МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РАН»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Сборник материалов
Международной научной конференции
08-12 июня 2024

УФА
АЭТЕРНА
2024

УДК 517
ББК 22.161
ISBN 978-5-00177-998-8
Т 11

Т 11
Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации: сборник материалов Международной научной конференции (08-12 июня 2024 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2024. – 60 с.

ISBN 978-5-00177-998-8

Представленные в сборнике тезисы посвящены исследованию современных проблем фундаментальной математики. Рассматриваются задачи комплексного анализа, теории аппроксимаций, теории операторов и квантовой теории информации.

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант НОМЦ ПФО, соглашение № 075-02-2024-1444, грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265).

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 517
ББК 22.161

Содержание

An analogue of Hartogs lemma for separately harmonic functions with variable radius of harmonicity

Abdikadirov S.M.

Karakalpak State University and V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Nukus, Uzbekistan

The first result about separately harmonic functions was obtained by Lelong (see [1]).

We have the following Hartogs lemma for separately harmonic functions.

Lemma. Let $u(x,y)$ be a separately harmonic function in the domain $U \times V_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \times \left\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r\right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ and for each fixed $x^0 \in U$ the function $u(x^0, y)$ of variable y continues harmonically into the great circle $\left\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < R\right\}, R > r$. Then the function $u(x,y)$ continues harmonically into the domain $U \times \left\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < R\right\}$ over the set of variables.

For a more accurate result in this direction, it is necessary to introduce a special measure adapted to harmonic functions. This is the measure of $\gamma^*(x, E, D)$.

The h-measure $\gamma^*(x, E, D)$ is more suitable for accurate estimates in contrast to the quantity $h(x, E, D)$ which appears in the works of Hecart [2] and [3].

Let $\mathcal{H}(\widehat{D})$ is the minimal class of plurisubharmonic functions that contains all functions of the form $\alpha \ln |f(z)|$, where $f(z) \in \mathcal{O}(\widehat{D}) \cap h(D), \alpha > 0$, and is closed with respect to the operation "upper regularisation".

The following theorem holds.

Теорема. Let the function $u(x,y)$ be separately harmonic in the domain $D \times V_r = D \times \left\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r, r > 1\right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ and for each $x^0 \in D$ the function $u(x^0, y)$ of variable y continues harmonically into the great circle $\left\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < R(x^0), R(x^0) > r\right\}$. Then the function $u(x,y)$ continues harmonically into the domain $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 : |y| < R_*(x), x \in D\right\}$ over a set of variables, where the function $\ln \frac{1}{R_*(x)}$ is the trace of some plurisubharmonic function from the class $\mathcal{H}(\widehat{D})$.

The last theorem generalizes the above Hartogs lemma.

[1] Lelong P. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables reelles. Ann. Inst. Fourier, Vol. 11, 515-562 (1961).

[2] Hecart J. On Zahariutas extremal functions for harmonic functions. Vietnam. J. Math., Vol. 27, Issue 1, 53-59 (1999).

[3] Hecart J. Harmonicity domains far Separately harmonic functions. Potential. Anal., Vol. 13, 115-126 (2000).

Интегральные неравенства, инвариантные при конформных преобразованиях

Авхадиев Ф.Г.
Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. В этой области определена метрика Пуанкаре $ds = \lambda_\Omega(z)|dz|$ с гауссовой кривизной $\kappa = -4$ и гиперболический радиус $R(z,\Omega) := 1/\lambda_\Omega(z)$. Пользуемся конформно инвариантными характеристиками области, а именно, константой $h(\Omega)$ линейного гиперболического изопериметрического неравенства (см. [1]) и максимальными модулями (см. [2]).

Пусть $p \in [1,\infty)$. Мы определяем и изучаем ряд новых конформно инвариантных характеристик области. Базовой из них являются следующая величина $c_p(\Omega) \in [0,\infty)$, которая представляет собой точную константу в интегральном неравенстве

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geqslant c_p(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

Известно, что $c_p(\Omega) = 2^p/p^p$ для односвязных и двусвязных областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа (см. [1] для случая $p = 2$ и [2] для произвольного $p \in [1,\infty)$). Нами доказаны несколько новых утверждений.

Теорема 1. Пусть $p \in [1,\infty))$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — конечно-связная область, имеющая не менее трех граничных компонент. Тогда следующие три утверждения эквивалентны: 1) хотя бы одна из граничных компонент области Ω является континуумом; 2)$c_p(\Omega) > 0$; 3) $h(\Omega) < \infty$.

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Тогда для любой конечно-связной области G с кусочно-гладкой границей и компактно вложенной в область Ω справедливо неравенство

$$\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leq \frac{1}{2} \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00066).

[1] Osserman R. The isoperimetric inequality. Bull. AMS, **84**:6, 1182-1238 (1978).

[2] Авхадиев Ф.Г. Конформно инвариантные неравенства. Казань: Издательство Казанского униаерситета, 2020.

Грани существенного спектра тензорной суммы моделей Фридрихса

Бахронов Б.И.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ - d-мерный тор, $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Рассмотрим модельный оператор $H_{\mu,\lambda}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ по формуле

$$H_{\mu,\lambda} := H_{0,0} - \mu(V_{11} + V_{12}) + \lambda(V_{21} + V_{22}),$$

где $H_{0,0}$ – оператор умножения на функцию $u(p) + u(q)$:

$$(H_{0,0}f)(p,q) = (u(p) + u(q))f(p,q),$$

а $V_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1,2$ – нелокальные операторы взаимодействия:

$$(V_{\alpha 1}f)(p,q) = v_\alpha(p)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t)f(t,q)dt, (V_{\alpha 2}f)(p,q) = v_\alpha(q)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t)f(p,t)dt.$$

Здесь $f \in L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$, а $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ -вещественнозначные, непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. По определению, операторы $V_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1,2$ являются частично интегральные одномерные операторы с вырожденным ядром.

Пусть $\mathrm{mes}(\cdot)$ - мера Лебега в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, $\mathrm{supp}\{v(\cdot)\}$ - носитель функции $v(\cdot)$,

$$m := \min_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p), M := \max_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p).$$

Определим регулярную в области $\mathbb{C} \setminus [m; M]$ функцию

$$I_\alpha(z) := \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t) - z}.$$

Так как функции $I_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ монотонно возрастает в интервалах $(-\infty; m)$ и $(M; +\infty)$, в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что существуют следующие конечные или бесконечные пределы

$$I_1(m) = \lim_{z\to m-0} I_1(z), \quad I_2(M) = \lim_{z\to M+0} I_2(z).$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема. Предположим, что $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$. Если $|I_1(m)| = +\infty$ и $|I_2(M)| = +\infty$, то во всех значениях параметра $\mu, \lambda > 0$, имеет место неравенства

$$\min \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) < 2m, \quad \max \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) > 2M.$$

Interpolation properties of anisotropic net spaces

Bashirova A.N., Kalidolday A.H., Nursultanov E.D.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Let $\tau \in \mathbb{Z}$, by G_τ we denote the set of segments of the form $[0, 2^\tau\} + k^\tau$, $k \in \mathbb{Z}$. Let $G = \bigcup G_\tau$ be the set of dyadic segments. Let M be a set of parallelipeds of the form

$$Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$$

where $Q_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$. We will call M dyadic net.

For the function $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ integrable on every set $Q \in M$ we define

$$\bar{f}(t; M) = \bar{f}(t_1, ..., t_n; M) = \sup_{|Q_i| \geq t_i} \frac{1}{|Q_n|} \left| \int_Q f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n \right|, \quad t_i > 0,$$

where $|Q_i|$ is the length of the segment Q_i.

Let $0 < \bar{p} = (p_1, ..., p_n) < \infty$, $0 < \bar{q} = (q_1, ..., q_n) \leq \infty$. Denote by $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ the set of all functions $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$, for which

$$\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} = \left(\int_0^\infty \ldots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} ... t_n^{\frac{1}{p_n}} \bar{f}(t_1, ..., t_n; M) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty,$$

here and below, when $q = \infty$, the expression $\left(\int_0^\infty (\varphi(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$ is understood as $\sup_{t>0} \varphi(t)$.

As can be seen from the definition of the space $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, this is the space of functions that have different characteristics for each variable. These spaces are called anisotropic net space.

Let's consider the interpolation method for anisotropic spaces proposed by Nursultanov E.D. [3]. This method is based on the ideas of G.Sparr, D.L. Fernandez. Some results related to the interpolation of anisotropic net spaces were obtained in papers [1], [2].

Theorem. Let M be the dyadic net in $\mathbb{R}^n$, $0<\bar{p}_1=(p_1^1,...,p_n^1)<\bar{p}_0=(p_1^0,...,p_n^0)<\infty$, $0<\bar{q_0},\bar{q},\bar{q_1}\le\infty$, $0<\bar{\theta}=(\theta_1,...,\theta_n)<1$ then

$$(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}}=N_{\bar{p},\bar{q}}(M), \tag{1}$$

where $\frac{1}{\bar{p}}=\frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0}+\frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$.

Acknowledgments This research was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project no. AP14870758).

[1] Bashirova A.N., Kalidolday A.H., Nursultanov E. D. Interpolation theorem for anisotropic net spaces. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 8 (2021), 1–13.

[2] Bashirova A.N., Nursultanov E. D. On the inequality of different metrics for multiple Fourier-Haar series. Eurasian Math. J., 12 (2021), no. 3, 90–93.

[3] Nursultanov E.D. On the coefficients of multiple Fourier series in L_p - spaces. Izv. Math., 64 (2000), no. 1, 93–120.

О классах симметричных и асимметричных логик множеств

Бикчентаев А.М., Мохамед Али М., Фауаз Хаттаб
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, г. Казань, Россия

Пусть Ω – непустое множество. Обозначим через 2^Ω множество всех подмножеств множества Ω. Семейство $\mathcal{E}\subseteq 2^\Omega$ называется *логикой множеств* на Ω, если выполнены условия: (i) $\Omega\in\mathcal{E}$; (ii) $A\in\mathcal{E}\Rightarrow A^c:=\Omega\setminus A\in\mathcal{E}$; (iii) $A\cup B\in\mathcal{E}$ для всех $A,B\in\mathcal{E}$ с $A\cap B=\emptyset$.

Логика множеств $\mathcal{E}$ называется *σ-классом*, если $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{E}$, $A_n\cap A_m=\emptyset$ $(n\ne m)\Rightarrow\cup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{E}$. *Зарядом* на логике множеств $\mathcal{E}$ называется отображение $\nu:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ такое, что $A,B\in\mathcal{E}$, $A\cap B=\emptyset\Rightarrow\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)$. *Мерой* на $\mathcal{E}$ называется заряд ν такой, что $\nu(A)\ge 0$ для всех $A\in\mathcal{E}$. Если $\nu(\Omega)=1$, то мера ν называется *состоянием* (или *вероятностной мерой*). Изучаемые нами σ-классы, а также заряды и меры на них относятся к "обобщенной теории меры", которую можно рассматривать как самую близкую к классической (здесь "классическая" означает на "σ-алгебрах множеств") версию теории меры на квантовых логиках. О квантово-логическом подходе в аксиоматике физических систем см. [1, гл. VI, §5]. Если $\mathcal{E}$ – логика множеств, то множество $\mathcal{S}$ всех состояний на $\mathcal{E}$ полно и пара $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ удовлетворяет всем требованиям к модели физической системы [1, гл. VI, §6].

В [2] мы продолжили исследования, проведенные многими авторами в 1994–2023 гг., уделяя особое внимание классам a) симметричных и b) асимметричных логик множеств. Нами уточнена аксиоматика асимметричных логик. Для логик $X(km, k)$ – семейств всех подмножеств km-элементного множества X, число элементов которых кратно k – полностью описаны случаи, когда $X(km, k)$ a) симметрична или b) асимметрична. Для бесконечного множества Ω и натурального числа $n \geq 2$ построены логики множеств $\mathcal{E}_\Omega^n$ и полностью описаны случаи, когда эти логики асимметричны. Для асимметричной логики $\mathcal{E}$ определено, когда и множество $A \in \mathcal{E}$, и A^c одновременно являются атомами логики $\mathcal{E}$. Пусть симметричная логика $\mathcal{E}$ подмножеств конечного множества Ω не является булевой алгеброй, пусть $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств Ω и $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Тогда существует мера на $\mathcal{E}$, которая не продолжается до меры на $\mathcal{A}$.

[1] Луговая Г.Д., Шерстнев А.Н., *Функциональный анализ: специальные курсы.* М.: Editorial URSS, 2019.

[2] Бикчентаев А.М., Мохамед Али М., Фауаз Х. О классах симметричных и асимметричных логик множеств // Математика и теоретические компьютерные науки, 2 (1), 16–30 (2024)

Payne nodal set conjecture for the fractional p-Laplacian in Steiner symmetric domains

Бобков В.Е.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Let $s \in (0, 1)$ and $p \in (1, +\infty)$. Consider the fractional Sobolev space

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \; [u]_p < +\infty\},$$

where $[\,\cdot\,]_p$ stands for the Gagliardo seminorm:

$$[u]_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \, dxdy \right)^{1/p},$$

and let $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ be the completion of $C_0^\infty(\Omega)$ with respect to the norm $\|\cdot\|_p + [\,\cdot\,]_p$ of $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded open set, $N \geq 1$. It is known that the embedding $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ is compact, and hence one can define a sequence of critical points of the Rayleigh quotient $u \mapsto [u]_p^p/\|u\|_p^p$ using the Ljusternik-Schnirelmann procedure.

Let u be a critical point delivering the second smallest critical value of the Rayleigh quotient. The function u is naturally called a *second eigenfunction* of the fractional Dirichlet p-Laplacian in Ω. It is known that u is a sign-changing function. Assuming only that Ω is Steiner symmetric, we prove that

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u^+, \partial\Omega) = 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u^-, \partial\Omega) = 0,$$

where $u^+ = \max\{u, 0\}$ and $u^- = \min\{u, 0\}$ are positive and negative parts of u, respectively. As a consequence, the nodal set of u also touches the boundary $\partial\Omega$ whenever Ω is connected. This fact can be seen as an analog of the Payne nodal set conjecture for the fractional p-Laplacian. The proof is based on the analysis of equality cases in certain polarization inequalities involving positive and negative parts of u, and on alternative characterizations of second eigenfunctions.

The talk is based on the work [1].

[1] Bobkov V., Kolonitskii S. Payne nodal set conjecture for the fractional p-Laplacian in Steiner symmetric domains, arXiv:2405.06936.

Вопросы существования и единственности локального решения квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто

Бойко К.В., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Рассмотрим вопросы существования и единственности локального решения задачи Коши для квазилинейного уравнения.

Будем рассматривать дробные интегралы Римана — Лиувилля и дробные производные Герасимова — Капуто с началом в точке $t_0 \in \mathbb{R}$: $J_t^\alpha f(t) := \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds$, $D_t^\alpha f(t) = J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t)$, $t > t_0$, где $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A_1, \ldots, A_n$ — замкнутые линейные операторы с областями определения $D_{A_1}, \ldots, D_{A_n}$ соответственно, $r, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $\kappa_i - 1 < \gamma_i \le \kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B : U \to \mathcal{Z}$. Обозначим $\mathcal{D} := \bigcap_{k=1}^n D_{A_k}$, $R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{D}$.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного дробного дифференциального уравнения

$$z^{(l)}(t_0) = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m - 1, \tag{1}$$

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)). \qquad (2)$$

Решением задачи (1), (2) на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем такую функцию $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^{\alpha} z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $\sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, выполняются включение $(t, D_t^{\gamma_1} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \in U$ при $t \in [t_0, t_1]$, равенство (2) для всех $t \in (t_0, t_1]$, а также условия (1).

Введем обозначения $\tilde{z}(t) = z_0 + (t - t_0) z_1 + \cdots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1}$, $\tilde{z}_i = D^{\gamma_i}|_{t=t_0} \tilde{z}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Теорема. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \le m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha, G}$ [1], $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$, при $l = 0, 1, \ldots, m - 1$ $z_l \in \mathcal{D}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B \in C(U; \mathcal{Z})$ локально липшицево по $\bar{x}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r) \in U$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (1), (2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

Работа поддержана Российским научным фондом (грант 24-11-20002).

[1] Федоров В. Е., Бойко К. В. Квазилинейные уравнения с секториальным набором операторов при производных Герасимова — Капуто // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 248–259.

О C_0-полугруппах, порождённых аппроксимантами Иосиды для оператора Вольтерра

Бугров В.О.[1], **Рассадин А.Э.**[2]

[1] Приволжская оперативная таможня, г. Нижний Новгород, Россия;

[2] Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики г. Нижний Новгород, Россия

Пусть A — линейный оператор, отображающий некоторое банахово пространство в себя. В теории аппроксимации C_0-полугрупп часто рассматриваются аппроксиманты Иосиды, связанные с ним следующим образом [1]:

$$A_n = -n\, A\, R_n(A)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \qquad (1)$$

где $R_n(A)$ — резольвента оператора A при $\lambda = n$.

Однако содержательные примеры явного вычисления каких-либо функций от операторов (1) практически неизвестны.

Рассмотрим последовательность операторов (1), когда оператор A является оператором Вольтерра:

$$(Af)(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi\,, \qquad f \in C[\,0,1\,]\,. \tag{2}$$

Подставив определение (2) в формулу (1), получим:

$$(A_n f)(x) = \int_0^x \exp\left(\frac{x-\xi}{n}\right) f(\xi)\, d\xi\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Для последовательности операторов (3) легко найти, что:

$$(e^{A_n t} f)(x) = f(x) + \sqrt{t} \int_0^x \exp\left(\frac{x-\xi}{n}\right) \frac{I_1(2\sqrt{t(x-\xi)}\,)}{\sqrt{x-\xi}}\, f(\xi)\, d\xi\,, \tag{4}$$

где $I_1(\ldots)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Выражение (4) позволяет проиллюстрировать первую аппроксимационную теорему Троттера-Като [1].

Кроме того, для последовательности операторов (3) нетрудно вычислить явно их резольвенты $R_\lambda(A_n)$, а также соответствующие им резольвентные полугруппы $\left(e^{R_\lambda(A_n)\,t}\right)_{t\geq 0}$.

[1] Engel K-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer-Verlag New York, 2000.

Теоремы типа Банга на континуумах

Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В докладе речь идет о вариациях следующей теоремы Банга [1]: *пусть γ спрямляемая жорданова дуга или локально-спрямляемая простая кривая. Предположим, что последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла, и выполняется условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty. \tag{1}$$

Тогда класс

$$C_\gamma(M_n) = \left\{ f \in C^\infty(\gamma) : \sup_{z\in\gamma} \left| f^{(n)}(z) \right| \leq K_f^n M_n \quad (n \geq 0) \right\}$$

является квазианалитическим.

Жорданова дуга γ называется *квазигладкой (в смысле М.А.Лаврентьева)*, если существует постоянная $c = c(\gamma) \geq 1$ такая, что для любой пары точек $z, \xi \in \gamma$ выполняется оценка $|\gamma(z,\xi)| \leq c|z-\xi|$, где $\gamma(z,\xi)$ — часть дуги γ между точками z и ξ.

Теорема 1. *Пусть $\{M_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям: $M_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$, и при некотором $C > 1$*

$$M_{n+1} \leq C^n M_n \qquad (n \geq 0). \tag{2}$$

Пусть, далее, γ — квазигладкая дуга, заданная уравнением $x = g(y)$ $(A \leq y \leq B)$, в каждой точке которой существуют обе односторонние касательные (в концах a и b — только по одной). Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty,$$

то класс

$$C_{00}(M_n;\gamma) = \left\{ f \in C_\gamma(M_n): \ f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b) = 0 \quad (n \geq 0) \right\}.$$

является тривиальным.

Теорема 1 вытекает из теоремы о совпадении классов $C_{00}(M_n;\gamma)$ и $C_{00}(M_n^c;\gamma)$ для квазигладкой дуги γ, которая, в свою очередь, опирается на теорему об оценке промежуточных производных для квазигладкой дуги ([2]). Смысл его в том, что это утверждение является аналогом теоремы Банга для класса $C_{00}(M_n;\gamma)$ на квазигладкой дуге γ в случае произвольных, необязательно возрастающих $M_n > 0$, но удовлетворяющих условию (2).

Теорема 2. *Пусть Γ — кривая, составленная из конечного числа дуг, каждая из которых в соответствующей системе координат являтся дугой ограниченного наклона. Если выполняется условие Мандельбройта-Банга*

$$\text{либо } \varliminf_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty; \qquad \text{либо } \varliminf_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \ \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty,$$

то класс $C_\Gamma(M_n)$ является квазианалитическим.

Теорема 2 обобщает аналогичный результат А. Ф. Леонтьева для кусочно-гладких дуг, а в классе дуг ограниченного наклона усиливает и теорему Банга.

Односвязная ограниченная область G называется *слабо равномерной*, если существует постоянная a, такая, что любую пару точек $z_1, z_2 \in G$ можно соединить дугой $\alpha \subset G$ со свойством:

$$|\alpha| \le a\ |z_1 - z_2| \qquad (|\alpha| - \text{длина } \alpha).$$

Теорема 3. *Пусть $\{M_n\}$ $(M_n > 0)$ — регулярная последовательность. Для того, чтобы для любой слабо равномерной жордановой области G со спрямляемой границей L класс Карлемана*

$$H(G, M_n) = \left\{ f \in H(G) : \sup_{z \in D} \left| f^{(n)}(z) \right| \le c_f A^n M_n \qquad (n \ge 0) \right\}$$

был квазианалитичен в каждой граничной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1).

Достаточность теоремы опирается на теорему Банга и верна для любой логарифмически выпуклой последовательности $\{M_n\}$. Доказательство необходимой части основано на решении задачи Дирихле с неограниченной граничной функцией, где по существу использован один результат Берлинга об оценке гармонической меры (см. [3]).

[1] Bang T. Om quasi-analytiske funktioner. Thesis. Univ. of Copenhagen, 1946.

[2] Гайсин Р.А. Оценка промежуточных производных и теоремы типа Банга. I // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 23–48.

[3] Гайсин Р.А. Универсальный критерий квазианалитичности для жордановых областей // Матем. сборник. 2018. Т. 209. № 12. С. 57–74.

Регулярность роста логарифма модуля суммы ряда Дирихле в полуплоскости сходимости

Гайсин А.М., Гайсин Р.А., Белоус Т.И.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия,

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Доклад посвящен оценке суммы ряда Дирихле, область сходимости которого — полуплоскость, на дуге ограниченного наклона. По определению, дуга $\gamma = \{z = x + iy : y = g(x),\ a \le x \le b\}$ имеет ограниченный наклон, если выполняется условие Липшица

$$\sup_{x_1 \ne x_2} \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = K < \infty. \tag{1}$$

Пусть область сходимости ряда Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{\lambda_n s},\quad s=\sigma+it,\quad 0<\lambda_n\uparrow\infty, \tag{2}$$

— полуплоскость $\Pi_0=\{s:\mathrm{Re}s<0\}$, а γ — любая спрямляемая кривая из полуплоскости Π_0, примыкающая к мнимой оси. В [1] исследовался следующий вопрос: при каких условиях на показатели λ_n хотя бы для какой-то последовательности $\{s_n\}$, $s_n\in\gamma$, при $\sigma_n=\mathrm{Re}s_n\to 0-$

$$\ln|F(s_n)|=(1+o(1))\ln M_F(\sigma_n),$$

где $M_F(\sigma)=\sup\limits_{|t|<\infty}|F(\sigma+it)|$, а $F(s)$ — сумма ряда (2). Оказывается, если γ — дуга ограниченного наклона, то имеет место более сильное соотношение.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность,

$$n(t)=\sum_{\lambda_n\le t}1,\quad N(t)=\int_0^t\frac{n(x)}{x}dx.$$

Обозначим через L класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть W — класс сходимости, φ — фиксированная функция из L,

$$\underline{W}_{\varphi}=\{w\in W:\ \varliminf_{t\to\infty}\varphi(t)J(t;w)=\ 0,$$

$$W_{\varphi}=\{w\in W:\ \lim_{t\to\infty}\varphi(t)J(t;w)=\ 0\},\quad J(t;w)=\int_t^{\infty}\frac{w(x)}{x^2}dx.$$

Теорема 1. Пусть $\varphi\in L$, $w\in W_{\varphi}$, где $w(x)=N(ex)$. Если максимальный член ряда (2) удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{\sigma\to 0-}\frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)}>0 \tag{3}$$

(Φ — функция, обратная к φ), а для некоторой функции $\widetilde{w}\in W_{\varphi}$ выполняются оценки

$$-\ln|Q'(\lambda_n)|\le\widetilde{w}(\lambda_n),\qquad n\ge 1,\qquad Q(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

то для любой дуги γ ограниченного наклона, удовлетворяющей условию (1), при $s \in \gamma$, $\mathrm{Re} s = \sigma \to -1$ по асимптотическому множеству $A \subset [-1, 0)$,

$$DA = \overline{\lim_{\sigma \to 0+}} \frac{\mathrm{m}(\mathrm{A} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{K}^2}},$$

справедливо соотношение

$$\ln |F(s)| = (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma), \quad s \in \gamma, \quad s = \sigma + it. \tag{4}$$

Замечание. Если в теореме 1 функция $N(ex)$ принадлежит классу $\underline{W}_{\varphi}$, а вместо (3) выполняется условие

$$\underline{\lim}_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

то равенство (4) также имеет место при $s \in \gamma$, $\mathrm{Re} s = \sigma \to 0-$ по множеству $A \subset [-1, 0)$, для которого $DA \geq \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}$.

Теорема 1, в отличие от соответствующей теоремы из [1], доказана без дополнительных ограничений на функцию φ. Кроме того, в теореме 1, вместо полуинтервала $[-1, 0)$ рассматривается случай дуги γ ограниченного наклона.

[1] Гайсин А.М. Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости, Изв. РАН, Сер.: Матем. 4, 173–185 (1994).

О полноте C^*-соотношений

Гумеров Р.Н., Шишкин К.А.

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, К(П)ФУ, г.Казань, Россия

В работе Т.А. Лоринга [1] был предложен категорный подход к понятию универсальной C^*-алгебры, порождённой множеством образующих, удовлетворяющих набору соотношений. В рамках этого подхода рассматриваются категории, называемые *C^*-соотношениями.* В этих терминах *универсальная C^*-алгебра, порождённая C^*-соотношением* $\mathcal{R}$, - это инициальный объект в категории $\mathcal{R}$. Вообще говоря, универсальная C^*-алгебра существует не для всякой категории $\mathcal{R}$. Однако, если C^*-соотношение $\mathcal{R}$ *компактно*, то оно определяет универсальную C^*-алгебру.

В [2] было показано, что всякое компактное C^*-соотношение изоморфно категории $*$-полиномиальных соотношений. Иначе говоря, порождающие соотношения для соответствующей универсальной C^*-алгебры могут быть представлены набором инволютивных полиномов от образующих элементов.

В докладе обсуждается следующий результат из работы [3].

Теорема. *Всякое компактное C^*-соотношение $\mathcal{R}$ является полной и кополной категорией.*

[1] T. A. Loring. C^*-algebra relations. Math. Scand. 107, 43–72 (2010).

[2] I. S. Berdnikov, R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva, K. A. Shishkin. On C^*-algebra and $*$-polynomial relations. Lobachevskii J. Math. 44, 1988–1995 (2023).

[3] R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva, K. A. Shishkin. A categorical criterion for the existence of universal C^*-algebras (preprint) (2024).

Динамика полюсов для иерархии Кортевега–де Фриза

Домрин А.В.

Московский Государственный Университет им М.В.Ломоносова

Любое локальное голоморфное решение какого-либо из уравнений, входящих в иерархию Кортевега–де Фриза, можно с точностью до постоянного множителя записать как вторую логарифмическую производную некоторой целой функции от пространственной переменной. Мы покажем, что порядок любого нуля этой целой функции имеет вид $k(k+1)/2$ для некоторого положительного целого k и что при эволюции по n-му потоку иерархии любой нуль указанного порядка с $k > n$ моментально распадается на нули порядков $l(l+1)/2$ для некоторых $l = 1, \ldots, n$. Обсуждаются вопросы о возможных способах такого распада и об устойчивости движения полюсов решений вдоль заданных комплексных кривых в пространстве двух компексных переменных.

Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида

Донцова М.В.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В [1] рассмотрена задача Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1 u(t,x) + b_1 v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2 v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1 u(t,x) + g_1 v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ — неизвестные функции, $a_1,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ g_1$ — известные положительные константы, $a_2,\ g_2$ — известные константы, с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

В [1] получена система интегральных уравнений:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (a_1 w_1 + b_1 w_3)d\tau) + \int\limits_0^s (a_2 w_1 + b_2 w_3)d\tau, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (c_1 w_4 + g_1 w_2)d\tau) + \int\limits_0^s g_2 w_2 d\tau, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t (a_1 w_1 + b_1 w_3)d\tau), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t (c_1 w_4 + g_1 w_2)d\tau). \tag{6}$$

Теорема. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$ и выполняются условия

$$a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ c_1 > 0,\ g_1 > 0,\ \varphi_1'(x) \ge 0,\ \varphi_2'(x) \ge 0.$$

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

[1] Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 71–82.

Characterisation of information-theoretic properties of Clifford channels

Elovenkova M.
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

It turned out that channels described by stabilizer circuits without classical control, which we call non-adaptive Clifford channels, have especially simple structure and information-theoretic properties. Characterization of Clifford channels in terms of three equivalent descriptions could be given: by complete stabilizer preserving property, by the stabilizerness of Choi state, by stabilizer circuit representability. The channel is Clifford isometry if it is completely pure stabilizer preserving, or if its Choi state is pure stabilizer, or if it is represented by an isometry stabilizer circuit. Complete stabilizer preserving property follows already from the usual stabilizer preserving property. If the channel maps pure stabilizer states to pure stabilizer states, it may be either a state reset channel or a Clifford isometry. Clifford channels have particularly simple structure: up to Clifford unitary encoding and decoding operations, they can be represented as a product of qubit discardings, initial state $|0\rangle$ and chaotic state χ preparations, identity channels and full dephasing channels. That leads to their simple information-theoretic structure: channel capacities depend only on the number of identity and dephasing channels in the normal form.

[1] Vsevolod I. Yashin, Maria A. Elovenkova, Characterization of non-adaptive Clifford channels *arXiv:2311.06133*

C^1- Ω-stability of skew products of circle maps

Efremova L.S.
Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod;
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

We formulate and prove the C^1- Ω-stability criterion of circle maps on $3D$-tori.

We also give the example of the C^1-smooth Ω-stable skew product of circle maps on 3D-torus and study the approximating properties in the C^1-norm of maps under consideration (see [1]).

This research is supported by Russian Science Foundation (RSF), grant No 24-21-00242, https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/.

[1] Efremova L.S. *C^1-smooth Ω-stable skew products and completely geometrically integrable self-maps of 3D-tori, I: Ω-stability*, RCD, **29**:3 (2024) (to appear).

Description of the essential spectrum of operator matrix in bosonic Fock space

Jurakulova F.M.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

Let $\mathbb{T}$ be the one-dimensional torus, $\mathcal{H}_0 := C$ be the field of complex numbers, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}$ and $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square-integrable symmetric (complex) functions defined on $\mathbb{T}^2$. We denote by $\mathcal{H}$ the direct sum of spaces $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$, that is, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

In the Hilbert space $\mathcal{H}$ we consider the operator matrix of the form

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & \mu A_{12} \\ 0 & \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \ \mu > 0. \tag{1}$$

The matrix entries $\mathcal{A}_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0, 1, 2$ are given by

$$A_{00} f_0 = a f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t) f_1(t) dt, \quad (A_{11} f_1)(x) = f_1(x),$$

$$(A_{12} f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} f_2(x, t) dt, \quad (A_{22} f_2)(x, y) = w(x, y) f_2(x, y),$$

where the function $w(\cdot, \cdot)$ is defined on $\mathbb{T}^2$ by

$$w(x, y) := 3 - \cos x - \cos y - \cos(x + y), \ f_i \in \mathcal{H}_i, \ i = 0, 1, 2,$$

and A_{ij}^* denotes the adjoint operator to A_{ij} for $i < j$, that is,

$$(A_{01}^* f_0)(x) = v(x) f_0, \ (A_{12}^* f_1)(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_1(y)), \ f_i \in \mathcal{H}_i, \ i = 0, 1.$$

Under these assumptions the operator matrix $\mathcal{A}_\mu$ is a bounded and self-adjoint in $\mathcal{H}$.

We introduce so-called channel operator $\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{ch}}$ acting in $L_2(\mathbb{T}) \oplus L_2(\mathbb{T}^2)$ as a 2×2 operator matrices

$$\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{ch}} := \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} A_{12} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

with $(A_{12}^* f_1)(x) = f_1(x)$, $f_1 \in \mathcal{H}_1$.

In the following theorem we describe the essential spectrum of $\mathcal{A}_\mu$.

Theorem. The essential spectrum of $\mathcal{A}_\mu$ is coincide with the spectrum of $\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{ch}}$, that is, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \sigma(\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{ch}})$. Moreover the set $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ consists no more than three bounded closed intervals.

Since the operator matrix $\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{ch}}$ has a simple structure than $\mathcal{A}_\mu$, the main theorem plays an important role in the next investigations of $\mathcal{A}_\mu$.

О глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейного уравнения с дробными производными и секториальным оператором

Захарова Т.А.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, D^α — оператор дробного дифференцирования Герасимова — Капуто, $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Решением задачи Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \ldots, D^{\alpha_n} z(t)) \tag{2}$$

на отрезке $[t_0, T]$ будем называть такую функцию $z \in C((t_0, T]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, что $D^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_l} z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, выполняется равенство (2) при $t \in (t_0, T]$ и условия (2).

При $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \geq 0$ обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ класс линейных замкнутых плотно определенных в $\mathcal{Z}$ операторов A, действующих в $\mathcal{Z}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0,\ \lambda \neq a_0\}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta, a} \quad \|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Теорема [1]. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \le m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \ge 0$, $z_k \in D_A$, $k = 0, \dots, m-1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n; D_A)$ липшицево по $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение на $[t_0, T]$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015, https://rscf.ru/project/24-21-20015/.

[1] Fedorov V.E., Zakharova T.A. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov — Caputo derivatives // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol.44, no.2. P.595–606.

Альтернативно полные системы бесконечномерных гильбертовых пространств

Избяков И.М., Новиков С.Я., Терёхин П.А.

Самарский национальный исследовательский университет, г. Самара, Россия;

Саратовский национальный исследовательский университет, г. Саратов, Россия

Пусть $\mathcal{H}$ — вещественное или комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ — система элементов пространства $\mathcal{H}$ и $\overline{\operatorname{span}}\, \Phi$ — замыкание в пространстве $\mathcal{H}$ линейной оболочки системы Φ.

Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется полной в пространстве $\mathcal{H}$, если $\overline{\operatorname{span}}\, \Phi = \mathcal{H}$.

Будем говорить, что система элементов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ пространства $\mathcal{H}$ обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для любого подмножества $I \subset \mathbb{N}$ имеем $\overline{\operatorname{span}}\, \{\varphi_n\}_{n\in I} = \mathcal{H}$ или $\overline{\operatorname{span}}\, \{\varphi_n\}_{n\notin I} = \mathcal{H}$.

Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется переполненной в пространстве $\mathcal{H}$, если для каждого бесконечного подмножества $I \subset \mathbb{N}$ имеем $\overline{\operatorname{span}}\, \{\varphi_n\}_{n\in I} = \mathcal{H}$.

Очевидно, что свойство (АП) занимает промежуточное положение между свойствами полноты и переполненности (сильнее первого, но слабее последнего).

Свойство альтернативной полноты оказалось важным в решении задачи восстановления сигнала по модулям измерений. Рассмотрены связи между фреймами и перечисленными системами в бесконечномерных гильбертовых пространствах. Использование банаховых фреймов, обобщающих классическое определение фрейма гильбертова пространства [1], позволило построить систему представления из ядер Сегё в пространстве Харди H^2.

[1] Christensen O., An introduction to frames and Riesz bases. New York: Appl. Numer. Harmon. Anal. , Birkhäuser/Springer, 2016.

Description of the essential spectrum of operator matrix in fermionic Fock space

Ismoilova D.E.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

Let $\mathbb{C}$ be the field of complex numbers, $\mathbb{T}^d$ be the d-dimensional torus, $L_2(\mathbb{T}^d)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}^d$ and $L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^d)^2)$ be the Hilbert space of anti-symmetric functions of two variables defined on $(\mathbb{T}^d)^2$. We denote

$$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d), \quad \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d) \oplus L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^d)^2).$$

We consider the operator matrix in the space $\mathbb{C} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ as

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

where the matrix elements A_{ij} are defined by

$$\mathcal{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \mathcal{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t) dt,$$

$$(\mathcal{A}_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1^{(\mathrm{s})}(k_1), (\mathcal{A}_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1, t) dt,$$

$$(\mathcal{A}_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1, k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2),$$

$$\{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))).$$

To study the spectral properties of $\mathcal{A}$ we introduce the following four bounded self-adjoint operators $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}, m = 1, 2, s = \pm$, which acts in $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ and $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$, respectively, as

$$\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

Theorem : The following relationship exists between the essential spectrum of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}^{(-)}),$$

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}) = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^d} \omega(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) \cup [\mathrm{s}\varepsilon + 2m, \mathrm{s}\varepsilon + 2M].$$

Here

$$m := \min_{k_1 \in \mathbb{T}^d} \omega(k_1), \quad M := \max_{k_1 \in \mathbb{T}^d} \omega(k_1).$$

Об обобщении теоремы Вейерштрасса

Кабанко М.В., Малютин К.Г.[*]

Курский государственный университет, г. Курск, Россия

([*]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).)

Рассматривается представление целой функции в виде канонического произведения, которое является обобщением факторизационной теоремы Вейерштрасса. Получено обобщение теоремы Бореля о порядке канонического произведения. Приведены примеры, которые показывают эффективность применения рассматриваемой теории к практическим вопросам. Результаты частично опубликованы в [1]. Целью работы является получить формулы для целых функций, рост которых определяется максимумом модуля заданной целой функцией F. Обозначим через

$$M(r) := M(r, F) = \max_{|z|=r} |F(z)|$$

— максимум модуля функции F на окружности $|z| = r$. Известно, что $\ln M(e^r)$ является выпуклой функцией. Поэтому функция $M(r)$ является модельной функцией роста в смысле определения, введенного Хабибуллиным [2]. Мы используем функцию $M(r)$ для оценки роста целых функций, а функцию F для их канонического представления, обобщающего известную факторизационную теорему Вейерштрасса.

Теорема 1. Любую целую функцию f можно представить в виде

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{F(z)}{F(a_n)}; p_n\right) \quad (\omega \le \infty)\,, \tag{1}$$

где g — целая функция, $a_n \neq 0$ – нули f и m — кратность нуля f в точке $z = 0$, G — канонический множитель Вейерштрасса.

[1] Malyutin K., Kabanko M. On the Proximate Order with Respect to the Model Function // March 2024, Journal of Mathematical Sciences DOI:10.1007/s10958-024-06957-w

[2] Хабибуллин Б.Н. Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета. — Т. 5, № 1. — 2020. — С. 1–5.

Парные корреляции нулей дзета-функции Римана и возмущения самосопряженных операторов.

Капустин В.В.

Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН, г. С.-Петербург, Россия

В докладе представлены результаты совместной работы с Д.Н. Запорожцем.

Классический результат Х.Монтгомери [1] состоит в том, что для последовательности нулей дзета-функции Римана преобразование Фурье функции парных корреляций имеет вид $|t|$ на интервале $(-1, 1)$. Согласно недавнему результату автора [2], само множество нулей дзета-функции после разворота на вещественную прямую реализуется как спектр одномерного несамосопряжённого возмущения самосопряжённого оператора с регулярным спектром. Естественно возникает вопрос: можно ли достичь выполнения свойства Монтгомери с помощью одномерного самосопряжённого возмущения? Основным результатом доклада является отрицательный ответ на этот вопрос; более того, возмущающий оператор при этом не может иметь конечный ранг.

[1] Montgomery H.L. The pair correlation of zeros of the zeta function. Analytic number theory, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV, AMS, Providence, R.I., 1973, 181–193.

[2] Капустин В.В. Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора. Алгебра и анализ, **33** (2021), вып.4, 107–124.

Коэрцитивные свойства и разделимость для трижды гармонического оператора с матричным потенциалом

Каримов О.Х.

Институт математики им.А.Джураева НАНТ, г.Душанбе, Таджикистан

Термин "разделимость"в теорию дифференциальных оператор был введён В.Н.Эвериттом и М.Гирцом. Они в основном исследовали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см. [1]- [4] и имеющиеся там ссылки).

В докладе речь идёт о коэрцитивных свойствах и разделимости для трижды гармонического оператора с матричным потенциалом.

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^n)^l$ дифференциальное уравнение

$$\Delta^3 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\Delta-$оператор Лапласа, $V(x,\omega) \in C^1(R^n \times C^l; EndC^l)$.

Найдены условия на матрицу-функцию $V(x,\omega)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_2(R^n)^l$, и для всех решений $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^6_{2,loc}(R^n)^l$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)^l$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|\Delta^3 u(x); L_2(R^n)^l\| + \|V(x,u(x))u(x); L_2(R^n)^l\| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \|V^{\frac{1}{2}}(x,u(x)) \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i^3}; L_2(R^n)^l\| \leq M\|f(x); L_2(R^n)^l\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

[1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

[2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n.-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

[3] E.M.E.Zayed and Saleh Omram. Separation for Triple-Harmonic Differential Operators in Hilbert Space. International J.Math.Combin, 2010. v.4, pp. 13-23.

[4] Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом.-Уфимский математический журнал, 2017, т.9, No1, с.55-62.

Однопараметрическое семейство конформных отображений кольца на двусвязный многоугольник

Колесников И.А.

НИ Томский государственный университет, г.Томск, Россия

В работе рассматривается семейство двусвязных многоугольников, получаемое из некоторого начального многоугольника движением его вершин при условии сохранения углов. Семейство многоугольников может получаться, например параллельным сдвигом одной из сторон (нескольких сторон) двусвязного многоугольника, или проведением разреза (разрезов). Решается задача о построении семейства конформных однолистных отображений кольца на такое семейство двусвязных многоугольников. Для представления семейства используется формула Кристоффеля–Шварца, таким образом, задача заключается в определении акцессорных параметров, входящих в формулу Кристоффеля–Шварца. Для семейства отображений кольца на семейство двусвязных многоугольников получено дифференциальное уравнение по параметру t, отвечающему за движение вершин. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно акцессорных параметров семейства отображений.

Данный результат позволяет пошагово строить конформное отображение кольца на заданный двусвязный многоугольник. Результат обобщает метод, предложенный в [1]. Метод идейно близок к методу П.П. Куфарева [2], обобщенному на случай двусвязных областей в работе [3].

[1] Колесников И.А. *Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца* // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 784–802.

[2] Куфарев П.П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля // ДАН СССР. 1947. Т. 57, № 6. С. 535–537.

[3] Dyutin A., Nasyrov S. One parameter families of conformal mappings of bounded doubly connected polygonal domains // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. V. 45, № 1. P. 390–411.

Универсальная C^*-алгебра, порожденная конусом в группе рациональных чисел

Куклин А.С.[1], **Липачева Е.В.**[1,2]
[1]Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, КФУ, г.Казань, Россия
[2]Казанский государственный энергетический университет, г.Казань, Россия

В докладе будут обсуждаться приведенные полугрупповые C^*-алгебры $C_r^*(G^+)$ для положительных конусов G^+ в упорядоченных абелевых группах G. Такие C^*-алгебры рассматривались Мерфи в работе [1], где, в частности, было доказано свойство универсальности регулярного изометрического представления положительного конуса G^+.

Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ – произвольная последовательность простых чисел, $\mathbb{Q}_P^+$ – положительный конус в аддитивной группе рациональных чисел

$$\mathbb{Q}_P = \left\{ \frac{m}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

В статье [2] изучалась приведенная полугрупповая C^*-алгебра $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. В частности, в ней было показано, что $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ является прямым пределом индуктивной последовательности алгебр Теплица.

В докладе будет дано описание C^*-алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ как универсальной C^*-алгебры $C^*(X, R)$, порожденной множеством образующих X и набором соотношений R. Мотивацией к такому описанию послужило представление ее в виде индуктивного предела алгебр Теплица в работе [2].

Доклад основан на разультатах совместной работы [3].

[1] *Murphy G.J.* Ordered groups and crossed products of C^*-algebras. Pacific J. Math. **2**, 319–349 (1991).

[2] *Гумеров Р.Н.* Предельные автоморфизмы C^*-алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел. **59**(1), 95–109 (2018).

[3] *Gumerov R.N., Kuklin A.S., Lipacheva E.V.* A universal property of semigroup C^*-algebras generated by cones in groups of rationals (preprint) (2024).

Resonance properties of a beam with a moving boundary

Litvinov V.L.
Samara State Technical University, Russia, Samara

The approximate Kantorovich-Galerkin method is considered in relation to solving a problem describing the oscillations of a beam with a moving boundary lying on an elastic foundation. The mathematical formulation of the problem includes a partial differential equation with respect to the desired displacement function and inhomogeneous boundary conditions. The Kantorovich-Galerkin method [3] allows one to take into account the initial conditions, but they do not affect the resonant properties of linear systems, so they are not taken into account in this case. The solution is made in dimensionless variables up to second-order values of smallness relative to small parameters characterizing the speed of motion of the boundary. The results obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the nth dynamic mode are presented, which makes it possible to use the results obtained to analyze the oscillations of technical objects with moving boundaries.

One-dimensional systems, the boundaries of which move, are widespread in technology: ropes of lifting installations, flexible gear links, solid fuel rods, drill strings [1, 2], etc. The presence of moving boundaries causes significant difficulties in describing such systems. Of the analytical methods, the most effective is the method that consists in selecting new variables that stop the boundaries and leave the wave equation invariant. However, exact solution methods are limited to the wave equation and relatively simple boundary conditions, so in the case of moving boundaries, approximate solution methods are mainly used. Thus, the application of the Kantorovich-Galerkin method allows one to obtain a relatively simple expression for the amplitude of forced vibrations of a rod of variable length, which allows the results obtained to be used to analyze the vibrations of technical objects with moving boundaries.

[1] Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a thread of variable length // Nauk.dumka, Kyiv, 1962, P.332.

[2] Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, M., 2001, P.320.

[3] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2018. No. 2. P.70–77.

Краевая задача с обобщенными условиями типа Штурма для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом

Мажгихова М.Г.
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где $D_{0t}^{\alpha}u(t)$ – дробная производная Римана–Лиувилля [1, с. 11], $\alpha \in (n-1, n]$, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-n}u(t) \in C^n(0,1)$, $u(t) \in L(0,1)$, удовлетворяющую этому уравнению для всех $0 < t < 1$.

В работе для уравнения (1) высокого порядка строится решение задачи:

Задача. *Найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_i, \quad i = \overline{1,p}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk} \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = d_j, \quad j = \overline{1,q}, \end{cases} \tag{2}$$

причем $p + q = n$, a_{ik}, b_{jk}, c_i, d_j *– заданные постоянные.*

Доказана теорема существования и единственности решения для исследуемой задачи (1), (2).

[1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Об одном приложении интерполирующей функции Леонтьева.

Малютин К.Г.
Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Рассматривается уравнение

$$\int_{-q}^{q} F(\theta - u) d\sigma(u) = 0, \tag{1}$$

где σ — конечная (знакопеременная) мера, носитель которой содержит точки $-q$ и q. То, что рассматривается симметричный сегмент $[-q, q]$ — это несущественное ограничение. Случай, когда мера σ — не финитная, также является предметом многочисленных исследований. Результаты применяются, в частности, для изучения уравнения Винера-Хопфа. В связи с уравнением (1) А.Ф. Леонтьев [1] по произвольной непрерывной функции F строит функцию

$$\omega(\mu, \alpha, F) = -ie^{-i\alpha\mu} \int_{-q}^{q} \int_{0}^{t} F(\xi + \alpha - t) e^{-i\mu\xi} d\xi d\sigma(t),$$

которую он называет интерполирующей. Если λ_k — корень кратности n_k функции $L(\lambda)$, то для любой функции F справедливо равенство

$$P_k(z) e^{i\lambda_k z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, F)}{L(\mu)} e^{-i\mu z} d\mu, \tag{2}$$

где $P_k(z)$ — некоторый полином степени не выше $n_k - 1$, C_k — окружность с центром в точке λ_k такая, что замкнутый круг, ограниченный этой окружностью, не содержит других корней функции $L(\lambda)$. Величина $P_k(z)$ называется коэффициентом Фурье функции F, отвечающим корню λ_k характеристического уравнения.

Доказывается утверждение, которое уместно назвать теоремой об обращении в ноль коэффициента Фурье.

Теорема 1. Пусть F — непрерывное на всей оси решение уравнения (1), $L(\lambda)$ — характеристическая функция этого уравнения, λ_k — её корень. Пусть для некоторого вещественного τ выполняется неравенство $|F(t)| \le M(\tau) e^{\tau|t|}$, $t \in (-\infty, 0)$ ($t \in (0, \infty)$). Если, кроме того, $\mathrm{Im}\ \lambda_k > \tau$ ($\mathrm{Im}\ \lambda_k < -\tau$), то коэффициент Фурье $P_k(z)$ функции F равен нулю.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

[1] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука ГИФМЛ, 1976.

Дискретизации пространств и алгебры Роу

Мануйлов В.М.
МГУ, г. Москва, Россия

Алгебры Роу играют важную роль в теории индекса эллиптических операторов на некомпактных многообразиях и их обобщениях. Для симплициального комплекса X с естественной метрикой мы рассматриваем множества Делоне D_n, $n \in \mathbb{N}$, (дискретные сети), образованные вершинами специальных подразбиений симплексов. Цель доклада — описать связи между алгеброй Роу пространства X и равномерными алгебрами Роу ее дискретизаций D_n.

Наш первый результат состоит в построении непрерывного поля C^*-алгебр над $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ таким образом, что слой над ∞ является алгеброй Роу пространства X, а слой над точкой $n \in \mathbb{N}$ является равномерной алгеброй Роу дискретизации D_n пространства X.

Второй результат состоит в построении прямого предела равномерных алгебр Роу дискретизаций D_n пространства X и вложение этого прямого предела в алгебру Роу пространства X, который естественно считать равномерной алгеброй Роу недискретного пространства.

Указанные результаты изложены в статье [1]. Исследование поддержано грантом РНФ 23-21-00068.

[1] V. M. Manuilov. *Relating the Roe algebra of a space to the uniform Roe algebras of its discretizations*, Lobachevskii J. Math. **45** (2024), в печати.

Описание одного класса быстро убывающих функций

Мусин И.Х.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – семейство функций $\mathcal{N}_\nu : \mathbb{Z}_+^n \to (0,\infty)$ таких, что:

i_1) существует число $Q > 1$ такое, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$ при некотором $l_\nu > 0$

$$l_\nu Q^{|\alpha|} \mathcal{N}_\nu(\alpha) \le \mathcal{N}_{\nu+1}(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

i_2) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ найдутся числа $s_\nu \in \mathbb{N}$ и $A_\nu, B_\nu > 0$ такие, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\max_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| = 2m} \mathcal{N}_\nu(\alpha) \le A_\nu B_\nu^m \min_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n : |\beta| = m} \mathcal{N}_{\nu+s_\nu}^2(\beta).$$

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ определим пространство

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{N}_\nu} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{N}_\nu(\alpha)} < \infty\}.$$

Пусть $\mathcal{S}^{\mathcal{N}_\nu} := \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_m^{\mathcal{N}_\nu}$. Положим $\mathcal{S}^{\mathcal{N}} := \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{S}^{\mathcal{N}_\nu}$.

Теорема. Функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}^{\mathcal{N}}$ тогда и только тогда, когда существуют числа $p \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$|(D^\beta f)(x)| \le C\mathcal{N}_p(\beta), \ \beta \in \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}^n.$$

Задача Коши для уравнения с интегро-дифференциальным оператором Капуто — Фабрицио

Нагуманова А.В., Федоров В.Е.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $T > 0$, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $z \in C^1((0,T);\mathcal{Z})$. Производной Капуто — Фабрицио порядка $\alpha \in (0,1)$ [1] будем называть интегро-дифференциальный оператор вида

$$D^\alpha z(t) = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)} z'(\tau)d\tau, \quad t \in (0,T).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \tag{1}$$

$$z(0) = z_0, \tag{2}$$

где D^α — производная Капуто — Фабрицио, $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C([0,T],\mathcal{Z})$. Решением задачи Коши (1), (2) назовем $z \in C([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1((0,T];\mathcal{Z}) \cap W_1^1(0,T;\mathcal{Z})$, для которого выполняется равенство (1) при $t \in [0,T]$ и условие (2).

При условии $\frac{1}{1-\alpha} \in \rho(A)$ для достаточно большого $r > 0$ определим

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r} \left(\frac{\mu}{\mu(1-\alpha)+\alpha} - A\right)^{-1} \frac{e^{\mu t}}{\mu} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}), \quad t \ge 0.$$

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\frac{1}{1-\alpha} \in \rho(A)$, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$, $z_0 \in \mathcal{Z}$, $Az_0 + f(0) = 0$. Тогда функция

$$z(t) = z_0 + \left(\frac{1}{1-\alpha} - A\right)^{-1} f(t) + Z(t)Az_0 + \int\limits_0^t \frac{d}{dt} Z(t-s)f(s)ds,$$

является единственным решением задачи Коши (1), (2).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015, https://rscf.ru/project/24-21-20015/.

[1] **Caputo M., Fabrizio M.** A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progress in Fractional Differentiation and Applications. 2015. Vol. 1, no. 2. P. 73–85.

Представление в виде частного дельта-субгармонической функции в полукольце

Наумова А.А.

Курский государственный университет, г. Курск, Россия
(Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).)

Рассматриваются дельта-субгармонические функции $v \in \delta S(D_+(R))$ в неограниченном открытом полукольце $D_+(R) = \{z : |z| > R, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, рост которых определяется положительной, непрерывной, возрастающей и неограниченной функцией $\gamma(r)$, определенной на $[0, \infty)$ (функцией роста).

Функция $v \in \delta S(D_+(R))$ называется функцией конечного γ-типа, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что

$$T(r, v) \leq \frac{A}{r}\gamma(Br)$$

для всех $r > r_0$. Пространство дельта-субгармонических функций конечного γ-типа обозначается как $\delta S(R, \gamma)$. Через $S(R, \gamma)$ обозначается подпространство субгармонических функций конечного γ-типа, $S(R, \gamma) \subset \delta S(R, \gamma)$. Доказывается, что

$$\delta S(R, \gamma) = S(R, \gamma)/S(R, \gamma)\,.$$

Полученный результат распространяет аналогичное утверждение для полуплоскости из работы [1] на неограниченное полукольцо.

[1] Малютин К.Г. Ряды Фурье и $\delta-$субгармонические функции конечного $\gamma-$типа в полуплоскости. // Мат. сб. 2001. Т. 192, No 6. С. 51–70. doi: 10.4213/sm572.

Анализ спектра обобщенной модели Фридрихса в нецелочисленной решетке

Неъматова Ш.Б.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}_h = (-\frac{\pi}{h}; \frac{\pi}{h}]$ - одномерный тор с высотой h, $\mathbb{C}-$ одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T}_h)-$ гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h$ и $\mathcal{H}$ прямая сумма пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}_h)$.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим обобщенную модель Фридрихса

$$\mathcal{A}(h) := \begin{pmatrix} A_{00}(h) & A_{01}(h) \\ A_{01}^*(h) & A_{11}(h) \end{pmatrix}$$

с матричными элементами $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$:

$$A_{00}(h)f_0 = \omega_0(h)f_0,\ A_{01}(h)f_1 = \int_{\mathbb{T}_h} v_h(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(h)f_1)(x) = \omega_1(h)f_1(x).$$

Здесь $\omega_0(\cdot), \omega_1(\cdot)-$вещественнозначные ограниченные функции определенные в $(0; +\infty)$, а $v_h(\cdot)$ вещественнозначная ограниченная функция определенные в $\mathbb{T}_h$. В этих предположениях операторная матрица $\mathcal{A}(h)$ является линейным, ограниченным и самосопряженным в $\mathcal{H}$.

Из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}(h)$ будет равна $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}(h)) = \{\omega_1(h)\}$. Здесь число $\omega_1(h)$ являются бесконечно кратное собственное значение операторной матрицы $\mathcal{A}(h)$.

Рассмотрим квадратный трехчлен:

$$\Delta_h(z) := z^2 - (\omega_0(h) + \omega_1(h))z + \omega_0(h)\omega_1(h) - \|v_h\|^2.$$

Обычно, функция $\Delta_h(\cdot)$ называется определителем Фредгольма соответствующий операторной матрице $\mathcal{A}(h)$.

Следующая теорема установить связь между собственнами значениями оператора $\mathcal{A}(h)$ и нулями функции $\Delta_h(\cdot)$.

Теорема. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}(h))$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}(h)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_h(z) = 0$.

Спектр оператора $\mathcal{A}(h)$ состоит из трех собственных значений $e(h)$, $E(h)$ и $\omega_1(h)$. Причем число $\omega_1(h)$ является бесконечнократным собственным значением, а числа $e(h)$ и $E(h)$ являются простыми собственными значениями оператора $\mathcal{A}(h)$.

Число и местоположение собственных значений модельного оператора, соответствующего системе двух частиц на решетке

Норкулов О.М.

Самаркандский институт экономики и сервиса, г. Самарканд

Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ - d-мерный тор, а $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ рассмотрим оператор H_μ, действующий по формуле

$$H_\mu := H_0 - \sum_{\alpha=1}^{n} \mu_\alpha V_\alpha.$$

Здесь H_0 – оператор умножения на функцию $u(\cdot)$ в $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, т.е. $(H_0 f)(x) = u(x)f(x)$, а V_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ – нелокальные операторы взаимодействия вида

$$(V_\alpha)f(x) = v_\alpha(x) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t) f(t) dt, \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

При этом $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot), \alpha = 1, ..., n$ – вещественнозначные непрерывные функции, определенные на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Предпологается, что $v_1(\cdot), \ldots, v_n(\cdot)$ линейно независимы. Отметим, что оператор H_μ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$.

Из теоремы Вейля о сохронении существенного спектра вытекает, что существенный спектр оператора H_μ совпадает с существеным спектром оператра H_0, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu) = \sigma_{\text{ess}}(H_0)$.

Известно, что оператор H_0 является оператором умножения на функцию $u(\cdot)$, поэтому этот оператор имеет чисто существенный спектр и $\sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [m; M]$, где числа m и M определяется как

$$m := \min_{x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(x), \quad M := \max_{x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(x).$$

Согласно выше указанных следует, что существенный спектр оператора H_μ не зависит от вектора-параметра μ и имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu) = [m; M]$.

Теорема. Пусть для некоторого числа $k(1 \le k < n)$ найдутся такие числа $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, , \ldots, n\}$, что $\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_k} > 0$ и для произвольного индекса $\alpha \in \{1, 2, .., n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ имеет место $\mu_\alpha < 0$. Тогда оператор H_μ имеет не более k собственных значений (с учетом кратности), лежащих слева от m и не более $n-k$ собственных значений (с учетом кратности), лежащих справа от M.

Спектральный анализ дифферециального оператора четвертого порядка с параметром в краевом условии

Поляков Д.М.

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН, г. Владикавказ; Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$ рассматривается следующая спектральная задача

$$(A) : y^{(4)}(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) + \lambda y(1) = 0,$$

где λ — спектральный параметр и $q \in L_1(0, 1)$ является вещественной функцией.

С физической точки зрения задача (A) возникает при описании колебаний балки с шарнирным закреплением на левом конце и грузом на правом конце (см. [1]). Асимптотика собственных значений и формула следа для задачи (A) с дополнительным неограниченным операторным коэффициентом была рассмотрена в [2]. В настоящей работе рассматривается частный случай этой задачи без операторного коэффициента. Будет установлена асимптотика собственных значений и формула следа для задачи (A).

Введем следующие обозначения

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \widehat{f}_{cn} = \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x\,dx,$$

для некоторой функции $f \in L_1(0, 1)$.

Теорема. Пусть $q \in L_1(0, 1)$. Тогда собственные значения μ_n спектральной задачи (A) допускает следующую асимптотику

$$\mu_n = (\pi n)^4 + 2(\pi n)^2 - \pi n + \frac{5}{6} + q_0 - \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \to +\infty,$$

Если дополнительно предположить, что $q' \in L^1(0,1)$, то имеет место следующая формула

$$\mu_n = (\pi n)^4 + 2(\pi n)^2 - \pi n + \frac{5}{6} + q_0 - \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n \to +\infty.$$

Эта теорема усиливает соответствующий результат из [2, Theorem 3.1].

[1] Roseau M. Vibrations in mechanical systems. Analytical methods and applications. Berlin: Springer, 1987.

[2] Aslanova N. M., Bayramoglu M., Aslanov Kh. M. Some spectral properties of fourth order differential operator equation. Oper. Matr. 2018. V. 12. P. 287–299.

Об одном методе рациональных аппроксимаций интегралов типа Римана–Лиувилля на отрезке

Поцейко П.Г., Ровба Е.А.

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г.Гродно, Республика Беларусь

Функции, представимые интегралом Римана–Лиувилля, нашли применение в различных областях науки и техники и широко используются в теории рациональной аппроксимации [1, 2]. С их помощью были найдены новые классы непрерывных функций, скорость равномерной рациональной аппроксимации на которых выше соответствующих полиномиальных аналогов.

В рациональной аппроксимации изучаются [3, 4] операторы Фейера, Валле Пуссена, Джексона, являющиеся аналогами известных полиномиальных периодических операторов, основанных на рядах Фурье и методах их суммирования. В 1979 году Е. А. Ровба [5] ввел интегральный оператор на отрезке $[-1, 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Целью настоящей работы является исследование рациональных аппроксимаций интегралов типа Римана–Лиувилля, основанное на представлении его плотности рациональным интегральным оператором Фурье –Чебышёва. Получены поточечные и равномерные оценки приближений и установлена зависимость оценок от выбора полюсов аппроксимирующей рациональной функции и положения точки на отрезке. Причем на концах отрезка скорость выше чем в целом на отрезке.

[1] Старовойтов А.П. Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных аппроксимаций дифференцируемых функций // Математические заметки. 1988. Т. 44, № 4. 528–535.

[2] Ровба Е.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля, рациональными операторами // ДАН Беларуси. 1996. Т. 40, № 6. С. 18–22.

[3] Русак В.Н. Об одном методе приближения рациональными функциями // Весцi НАН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1978. № 3. С. 15–20.

[4] Ровба Е.А. Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестник БГУ. Сер. 1, Физ. Матем. Инф. 1996. № 1. С. 34–39.

[5] Ровба Е.А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // ДАН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

К теории операторов интегро-дифференцирования распределенного порядка

Псху А.В.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г.Нальчик, Россия

Рассмотрим оператор распределенного интегро-дифференцирования [1]

$$D_{0x}^{[\mu]} f(x) = \int_{\mathbb{R}} D_{0x}^{t} f(x)\, \mu\,(dt)\,, \tag{1}$$

ассоциированный со знакопеременной борелевской мерой μ на $\mathbb{R}$. Здесь D_{0x}^{t} — производная (интеграл) Римана–Лиувилля порядка t по переменной x с началом в точке $x = 0$. Предполагается, что $\beta := \sup\operatorname{supp}\mu < \infty$.

Оператор (1) может быть записан в виде

$$D_{0x}^{[\mu]} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\,(f * \Phi_\mu)\,(x), \qquad \Phi_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{-t-1}}{\Gamma(-t)}\, \mu_n\,(dt)\,, \tag{2}$$

где μ_n — сдвиг меры μ на $n = \min\{k :\ k \geq \beta,\ k \in \mathbb{N}_0\}$.

В докладе обсуждается подход к обращению оператора (1), основанный на обобщенном преобразовании Станковича [2]. В частности, для ядра (2) найдена пара Сонина [3, 4], в терминах которой для (1) построен обратный и выписаны формулы Ньютона–Лейбница.

[1] Нахушев А.М. К теории дробного исчисления, *Дифференц. уравнения*, 1988, **24**:2, 313–324.
[2] Pskhu A. Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 2003, **29**:93, 1–17.
[3] Сонин Н.Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: ГИТТЛ, 1954.
[4] Рубин Б.С. Теорема вложения для образов операторов свертки на конечном отрезке и операторы типа потенциала, I, *Изв. вузов. Матем.*, 1982, 1(236), 53–63.

Dynamics of quantum states and diffusion in Hilbert space

Sakbaev V.Zh.
Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Scienses
Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science

To describe diffusion in a Hilbert space, it is natural to introduce a shift-invariant measure on this space so that all shift directions have equal opportunities. However, by virtue of A. Weyl's theorem, there is no measure on a Hilbert space that has all properties of the Lebesgue measure on a finite-dimensional Euclidean space. To study the phenomena of diffusion and quantum dynamics, a real separable Hilbert space is equipped with a shift-invariant non-negative finitely additive measure. We obtaine a unitary representation of the Hilbert space as a group with respect to the operation of addition in the space of functions that are quadratically integrable with respect to an invariant measure. The resulting unitary representation of the group of translations by vectors of a Hilbert space is not strongly continuous. A maximal subgroup of strong continuity of representation is found. A decomposition of the invariant measure into components that are ergodic with respect to the subgroup of strongly continuous translations is obtained.

A convolution semigroup with Gaussian measures on a Hilbert space is considered to study a diffusion phenomenon. It is established that a semigroup of such convolutions is strongly continuous if and only if the square root of the covariance operator is nuclear. In this case, a strongly continuous semigroup is described by a diffusion equation with a self-adjoint generator of the Laplace-Volterra type.

Otherwise, the semigroup of convolutions with Gaussian measures is a discontinuous semigroup of self-adjoint contractions. In this case, the mathematical expectation of a random shift of the argument of an arbitrary square-integrable function becomes zero at all positive moments of time. This means that observation using linear functionals of the evolution of a vector during anomalous diffusion showes the instantaneous reversal of the vector to zero. However, observing the evolution of a vector under anomalous diffusion through quadratic forms of bounded linear operators presentes the evolution of a quantum state under the action of a quantum dynamical semigroup.

Observed effects are partly explained by the fact that in the case of strongly continuous diffusion, each ergodic component of an invariant measure is also invariant with respect to almost all random shifts of the argument. Otherwise, an anomalous diffusion mixes the uncountable set of mutually singular ergodic components.

Об асимптотике целой функции специального вида

Семенова Д.В.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $l : [0;\ \infty) \to [0;\ \infty)$ удовлетворяет условию $l(t) = O(t^{\alpha}),\ t \to \infty,\ 0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим последовательность

$$\lambda_k = k + l\left(|k|\right),\ k = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots \tag{1}$$

Предложение. Формула

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{2}$$

определяет целую функцию экспоненциального типа и

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^{\infty} \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t}\, \mathrm{d}t,\ z \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

где $n(z,t)$ – число точек λ_k в круге $|w - z| \le t$.

В работе [1] путем оценивания интеграла (3) доказано, что если $l(x) = O\left(\ln|x|\right)$, то $\ln|\varphi(x)| = O\left(\ln|x|\right),\ |x| \to \infty$, x находится на положительном расстоянии от множества $\{\lambda_k\}$.

Нами получен аналогичный результат для функции

$$l(x) = \begin{cases} \ln^{p+1} x & x \ge 1 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. Пусть в (1) $l(x)$ определена формулой (4) и целая функция φ определена формулой (2). Тогда $\exists\ d_0 \in \left(0;\ \inf\limits_{k\neq m} |\lambda_k - \lambda_m|\right)$: $\ln|\varphi(x)| = O\left(\ln^p|x|\right),\ |x| \to \infty,\ |x-\lambda_k| \geq d_0,\ k = \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$

[1] Н. Ф. Абузярова, В. С. Шустов. Об условиях обратимости по Эренпрайсу. // Вестник Башкирского университета. 2018. Т.23. No 3. С. 590–598.

Квантование теории топологических диэлектриков

Сергеев А.Г.

Математический институт имени В.А.Стеклова РАН

В докладе рассматриваются математические задачи, возникающие в теории топологических диэлектриков. Так называются твердые тела, обладающие широкой энергетической щелью, устойчивой относительно малых деформаций, что является основанием для использования топологических методов при их изучении. Приступая к квантованию теории топологических диэлектриков, мы переформулируем ее на яхыке K-теории. Для этого заметим, что алгебра наблюдаемых топологических диэлектриков принадлежит классу градуированных C^*-алгебр, для которых имеется вариант K-теории, предложенный Ван Дэле. В терминах этой теории удается также определить топологические инварианты диэлектриков.

Ключевую роль в исследовании топологических свойств твердых тел играет изучение их групп симметрий. Китаев предложил описание симметрий и классификацию твердых тел, основанную на теории клиффорловых алгебр. Таким образом, квантование топологических диэлектриков сводится к изучению неприводлимых представлений клиффордовых алгебр. Указанная конструкция квантования работает в теле диэлектрика, однако при выходе на границу энергетическая щель, наличие которой необходимо для конструкции K-теории в теле диэлектрика, может закрываться. Для описания возникающей бесщелевой системы приходится использовать другой вариант K-теории, предложенный Каспаровым. В его терминах удается описать алгебру алгебру граничных наблюдаемых и определить граничные топологические инварианты диэлектриков.

Связь между топологическими инвариантами диэлектрика и его границы устанавливается с помощью т.н. BB-соответствия. Для его построения используется короткая точная последовательность, связывающая алгебры наблюдаемых диэлектрика и его границы. Она порождает длинную точную последовательность гомоморфизмов K-групп, граничное отображение в которой и задает BB-соответствие.

Глобальная разрешимость задачи типа Коши для квазилинейного уравнения с производными Хилфера

Скорынин А.С., Федоров В.Е.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определим следующим образом: $J^\alpha f(t) := \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds$, $J^0 f(t) := f(t)$, $t > t_0$. Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, задается равенством $D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t)$, где $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$ — обычная производная целого порядка. Будем также использовать обозначение $D^{-\alpha} f(t) := J^\alpha f(t)$ при $\alpha \geq 0$. Производную Хилфера [1] определим как

$$D^{\alpha,\beta} f(t) := D^{m-\beta(m-\alpha)} \left(J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(t_0) \right).$$

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ (линейный ограниченный в $\mathcal{Z}$ оператор), $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq 1$, $r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t_0 < T$, $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r} \to \mathcal{Z}$, $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,. Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} x(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

для уравнения

$$D^{\alpha,\beta} x(t) = Ax(t) + B(t, D^{\alpha-m-r,\beta} x(t), \ldots, D^{\alpha-1,\beta} x(t)) \tag{2}$$

на заданном отрезке $t \in [t_0, T]$. Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $x \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, существует $D^{\alpha,\beta} x \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются равенства (1) и (2).

Теорема. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq 1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r}; \mathcal{Z})$ липшицево по $(z_{-r}, z_{-r+1}, \ldots, z_{m-1})$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, T]$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific, 2000. .

Первое четырех электронное синглет в примесном модели Хаббарда. Спектр системы

Ташпулатов С.М.
Институт ядерной физики академии наук республики Узбекистан, г.Ташкент, Узбекистан

Рассматривается оператор энергии четырех электронных систем в примесном модели Хаббарда и исслудуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы в первому синглетному состояние. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0-A)\times$$

$$\times\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow},$$

где A $(A_0)-$ энергия электрона в узле решетке, B $(B_0)-$ интеграл переноса между соседними узлами (между электрона и примесями); для удобства мы считаем, что $B>0$, $(B_0>0)$, суммирование по τ ведется по ближайшим соседям; $U-$ параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле, $\gamma-$ спиновый индекс, а $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}-$ соответственно операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m\in Z^\nu$. Гамильтониан H действует в в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{as}$. Пусть φ_0-вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$. Первое синглетное состояние соответствует свободному движению четырех электронов на решетке и их взаимодействие, и ему отвечают базисные функции ${}^1s^0_{p,q,r,t\in Z^\nu} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$. Подпространство ${}^1\mathcal{H}^0_s$, соответствующее первому синглетному состоянию, есть множество всех векторов вида ${}^1\psi^0_s = \sum_{p,q,r,t\in Z^\nu} f(p,q,r,t)^1 s^0_{p,q,r,t\in Z^\nu}, f\in l^{as}_2$, где l^{as}_2- подпространство антисимметричных функций из пространства $l_2((Z^\nu)^4)$. Обозначим через ${}^1H^0_s$ сужение оператора H в подпространстве ${}^1\mathcal{H}^0_s$. Оператор ${}^1\mathcal{H}^0_s$ является ограниченным самосопряженным оператором.

Исследования показывает, что имеет место такая ситуация: а). Существенный спектр системы в первом синглетном состоянии состоит из объединения десяти отрезков, а дискретный спектр системы состоит из шести собственных значений; 2). Существенный спектр системы в первом синглетном состоянии состоит из объединения шестнадцати отрезков, а дискретный спектр системы состоит из десяти собственных значений; 3). Существенный спектр системы в первом синглетном состоянии состоит из объединения девятнадцати отрезков, а дискретный спектр системы состоит из десяти собственных значений; 4). Существенный спектр системы в первом синглетном состоянии состоит из объединения четырех отрезков, а дискретный спектр системы состоит из двух собственных значений.

The Wienberg equation for the eigenvectors of the family of operator matrices of order three

Tosheva N.A.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

Let $\mathbb{T}^3$ be the three-dimensional torus, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ be the field of complex numbers, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}^3$ and $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$ be the Hilbert space of square-integrable symmetric (complex) functions defined on $(\mathbb{T}^3)^2$. The Hilbert space $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ is called three-particle cut subspace of a bosonic Fock space $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L_2(\mathbb{T}^3))$ over $L_2(\mathbb{T}^3)$, respectively.

In the present paper we consider a family of 3×3 operator matrices $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ acting in the Hilbert space $\mathcal{H}$ as

$$H(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}$$

with the entries

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t)f_1(t)dt,$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_2(p,t)dt,$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0,1,2,$$

where H_{ij}^* $i < j$ denotes the adjoint operator to H_{ij}.

Here $w_0(\cdot)$ is a real-valued bounded function on $\mathbb{T}^3$, the function $v_i(\cdot)$, $i = 0,1$ is a real-valued analytic on $\mathbb{T}^3$, the functions $w_1(\cdot;\cdot)$ and $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ are defined by the equalities

$$w_1(K;p) := l_1\varepsilon(p) + l_2\varepsilon(K-p) + 1,$$

$$w_2(K;p,q) := l_1\varepsilon(p) + l_1\varepsilon(q) + l_2\varepsilon(K-p-q),$$

respectively, with $l_1, l_2 > 0$ and

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos(nq^{(i)})), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in \mathbb{T}^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Under these assumptions the operator $H(K)$ is bounded and self-adjoint.

For operator matrix $H(K)$ first we construct the Weinberg equation and then we use this equation to show the finiteness of number of eigenvalues of operator matrix $H(K)$.

Положительность семейства моделей Фридрихса

Умиркулова Г.Х.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^3$ - трехмерный тор и $L_2(\mathbb{T}^3)-$ гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. Рассмотрим семейства моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$ как

$$h_\mu(k) := h_0(k) - \mu v,$$

где операторы $h_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ и v определяются по правилам:

$$(h_0(k)f)(p) = (l_1\varepsilon(p) + l_2\varepsilon(k+p))f(p), \quad (vf)(p) = \varphi(p)\int_{\mathbb{T}^3}\varphi(t)f(t)dt.$$

Здесь функция $\varepsilon(\cdot)$ определена как

$$\varepsilon(p) := \sum_{j=1}^{3}(1-\cos(mp^{(j)})),\ p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbb{T}^3, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathbf{0} := (0,0,0)$. Из определения оператора $h_\mu(\mathbf{0})$ видно, что для существенного спектра оператора $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(\mathbf{0})) = [0; 2(l_1+l_2)].$$

Положим

$$\mu_0 := (l_1+l_2)\left(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi^2(t)dt}{\varepsilon(t)}\right)^{-1}.$$

Заметим, что если оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение, то функция

$$f(p) = \frac{\mu\varphi(p)}{(l_1 + l_2)\varepsilon(p)},$$

удовлетворяет уравнению $h_\mu(\mathbf{0})f = 0$ и $f \in L_2(\mathbb{T}^3)$.

Пусть I - единичный оператор в $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Теорема. Если оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение, то при всех значениях $k \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_\mu(k) + l_1\varepsilon(k)I$ является положительным оператором.

Последняя теорема играет важную роль при изучении конечности числа собственных значений, соответствующего трехчастичного решетчатого модельного оператора.

Об одном свойстве преобразования Фурье, используемом для исследования однозначной разрешимости дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}$

Федоров В.Е., Скрипка Н.М.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Преобразование Фурье [1,2] функции $z \in L_1(\mathbb{R};\mathcal{Z})$ определим как

$$\mathcal{F}z(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} z(t)e^{i\omega t}dt.$$

Обозначим $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$ $S^-_{\theta,a} := \{ai + re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in (-\frac{\pi}{2} - \theta, -\frac{\pi}{2} + \theta), r > 0\}$, $S^+_{\theta,a} := \{ai + re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in (\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} + \theta), r > 0\}$, для $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $S_{\theta,a,b} := S^+_{\theta,a} \cap S^-_{\theta,b}$, $\Sigma^+_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi,\ t \neq 0\}$, $\Sigma^-_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| > \pi - \psi,\ t \neq 0\}$, $\Sigma_\psi := \Sigma^+_\psi \cup \Sigma^-_\psi$ при $\psi \in (0, \pi/2]$.

Теорема. Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a, b > 0$, $\beta \in [0, 1)$, задана функция $H : (-ai, bi) \to \mathcal{Z}$. Следующие утверждения эквивалентны.

(i) Существует аналитическая функция $F : \Sigma_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}} \to \mathcal{Z}$, для любого $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$ существует такое $C(\theta) > 0$, что при всех $t \in \Sigma^+_{\theta - \frac{\pi}{2}}$ выполняется $\|F(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C(\theta)|t|^{-\beta}e^{-a\mathrm{Re}\, t}$ и для всех $t \in \Sigma^-_{\theta - \frac{\pi}{2}}$ справедливо неравенство $\|F(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C(\theta)|t|^{-\beta}e^{b\mathrm{Re}\, t}$; $\mathcal{F}F(\omega) = H(\omega)$ для $\omega \in (-ai, bi)$.

(ii) Функция H аналитически продолжима на $S_{\theta_0,-a,b}$; при любом $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$ существует такое $K(\theta) > 0$, что для всех $\omega \in S_{\theta,-a,b}$

$$\|H(\omega)\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{K(\theta)}{|\omega + ai|^{1-\beta}} + \frac{K(\theta)}{|\omega - bi|^{1-\beta}}.$$

Показано, что если для линейного замкнутого оператора A оператор-функция $((-i\omega)^m - A)^{-1}$ удовлетворяет условию вида (ii), то уравнение $D^m z(t) = Az(t) + f(t)$ на $\mathbb{R}$ однозначно разрешимо.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

[2] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publ., 2006.

О локальной разрешимости квазилинейного уравнения с распределенной дробной производной Герасимова — Капуто

Филин Н.В.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

При $b < c$, $m-1 < c \le m \in \mathbb{N}$, для функции ограниченной вариации $\mu : (b,c] \to \mathbb{C}$ (коротко, $\mu \in BV((b,c];\mathbb{C})$) обозначим интегралы Римана — Стилтьеса $W(\lambda) := \int\limits_b^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$, $W_k(\lambda) := \int\limits_k^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Определим класс $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ как множество всех операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ (т. е. линейных замкнутых операторов A, плотно определенных в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$, действующих в $\mathcal{Z}$), удовлетворяющих следующим условиям:

1) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, что $W(\lambda) \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta,\ \mu \ne a\}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ $\left\|(W(\lambda)I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{|\lambda| K(\theta,a)}{|W(\lambda)||\lambda - a|}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

$$\int\limits_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) = Az(t) + B\left(t, \int\limits_{b_1}^{c_1} D^\alpha z(t) d\mu_1(\alpha), \ldots, \int\limits_{b_n}^{c_n} D^\alpha z(t) d\mu_n(\alpha)\right). \tag{2}$$

Теорема [1]. Пусть $m-1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, $b < c$, $\mu \in BV((b,c];\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, c — точка вариации меры $d\mu(\alpha)$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n < c$, $b_l < c_l$, $\mu_l \in BV((b_l,c_l];\mathbb{C})$, c_l — точка вариации меры $d\mu_l(\alpha)$, $l = 1,2,\ldots,n$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \geq 0$, $z_k \in D_A$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $(t_0,\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\ldots,\widetilde{z}_n) \in U$, отображение $B \in C(U;D_A)$ локально липшицево. Тогда существует $t_1 > t_0$, такое, что задача Коши (1), (2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0,t_1]$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Fedorov V.E., Filin N.V. A class of quasilinear equations with distributed Gerasimov — Caputo derivatives. // Mathematics. 2023. Vol.11, no.11. P.2472.

Субфункции одной переменной в теории целых функций

Хабибуллин Б. Н., Мурясов Р. Р.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Классическое понятие функции, выпуклой на *промежутке I вещественной оси* $\mathbb{R}$, в первой трети XX в. развивалось с одной сторону в сторону многомерных его обобщений, включая теорию субгармонических функций, а с другой — в направлении обобщения понятия выпуклости функции для случая одной переменной. У истоков второго пути стоял Ж. Валирон [1], что в частном случае p-тригонометрически выпуклых функций ещё ранее использовалось в теории роста целых функций. Задел Ж. Валирона в наиболее общей рафинированной форме был подхвачен и существенно развит Э. Беккенбахом [2], а по дальнейшему развитию можно обратиться к сводке из монографии [3, гл. VIII, п. 84]. Пусть $\mathcal{W}$ — такой класс непрерывных функций $\mathsf{w}\colon I \to \mathbb{R}$ на $I \subset \mathbb{R}$, что для любых двух пар точек $x_1 \neq x_2$ из I и $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ существует единственная функция $\mathsf{w} \in \mathcal{W}$, для которой $\mathsf{w}(x_1) = y_1$ и $\mathsf{w}(x_2) = y_2$. Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{W}$-субфункцией на I*, если для любого отрезка $[a,b] \subset I$ из $f(a) = \mathsf{w}(a)$ и $f(b) = \mathsf{w}(b)$ для $\mathsf{w} \in \mathcal{W}$ следует $f \leqslant \mathsf{w}$ на $[a,b]$. Если $\mathcal{W}$ — класс всех аффинных функций, то *$\mathcal{W}$-субфункции на I* — это *обычные выпуклые функции;* если $0 \leqslant p \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{W}$ — линейная оболочка пары функций $x \underset{x\in I}{\longmapsto} \sin px$ и $x \underset{x\in I}{\longmapsto} \cos px$ на промежутке I длины $\leqslant \pi/p$, то $\mathcal{W}$-субфункции на I дают все конечные *p-тригонометрически выпуклые функции* — традиционный аппарат теории роста целых и субгармонических на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функций и соответственно распределению их корней или масс Рисса. Мы дополняем этот аппарат классами *$\pm p$-степенно выпуклых функций* или *$\pm p$-гиперболически выпуклых функций,* которые представляют собой класс всех $\mathcal{W}$-субфункций на промежутках I соответственно положительной полуоси или оси $\mathbb{R}$, когда $\mathcal{W}$ — линейная оболочка пары функций $x \underset{x\in I}{\longmapsto} x^p$ и $x \underset{x\in I}{\longmapsto} x^{-p}$ или пары функций $x \underset{x\in I}{\longmapsto} e^{px}$ и $x \underset{x\in I}{\longmapsto} e^{-px}$. Использование $\pm p$-степенно и $\pm p$-гиперболически выпуклых функций в теории роста целых и субгармонических функций принципиально новое.

[1] Valiron G. *Fonctions convexes et fonctions entiéres* // Bull. Soc. Math. France, 1932, **60**, 278–287.

[2] Beckenbach E. F. *Generalized convex functions* // Bull. Amer. Math. Soc., 1937, **43**:6, 363–371.

[3] Roberts A. W., Varberg D. E. Convex functions. ser. Pure Appl. Math. **57**. New York–London: Academic Press, 1973.

Аналог уравнения Фаддеева для собственных функций одной операторной матрицы

Хайитова Х.Г.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ - d-мерный тор, $\mathbb{C}$ - одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) антисимметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим 2×2 операторную матрицу

$$H_{\mu,\lambda}(\gamma) := \begin{pmatrix} H_{11} & \lambda H_{12} \\ \lambda H_{12}^* & H_{22}^0(\gamma) - \mu V \end{pmatrix} \qquad (1)$$

со следующими матричными элементами

$$(H_{11}f_1)(x) = u(x)f_1(x), \quad (H_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_2(x,t)dt,$$

$$(H_{22}^0(\gamma)f_2)(x,y) = w_\gamma(x;y)f_2(x,y),$$

$$V := V_1 + V_2, \quad (V_1 f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_2(x,t)dt,$$

$$(V_2 f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_2(t,y)dt.$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i,j = 1,2$, $\mu,\lambda > 0$, γ - фиксированные вещественные числа, $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ - вещественно-непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $H_{ij}^*, i < j-$ сопряженный оператор к H_{ij}, а функция $w_\gamma(\cdot;\cdot)$ имеет вид:

$$w_\gamma(x;y) := \varepsilon(x) + \varepsilon(y) + \gamma\varepsilon(x+y), \quad \varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{d}}(1 - \cos x_k).$$

Можно легко проверить, что при этих предположениях операторная матрица $H_{\mu,\lambda}(\gamma)$, является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

Для собственных вектор-функций операторной матрицы $H_{\mu,\lambda}(\gamma)$ построен аналог уравнения Фаддеева. С помощью уравнения Фаддеева изучается число и местоположение собственных значений операторной матрицы $H_{\mu,\lambda}(\gamma)$ в зависимости от параметров μ, λ и γ.

Порождающие квантовые процессы

Хажин Р. Л.

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, К(П)ФУ, г.Казань, Россия

Пусть $\mathrm{L}(\mathcal{H})$ и $\mathrm{L}(\mathcal{K})$ – пространства линейных операторов на конечномерных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно. Следуя книге [1], мы называем *квантовым каналом* вполне положительное, сохраняющее след линейное отображение $\Phi : \mathrm{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathcal{K})$.

В работе [2] было введено и исследовано понятие *порождающего* квантового канала. Говоря неформально, так называется квантовый канал составной системы $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$, по которому однозначно восстанавливается канал подсистемы $\mathcal{H}$. Множество порождающих квантовых каналов обозначается через $\mathcal{G}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Порождающим квантовым процессом называется функция вида

$$\Omega : [0,T] \longrightarrow \mathcal{G}_c(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}), \quad \Omega(0) = \mathcal{I},$$

где T – вещественное число, $\mathcal{I} : \mathrm{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E})$ – тождественный квантовый канал.

Мы продолжаем изучение квантовых процессов, начатое в статье [3]. Основной целью доклада является рассмотрение свойств порождающих квантовых процессов.

[1] Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.

[2] Гумеров Р. Н., Хажин Р. Л. Порождающие квантовые каналы. *Некоммутативный анализ и квантовая информатика*, Сборник статей. К 80-летию академика Александра Семеновича Холево, Труды МИАН, 324, МИАН, М., 2024 (в печати).

[3] Гумеров Р. Н., Хажин Р. Л. О делимых квантовых динамических отображениях. Уфимск. матем. журн., 14:2 (2022), 23–36.

О приближении константы Лебега оператора Фурье различными функциями

Шакиров И.А.

Набережночелнинский государственный педагогический университет, г. Набережные Челны, Россия

Константа Лебега L_n классического оператора Фурье

$$S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi} \quad \left(S_n(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) D_n(t-s) ds, \quad \|S_n\| = L_n \right) \quad (1)$$

приближается логарифмической функцией, содержащей простейшие дробно-рациональные слагаемые специального вида; изучается проблема улучшения точности аппроксимации. К изучению свойств оператора (1) и его обобщений, соответствующих им констант Лебега вклад внесли и вносят советские, российские и иностранные математики; в последнее годы хорошие результаты по аппроксимации L_n получены китайскими и корейскими математиками Zhao D., Chen C., Choi J.

В рамках данной работы даны ответы вопросы: 1) насколько можно уменьшить погрешность в приближенном равенстве

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 + \frac{c}{(n+0.5)^2} + \frac{d}{(n+0.5)^4} \overset{def}{=} u_n(c,d), \;\; n \in N_k, \;\; (2)$$

варьируя при этом параметрами c, d и аргументом $n \in N_k = \{k,\, k+1,\, k+2, \ldots\}$, где $\widetilde{\alpha}_0 = c_0 + (4/\pi^2)\ln 2 = 1.270353244\ldots$ ($c_0 = 0.989431273\ldots$ – *const Ватсона*);
2) как оценить наилучшее приближение $E_k = \inf\limits_{c,d} \sup\limits_{n \in N_k} |L_n - u_n(c,d)|$?

В теореме 1 [1] результаты китайских математиков по аппроксимации улучшены более 700 раз. Здесь в теореме 2 результат теоремы 1 улучшим на три порядка; заметное улучшение результатов двух этих теорем будет наблюдаться при отличных от нуля значениях параметров c, d.

Теорема 1. В приближенном равенстве (2) с параметрами вида $c = 0.002945386\ldots,\ d = 0,\ n \in N_1 = N$ для наилучшего приближения $E_1 = E$ верна оценка $E <0.000002642$.

Теорема 2. В приближенном равенстве (2) с параметрами вида $c = 0.002996844\ldots,\ d = 0,\ n \in N_{11}$ для наилучшего приближения верна оценка $E_{11} < 0.000000003$.

[1] Шакиров И.А. Приближение константы Лебега оператора Фурье логарифмическо-дробно-рациональной функцией // Изв. вузов. Математика. - 2023. - № 11. - С. 75-85.

Существенный спектр одной операторной матрицы

Шарипова М.Ш.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Обозначим через $\mathbb{T}$ одномерный тор. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ - одномерное пространство комплексных чисел, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ - гильбертово пространство квадрато-интегрируемых (комлекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}$ и $\mathcal{H}_2 := L_2(\mathbb{T}^2)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Пусть операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ определена в $\mathcal{H}$ как

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} & A_{02} \\ \mu A_{10} & A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{20} & \mu A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0. \tag{1}$$

где элементы $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i,\ i, j = 0, 1, 2$ заданы по правилам:

$$A_{00} f_0 = \varepsilon f_0, \quad (A_{01} f_1)(t) = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_1(t) dt, \quad A_{02} = 0, \quad A_{10} = A_{01}^*;$$

$$(A_{11} f_1(x)) = (\varepsilon + 1 - \cos(x)) f_1(x), \quad (A_{12} f_2)(x, t) = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_2(x, t) dt;$$

$$A_{20} = 0, \quad A_{21} = A_{12}^*, \quad (A_{22} f_2)(x, y) = (\varepsilon + 2 - \cos(x) - \cos(y)) f_2(x, y).$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R},\ f_i \in \mathcal{H}_i,\ i = 0, 1, 2$

С целью изучения существенного и дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ рассмотрим семейство обобщенных моделей Фридрихса

$h_\mu, \mu > 0$ действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как 2×2 операторная матрица

$$h_\mu := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}$$

где матричные элементы $A_{ij}, i \le j, i, j = 0, 1$ приведены выше.

Можно показать, что при $\mu \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ оператор h_μ имеет единственное собственное значение $E_\mu^{(1)} \in (-\infty; \varepsilon)$, и при $\mu > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ появляется также второе собственное значение $E_\mu^{(2)} \in (\varepsilon + 2; +\infty)$ оператора h_μ.

Теорема. Для существенного спектра $\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_\mu)$ операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ имеет место равенство

1. $\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_\mu) = [E_\mu^{(1)} + \varepsilon; E_\mu^{(1)} + \varepsilon + 2] \cup [\varepsilon; \varepsilon + 4]$ при $\mu \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}$;
2. $\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_\mu) = [E_\mu^{(1)} + \varepsilon; E_\mu^{(1)} + \varepsilon + 2] \cup [\varepsilon; \varepsilon + 4] \cup [E_\mu^{(2)} + \varepsilon; E_\mu^{(2)} + \varepsilon + 4]$ при $\mu > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Об однозначной разрешимости уравнения высокого порядка в банаховом пространстве на прямой

Шишацкая П.С., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $C^l_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z}) := \{x \in C^l(\mathbb{R};\mathcal{Z})$: при любом $\varepsilon > 0$ $e^{-(a+\varepsilon)t} D^k x(t)$ ограничена при $t > 0$, а $e^{-(b+\varepsilon)t} D^k x(t)$ ограничена при $t < 0$, $k = 0, 1, \ldots, l\}$, $C_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z}) := C^0_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$.

Рассмотрим уравнение

$$D^m z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

при $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$. Его решением будем называть функцию $z \in C^m(\mathbb{R};\mathcal{Z}) \cap C^{m-1}_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$, удовлетворяющую равенству (1).

О физичности задачи без начальных условий см. [1–3].

Обозначим при $c \in (a, b)$

$$Z_m(t) := \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} (\lambda^m - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma_c := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = c + iy,\ y \in \mathbb{R}\}$.

Теорема. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $a < b < -\|A\|^{1/m}_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}$ или $\|A\|^{1/m}_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} < a < b$, $f \in C^1(\mathbb{R};\mathfrak{Z}) \cap C_{a,b}(\mathbb{R};\mathfrak{Z})$. Тогда функция

$$z_f(t) := \int\limits_{\mathbb{R}} Z_m(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением уравнения (1).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука,

[2] Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики математической физики // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2 (158). С. 115–129.

[3] Костин В.А., Костин Д.В., Алкади Х. Задача без начальных условий для уравнения с дробными производными и промежуточные асимптотики // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, вып. 1. С. 18–28.

Аналог обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова–Капуто

Ядрихинский Х.В.

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г.Якутск, Россия

Исследование обобщений правила Лейбница на дробные производные имеет длительную историю, см., к примеру, [1, §17]. В [2] получен аналог обобщенного правила Лейбница для дробной производной Герасимова–Капуто ${}^C_cD^\alpha_t$ порядка $0 < \alpha < 1$. В [3] получен аналог обобщения правила Лейбница для дробных производных Герасимова–Капуто произвольного порядка. В данной работе такой аналог предложен в другой форме.

Дробный интеграл Римана–Лиувилля и производная Герасимова–Капуто [1,2] определяются и обозначаются как

$${}_cJ^\alpha_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds,$$

$${}^C_cD^\alpha_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_c^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds = {}_cJ^{n-\alpha}_t D^n_t f(t),$$

где D_t^n — оператор производной целого порядка $n \in \mathbb{N}$.

Теорема. Для $\alpha \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и аналитических на $[c,d]$ функций f, g имеет место равенство

$$
{}_c^C D_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n \, {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) +
$$

$$
+ \sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha+k}{i-j} \frac{(t-c)^j}{j!} D_t^j \, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} f(t). \tag{1}
$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 28.02.2024 №075-02-2024-1441.

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

[2] Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[3] Wei Y., Liu D. Y., Tse P. W. Discussion on the Leibniz rule and Laplace transform of fractional derivatives using series representation. arXiv:1901.11138. 2019.

Научное издание

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Сборник материалов
Международной научной конференции
08-12 июня 2024

Подписано в печать 04.06.2024г. Формат 60x90/16.
Печать: цифровая. Гарнитура: Bookman Old Style
Усл. печ. л. 3,50. Тираж 50. Заказ 2140

АЭТЕРНА
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»
450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120
https://aeterna-ufa.ru
info@aeterna-ufa.ru
+7 (347) 266 60 68