

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА**

**«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ
И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ»**

*Сборник тезисов
Международной конференции
(г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2020 г.)*

**НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «АЭТЕРНА»
УФА – 2020**

УДК 517.5+517.98+530.145

ББК 22.31+74.57

Т338

*Сборник издан при финансовой поддержке
Научно-образовательного математического центра
Приволжского федерального округа.*

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук **И.Х. Мусин** (отв. редактор);

д-р физ.-мат. наук **З.Ю. Фазуллин**;

к.ф.-м.н. **Р.Н. Гарифуллин** (отв. секретарь)

**Т338 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ:** сборник тезисов
Международной научно-практической конференции (г. Уфа, 28
сентября – 1 октября 2020 г.). / отв. ред. И.Х. Мусин. – Уфа:
Аэтерна, 2020. - 73 с.

ISBN 978-5-00177-038-1

В сборнике представлены тезисы докладов участников международной математической конференции “Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации”.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 517.5+517.98+530.145

ББК 22.31+74.57

ISBN 978-5-00177-038-1

© БашГУ, 2020

© Коллектив авторов, 2020

© ООО «АЭТЕРНА», 2020

**BASHKIR STATE UNIVERSITY
INSTITUTE OF MATHEMATICS
WITH COMPUTING CENTRE OF UFRS OF RAS
SCIENTIFIC EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER
OF VOLGA FEDERAL DISTRICT**

**«FUNCTION THEORY, OPERATOR THEORY AND
QUANTUM INFORMATION THEORY»**

**Book of abstracts
of the International Conference**
September 28–October 1, 2020

**SCIENTIFIC PUBLISHING CENTER «AETERNA»
UFA–2020**

UDC 517.5+517.98+530.145

BBK 22.31+74.57

F96

*The Conference is sponsored
by Scientific Educational Mathematical Center
of Volga Federal District*

F96 **FUNCTION THEORY, OPERATOR THEORY AND QUANTUM INFORMATION THEORY:** book of abstracts of the International conference (Ufa, September 28-October 1, 2020). / ed. by I. Kh. Musin. – Ufa, Russia: Aeterna, 2020. - 73 p.

ISBN 978-5-00177-038-1

The book contains abstracts of the talks at International Mathematical Conference "Function Theory, Operator Theory and Quantum Information Theory".

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 517.5+517.98+530.145

BBK 22.31+74.57

ISBN 978-5-00177-038-1

© BashSU, 2020

© Group of authors, 2020

© ООО «AETERNA», 2020

Содержание

<i>Абанин А.В.</i> Топологическая структура семейства композиционных операторов в пространствах Бергмана	8
<i>Абузярова Н.Ф.</i> О нулевых (под)множествах обратимых по Эренпрайсу функций в алгебре Шварца	8
<i>Авахидиев Ф.Г.</i> Критерии существования конечных констант в базовых интегральных неравенствах	10
<i>Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.</i> Конформное отображение областей на фазовой плоскости и когерентные состояния	11
<i>Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.</i> Новый интеграл с эллиптическими функциями Якоби	12
<i>Амосов Г.Г.</i> О вычислении пропускной способности квантовых каналов Вейля	13
<i>Асташкин С.В.</i> Новые примеры симметричных пространств на $[0, 1]$, не изоморфных симметричным пространствам на $(0, \infty)$	14
<i>Баранов А.Д.</i> Спектральная теория одномерных возмущений нормальных операторов	15
<i>Бикчентаев А.М., Фауаз Хаттаб</i> Разности и коммутаторы идемпотентов в C^* -алгебрах	16
<i>Гайсин А.М., Гайсин Р.А.</i> Неравенство Т. Банга и экстремальная задача Е.М. Дынькина	16
<i>Гайсин Р.А.</i> Неполнота систем экспонент с лакунами Фейера на дугах	18
<i>Гайсина Г.А.</i> Теоремы типа Ритта для рядов экспонент	19
<i>Гумеров Р.Н.</i> О градуировке полугрупповых C^* -алгебр	20
<i>Ефремова Л.С.</i> C^0 и C^1 -возмущения C^1 -гладких простейших ко- сых произведений и C^0 - Ω -взрыв	21
<i>Ivanova O.A.</i> On the commutant of the generalized backward shift operator in weighted spaces of entire functions	22
<i>Imotov A.A.</i> On a convergence rate to invariant measures in Markov Branching Processes with infinite variance and allowing immigration	23
<i>Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.</i> Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах	25
<i>Каюмов И.Р., Хамматова Д.М., Поннусами С.</i> Неравенство Бора для обобщённых операторов Чезаро	26
<i>Каюмов И.Р., Хамматова Д.М., Поннусами С.</i> О неравенстве Бора для оператора Чезаро	28
<i>Кронберг Д.А.</i> О некоторых коллективных действиях участников в квантовых коммуникационных протоколах	30
<i>Levenberg N.</i> Polynomials associated to non-convex bodies	30
<i>Липачева Е.В.</i> C^* -алгебры, порожденные расширениями полугрупп	31

<i>Литвинов В.Л.</i> Исследования колебаний неоднородного каната переменной длины методом Римана	32
<i>Ляхов К.А.</i> Критерий для нахождения условного минимума целевой функции, связанной с итеративным извлечением целевых изотопов циркония при помощи лазерного метода селективного торможения конденсации	34
<i>Малютин К.Г., Кабанко М.В.</i> Геометрический критерий интерполяционности дивизора в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости	36
<i>Малютин К.Г., Малютина Т.И., Ревенко А.А.</i> Экстремальные проблемы в пространстве мероморфных функций конечного порядка в полуплоскости.	37
<i>Makhmutov S.</i> On the Growth of Dirichlet Integral for Some Function Spaces	38
<i>Мейлиев А., Муртазаев М.</i> О применении тауберовой теоремы для степенных рядов в теории ветвящихся случайных процессов . .	39
<i>Мелихов С.Н.</i> Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространствах голоморфных функций	41
<i>Меньшикова Э.Б., Хабибуллин Б.Н.</i> Распределение нулей голоморфных функций в области с ограничениями на их рост вблизи границы этой области	42
<i>Можеев А.С.</i> О некоммутативных операторных графах, порождаемых положительными операторно-значными мерами	43
<i>Morzhin O. V.</i> On Time-Minimal Control Problems, Reachable Sets, and Machine Learning Control of Evolution of Density Operator for an Open Two-Level Quantum System	44
<i>Мусин И.Х.</i> О преобразовании Фурье-Лапласа обобщенных функций	46
<i>Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.)</i> Об условиях совпадения преобразований линейных непрерывных функционалов в гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром	47
<i>Насибуллин Р.Г.</i> Неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения Лэмба	48
<i>Насыров С.Р.</i> Пространства разветвленных накрытий сферы компактными римановыми поверхностями рода 0 и 1	49
<i>Новиков С.Я.</i> Оценка спарка равноугольного фрейма	50
<i>Новокшенов В.Ю.</i> Ортогональные полиномы и уравнения Пенлеве	51
<i>Павленко В.А.</i> Об одной гамильтоновой системе Кимуры.	51
<i>Pechen A.</i> Uncomputability of discrete quantum control	52
<i>Полубоярова Н. М.</i> Неустойчивость экстремальных поверхностей вращения	53
<i>Рахимова А.И.</i> О порождающих в алгебре целых функций	54

<i>Сакбаев В.Ж.</i> Явление градиентного взрыва решений нелинейного уравнение Шредингера и динамика квантовых состояний	55
<i>Сергеев А.Г.</i> Уравнения Янга–Миллса на S^4 и гармонические сферы в пространствах петель	56
<i>Синельщиков Д.И.</i> Критерий линеаризуемости и первые интегралы для осцилляторов Релеевского типа	57
<i>Ситдииков А.С., Никитин А.С.</i> Ограничения правилами суперотбора по изоспину при передаче квантовой информации	58
<i>Sukhov A.</i> Polynomially convex hulls near Levi-flat singularities	59
<i>Теретёнков А.Е.</i> Асимптотическое поведение редуцированной матрицы плотности в подходе Боголюбова-ван Хофа	59
<i>Шабалин П.Л.</i> Краевая задача Гильберта для обобщенных аналитических функций с сингулярным коэффициентом	60
<i>Шакиров И.А.</i> О логарифмическом приближении фундаментальной характеристики оператора Фурье	61
<i>Шавлуков А.М.</i> Особенность омбилического типа решения одной системы уравнений газовой динамики	63
<i>Фазуллин З.Ю., Абузярова Н.Ф.</i> О необходимом и достаточном условии в теории регуляризованных следов	64
<i>Khabibullin B.N.</i> Boundedness of functions of finite order	65
<i>Khabibullin B.N., Murzasov R.R.</i> On approximation by exponential systems	66
<i>Хабибуллин Б.Н., Салимова А.Е.</i> Рост субгармонических функций вдоль прямой	67
<i>Харасова Л. С.</i> Метод интегральных представлений исследования нелинейной краевой задачи теории пологих оболочек типа Тимошенко	69
<i>Юлмухаметов Р.С., Исаев К.П., Трунов К.В.</i> Эквивалентные нормы в гильбертовых пространствах с безусловным базисом из значений воспроизводящего ядра	70

Топологическая структура семейства композиционных операторов в пространствах Бергмана

Абанин А.В.

Южный федеральный университет, г.Ростов-на-Дону, Россия

Доклад посвящен вопросу о топологической структуре множества (весовых) композиционных операторов на пространствах Бергмана с равномерной или интегральной нормами. Будет представлен новый метод, позволяющий распространить предшествующие результаты, относящиеся к гильбертовому случаю или конкретному пространству всех ограниченных голоморфных в единичном круге функций, на широкий класс пространств Бергмана.

О нулевых (под)множествах обратимых по Эренпрайсу функций в алгебре Шварца

Абузярова Н.Ф.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Алгеброй Шварца $\mathcal{P}$ будем называть образ при преобразовании Фурье-Лапласа пространства Шварца $(C^\infty(\mathbb{R}))'$. Согласно хорошо известной теореме Пэли-Винера-Шварца, $\mathcal{P}$ есть совокупность всех целых функций экспоненциального типа, растущих вдоль вещественной оси не быстрее многочлена.

Функция $\varphi \in \mathcal{P}$ называется *обратимой по Эренпрайсу*, если главный идеал $\mathcal{I}_\varphi$, алгебраически порожденный этой функцией в $\mathcal{P}$, замкнут. Эквивалентный термин — «медленно убывающая» функция («slowly decreasing function»).

Обратимые по Эренпрайсу функции играют важную роль в вопросах обратимости распределений в пространствах $C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}' := (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$, разрешимости неоднородных уравнений свертки и представления решений однородных уравнений свертки в $C^\infty(\mathbb{R})$ (см., например, [1], [2]). Также, эти функции важны при рассмотрении задачи о представлении (слабо) синтезируемого дифференциально-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(\mathbb{R})$ в виде прямой суммы его резидуального подпространства и инвариантного относительно сдвига подпространства с тем же спектром, что и у W .

Если для первой группы задач важно уметь охарактеризовать нулевые множества обратимых по Эренпрайсу функций (см. [3], [4]), то при изучении дифференциально-инвариантных подпространств возникает проблема выяснения, является ли заданная последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ с конечной плотностью Берлинга-Мальявена $D_{BM}(\Lambda)$, частью нулевого множества какой-либо функции $\varphi \in \mathcal{P}$, обратимой по Эренпрайсу?

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ такой, что $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$ и $\text{Im } \lambda_j = O(|\lambda_j|)$, определим величину $D_{sd}(\Lambda)$ следующим образом: если Λ не является частью нулевого множества ни для какой обратимой по Эрнепрайсу функции, то полагаем $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$, в противном случае, $D_{sd}(\Lambda) := \inf a$, где инфимум берется по всем $a > 0$ таким, что $\Lambda \subset \Lambda'$, $D_{BM}(\Lambda') = a$, Λ' — нулевое множество какой-нибудь обратимой по Эрнепрайсу функции $\varphi \in \mathcal{P}$.

Очевидно, что всегда $D_{BM}(\Lambda) \leq D_{sd}(\Lambda)$, и также, что для последовательности Λ , совпадающей с нулевым множеством какой-либо обратимой по Эрнепрайсу функции $\varphi \in \mathcal{P}$, будет $D_{BM}(\Lambda) = D_{sd}(\Lambda)$, причем в этом случае инфимум в определении $D_{sd}(\Lambda)$ достигается.

Изучение введенной характеристики $D_{sd}(\Lambda)$ естественно начать с ответов на следующие вопросы.

- 1) Всегда ли $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$?
- 2) $D_{sd}(\Lambda) < +\infty \implies D_{BM}(\Lambda) = D_{sd}(\Lambda)$?
- 3) $D_{sd}(\Lambda) < +\infty \implies$ найдется обратимая по Эрнепрайсу функция $\varphi \in \mathcal{P}$ с нулевым множеством Λ' таким, что $D_{BM}(\Lambda') = D_{sd}(\Lambda)$, $\Lambda \subset \Lambda'$?
- 4) Зависит ли ответ на предыдущий вопрос от того, какое из соотношений имеет место: $D_{BM}(\Lambda) = D_{sd}(\Lambda)$ или $D_{BM}(\Lambda) < D_{sd}(\Lambda) < +\infty$?

На каждый из вопросов 1)–4) нами получен отрицательный ответ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002)

- [1] Ehrenpreis L. Solution of some problems of division, IV. // Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.
- [2] Berenstein C.A., Taylor B.A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. in Math. 1980. V.33. P. 109–143.
- [3] Абузярова Н.Ф. Обратимые по Эрнепрайсу функции в алгебре Шварца // Доклады Академии наук. 2019. Т. 484. №1. С. 7–11.
- [4] Абузярова, Н. Ф. О сдвигах целочисленной последовательности, порождающих функции, обратимые по Эрнепрайсу. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2019. Т. 480. С. 5–25.

Критерии существования конечных констант в базовых интегральных неравенствах

Авхадиев Ф.Г.

Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия, e-mail
avkhadiev47@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ —область. Для $p \in [1, 2]$ мы изучаем неравенства вида

$$\left(\iint_{\Omega} |u(z)|^p dx dy \right)^{2/p} \leq \Lambda_{p-1}(\Omega) \iint_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dx dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где $z = x + iy$, $\Lambda_{p-1}(\Omega)$ — минимальная величина, возможная на этом месте. Статьи Р. Оссермана [1], О.В. Бесова [2] и автора [3], [4] дают достаточно полное представление об аналитических и геометрических проблемах, связанных с достаточными условиями и критериями существования конечной постоянной $\Lambda_{p-1}(\Omega)$. В докладе будут представлены несколько новых критериев, обобщающих и усиливающих известные результаты для плоских и пространственных областей и связанных с функцией расстояния

$$\rho(z, \Omega) = \text{dist}(z, \partial\Omega) := \inf_{w \in \partial\Omega} |z - w|, \quad z \in \Omega, \quad \rho(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} \rho(z, \Omega).$$

Приведем лишь один из результатов.

Теорема 1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ — конечно-связная область, такая, что $\Omega \neq \mathbb{C}$. Пусть, далее, $\mathbb{K}$ — пустое множество или компакт, такой, что $\mathbb{K} \subset \Omega$ и $\Omega \setminus \mathbb{K}$ — область. Тогда имеют место эквивалентности вида:*

$$\Lambda_1(\Omega \setminus \mathbb{K}) < \infty \iff \rho(\Omega \setminus \mathbb{K}) < \infty,$$

и для любого $p \in [1, 2]$

$$\Lambda_{p-1}(\Omega \setminus \mathbb{K}) < \infty \iff \iint_{\Omega \setminus \mathbb{K}} \rho^{2p/(2-p)}(z, \Omega \setminus \mathbb{K}) dx dy < \infty.$$

Нами получены также аналогичные результаты для плоских областей с равномерно совершенными границами и для пространственных областей, λ -близких к выпуклым.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00115).

- [1] Osserman R., A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum, Comment. Math. Helv. 52 (1977), 545–555.

- [2] Бесов О.В., Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях, Матем. сборник, 201:12 (2010), 69–82.
- [3] Авхадиев Ф.Г., Решение обобщенной задачи Сен-Венана, Матем. сборник, 189:12 (1998), 3–12.
- [4] Авхадиев Ф.Г., Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения, Матем. сборник, 206:12 (2015), 3–28.

Конформное отображение областей на фазовой плоскости и когерентные состояния

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова,
г.Москва, Россия

В последнее десятилетие квантование по Конну [1] интенсивно обсуждается в математической среде. Между тем привлечение к обсуждению этой тематики широких физических кругов требует её пропедевтики на языке, привычном большинству физиков, то есть на том языке, на котором написаны стандартные учебники по квантовой механике типа книги [2] — без обращения к свойствам универсального пространства Тейхмюллера [3].

В докладе рассмотрено конформное отображение области, ограниченной прямоугольником, на круг. Граница прямоугольной области интерпретируется как фазовая траектория классической частицы в потенциальной яме с бесконечными стенками, а граница круговой области — как фазовая траектория гармонического осциллятора с единичными частотой и массой. Наиболее близкими к классической механике квантовомеханическими аналогами движения этих систем являются их когерентные состояния, введенные в работах [4, 5]. С помощью построенного конформного отображения благодаря разрывности импульса частицы в ящике с бесконечными стенками можно прояснить взаимоотношения между процедурами квантования по Дираку [2] и по Конну [1, 3].

- [1] Сергеев А.Г. Квантовое исчисление и квазиконформные отображения // Матем. заметки. 2016. Т. 100, вып. 1, с. 144–154.
- [2] Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика (с задачами). М.: Наука, 1976.
- [3] Сергеев А.Г. Лекции об универсальном пространстве Тейхмюллера. М.: МИАН, 2013.
- [4] Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik // Naturwissenschaften. 1926. Bd. 14, s. 664–666.

- [5] Волович И.В., Трушечкин А.С. Асимптотические свойства квантовой динамики в ограниченных областях на различных масштабах времени // Изв. РАН. Сер. матем. 2012, Т. 172, вып. 1, с. 43–84.

Новый интеграл с эллиптическими функциями Якоби

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова,
г.Москва, Россия

Рассмотрение конкретных кривых и поверхностей в пространствах малой размерности для известных утверждений из геометрии часто приводит к нетривиальным результатам в вещественном анализе [1, 2, 3]. В данной работе благодаря следованию этой линии доказана следующая

Теорема. Пусть k и k' — модуль и дополнительный модуль полного эллиптического интеграла 1-го рода $\mathbf{K}(k)$, тогда:

$$\int_0^{\mathbf{K}(k)} \frac{sn(z, k)}{dn^2(z, k)} \arcsin[k sn(z, k)] dz = \frac{\pi}{2} \frac{k}{(1 + k') k'^2}.$$

В основе доказательства теоремы лежит вычисление переменной действия

$$I = \frac{1}{4\pi} \oint (p dq - q dp)$$

для классической частицы единичной массы в потенциале Пёшля-Теллера

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \tan^2 q$$

с использованием параметризации её фазовой траектории вида:

$$p = \sqrt{2} \frac{k}{k'} \frac{cn(z, k)}{dn(z, k)}, \quad q = \arcsin[k sn(z, k)], \quad z \in [0, 4\mathbf{K}(k)].$$

Её угловая переменная θ при этом есть: $\theta = am(z, k)$.

- [1] Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Оценки полного эллиптического интеграла 2-го рода геометрическими методами // Дифференциальные уравнения. 2019, Т. 55, № 6, с. 894–895.
- [2] Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Оценки длины эллипса и формирование профессиональной компетентности инженеров // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. 2019, № 7, с. 23-28.

- [3] Алексеева Е.С. Оценка снизу полного эллиптического интеграла 3-го рода из геометрических соображений // Математика: Материалы 58-й Междунар. науч. студ. конф. 10-13 апреля 2020 г. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: ИПУ НГУ, 2020. С. 26.

О вычислении пропускной способности квантовых каналов

Вейля

Амосов Г.Г.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия

Доказательство квантовой теоремы кодирования, данное А.С. Холево, а также независимо Б. Шумахером и М.Д. Вестморелендом (1996), поставило задачу вычисления пропускной способности $C(\Phi)$ квантового канала связи Φ . С использованием энтропии фон Неймана $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$ квантового состояния (положительного оператора с единичным следом) ρ верхняя граница Холево для квантового канала (вполне положительного отображения, сохраняющего след) Φ определяется формулой

$$\overline{C}(\Phi) = \sup_{\pi_j, \rho_j} \left(S \left(\sum_j \pi_j \Phi(\rho_j) \right) - \sum_j \pi_j S(\Phi(\rho_j)) \right) \quad (1)$$

где супремум берётся по всем ансамблям квантовых состояний ρ_j . Если бы величина (1) обладала бы свойством

$$\overline{C}(\Phi^{\otimes N}) = N \overline{C}(\Phi)$$

для любого натурального N , называемым свойством аддитивности, тогда пропускная способность канала Φ определялась бы формулой $C(\Phi) = \overline{C}(\Phi)$. На настоящий момент времени свойство аддитивности установлено для небольшого ряда частных случаев. С другой стороны, М.Б. Хастингс доказал (2009), что существуют каналы, для которых свойство аддитивности не выполнено.

Рассмотрим пару унитарных операторов U и V в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $(e_j, j \in \mathbb{Z}_n)$, определяемых формулой

$$Ue_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}} e_j, \quad Ve_j = e_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}_n.$$

Важным примером квантового канала является так называемый канал Вейля следующего вида

$$\Phi(\rho) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_n} \pi_{jk} U^j V^k \rho V^{k*} U^{j*}, \quad (2)$$

(π_{jk}) – произвольное распределение вероятностей.

Теорема [1]. Пусть выполнено свойство

$$\pi_{00} \geq \pi_{10} \geq \dots \geq \pi_{n-10} \geq \pi_{01} \geq \pi_{11} \dots \pi_{0n-1} \dots \pi_{n-1n-1}$$

и

$$p_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \pi_{jk}, \quad k \in \mathbb{Z}_n.$$

Тогда свойство аддитивности выполнено для канала Вейля (2), а его пропускная способность равна

$$C(\Phi) = n + \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} p_k \log p_k.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00086).

- [1] Amosov G.G. On classical capacity of Weyl channels, arXiv:2006.05855, to appear in Quantum Information Processing

Новые примеры симметричных пространств на $[0, 1]$, не изоморфных симметричным пространствам на $(0, \infty)$.

Асташкин С.В.

Самарский национальный исследовательский университет, г.Самара,
Россия

Нетрудно показать, что пространства $L_p[0, 1]$ и $L_p(0, \infty)$ изометрически изоморфны для каждого $1 \leq p \leq \infty$. В 1970 г. Б. С. Митягин поставил проблему о существовании изоморфизмов между произвольными симметричными пространствами (с.п.) на $[0, 1]$ и $(0, \infty)$ [1] (все определения см., например, в [2]).

Эта проблема интенсивно изучалась в фундаментальной работе [3, § 8], где было показано, что с.п. E на $[0, 1]$ изоморфно с.п. Z_E всех измеримых функций f на $(0, \infty)$ таких, что $f^* \chi_{[0, 1]} \in E$ и $f^* \chi_{[1, \infty)} \in L_2$, при условии, если $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$, где α_E and β_E — индексы Бойда пространства E ($f^*(t)$ — убывающая перестановка функции $|f|$). Как показано в [4], последнее условие может быть заменено более слабым условием, что E и его двойственное E' имеют свойство Круглова.

Одновременно в [3, § 8] были приведены примеры с.п. на $[0, 1]$, которые не изоморфны с.п. на $(0, \infty)$. Идея их построения состояла в том,

что при определенных условиях всякое с.п. E на $[0, 1]$, изоморфное некоторому с.п. на $(0, \infty)$, изоморфно пространству Z_E . Так как по определению Z_E содержит дополняемое подпространство, изоморфное l_2 , то аналогичное свойство должно иметь и E . Поэтому, если E не содержит дополняемых "копий" l_2 , то оно не изоморфно никакому с.п. на $(0, \infty)$.

Основная цель доклада — привести новые примеры с.п. на $[0, 1]$, не изоморфных с.п. на $(0, \infty)$, которые в отличие от ранее известных содержат дополняемые подпространства, изоморфные l_2 .

Результаты были получены совместно с G. Curbera (Испания, Севилья).

- [1] Б. С. Митягин, *Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства*, УМН, **25**:5 (1970), 59–103.
- [2] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *Независимые функции и геометрия банаховых пространств*, УМН, **65**:6 (2010), 3–86.
- [3] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, and L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **19** (1979) 298 pp.
- [4] S. V. Astashkin, *Rademacher series and isomorphisms of rearrangement invariant spaces on the semi-axis*, J. Funct. Anal. **260** (2010), 195–207.

Спектральная теория одномерных возмущений нормальных операторов

Баранов А.Д.

Санкт-Петербургский государственный университет

Доклад посвящен изучению спектральных свойств возмущений ранга один компактных нормальных операторов с помощью функциональной модели, действующей в новом классе пространств целых функций, обобщающем пространства де Бранжа. В частности, будут рассмотрены такие свойства как полнота собственных векторов возмущенного оператора и его сопряженного, а также возможность спектрального синтеза, то есть восстановления любого инвариантного подпространства по содержащимся в нем корневым векторам. Еще одна задача связана с описанием компактных нормальных операторов, у которых существует вольтеррово возмущение.

Разности и коммутаторы идемпотентов в C^* -алгебрах

Бикчентаев А.М., Фауаз Хаттаб

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г.Казань, Россия

Доклад продолжает исследования [1]–[4]. Установлено подобие некоторых пар идемпотентов ($A = A^2$) и пар трипотентов ($A = A^3$) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Получены новые результаты о разностях и коммутаторах идемпотентов P и Q . В унитарном случае с разностью $P - Q$ нами ассоциирована разность $A_{P,Q}$ другой пары идемпотентов. Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ – идеал определения следа φ . Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$. В некоторых случаях это позволило установить равенство $\varphi(P - Q) = 0$. Получены новые тождества для пар идемпотентов и для пар изоклинных проекторов ($A = A^2 = A^*$). Доказано, что каждый оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, представляется в виде суммы не более чем 50 коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Показано, что коммутатор идемпотента и произвольного элемента из абстрактной алгебры не может быть ненулевым идемпотентом. Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый косоэрмитов ($A^* = -A$) оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $A = \sum_{k=1}^4 [A_k, B_k]$, где $A_k, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ косоэрмитовы.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

- [1] Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H. *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. Topology and physics*, J. Math. Phys. **35** (10), 5373–5451 (1994).
- [2] Bikchentaev A.M. *Tripotents in algebras: invertibility and hyponormality*, Lobachevskii J. Math. **35** (3), 281–285 (2014).
- [3] Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C^* -алгебрах*, Сибирск. матем. журн. **58** (2), 243–250 (2017).
- [4] Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C^* -алгебрах и квантовый эффект Холла*, ТМФ **195** (1), 75–80 (2018).

Неравенство Т. Банга и экстремальная задача Е.М. Дынькина

Гайсин А.М., Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Обсуждаются вопросы, связанные со второй проблемой Е.М. Дынькина, восходящей к известной оценке Т. Банга для бесконечно дифференцируемой на отрезке $I = [0, 1]$ функции в окрестности точки, где она

со всеми своими производными обращается в нуль. Точнее говоря, речь идет о получении точной двусторонней оценки для величины

$$J_M(x) = \sup\{|g(x)|: \sup_I |g^{(n)}(x)| \leq M_n, g^{(n)}(0) = 0, n \geq 0\},$$

определяемой по функциям из неквазианалитического класса Карлемана $C_I(M_n)$ (более подробно об этом см. в [1]).

Доказана

Теорема. Пусть $M = \{M_n\}$ — регулярная последовательность, H_0 — ассоциированный вес, т.е.

$$H_0(x) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n x^{n+1}}, \quad x > 0.$$

Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

то верны следующие оценки:

$$\frac{1}{KH_0(x)} \leq J_M(x) \leq \frac{1}{xH_0(x)}, \quad 0 < x \leq 1,$$

где K ($0 < K < \infty$) — постоянная, зависящая только от последовательности M .

Менее точные неравенства ранее были получены первым автором в [1]. Оценка сверху для $J_M(x)$, приведенная в [2], не верна, а снизу — неточна и не отражает истинное поведение даже $\ln J_M(x)$ в окрестности точки $x = 0$.

- [1] Гайсин А.М. Экстремальные задачи в неквазианалитических классах Карлемана // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 7. С. 44 – 78.
- [2] Matsaev V., Sodin M. Asymptotics of Fourier and Laplace transforms in weighted spaces of analytic functions // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 4. С. 107 – 140.

Неполнота систем экспонент с лакунами Фейера на дугах

Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть W — класс всех положительных, возрастающих и непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций w таких, что

$$\int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполняются условия

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \quad 2) \int_0^{\lambda_n} \frac{\mu(t; \lambda_n)}{t} dt \leq w(\lambda_n) \quad (n \geq 1), \quad w \in W,$$

где $\mu(t; \lambda_n)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$. Тогда система экспонент $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ усиленно не полна: для всех a, b ($0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$) и β , $\beta \neq \pm \lambda_n$ ($n \geq 1$)

$$\inf_{\gamma(-a, a)} \inf_{c_n} \left\| e^{\beta z} - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{\mu_n z} \right\|_{\gamma(-a, a)} = \varepsilon_{\beta}(a, b) > 0.$$

Здесь $\|g\|_{\gamma} = \max_{\gamma} |g(z)|$, внутренний инфимум берется по всем квазиполиномам $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{\mu_n z}$, $\mu_n = \lambda_n$, $\mu_{-n} = -\lambda_n$ ($n \geq 1$), а внешний — по всем спрямляемым кривым $\gamma = \gamma(-a, a)$ из прямоугольника $P(a, b) = \{z = x + iy : |x| \leq a, |y| \leq b\}$, соединяющим вертикальные стороны.

Как известно, пара условий 1), 2) равносильна условиям 1) и 3) или 1) и 4), где:

$$3) - \ln \prod_{\substack{k \neq n \\ \frac{\lambda_n}{2} \leq \lambda_k \leq 2\lambda_n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| \leq w(\lambda_n) \quad (n \geq 1), \quad w \in W;$$

$$4) - \ln \left| Q'(\lambda_n) \right| \leq w(\lambda_n) \quad (n \geq 1), \quad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right), \quad w \in W.$$

Отметим, что усиленная неполнота системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$ была ранее доказана в работе [1], но при более сильных условиях (здесь γ — любая спрямляемая кривая).

Следствие 1. Если выполняются условия 1), 2), то система экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ не полна в $C(\gamma)$ (γ — любая спрямляемая кривая).

Применением результата статьи [2] получаем

Следствие 2. Если γ — дуга ограниченного наклона с величиной $q(\gamma) < 1$, то при выполнении условий 1), 2) класс Сиддики $C_{00}(\hat{M}_n; \gamma)$ нетривиален (определения см. в [2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00095 А).

- [1] Гайсин А.М. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.
- [2] Гайсин А.М., Гайсин Р.А. Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана. II // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 49–73.

Теоремы типа Ритта для рядов экспонент

Гайсина Г.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Для рядов Дирихле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad (1)$$

абсолютно сходящихся в $\mathbb{C}$, Дж. Риттом в 1928 г. было введено понятие R -порядка ρ_R . В предположении

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} < \infty$$

им была доказана формула

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n}. \quad (2)$$

При более слабых ограничениях на показатели (при этом ряд (1) сходится в $\mathbb{C}$ лишь равномерно), эта же формула (2) была передоказана К. Сугимурой (1929) и С. Танаки (1953) (см. в [1]).

Для рядов вида (1), абсолютно сходящихся лишь в некоторой полуплоскости, в [2] был введен аналог ρ_0 порядка ρ_R по Ритту. Здесь же была получена и соответствующая формула для вычисления ρ_0 через коэффициенты ряда (1). В [3] этот результат полностью был перенесен

на ряды экспонент, абсолютно сходящиеся в некоторой ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ (λ_n — комплексные). В этом случае, как и в случае полуплоскости, порядок ρ_D (аналог ρ_R) определяется так:

$$\rho_D = \overline{\lim}_{z \rightarrow \partial D} d(z) \ln^+ \ln |f(z)|, \quad d(z) = \inf_{\xi \in \partial D} |z - \xi|, \quad z \in D.$$

Отметим, что в работах [2], [3], как и в теоремах К. Сугимур и С. Танаки, соответствующие утверждения носят только достаточный характер. Оказывается, для целых рядов Дирихле (1) на самом деле верна

Теорема. Для того, чтобы для порядка ρ_R по Ритту любого ряда Дирихле (1), равномерно сходящегося в $\mathbb{C}$, была верна формула (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln N(x)}{x \ln x} = 0, \quad N(x) = \sum_{[x] \leq \lambda_n < x} 1,$$

где $[x]$ — целая часть x , T — характеристика С. Танаки.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421.

- [1] Гайсин А.М., Гайсина Г.А. Теоремы типа Ритта–Сугимур // Владикавказский математический журнал. 2020. Т. 22. Выпуск 3. С. 47 – 57.
- [2] Гайсин А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Матем. сб. 1982. Т. 117. № 3. С. 412 – 414.
- [3] Гайсин А.М. Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 3. С. 45 – 53.

О градуировке полугрупповых C^* -алгебр

Гумеров Р.Н.

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: Renat.Gumerov@kpfu.ru

С целью распространения понятий гармонического анализа на некоммутативный случай в теории C^* -алгебр исследуются градуированные и топологически градуированные C^* -алгебры, введенные и изученные соответственно Феллом [1] и Экселем [2]. Важным свойством топологически градуированной C^* -алгебры является существование на ней специальных ограниченных операторов, а именно, условного ожидания и коэффициентов Фурье.

В докладе рассматриваются абелевы полугруппы с сокращением, для которых существуют эпиморфизмы со значениями в группах вычетов. Для этих полугрупп изучается структура редуцированных полугрупповых C^* -алгебр. По заданному эпиморфизму полугрупп строится градуировка полугрупповой C^* -алгебры, которая является топологической.

В докладе обсуждаются некоторые результаты статьи [3].

- [1] Fell J.M.G. An extension of Mackey's method to Banach $*$ -algebraic bundles. Mem. Am. Math. Soc., vol. 90, 1969.
- [2] Exel R. Partial dynamical systems, Fell bundles and applications. Math. Surv. Monogr., vol. 224, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.
- [3] Gumerov R.N. and Lipacheva E.V. Topological Grading of Semigroup C^* -Algebras // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. - V. 90 - No 3, 44–54 (2020).

C^0 и C^1 -возмущения C^1 -гладких простейших косых произведений и C^0 - Ω -взрыв

Ефремова Л.С.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия, Московский физико-технический
институт, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия

Приведен обзор результатов по изучению влияния C^0 - и C^1 -возмущений (класса косых произведений) на неблуждающее множество C^1 -гладких простейших косых произведений отображений интервала (см., например, [1]).

Описан новый сценарий Ω -взрыва в C^1 -гладких простейших отображениях в пространстве непрерывных косых произведений отображений интервала. Получены необходимые и достаточные условия возникновения такого Ω -взрыва.

Доказана невозможность Ω -взрыва в отображениях такого рода в пространстве C^1 -гладких косых произведений отображений интервала. Установлено, что малые C^1 -возмущения простейших косых произведений в пространстве всех C^1 -гладких косых произведений отображений интервала могут приводить лишь к локальным перестройкам множества периодических точек, связанным с бифуркациями удвоения периода периодических точек.

Дано описание отличительных особенностей бифуркаций удвоения периода периодических точек гладких косых произведений отображений интервала.

Соответствующая модификация используемых здесь идей позволила предложить классификацию взрывов во множестве решений дифференциальных уравнений (см. [2]).

- [1] Ефремова Л.С., Динамика косых произведений отображений интервала. УМН, 2017, 72:1(433), 107-192.
- [2] Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж., Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп. ТМФ, 2015, 185:2, 252–271.

On the commutant of the generalized backward shift operator in weighted spaces of entire functions

Ivanova O.A.

Southern Federal University, Rostov on Don, Russia

For a convex domain Q in $\mathbb{C}$, containing the origin, let $H(Q)$ be the Fréchet space of all holomorphic functions on Q ; E be a countable inductive limit of weighted Banach spaces of entire functions which with the help of the Laplace transform is topologically isomorphic to the strong dual of $H(Q)$. A function $g_0 \in E$ satisfying the condition $g_0(0) = 1$ defines the generalized backward shift operator $D_{0,g_0}(f)(t) = \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}$, which is continuous and linear in E . If $g_0 \equiv 1$, then D_{0,g_0} is the usual backward shift operator D_0 . In the general case D_{0,g_0} is a one-dimensional perturbation of D_0 . It is assumed that g_0 has a finite number of zeros or has no zeros. We investigate continuous linear operators in E , which commute with D_{0,g_0} in E . Such operators have been described in [1]. Necessary and sufficient conditions are proved that an operator of the mentioned commutant is a topological isomorphism of E . The problem of the factorization of nonzero operators of this commutant is investigated. If the function g_0 , defining the generalized backward shift operator, has zeros in Q , they are divided into two classes: the first one consists of isomorphisms and surjective operators with a finite-dimensional kernel, and the second one contains finite-dimensional operators. In the proofs we use essentially a characterization of proper closed D_{0,g_0} -invariant subspaces of E obtained in the article [2]. With the help of obtained results we study the generalized Duhamel product in $H(Q)$. If $g_0 \equiv 1$, then it is the Duhamel product, which in $H(Q)$ has been introduced and studied by N. Wigley [3]. Described results are proved in [4].

- [1] Ivanova O.A., Melikhov S.N. On operators which commute with the Pommiez type operator in weighted spaces of entire functions. St. Petersburg Math. J. 2017. V. 28, No. 2, pp. 209–224.

- [2] Ivanova O.A., Melikhov S.N. On invariant subspaces of the Pommiez operator in the spaces of entire functions of exponential type // J. Math. Sci. 2019. V. 241, No. 6. P. 760–769.
- [3] Wigley N. The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J. 1974. V. 41. P. 211–217.
- [4] Ivanova O.A., Melikhov S.N. On the commutant of the generalized backward shift operator in weighted spaces of entire functions // <https://arxiv.org/pdf/1909.13703.pdf>

**On a convergence rate to invariant measures
in Markov Branching Processes with infinite variance
and allowing immigration**

Azam A. Imomov

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan
imomov_azam@mail.ru

We consider the continuous-time Markov Branching Process allowing Immigration (MBPI) determined by infinitesimal generating functions (GFs)

$$f(s) := \sum_{j \geq 0} a_j s^j \quad \text{and} \quad g(s) := \sum_{j \geq 0} b_j s^j \quad \text{for } s \in [0, 1),$$

where $\{a_j\}$ and $\{b_j\}$ are intensities of individuals' transformation and immigration stream respectively; see [4, p. 217]. Denote $X(t)$ the population size at the time $t \in \mathcal{T}$ in MBPI. This is homogenous continuous-time Markov chain with state space $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0$ and transition functions

$$p_{ij}(t) := \mathbb{P}_i\{X(t) = j\} = \mathbb{P}\{X(t + \tau) = j \mid X(\tau) = i\}$$

for all $i, j \in \mathcal{S}$ and $\tau, t \in \mathcal{T}$. We devote the paper to the critical case only, i.e. $f'(1-) = \sum_{j \geq 1} j a_j = 0$, and observe limit behaviours of $p_{ij}(t)$ as $t \rightarrow \infty$.

Pakes [2] has proved that limits $\pi_j := \lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda p_{ij}(t)$ exist independently on j , iff $\lambda = 2g'(1-)/f''(1-)$ is finite, besides the set $\{\pi_j, j \in \mathcal{S}\}$ presents an invariant measure for MBPI.

In this issue an exceptional interest represents an estimation of the rate of convergence to invariant measures. Throughout the paper, we adhere to the following assumptions concerning $f(s)$ and $g(s)$ which are our *Basic assumptions*:

$$f(s) = (1 - s)^{1+\nu} \mathcal{L} \left(\frac{1}{1-s} \right),$$

and

$$g(s) = -(1 - s)^\delta \ell \left(\frac{1}{1-s} \right)$$

for all $s \in [0, 1)$, where $0 < \nu, \delta < 1$ and $\mathcal{L}(\cdot)$, $\ell(\cdot)$ are *slowly varying at infinity* ($\mathbf{SV}_\infty$) in the sense of Karamata; see for instance [1] and [3]. By perforce we allow to forcedly put forward an additional requirement for $\mathcal{L}(x)$ and $\ell(x)$. So we can write

$$\frac{\mathcal{L}(\lambda x)}{\mathcal{L}(x)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mathcal{L}(x)}{x^\nu}\right) \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad [\mathcal{L}_\nu]$$

for each $\lambda > 0$, where $\alpha(x)$. In this case $\mathcal{L}(x)$ is called $\mathbf{SV}_\infty$ with remainder $\mathcal{O}(\mathcal{L}(x)/x^\nu)$; see [1, p. 185, condition SR1]. We also suppose that

$$\frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ell(x)}{x^\delta}\right) \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad [\ell_\delta]$$

for each $\lambda > 0$. Let $\mathcal{P}(t; s) := \sum_{j \in \mathbb{S}} p_{0j}(t) s^j$.

Theorem. *Let Basic assumptions hold and $\gamma := \delta - \nu > 0$. Then $\mathcal{P}(t; s)$ converges to the function $U(s) = \exp\left\{\int_s^1 [g(u)/f(u)] du\right\}$ for $s \in [0, 1)$, and its power series expansion $U(s) = \sum_{j \in \mathbb{S}} u_j s^j$ generates an invariant distribution $\{u_j, j \in \mathbb{S}\}$ for MBPI. The convergence is uniform over compact subsets of $[0, 1)$. In addition, if assumptions $[\mathcal{L}_\nu]$ and $[\ell_\delta]$ hold, then*

$$\mathcal{P}(t; s) = U(s) (1 + \mathcal{K}\Delta(t; s)),$$

where $\mathcal{K} := \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-\delta/\nu}(x) \ell(x)$ and

$$\Delta(t; s) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{(\lambda(t; s))^{\gamma/\nu}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln[\Lambda(1-s)\lambda(t; s)]}{(\lambda(t; s))^{\delta/\nu}}\right) \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

where $\lambda(t; s) = \nu t + \Lambda^{-1}(1-s)$ and $\Lambda(y) = y^\nu \mathcal{L}(1/y)$. The transition functions are given by

$$p_{ij}(t) = u_j \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\gamma/\nu}}\right)\right) \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

- [1] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. *Regular Variation*, Cambridge University Press, 1987.
- [2] Pakes A.G. *On Markov branching processes with immigration*, Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, **A37** (1975), 129–138.
- [3] Seneta E. *Regularly Varying Functions*, Springer, Berlin, 1976.
- [4] Sevastyanov B.A. *Branching processes*, Nauka, Moscow, 1971 (Russian).

Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах

Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.,

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Пусть H — гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям:

1. Пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \rightarrow f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$.

2. Пространство H устойчиво относительно деления, то есть если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$. Из этого условия следует, в частности, что точечные функционалы отличны от нуля.

Функциональное гильбертово пространство H будем называть радиальным, если для любого $F \in H$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ функция $F(ze^{i\varphi})$ лежит в H , причем

$$\|F(ze^{i\varphi})\| = \|F\|.$$

Из условия 1 следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H . Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ (см. [1]).

Базис $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$, в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [2]), если найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ выполняется соотношение

$$c \sum_{j=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \leq C \sum_{j=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Доказаны два основных утверждения.

Теорема 1. *Если H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления и допускающее безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то*

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где последовательность $u(n)$ выпуклая, то есть

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. Если H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором полиномы полны и

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где последовательность $u(n)$ удовлетворяет условию

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geq \sigma, \quad n \in \mathbb{N},$$

для некоторого $\sigma > 0$, то в пространстве H существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра.

Результаты работ [3], [4] относительно существования безусловных базисов в пространствах Фока следуют из второй теоремы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-01-00095А).

- [1] Aronszajn N., "Theory of reproducing kernels", Transactions of the American Mathematical Society, **68** (1950), №3, 337–404.
- [2] Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S., "Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels", Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics, **864** (1981), 214–335.
- [3] Borichev A., Lyubarskii Yu., "Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces", Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, **9** (2010), 449–461.
- [4] Baranov A., Belov Yu., Borichev A., "Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces", Studia Mathematica, **236** (2017), №2, 127–142.

Неравенство Бора для обобщённых операторов Чезаро

Каюмов И.Р., Хамматова Д.М., Поннусами С.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
Россия

Через $\mathcal{B}$ обозначим класс аналитических отображений $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, заданных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и таких, что $|f(z)| \leq 1$ в $\mathbb{D}$.

Согласно теореме Бора, для функций $f \in \mathcal{B}$ неравенство $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1$ выполняется при $r \leq \frac{1}{3}$. Константа $\frac{1}{3}$ называется радиусом Бора. Доказано, что она не может быть улучшена.

Пусть $\{\varphi_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность таких неотрицательных непрерывных функций в $[0, 1)$, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(r)$ сходится локально равномерно относительно $r \in [0, 1)$.

Следующая теорема — естественное обобщение результата Бора.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{B}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $p \in (0, 2]$.
Если $\varphi_0(r) > \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r)$, то выполняется следующее неравенство:

$$B_f(\varphi, p, r) := |a_0|^p \varphi_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \varphi_k(r) \leq \varphi_0(r) \quad \text{для всех } r \leq R,$$

где R - минимальный положительный корень уравнения
 $\varphi_0(x) = \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$.

В случае, если $\varphi_0(x) < (2/p) \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ на некотором интервале $(R, R + \varepsilon)$, число R не может быть улучшено.

Если $\varphi_k(x)$ ($k \geq 0$) - гладкие функции, то последнее условие эквивалентно уравнению $\varphi'_0(R) < \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi'_k(R)$.

В качестве приложения Теоремы 1 рассмотрим гипергеометрическую функцию Гаусса $F(z) := {}_2F_1(a, b; c; z) = F(a, b; c; z)$, определённую как

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k, \quad \gamma_k = \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k},$$

где $(a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$, $k \in \mathbb{N}$, а $(a)_0 = 1$ для $a \neq 0$.
Вместо функции $f(z)$ будем теперь рассматривать свёртку

$$(F * f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k z^k.$$

Доказана теорема

Теорема 2. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{B}$ и $p \in (0, 2]$. Положим $a, b, c > -1$ - такие, что γ_k имеет один и тот же знак для всех $k \geq 0$. Тогда

$$|a_0|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| |a_k| r^k \leq 1 \quad \text{для всех } r \leq R,$$

где R - минимальный положительный корень уравнения $|F(a, b; c; x) - 1| = p/2$. Число R не может быть улучшено.

Введём величины $A_k^\alpha = \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n}$, $\alpha > -1$. Оператор Чезаро порядка α для аналитической в $\mathbb{D}$ функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ определяется следующим образом (см. [2]):

$$\mathcal{C}^\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{A_n^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha a_k \right) z^n.$$

Аналогом теоремы Бора для оператора Чезаро порядка α является следующий результат.

Теорема 3. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{B}$ and $\alpha > -1$. Тогда

$$\mathcal{C}_f^\alpha(r) \leq (\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n + \alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{r^{\alpha+1}} \int_0^r \frac{t^\alpha}{1-t} dt \quad \text{для } r \leq R,$$

где $R = R(\alpha)$ - минимальный положительный корень уравнения

$$3(1 + \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n + \alpha + 1} = \frac{2}{1-x}, \quad \text{т.е.,} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha + 1 - 2n}{n + \alpha + 1} x^n = 0.$$

Число R нельзя заменить на большую константу.

В работе также приведены оценки, верные для $r \in [0, 1)$, и посчитан асимптотический радиус Бора для случая $\alpha = 1$.

- [1] Н. Bohr, A theorem concerning power series, *Proc. London Math. Soc.* **13**(2) (1914), 1–5.
- [2] К. Stempak, Cesàro averaging operators, *Proc. Royal Soc. of Edinburgh*, **124A**(1994), 121–126.

О неравенстве Бора для оператора Чезаро

Каюмов И.Р., Хамматова Д.М., Поннусами С.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
Россия

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ - единичный круг, $\mathcal{B}$ - множество всех таких голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, что $|f(z)| \leq 1$ в $\mathbb{D}$.

Классическая теорема Бора [1] в её окончательном виде утверждает, что для функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$ неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1$$

выполняется для $r \leq \frac{1}{3}$, причём константа $\frac{1}{3}$ не может быть улучшена.

В настоящей работе мы получили аналог неравенства Бора для оператора Чезаро. Для голоморфной функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, определённой на $\mathbb{D}$, оператор Чезаро действует следующим образом (см. [2]):

$$\mathcal{C}f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \right) z^n = \int_0^1 \frac{f(tz)}{1-tz} dt.$$

Для $f \in \mathcal{B}$ определим аналог суммы Бора:

$$\mathcal{C}_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k| \right) r^n.$$

Из интегрального представления нетрудно получить следующую точную оценку:

$$|\mathcal{C}_f(z)| \leq \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r}, \quad r = |z|.$$

Следовательно, аналогом теоремы Бора для оператора Чезаро является следующий результат:

Теорема 1. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$. Тогда

$$\mathcal{C}_f(r) \leq \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r}$$

для $r \leq R$, где $R = 0.5335\dots$ - положительный корень уравнения

$$2x = 3(1-x) \log \frac{1}{1-x}.$$

Число R не может быть улучшено.

Представляет интерес изучение асимптотического поведения суммы $\mathcal{C}_f(r)$ при $r \rightarrow 1$. Верна

Теорема 2. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$. Тогда для $r \in [0, 1)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{C}_f(r) \leq \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1+r}{1-r} \log(1+r) + \log(1-r)}.$$

В статье Бомбьери и Бургейна [3] была построена функция $g(z)$ со следующими свойствами:

1. $|b_n| = \rho^n$;
2. $\|g(z)\|_{\infty} < \frac{1}{\sqrt{1-\rho}},$

где $\rho \in [0, 1)$ - произвольный параметр.

Используя этот результат, мы построили функцию $f(z)$, для которой

$$\mathcal{C}_f(r) \sim \frac{1.13808\dots}{\sqrt{1-r}}, \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

Таким образом, полученная в Теореме 2 оценка имеет точный порядок при $r \rightarrow 1$.

- [1] Н. Bohr, A theorem concerning power series, *Proc. London Math. Soc.* **13**(2) (1914), 1–5.
- [2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, *Math. Z.*, **34** (1932), 403–439.
- [3] E. Bombieri and J. Bourgain, A remark on Bohr’s inequality, *IMRN International Mathematics Research Notices*, **80** (2004), 4307–4330.

О некоторых коллективных действиях участников в квантовых коммуникационных протоколах

Кронберг Д.А.

Отдел математических методов квантовых технологий,
Математический институт им.В.А.Стеклова РАН

Супераддитивность классической пропускной способности классически-квантового канала связи является важным свойством квантовой природы и демонстрирует выгоду от использования коллективных измерений, задаваемых сцепленными наблюдаемыми. В рамках данной работы рассматриваются связанные задачи в квантовых коммуникациях: распределение информации и секретного ключа между отправителем и несколькими получателями. Исследуется выгода участников коммуникационных протоколов как от использования коллективных измерений, так и от коллективных действиях на передающей стороне, связанных с использованием сцепленных состояний и различными действиями над ними.

- [1] Кронберг Д.А. Роль коллективного приготовления и измерения состояний в некоторых квантовых коммуникационных протоколах // Квантовая электроника. 2020. Т. 50. №. 5. С. 461-468.

Polynomials associated to non-convex bodies

Norm Levenberg

Indiana University, Bloomington, USA

Polynomial spaces associated to a convex body C in $(\mathbb{R}^+)^d$ have been the object of recent studies. We first recall this setting and then we consider polynomial spaces associated to possibly non-convex C . This is done in order to discuss quantitative Runge-type polynomial approximation results using relatively sparse families of polynomials.

This is based on joint work-in-progress with Franck Wielonsky.

C^* -алгебры, порожденные расширениями полугрупп

Липачева Е.В.

Казанский государственный энергетический университет, г.Казань,
Россия

В работе [1] был поднят вопрос, связанный с функториальностью морфизмов полугрупповых C^* -алгебр. А именно, пусть через $C^*(P)$ обозначена универсальная C^* -алгебра полугруппы P , порожденная изометриями $\{v_p, p \in P\}$. Индуцирует ли гомоморфизм $\varphi : P \longrightarrow Q$ полугрупп с сокращением морфизм соответствующих полугрупповых C^* -алгебр $C^*(P) \longrightarrow C^*(Q)$ с помощью формулы $v_p \mapsto v_{\varphi(p)}, p \in P$? Результат, изложенный в настоящем докладе, имеет отношение к сформулированному вопросу, с той лишь разницей, что мы рассматриваем приведенные полугрупповые C^* -алгебры.

Пусть S и L – дискретные абелевы аддитивные полугруппы с сокращением и нейтральными элементами, Γ – произвольная абелева группа. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\tau} L \xrightarrow{\sigma} \Gamma \longrightarrow 0,$$

которая задает нормальное расширение (L, τ, σ) полугруппы S с помощью группы Γ .

Тогда полугруппа L может быть представлена в виде объединения непересекающихся подмножеств $L = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma$, где $L_\gamma = \sigma^{-1}(\gamma)$.

Будем говорить, что расширение (L, τ, σ) полугруппы S обладает порождающим множеством, если справедливы два условия:

- 1) существует множество $X \subset L \setminus \tau(S)$, такое, что для любого $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 0$, множество $X \cap L_\gamma$ состоит из единственного элемента x_γ ;
- 2) каждый элемент $y \in L \setminus \tau(S)$ единственным образом представляется в виде $y = \tau(a) + x_\gamma$ для некоторых $a \in S$ и $\gamma \in \Gamma$.

Рассмотрим приведенные полугрупповые C^* -алгебры $C_r^*(S)$ и $C_r^*(L)$, которые порождаются множествами изометрических операторов $\{T_a \mid a \in S\}$ и $\{T_y \mid y \in L\}$, действующими сдвигами на пространствах $l^2(S)$ и $l^2(L)$ соответственно.

Теорема. Пусть (L, τ, σ) — нормальное расширение полугруппы S с помощью группы Γ , имеющее порождающее множество. Тогда существует единственный унитарный изометрический $*$ -гомоморфизм $\varphi : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L)$, заданный формулой $\varphi(T_a) = T_{\tau(a)}$, где $a \in S$.

Отметим, что если нормальное расширение (L, τ, σ) полугруппы S с помощью некоторой группы Γ не имеет порождающего множества, то, вообще говоря, соответствие $T_a \longmapsto T_{\tau(a)}$ не продолжается до инъек-

тивного $*$ -гомоморфизма из $C_r^*(S)$ в $C_r^*(L)$. Соответствующий пример приведен в работе [2].

- [1] Li X. Semigroup C^* -algebras and amenability of semigroups. J. Functional Analysis. 2012. V. 262. P. 4302–4340.
- [2] Липачева Е.В. Расширения полугрупп и морфизмы полугрупповых C^* -алгебр. Сиб. матем. журнал. Принята к печати.

Исследования колебаний неоднородного каната переменной длины методом Римана

Литвинов В.Л.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия; Самарский государственный технический университет,
филиал в г. Сызрани, Россия

Рассмотрим продольные колебания неограниченного неоднородного стержня. Дифференциальное уравнение имеет вид [1-3]

$$U_{tt}(x, t) - a^2(x, t)U_{xx}(x, t) = 0. \quad (1)$$

Начальные условия

$$U(x, 1) = f(x); \quad (2)$$

$$U_t(x, 1) = F(x). \quad (3)$$

В задаче (1) - (3) обозначено: $U(x, t)$ – продольное смещение точки стержня с координатой x в момент времени t ; $a(x, t) = \frac{x}{t}$ – переменная скорость распространения продольных волн в стержне.

Введем в задачу (1) - (3) новые переменные:

$$\xi = xt; \quad \tau = \frac{t}{x}.$$

После преобразований получим:

$$U_{\xi\tau}(\xi, \tau) - \frac{1}{2\xi}U_{\tau}(\xi, \tau) = 0. \quad (4)$$

$$U_{\xi|_{\xi\tau=1}} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2\xi}F(\xi); \quad (5)$$

$$U_{\tau|_{\xi\tau=1}} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2\xi}F(\xi); \quad (6)$$

$$U|_{\xi\tau=1} = f(\xi). \quad (7)$$

Для решения задачи (4-7) используем метод Римана, изложенный в [9]. В итоге получим:

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left(f(\xi) + \sqrt{\xi\tau} f\left(\frac{1}{\tau}\right) + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \int_{\xi}^{\frac{1}{\tau}} \frac{f(\xi) - 2F(\xi)}{\xi^{\frac{1}{2}}} d\xi \right)$$

или, возвращаясь к исходным переменным,

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left(f(xt) + tf\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{\sqrt{xt}}{2} \int_{xt}^{\frac{x}{t}} \frac{f(z) - 2F(z)}{z^{\frac{1}{2}}} dz \right)$$

Таким образом, применение метода Римана [9] позволило получить сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня, что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных технических объектов [4-8].

1. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.

2. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001.- С.320.

3. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1970. №1. С. 159-161.

4. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Применение метода Канторовича - Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. -С. 70-77.

5. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, 2017. - 149 с.

6. Анисимов В.Н. Литвинов В.Л. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о колебаниях балки с движущейся границей: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. - Самара: СамГТУ, 2011. - С. 10-14.

7. Анисимов В.Н. Корпен И.В. Литвинов В.Л. Резонансная амплитуда колебаний балки переменной длины. Третья международная конференция Математическая физика и ее приложения: Материалы конф. под ред. чл.-корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко.- Самара: СамГТУ, 2012. - С. 37-38.

8. Анисимов В.Н. Корпен И.В. Литвинов В.Л. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой // Вестник

Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. № 1 (37) - 2013. - С. 93-98.

9. Кошляков Н.С. Глинер Э.Б. Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

Критерий для нахождения условного минимума целевой функции, связанной с итеративным извлечением целевых изотопов циркония при помощи лазерного метода селективного торможения конденсации

Ляхов К.А.

Математический институт Российской Академии Наук
им. В.А. Стеклова, Лаборатория Математических Методов для
Квантовых Технологий, г.Москва, Россия

В данной статье рассматривается разделение изотопов циркония методом селективной лазерной задержки конденсации (SILARC). Более подробную информацию об этом методе можно найти в [1, 2]. Поскольку коэффициент обогащения довольно мал, следует рассмотреть итерационную схему извлечения изотопов циркония. Мы предполагаем, что фракция потока газа, обедненного изотопами продукта, перекачивается обратно в смесительный резервуар для дальнейшего доизвлечения, тогда как фракция потока газа, обогащенного изотопами продукта, также возвращается туда, но, проходя через криоловушку, полностью освобождается от молекул целевого газа, в качестве которого рассматривается $(C_5H_5)_2Zr(OCN)_2$ в виду возможности его селективного возбуждения при помощи CO_2 лазера и его значительной летучести при умеренных температурах испарителя. Целью данной статьи является нахождение критерия оптимизации, который может обеспечить наибольшую скорость извлечения изотопов при наименьшем энергокладе с ограничениями на параметры оптимизации, накладываемыми применимостью данного метода.

Эффективность разделения изотопов обусловлена темпами потребления энергии и разделения изотопов. Целевая функция, включающая обе характеристики, должна иметь минимум, который соответствует требованию производить наибольшее количество изотопов за кратчайшие сроки и с наименьшими энергозатратами. Она может быть выражена через мгновенные затраты энергии на разделение i -го изотопа ε (в нашем случае предполагается, что из природной смеси ^{90}Zr , ^{91}Zr , ^{92}Zr , ^{94}Zr , ^{96}Zr выделяется ^{90}Zr) следующим образом:

$$\left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle = \left\langle \varepsilon \frac{dN_i}{dt} \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь $\frac{dE_i}{dt}$ - скорость потребления электроэнергии, а $\frac{dN_i}{dt}$ - скорость наработки i -го изотопа. Предполагая, что среднее значение по времени выполняется как

$$\langle O \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T O dt, \quad (2)$$

правую часть уравнения (1) можно свести к

$$\left\langle \varepsilon \frac{dN_i}{dt} \right\rangle = \frac{\Psi_i}{N_i t_{\text{tr}}} \sum_{j=0}^{N_i} {}^i Q_{\text{esc}}^{(j)}, \quad (3)$$

где Ψ_i - усреднённый энерговклад на разделение i -ых изотопов, являющийся в тоже время целевой функцией. Следовательно, целевую функцию можно оценить как

$$\Psi_i = \frac{E_{\text{tot};i}}{y_Q N_{\text{feed}} \alpha_i \sum_{j=0}^{N_i} x_j}. \quad (4)$$

Т.о., имеем следующую постановку задачи для поиска условного экстремума:

$$\begin{cases} \min_{\Omega} \Psi_i; \\ I_{\min} < I_{\text{las}} < I_{\max}; \psi < 1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь выбор параметров оптимизации следующий:

$$\Omega = \{y_Q, p_{\text{flow}}, T_{\text{flow}}, \psi, N_i, R_L, L_{\text{IC}}, H_t, W_t, I_{\text{las}}\}, \quad (6)$$

где y_Q -мольная доля целевого газа в газе носителе (аргоне); p_{flow} и T_{flow} -давление и температура в ядре газового потока, N_i -число итераций для извлечения целевого изотопа, R_L -радиус лазерного луча, L_{IC} -длина ячейки облучения; H_t и W_t -высота и ширина горла используемого щелевого сопла. Ограничения на интенсивность лазерного излучения I_{las} определяется условиями применимости метода SILARC, а ограничение на параметр переохлаждения $\psi = \frac{P_0(T_0)}{p_e(T_0)}$, где p_e -давление насыщенного пара целевого газа, выбирает допустимый интервал температур T_0 и соответственно давлений P_0 над соплом (в смесительном баке).

Данная работа была выполнена в Математическом Институте им. В.А. Стеклова Российской Академии Наук в рамках проекта, поддержанного грантом 17-11-01388 Российского Научного Фонда.

- [1] Lee, Y.T., Isotope separation by photodissociation of Van der Wall's molecules, U.S. Patent No. 4032306, 28 June 1977.

- [2] Eerkens, J. W., Laser-induced migration and isotope separation of epi-thermal monomers and dimers in supercooled free jets, *Laser and Particle Beams*, 23, 225-253, 2005.

Геометрический критерий интерполяционности дивизора в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости

Малютин К.Г., Кабанко М.В.

Курский государственный университет, Курск, Россия

В работах [1, 2] рассматривалась задача простой свободной интерполяции в пространствах аналитических функций конечного порядка $\rho > 1$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$. Были получены критерии ее разрешимости в терминах произведения Неванлинны узлов интерполяции и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции. Целью данной работы является изучение этой проблемы в случае кратных узлов интерполяции. Обозначим через $[\rho, \infty]^+$ пространство аналитических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций порядка $\rho > 1$. Пусть $D = \{a_n; q_n\}_{n=1}^\infty$ ($\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}_+$).

Определение. Дивизор D называется интерполяционным в пространстве $[\rho, \infty]^+$ если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\ln(|a_n| + 2)} \ln^+ \ln^+ \sup_{1 \leq k \leq q_n} \frac{|b_{n,k}| (\Im a_n)^{k-1}}{(k-1)!} < \infty,$$

$$\limsup_{|a|_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln^+ \sup_{1 \leq k \leq q_n} \frac{|b_{n,k}| (\Im a_n)^{k-1}}{(k-1)!} \leq \rho,$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]^+$ решающая проблему интерполяции

$$F^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \quad k = 1, 2, \dots, q_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи находятся в терминах меры, определяемой узлами интерполяции.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

- [1] Malyutin, K.G., Gusev A.L. *The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane*, *Probl. Anal. Issues Anal.*, **7(25)**(Special Issue), 113–123 (2018). doi: 10.15393/j3.art.2018.5170

- [2] Malyutin, K.G., Gusev A.L. *Geometric meaning of the interpolation conditions in the class of functions of finite order in the half-plane*, Probl. Anal. Issues Anal., **8(26)**(3), 96–104 (2019). doi: 10.15393/j3.art.2019.6690

Экстремальные проблемы в пространстве мероморфных функций конечного порядка в полуплоскости.

Малютин К.Г., Малютина Т.И., Ревенко А.А.

Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Пусть JM — пространство истинно мероморфных функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ [1], $JM(\rho) \subset JM$ — подпространство функций конечного порядка $\rho > 0$. Пусть $N(r, f)$ и $N_1(r, f)$ характеристики Неванлинны функции $f \in JM$ [2],

$$m_2(r, f) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\log |f(re^{i\theta})||^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Мы доказываем два аналога проблемы Неванлинны, нерешённой в общем случае до сих пор. Лучшая оценка для мероморфных в комплексной плоскости функций получена в работе [3]. Наш результат в пространстве функций мероморфных в комплексной полуплоскости сформулирован в двух теоремах.

Теорема 1. Пусть $f \in JM(\rho)$, $\rho > 1$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{r(N(r, f) + N(r, 1/f))}{m_2(r, f)} \geq \frac{|\sin \pi \rho|}{\rho^2 - 1} \sqrt{1 / \left(1 - \frac{\sin 2\pi \rho}{2\pi \rho}\right)}.$$

Теорема 2. Пусть $f \in JM(\rho)$, $0 < \rho < \infty$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r, f) + N(r, 1/f)}{m_2(r, f)} \geq \frac{|\sin \pi \rho|}{\rho(\rho + 1)} \sqrt{1 / \left(1 - \frac{\sin 2\pi \rho}{2\pi \rho}\right)}.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236

- [1] Fedorov M.A., Grishin A.F. *Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry, **1**(3), 223–271 (1998).

- [2] Malyutin K.G. , *Fourier series and δ -subharmonic functions of finite γ -type in a half-plane*, Sbornik: Mathematics, **192**(6), 843–861 (2001).
- [3] Miles J.B. , Shea D.P. *An extremal problem in value distribution theory*, Quart. J. Math. Oxford, **24**, 377–383 (1973).

On the Growth of Dirichlet Integral for Some Function Spaces

S. Makhmutov

College of Science, Sultan Qaboos University, Oman

e-mail: makhm@squ.edu.om

Let $D = \{z : |z| < 1\}$ be the unit disk in the complex plane $\mathbb{C}$ and denote by $d\sigma_z$ the usual area measure on D . For $z, a \in D$ let $g(z, a)$ be the Green function of D with pole at a .

We are interested in studying the behaviour of those functions which belong to the classical space BMOA of functions of bounded mean oscillation but not to Q_p spaces.

In the following $d\sigma_z$ represents the usual two-dimensional Lebesgue measure.

Definition. [1] For $0 < p < \infty$, we say that a function f , analytic on D , belongs to Q_p if

$$\sup_{a \in D} \iint_D |f'(z)|^2 g^p(z, a) d\sigma_z < \infty$$

Remark 1. If $p > 1$, then $Q_p = \mathcal{B}$, where $\mathcal{B}$ consists of all analytic functions f on D satisfying $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty$ and is called the Bloch space. For $p = 1$, $Q_1 = \text{BMOA}$ and, for $0 < p < q \leq 1$, the nesting property $Q_p \subsetneq Q_q$ holds [1]. When $p = 0$, $Q_0 = AD$ is the Dirichlet space.

Remark 2. Let $a \in D$. Then we denote $D_t = \{z : g(z, a) > t\}$ and its boundary $\Gamma_t = \{z : g(z, a) = t\}$ for $t \geq 0$. Let $g_t(z, a)$ be the Green function of D_t with singularity at a . By monotone convergence we know that for $f \in Q_p$,

$$\iint_{D_t} |f'(z)|^2 g_t^p(z, a) d\sigma_z \longrightarrow \iint_D |f'(z)|^2 g^p(z, a) d\sigma_z \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

Theorem 1. For $f \in Q_p$, $0 < p \leq 1$, and any $a \in D$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^p \iint_{D_t} |f'(z)|^2 d\sigma_z = 0.$$

Theorem 2. For $f \in \text{BMOA}$ and any $a \in D$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-p} \iint_{D_t} |f'(z)|^2 g^p(z, a) d\sigma_z = 0, \quad \text{as } 0 \leq p < 1$$

Strictness of Theorems 1 and 2 follows from

Theorem 3. Let $0 < p \leq 1$. For each ε , $0 < \varepsilon < p$, there exists $f_\varepsilon \in Q_p$ such that

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{p-\varepsilon} \iint_{D_t} |f'_\varepsilon(z)|^2 d\sigma_z = \infty.$$

Theorem 3. For any p , $0 \leq p < 1$, and $\varepsilon > 0$ there exists $f_\varepsilon \in \text{BMOA}$ such that

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-p-\varepsilon} \iint_{D_t} |f'_\varepsilon(z)|^2 g^p(z, a) d\sigma_z = \infty, \quad a \in D$$

Theorem 4. For any p , $0 \leq p < 1$, and $\varepsilon > 0$ there exists $f_\varepsilon \in \text{BMOA}$ such that

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-p-\varepsilon} \iint_{D_t} |f'_\varepsilon(z)|^2 g^p(z, a) d\sigma_z = \infty, \quad a \in D$$

- [1] R. Aulaskari, J. Xiao and R. Zhao, On subspaces and subsets of BMOA and UBC, *Analysis* 15 (1995), 101–121.
- [2] R. Aulaskari, S. Makhmutov, On the Growth of Dirichlet Integral for Some Function Spaces, *Comput. Methods Funct. Theory*, 8 (2008), no. 2, 475 – 482.

О применении тауберовой теоремы для степенных рядов в теории ветвящихся случайных процессов

Аброр Мейлиев¹, Мислиддин Муртазаев²

¹Каршинский государственный университет, г. Карши,

²Самаркандский государственный университет, г. Самарканд,
Узбекистан

В этом сообщении мы изучаем свойства инвариантных мер для ветвящихся случайных процессов, используя следующую известную тауберова теорему.

Теорема Т [3, сс. 503–504]. Пусть $q_n \in [0, \infty)$, и $Q(s) := \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$ сходится при $s \in [0, 1)$. Если $L(x)$ медленно меняется на бесконечности и $\rho \in [0, \infty)$, то каждое из соотношений

$$Q(s) \sim \frac{1}{(1-s)^\rho} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \quad \text{при } s \uparrow 1$$

и

$$q_0 + q_1 + \dots + q_{n-1} \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^\rho L(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

влечет другое, где $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция Эйлера.

Обозначим $\{Z(n), n \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, численность популяции частиц в обычном ветвящемся процессе Гальтона-Ватсона (Г-В) порожденный вероятностной производящей функцией (ПФ) $f(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} p_j s^j$, где $p_j := \mathbb{P}\{Z(1) = j | Z(0) = 1\}$ – распределение числа прямых потомков одной частицы. Рассматриваемый процесс образует однородную цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}_0$. Эволюция процесса управляется регулирующим параметром $m := f'(1-)$ – средним числом непосредственных потомков одной частицы за одно поколение; см. [4].

Рассмотрим критический процесс, т.е. $m = 1$ и случае, когда дисперсия распределения числа прямых потомков одной частицы неизвестна. Вместе с этим ПФ $f(s)$ допускает для $s \in [0, 1)$ представление

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\nu} \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad (1)$$

где $\nu \in (0, 1]$ и $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{S}_\infty$; см. [2]. Пусть

$$p_{ij}(n) := \mathbb{P}_i\{Z(n) = j\},$$

где $\mathbb{P}_i\{\cdot\} := \{\cdot | Z(0) = i\}$. Для нашей цели мы используем следующую лемму о монотонной сходимости отношений.

Лемма [1, с. 15]. Для всех $m < \infty$ и $j \in \mathcal{E}$

$$\frac{p_{1j}(n)}{p_{11}(n)} \uparrow \pi_j \leq \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

и, выполняется инвариантное соотношение

$$\beta^n \cdot \pi_j = \sum_{k \in \mathcal{E}} \pi_k p_{kj}(n),$$

где $\beta := f'(q)$ и q – вероятность вырождения процесса.

Следующая теорема доказываются с помощью Теоремы Т.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1). Тогда

$$\sum_{j=1}^n \pi_j = \frac{p_0}{\nu^2 \cdot \Gamma(\nu)} n^\nu \mathcal{L}_\pi(n),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция Эйлера и $\mathcal{L}_\pi(n) \cdot \mathcal{L}(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность профессору А.А.Имомову за всестороннему поддержку и внимание к научным интересам авторов.

- [1] Athreya K. B. and Ney P. E. Branching processes. Springer, New York, 1972.
- [2] Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L. Regular variation. Cambridge, 1987.
- [3] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. vol. 2, 2-ed. John Wiley & Sons, New York, 1971.
- [4] Imomov A. A. (2020). Renewed Limit Theorems for the discrete-time Branching Process and its Conditioned Limiting Law interpretation. *ArXiv:2004.09307*, 32 pages.

Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространствах голоморфных функций

Мелихов С.Н.

ЮФУ, г. Ростов-на-Дону, ЮМИ ВЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

В докладе идет речь о собственных замкнутых инвариантных подпространствах оператора обобщенного обратного сдвига $D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}$, $g_0(0) = 1$ (одномерного возмущения оператора обратного сдвига). Они описаны в ситуациях, двойственных друг другу: 1) в пространстве целых функций экспоненциального типа E , реализующем посредством преобразования Лапласа сильное сопряженное к пространству ростков всех голоморфных функций на выпуклом локально замкнутом множестве Q в $\mathbb{C}$ [1] (при этом $g_0 \in E$); 2) в пространстве Фреше $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в односвязной области в $\mathbb{C}$, содержащей начало [2] (здесь $g_0 \in H(\Omega)$). В случае 1) полное описание упомянутых подпространств получено для $g_0(z) = P(z)e^{\lambda z}$, где P – многочлен такой, что $P(0) = 1$, и $\lambda \in Q$, а в случае 2) – для произвольной функции $g_0 \in H(\Omega)$, удовлетворяющей условию $g_0(0) = 1$. Отметим, что в обеих

ситуациях, если g_0 имеет нули, семейство всех собственных замкнутых D_{0,g_0} -инвариантных подпространств не является одноклеточным и состоит из двух множеств: первое содержит конечномерные подпространства, а второе — бесконечномерные.

Приведем одно следствие из полученных результатов для второго случая. При этом $\mathbb{C}[z]_n$ для целого $n \geq 0$ обозначает пространство всех многочленов одного комплексного переменного степени не выше n над полем $\mathbb{C}$.

Теорема. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало, $g_0 \in H(\Omega)$, $g_0(0) = 1$. Оператор D_{0,g_0} является одноклеточным в $H(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{C}$ и g_0 не имеет нулей в $\mathbb{C}$.

Если это так, то собственными замкнутыми D_{0,g_0} -инвариантными подпространствами $H(\mathbb{C})$ являются $g_0\mathbb{C}[z]_n$, $n \geq 0$, и только они.

- [1] Иванова О.А., Мелихов С.Н. Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа // Комплексный анализ. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 142. ВИНТИ РАН, М. С. 111-120.
- [2] Ivanova O.A., Melikhov S.N., Melikhov Yu.N. Invariant subspaces of a generalized backward shift operator and rational functions. arXiv: 2005.01596v1 [math.FA]; <http://arxiv.org/pdf/2005.01596.pdf>

Распределение нулей голоморфных функций в области с ограничениями на их рост вблизи границы этой области

Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин

БашГУ, Уфа, Россия

Ряд задач теории голоморфных и мероморфных функций в субгармоническом обрамлении можно свести к следующей задаче, формулируемой здесь для простоты для областей D на комплексной плоскости. Пусть ν и μ — положительные борелевские меры на D . При каких соотношениях между ν и μ для любой субгармонической функции M с мерой Рисса μ существует субгармоническая функция u с мерой Рисса ν , мажорируемая функцией M во всех точках области D ? В определённой степени законченный результат, полностью решающий эту задачу, недавно был получен в наших работах [1], [2]. Пусть на границе D имеется связная компонента с не менее чем двумя точками. Для некоторого произвольного фиксированного связного компакта K с непустой внутренностью в D рассмотрим класс ограниченных сверху единицей субгармонических функций в дополнении этого компакта до D , где каждая

из этих функций тождественно равна нулю вне некоторого своего компакта из D , а также ограничена снизу на дополнении K до некоторой своей области, лежащей в D . Эти функции называем *тестовыми*. Ответ на поставленный выше вопрос — *существует, если и только если найдётся действительное число, для которого каждый интеграл от произвольной тестовой функции по мере ν не превышает суммы интеграла от той же тестовой функции по мере μ с этим числом* [1, Теорема 1] и [1, Теоремы 2 и 3]. На основе этого в [2, Теорема 1] для произвольной непрерывной субгармонической функции M на конечно-связной области D с внешней точкой установлен критерий распределения последовательности точек в D , для которой существует ненулевая голоморфная функция с нулевым множеством, совпадающим с этой последовательностью, логарифм модуля которой не превышает функцию M в каждой точке области D . Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ, проект № 19-31-90007.

- [1] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II // *Функц. анализ и его прил.*, **53:1** (2019), 84–87.
- [2] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на ее рост // *Изв. вузов. Матем.*, № 5 (2020), 55–61.

О некоммутативных операторных графах, порождаемых положительными операторно-значными мерами

Мокеев А.С.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Некоммутативный операторный граф — это подпространство $\mathcal{V}$ в пространстве ограниченных линейных операторов $B(H)$ на гильбертовом пространстве H такое, что если $A \in \mathcal{V}$, то $A^* \in \mathcal{V}$, а также $I \in \mathcal{V}$. В терминах некоммутативных операторных графов возможно дать общую формулировку задачи поиска безошибочного кодирования информации, защищающего от квантового шума. Мы обсудим данную теорию и рассмотрим несколько содержательных примеров некоммутативных операторных графов [1, 2, 3], для которых удастся показать существование квантового кода, исправляющего ошибки, то есть подпространства $S \subset H$ такого, что для ортопроектора P_S на S выполнено условие Книлла-Лафламма $\dim P_S \mathcal{V} P_S = 1$.

В каждой задаче поиска безошибочного кодирования через квантовые ошибки определяется один операторный граф, для которого нужно доказать выполнение условия Книлла-Лафламма. Верно и обратное: каждому операторному графу соответствует некоторая система квантовых ошибок. Но сама задача доказательства условий Книлла-Лафламма может быть сформулирована для абстрактного операторного графа в отрыве от изначальной проблематики, тем самым, интересно найти удобные для решения данной задачи способы параметризации операторных графов. Одним из таких методов можно считать задание графа в виде замыкания линейной оболочки положительной операторно-значной меры. Но в данной интерпретации появляется обратная задача по описанию квантового шума, соответствующего абстрактному некоммутативному операторному графу, которую мы также обсудим.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-11-01388.

- [1] Amosov G.G., Mokeev A.S. On non-commutative operator graphs generated by covariant resolutions of identity. Quantum Information Processing 17, 325: 2018.
- [2] Amosov G.G., Mokeev A.S., Pechen A.N. Non-commutative graphs and quantum error correction for a two-mode quantum oscillator. Quantum Information Processing 19, 95: 2020.
- [3] Amosov G.G., Mokeev A.S., Pechen A.N. Non-commutative graphs and quantum error correction for a two-level system coupled to a coherent field: в подготовке.

On Time-Minimal Control Problems, Reachable Sets, and Machine Learning Control of Evolution of Density Operator for an Open Two-Level Quantum System

O.V. Morzhin

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
Department of Mathematical Methods
for Quantum Technologies, Moscow, Russia

Optimal control theory is an important tool for controlling quantum systems [1]. Based on the articles [2, 3] considering both coherent and incoherent controls in the Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad (GKSL) master equation for Markov open quantum dynamics, the two-level case with some certain Hamiltonian was considered in the recent articles [4, 5, 6] in the context of analyzing time-minimal control, reachable and controllability sets of the system. The talk is devoted to some part of the results obtained

for this open quantum system in the papers [5, 6]. The exact analytical results on the system's reachability sets and time-minimal control correspond to the case of coherent control being zero all the time and incoherent control varying in certain class of constant functions [5]. Inspired, in particular, by the fundamental work [7], which is devoted to applying incoherent control by reinforcement learning to quantum systems with Schrödinger equation by quantum measurements, the current work gives some applying of machine learning for constructing suboptimal quantum control for the GKSL equation. Here for some class of time-minimal control problems, the regression problem was formulated [6], where the learning results were found by applying numerical optimization (dual annealing and differential evolution methods). For the regression problem, some approach with the kNN method and neural networks was composed. The corresponding suboptimal results were found for different numbers of the training samples.

The work was performed in Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences within the project of the Russian Science Foundation No. 17-11-01388.

- [1] C.P. Koch, "Controlling open quantum systems: Tools, achievements, and limitations", *Journal of Physics: Condensed Matter*, **28**:21, 213001 (2016). <https://doi.org/10.1088/0953-8984/28/21/213001>
- [2] A. Pechen, H. Rabitz, "Teaching the environment to control quantum systems", *Physical Review A*, **73**:6, 062102 (2006). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.062102>
- [3] A. Pechen, "Engineering arbitrary pure and mixed quantum states", *Physical Review A*, **84**:4, 042106 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.042106>
- [4] O.V. Morzhin, A.N. Pechen, "Minimal time generation of density matrices for a two-level quantum system driven by coherent and incoherent controls", *International Journal of Theoretical Physics* (2019), <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04149-w>
- [5] O.V. Morzhin, A.N. Pechen, "On reachable and controllability sets for time-minimal control of an open two-level quantum system", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* (Submitted).
- [6] O.V. Morzhin, A.N. Pechen, "Machine learning for finding suboptimal final times and coherent and incoherent controls for an open two-level quantum system", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41**:12 (2020) (In press).
- [7] D.-Y. Dong, C.-L. Chen, T.-J. Tarn, A. Pechen, H. Rabitz, "Incoherent control of quantum systems with wavefunction controllable subspaces via quantum reinforcement learning", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics*. **38**:4, 957–962 (2008).

О преобразовании Фурье-Лапласа обобщенных функций

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале, b – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени один функция на $\overline{C}$ – замыкании C , $U = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle \leq b(y), \forall y \in C\}$. U – замкнутое выпуклое неограниченное множество, не содержащее целую прямую. Внутренность множество U непуста и совпадает с множеством $V = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle < b(y), \forall y \in \overline{C}\}$, а замыкание V есть U . Пусть $\mathfrak{M} = \{M^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ – семейство неубывающих логарифмически выпуклых последовательностей $M^{(m)} = (M_k^{(m)})_{k=0}^\infty$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$i_1)$. $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{M_{k+1}^{(m+1)}}{M_k^{(m)}} < +\infty$; $i_2)$. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k^{(m+1)}}{M_k^{(m)}} = 0$; $i_3)$. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{M_k^{(m)}}{k!} \right)^{\frac{1}{k}} > 0$;
 $i_4)$. каково бы ни было $m \in \mathbb{N}$ для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ существует число $l = l(m, k) \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{M_{|\alpha|+k}^{(m+l)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}} < \infty$.

Пусть $\omega_m(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k^{(m)}}$, $r > 0$; $\omega_m(0) = 0$. Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $|z|_n = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введём пространство $G_m(U)$, состоящее из функций f класса C^∞ на U с конечными нормами $p_m(f) = \sup_{x \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1+\|x\|)^m}{M_{|\alpha|}^{(m)}}$. Пусть $G_{\mathfrak{M}}(U)$ – проективный предел пространств $G_m(U)$. $G_{\mathfrak{M}}(U)$ – пространство Фреше-Шварца, непрерывно вложенное в пространство Шварца $S(U)$. Пусть

$$H_{b,m}(T_C) = \{f \in H(T_C) : \|f\|_m = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|}{e^{b(y) + \omega_m(|z|_n)} (1 + \frac{1}{\Delta_C(y)} m)} < \infty\},$$

где $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in C, m \in \mathbb{N}$. Пусть $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C) = \bigcup_{m=0}^\infty H_{b,m}(T_C)$. Наделим $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$ топологией индуктивного предела пространств $H_{b,m}(T_C)$.

Для любого линейного непрерывного функционала S на $G_{\mathfrak{M}}(U)$ в области $T_C = \mathbb{R}^n + iC$ определим функцию $\hat{S}$ – преобразование Фурье-Лапласа функционала S – по формуле $\hat{S}(z) = (S, e^{i\langle \xi, z \rangle})$, $z \in T_C$. Пусть $G_{\mathfrak{M}}^*(U)$ – сильное сопряжённое пространство.

Теорема. Отображение $L : S \in G_{\mathfrak{M}}^*(U) \rightarrow \hat{S}$ устанавливает изоморфизм пространств $G_{\mathfrak{M}}^*(U)$ и $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$.

Данная работа примыкает к исследованиям В.С. Владимирова и Роевера (J.W. De Roeve), посвященным теории преобразования Фурье-

Лапласа распределений медленного роста и пространствам функций, голоморфных в трубчатых областях.

**Об условиях совпадения преобразований линейных
непрерывных функционалов в гильбертовых пространствах с
воспроизводящим ядром**

Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.)

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на некотором множестве точек Ω_1 . $\{e_1(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$, $\{e_1(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ – две ортоподобные системы разложения в пространстве H , Ω_2 – пространство с мерами ν_1, ν_2 :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\Omega_2} (f, e_1(\cdot, z))_H \cdot e_1(t, z) d\nu_1(z) \quad \forall f \in H, \forall t \in \Omega_1; \\ f(t) &= \int_{\Omega_2} (f, e_2(\cdot, z))_H \cdot e_2(t, z) d\nu_2(z) \quad \forall f \in H, \forall t \in \Omega_1; \\ \tilde{f}(z) &\stackrel{def}{=} (e_1(\cdot, z), f)_H, \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \tilde{H} = \{\tilde{f}, f \in H\}; \\ (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_{\tilde{H}} &\stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H, \quad \|\tilde{f}_1\|_{\tilde{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \tilde{H}; \\ \hat{f}(z) &\stackrel{def}{=} (e_2(\cdot, z), f)_H \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \hat{H} = \{\hat{f}, f \in H\}; \\ (\hat{f}_1, \hat{f}_2)_{\hat{H}} &\stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H, \quad \|\hat{f}_1\|_{\hat{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \hat{f}_1, \hat{f}_2 \in \hat{H}. \end{aligned}$$

Более подробно см. работы [1], [2]. Мы устанавливаем условие эквивалентности (совпадения) гильбертовых пространств $\tilde{H}$ и $\hat{H}$.

Теорема. Для того, чтобы пространства $\tilde{H}$ и $\hat{H}$ были эквивалентны (совпадали), необходимо и достаточно, чтобы нашелся линейный непрерывный взаимно-однозначный (унитарный) оператор $\mathcal{T}$, осуществляющий автоморфизм пространства H , такой, что выполняется соотношение:

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), \mathcal{T}e_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_2. \quad (1)$$

В докладе обсуждается вопрос: при выполнении каких условий оператор $\mathcal{T}$ со свойством (1) является единичным оператором?

- [1] Лукашенко Т.П. О свойствах систем разложения подобных ортогональным // Известия РАН, сер. матем., 1998, Т. 62, №5, С. 187–206.

- [2] В. В. Напалков, В. В. Напалков, Об эквивалентности гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, связанных специальным преобразованием // Тр. ИММ УрО РАН, 26, № 2, 2020, С. 200–215.

Неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения Лэмба

Насибуллин Р.Г.

Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Пусть Ω — n -мерная выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega) = \sup\{\delta(x) : x \in \Omega\}$, где $\delta(x) = \delta(x, \Omega) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$ — функция расстояния до границы области.

Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемых функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем в Ω . Предположим также, что $m > 0$, $0 < \nu \leq 1/m$ и $\lambda \in [0, \frac{1+\nu m}{2}]$.

Следующее уравнение для функции Бесселя J_ν порядка ν

$$(1 - 2\lambda)J_\nu \left(\frac{2}{m}c_\nu(m) \right) + 2c_\nu(m)J'_\nu \left(\frac{2}{m}c_\nu(m) \right) = 0, \quad \frac{2}{m}c_\nu(m) \in (0, j_\nu),$$

будем называть уравнением Лэмба, а первый положительный корень этого уравнения $c_\nu(m)$ — константой Лэмба. Здесь через j_ν обозначен первый положительный корень функции Бесселя J_ν .

В статье [1] Авхадиев Ф.Г. и Вирс К.-Й. Вирс для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ доказали следующее неравенство

$$\frac{1 - \nu^2 m^2}{4} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^2} dx + \frac{C^2}{\delta_0(\Omega)^m} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^{2-m}} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx, \quad (1)$$

где $C = C_\nu(m)$ — константа Лэмба при $\lambda = 0$.

Мы получили L_p версии этого неравенства при $p \geq 1$. Приведем лишь один частный случай. Если $p \geq 1$, $m > 1$ и $\nu \in [0, 1/m]$, то для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ справедливо следующее L_p -неравенство типа Харди

$$\begin{aligned} (1 - p\nu^2 m^2) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^2} dx + \frac{4p(c_\nu^2(m) + (m-1)(\lambda - \lambda^2))}{\delta_0^m} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{2-m}} dx \leq \\ \leq p^p (2(1 + \nu m) - 4\lambda^2)^p \int_{\Omega} \frac{|\nabla f(x)|^p}{\delta(x)^{2-p}} dx. \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-709.2019

- [1] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Unified Poincare and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains. 2007. Z.Angev.Math.Mech. 2007. V.14. No.8-9. P.532-542.

**Пространства разветвленных накрытий сферы компактными
римановыми поверхностями рода 0 и 1**

Насыров С.Р.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
Россия

В докладе обсуждаются вопросы, связанные с параметризацией пространств компактных римановых поверхностей, разветленно покрывающих сферу, с фиксированным типом ветвления рациональными функциями и эллиптическими функциями Вейерштрасса. Основным средством является рассмотрение гладких однопараметрических семейств мероморфных функций, заданных либо на сфере Римана, либо на комплексных торах, модуль которых зависит от параметра. В случае произвольных кратностей точек ветвления получены вариационные формулы, позволяющие описать зависимость критических точек, полюсов унифицирующих функций и, в случае поверхностей рода 1, модулей от движения критических значений. На основе этих вариационных формул предлагается приближенный метод определения по заданному разветвленному накрытию рода 0 или 1 унифицирующей функции. Для нахождения этой функции используется интегральное представление, в которое входят ряд неизвестных параметров. Для определения параметров решается задача Коши для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием, соответствующим поверхности с известной унифицирующей функцией. Приводятся примеры, даются приложения полученных результатов в геометрической теории функций.

Выполнение этой работы осуществлено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160003.

Оценка спарка равноугольного фрейма

Новиков С.Я.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева, г.Самара, Россия

Равноугольным жестким фреймом называется фрейм пространства $\mathbb{R}^d$, векторы которого имеют одинаковые нормы и острые углы между векторами одинаковы. Впервые возможность построения жесткого фрейма с одинаковыми нормами в пространстве любой размерности была доказана А. И. Мальцевым [1] (в другой терминологии). Спарком системы векторов называют минимальное количество линейно зависящих векторов этой системы. Особый интерес представляют системы с полным спарком, для них любая подсистема, состоящая из d векторов линейно независима.

Следующая оценка спарка хорошо известна специалистам по сжатым измерениям (Compressed Sensing)[2]: для любой системы векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ с одинаковыми нормами

$$\text{spark}\{\varphi_j\}_{j=1}^n \geq \frac{1}{\mu} + 1,$$

где μ обозначает т. н. взаимную когеренцию системы векторов

$$\mu := \max_{j \neq j'} \frac{|\langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle|}{\|\varphi_1\|^2}.$$

Исследованы случаи равенства в этом неравенстве. Для равноугольного жесткого фрейма равенство имеет место тогда и только тогда, когда фрейм содержит правильный симплекс.

- [1] Мальцев А. И. Замечание к работе А.Н. Колмогорова, А.А. Петрова и Ю.М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 11:6 (1947), 567–568
- [2] Elad M. Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New-York: Springer, 2010.

Ортогональные полиномы и уравнения Пенлеве

Новокшенов В.Ю.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Вычисление асимптотики ортогональных полиномов является классической задачей анализа. В статье найдено асимптотическое распределение нулей обобщенных полиномов Эрмита $H_{m,n}(z)$ при $m = n$, $n \rightarrow \infty$, $z = O(\sqrt{n})$. Эти полиномы, представляющие собой вронскианы от классических полиномов Эрмита, возникают во многих задачах математической физики и теории случайных матриц. Вычисление асимптотики основано на применении задачи Римана к уравнению Пенлеве IV, решениями которого являются функции $u(z) = -2z + \partial_z \ln H_{m,n+1}(z)/H_{m+1,n}(z)$. В указанном скейлинговом пределе эта задача Римана имеет асимптотическое решение в элементарных функциях. В результате получаются формулы типа Планшереля-Ротаха для асимптотики классических полиномов Эрмита. [1].

- [1] В. Ю. Новокшенов, А. А. Щелконогов *Распределение нулей обобщенных полиномов Эрмита* // Уфимский математический журнал, Том 7. № 3 (2015). С. 57–69.

Об одной гамильтоновой системе Кимуры.

Павленко В.А.

г.Уфа, Россия

Помимо шести классических уравнений Пенлеве, которые интегрируются методом изомонодромной деформации (ИДМ), современных учебных привлекают и другие нелинейные ОДУ более высокого порядка, которые также допускают применение ИДМ. На сегодняшний день известен конечный список таких уравнений.

К их числу относятся решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Кимуры [1]. В настоящий момент автором были рассмотрены некоторые из них. В каждой предыдущей работе автора были рассмотрены по два линейных эволюционных уравнения с временами t_1 и t_2 , которые зависели от двух пространственных переменных. Такие эволюционные уравнения можно рассматривать как аналоги уравнений Шредингера, которые определялись гамильтонианами Кимуры. В терминах решений соответствующих линейных ОДУ методом ИДМ были построены решения данных эволюционных уравнений.

В этой работе будет представлен предельный переход между гамильтоновыми системами Кимуры. Кимура выписывал свои системы в разных видах. Кимура указал только предельный переход в рациональном виде. Автору удалось найти переход и в других видах. С помощью этого предельного перехода также переходят и решения соответствующих уравнений Шредингера.

- [1] The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure// *Annali di Matematica pura et applicata* IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.

Uncomputability of discrete quantum control

Alexander Pechen

Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies, Steklov
Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, National
University of Science and Technology “MISIS”

Uncomputable in the sense of Turing machines problems do appear in mathematics and quantum physics. Famous examples in mathematics include Halting problem and Hilbert’s 10 problem about existence of solutions of Diophantine equations. Examples in quantum physics include undecidability of the spectral gap and ground state of a boson Hamiltonian [1,2,3].

In this talk, we will discuss our recently obtained with D.I. Bondar result about uncomputability of discrete quantum control [4]. Consider a quantum system controlled using a finite number of elementary coherent or incoherent controls which can be combined (possibly, multiple times) in any sequence. Is there a sequence which steers a given initial state into a given target state, or which maximizes average value of some Hermitian operator? We show that there is no algorithm which gives an answer for all such quantum control problems.

This research for open quantum systems was supported by the Russian Science Foundations Project 17-11-01388 and for closed quantum systems by the project 1.669.2016/1.4 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

- [1] Lloyd S. Quantum-mechanical computers and uncomputability // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. **71**. P. 943.
- [2] Cubitt T. S., Perez-Garcia D., Wolf M. M. Undecidability of the spectral gap // *Nature*. 2015. Vol. **528**. P. 207–211.

- [3] Smith W. D. Three Counterexamples Refuting Kieu's Plan for Quantum Adiabatic Hypercomputation; and Some Uncomputable Quantum Mechanical Tasks // Applied Mathematics and Computation. 2006. Vol. **178**. P. 184–193.
- [4] Bondar D. I., Pechen A. N. Uncomputability and complexity of quantum control // Scientific Reports. 2020. Vol. **10**. P. 1195.

Неустойчивость экстремальных поверхностей вращения Полубоярова Н. М.

Волгоградский государственный университет, г. Волгоград, Россия

Пусть M – n -мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2 . Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2 -погружением $u : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$; $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ – C^2 -гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2 -гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определен функционал потенциальной энергии

$$W(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \Phi(\xi) d\mathcal{M} + \int_{\Omega} \Psi(x) dx. \quad (1)$$

Поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$. Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ *устойчива*, если вторая вариация функционала (1) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$, иначе – *неустойчива*.

Далее будем рассматривать частный случай функционала (1) и поверхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть C^2 -гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданная радиус-вектором

$$\vec{R}(t, \theta) = (t, r(t)\rho(\theta)),$$

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ – радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ – C^2 -гладкая функция на (a, b) . Заметим, что $|x| = \sqrt{R^2 - \langle R, e_{n+1} \rangle^2} = \sqrt{t^2 + r^2 - t^2} = r$. Тогда при $\Phi(\xi) = 1$ и $\Psi(x) = \psi(|x|) = \psi(r)$ функционал (1) принимает вид

$$W(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} d\mathcal{M} + \int_{\Omega} \psi(|x|) dx. \quad (2)$$

Теорема. Если функции $\psi(r), \psi'(r), r'(t) > 0$, то экстремальная для функционала (2) поверхность $\mathcal{M}$ неустойчива.

Данная теорема является продолжением исследования [1]. Метод доказательства основан на анализе выражений 1 и 2 вариаций функционала, полученных в [2].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-47-340015 р_а.

- [1] Полубоярова Н. М., Романова И. А. Примеры экстремальных поверхностей вращения для функционала потенциальной энергии // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. – Т. 57. – с. 267-271.
- [2] Полубоярова Н. М. О неустойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии // Уфимск. матем. журн., 10:3 (2018), 79–88; Ufa Math. J., 10:3 (2018), 77–85

О порождающих в алгебре целых функций

Рахимова А.И.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Задача о порождающих в кольце целых функций первого порядка и минимального типа в угле рассматривалась в работах В.Н. Филиппова, и В.В. Напалкова [1] (в одномерном случае) и в работе Филиппова [2] (для случая многих переменных).

Пусть C — острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале, $B(0, 1)$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $\Delta = C \cap B(0, 1)$.

Рассмотрим класс целых функций

$$E(\Delta) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \exists c_2 = c_2(f) > 0, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_1 = c_1(\varepsilon, f) > 0 :$$

$$|f(z)| \leq c_1 e^{c_2 H_\Delta(y) + \varepsilon \|z\|}, \quad z \in \mathbb{C}^n\},$$

где $H_\Delta(y)$ — опорная функция компакта $\overline{\Delta}$.

Конечное множество функций $f_1, \dots, f_q$ из $E(\Delta)$ определяет идеал $I(f_1, \dots, f_q)$ в алгебре $E(\Delta)$,

$$I(f_1, \dots, f_q) = \{f_1 g_1 + \dots + f_q g_q, \quad g_j \in E(\Delta), \quad j = 1, \dots, q\}.$$

Алгебра $E(\Delta)$ порождается функциями $f_1, \dots, f_q$, если верно соотношение $I(f_1, \dots, f_q) = E(\Delta)$.

Теорема. *Функции $f_1, \dots, f_q$ ($1 \leq q < \infty$, $q \geq 1$) порождают алгебру $E(\Delta)$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:*

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_1 = C_1(\varepsilon) > 0 :$$

$$|f_1(z)| + \dots + |f_q(z)| \geq C_1(\varepsilon) e^{-(C_2 H_\Delta(y) + \varepsilon \|z\|)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

- [1] Напалков В.В., Филиппов В.Н. Порождающие в кольце целых функций первого порядка и минимального типа в угле. // Доклады Академии Наук, 456:2 (2014), 140-142.
- [2] Филиппов В.Н. Порождающие в кольце целых функций многих комплексных переменных первого порядка и минимального типа в конусе. Применение. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 4:1 (2014), 279-283.

**Явление градиентного взрыва решений нелинейного уравнение Шредингера и динамика квантовых состояний
Сакбаев В.Ж.**

Институт Математики с Вычислительным Центром УФИЦ РАН, г. Уфа,
Россия, Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия, Московский
физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл.,
Россия

Изучается разрешимость задачи Коши для НУШ с произвольным начальным условием из пространства Соболева. Получены условия глобальной продолжимости решения и условия его градиентного взрыва. Проанализирована зависимость типа взрыва (см. [1]) множества решений от выбора пространства решений задачи Коши. Установлены взаимосвязи между явлениями градиентного взрыва, самофокусировки и разрушения чистого состояния (см. [3]). Предложена процедура продолжение решения через момент градиентного взрыва посредством отображения со значениями в множестве квантовых состояний (см. [2]). Описание динамики квантовых состояний определяется уравнением Лиувилля-фон Неймана, для которого получены условия корректности задачи Коши.

- [1] Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж., Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп. ТМФ, 2015, 185:2, 252–271.

- [2] Grekhneva A.D., Efremova L.S., Sakbaev V.Zh., Phase Flows Generated by Cauchy Problem for Nonlinear Schrodinger Equation and Dynamical Mappings of Quantum States. Lobachevskii J. Math., 2019, 40:10, 1455–1469.
- [3] Грехнева А.Д., Сакбаев В.Ж., Динамика множества квантовых состояний, порождаемая нелинейным уравнением Лиувилля-фон Неймана. ЖВМиМФ, 2020, 60:8, 1383–1393.

Уравнения Янга–Миллса на S^4 и гармонические сферы в пространствах петель

Сергеев А.Г.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия

Гармонические сферы, задающиеся гладкими отображениями римановой сферы в римановы многообразия, являются экстремальными функционала энергии, задаваемого интегралом Дирихле. Если риманово многообразие в образе является кэлеровым, то голоморфные и анти-голоморфные сферы реализуют минимумы энергии. С другой стороны, поля Янга–Миллса являются экстремальными функционала действия Янга–Миллса. Локальные минимумы этого функционала называются инстантонами и анти-инстантонами. Имеется очевидная формальная аналогия между полями Янга–Миллса и гармоническими отображениями. Более того, Атья доказал, что для любой компактной группы Ли G можно установить явное соответствие между G -инстантонами на S^4 и голоморфными сферами в пространстве петель ΩG группы G . Обобщая эту теорему, мы сформулировали гипотезу о гармонических сферах, которая утверждает, что должно существовать соответствие между G -полями Янга–Миллса на S^4 и гармоническими сферами в ΩG .

В докладе предлагается метод доказательства этой гипотезы, основанный на конструкции адиабатического предела в уравнениях Янга–Миллса. Указанная конструкция использует удачную параметризацию сферы $S^4 \setminus S^1$ с выброшенной окружностью, найденную Джарвисом и Норбюри. В этой параметризации множество $S^4 \setminus S^1$ расслаивается на комплексные диски, параметризуемые точками римановой сферы S^2 . В адиабатическом пределе заданное G -поле Янга–Миллса на S^4 вырождается в гармоническое отображение $S^2 \rightarrow \Omega G$. Таким образом мы можем сопоставить естественным образом произвольному G - полю Янга–Миллса на S^4 гармоническое отображение сферы S^2 в пространство петель ΩG .

Критерий линеаризуемости и первые интегралы для осцилляторов Релеевского типа

Синельщиков Д.И.

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г.Москва, Россия

В докладе рассматривается семейство нелинейных осцилляторов с кубическим относительно первой производной членом. Представители данного семейства часто встречаются в различных приложениях. Например, осцилляторы Релея и Релея-Дуффинга [1, 2, 3] принадлежат к рассматриваемому семейству уравнений.

Для рассматриваемого семейства уравнений и диссипативного гармонического осциллятора решена проблема эквивалентности [4], при этом в качестве преобразований эквивалентности использовались обобщенные нелокальные преобразования [5, 6, 7]. В явном виде найдены условия на коэффициенты рассматриваемого семейства уравнений задающие необходимые и достаточные условия линеаризуемости. Показано что каждое из линеаризуемых уравнений обладает автономным первым интегралом типа Лиувилля, и, следовательно, интегрируемо по Лиувиллю. Также установлено что линеаризуемые уравнения из рассматриваемого семейства не обладают предельными циклами. Полученные результаты иллюстрируются двумя новыми примерами интегрируемых осцилляторов: осциллятором Релея-Дуффинга и обобщенным осциллятором Дуффинга-Ван дер Поля.

Данное исследование было частично поддержано РНФ, грант № 19-71-10003.

- [1] P. Kumar, A. Kumar, S. Erlicher, A modified hybrid Van der Pol-Duffing-Rayleigh oscillator for modelling the lateral walking force on a rigid floor, Phys. D Nonlinear Phenom. 358 (2017) 1-14.
- [2] J. Giné, C. Valls, On the dynamics of the Rayleigh-Duffing oscillator, Nonlinear Anal. Real World Appl. 45 (2019) 309-319.
- [3] M.R. Candido, J. Llibre, C. Valls, Non-existence, existence, and uniqueness of limit cycles for a generalization of the Van der Pol-Duffing and the Rayleigh-Duffing oscillators, Phys. D Nonlinear Phenom. 407 (2020) 132458.
- [4] D.I. Sinelshchikov, Linearizability conditions for the Rayleigh-like oscillators, Phys. Lett. A. 384 (2020) 126655.
- [5] C. Muriel, J.L. Romero, Second-order ordinary differential equations with first integrals of the form $C(t) + 1/(A(t, x)\dot{x} + B(t, x))$, J. Nonlinear Math. Phys. 18 (2011) 237-250.

- [6] D.I. Sinelshchikov, N.A. Kudryashov, Integrable nonautonomous Liénard-type equations, Theor. Math. Phys. 196 (2018) 1230-1240.
- [7] M. Demina, D. Sinelshchikov, Integrability properties of cubic Liénard oscillators with linear damping, Symmetry (Basel). 11 (2019) 1378.

Ограничения правилами суперотбора по изоспину при передаче квантовой информации

Ситдииков А.С.^{1,2}, Никитин А.С.¹

¹Казанский государственный энергетический университет г.Казань,
Россия,

²Казанский (Приволжский) Федеральный университет, г. Казань,
Россия

Рассмотрена возможность передачи квантовой информации с помощью кубитов при наличии неабелевых правил суперотбора по изотопическому спину на основе алгебраической модели, предложенной в работе [1]. Суперотборная структура при этом определяется алгеброй наблюдаемых $O_G \subset O_d$ (где O_d – алгебра Кунца, $d = 2$ и $G = SU(2)$). Состояния кубита (частицы с изоспином $T = 1/2$ и его проекциями $T_z = \pm 1/2$) в нашей модели описываются двумерным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ в алгебре Кунца, ортонормированным базисом в котором являются изометрии ψ_i , $i = 1, 2$.

Благодаря наличию суперотборного оператора, пространство состояний кубитов разлагается в прямую сумму попарно ортогональных когерентных подпространств, называемых суперотборными секторами. В случае двух кубитов, 4-мерное пространство состояний $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму двух когерентных подпространств – на антисимметричное одномерное $\mathcal{H}_0$, соответствующее состоянию с полным изоспином $T = 0$, и симметричное 3-мерное $\mathcal{H}_1$, соответствующее состоянию $T = 1$. В $\mathcal{H}_1$ проектора Π_{1i} ($i = 1, 0, -1$) на подпространства с разными T_z зависят от ориентации системы координат в изоспиновом пространстве и не относятся к алгебре наблюдаемых O_G . Получатель информации не знает о системе координат отправителя и он вынужден усреднить Π_{1i} по всей группе. Такие усредненные значения коммутируют с элементами представления группы, т.е. $[\tilde{\Pi}_{1i}, \pi(g)] = 0$, означающий их принадлежность к алгебре наблюдаемых O_G . Таким образом, усреднение по группе приводит к декогеренции: отправленное чистое состояние $\rho = \Pi_{1i}$ воспринимается как смешанное $\hat{\rho} = \tilde{\Pi}_{1i}$. Поэтому, используя два кубита, можно переправить один классический бит информации следуя протоколу: *с помощью антисимметричного состояния передать информацию*

соответствующую 0 и любого состояния из симметричного подпространства, передать информацию соответствующую 1. Информацию можно кодировать лишь с помощью тех состояний, проектора на которые принадлежат алгебре наблюдаемых $O_{SU(2)}$ и благодаря коммутативности таких проекторов с элементами $\pi(g)$, полученная информация распознается однозначно.

Аналогичные протоколы также формулируются в случае большего числа кубитов.

- [1] М.И. Кириллов, А.С. Никитин, А.С. Ситдилов, «Алгебраическая модель нуклонных систем при наличии правил суперотбора по изоспину», Изв. РАН, сер. физ.,(2018), 1403.

Polynomially convex hulls near Levi-flat singularities

Alexandre Sukhov

University of Lille, France,

Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russia

We study local polynomially convex hulls of real analytic Levi-flat hypersurfaces near singular points. Our main result gives a characterization of local polynomial convexity of such hypersurfaces in terms of the geometry of the Levi foliation near a singular point.

This is a joint work with R.Shafikov (Univ. W. Ontario).

Асимптотическое поведение редуцированной матрицы плотности в подходе Боголюбова-ван Хова

Теретёнков А.Е.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия

Рассматривается модель спин-бозона в приближении вращающейся волны при нулевой температуре. Показывается, что при определённых условиях на корреляционную функцию резервуара динамика редуцированной матрицы плотности может быть асимптотически описана уравнением Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада с постоянными коэффициентами.

Для строгой формулировки результата введём ряд обозначений. Рассматривается гильбертово пространство $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$, где $\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$ — бозонное фоковское пространство. Введём в $\mathbb{C}^2$ матрицы $\sigma_+ \equiv |1\rangle\langle 0|$, $\sigma_- \equiv |0\rangle\langle 1|$, а в $\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$ — операторы рождения и уничтожения $b_k, b_k^\dagger$, а также вакуумный вектор $b_k|\text{vac}\rangle = 0$. Введём гамильтониан

модели

$$H(\lambda) = \int \omega(k) b_k^\dagger b_k dk + \Omega \sigma_+ \sigma_- + \lambda \int \left(g^*(k) \sigma_- b_k^\dagger + g(k) \sigma_+ b_k \right) dk.$$

Определим $\rho_{SB}(t; \lambda)$ как решение задачи Коши для уравнения Лиувилля-фон Неймана

$$\frac{d}{dt} \rho_{SB}(t; \lambda) = -i[H(\lambda), \rho_{SB}(t; \lambda)], \quad \rho_{SB}(0) = \sigma \otimes |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}|,$$

где σ — произвольна матрица плотности в $\mathbb{C}^2$. Определим редуцированную матрицу плотности системы в представлении взаимодействия по формуле $\rho_S(t; \lambda) \equiv e^{i\Omega\sigma_+\sigma_-t} \text{Tr}_{\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))} \rho_{SB}(t; \lambda) e^{-i\Omega\sigma_+\sigma_-t}$. Сделаем перерастяжку Боголюбова-ван Хова, обозначив $\rho(t; \lambda) \equiv \rho_S(\lambda^{-2}t; \lambda)$.

Теорема. Пусть интеграл $G(t) \equiv \int |g_k|^2 e^{-i(\omega(k)-\Omega)t} dk$ сходится и определяет непрерывную функцию $G(t)$ с конечным $(m+1)$ -м моментом $\int_0^\infty t^{m+1} G(t) dt < \infty$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существуют $\Delta\Omega^{(m)} \in \mathbb{R}$ и $\Gamma^{(m)} \geq 0$, что для некоторого решения $\rho^{(m)}(t; \lambda)$ уравнения

$$\frac{d}{dt} \rho^{(m)}(t; \lambda) = \mathcal{L}^{(m)}(\rho^{(m)}(t; \lambda)),$$

$$\mathcal{L}^{(m)}(\rho) = -i[\Delta\Omega^{(m)} \sigma_+ \sigma_-, \rho] + \Gamma^{(m)} \left(\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_+ \sigma_- \right),$$

выполнено $\rho(t; \lambda) - \rho^{(m)}(t; \lambda) = O(\lambda^{2m+2})$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-20154).

Краевая задача Гильберта для обобщенных аналитических функций с сингулярным коэффициентом

Шабалин П.Л.

КТАСУ, г.Казань, Россия

В единичном круге D , $L = \partial D$, плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим краевую задачу Гильберта об отыскании по краевому условию

$$\Re[e^{i\alpha(t)} U(t)] = f(t), \quad t \in L, \quad \alpha(t), f(t) \in C(L), \quad (1)$$

решения $U(z)$ обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной линией

$$\partial_{\bar{z}} U - A(z) U = F(z), \quad A(z) = \frac{a(z)}{\bar{z} - z}, \quad F(z) \in C(\bar{D}). \quad (2)$$

Подчеркнем, что уравнение (2) является частным случаем рассмотренного А.П. Солдатовым и А.Б. Расуловым в [1] обобщенного уравнения Коши-Римана с сингулярной линией в односвязной области G с гладкой границей. В частности, для уравнения (1) А.П. Солдатов и А.Б. Расулов при предположении существования для $A(z)$ такой аналитической в G функции $a_0(z)$, что

$$A_0(z) = \frac{a(z) - a_0(z)}{\bar{z} - z} \in L^p(D), \quad p > 2. \quad (3)$$

$$a_0(\tau_0) = a_0(\tau_1) = 0, \quad a_0(t) \in H(L), \quad (4)$$

где τ_0, τ_1 — точки пересечения контура L с сингулярной линией, получена формула общего решения и рассмотрена краевая задача с комбинированным граничным условием.

Подчеркнем, что условия (4) еще и гарантируют конечный индекс краевой задачи для аналитических функций, которая получается при решении рассмотренной в [1] краевой задачи.

В настоящей работе вместо условия (4) будем считать выполненными следующие асимптотические формулы:

$$a_0(t) = a_0(\tau_j \pm 0) + O(|t - \tau_j|), \quad t \rightarrow \tau_j \pm 0, \quad a_0(\tau_j \pm 0) = \alpha_j^\pm + i\beta_j^\pm, \quad (5)$$

а граничные значения функции $a_0(z)$ непрерывными по Гёльдеру на верхней L^+ и нижней L^- дугах единичной окружности, включая концы. При этих условиях получены формула общего решения системы (2) и краевой задачи (1). Решение и исследование разрешимости последней связано с решением задачи Гильберта для аналитических функций с бесконечным индексом и двумя точками завихрения.

- [1] Солдатов А.П., Расулов А.Б. Краевая задача для обобщённого уравнения Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 2016, Т. 52 (5), 637-650.

О логарифмическом приближении фундаментальной характеристики оператора Фурье

Шакиров И.А.

ФГБОУ ВО НГПУ, г. Набережные Челны, Россия

Задача об оптимальной приближенной замене константы Лебега $L_n = \|S_n\|_{C_{2\pi}}$ классического оператора Фурье $S_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ вида

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln(n+a) + b, \quad n \in N \quad (O_n(a,b)) \stackrel{def}{=} L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(n+a) - b \quad (1)$$

относится к актуальным задачам теории функций. Речь идет об определении величины

$$E \stackrel{def}{=} \inf_{(a,b) \in \Omega} \sup_{n \in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(n+a) - b \right|, \quad (a,b) \in \Omega = [0,1] \times [0,2] \subset R^2, \quad (2)$$

позволяющей судить об аппроксимативных качествах логарифмического приближения вида (1), зависящего от параметров a, b . В конкретных подобластях $\Omega^\downarrow \subset \Omega$ и $\Omega^\uparrow \subset \Omega$, где функция погрешности $O_n(a,b)$, $n \in N$ соответственно строго убывает и строго возрастает, для наилучшего приближения (2) получены нижеследующие оценки:

$$E < \varepsilon^\downarrow = 0.00065453... \quad [1], \quad E < \varepsilon^\uparrow = 0.00094522... \quad [2].$$

Требую обращения в нуль функции погрешности на концах области определения, в (1) установлены вполне определенные коэффициенты $a = a^0, b = b^0$, позволяющие усилить результаты работ [1], [2] по аппроксимации константы L_n .

Теорема. Если в приближенном равенстве (1) искомые параметры равны $a = a^0 = 0.504852813...$, $b = b^0 = 1.270353241...$, то для наилучшего приближения (2) верна оценка $E < \sup_{n \in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(n+a^0) - b^0 \right| = 0.000317632....$

- [1] Shakirov I.A. About the Optimal Replacement of the Lebesgue Constant Fourier Operator by a Logarithmic Function // Lobachevski journal of mathematics. - 2018. V. 39, № 6. - P. 841-846.
- [2] Shakirov I.A. On optimal approximations of the norm of the Fourier operator by a family of logarithmic functions // Journal of Mathematical Sciences. - 2019. V. 241, № 3. -P. 354-363.

Особенность омбилического типа решения одной системы уравнений газовой динамики

Шавлуков А.М.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается типичная (с точки зрения математической теории катастроф) омбилическая особенность решения системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + 3A\rho\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

соответствующей политропе газа $p = A(\rho^3 - \rho_0^3)$, где A – вещественная постоянная, ρ_0 – начальная плотность газа. В уравнение течения входит $\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial \rho} = 3A\rho$. Система (1) – частный случай модели одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функция давления $\alpha(\rho)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho_* > 0$.

В инвариантах Римана $r = u + \sqrt{3A\rho}$, $l = u - \sqrt{3A\rho}$ система (1) переписывается как система уравнений Хопфа:

$$\begin{cases} r_t + rr_x = 0, \\ l_t + ll_x = 0, \end{cases} \quad (3)$$

что позволяет сравнить результат – каноническое уравнение катастрофы, описывающее решение в окрестности точки потери гладкости – с указанным в [1]. Возмущение ростка катастрофы при этом отличается от описанного в процитированной работе. Выдвигается гипотеза о неточности представленной в работе [1] классификации особенностей инвариантов Римана.

Исследование выполнено совместно с Б.И. Сулеймановым.

- [1] А. Х. Рахимов, “Особенности римановых инвариантов”, Функциональный анализ и его приложения, 27:1 (1993), 46–59; Funct. Anal. Appl., 27:1 (1993), 39–50

**О необходимом и достаточном условии в теории
регуляризованных следов**

Фазуллин З.Ю., Абузярова Н.Ф.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть L_0 — самосопряженный полуограниченный снизу дискретный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , оператор V — симметрический L_0 — компактный в H . Далее, обозначим $\sigma(L_0) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — спектр оператора L_0 ($\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$) и P_k — проектор на собственное подпространство, соответствующее λ_k , $\nu_k = \dim \operatorname{ran} P_k$ — кратность λ_k .

Оператор $L = L_0 + V$ замкнут в области определения оператора L_0 и имеет дискретный спектр: $\sigma(L) = \{\{\mu_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\mu_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, \nu_k$, — группа собственных чисел оператора L , на которую расщепляется собственное число λ_k оператора L_0 при возмущении оператором V .

Рассмотрим ряд со скобками

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_i^{(k)}) + \operatorname{tr} P_k V \right]. \quad (1)$$

Отметим, что такая расстановка скобок, как правило, возникает при исследовании формул следов возмущений модельных операторов в частных производных в математической физики (см. [1]—[6]).

Пусть $R_{0k}(z) = R_0(z) - (z - \lambda_k)^{-1} P_k$, $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$, $r_k = \min\{(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \cdot 2^{-1}, (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \cdot 2^{-1}\}$, и выполнено условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{|z - \lambda_k| \leq r_k} \|R_{0k}(z)V\| = 0.$$

Введем функцию

$$f_1(\lambda) = 3 \int_0^{+\infty} \frac{2 \int_0^t \tau(s) ds}{(t + \lambda)^4} dt,$$

где $\tau(s) = \sum_{\lambda_k < s} \sum_{\lambda_m \geq s} \operatorname{tr} (P_k V P_m V) (\lambda_m - \lambda_k)^{-1}$.

Теорема 1. Пусть ряд (1) сходится. Тогда для равенства нулю суммы ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$f_1(\lambda) = o(\lambda^{-2}) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Теорема 2. Пусть ряд (1) сходится. Тогда для справедливости соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = c_0 > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f_1(\lambda) \sim c_0 \lambda^{-2} \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027) (Абузярова Н.Ф.) и в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421 (Фазуллин З.Ю.).

- [1] Х.Х. Муртазин, З.Ю. Фазуллин. Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов. // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 12. С. 123–156.
- [2] В.А. Садовничий, З.Ю. Фазуллин. Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами. // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 402–409.
- [3] З.Ю. Фазуллин, Х.Х. Муртазин. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора. // Матем. сб. Т. 192. № 5. С. 87–124.
- [4] Х.Х. Муртазин, З.Ю. Фазуллин. Спектр и формула следов для двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле. // Доклады РАН. 2003. Т. 390. № 6. С. 743–745.
- [5] А.И. Атнагулов, В.А. Садовничий, З.Ю. Фазуллин. Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формула следов. // Уфимск. матем. журн. 2016. Т. 8. № 3. С. 22–40.
- [6] З.Ю. Фазуллин, И.Г. Нугаева. Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе. // Дифф. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 691–701.

Boundedness of functions of finite order

Khabibullin B.N.

Bashkir State University, Ufa, Bashkortostan, Russian Federation

Let $m, n \in \mathbb{N}$, λ_m (λ_{2n} , resp.) be the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^n$, resp.), $B(r)$ and $S(r)$ are a ball and a sphere centered at 0 of radius r .

Theorem B [1, Theorem 2.1] *If an entire function of finite order is bounded on $\mathbb{C} \setminus E$ and $\lambda(E \cap B(r)) \underset{r \rightarrow +\infty}{=} o(r^2)$, then it is constant.*

First block of our results [2, Main Theorem, Theorems 1,2] is

Theorem 1 [on $\mathbb{C}^n \vee \mathbb{R}^m$]. *If an entire or plurisubharmonic (convex or harmonic) function of finite order is bounded from above on $\mathbb{C}^n \setminus E$ (resp., $\mathbb{R}^m \setminus E$) and $\lambda(E \cap B(r)) \underset{r \rightarrow +\infty}{=} o(r^{2n})$ (resp., $= o(r^m)$), then it is constant.*

Let σ_r be the surface measure on the sphere $S(r)$. The second is
Theorem 2 [on $\mathbb{C}^n$ by spheres]. *Let $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be an increasing sequence with $r_1 > 0$ such that $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k = +\infty$, $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} < +\infty$, $E_k \subset S(r_k) \subset \mathbb{C}^n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{r_k}(E_k)/r_k^{2n-1} = 0$. If an entire or plurisubharmonic function of finite order is bounded from above on $\bigcup_k (S(r_k) \setminus E_k)$, then it is constant.*

The third group concerns subharmonic functions on the unit disc/ball [3]. Obviously, it is also true for holomorphic, plurisubharmonic, convex, and harmonic functions on the unit disc/ball.

Theorem 3 [on $\mathbb{R}^m$ by balls]. *Let $E \subset B(1) \subset \mathbb{R}^m$, $\lim_{1 > r \rightarrow 1} \frac{\lambda(E \cap B(r))}{(1-r)^m} = 0$. If a subharmonic function on $B(1) \subset \mathbb{R}$ of finite order is bounded from above on $B(1) \setminus E$, then it is bounded from above on the whole unit ball $B(1)$.*

Theorem 4 [on $\mathbb{R}^m$ by spheres]. *Let $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be increasing such that $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-r_k}{1-r_{k+1}} < +\infty$, $E_k \subset S(r_k) \subset \mathbb{R}^m$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{r_k}(E_k)/(1-r_k)^{m-1} = 0$. If a subharmonic function on $B(1) \subset \mathbb{R}$ of finite order is bounded from above on $\bigcup_k (S(r_k) \setminus E_k)$, then it is bounded from above on the whole unit ball $B(1)$.*

Supported by the Russian Science Foundation (project 11-18-00002).

- [1] A. Aleman, A. Baranov, Y. Belov, H. Hedenmalm “Backward shift and nearly invariant subspaces of Fock-type spaces”, July 12, 2020, <https://arxiv.org/abs/2007.06107>
- [2] B. N. Khabibullin “Liouville-type theorems for functions of finite order”, Ufa Mathematical Journal, **12:4** (2020) (to appear); partly in <http://arxiv.org/abs/2009.01019>, <http://arxiv.org/abs/2009.01447>
- [3] B. N. Khabibullin “Global boundedness of functions of finite order bounded outside small sets”, submitted to *Matematicheskii Sbornik*.

On approximation by exponential systems

Khabibullin B.N., Muryasov R.R.

Bashkir State University, Ufa, Bashkortostan, Russian Federation

Let D be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$, $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$ be a sequence of pairwise distinct points such that $\#(Z \cap K) < +\infty$ for each compact subset $K \subset \mathbb{C}$, and $0 \notin Z$. $\text{Exp}^Z := \left\{ z \mapsto \exp z_k z \right\}_{k=1,2,\dots}$ is the exponential system with exponents Z . This system Exp^Z is complete in the space $\text{Hol}(D)$ of holomorphic functions equipped with the topology of uniform convergence on compact subsets if the closure of the linear span of Exp^Z

coincides with $\text{Hol}(D)$. The completeness criterion for convex unbounded domains $D \subset \mathbb{C}$ is long known [1], [2, 3.2]. We are announcing new

Completeness criterion in $\text{Hol}(D)$ for convex bounded D . *The exponential system Exp^Z is complete in $\text{Hol}(D)$ if and only if there exist*

[0] *numbers $p \in [0, 1)$ and $r_0 > 0$,*

[s] *a 2π -periodic function $s \in C^2(\mathbb{R})$, $0 \leq s \not\equiv 0$, $s''(t) + p^2 s(t) \underset{t \in \mathbb{R}}{\geq} 0$, i.e.,*

s is p -trigonometrically convex (with respect to the pair $\{\cos px, \sin px\}$),

[g] *a positive function $g \in C^2(\mathbb{R}^+ \setminus 0)$ satisfying $g(r) \underset{r \geq r_0}{\equiv} 0$, but $g \not\equiv 0$,*

$\lim_{0 < r \rightarrow 0} \frac{g(r)}{-\ln r} < +\infty$, $r^2 g''(r) + r g'(r) \underset{r \in \mathbb{R}^+ \setminus 0}{\geq} p^2 g(r)$, i.e., g is p -powerly

convex (with respect to the pair $\{x^p, x^{-p}\}$), such that

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{R} \sum_k g\left(\frac{|z_k|}{R}\right) s(\arg z_k) \geq \underbrace{\int_0^{+\infty} g(r) dr \cdot \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s_D(t) (s''(t) + s(t)) dt \right)}_{\text{the mixed area of } D \text{ and } T}$$

where $s_D(t) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{Re } z e^{-it}$ is the support function of D , $T \subset \mathbb{C}$ is the

convex domain with the support function $s_T = s$, and $s''(t) + s(t)$ is the radius of curvature of the boundary ∂T at a point of tangency of the supporting line to ∂T , orthogonal to the ray $\{re^{it} : r \geq 0\}$.

Supported by the Russian Science Foundation (project 11-18-00002).

- [1] B. N. Khabibullin, "On the growth of entire functions of exponential type along the imaginary axis", Mat. Sb., **180**:5 (1989), 706–719; Math. USSR-Sb., **67**:1 (1990), 149–163.
- [2] Khabibullin B. N. Completeness of exponential systems and sets of uniqueness. 4th Ed., Ufa: Bashkir State University, 2012, 192 pp. (in Russian) <http://www.researchgate.net/publication/271841461>

Рост субгармонических функций вдоль прямой

Хабибуллин Б.Н., Салимова А.Е.

БашГУ, г.Уфа, Россия

Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ — две субгармонические функции на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с мерами Рисса $\nu_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u$, Δ — оператор Лапласа, и μ_M , для которых $u(z) \leq O(|z|)$ и $M(z) \leq O(|z|)$ при $z \rightarrow \infty$. Если рост функции M в некотором смысле превышает рост функции u на некоторой прямой, то естественно ожидать [1], [2], что мера μ_M в

каком-то смысле «доминирует» над мерой ν_u . Мы даём количественную форму такого доминирования.

Ключевую роль будут играть специальные интегралы по интервалам на вещественной $\mathbb{R}$ или мнимой оси $i\mathbb{R}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Для локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции v полагаем

$$J_{\mathbb{R}}(r, R; v) := \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{v(x) + v(-x)}{x^2} dx, \quad 0 < r < R < +\infty,$$

а для локально интегрируемой на $i\mathbb{R}$ функции v —

$$J_{i\mathbb{R}}(r, R; v) := \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{v(-iy) + v(iy)}{y^2} dy, \quad 0 < r < R < +\infty.$$

Нам также потребуются специальные меры интервалов. Для положительной борелевской меры μ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ полагаем

$$l_{\mu}^{\text{rh}}(r, R) := \int_{\substack{r < |z| \leq R \\ \Re z > 0}} \Re \frac{1}{z} d\mu(z), \quad 0 < r < R < +\infty,$$

$$l_{\mu}^{\text{lh}}(r, R) := \int_{\substack{r < |z| \leq R \\ \Re z < 0}} \Re \left(-\frac{1}{z} \right) d\mu(z), \quad 0 < r < R < +\infty,$$

— правая и левая логарифмические меры интервалов $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ для меры μ , соответственно. Они порождают логарифмическую субмеру интервалов $l_{\mu}(r, R) := \max\{l_{\mu}^{\text{lh}}(r, R), l_{\mu}^{\text{rh}}(r, R)\}$, $0 < r < R < +\infty$.

Теорема [[3, Теорема]] Пусть u и M — функции, введённые выше, $\nu := \nu_u$, $\mu := \mu_M$, положительная функция $q_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ локально интегрируема на $\mathbb{R}$, а положительная функция $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ непрерывна и удовлетворяет условию $\limsup_{|y| \rightarrow +\infty} q(y)/|y| < 1$, а

для измеримого по мере Лебега mes на $\mathbb{R}$ подмножества $E \subset \mathbb{R}^+$ с

$$E^r := E \cap [0, r], \quad q_E(r) := \text{mes}(E^r) \ln \frac{er}{\text{mes}(E^r)} =: q_E(-r),$$

имеют место неравенства

$$u(iy) + u(-iy) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(iy + q(y)e^{i\theta}) d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(-iy + q(-y)e^{i\theta}) d\theta + q_0(y) + q_0(-y)$$

для каждого числа $y \in \mathbb{R}^+ \setminus E$. Тогда для любых чисел $r_0 > 0$ и $N \in \mathbb{R}^+$ найдётся число $C \in \mathbb{R}^+$, для которого

$$\max\{l_\nu(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; u)\} \leq \min\{l_\mu^{\text{rh}}(r, R), l_\mu^{\text{lh}}(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; M)\} \\ + C J_{\mathbb{R}}(r, R; q_0 + q_E) + C I_N(r, R; q) + C$$

при всех $r_0 \leq r < R < +\infty$, где

$$I_N(r, R; q) := \int_r^R t^N \sup_{s \geq t} \frac{q(s) + q(-s)}{s^{2+N}} dt.$$

- [1] P. Malliavin, L. A. Rubel, *On small entire functions of exponential type with given zeros*, Bull. Soc. Math. France, **89**:2 (1961), 175–201.
- [2] Б. Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, изд. 4, доп., РИЦ БашГУ, Уфа, 2012.
- [3] А. Е. Салимова, Б. Н. Хабибуллин, *Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса*, Уфим. матем. журнал, **12**:2 (2020), 35–48.

Метод интегральных представлений исследования нелинейной краевой задачи теории пологих оболочек типа Тимошенко

Харасова Л. С.

Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО К(П)ФУ, г. Набережные Челны, Россия

В работе исследуется разрешимость геометрически нелинейной задачи равновесия для пологих однородных оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями в произвольной области. Метод исследования заключается в сведении исходной задачи к одному нелинейному операторному уравнению. При этом используется теория одномерных сингулярных интегральных уравнений.

В основе метода исследования лежат интегральные представления для функций $w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2$, содержащие произвольные голоморфные функции. Для нахождения этих функций в [1], [3] используются явные представления решений задачи Римана-Гильберта в единичном круге. В работе [2] голоморфные функции ищутся в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями, которые находятся как решения системы одномерных сингулярных уравнений. В данной работе указанный метод развивается на случай произвольной упругой оболочки с шарнирно опертыми краями. Построенные таким образом интегральные представления позволяют свести исходную задачу (с граничными условиями

$w_2 = w_3 = \psi_2 = 0$) к одному операторному уравнению $f + G_*f = 0$ с нелинейным ограниченным оператором G_*f в $L_p(\Omega)$, $2 < p < 2/(1 - \beta)$, разрешимость которого устанавливается при помощи принципа сжатых отображений.

Основной результат работы приводится в следующей теореме.

Теорема. Пусть выполнены условия: 1) Ω - односвязная область с границей $\Gamma \in C_{2\beta}^1$; 2) внешние силы $R^i (i = \overline{1, 3}), L^k (k = 1, 2) \in L_p(\Omega)$, $P^1, N^1 \in C_\beta(\Gamma)$, $0 < \beta < 1/2$. Тогда для разрешимости рассматриваемой нелинейной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\Gamma} P^1(s) ds + \iint_{\Omega} R^1 d\alpha^1 d\alpha^2 = 0.$$

В случае его выполнения задача имеет обобщенное решение в пространстве соболева $W_p^{(2)}(\Omega)$ с точностью до постоянного слагаемого.

- [1] Тимергалиев С.Н., Углов А.Н., Харасова Л.С. О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для пологих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями // Известия вузов. Математика.-2015.- № 5.-С.49-61.
- [2] Тимергалиев С.Н. Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Известия вузов. Математика.- 2017.- №4.- С. 59-75.
- [3] Kharasova L.S. On the question of the existence of solutions of one nonlinear boundary-value problem for the system of differential equations of the theory of shallow shells of Timoshenko type // IOP Conf. Series: Journal of Physics 1158 (2019) 032011.-PP.1-6.

Эквивалентные нормы в гильбертовых пространствах с безусловным базисом из значений воспроизводящего ядра

Юлмухаметов Р.С., Исаев К.П., Трунов К.В.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Пусть H — гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям:

1. Пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \rightarrow f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$.
2. Пространство H устойчиво относительно деления, то есть если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$.

Из условия 1 следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H . Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ (см. [1]).

Пусть система $\{k(\lambda, \lambda_i)\}_{i=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве H . Тогда биортогональная система состоит из функций

$$L_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

где $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями λ_k , $k = 1, 2, \dots$, называемая порождающей функцией. Эта система также является безусловным базисом (см. [2]).

Мы рассматриваем вопрос о существовании эквивалентной интегрально-весовой нормы с абсолютно непрерывной мерой в гильбертовом пространстве H при условии, что в этом пространстве существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра. Если пространство H исходно задано с помощью интегрально-весовых условий, то эту задачу можно интерпретировать как восстановление исходной структуры. Наиболее подходящей нормой, "восстанавливающей" исходную норму представляется интегральная норма по мере вида

$$\mu(\lambda) = \frac{1}{K(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(\lambda, \lambda_k, r_k) dm(\lambda)}{r_k^2},$$

где $\chi(\lambda, \lambda_k, r_k)$ — характеристическая функция круга $B(\lambda_k, r_k)$, а положительные числа r_k удовлетворяют условию $r_k \leq \frac{1}{2} \text{dist}(\lambda_k, \mathcal{N} \setminus \{\lambda_k\})$, где $\mathcal{N} = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Итак, пусть для последовательности r_k

$$\|F\|_0^2 = \int_{\mathcal{C}} |F(\lambda)|^2 d\mu(\lambda), \quad F \in H. \quad (1)$$

Символом $f(x) \prec g(x)$, $x \in X$, для положительных функций f, g будем обозначать соотношение: существуют постоянная $C > 0$, такая, что

$$g(x) \leq C f(x), \quad \forall x \in X.$$

Аналогичный смысл имеют символы $\succ$ и $\asymp$. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть H — функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором существует безусловный базис $\{k(\lambda, \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ из значений воспроизводящего ядра с порождающей функцией $L(\lambda)$. Если для некоторой последовательности положительных чисел r_k , $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих ограничению $r_k \leq$

$\frac{1}{2} \text{dist}(\lambda_k, \mathcal{N} \setminus \{\lambda_k\})$, интегрально-весовая норма вида (1) эквивалентна норме пространств H , то

$$\sum_{n \neq k} \frac{|L'(\lambda_n)|^2}{K(\lambda_n)} \frac{r_n^2}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} \prec \frac{|L'(\lambda_k)|^2}{K(\lambda_k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Наоборот, если выполнено условие (2), то

$$\|F\| \prec \|F\|_0, \quad F \in H.$$

и

$$\|L_k\|_0 \asymp \|L_k\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-01-00095_А).

- [1] Aronszajn N., "Theory of reproducing kernels", Transactions of the American Mathematical Society, **68** (1950), №3, 337–404.
- [2] Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S., "Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels", Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics, **864** (1981), 214–335.

Научное издание

**"ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ
И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ"
МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**

**«FUNCTION THEORY, OPERATOR THEORY AND
QUANTUM INFORMATION THEORY»**

*Сборник тезисов
(28 сентября – 1 октября 2020 г.)*

**Book of abstracts
of the International Conference**
September 28–October 1, 2020

В авторской редакции

Издательство не несет ответственности за опубликованные материалы.

Все материалы отображают персональную позицию авторов.

Мнение Издательства может не совпадать с мнением авторов

Подписано в печать 21.09.2020 г. Формат 60х84/16.

Печать: цифровая. Гарнитура: Times New Roman

Усл. печ. л. 4,3. Тираж 50. Заказ 1273.



**Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»**

450076, г. Уфа, ул. М. Гафури 27/2

<https://aeterna-ufa.ru>

info@aeterna-ufa.ru

+7 (347) 266 60 68