{\pm}))(z) + \phi^{\pm}(z)],\ z \in E^{\pm},$$
$$\Omega^{\pm}(z) = (TA_0^{\pm})(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{a_0^{\pm}(t)\ln|t + \overline{t}|}{t - z}dt + a_0^{\pm}(z)\ln|z + \overline{z}|. \quad (2)$$

Здесь $\phi^+(z), \phi^-(z)$– произвольные функции аналитические в областях E^+, E^- соответственно, $(TA_0^{\pm})(z)$– оператор Векуа. Для функций $U^{\pm}(z)$, удовлетворяющих уравнению (1) в E^+ и E^-, рассмотрим задачу Римана

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{3}$$

с непрерывными по Гельдеру всюду на оси Γ, включая бесконечно удаленную точку, коэффициентом $G(t)$ и правой частью $g(t)$. Данная задача сводится к краевой задаче Римана для функций $\phi^{\pm}(z)$ аналитических в E^+ и E^- с двумя точками завихрения логарифмического порядка. В классе ограниченных аналитических функций получена формула общего решения, которая с использованием формул (2) приводит к решению задачи (3). Проведено полное исследование картины разрешимости этой задачи.

[1] Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией // Докл. АН СССР, **267**:2 (1982), 300-305.

[2] Солдатов А.П., Расулов А.Б. Краевая задача для обобщённого уравнения Коши-Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения, **52**:(5) (2016), 637-650.

Омбилическая особенность решения системы уравнений одномерной газовой динамики

@ Шавлуков А.М.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Институт математики с ВЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассматривается типичная (с точки зрения математической теории катастроф) омбилическая особенность решения системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где функция $\alpha(\rho) = \frac{p_\rho}{\rho}$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho_* > 0$. Здесь $p(\rho)$ – уравнение состояния газа, $\rho > 0$.

В терминах инвариантов Римана

$$r = u + \int_0^\rho \frac{c}{\rho}\mathrm{d}\rho, \qquad l = u - \int_0^\rho \frac{c}{\rho}\mathrm{d}\rho, \qquad c^2 = p_\rho, \tag{2}$$

где c – скорость звука (рассматривается $c > 0$), $r \neq l$, система (1) принимает вид

$$\begin{cases} r_t + (\frac{r+l}{2} + c)r_x = 0 \\ l_t + (\frac{r+l}{2} - c)l_x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Возмущение ростка катастрофы особенности отличается от описанного в [1]. Утверждается неточность представленной в [1] классификации особенностей инвариантов Римана.

Исследование выполнено совместно с Б.И. Сулеймановым.

[1] А. Х. Рахимов, “Особенности римановых инвариантов”, Функц. анализ и его прил., 27:1 (1993), 46–59; Funct. Anal. Appl., 27:1 (1993), 39–50

Аналог теорема Бланшета для $\alpha-$гармонических функций

@ Шарипов Р.А., Абдикадиров С.М.

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ургенч, Узбекистан,

Каракалпакский государственный университет, г. Нукус, Узбекистан

В данной статье мы рассмотрим класс $\alpha-$ гармонических функций, который играет важную роль в теории функции и докажем аналог теорему Бланшета [1, Теоремы 3.1, 3.2 и 3.3, стр. 312-313] для $\alpha-$ гармонических функций.

Пусть $\alpha-$произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z) dz\,[j] \wedge d\bar{z}\,[k]\,,\ \alpha_{jk}(z) \in C^1\,(D)\,,\ \ d\alpha = 0. \tag{1}$$

Определение. (см. [6]). Дважды гладкая в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u\,(z) \in C^2\,(D)$ называется $\alpha-$ гармонической, если $dd^c u \wedge \alpha = 0$ в D.

В частности, если коэффициенты $\alpha_{jk} \in C^{l+\lambda}\,(D)$, где $C^{l+\lambda}-$класс l-раз дифференцируемых функций, причем l-тые частные производные принадлежать классу Гёлдера Lip_λ, $\ 0 < \lambda < 1$, то решение уравнение $dd^c u \wedge \alpha = 0$ существует и принадлежит классу $C^{l+2+\lambda}\,(D)$ (см.[3]).

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. Пусть D область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, и пусть Π гиперповерхность из класса C^1 который разделяет D на две подобласти D_1 и D_2. Пусть функция $u \in C(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$ является $\alpha-$гармонической на D_1 и D_2. Если $u_j = u|_{D_j} \in C^1(D_j \cup \Pi)$, $j = 1, 2$ и на Π выполняется равенства

$$\frac{\partial u_j}{\partial \bar{\nu}^k} = \frac{\partial u_k}{\partial \bar{\nu}^k}, \quad j, k = 1, 2,$$

где $\bar{\nu}^k = (\bar{\nu}_1^k, \bar{\nu}_2^k, ..., \bar{\nu}_n^k)$ внешний нормаль к границе D_k. Тогда функция u является $\alpha-$гармонической в D.

[1] Blanchet P., On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions, Complex Variables, 26 (1995), 311–322.

[2] Riihentaus J. Removability results for subharmonic functions, for harmonic functions and for holomorphic functions// Matematychni Studii, 2016. vol. 46, issue 2. pp. 152-158.

[3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Изд. МИР. – Москва, 1966.

[4] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957.

[5] Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademic Publishing, 2012. 316 с.

[6] Ваисова М.Д. Теория потенциала в классе $\alpha-$субгармонических функций.// Узбекский математический журнал, – Ташкент, 2016, – №3, – С. 46–52.

Критерий существования безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространствах Фока с радиальным регулярным весом

@ Юлмухаметов Р.С., Исаев К.П.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются пространства целых функций типа Фока

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) < \infty \right\},$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега, $\varphi(z)$ — некоторая субгармоническая функция. Очевидно, $\mathcal{F}_\varphi$ — гильбертово пространство, в котором все точечные функционалы $\delta_\lambda : f \to f(\lambda)$ непрерывны. В силу самосопряженности гильбертовых пространств каждый такой функционал порождается элементом $k_\lambda(z) = k(z, \lambda)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{k(z, \lambda)} e^{-2\varphi(z)} dm(z) = f(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция $k(z,\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{F}_\varphi$, очевидно,

$$\|\delta_\lambda\|^2 = k(\lambda,\lambda) := K(\lambda), \; \lambda\in\mathbb{C}.$$

Система $k(z,\lambda_j)$ называется безусловным базисом в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$, если она является образом ортогонального базиса при некотором изоморфизме $\mathcal{F}_\varphi$. Другими словами, эта система полна и для некоторой константы $C>1$

$$\frac{1}{C}\sum_j |a_j|^2 K(\lambda_j) \le \left\|\sum_j a_j k(z,\lambda_j)\right\|^2 \le C\sum_j |a_j|^2 K(\lambda_j),$$

где a_j — произвольный набор комплексных чисел.

Вопрос о существовании безусловных базисов из воспроизводящих ядер является активно обсуждаемым вопросом, в частности, из-за того, что этот вопрос тесно связан с такими классическими проблемами комплексного анализа как задача об интерполяции и задача о представлении рядами экспонент. В работе [1] доказано, что в пространствах $\mathcal{F}_\varphi$ с весами $\varphi(z) = (\ln^+|z|)^\alpha$, $\alpha\in(1;2]$, существуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер. В работе [2] доказано, что если функция $\psi(t)=\varphi(e^t)$ удовлетворяет условиям:

a) функция ψ' неограничена, функция ψ'' невозрастающая,

b) выполняется асимптотическое соотношение $|\psi'''(t)| = O(\psi''(t)^{\frac{5}{3}})$,

то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер.

Выпуклую функцию $u(x)$, $x>0$, будем называть регулярной, если существуют число $q>1$ и функция $\gamma(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, такие что

$$\frac{1}{q}\le\frac{u''(x)}{u''(y)}\le q, \text{ при } |x-y|\le\gamma(x)\sqrt{\frac{1}{u''(x)}}.$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. В пространстве Фока с весом $\varphi\in C^2$, таким, что функция $\psi(t)=\varphi(e^t)$ регулярна, безусловный базис из воспроизводящих ядер существует тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{x\to\infty}\psi''(x)<\infty.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No 21-11-00168).

[1] Borichev A., Lyubarskii Yu., "Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces", Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, **9** (2010), 449–461.

[2] Baranov A., Belov Yu., Borichev A., "Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces", Studia Mathematica, **236** (2017), №2, 127–142.

О свойствах графов ошибок бесконечномерных квантовых каналов

@ Яшин В.И.
МИАН, г.Москва, Россия

По аналогии с классическими работами Шеннона [2], в квантовой теории информации были введены некоммутативные графы ошибок [3], при помощи которых можно изучать ошибки в квантовом канале и его безошибочную пропускную способность. Исследования в данном направлении воспринимать как обобщение классической теории графов на некоммутативный случай.

Некоммутативные графы ошибок являются операторными системами, то есть самосопряжёнными подпространствами в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, содержащими единицу. В работе [4] было показано, что каждая операторная система является графом ошибок для некоторого канала. Возможность обобщения этого результата на бесконечномерный случай была исследована в работе [1]. Было показано, что некоммутативные графы ошибок бесконечномерных квантовых каналов с необходимостью являются слабо замкнутыми; в случае сепарабельных пространств для каждого графа был построен соответствующий канал.

Работа поддержана грантом РНФ 19-11-00086 и выполнена в Математическом институте имени В.А. Стеклова Российской академии наук.

[1] Yashin, V. I. (2020). Properties of operator systems, corresponding to channels. Quantum Information Processing, 19(7), 195.
[2] Shannon, C. (1956). The zero error capacity of a noisy channel. IRE Transactions on Information Theory, 2(3), 8-19.
[3] Duan, R., Severini, S., Winter, A. (2012). Zero-error communication via quantum channels, noncommutative graphs, and a quantum Lovasz number. IEEE Transactions on Information Theory, 59(2), 1164-1174.
[4] Duan, R. (2009). Super-activation of zero-error capacity of noisy quantum channels. arXiv preprint arXiv:0906.2527.

Научное издание

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ»

Сборник тезисов
Международной конференции
(г. Уфа, 4 – 7 октября 2021 г.)

В авторской редакции

Подписано в печать 29.09.2021 г. Формат 60х84/16.
Печать: цифровая. Гарнитура: Times New Roman
Усл. печ. л. 3,37. Тираж 50. Заказ 1490.

АЭТЕРНА
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»
450076, г. Уфа, ул. М. Гафури 27/2
https://aeterna-ufa.ru
info@aeterna-ufa.ru
+7 (347) 266 60 68