МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник тезисов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 15 – 19 марта 2021 г.)

НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «АЭТЕРНА»
УФА, 2021

УДК 51
ББК 22.1
К 637

К 637 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения:** сборник тезисов Международной научной конференции (оз. Банное, 15 – 19 марта 2021 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2021. – 83 с.

ISBN 978-5-00177-151-7

Представленные в сборнике тезисы посвящены различным областям фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются различные постановки нелинейных задач. Также рассматриваются задачи теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-00177-151-7

**MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION
OF THE RUSSIAN FEDERATION**

**UFA FEDERAL RESEARCH CENTRE
OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES**

BASHKIR STATE UNIVERSITY

**SCIENTIFIC EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER
OF VOLGA FEDERAL DISTRICT**

CHELYABINSK STATE UNIVERSITY

**ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC
OF BASHKORTOSTAN**

COMPLEX ANALYSIS, MATHEMATICAL PHYSICS AND NONLINEAR EQUATIONS

***Book of abstracts
of the International conference
Bannoe Lake, Russia
March 15 - 19, 2021***

**RESEARCH AND PUBLISHING CENTER «AETERNA»
UFA, 2021**

UDC 51
BBK 22.1
C 65

C 65

Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations: Book of Abstracts of the International Conference. – Ufa, Russia: Aeterna, 2021. – 83 p.

ISBN 978-5-00177-151-7

Presented in the collection abstracts are devoted to various areas of fundamental and applied mathematics. In most of the works different formulations of nonlinear problems are investigated. Also problems of approximation theory, inverse problems and equations with fractional derivatives are considered.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-00177-151-7

Содержание

Видоизмененная задача Дирихле для вырождающейся многомерной эллиптической системы

Абдрахманов А. М., Абдрахманова Р. П.
Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим следующую систему

$$-\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\Delta u_j+\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)=0,\quad j=1,2,..,n,,\qquad(1)$$

Система (1) эллиптична везде, кроме точки $x_1=x_2=...=x_n=0$ и $n-$мерной сферы $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=\lambda$, где система (1) вырождается.

При $n=2$ и $\lambda=2$ система (1) является системой Бицадзе.

1. Пусть область $D=\{X\in R^n: x_1^2+x_2^2+...+x_n^2<R^2\}$, $R^2>\lambda$.

Рассматривается задача Дирихле для системы (1) в следующей постановке: найти регулярное в области D ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее на границе $\Gamma=\{X: x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=R^2\}$ условиям

$$u_j\big|_{\Gamma}=f_j: f_j\in C^{2,\alpha}(\Gamma), j=1,2,..,n-1,\qquad(2)$$

$$u_n\big|_{\delta\Gamma}=f_n: f_n\in C^{1,\alpha}(\delta\Gamma), \delta\Gamma=\{X: x_n=0,\ \ x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2=R^2\}\qquad(3)$$

Доказано: задача (2), (3) для системы (1) разрешима и ее решение единственно в классе функций, ограниченных на бесконечности.

2. В случае $R^2<\lambda$ к краевым условиям (2), (3) необходимо добавить условие

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\big|_{\Gamma}=f_{n+1}; f_{n+1}\in C^{1,\alpha}(\Gamma)\qquad(4)$$

Доказано: задача (2), (3), (4) для системы (1) разрешима, ее решение единственно в классе ограниченных функций f_{n+1}.

3. Рассмотрим систему

$$-\Lambda(x_1,x_2,..,x_n)\Delta u_j+\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)=0$$

В случае $\Lambda(X)\neq 0$ найдены условия разрешимости видоизмененной задачи Дирихле.

Задача типа Шоуолтера — Сидорова для вырожденного эволюционного уравнения с производной Римана – Лиувилля

Авилович А.С.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля, $L,M\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейные замкнутые плотно определенные в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ операторы, действующие в банахово пространство $\mathcal{Y}$). Через $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{X}$. Введем обозначения $R_\mu^L(M):=(\mu L-M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M):=L(\mu L-M)^{-1}$, $\ker R_\mu^L(M)=\mathcal{X}^0$, $\ker L_\mu^L(M)=\mathcal{Y}^0$, через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) обозначим замыкание образа $\mathrm{im}R_\mu^L(M)$ ($\mathrm{im}L_\mu^L(M)$) в норме $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$).

По определению $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ [1], если

(i) существуют $a_0\geq 0$ и $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$ такие, что для всех $\lambda\in S_{a_0,\theta_0}:=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a_0)|<\theta_0,\mu\neq a_0\}$ $R_{\lambda^\alpha}^L(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L_{\lambda^\alpha}^L(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$;

(ii) при любых $a>a_0$, $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$ существует такое $K(a,\theta)>0$, что для всех $\mu\in S_{a,\theta}$ $\max\{\|R_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|L_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\}\leq\frac{K(\theta,a)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu-a)|}$.

Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, пара операторов $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$. Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $D_{L_k}:=D_L\cap\mathcal{X}^k$ ($D_{M_k}:=D_M\cap\mathcal{Y}^k$), $k=0,1$. Тогда [1] $\mathcal{X}=\mathcal{X}^0\oplus\mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^0\oplus\mathcal{Y}^1$, $L_k,M_k\in\mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k=0,1$, существует обратный оператор $L_1^{-1}\in\mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$. Рассмотрим задачу типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^\alpha Lx(t)=Mx(t)+N(t,D_t^{\alpha-m}x(t),D_t^{\alpha-m+1}x(t),\ldots,D_t^{\alpha-2}x(t)),\qquad(1)$$

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(t_0)=y_k,\quad k=0,1,\ldots,m-1.\qquad(2)$$

Для $X\subset\mathbb{R}\times\mathcal{X}^{m-1}$ обозначим $V:=X\cap\mathbb{R}\times(\mathcal{X}^1)^{m-1}$.

Теорема. Пусть $\alpha>1$, банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, X — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^{m-1}$. Предположим, что $N:X\to\mathcal{Y}$, для любых $(t,z_0,z_1,\ldots,z_{m-2})\in X$, таких, что $(t,Pz_0,Pz_1,\ldots,Pz_{m-2})\in X$, выполняется $N(t,z_0,z_1,\ldots,z_{m-2})=N_1(t,Pz_0,Pz_1,\ldots,Pz_{m-2})$ при некотором $N_1\in C(V;\mathcal{Y})$, $\mathrm{im}QN_1\subset\mathrm{im}L$, отображение $L_1^{-1}QN_1\in C\big(V;\mathcal{Y}\big)$ гельдерово по t и локально липшицево по $z_0,z_1,\ldots,z_{m-2}$, $y_k\in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $k=0,1,\ldots,m-1$, $(t_0,L_1^{-1}y_0,\ldots,L_1^{-1}y_{m-2})\in V$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[t_0,t_1]$ при некотором $t_1>t_0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90008

[1] Федоров В.Е., Романова Е.А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

Об оценке решений эволюционных уравнений с одномерным фазовым пространством

Алексеева Е.С.[1], **Рассадин А.Э.**[2]
[1]Нижегородское математическое общество, г. Нижний Новгород, Россия
[2]Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород, Россия

Задача Коши для эволюционного уравнения вида:

$$\frac{dx}{dt} = F(x)\,, \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

с достаточно гладкой функцией $F(x)$ часто встречаются в разнообразных приложениях [1].

Если точка x_0 не является состоянием равновесия уравнения (1), т. е. если $F(x_0) \neq 0$, то решение задачи (1) даётся формулой Барроу [1]:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{F(\xi)}\,. \tag{2}$$

Однако получить явную зависимость от времени $x(t, x_0)$ для этого решения, обращая функцию (2), удаётся лишь в исключительных случаях, поэтому встаёт вопрос об оценке диапазона изменения величины x со временем аналитически.

Это можно сделать, представив подинтегральное выражение в (2) следующим образом:

$$\frac{1}{F(x)} = f(x)\,g(x)\,, \tag{3}$$

и применив затем к произведению функций в формуле (3) последовательно как прямое, так и обратное интегральные неравенства Гёльдера [2].

Варьируя в описанной выше процедуре показатели Гёльдера и функции $f(x)$ и $g(x)$, можно добиться неплохой точности в двусторонней оценке такого рода.

Конструктивизм предложенного метода продемонстрирован на уравнении (1) с $F(x) = x\,(1-x)$ (логистическое уравнение).

[1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

[2] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

On properties of the complex Riesz transform

Aliev R.A., Nebiyeva Kh.I.
Khazar University, Baku, Azerbaijan

For every $k \in Z$, $k \neq 0$, the complex Riesz transform of a function $f \in L_p(C)$, $1 \leq p < \infty$, is defined as the following singular integral (see [1]):

$$(R^k f)(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in C\,:\,|z-w|>\varepsilon\}} \frac{(\overline{z}-\overline{w})^k}{|z-w|^{k+2}} f(w) dm(w),$$

Of course, for $k = 0$ we set R^0 as the identity operator, $(R^0 f)(z) = f(z)$. Note that in the case $k = 2$ we get the Ahlfors–Beurling transform.

The complex Riesz transform is one of the important operators in complex analysis. It has been shown in [1] that this transform plays an essential role in applications to the theory of quasiconformal mappings and to the elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients.

It is known from the theory of singular integrals that the complex Riesz transform is a bounded operator in the space $L_p(C)$, $1 < p < \infty$. In the case $f \in L_1(C)$ only the weak inequality holds. In the present paper, we study the asymptotic behavior of the distribution function of the complex Riesz transform of a function $f \in L_1(C)$ as $\lambda \to +\infty$ and as $\lambda \to 0+$ and using the notion of A-integrability, we prove an analog of the Riesz equality for the complex Riesz transform.

Theorem 1. Let $f \in L_1(C)$. Then the following equations holds

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot m\{z \in C:\ |(R^k f)(z)| > \lambda\} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda \cdot m\{z \in C:\ |(R^k f)(z)| > \lambda\} = \frac{|k|}{2} \cdot \left| \int_C f(w) dm(w) \right|,$$

where m stands for the Lebesgue measure.

Let Ω be a bounded domain in the complex plane and $f \in L_1(\Omega)$. Namely, the restricted complex Riesz transform R^k_Ω is defined as

$$(R^k_\Omega f)(z) = R^k(\chi_\Omega f)(z), z \in \Omega,$$

where χ_Ω is characteristic function of the domain Ω.

Theorem 2. Let $f \in L_1(\Omega)$ and $g(z)$ be a bounded function on Ω with bounded $(R^k_\Omega g)(z)$ on Ω. Then the function $g(z) \cdot (R^k_\Omega f)(z)$ is A-integrable on Ω and

$$(A) \int_\Omega g(z)(R^k_\Omega f)(z) dm(z) = (-1)^k \int_\Omega f(z)(R^k_\Omega g)(z) dm(z).$$

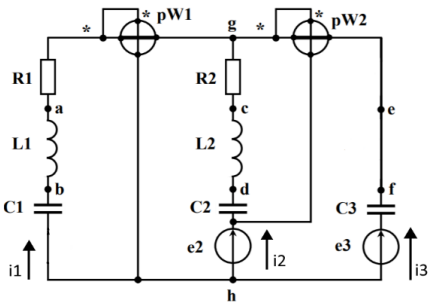
[1] Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane, Princeton: University Press, 2009.

Комплексные числа: от «ложных» чисел к техническим расчетам

Арсланбекова С.А. Дик Е.Н.
БГАУ, Уфа, Россия

Уже в ранние времена при решении задач математики столкнулись с нахождением корня квадратного из отрицательного числа. Развитие мореходства и астрономии требовало от математики новых методов исследования, нового вычислительного аппарата. В первой половине XVI в. Н. Тарталья нашел решение кубического уравнения и оказалось, что при решении квадратных и кубических уравнений некоторые действия над «ложными» числами приводят к числам действительным. В своей книге «Геометрия» (1637г.) Р. Декарт вводит понятие корней действительных и мнимых. Л. Эйлер впервые применил комплексные числа при построении географических карт. Открытие геометрической интерпретации комплексных чисел (К. Вессель, к. XVIII – н. XIX в.) дало наглядное истолкование этим числам и отодвинуло все сомнения в их реальности. Л. Эйлер дал первое определение функции комплексного переменного (н. XVIII в.), Н.Е. Жуковский (1847- 1921гг), используя функцию комплексного переменного, решил множество задач аэродинамики. При помощи комплексных чисел решены ряд задач теории упругости, связанных с машиностроением.

Использование комплексных чисел позволяет приложить методы расчетов цепей постоянного тока для расчета цепей переменного тока, упростить ряд расчетов, заменив графическое векторное решение (в действительных числах) действиями над комплексными числами (символический метод). Для наглядной демонстрации равнозначности такой замены нами был рассмотрен ряд электрических схем синусоидального тока и проведен их расчет.



$$I_1^{\Theta} = \frac{U_{gh}}{R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})} = \frac{-75,13 - j7,616}{7 + j(6,594 - 15,093)}$$
$$= -3,804 - j5,707 = 6,858e^{-j2,1587}\ A$$
$$I_2^{\Theta} = \frac{E_2 + U_{gh}}{R_2 + j(X_{L2} - X_{C2})} = \frac{140,953 + j51,3 - 75,13 - j7,616}{15 + j(11,304 - 9,367)}$$
$$= 4,686 + j2,307 = 5,223e^{j0,4575}A$$

$$I_3^{\Theta} = \frac{E_3 + U_{gh}}{R_3 + j(X_{L3} - X_{C3})} = \frac{142,797 + j25,179 - 75,13 - j7,616}{0 + j(0 - 19,904)}$$
$$= -0,882 + j3,4 = 3,512e^{\mathrm{j}1,8246}\ A$$

Символический метод дал погрешность для активных мощностей 0,14%, а для реактивных – 0,03%. Погрешность расчетов в векторном методе составила для активных мощностей 0,1418%, а для реактивных – 0,0214%. В настоящей работе предложена автоматизация процесса математических расчетов в прикладном пакете MathCAD.

Нековалентные структуры молекулярных отрицательных ионов

Асфандиаров Н.Л., Галеев Р.В., Маркова А.В., Муфтахов М.В., Пшеничнюк С.А., Рахмеев Р.Г., Сафронов А.М., Таюпов М.М.
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Ранее было показано, что измерение средних времен жизни отрицательных ионов позволяет оценить величину сродства к электрону молекулы [1-2]:

$$EA_a = \frac{\ln(\tau_a/\tau_0)\,(Nk_BT + \varepsilon)}{N - \ln(\tau_a/\tau_0)}, \qquad (1)$$

где τ_a – время жизни, τ_0 – обратный частотный фактор, N – число внутренних степеней свободы иона, k_B – постоянная Больцмана, T – температура молекулы-мишени, ε – энергия захваченного электрона.

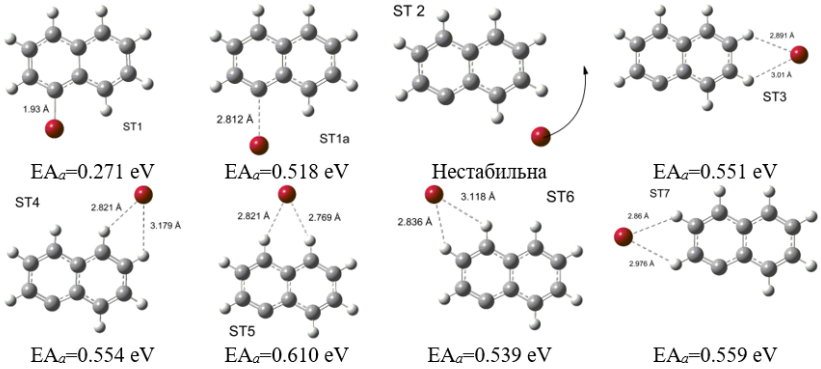


Рис. 1. Наиболее стабильные структуры аниона 1-бромонафталина согласно расчетам в приближении DFT CAM-B3LYP/6-311+G(d,p).

Исследован ряд галоген-производных нафталина и антрацена. Показано, что анионы 1- и 2-бромонафталина, путем миграции атома брома вокруг ароматического кольца, переходят в так называемые нековалентные

структуры, изображенные на рис. 1, обладающие сродством к электрону, достаточным для масс-спектрометрического детектирования.

Бром-производные антрацена подобными стуктурами не обладают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 19-13-00021.

[1] N. L. Asfandiarov, S. A. Pshenichnyuk, A. S. Vorob'ev, E. P. Nafikova, Y. N. Elkin, D. N. Pelageev, E. A. Koltsova, and A. Modelli, Rapid Commun. Mass Spectrom. **28**, 1580 (2014).

[2] N. L. Asfandiarov, S. A. Pshenichnyuk, A. S. Vorob'ev, E. P. Nafikova, and A. Modelli, Rapid Commun. Mass Spectrom. **29**, 910 (2015).

Асимптотические решения задачи конвективной диффузии в окрестности капли при обтекании потоком жидкости и наличии нелинейной объёмной химической реакции

Ахметов Р.Г.

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Рассматривается задача о конвективной диффузии вне капли при наличии нелинейной объёмной химической реакции в случае, когда число Пекле и константа скорости объёмной химической реакции достаточно большие. Задача носит сингулярный характер. Малый параметр соответствует большим числам Пекле. Аналогичная задача в диффузионном пограничном слое исследовалась в работе [1]. Методом согласования асимптотических разложений построены главные члены асимптотического решения по малому параметру около границы капли.

[1] Rustyam G. Akhmetov, "The asymptotic expansions of the solution for the boundary value problem to a convective diffusion equation with volume chemical reaction near a spherical drop", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. V. 15 (2011), CNSNS 1577, 2308-2312.

Разрешимость одной начально-краевой задачи для уравнения с несколькими дробными производными

Байбулатова Г.Д.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Введем обозначения $g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1}$, $\tilde{g}_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}(t-t_0)^{\delta-1}$, $J_t^\delta h(t) := \int\limits_{t_0}^{t} g_\delta(t-s)h(s)ds$ для $\delta > 0$, $t > 0$. D_t^m – обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 – тождественный оператор. Дробная производная Герасимова — Капуто [1, p. 11] функции h определяется формулой

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}(t)\right), t > t_0.$$

В области $(0,1)\times[t_0,\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, рассмотрим начально-краевую задачу для полулинейного уравнения дробного порядка

$$\frac{\partial^l w}{\partial t^l}(s,t_0) = v_l(s),\ l = 0,1,\dots,r-1,\ s \in (0,1), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k \Delta w}{\partial t^k}(s,t_0) = \Delta v_k(s),\ k = r, r+1,\dots,m-1,\ s \in (0,1), \tag{2}$$

$$w(0,t) = w(1,t), \quad \frac{\partial w}{\partial s}(0,t) = \frac{\partial w}{\partial s}(1,t), \quad t \geq t_0, \tag{3}$$

$$D_t^\alpha \Delta w + \left|\int\limits_0^1 D_t^{\alpha_1} w(s,t)ds\right|^\beta \int\limits_0^1 D_t^{\alpha_2} w(s,t)ds = 0,\ s \in (0,1),\ t \geq t_0. \tag{4}$$

Здесь $m-1 < \alpha \leq m$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha$, $r-1 < \alpha_2 \leq r$, $\beta > 0$. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в пространстве $L_2(0,1)$. Возьмем $\mathcal{X} = \{v \in H^2(0,1) : v(0) = v(1), v'(0) = v'(1)\}$, $\mathcal{Y} = L_2(0,1)$, $\tilde{v} = v_0 + \frac{v_1}{1!}(t-t_0) + \frac{v_2}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{v_{m-1}}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1}$, для v_k, $k = 0,1,\dots,m-1$, из условий (1), (2).

Теорема. Пусть $m-1 < \alpha \leq m$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha$, $r-1 < \alpha_2 \leq r$, $\beta > 0$, $v_l \in \mathcal{X}$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $\langle v_k, 1\rangle = 0$, $k = r, r+1,\dots,m-1$, $D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0}\langle\tilde{v},1\rangle \neq 0$, $D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0}\langle\tilde{v},1\rangle = 0$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (1)–(4) имеет единственное решение на множестве $(0,1)\times[t_0,t_1]$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант № 20-31-90015 и фонда перспективных научных исследований ФГБОУ ВО "ЧелГУ".

[1] Bajlekova E.G. Fractional evolution equations in Banach spaces: PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.

Неравенство Сегё-Вайнбергера для симметричных областей с дырами

Бобков В.Е.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\mu_2(\Omega)$ есть первое ненулевое собственное значение оператора Лапласа с условиями Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Сегё (при $N = 2$) и Вайнбергер (при $N \geq 2$) показали, что среди всех областей равного объема, $\mu_2(\Omega)$ достигает максимума если Ω - шар. Мы развиваем подход Вайнбергера в двух направлениях. Во-первых, мы уточняем результат Сегё-Вайнбергера для класса областей вида $\Omega_{\text{out}} \setminus \overline{\Omega}_{\text{in}}$, которые являются либо центрально-симметричными, либо симметричными порядка 2 (относительно каждой координатной плоскости (x_i, x_j)). А именно, мы показываем, что для таких областей $\mu_2(\Omega_{\text{out}} \setminus \overline{\Omega}_{\text{in}}) \leq \mu_2(B_\beta \setminus \overline{B}_\alpha)$, где B_α, B_β - шары с центром в начале координат, такие что $B_\alpha \subset \Omega_{\text{in}}$ и $|\Omega_{\text{out}} \setminus \overline{\Omega}_{\text{in}}| = |B_\beta \setminus \overline{B}_\alpha|$. Во-вторых, мы получаем неравенства типа Сегё-Вайнбергера для старших собственных значений, налагая дополнительные условия на симметрии области. В частности, если $\Omega_{\text{out}} \setminus \overline{\Omega}_{\text{in}}$ симметрична порядка 4, то $\mu_i(\Omega_{\text{out}} \setminus \overline{\Omega}_{\text{in}}) \leq \mu_i(B_\beta \setminus \overline{B}_\alpha)$ для $i = 3, \ldots, N + 2$.

Доклад по работе [1].

[1] Anoop, T. V., Bobkov, V., & Drabek, P. (2021). Szegő-Weinberger type inequalities for symmetric domains with holes. arXiv:2102.05932.

Разрешимость задачи Коши для одного класса линейных уравнений с несколькими дробными производными

Бойко К.В., Федоров В.Е.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — некоторое банахово пространство, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$. Рассмотрим задачу Коши

$$x^{(l)}(0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

для уравнения

$$D_t^\alpha x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} x(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Решением задачи (1), (2) назовем функцию $z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, для которой

$$g_{m-\alpha} * \left(z - \sum_{l=0}^{m-1} z^{(l)}(0) \frac{t^l}{l!} \right) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$$

выполняется равенство (2) при всех $t \geq 0$ и условия (1).

Введем в рассмотрение семейство операторов при $l = 0, 1, \ldots, m-1$

$$X_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda^{\alpha_k} \right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=1}^{n_l} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) e^{\lambda t} x_l d\lambda,$$

где n_l количество элементов α_k, удовлетворяющих условию $l \leq m_k - 1$, $m_k = \lceil \alpha_k \rceil$, $k = 1, 2, \ldots, n$, γ — соответствующий контур Ганкеля. С помощью методов преобразования Лапласа [1, 2] для векторнозначных функций получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть $A_l \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), при этом оно имеет вид $x(t) = \sum\limits_{l=1}^{n} X_l(t) x_l$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 21-51-54003.

[1] Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. Basel: Springer, 1993.

[2] Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Basel: Springer, 2011.

О глобальном поведении траекторий одной динамической системы

Воронин С.М., Адарченко В.А., Панов А.В.
ЧелГУ, г.Челябинск, Россия

Рассматривается система уравнений двухфазной газовой динамики, предложенная Х.А. Рахматулиным[1]. Из этой системы выделяется инвариантная подмодель стационарных сферически симметричных движений. Подмодель может быть сведена к динамической системе в $\mathbb{R}^3$

$$q_1' = q_1(-\mu(q_1 - q_2)q_1 r + 2a^2 q_2 \tau),$$

$$q_2' = (q_1 - q_2) r (q_1^2 - a^2),$$

$$r' = q_2 \tau r (q_1^2 - a^2),$$

где производная берется по некоторому параметру, q_1, q_2 — скорости фаз, r — расстояние до начала координат, τ, a, μ — время релаксации скоростей фаз, скорость звука в несущей среде, отношение начальных расходов фаз через поверхность сферы $\mu = \frac{\rho_{20} q_{20} r_0^2}{\rho_{10} q_{10} r_0^2}$.

Исследованию фазового портрета данной системы во всём пространстве $\{(q_1, q_2, r) \in \mathbb{R}^3 : q_1 > 0, q_2 > 0, r > 0\}$ посвящен доклад.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-41-740004 р_а_Челябинск)

[1] Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.

Резольвенты эллиптических операторов на графах с малыми ребрами: голоморфность и ряды Тейлора

Борисов Д.И.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается произвольный метрический граф, к которому приклеивается произвольный граф с малыми ребрами. Длины малых ребер пропорциональный малому положительному параметру ε. На таком графе рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка. Соответствующее дифференциальное выражение имеет общий вид с произвольными переменными коэффициентами и общими матричными краевыми условиями в вершинах. Все коэффициенты также могут зависеть от параметра ε, причем коэффициенты в краевых условиях и коэффициенты дифференциального выражения на ребрах конечной длины – голоморфны по ε, а коэффициенты дифференциального выражения на малых ребрах – меромофрны по ε.

Мы определяем специальный оператор на определенном графе, полученном растяжением упомянутых выше малых ребер до конечного размер и предполагаем, что такой оператор не имеет вложенных собственных значений на краю существенного спектра. При таком предположении показано, что резольвента исходного возмущенного оператора голоморфна по параметру ε в определенном смысле. В работе получено разложение этой резольвенты в равномерно абсолютно сходящийся ряд типа Тейлора, получены эффективные оценки остатков в этом ряде и приведен алгоритм, позволяющий достаточно явно определять коэффициенты данного ряда.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).

Равномерная резольвентная сходимость для эллиптических операторов в областях, перфорированных вдоль заданного многообразия

Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И.
БГПУ им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с границей класса C^2, $S \subset \Omega$ – многообразие без края класса C^2 коразмерности 1, ε – малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – функция, удовлетворяющая неравенству: $0 < \eta(\varepsilon) \leqslant 1$, $\mathbb{M}^\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ – произвольное множество, M_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ – точки, удовлетворяющие условию: $\inf_{p \neq k} |M_k^\varepsilon - M_p^\varepsilon| \geqslant C\varepsilon$, где $C > 0$ – константа, не зависящая от ε, $\omega_{k,\eta}$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ – ограниченные области с границами класса C^2, $\omega_k^\varepsilon := \{x : (x - M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1} \in \omega_{k,\eta}\}$, $\theta^\varepsilon := \bigcup_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} \omega_k^\varepsilon$, $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus \theta^\varepsilon$. Через $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_i = A_i(x)$, $A_0 = A_0(x)$ обозначим функции, заданные в Ω и удовлетворяющие условиям: $A_{ij}, A_i \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_0 \in L_\infty(\Omega)$, $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$, $\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c_0|\xi|^2$, $x \in \Omega$, $\xi = (\xi_1 \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, где $c_0 > 0$ – константа, не зависящая от x и ξ. Рассматривается краевая задача:

$$\Big(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0 - \lambda\Big) u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon,$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{n}} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \cos(\nu, Ox_i) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где λ – вещественное число, $f \in L_2(\Omega)$, $\cos(\nu, Ox_i)$ – косинус угла между осью Ox_i и единичной нормалью ν к $\partial\theta^\varepsilon$, направленной внутрь θ^ε. Введем еще одну краевую задачу:

$$\Big(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0 - \lambda\Big) u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Наш основной результат утверждает, что при некоторых дополнительных предположениях относительно многообразия S и отверстий ω_k^ε верно неравенство:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C(\varepsilon\eta + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{n}{2}})\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε и f, но зависит от λ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).

Об условии псевдорегулярного движения гироскопа с одной закреплённой точкой

Войтик В.В., Мигранов Н.Г.
Башкирский государственный медицинский университет, г. Уфа, Россия

Псевдорегулярное движение определяется обычно для случая быстрого гироскопа (например [1]). Оказывается, однако, что это требование слишком жёсткое. Условие существования такого движения допускает обобщение.

Теорема. Пусть μ - масса гироскопа, l - расстояние от точки опоры до центра масс, $I_1' = I_1 + \mu l^2$, I_1 - момент инерции вдоль оси перпендикулярной оси симметрии, I_3 - момент инерции вдоль оси симметрии гироскопа. Гироскоп имеет три интеграла движения M_z -проекция момента на выделенную ось координат, M_3 - проекция момента на ось симметрии гироскопа и энергия E. Обозначим

$$E - \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{M_3^2}{2I_1'} = b\,, \tag{1}$$

$$\frac{M_z M_3}{I_1'} - \mu g l = c\,, \tag{2}$$

$$E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \frac{M_z^2}{2I_1'} = d\,. \tag{3}$$

D и ϵ есть соответственно

$$D = \sqrt{b^2 - 3\mu g l\, c}\,, \tag{4}$$

$$\epsilon = \frac{3b^2 D - D^3 - 2b^3}{27(\mu g l)^2} + \frac{c(b-D)}{3\mu g l} + d\,. \tag{5}$$

Тогда для достаточно малой $\epsilon > 0$ движение гироскопа по углу нутации будет представлять собой малое колебание с частотой

$$\omega_0 = \sqrt[4]{\frac{4}{I_1'^2}\left[\left(E - \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{M_3^2}{2I_1'}\right)^2 - 3\mu g l\left(\frac{M_z M_3}{I_1'} - \mu g l\right)\right]}\,. \tag{6}$$

Условие $\epsilon \approx 0$ представляет собой обобщение предыдущего условия быстрого гироскопа.

[1] Chernousko F. L., Akulenko L.D., Leshchenko D. D. Evolution of motions of a rigid body about its center of mass. Springer International Publishing, eBook, 2017, pp. 36-40. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7

Переопределенная задача Неймана для уравнения Лапласа на неограниченных областях

Волчков В.В., Волчков Вит.В.
Донецкий национальный университет, г.Донецк

В 1971 году Д. Серрин [1] инициировал изучение переопределенных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Помимо значительного самостоятельного интереса, такие задачи имеют важные приложения в теории потенциала, интегральной геометрии, гидродинамике, электростатике и теории капиллярности. В данной работе рассматривается переопределенная задача Неймана для уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ на плоских неограниченных областях.

Пусть Γ – замкнутая гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G – ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

Теорема 1. Предположим, что существует функция f, непрерывная в $\mathbb{C} \setminus G$ и гармоническая в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $f = 0$ на Γ; 2) $\dfrac{\partial f}{\partial n} = 1$ на Γ; 3) $f(z) = o\left(|z|^2\right)$, $z \to \infty$. Тогда G является кругом, и при этом $f(z) = R \ln \frac{|z - z_0|}{R}$, где z_0, R – центр и радиус G.

Теорема 2. Существуют отличная от круга ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$ с жордановой границей Γ класса C^∞ и функции f_1, f_2, f_3, принадлежащие $C^\infty(\mathbb{C} \setminus G)$ и гармонические в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, такие что: 1) f_1 удовлетворяет условиям 1 и 3 теоремы 1; 2) f_2 удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы 1; 3) f_3 удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 1, и при этом $f_3(z) = O\left(|z|^2\right)$ при $z \to \infty$.

Доказательство теоремы 1 использует граничные свойства конформных отображений, теорему В.И. Смирнова о функциях класса H_p и теорему Фейера-Рисса о неотрицательных тригонометрических полиномах.

[1] Serrin J. A symmetry problem in potential theory // Arch. Rational Anal. Mech. V. 43. 1971. P. 304–318.

Стирание особенностей функций с нулевыми интегралами по кругам

Волчкова Н.П., Волчков Вит.В., Ищенко Н.А.
Донецкий национальный технический университет, Донецкий национальный университет, г.Донецк

Изучается локальное преобразование Помпейю, ассоциированное с единичным кругом на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со сферической метрикой (см. [1], [2]). Найдено точное условие, при котором функции из ядра указанного преобразования принадлежат ядру соответствующего глобального преобразования Помпейю на $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, PSU(2) – группа дробно-линейных преобразований вида $\tau_{a,c}(z) = \dfrac{az - \overline{c}}{cz + \overline{a}}$, где $a, c \in \mathbb{C}$, и $|a|^2 + |c|^2 = 1$. Элементы группы PSU(2) являются преобразованиями расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Положим

$$\mathfrak{K}_+ = \{f \in C(\mathbb{C}) : \int_{\tau_{a,c}(B)} f(z)d\mu(z) = 0, \quad |a|^2 + |c|^2 = 1,\ |a| - |c| > 0\},$$

$$\mathfrak{K}_- = \{f \in C(\overline{\mathbb{C}}) : \int_{\tau_{a,c}(B)} f(z)d\mu(z) = 0, \quad |a|^2 + |c|^2 = 1,\ |a| - |c| \leq 0\},$$

где $d\mu(z) = (1 + |z|^2)^{-2}dm(z)$, $dm(z)$ – мера Лебега на $\mathbb{C}$.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathfrak{K}_+$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)z^{-3} = 0$, $f_+(z) = f(z)$ при $z \in \mathbb{C}$, и $f_+(\infty) = f(0)$. Тогда $f_+ \in \mathfrak{K}_-$.

Отметим, что условие $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)z^{-3} = 0$ в теореме 1 нельзя заменить условием $f(z) = O(z^3)$, $z \to \infty$.

[1] Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[2] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.

Преобразования Лежандра и их применения в комплексном анализе

Гайсин А.М.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\mathbb{R}_+ = (0,\ \infty)$, $H\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — убывающая функция, $H(y) \downarrow 0$ при $y \to \infty$, $H(y) \uparrow \infty$ при $y \to 0+$. Выберем $d > 0$ так, чтобы $m(d) = 1$, $m(y) = \ln H(y)$.

Нижним преобразованием Лежандра функции $m(y)$ называется

$$(Lm)(x) = \inf_{0<y\leq c}[m(y) + yx], \quad x > 0.$$

Как нижняя огибающая возрастающих линейных функций, $\varphi(x) = (Lm)(x)$ — вогнутая возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, $0 \leq \varphi(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$.

Наибольшая выпуклая миноранта $h(y)$ функции $m(y)$ называется верхним преобразованием Лежандра функции $\varphi(x)$:

$$h(y) = (U\varphi)(y) = \sup_{x>0}[\varphi(x) - xy], \quad y > 0.$$

Хорошо известно, что (см. [1], [2]) интегралы

$$\int_0^c \ln h(y)dy, \quad \int_0^d \ln m(y)dy, \quad \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}dx$$

сходятся и расходятся одновременно (здесь число $c > 0$ выбрано так, что $h(c) = 1$).

В докладе речь пойдет о других свойствах преобразований Лежандра и их применениях в теории функций, в частности, задачах, связанных с теоремами типа Левинсона-Щёберга-Волфа и известных проблемах Е.М. Дынькина.

[1] Koosis P. The Logarithmic Integral. I. Cambridge Univ. Press, 1988.

[2] Bearling A. Analytic continuation arcoss a linear boundary // Acta Math. 1972. V. 128. P. 153 – 182.

О неполноте системы экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$

Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — произвольная последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность,

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n} z^{2n}.$$

Положим $M_{2n} = a_{2n}^{-1}$, $M_{2n+1} = \infty$.

Дугу γ, заданную уравнением $\gamma(t) = t + ih(t)$ $(0 \le t \le 1)$, где функция h удовлетворяет условию Липшица

$$\sup_{t_1 \ne t_2}\left|\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}\right| = M_\gamma < \infty,$$

будем называть *дугой ограниченного наклона.*

Справедлива

Теорема. *Пусть выполняется условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n} < \infty,$$

а $\{M_n^c\}$ *— выпуклая регуляризация последовательности* $\{M_n\}$.

Если для любого $n \geq 1$ при некотором k $(0 \leq k < n)$ имеет место оценка

$$\frac{\ln M_n^c}{n} - \frac{\ln M_k^c}{k} \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \ln n,$$

то система экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ не полна в $C(\gamma)$, где γ — любая дуга ограниченного наклона.

Доказательство теоремы опирается на один результат работы [1].

[1] Гайсин А.М., Кинзябулатов И.Г. Теорема типа Левинсона-Шёберга. Применения // Матем.сб. 2008. Т. 199. № 7. С. 41–62.

Разложение функций с заданной мажорантой роста в ряды Дирихле

Гайсина Г.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть D — выпуклый многоугольник, $A_p(D)$ — пространство аналитических в D функций f порядка

$$\rho = \varlimsup_{z \to \partial D} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad a^+ = \max(a, 0),$$

не выше p (сходимость — равномерная на компактах из D). В [1] показано, что любая функция f из $A_p(D)$ допускает в D разложение

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},$$

причем ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|$ имеет также порядок не выше p.

В [2] этот результат из [1] перенесен на случай, когда D — полуплоскость $\Pi_0 = \{z = x + iy\colon\ x > 0\}$.

Пусть K_0 — класс функций F, регулярных в Π_0 и обладающих свойствами:

1. $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в любой полуплоскости $\{z = x + iy\colon x \geq s > 0\}$ равномерно относительно $\arg z$;

2. для любого $s > 0$

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} |F(z)||dz| < \infty.$$

Теорема. Пусть $F \in K_0$, причем $T_F(s) \leq A_F H(s)$, где H — убывающая на $(0, \infty)$ функция, $H(s) \uparrow \infty$ при $s \to 0$. Предположим, что

$s^k H(s) \to \infty$ при $s \to 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, причем функции $m(s) = \ln H(s)$ $(s > 0)$ и $m(e^{-t})$ $(t \in \mathbb{R})$ выпуклы. Тогда существует последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^q} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, $q > 1$ — любое, такая, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n z} + \text{целая функция}, \quad z \in \Pi_0,$$

причем при некоторых $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}| \le C H^m \left(\frac{x}{m}\right).$$

Следствие. Если T_F имеет порядок $\rho \le \mu$, то $B(z)$ также имеет порядок не выше μ.

Действительно, достаточно положить $H(x) = \exp\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu}\right]$. Тогда $H^m\left(\frac{x}{m}\right) = \exp\left[m^{1+\mu}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu}\right]$.

[1] Леонтьев А.Ф., Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы, Изв. АН СССР. Сер. матем., 44:6 (1980), 1308 – 1328.

[2] Гайсин А.М. Поведение суммы ряда Дирихле вблизи границы области регулярности, Дисс. канд. физ.-мат. наук, 1982, Уфа.

Меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно некоторых гамильтоновых потоков

Глазатов В.А., Сакбаев В.Ж.

ИИТММ ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия;
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Изучение инвариантности мер на не являющихся локально компактными топологических векторных пространствах относительно различных групп преобразований побуждает, согласно теореме А. Вейля, рассматривать меры, не обладающими свойствами меры Лебега. Так, в [1] была построена инвариантная относительно сдвигов мера на пространстве последовательностей, не являющаяся локально конечной и σ-конечной. В [2] построена конечно-аддитивная мера на гильбертовом пространстве, инвариантная относительно сдвигов и ортогональных преобразований. В [3] были предложены обобщенные меры Лебега на гильбертовом пространстве, являющиеся функционалами на подходящем пространстве пробных функций, инвариантные относительно сдвигов и ортогональных преобразований.

Исследуется продолжение меры из работы [2], инвариантное относительно потоков, порождаемых некоторыми гамильтоновыми полями.

Теорема. Пусть на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E задана симплектическая форма ω, которая в некотором ОНБ $\{e_n\}$ пространства E задается условием $\omega(e_{2k}, e_n) = \delta_{2k-1,n}$, $k, k \in \mathbb{N}$. Тогда на пространстве E существует конечно-аддитивная локально-конечная и σ-конечная мера, инвариантная относительно гамильтоновых потоков в фазовом пространстве E, оставляющих инвариантными двумерные подпространства
$E_k = \mathrm{span}(e_{2k-1}, e_{2k}),\ k \in \mathbb{N}$.

Найденная группа преобразований инвариантной меры включает сдвиги на любой вектор, порождаемый произвольным линейным уравнением Шредингера поток, нешредингеровы линейные и некоторые нелинейные гамильтоновы потоки [4]. Исследован эффект неограниченного возрастания кинетической энергии гамильтоновой системы за конечное время, присущий сверхкритическому нелинейному уравнению Шредингера [5].

[1] *Baker R.* "Lebesgue measure" on $\mathbb{R}^\infty$ Proc. AMS. 1991. **113**:4. P. 1023.

[2] Сакбаев В.Ж. ТМФ. 2017. Т. 191. N° 3. С. 473–502.

[3] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. Доклады РАН. 2020. Т. 492. С. 65–69.

[4] Хренников А.Ю. Изв. РАН. Сер. Мат. 2008. Т. 72 N° 1. С. 137–160.

[5] Сакбаев В.Ж. Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 171–187.

From Puiseux series to algebraic invariants

Demina M.V.

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

Suppose an ordinary differential equation possesses compatible algebraic ordinary differential equations of lower order. These equations are called algebraic invariants. Deriving all the algebraic invariants is not a trivial task. This is due to the fact that an upper bound on the degrees of related irreducible polynomials is not known in advance.

The talk is devoted to the problem of constructing first–order algebraic invariants. The main aim is to present a method that is able to find not some but all irreducible first–order algebraic invariants for a given autonomous algebraic ordinary differential equation [1]. The main idea of the method is to consider the factorization of invariants over the algebraically closed field of Puiseux series in a neighborhood of infinity. We shall present the complete classification of irreducible algebraic invariants for a number of ordinary differential equations interesting from a physical point of view.

Several applications of algebraic invariants will be considered. In the two–dimensional case algebraic invariants are key objects in establishing Darboux and Liouvillian integrability of a second–order original ordinary differential

equation. An ordinary differential equation is Darboux (Liouvillian) integrable if it has sufficient number of independent first integrals that are Darboux (Liouvillian) functions [2]. As an example, we shall solve the Liouvillian integrability problem for the generalized Duffing equations [3].

In addition, algebraic invariants can be used to perform the classification of $\mathbb{W}$–meromorphic solutions of ordinary differential equations. The set of $\mathbb{W}$–meromorphic functions consists of transcendental meromorphic functions that are either elliptic or rational in the exponential function.

The research reported in this talk was supported by Russian Science Foundation grant 19–71–10003.

[1] Demina M.V. Classifying algebraic invariants and algebraically invariant solutions. *Chaos, Solitons and Fractals*, **140**, 110219 (2020).

[2] Singer M. F. Liouvillian first integrals of differential systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, **333**, 673–688 (1992).

[3] Demina M.V. Liouvillian integrability of the generalized Duffing oscillators. *Analysis and Mathematical Physics*. **11 (1)**, 25 (2021).

Мероморфное и вещественно-аналитическое продолжение решений векторного нелинейного уравнения Шредингера

Домрин А.В.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия; Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассмотрено уравнение $iu_t = u_{xx} + B(u, \overline{u})u$ на $\mathbb{C}^n$-значную функцию $u(x, t)$ от вещественных переменных x, t, где B — невырожденная эрмитова форма. Показано, что любое локальное вешественно-аналитическое решение допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфной функции от x. В полностью фокусирующем случае, когда эрмитова форма B положительно определена, показано, что любое локальное вещественно-аналитическое решение продолжается вещественно-аналитически в некоторую (зависящую от решения) полосу, параллельную оси x, и что на каждой такой полосе существует решение, не продолжаемое никуда дальше. Полученные результаты обобщаются на старшие и смешанные потоки векторных и матричных нелинейных уравнений Шредингера, системы Форди–Кулиша, случай темных солитонов, уравнение Саса–Сатсумы и др. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-01-00474.

Достаточные условия нелокальной разрешимости системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами

Донцова М.В.
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В [1] рассмотрена задача Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ — неизвестные функции, $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ — известные функции, с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

В [1] получена система интегральных уравнений:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $C_f = \max\{\sup\limits_{\Omega_T}|f_i|\,, \sup\limits_{\Omega_T}|\partial_x f_i|\,, i = 1,2\}$,

$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}\,,\ \ C_\varphi = \max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right|\,|i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\}$,

где K — положительное число.

Теорема. Пусть $\varphi_1,\varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1,f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ \ S_1,S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, где $K = C_\varphi + TC_f$ и выполняются условия

1) $\partial_u S_1 < 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 < 0,\ \partial_v S_2 < 0$ на Z_K,

2)$\varphi_1'(x) \le 0,\ \varphi_2'(x) \le 0$ на R, 3)$\partial_x f_1 \le 0,\ \partial_x f_2 \le 0$ на Ω_T.

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1),(2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

[1] Донцова М.В. Достаточные условия нелокальной разрешимости системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020.Т. 55. С. 60–78.

Дифференциация волатильности в очереди биржевых заявок

Дышаев М. М., Ратанов Н. Е., Туров М. М.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Исследуется непараметрическая оценка реализованной волатильности с дифференциацией по кумулятивным объемам в очереди биржевых заявок (книге лимитных ордеров, the limit order book, LOB).

На $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ рассматривается процесс лог-цены базового актива $X_t = \ln S_t$ такой, что $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$. Предполагается, что наблюдаемым является процесс $Y_t = X_t + \varepsilon_t$, процесс шума ε_t не зависит от скрытого процесса X_t и не содержит скачков.

Используя фактические данные Московской Биржи (фьючерсный контракт на Brent, 05/05/2020 – 30/12/2020г), проведено сравнение (см. Рис. 1) наблюдаемой волатильности $Vol(Y_t)$ и волатильности несмещенной двухмасштабной оценки $Vol(TSRV)$ для каждого интервала кумулятивных объемов. $TSRV$ определена в [1] как:

$$TSRV = (1 - \frac{\bar{n}}{n})^{-1} \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{t_j, t_{j+} \in G^{(k)}} \left(Y_{t_{j+}} - Y_{t_j}\right)^2 - \frac{\bar{n}}{n} \sum_{i=1}^{N} (Y_{i+1} - Y_i)^2 \right]$$

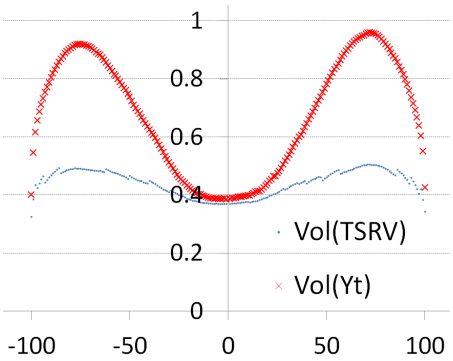


Рис. 1: Сравнение $Vol(Y_t)$ и $Vol(TSRV)$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740020.

[1] Zhang, L. and Mykland, P.A. and Aït-Sahalia, Y. A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data. Journal of the American Statistical Association, 2005, vol. 100, no. 472, pp. 1394–1411.

Модификация модели RAPM для различных функций стоимости ликвидности

Дышаев М.М., Федоров В.Е., Авилович А.С.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В модель ценообразования опционов RAPM (Risk Adjusted Pricing Methodology) [1] добавлен учет стоимости ликвидности в зависимости от количества приобретаемого или реализуемого актива (h) в виде семейства функций $l(h) = \frac{1}{2}\varepsilon h^{\alpha}, \varepsilon > 0, \alpha \geq 1$. Общая функция риска получена в виде:

$$r_R = \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}\Delta t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^{\alpha}(\sigma x|u_{xx}|)^{\alpha}\Delta t^{\frac{\alpha}{2}-1}. \quad (1)$$

где k — коэффициент транзакционных издержек, R — удельный коэффициент премии за риск, который должен учитывать трейдер из-за редкого хеджирования портфеля, ε — удельные затраты на ликвидность при покупке или продаже одного лота, x — цена базового актива (акции), σ — волатильность базового актива, $u(t,x)$ — цена опциона.

Следуя методу из [1], получаем модифицированное уравнение Блека — Шоулса (например, для случая $\alpha = 2$):

$$u_t - \frac{1}{2}\sigma^2\left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} - pxu_{xx}\right)x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \quad (2)$$
$$q = 3(k^2 R/2\pi)^{1/3}, \quad p = 2\varepsilon/\pi.$$

Формула (2) обобщает модель RAPM для учета стоимости ликвидности. Метод численного решения начально-краевых задач предложен в [2]. Методами группового анализа модель исследована в [3]

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00244.

[1] Jandačka M. and Ševčovič D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. Journal of Applied Mathematics, 2005, vol. 2005, no. 3, pp. 235–258.

[2] Dyshaev, M. and Fedorov V. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. Mathematical notes of NEFU, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 94–108.

[3] Fedorov V. and Dyshaev M. Group classification for a class of non-linear models of the RAPM type Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021, vol. 92, pp. 105471.

Авторезонансный метод управления характеристиками бризера и солитона уравнения синус-Гордона в модели с притягивающими примесями, силой и затуханием

Екомасов Е.Г.[1,2], Назаров В.Н.[3], Самсонов К.Ю.[1], Муртазин Р.Р.[2]

[1]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия
[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия
[3]ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассмотрена генерация и авторезонансное возбуждение магнитного бризера и солитона в трехслойном ферромагнетике полями переменной частоты и малой амплитуды при наличии диссипации в системе. Полученное уравнение движения для намагниченности в виде уравнения синус-Гордона в модели с притягивающей примесью и внешним магнитным полем решалось численно с использованием явной схемы интегрирования. Внешнее поле является переменным по времени с малой амплитудой и частотой, являющейся линейной функцией времени [1]. Распределение намагниченности в начальный момент времени задавалось в виде блоховской доменной границы, находящейся далеко от притягивающей примеси. При определенных значениях параметров примеси при прохождении доменной границы через нее, образуется магнитная неоднородность в виде магнитного бризера или солитона. Анализ решений уравнения движения в переменном поле показывает возможность при определенных условиях увеличение со временем амплитуды магнитного бризера [2]. Для каждого случая значений параметров магнитной анизотропии имеется пороговое значение амплитуды магнитного поля приводящее к резонансу. На резонансный эффект влияют также геометрические параметры притягивающей примеси. При большой ширине возбуждается еще и трансляционная мода колебаний бризера. Подобный метод справедлив и для авторезонансного управления характеристиками магнитного солитона, только с отличающимися от бризера частотами [3]. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90048.

[1] Назаров В.Н., Екомасов Е.Г. Письма о материалах, **8**:2 (2018), 158-164.

[2] Екомасов Е.Г., Назаров В.Н., Гумеров А.М., Самсонов К.Ю., Муртазин Р.Р. Письма о материалах, **10**:2 (2020), 141-146.

[3] Екомасов Е.Г., Назаров В.Н., Самсонов К.Ю., Муртазин Р.Р. Письма в ЖТФ, (2021), (принята в печать).

Структура и динамика магнитных вихрей Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица в модели с внешней силой и затуханием

Екомасов Е.Г.[1,2], Степанов С.В.[2], Антонов Г.И.[2], Звездин К.А.[3]
[1]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия
[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия
[3]Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН г. Москва, Россия

Вихревые решения Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица привлекают повышенное внимание исследователей [1]. Наличие в этом уравнении слагаемого, учитывающего взаимодействие намагниченности и спин-поляризованного тока, позволяет исследовать процессы переключения и возбуждения осцилляций намагниченности в магнитных наноструктурах с помощью тока и внешнего магнитного поля. Интересны для рассмотрения, в этом плане, микроволновые спин-трансферные наноосцилляторы (СТНО). Большинство таких структур имеют два магнитных слоя, разделенных немагнитной прослойкой. Перспективными для практических приложений являются вихревые СТНО в которых магнитный вихрь реализуется как основное состояние в ферромагнитных слоях.

В работе проведено исследование динамики и структуры двух дипольно связанных магнитных вихрей в СТНО большого диаметра, под действием внешнего магнитного поля и спин-поляризованного электрического тока. Найдены различные режимы связанного движения вихрей [2]. Показана возможность управления частотой стационарного движения вихрей и подстройки амплитуды управляющих токов с помощью внешнего магнитного поля. Построена зависимость величины магнитного поля, раздельно переключающего полярность вихрей от величины спин-поляризованного тока. Рассмотрены особенности динамического и квазистатического сценариев переключения полярности вихря при различных значениях поля/тока. Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 19-02-00316/19

[1] Ekomasov A.E., Stepanov S.V., Zvezdin K.A., Ekomasov E.G. JMMM, **471** (2019), 513-520.

[2] Екомасов Е.Г., Степанов С.В., Звездин К.А., Пугач Н.Г., Антонов Г.И. ФММ, **122**:3 (2021), 212-220.

Интегрируемые отображения в плоскости и их периодические траектории

Ефремова Л.С.
Нижегородский гос.университет им. Н.И. Лобачевского, г.Н.Новгород,
Московский физико-технический институт, г.Долгопрудный, Россия

Рассматриваются отображения в плоскости $\mathbb{R}^2$, обладающие свойством геометрической интегрируемости [1].

Определение [1]. Говорим, что отображение G, определенное в некоторой (открытой или замкнутой) области $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ и принимающее значения в Π, *(геометрически) интегрируемо*, если существует отображение ψ некоторого промежутка J прямой $\mathbb{R}^1$ в себя, полусопряженное с G при помощи некоторой непрерывной сюръекции $H : \Pi \to J$, то есть справедливо равенство

$$H \circ G = \psi \circ H.$$

При этом отображение $\psi : J \to J$ называется *фактором* интегрируемого отображения $G : \Pi \to \Pi$.

Доказана теорема, содержащая необходимые и достаточные условия геометрической интегрируемости отображений в плоскости.

Решена задача сосуществования периодов периодических точек геометрически интегрируемых отображений с фактором, представляющим собой разрывное симметричное отображение Лоренца, полученное из непрерыного унимодального отображения отрезка. В качестве примера применения указанных результатов приведено описание периодов периодических точек "двумерного"отображения Лоренца [2] с симметричным фактором, полученным из непрерыного унимодального отображения отрезка.

[1] Belmesova S.S., Efremova L.S. "On the concept of integrability for discrete dynamical systems. Investigation of wandering points of some trace map", *Nonlin. maps and their applic.*, Springer Proc. Math. Statist., **112**, Springer, Cham, 2015, 127-158.

[2] В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, "О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца", *Труды ММО*, **44**, 1982, 150-212.

Учет потенциала течения при измерениях поля самопроизвольной поляризации в скважинах

Жонин А.В., Кузьмичев О.Б., Мартынова Ю.В.
ООО «РН-БашНИПИнефть», г. Уфа, Россия

Измеряемое в скважинах естественное электрическое поле (потенциал спонтанной поляризации) состоит из трех составных частей:

1. электрическое поле, создаваемое адсорбцией ионов одного знака на границе твердой и жидкой фаз [1];

2. электрическое поле диффузии раствора солей при различиях в их концентрациях в пластовом флюиде и буровом растворе;

3. электрическое поле фильтрации флюида в проницаемых породах.

Диффузионный потенциал имеет тот же знак, что и адсорбционный, образуя единый диффузионно-адсорбционный потенциал [2].

Фильтрационный потенциал можно оценить формулой Гельмгольца. При фильтрации флюида из пласта в скважину потенциал фильтрации со стороны пласта выше, но он частично подавлен высокой минерализацией пластового флюида. При фильтрации из скважины в пласт потенциал напротив проницаемого пласта понижается, но после образования глинистой корки процесс фильтрации приостанавливается.

В среде с отрицательным потенциалом твердой фазы и отрицательным дзета-потенциалом напротив продуктивного пласта наблюдается максимум фильтрационного потенциала, нивелируемый понижением адсорбционного потенциала.

Величина фильтрационных потенциалов обычно мала и оказывает влияние на измерения самопроизвольной поляризации, когда электропроводность пласта мала $\sigma \leq 1$ См/м. Величина фильтрационных потенциалов становится значимой в карбонатных породах, когда величина диффузионно-адсорбционного потенциала, обусловленная адсорбцией глин, становится намного меньше.

[1] Исламгалиев Д. В., Кузьмичев О.Б., Ратушняк А. Н. Вклад электрического фильтрационного потенциала в самопроизвольный при интерпретации каротажа спонтанной поляризации // НТВ Каротажник. – 2012. – №2 (212). – С.49-55.

[2] О.Б. Кузьмичев, А.В. Жонин, Ю.В. Мартынова, С.А. Коломасова. Решение обратной задачи каротажа собственной поляризации в пачке пластов с зоной проникновения (терригенный разрез) // Нефтяное хозяйство. – 2019. – №10. – С. 38–41.

Особенности электронной структуры поверхности $MnBi_2Te_4$ во внешнем электрическом поле

Зайцев Н.Л.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Соединение $MnBi_2Te_4$ является слоистым антиферромагнитным топологическим изолятором, где каждые семь моноатомных слоев вдоль направления [0001] связаны силами Ван дер Ваальса [1]. Подрешетка марганца индуцирут спонтанную намагниченность, которая взаимодействует

с нетривиальными топологическими поверхностными состояниями образованными в результате спин-орбитального взаимодействия сотояний висмута и теллура и открывает щель в точке Дирака [2].

Внешнее электрическое возмущение может привести к неожиданным оссобенностям электронных свойст данного соединения, поэтому в данной работе методом теории функционала электронной плотности исследуются изменения электронных и спиновых состояний поверхности (0001) соединения $MnBi_2Te_4$ во внешнем электрическом поле.

Из анализа проведенных расчетов выяснилось, что в ответ на электрическое возмущение, изменяются магнитные моменты атомов крайнего семислойника рассматриваемой поверхности, тем сильнее, чем ближе они располагаются к краю поверхности. Анализ поверхностных нетривиальных топологических состояний показывает, что изменяется щель в этих состояниях, открытая в результате воздействия обменного поля, созданного магнитной подрешеткой исследуемого соединения.

[1] Otrokov M.M., Klimovskikh I.I., Bentmann H. et.al. Prediction and observation of an antiferromagnetic topological insulator, Nature. 576 (2019) 416–422.

[2] Tokura Y., Yasuda K., Tsukazaki A., Magnetic topological insulators, Nature Reviews Physics. 1 (2019) 126–143.

A universal form for one-dimensional potentials with spectral singularities

Zezyulin D.A.[1] and Konotop V.V.[2]

[1]ITMO University, St. Petersburg, Russia;

[2]Universidade de Lisboa, Portugal

One-dimensional scattering is described by the Schrödinger equation

$$-\psi_{xx} + U(x)\psi = k^2\psi, \tag{1}$$

where $U(x)$ is a localized complex-valued potential, i.e., $\lim\limits_{x\to\pm\infty} U(x) = 0$, and k is a spectral parameter. We say that real number $k = k_0$ is a spectral singularity of potential $U(x)$ if the corresponding wavefunction $\psi(x)$ is characterized by the following asymptotic behavior:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[\psi(x) - e^{\pm ik_0x}\rho_\pm] = 0 \quad \text{for some } \rho_\pm \neq 0. \tag{2}$$

We establish necessary and sufficient conditions for localized complex potentials in the Schrödinger equation to enable spectral singularities and show that such potentials have the universal form

$$U(x) = -w^2(x) - iw_x(x) + k_0^2, \tag{3}$$

where $w(x)$ is a differentiable complex-valued function, such that $\lim_{x\to\pm\infty} w(x) = \mp k_0$ [1]. Using this result, we propose a systematic approach to construction of potentials with multiple spectral singularities and with spectral singularities of the second order [2]. The results can be generalized for discrete one-dimensional lattice arrays [3]

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - U_n\psi_n = 2\psi_n \cos k, \quad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

where U_n is a localized complex-valued discrete potential: $\lim_{n\to\pm\infty} U_n = 0$. In this case the universal form reads as $U_n = e^{iw_n} + e^{-iw_{n+1}} - 2\cos k_0$, where w_n is a biinfinite sequence such that $\lim_{n\to\pm\infty} w_n = \mp k_0$.

[1] D. A. Zezyulin and V. V. Konotop, A universal form of localized complex potentials with spectral singularities, New Journal of Physics 22, 013057 (2020).

[2] V. V. Konotop and D. A. Zezyulin, Construction of potentials with multiple spectral singularities, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 53, 305202 (2020).

[3] D. A. Zezyulin and V. V. Konotop, Universal form of arrays with spectral singularities, Optics Letters 45, 3447 (2020).

Релаксация деформаций нематического жидкого кристалла во внешнем электрическом поле

Зиннуров М.И., Шапошников Н.С.

Башкирский государственный педагогический университет
им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Ранее в [1] проводилось исследование влияния граничных условий на процессы структурообразования в нематике. В данной работе проведен анализ влияния объемной и поверхностной вязкостей на релаксацию деформаций в ячейке нематического жидкого кристалла (НЖК).

Рассмотрен случай, когда директор ячейки НЖК толщиной a в отсутствии внешнего поля ориентирован планарно. При наличии внешнего электрического поля плотность энергии в объеме образца нематика $f = \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\epsilon_a E^2}{8\pi}\cos^2\phi$ (диэлектрическая анизотропия ϵ_a предполагается положительной), а поверхностная энергия имеет вид $g_1 = -\frac{w}{2}\cos^2\phi$.

При $E = E(t)$ угол наклона $\phi = \phi(z,t)$ есть решение дифференциального уравнения в частных производных

$$k\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{8\pi}\epsilon_a E^2 \sin(2\phi) = \eta_a \frac{\partial\phi}{\partial t},$$

при $z = \pm a/2$ удовлетворяющее граничному условию

$$-k\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{2}w\sin(2\phi) - \eta_s\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0.$$

В данной постановке проведено исследование деформации поля директора тонкого слоя НЖК, ограниченного двумя подложками при наличии внешнего постоянного электрического поля E. На основе анализа свободной энергии образца нематика были выведены уравнения, связывающие материальные параметры с видом возникающей деформации. При этом учитывались процессы релаксации этой деформации при выключении искажающего поля. Полученные результаты согласуются с расчетами, приведенными в [2].

[1] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Распределение молекул нематического жидкого кристалла в полупространстве, ограниченном структурированной подложкой // Вестник Поморского университета. Серия «Естественные науки». 2009. №3. С.91-95.

[2] Еникеев Ю.А., Мигранов Н.Г. Математическое моделирование малых деформаций поля директора нематика в двумерных ячейках под действием электрических полей // Вестник УГАТУ. Том 15 (2011). №5 (45), с.73-77.

Разрешимость начальной задачи в банаховом пространстве с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна

Ижбердеева Е.М., Плеханова М.В.

Челябинский государственный университет,
Южно-Уральский государственный университет (НИУ),
Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ (линейный и непрерывный), $D_t^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ – дробная производная Джрбашяна – Нерсесяна [1], где $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим начальную задачу для операторного уравнения

$$D_t^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}x(t) = Ax(t), \quad t > 0. \tag{1}$$

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_{n-2}}\dots D_t^{\alpha_1}x(0) = x_{n-2}; \\ \dots \\ D_t^{\alpha_1}x(0) = x_1; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $\sigma_n = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j - 1, \quad \sigma_n > 0.$

Используя преобразование Лапласа для дробной производной из [2], получим следующий результат.

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Тогда задача (1), (2), при $x_{n-2} = x_{n-3} = \cdots = x_1 = 0$, имеет единственное решение вида

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \lambda^{\sigma_n - 1} \big(\lambda^{\sigma_n} - A\big)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \; x_0.$$

[1] Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Известия академии наук Армянской ССР. 1968. Т. 3, № 4. С. 1–28.

[2] Podlubny I. Fractional Differential Equations // Academic Press: Technical University of Kosice, Slovak Republic. 1998. С. 41–117.

Необходимое условие существования безусловных базисов из воспроизводящих ядер в радиальных гильбертовых пространствах целых функций

Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются радиальные функциональные гильбертовы пространства H целых функций в смысле:

1) все точечные функционалы $\delta_z \, : \, f \to f(z)$ являются непрерывными;

2) если $F \in H$, то $\|F\| = \|F(ze^{i\varphi})\|$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

Из функциональности пространства следует, что оно допускает воспроизводящее ядро $k(\lambda, z)$:

$$f(z) = (f(\lambda), k(\lambda, z)), \; \forall z \in \mathbb{C}, \; \forall f \in H.$$

Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$.

Базис $\{e_k, \; k = 1, 2, ...\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом, если найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого элемента $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ выполняется соотношение

$$c \sum_{j=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \le \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \le C \sum_{j=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Вопрос о существовании и конструировании безусловных базисов из значений воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых

функций в последние годы активно изучается. В работе [1] доказано существовании безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока $\mathcal{F}_{\varphi_\alpha}$ с весами $\varphi_\alpha(\lambda) = (\ln_+ |\lambda|)^\alpha$ при $\alpha \in (1;2]$. В дальнейшем в статье [2] доказано существование безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока с радиальными весами существенно более общего вида. Авторами в [3] показано, что если в радиальном гильбертовом пространстве существует безусловный базис из воспроизводящих ядер и мономы в нем полны, то существует выпуклая последовательность $u(n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такая, что $\|z\|^n \asymp e^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Выпуклость $\{u(n)\}$ означает, что

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Если $u(t)$, кусочно линейная функция с изломами в точках $\mathbb{N}$, то последнее условие можно записать в виде

$$u'_+(n+1) - u'_+(n) \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Это простое утверждение подводит к идее рассматривать более общие пространства целых функций, чем интегрально весовые гильбертовы пространства, используя в качестве инструмента исследований последовательность норм мономов.

Теорема. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, в котором мономы полны. Предположим, что существует кусочно линейная выпуклая функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такая, что $e^{u(n)} \asymp \|z^n\|$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда*

1. Если $u'_+(n+1) - u'_+(n) \geq \sigma > 0$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, то в пространстве H существует безусловный базис;

2. Если для некоторой последовательности $u'_+(n+1) - u'_+(n) \to 0$ и для некоторой последовательности $p_k \in \mathbb{N}$, $p_k \to \infty$ и некоторого $q > 1$

$$\frac{1}{q} \leq \frac{u'_+(n+1) - u'_+(n)}{u'_+(n) - u'_+(n-1)} \leq q, \ |n - n_k| \leq p_k,$$

то в пространстве H безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

[1] Borichev A., Lyubarskii Yu., "Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces", Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, **9** (2010), 449–461.

[2] Baranov A., Belov Yu., Borichev A., "Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces", Studia Mathematica, **236** (2017), №2, 127–142.

[3] К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов, "Геометрия радиальных гильбертовых пространств, допускающих безусловные базисы из воспроизводящих ядер", Уфимск. матем. журн., **12** (2020), №4, 56—65.

Квантово-химическое моделирование эффективности использования полиариленов в интерфейсных структурах

Калимуллина Л.Р.[1], **Лачинов А.Н.**[2], **Байбулова Г.Ш.**[1], **Юсупов А.Р.**[1]
[1] БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия
[2] ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В данной работе был проведен квантово-химический анализ эффективности применения полиариленов в интерфейсных структурах для молекулярных систем, представляющих собой модельные системы полимеров класса полиариленов. Всего в рассмотрение входило 27 представителей данного класса соединений. Методом теории функционала плотности B3LYP/6-31+$G(d)$ теоретически оценены такие энергетические параметры, как полные энергии молекул и их отрицательных и положительных ионов в молекулярной и оптимизированной ионной геометриях; энергии занятых и вакантных молекулярных орбиталей; величины вертикального и адиабатического сродства к электрону и потенциала ионизации, а также дипольный момент.

В настоящей работе предложен алгоритм обработки результатов квантово-химических расчетов на основании анализа энергетических характеристик мономерного звена полимера, позволяющий выявить взаимосвязь между химической структурой органического соединения и электронными свойствами границы раздела металл/полимер. Все рассчитанные параметры были выстроены в порядке возрастания полной энергии, пронормированы на максимальное значение и построены графики зависимости всех величин от полной энергии. Предложенный алгоритм позволил выявить области максимального отклонения энергетических параметров и конкретные соединения, которые представляют интерес для формирования гетероструктур.

Асимптотика динамической бифуркации Андронова–Хопфа

Калякин Л.А.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Исходный объект – система двух нелинейных дифференциальных уравнений , которые будучи записаны в медленном времени $\tau = \varepsilon t$, содержат малый параметр при производных:

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = f(x, y; \mu), \ \ \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = g(x, y; \mu), \ \ \tau \in \mathbb{R}, \ \ \ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Правые части $f, g(x, y; \mu)$ зависят от дополнительного параметра $\mu \in \mathbb{R}$ и считаются гладкими функциями всех переменных. Неподвижные точки (равновесия) автономной системы $x = x_0(\mu), \ y = y_0(\mu)$ имеют тип фокуса. Считается, что при $\mu = 0$ фокус становится сложным, и равновесие

меняется с устойчивого при $\mu < 0$ на неустойчивое при $\mu > 0$. Такая бифуркация сопровождается появлением замкнутых циклов и связывается с именами Андронова и Хопфа.

Рассматривается слабо неавтономная система с $\mu = \tau$. Известно, что для решений с начальными данными в точке τ_0, далекой от момента бифуркации $\tau_0 = \mathrm{const} < 0$, имеет место эффект затягивания устойчивости [1]. Следствием этого свойства является экспоненциальная близость решения к "замороженному" равновесию

$$x(\tau;\varepsilon) = x_0(\tau) + \mathcal{O}\big(\exp(-\delta\varepsilon)\big),\ y = y_0(\tau) + \mathcal{O}\big(\exp(-\delta\varepsilon)\big),\ \ \varepsilon \to 0,\ \delta > 0$$

в конечной окрестности точки бифуркации: $|\tau| < \mathcal{O}(1),\ \varepsilon \to 0$. В таком случае асимптотический переход решения на замкнутый цикл случается далеко от момента бифуркации.

В докладе проводится анализ задачи Коши с начальной точкой $\tau_0 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \varepsilon \to 0$. Асимптотическая конструкция в первой поправке приводит к уравнению типа Бернулли

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho(\theta - \rho^2), \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Оно описывают динамику бифуркационного перехода в масштабе $\theta = \tau/\sqrt{\varepsilon}$. В этом случае затягивания устойчивости не случается, и после бифуркации рассматриваемые решения быстро выходит на замкнутый цикл.

[1] A. I. Neishtadt, A. I., Delay of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations I, *Differ. Equations*, 1987, vol. 23, no 12, pp. 2060–2067 (Russian).

Коэрцитивные оценки и разделимость нелинейного дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами в весовом пространстве

Каримов О.Х.

Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[1]-[4] и имеющиеся там ссылки).

В докладе речь идёт о коэрцитивной оценке и разделимости нелинейного дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами в весовом пространстве. Исследуемый оператор является строго нелинейным.

Пусть $\rho(x)$ - положительная функция, определенная в R^n. Символом $L_{2,\rho}(R^n)$ - обозначим пространство функций $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)\| = \left\{ \int_{R^n} \rho(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ нелинейный дифференциальный оператор Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$- эрмитова матрица, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Представим функцию $V(x,z)$ в виде

$$V(x,z) = F(x,\xi,\eta), \quad \xi = Rez, \quad \eta = Imz.$$

Найдены условия на функцию $F(x,\xi,\eta)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и для всех решений $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]; L_{2,\rho}(R^n) \right\| + \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\| +$$
$$+ \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| \leq M \|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

[1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

[2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n.-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

[3] Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in the hilbert spaces. - J.Math.Anal.Appl., 2007., v.336, pp. 81-92.

[4] Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом.- Уфимский математический журнал, 2017, т.9, No1, с.55-62.

Изменение массы объекта в зависимости от типа аккрецируемой жидкости

Каримов Р.Х.[1], Юсупова Р.М.[2], Измаилов Р.Н.[1,2], Нанди К.К.[1,3], Лаврик И.Д.[1]

[1] БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия; [2] ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия;

[3] Северо-Бенгальский университет, г. Силигури, Индия

Накопление вещества, также называемое аккрецией вокруг массивного гравитационного объекта, является широко изучаемой темой в астрофизике, поскольку оно вызывает высвобождение огромного количества гравитационной энергии.

В настоящей работе был исследован процесс аккреции жидкости различного типа на голую сингулярность Джоши-Малафарина-Нараяна (ДМН) [1]. Пространство-время ДМН делится на две части: внутреннюю и внешнюю области. Внутренняя область описывается метрикой вида:

$$ds^2 = -\left(1-M_0\right)\left(R/R_b\right)^{M_0/(1-M_0)} dt^2 + dR^2/\left(1-M_0\right) + R^2 d\Omega^2, \qquad (1)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Внешняя часть метрики соответствует Шварцшильд-подобному пространству-времени

$$ds^2 = -\left(1-M_0 R_b/R\right) dt^2 + dR^2/\left(1-M_0 R_b/R\right) + R^2 d\Omega^2, \qquad (2)$$

Геометрия (1)-(2) описывает голую сингулярность, поскольку в ней нет горизонта событий, и, следовательно, сингулярность в центре (при $R=0$) открыта для асимптотического наблюдателя на бесконечности. В решении есть два параметра: M_0 - безразмерный параметр, и R_b - граничный радиус, на котором метрика внутренней голой сингулярности соответствует внешней Шварцшильд-подобной метрике.

Скорость изменения массы голой сингулярности ДМН получена в виде:

$$\dot{M}_{\rm acc} = \frac{4\pi A_1 A_2 M^2 \left(1+\omega\right)^2 \left(R/R_b\right)^{M_0/2(M_0-1)}}{\omega r^2 \sqrt{A_3^2 \left(R/R_b\right)^{M_0/(M_0-1)} + \left(M_0-1\right)\left(1+\omega\right)^2}}, \qquad (3)$$

где A_1, A_2 и A_3 – константы интегрирования, а ω – отношение давления к плотности энергии. Таким образом, при аккреции фантомной материи масса объекта будет уменьшаться, а в случае аккреции материи, уравнение состояния которой соответствует квинтэссенции, барионной и жесткой материи масса объекта увеличивается.

[1] Joshi P.S., Malafarina D., Narayan R., Class. Quant. Grav. **28**, 235018 (2011).

Interpolation problem in the theory of the central Wiman-Valiron index

Kozlova I.I.[1], **Maliutin V.A.**[2]
[1]Sumy State University, Sumy, Ukraine;
[2]Sumy State University, Sumy, Ukraine, Riverstone International School, Boise, United States of America

In [1], two extremal problems was studied in the class of functions with a given central index. In this regard, we are considering one interpolation problem in the theory of the central Wiman-Valiron index. Given: 1) two sequences of angles $\psi_1, \dots, \psi_m$; $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $(m \geqslant 1)$, such that among the numbers $e^{i\psi_1}, \dots, e^{i\psi_m}$ there are no coinciding; 2) a partition of set $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$, such that $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \emptyset$, $\operatorname{card} \mathfrak{N}_1 = \infty$, $0 \in \mathfrak{N}_1$, $\operatorname{card} \mathfrak{N}_2 \geqslant 0$; 3) a real sequence of numbers $\{\theta_k\}_{k \in \mathfrak{N}_1}$. It is considered the set of all polynomials of the form

$$P(z) = \sum_{k \in [0,n] \cap \mathfrak{N}_2} \Delta_k z^k + \sum_{k \in [0,n] \cap \mathfrak{N}_1} i \tilde{\Delta}_k e^{i\theta_k} z^k \,,$$

where Δ_k is arbitrary complex numbers for $k \in \mathfrak{N}_2$, and $\tilde{\Delta}_k$ is arbitrary real numbers for $k \in \mathfrak{N}_1$, $n \in \mathbb{Z}_+$ is arbitrary integer number.

Let $\theta(z) = \operatorname{Arg} P(z)$. *What should be the given objects for the problem*

$$\cos(\lambda_k - \theta(e^{i\psi_k})) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \,,$$

to be unsolvable? The problem is solvable if $\operatorname{card} \mathfrak{N}_2 \geqslant m$.

Let $f_0(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be extremal function for the problem (see [1])

$$\inf_{f \in T_\nu} M(r_0, f) \,.$$

It can be assumed that $M(r_0, f_0) = f_0(r_0) > 0$. Let $\psi_1, \dots, \psi_m$ be the set of all points such that $|f_0(r_0 e^{i\psi_k}| = M(r_0, f_0)$, $k = 1, \dots, m$. If $f_0(z) \neq c_n z^n$, then there will be a finite number of points ψ_k. If $\mathfrak{N}_1 = \{k : |a_k| = \tilde{a}_k\}$, $\mathfrak{N}_2 = \{k : |a_k| < \tilde{a}_k\}$ then the problem is solvable.

[1] K.G. Malyutin, M.V. Kabanko, V.A. Maliutin, Extremal problems in the theory of the central Wiman-Valiron index, Ufa Mathematical Journal. Vol. 13. No 1 (2021).

Влияние магнитного поля на устойчивость сегнетоэлектрических жидких кристаллов

Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г.
Академия наук РБ, Башкирский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, Башкирский государственный медицинский университет, г.Уфа, Россия

Теории бифуркаций и катастроф являются двумя наиболее известными в исследовании динамических систем. В силу своего топологического характера теория катастроф имеет ряд преимуществ, позволяющих получить качественные результаты. В [1] авторы использовали теорию катастроф при исследовании устойчивости сегнетоэлектрического жидкого кристалла во внешнем электрическом поле.

В наших исследованиях мы использовали нелинейное дифференциальное уравнение стационарного баланса крутящего момента для азимутального угла сегнетоэлектрического жидкого кристалла, воспользовавшись асимптотическим методом – разложением азимутального угла в ряд, чтобы получить соотношения для определяющих параметров. Из-за сложности уравнения баланса крутящего момента трудно найти значения определяющих параметров и рассчитать минимумы свободной энергии. Прикладная теория катастроф для изучения потенциала свободной энергии сегнетоэлектрического ЖК дала подробное математическое описание того, как геометрия функционала энергии изменяется в зависимости от параметров управления. Локальная геометрия вокруг критических точек функционала свободной энергии представлена определенной функцией катастрофы, которая определяется плотностями упругой, поверхностной и магнитной энергии сегнетоэлектрика.

В предлагаемой работе исследуется влияние магнитного поля на устойчивость распределения поля директора в сегнетоэлектрическом жидком кристалле. Диапазон изменения значения магнитного поля, при котором состояние сегнетоэлектрического ЖК устойчиво, был получен в [2].

[1] Nail Migranov, Aleksey Kudreyko,and Denis Kondratyev. Cusp Catastrophe Model for Description of Bistability in Ferroelectric Liquid Crystals // Physics Research International. 2014. Vol. 2014, Article ID 294723. 5 p. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/2014/294723.

[2] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г., Мигранова Д.Н. Приложение теории катастроф к описанию нестабильностей в сегнетоэлектрических жидких кристаллах в магнитном поле // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 20 (2020), № 3, с. 34-40. DOI: 10.18083/LCAppl.2020.3.34

Паттерны обобщенной модели бизнес-цикла Кейнса

Куликов А.Н., Куликов Д.А.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
г.Ярославль, Россия

Одной из самых известных моделей макроэкономики считают модель Кейнса [1,2,3]. В монографии [4] был поставлен вопрос о влиянии пространственных эффектов на экономическую динамику в рамках этой модели. В простейшем варианте постановки задачи это приводит к необходимости анализа краевой задачи

$$u_t = \frac{y}{u} - \gamma + d_1 u_{xx},\ y_t = \frac{y^2}{u} - uy + d_2 y_{xx}, \tag{1}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,\ y_x(t,0) = y_x(t,\pi) = 0, \tag{2}$$

где $u = u(t,x), y = y(t,x), x \in [0,\pi], \gamma \in (0,\infty), d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ и положительны. Получены достаточные условия, при которых у краевой задачи (1), (2) из однородного состояния равновесия $u = \gamma, y = \gamma^2$ бифурцируют пространственно неоднородные решения. Эти решения могут быть высокомодовыми. Для выявления таких решений был изучен вопрос о реализуемости бифуркаций Тьюринга-Пригожина в краевой задаче (1), (2). Изучены также некоторые варианты бифуркационных задач коразмерности 2. Для пространственно неоднородных решений получены асимптотические формулы.

[1] Keynes J.M. The general theory of employment, interest and money. United Kingdom: Palgrave Macmillan, 1936.

[2] Zhang W.B. Synergetic Economics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.

[3] Radin M.A., Kulikov A.N., Kulikov D.A. Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes's business cycle model. Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences. 2021. V. 25. № 1. P. 93-111.

[4] Puu T. Nonlinear economic dynamics. Berlin: Springer, 1997.

Coding of bounded solutions of equation $u_{xx} - u + \eta(x)u^3 = 0$ with periodic piecewise constant function $\eta(x)$

Lebedev M.E., Alfimov G.L.
MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia

Consider the second-order differential equation

$$u_{xx} - u + \eta(x)u^3 = 0, \tag{1}$$

where $\eta(x)$ is a periodic piecewise-constant function of period $L + \ell$,

$$\eta(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0; L]; \\ \xi, & x \in [L; L + \ell], \end{cases} \tag{2}$$

and $\xi > 0$. Define two topological spaces.

(A) Denote by $\mathcal{S}(b)$, $b \in \mathbb{R}$, a set of solutions for equation (1) such that $|u(x)| < b$ on the whole real axis $\mathbb{R}$. Evidently, $b_1 < b_2$ implies $\mathcal{S}(b_1) \subseteq \mathcal{S}(b_2)$. One can define a metric ρ in $\mathcal{S}(b)$ as follows,

$$\rho(v, w) = \sqrt{(v(0) - w(0))^2 + (v_x(0) - w_x(0))^2}, \quad v(x),\, w(x) \in \mathcal{S}(b). \tag{3}$$

This implies that $\mathcal{S}(b)$ can be regarded as topological space where neighbourhood $U_\varepsilon(u)$ of an element $u \in \mathcal{S}(b)$ is defined as $U_\varepsilon(u) = \{v|\ \rho(u, v) < \varepsilon\}$.

(B) Denote by Ω_n the set of bi-infinite sequences $\{\ldots, i_{-1}, i_0, i_1, \ldots\}$ where i_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$, is an integer, $-n \le i_k \le n$. Evidently, for $n_1 < n_2$ one has $\Omega_{n_1} \subset \Omega_{n_2}$. The set Ω_n can be regarded as a topological space where neighbourhood $W_k(\omega^*)$ of an element $\omega^* = \{\ldots, i^*_{-1}, i^*_0, i^*_1, \ldots\} \in \Omega_n$ is defined as $W_k(\omega^*) = \{\omega|\ i^*_s = i_s,\ |s| < k\}$.

The main result of our study is the following theorem.

Theorem. *For any N there exists a pair (L_0, ℓ_0) such that for any pair (L, ℓ), $L > L_0$ and $0 < \ell < \ell_0$, there exist a sequence*

$$b_0 < b_1 < \ldots < b_N,$$

and a homeomorphism T such that $T\mathcal{S}(b_n) = \Omega_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$.

The theorem can be illustrated by the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{S}(b_0) & \subset & \mathcal{S}(b_1) & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{S}(b_N) \\ \downarrow T & & \downarrow T & & & & \downarrow T \\ \Omega_0 & \subset & \Omega_1 & \subset & \cdots & \subset & \Omega_N \end{array} \tag{4}$$

The theorem is proved for ξ below a threshold ξ_0 that is a root of some transcendent equation.

The research is supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 20-11-19995)

Формула дифференцирования для функции Горна H_3

Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б., Газизов Р.Р.
Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Ключевые слова: гипергеометрическая функция Гаусса, конфлюэтная функция Горна, осесимитричные задачи.

Функции Горна H_3 возникает при решении обобщенных осесимметрических краевых задач [1]. Данная функция записывается в виде [2]

$$H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m}\frac{z^m}{m!}\frac{t^n}{n!},$$

где $(\gamma)_k$ – символ Похгаммера.

Для гипергеометрической функции Гаусса известна формула дифференцирования [2]

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^{\alpha}F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)\right]=-\frac{\alpha(\delta-\beta)}{\delta}(1-z)^{\alpha-1}F\left(\alpha+1,\beta;\delta+1;z\right) \quad (1)$$

Используя представление [3]

$$H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t)^m}{m!(1-\alpha)_m}F\left(\alpha-m,\beta;\delta;z\right)$$

доказана формула

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-z)^{\alpha}H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)\right]=$$

$$=(1-z)^{\alpha-1}\left[\frac{t}{1-\alpha}H_3\left(\alpha-1,\beta;\delta;z,t\right)-\frac{\alpha(\delta-\beta)}{\delta}H_3\left(\alpha+1,\beta;\delta+1;z,t\right)\right] \quad (2)$$

Из формулы (2) при $t=0$ следует формула (1).

[1] Эргашев Т. Г., Сафарбаева Н. М., Задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2019, № 62, С. 55—67.

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра (2-е изд.). М.: Наука, 1973.

[3] Капилевич М. Б. О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения, 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.

Интерполяционные последовательности для пространств мероморфных функций в полуплоскости

Малютин К.Г., Кабанко М.В.
Курский государственный университет, г. Курск, Россия

В статье [1] рассматривались интерполяционные последовательности для пространств мероморфных в комплексной плоскости функций. Мы распространяем эти исследования на пространства мероморфных функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$. Обозначим через $\mathcal{M}_+(\phi)$ ($\mathcal{A}_+(\phi)$) пространство мероморфных (аналитических) функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, рост которых $T(r, f) \leqslant A + B\phi(z)$ определяется заданной субгармонической функцией $\phi(z)$ с некоторыми константами $A, B > 0$. Функция $\phi(z)$ удовлетворяет условиям: 1) $\phi(z) \geqslant 0$, 2) $\ln(1 + |z|^2) = O(\phi(z))$, 3) $\phi(\zeta) \leqslant C\phi(z) + D$, $|\zeta - z| \leqslant 1$. Пространство $\mathcal{M}_+(\phi)$ при некоторой функции $\phi(z)$ может содержать функции бесконечного порядка. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность различных комплексных чисел, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой на вещественной оси и бесконечность. Найти условия, при которых для любых заданных последовательностей комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству

$$|b_n| + |c_n| \leqslant A \exp(B\phi(a_n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

существует функция $F \in \mathcal{M}_+(\phi)$, такая, что

$$F(a_n) = b_n,\ F_{-1}(a_n) = c_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $F_{-1}(a_n)$ — коэффициент с индексом (-1) разложения функции $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a_n.

Теорема. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ является интерполяционной последовательностью для пространства $\mathcal{M}_+(\phi)$, тогда и только тогда, если существует функция $f \in \mathcal{A}_+(\phi)$, такая, что $f(a_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\Im a_n |f'(a_n)| \geq -\varepsilon \exp(-cp\phi(a_n)), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

для некоторых констант $\varepsilon, c > 0$.

[1] Carlos A. Berenstein. Bao Qin Li, Interpolating Varieties for Spaces of Meromorphic Functions, The Journal of Geometric Analysis. Vol. 3. No 1 (1995).

Об операторе Шредингера с экспоненциальным потенциалом

Мамедова А.Ф.[1], **Ханмамедов А.Х.**[2]
[1]Азербайджанский Государственный Экономический Университет, Баку, Азербайджан, [2]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

Некоторые задачи конформной теории поля тесно связаны с оператором Шредингера с экспоненциальным потенциалом (см. [1]). Рассмотрим оператор L , определенный в пространстве $L_2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + e^{2x}y, x,\ x \in [0,+\infty)$$

на области

$$D\left(L\right) = \left\{y \in L_2\left(0,+\infty\right) : y \in W^2_{2,loc}, l\left(y\right) \in L_2\left(0,+\infty\right), y\left(0\right) = 0\right\}$$

Вводим специальные функции $\psi\left(x\right) = K_0\left(e^x\right), \varphi\left(x\right) = I_0\left(e^x\right) - \frac{I_0(1)}{K_0(1)}K_0\left(e^x\right)$, где $I_\nu\left(z\right)$ и $K_\nu\left(z\right)$ являются модифицированными функциями Бесселя первого и второго рода соответственно [2].

Теорема. Область $D(L)$ совпадает с множеством функций вида

$$y\left(x\right) = \psi\left(x\right)\int\limits_0^x \varphi\left(t\right) f\left(t\right) dt + \varphi\left(x\right)\int\limits_x^{+\infty} \psi\left(t\right) f\left(t\right) dt \tag{1}$$

где функция $f(x)$ пробегает все пространство $L_2(0,+\infty)$. Для любой функции $y(x) \in D(L)$ имеют место соотношения

$$e^x y\left(x\right) \to 0, y'\left(x\right) \to 0, e^x y\left(x\right), y'\left(x\right) \in L_2\left(0,+\infty\right)$$

Равенство (1) задает в пространстве $L_2(0,+\infty)$ ограниченный оператор, являющийся обратным к оператору L .

[1] L.A.Takhtajan, L.D. Faddeev, The spectral theory of a functional-difference operator in conformal field theory. Izvestiya: Mathematics,79(2) (2015),388-411.

[2] Abramowitz V., Stegun I. N. (eds.) Handbook of mathematical functions, 10th edit., Applied Mathematical series, 55, National Bureau of Standards, Washington; Dover Publications, Inc., New York, 1964(Пер.В. А. Диткин, Л. Н. Кармазина (ред.). Справочник по специальным функциям.М.: Наука, 1979.)

Прохождение светового луча через осциллирующее гало тёмной материи

Маслов Е.М., Кутвицкий В.А.
ИЗМИРАН, Москва, Россия

В рамках теории возмущений и при использовании метода геодезических исследовано отклонение света периодическим во времени сферически - симметричным гравитационным полем. Такое поле может создаваться, например, сферически - симметричным гало тёмной материи, совершающим радиальные пульсации вследствие некоторых релаксационных процессов. При этом осциллирующее гравитационное поле внутри гало будет периодически воздействовать на нуль-геодезические, по каторым распространяются фотоны, то есть на угол отклонения $\Delta\varphi$ светового луча. В приближении слабого гравитационного поля выведены общие формулы, определяющие угол отклонения $\Delta\varphi$ в главном порядке [1]. Полученные формулы действительны как для периодических по времени, так и для статических метрик. На основе этих результатов вычислен угол отклонения светового луча, проходящего через сферически - симметричное осциллирующее гало тёмной материи, образованное гравитирующим нелинейным скалярным полем $\phi(t, r)$ с логарифмическим потенциалом

$$U(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2(1 - \ln\frac{\phi^2}{\sigma^2}),$$

где m - масса скалярного поля, σ - его характерная амплитуда. Результат может быть представлен в виде

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{b}(1 - \mathrm{e}^{-m^2b^2}),$$

где G - гравитационная постоянная, M - масса гало, b - прицельный параметр. Оказалось, что в этом случае угол отклонения не зависит от времени. Этот факт является специфическим свойством логарифмического потенциала. В общем случае угол отклонения будет осциллировать, что может приводить к появлению периодической компоненты в наблюдаемом изменении интенсивности изображения при линзировании удалённых астрофизических объектов.

[1] V.A. Koutvitsky and E.M. Maslov, Phys. Rev. D 102, 064007 (2020).

О распределении нулей модифицированной функции Бесселя первого рода

Махмудова М.Г.
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

Анализ многих физических проблем требует исследования нулей конкретных трансцендентных функций. В ситуации с круговой или сферической симметрии часто используются функции Бесселя или их комбинации. Следует отметить, что вопрос о нулях функций Бесселя изучен более детально, когда они рассматриваются как функции от своих аргументов, т.е. при фиксированном порядке (см. [1],[2] и цитированную в них литературу). С другой стороны, различные квантово-механические приложения стимулируют также интерес к корням функций Бесселя, рассматриваемых как функции от их порядка.

Рассмотрим функцию

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ Гамма функция. Функция $I_\nu(z)$ называется модифицированной функцией Бесселя I рода.

Теорема. При каждом фиксированном $z > 0$ и для любых действительных a и b где $a^2 + b^2 > 0$ и $ab \geq 0$, функция $aI_\nu(z) + b\frac{dI_\nu(z)}{dz}$ не имеет нулей в правой полуплоскости $Re\nu \geq 0, \nu \neq 0$.

[1] Грей Э., Мэтьюз Г.Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, М.: ИЛ, 1953.

[2] Hejhal D.A. On a result of G.Polya concerning the Riemann function // Journal Danalyse Mathematique. 1990. V. 55. P.59-95

Приближенное вычисление коэффициентов ряда Дюлака

Медведева Н.Б.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Асимптотический ряд преобразования монодромии в случае сложной монодромной особой точки имеет вид

$$\Delta^*(\rho) \approx c_0\rho + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\ln\rho)\rho^{\nu_k},$$

где $\{\nu_k\}$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности, P_k – многочлены, $\nu_1 > 1$.

Ряды такого вида получили название рядов Дюлака. Величина $\ln c_0$ и коэффициенты полиномов P_k являются аналогами Ляпуновских фокусных величин в случае сложной монодромой особой точки. Знак первой ненулевой из этих величин позволяет ответить на вопрос об устойчивости особой точки.

В [1] предложен способ построения явных формул для коэффициентов ряда Дюлака (при определенных ограничениях), который был реализован в системе MAPLE. Эти формулы содержат интегралы Адамара от функций, соответствующих ребрам диаграммы Ньютона. Интеграл Адамара – это один из способов регуляризации расходящегося несобственного интеграла. Подынтегральные функции в упомянутых интегралах Адамара весьма сложны, и явное вычисление по этим формулам практически невозможно.

Разработан алгоритм приближенного вычисления коэффициентов асимптотического представления преобразования монодромии для векторных полей с фиксированной диаграммой Ньютона, основанный на формулах из [1]. Сформулированы ограничения, при которых этот алгоритм может быть применен. Алгоритм реализован в пакете MAPLE. Приводятся примеры вычисления некоторого количества коэффициентов асимптотического представления преобразования монодромии для случая, когда диаграмма Ньютона векторного поля состоит из двух ребер.

[1] Медведева Н.Б. *Проблема различения центра и фокуса в пространстве векторных полей с фиксированной диаграммой Ньютона*, Мат. сборник **211**(10), 50–97 (2020).

Выметание мер относительно логарифмического и степенных ядер на комплексной плоскости

Меньшикова Э.Б.
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Понятие выметания мер нашло важные применения при изучении распределения нулевых множеств голоморфных функций из весовых классов в областях в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в субгармоническом обрамлении [1], [2]. В работе [3] начата подготовительная адаптация этих результатов к целым функциям и субгармоническим функциям конечного порядка на всей плоскости $\mathbb{C}$. Приведём итоговый результат из [3]. Пусть $p \geqslant 0$ — число. Меру Радона $\omega \geqslant 0$ на $\mathbb{C}$ называем *p-выметанием* меры Радона $\delta \geqslant 0$ на $\mathbb{C}$, если следующие интегралы существуют и

$$\int \ln|w-z|\,\mathrm{d}\omega(w) \geqslant \int \ln|w-z|\,\mathrm{d}\delta(w) \quad \textit{для любого } z \in \mathbb{C}, \tag{1l}$$

$$\int z^n\,\mathrm{d}\omega(z) = \int z^n\,\mathrm{d}\delta(z) \quad \textit{для любого целого } n \in [0,p]. \tag{1n}$$

Теорема ([3, Theorem 3]). *В обозначении $\omega^{\mathrm{rad}}(t)$ для ω-мер замкнутых кругов радиусов t с центром в нуле пусть*

$$\int_1^{+\infty}\Big(\omega(\mathbb{C})-\omega^{\mathrm{rad}}(t)\Big)t^{p-1}\begin{Bmatrix}1, & \text{когда } p \text{ — нецелое}\\ \ln t, & \text{когда } p \text{ — целое}\end{Bmatrix}\mathrm{d}t<+\infty, \qquad (2)$$

и таким же свойством (2) обладает мера δ. Тогда существуют интегралы из (1) со значениями в $[-\infty,+\infty)$. При этом если мера ω — это p-выметание меры δ, то для любой субгармонической функции $u\not\equiv-\infty$ конечного типа при порядке p, т.е. при $u(z)\underset{z\to\infty}{\leqslant}O\big(|z|^p\big)$, имеет место неравенство $\int u\,\mathrm{d}\delta\leqslant\int u\,\mathrm{d}\omega$, где оба последних интеграла корректно определены значениями в $[-\infty,+\infty)$.

[1] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, *К распределению нулевых множеств голоморфных функций.* II // Функциональный анализ и его приложения, **53**:1 (2019), 84–87.

[2] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, *Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на её рост* // Известия вузов. Математика, № 5 (2020), 55–61.

[3] B. N. Khabibullin, E. B. Menshikova, *Balayage of Measures with respect to Polynomials and Logarithmic Kernels on the Complex Plane* // Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**:4 (2021) (в печати).

О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на классе бесконечно дифференцируемых функций

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная выпуклая область, K – замыкание G.

Пусть $\mathcal{H}=\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых функций $h_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ с $h_m(0)=0$ таких, что для любого $m\in\mathbb{N}$:

i_1). $h_m(x)=h_m(|x_1|,\dots,|x_n|),\ x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$;

i_2). сужение h_m на $[0,\infty)^n$ не убывает по каждой переменной;

i_3). $\exists\, a_m>0$: $h_m(x)\geq\|x\|\ln(1+\|x\|)-a_m\|x\|-a_m, x\in\mathbb{R}^n$;

i_4). $\lim\limits_{x\to\infty}(h_m(x)-h_{m+1}(x))=+\infty$;

i_5). $\sup\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}(h_{m+1}(\alpha+\beta)-h_m(\alpha))<\infty$ для любого $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta|=1$;

i_6). $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists\, l=l(m,k)\in\mathbb{N}$: $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\exp(h_{m+l}(\alpha+k\gamma)-h_m(\alpha))<\infty$, где $\gamma=(1,\dots,1)\in\mathbb{Z}_+^n$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введём пространство $\mathcal{E}_m(K)$, состоящее из функций f класса C^∞ на K с конечными нормами

$$p_m(f) = \sup_{x \in G, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{h_m(\alpha)}} .$$

Положим $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m(K)$. Наделим $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}_m(K)$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_m на $\mathbb{C}^n$ по правилу

$$\varphi_m(z) = h_m^*(\ln^+ |z_1|, \ldots, \ln^+ |z_n|),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

где h_m^* – преобразование Юнга-Фенхеля функции h_m.

Введем нормированные пространства

$$P_{K,m}(\mathbb{C}^n) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{H_K(Im\, z) + \varphi_m(z))}} < \infty\},\ m \in \mathbb{N},$$

где H_K – опорная функция компакта K.

Пусть $P_{K,\mathcal{H}}(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_{K,m}(\mathbb{C}^n)$. Наделим $P_{K,\mathcal{H}}(\mathbb{C}^n)$ топологией индуктивного предела пространств $P_{K,m}(\mathbb{C}^n)$.

Пусть $\hat{\Phi}$ – преобразование Фурье-Лапласа функционала $\Phi \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(K)$, определяемая по формуле $\hat{\Phi}(z) = \Phi(e^{-i\langle \xi, z\rangle}),\ z \in \mathbb{C}^n$. Здесь $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(K)$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$, наделённое сильной топологией.

Теорема. Преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространств $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(K)$ и $P_{K,\mathcal{H}}(\mathbb{C}^n)$.

О бифуркационном поведении нелинейных периодических систем в окрестностях границ области устойчивости

Мустафина И.Ж.
УКГП, г.Учалы, Россия

Рассмотрим нелинейную периодическую систему

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t, \alpha, \beta)]x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \tag{1}$$

где α и β- скалярные параметры, A_0 - квадратная постоянная $N \times N$ матрица, а $S(t, \alpha, \beta)$ и вектор–функция $a(x, t, \alpha, \beta)$ являются непрерывными и T–периодическими по t, гладко зависящими от скалярных параметров α и β. При этом $a(x, t, \alpha, \beta)$ гладко зависит от x и удовлетворяет соотношению: $||a(x, t, \alpha, \beta)|| = O(||x||^2)$ при $||x|| \to 0$ равномерно по t, α и β.

Предполагается также, что выполнено равенство $S(t,0,0) \equiv 0$. Уравнение (1) при всех значениях параметров α и β имеет точку равновесия $x = 0$, которая при одних значениях параметров может быть устойчивой, а при других - неустойчивой.

Пусть $X(t,\alpha,\beta)$ это фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t,\alpha,\beta)]x, \quad x \in R^N, \tag{2}$$

а $V(\alpha,\beta) = X(T,\alpha,\beta)$ - матрица монодромии этой системы. Собственные значения μ матрицы $V(\alpha,\beta)$ называют мультипликаторами системы (2).

Основным является предположение о том, что матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0, а остальные ее собственные значения являются чисто мнимыми и для любых двух других различных собственных значений $\pm\omega_1 i$ и $\pm\omega_2 i$ выполняется условие $\omega_1 - \omega_2 \neq \frac{2\pi k}{T}$ при целых k.

В таком случае система (2) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ имеет полупростой мультипликатор, равный 1 в случае, когда k_0 четно; и -1 в случае, когда k_0 нечетно. Точка $(0,0)$ плоскости параметров (α,β) является граничной точкой области устойчивости систем (1) и (2).

В докладе обсуждаются вопросы о приближенном построении границы области устойчивости системы (1), проходящей через точку $(0,0)$, и об основных сценариях бифуркационного поведения этой нелинейной системы. Используются результаты работ [1].

[1] Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем // Уфимский математический журнал, Уфа, 2016, Т. 8, № 3, С. 59-81.

Инвариантные решения на четырехмерных подалгебрах с проективным оператором для уравнений газовой динамики

Никонорова Р.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа. Уравнения допускают группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. Особенностью уравнения состояния одноатомного газа является то, что допускаемая алгебра Ли содержит проективный оператор $X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$. Оптимальная система подалгебр 14-мерной алгебры Ли построена в работе [1]. Из оптимальной системы подалгебр в работе [2] выбраны подалгебры, содержащие проективный оператор.

Были рассмотрены 24 четырехмерные подалгебры, содержащие проективный оператор. Для каждой вычислен базис точечных инвариантов. Для 8 подалгебр были построены инвариантные решения ранга ноль. Получены простые решения, заданные конечными формулами. Полученные физические решения задают движение газа с линейным и нелинейным полями скоростей. Одно решение изоэнтропическое, для него представлено движение частиц газа в целом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071) и средств государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

[1] Черевко А.А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\,\rho^{5/3}$. Препринт №4-96, РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1996. 39 с.

[2] Шаяхметова Р.Ф. Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа // Сибирские электронные математические известия. 2014. Т. 11. С. 605–625.

Предельный переход в гамильтоновых системах Кимуры

Павленко В.А.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

В настоящее время интерес совеременных ученых привлекают нелинейные ОДУ допускающие применение ИДМ. В частности, решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Кимуры [1]. Некоторые из них учены автором совместно с Сулеймановым Б.И. Некоторые рассмотрены другими учеными.

В этой работе будет представлен предельный переход между некоторыми гамильтоновыми системами Кимуры. Кимура указал только предельный переход только в рациональном виде. Автору удалось найти предельный переход и в полоиномиальном виде. Авторо установил, что при этом предельном переходе нелинейные уравнения Шредингера вида

$$ip_t = -p_{zz} + 8p^2q, \quad iq_t = q_{zz} - 8pq^2. \tag{1}$$

переходят в себя. Более того, автором установлен предельный переход между соответствующими ОДУ. Другими словами, ОДУ вида

$$\beta pq_{zzz} + 8itpq_{zz} - 64itp^2q^2 - 24\beta p^2qq_z - 4pq - 4zpq_z + 8\gamma pq = 0 \tag{2}$$

$$\beta p_{zzz}q - 8itp_{zz}q + 64itp^2q^2 - 24\beta pq^2p_z - 4pq - 4zp_zq - 8\gamma pq = 0 \tag{3}$$

переходят соответственно в ОДУ вида

$$\beta(q_{zzz} - 24pqq_z) - 4tq_z - 2izq = 0 \tag{4}$$

$$\beta(p_{zzz} - 24pqp_z) - 4tp_z + 2izp = 0 \tag{5}$$

Также в статье [2] выписаны решения соответствующих ОДУ (3), (5) при $q = 0$ и $\gamma = 0$. Однако, при данном предельном переходе эти решения друг в друга не переходят, поскольку данный предельный переход годится только для бесконечно больших γ.

[1] The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure// Annali di Matematica pura et applicata IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.

[2] Б. И. Сулейманов. Об аналогах функций волновых катастроф, являющихся решениями нелинейных интегрируемых уравнений// Дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 163, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 81 — 95

Задача Купера о нагреве проводника

Павленко В.Н.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Рассматривается эллиптическая краевая задача

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(k(x, u(x))u_{x_i}\right)_{x_i} = \lambda\sigma(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, заполненной проводником, помещенным в однородное электрическое поле интенсивности $\sqrt{\lambda}$ ($\lambda > 0$). Теплопроводность $k(x, u) \geq \alpha > 0$ и непрерывно дифференцируемая на $\Omega \times \mathbb{R}_+$, а электропроводность $\sigma(x, u) \geq \beta(x) > 0$ на $\Omega \times \mathbb{R}_+$ и может меняться скачком при некоторых значениях температуры u.

Данная задача изучалась в работах [1, 2], где дополнительно предполагалось, что $\sigma(x, u) = \varphi(x, u) + \psi_1(x, u) - \psi_2(x, u)$, причем, функция $\varphi(x, u)$ — каратеодориева на $\Omega \times \mathbb{R}_+$, функции $\psi_i(x, u)$ $(i = 1, 2)$ суперпозиционно измеримые, непрерывные по x и для почти всех $x \in \Omega$ неубывающие по u. Установлено существование положительного решения задачи (1)–(2) для любого $\lambda > 0$ из пространства $W_q^2(\Omega)$ $(q > n)$ при допущении, что множество $D = \{u \in \mathbb{R}_+ : u$ — точка разрыва функции $\sigma(x, \cdot)$ при некотором $x \in \Omega\}$ не более чем счетно.

Ограничения на функцию $\sigma(x, u)$ можно ослабить. Имеет место

Теорема. Пусть
1) функция $\sigma(\cdot, u)$ измеримая на Ω для всех $u \geq 0$, функция $\sigma(x, \cdot)$ для почти всех $x \in \Omega$ имеет разрывы только первого рода и непрерывна слева на $\mathbb{R}_+$;
2) для всех $u \geq 0$ и почти всех $x \in \Omega$ справедлива оценка $\sigma(x, u) \leq a(x) + \psi(u)$, где $a \in L_q(\Omega)$, $q > n$, ψ — неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$;
3) $\mathrm{mes} D = 0$.
Тогда задача (1)–(2) имеет положительное решение $u \in W_q^2(\Omega)$, причем $\mathrm{mes}\{x \in \Omega : u(x)$ — точка разрыва функции $\sigma(x, \cdot)\} = 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта No 20-41-740003.

[1] Kuiper H.J. Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1974. Vol. 53. No 2. P. 178–186.

[2] Chang K.-C. Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Differ. Equat. 1983. Vol. 49. No 1. P. 1–28.

Регуляризованный след дифференциального оператора второго порядка с отражением

Поляков Д.М.
Южный математический институт ВНЦ РАН, г.Владикавказ, Россия
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается дифференциальный оператор второго порядка $L : D(L) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ с инволюцией вида

$$(Ly)(x) = -y''(x) - p(x)y(x) - q(x)y(1-x), \quad x \in [0,1],$$

где коэффициенты p и q являются комплекснозначными и принадлежат пространству $L_2[0,1]$. Область определения оператора L задается периодическими краевыми условиями:

$$D(L) = \{y \in W_2^2[0,1] : \ y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1), \ j = 0,1\}.$$

Оператор L содержит преобразование инволюции независимой переменной. Напомним, что инволюцией на множестве X называется функция φ такая, что $\varphi(\varphi(x)) = x$ на X. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением инволюции отражения $\varphi(x) = 1 - x$ на отрезке $[0,1]$.

Основные результаты работы связаны с асимптотикой собственных значений, базисностью собственных и присоединенных функций, а также с формулой регуляризованного следа оператора L. Здесь мы ограничимся

формулировкой только одного результата. Стандартным образом введем коэффициенты Фурье функций p и q:

$$p_n = \int_0^1 p(x)e^{-i2\pi nx}\,dx, \qquad q_n = \int_0^1 q(x)e^{-i2\pi nx}\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

При этом без ограничения общности мы предполагаем, что $p_0 = q_0 = 0$. В теореме будут участвовать некоторые величины a_{11} и a_{22}. Они выписываются явным образом, однако, мы не приводим их здесь ввиду их громоздкости.

Теорема. Для оператора L справедлива следующая формула регуляризованного следа

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\widetilde{\lambda}_n - 4\pi^2 n^2 + \frac{1}{2}(q_{2n} + q_{-2n}) + \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})\right) = 0,$$

где величины a_{11} и a_{22} определяются через коэффициенты Фурье функций p и q.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).

О достаточных множествах для квазиполиномов с заданными показателями и задачи интерполяции рядами экспонент

Попенов С.В.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В.В. Напалков изучал задачу интерполяции с помощью функций из ядра оператора свертки, другими словами, с помощью функций из замыкания системы экспонент, определяемой нулями характеристической функции оператора свертки. При доказательстве разрешимости этой задачи использовалось то, что множество узлов интерполяции является секвенциально достаточным множеством для такой системы экспонент. Планируется обсудить, что секвенциальная достаточность множества узлов интерполяции на самом деле дает необходимые и достаточные условия разрешимости более общих задач интерполяции, с помощью сумм абсолютно сходящихся рядов экспонент. Показатели экспонент принадлежат некоторому задаваемому заранее множеству. В доказательстве этого критерия используется обобщение классической теоремы Эйдельгейта, полученное в 2019 году С.Г. Мерзляковым, для пространств Фреше.

Продольная жесткость и теплопроводность скрученных графеновых нанолент

Савин А.В.[1], **Корзникова Е.А.**[2,3], **Дмитриев С.В.**[2,3]
[1]Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семенова РАН (ФИЦ ХФ РАН), Москва, Россия
[2]Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия
[3]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Графен, известный своими уникальными свойствами, перспективными для использования в различных нанотехнологиях, имеет очень низкую жесткость на изгиб, что накладывает ряд ограничений на перспективу использования этого материала. Среди различных подходов, направленных на повышение устойчивости графена (как и многих других 2D-материалов), можно назвать построение гетероструктур и мультислоев, легирование, деформацию и создание различных пространственных структур. В данной работе, с использованием метода молекулярной динамики, исследовалось влияние скручивания графеновой наноленты на ее сопротивление продольному изгибу при осевом сжатии и на теплопроводность. Показано, что нанолента, закрученная на угол, близкий к π, может выдерживать в три раза большую силу осевого сжатия по сравнению с плоской нанолентой. Объяснение состоит в том, что такая закрутка увеличивает эффективный момент инерции поперечного сечения наноленты. Обнаружено также, что коэффициент теплопроводности наноленты монотонно увеличивается до 10% с увеличением угла закрутки. Этот эффект обусловлен появлением растягивающей деформации в скрученной наноленте, которая увеличивает вклад акустических внеплоскостных (ZA) фононных мод в теплопроводность. Полученные результаты показывают, что деформация кручения нанолент может улучшить их механические и физические свойства. Подобные эффекты могут наблюдаться для 2D-материалов, отличных от графена, потому что они имеют простое механическое объяснение, не связанное с конкретной кристаллической структурой материала.

Благодарности: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 18-29-19135.

[1] A.V. Savin, E.A. Korznikova, A.M. Krivtsov, S.V. Dmitriev, Longitudinal stiffness and thermal conductivity of twisted carbon nanoribbons. European Journal of Mechanics / A Solids **80**, 103920 (2020).

Описание динамики нелинейных локализованых волн уранения sin-Гордона в модели с тремя притягивающими примесями

Самсонов К.Ю.[1], Кудрявцев Р.В.[2], Нерадовский Д.Ф.[1], Екомасов Е.Г.[1,3]

[1]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия
[2]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
[3]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Одним из простых модельных уравнений, используемые для изучения нелинейных волновых процессов в теоретической и математической физике, является уравнение синус-Гордона (УСГ)[1]. При использовании УСГ на реальных физических моделях, возникает необходимость его модификации путем добавления дополнительных слагаемых и функций. Они могут описывать наличие внешней силы, неоднородность параметров среды и др. Модифицированное УСГ не имеет точных аналитичеких решений, но существует ряд широко применяемых аналитических методов (метод коллективных координат). В данной работе исследована динамика примесных мод в модели синус-Гордона с тремя одинаковыми точечными притягивающими примесями, находящимися на одинаковом расстоянии друг от друга. С помощью метода коллективных координат получена система дифференциальных уравнений (1), приближенно описывающая колебания примесных мод.

$$\begin{cases} \ddot{a_1} + a_1\omega_1^2 + a_2k_{12} + a_3k_{13} = 0, \\ \ddot{a_2} + a_2\omega_2^2 + (a_2 + a_3)k_{21} = 0, \\ \ddot{a_3} + a_1\omega_1^2 + a_1k_{13} + a_2k_{13} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрены все возможные типы локализованных на примесях колебаний, как функции от параметров системы. Проведено сравнение аналитических результатов с результатами численного решения УСГ. Оно показывает, что численный счёт с большой точностью совпадает с аналитическим при больших расстояниях между примесями. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90048.

[1] Cuevas-Maraver J. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics/ J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, F. Williams (Eds.) // Springer. — 2014. — V. 10. — P. 263.

Локализованные и делокализованные нелинейные колебательные моды треугольной решетки

Семенов А.С.[1], Рябов Д.С.[2], Чечин Г.М.[2], Дмитриев С.В.[3,4]
[1]Политехнический институт (филиал) СВФУ в г. Мирном, Россия
[2]Южный федеральный университет, Институт физики, Ростов-на-Дону, Россия
[3] Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г.Уфа, Россия
[4] Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Проанализированы все возможные одно- и двухкомпонентные делокализованные нелинейные колебательные моды (ДНКМ) в треугольной решетке. ДНКМ получены с учетом только симметрии треугольной решетки, и, таким образом, они существуют как точные решения уравнений движения независимо от типа взаимодействий между частицами и для любых амплитуд колебаний [1]. В данной работе межчастичные взаимодействия описываются потенциалом β-ФПУ. Однокомпонентные ДНКМ периодичны во времени, а двухкомпонентные представляют собой суперпозицию двух колебательных мод с, вообще говоря, несоизмеримыми частотами. Для многих (но не для всех) двухкомпонентных ДНКМ могут быть получены периодические по времени решения путем правильного выбора амплитуд двух основных мод. Для каждой ДНКМ рассчитаны частота и энергия, приходящаяся на одну частицу, как функции амплитуды колебаний вместе с другими характеристиками [2].

Оказалось, что две однокомпонентные и одна двухкомпонентная ДНКМ имеют частоты колебаний выше фононного спектра треугольной решетки. Путем наложения локализующих функций были получены все возможные пространственно локализованные колебательные моды (т.е. дискретные бризеры) рассматриваемой решетки.

Благодарности: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-02-00971.

[1] G.M. Chechin, V.P. Sakhnenko, Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results. Phys. D **117**, 43 (1998).

[2] D.S. Ryabov, G.M. Chechin, A. Upadhyaya, E.A. Korznikova, V.I. Dubinko, S.V. Dmitriev. Delocalized nonlinear vibrational modes of triangular lattices. Nonlinear Dyn. **102**, 2793 (2020).

Эрмитовы уравнения Янга–Миллса

Сергеев А.Г.
Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва

Эрмитово уравнение Янга–Миллса — это нелинейное уравнение на эрмитову метрику, заданную на голоморфном векторном расслоении над компактным кэлеровом многообразием. Его можно также рассматривать как уравнение на унитарную связность, ассоциированную с указанной эрмитовой метрикой. Если размерность базового многообразия равна 1, то решениями эрмитова уравнения Янга–Миллса являются плоские связности. Если эта размерность равна 2, решениями являются анти-автодуальные связности, называемые иначе инстантонами. Тем самым, эрмитовы уравнения Янга–Миллса можно рассматривать как многомерное обобщение уравнений дуальности.

Основным результатом первой части доклада, относящейся к эрмитовым уравнениям Янга–Миллса, является теорема Дональдсона о существовании и единственности решения граничной задачи Дирихле для эрмитова уравнения Янга–Миллса на компактном кэлеровом многообразии с краем.

Вторая часть посвящена деформированному эрмитову уравнению Янга–Миллса. Это обобщение эрмитова уравнения Янга–Миллса возникло в работах Яу с соавторами. Деформированное эрмитово уравнение Янга–Миллса редуцируется к эрмитову уравнению Янга–Миллса в пределе большого объема. Существование решения деформированного эрмитова уравнения Янга–Миллса при дополнительных условиях типа положительности кривизны доказывается с помощью потока теплопроводности. Этот поток существует при всех временах и в пределе большого объема сходится к решению деформированного эрмитова уравнения Янга–Миллса.

Линеаризуемость с помощью нелокальных преобразований и первые интегралы для дифференциальных уравнений второго порядка

Синельщиков Д.И.
Нациаональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Москва, Россия

В докладе рассматривается следующее семейство уравнение

$$y_{zz} + f(z,y)y_z^2 + g(z,y)y_z + h(z,y) = 0, \tag{1}$$

где f, g и h – достаточно гладкие функции и $g(z,y) \not\equiv 0$. Различные частные случаи (1) часто возникают во многих приложениях в механике, физике и биологии. В работе рассматриваются условия приводимости (1) к

$$w_{\zeta\zeta} + \beta w_\zeta + \alpha w = 0, \tag{2}$$

с помощью нелокальных преобразований

$$w = F(z, y), \quad d\zeta = G(z, y)dz. \tag{3}$$

Здесь $\alpha, \beta \neq 0$ произвольные параметры и F, G достаточно гладкие функции, такие что $F_y G \neq 0$. Задача линеаризации для (1) и (2) с помощью преобразований (3) рассматривалась ранее только для некоторых частных случаев (3), а именно при $F_y = G_y = 0$ и $F_z = 0$ (см., [1, 2, 3]). В данном докладе рассматривается общий случай преобразований (3) и в явном виде находятся необходимые и достаточные условия линеаризуемости для (1). Установлено что что каждое из линеаризуемых уравнений обладает первым интегралом и найден его явный вид. Полученные результаты иллюстрируются несколькими примерами линеаризуемых уравнений, в частности обобщенным осциллятором Дуффинга–Ванд дер Поля и кубическим осциллятром Льенара с линейным затуханием.

Работа выполнена при поддержка гранта РНФ 19-71-10003.

[1] L.G.S. Duarte, I.C. Moreira, F.C. Santos, Linearization under nonpoint transformations, J. Phys. A. Math. Gen. 27 (1994) L739–L743.

[2] W. Nakpim, S.V. Meleshko, Linearization of Second-Order Ordinary Differential Equations by Generalized Sundman Transformations, Symmetry, Integr. Geom. Methods Appl. 6 (2010) 1–11.

[3] D. I. Sinelshchikov On linearizability via nonlocal transformations and first integrals for second-order ordinary differential equations, Chaos Solit. Fract. 141 (2020) 110318.

Точные решения уравнений газовой динамики на 4-параметрических трехмерных подалгебрах из всех переносов по пространству и по давлению

Сираева Д.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассматриваются уравнения газовой динамики [1, 2]

$$D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ — оператор полного дифференцирования; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; t — время. Уравнение состояния имеет специальный вид [1]

$$p = f(\rho) + h(S), \tag{2}$$

в силу которого последнее уравнение системы (1) может быть записано для энтропии

$$DS = 0.$$

Система (1), (2) допускает 12-мерную алгебру Ли L_{12}. Алгебра Ли расширяется за счет оператора дифференцирования по давлению $Y_1 = \partial_p$. Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} построена в работе [3].

Проведена классификация подмоделей на трехмерных подалгебрах [3]. Для 4-параметрических трехмерных подалгебр из всех переносов по пространству и по давлению 12-мерной алгебры Ли вычислены инварианты, построены инвариантные подмодели ранга 1 и получены три семейства точных решений. Полученные решения задают движение частиц в пространстве с линейным полем скоростей с неоднородной деформацией.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052)

[1] Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.

[2] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.

[3] Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, вып. 1. С. 94—107.

О CR-многообразиях бесконечного типа по Блуму-Грэму

Степанова М.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

Мы приведем аналог теоремы Блума-Грэма [1] для ростков вещественно аналитических многообразий бесконечного типа и уточним понятие типа по Блуму-Грэму (стратифицированный тип). Уточненный тип, как и тип по Блуму-Грэму, голоморфно инвариантен. Также будет введено понятие квазимодельных поверхностей, являющихся линейно эквивалентными для биголоморфно эквивалентных многообразий. Будет дан критерий конечномерности алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов в случае равномерно бесконечного типа (т.е. бесконечного всюду). Вместе с критерием конечномерности для многообразий, чей тип конечен почти всюду, это дает полный критерий конечномерности. Мы покажем, что множества фиксированного типа по Блуму-Грэму полуаналитичны, причем тип общего положения (вне собственного аналитического подмножества) в определенном смысле минимален.

[1] Th. Bloom and I. Graham, “On “Type” Conditions for Generic Real Submanifolds of C^n”, Invent. Math. 40, 217–243 (1977).

Оценка величины сродства к электрону по данным о временах жизни молекулярных отрицательных ионов кумарина

Таюпов М.М., Маркова А.В., Сафронов А.М.
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Методом масс-спектрометрии отрицательных ионов резонансного захвата медленных (0-15 eV) электронов исследованы молекулы кумарина. Экспериментально измерено среднее время жизни молекулярных отрицательных ионов (ОИ) относительно автоотщепления электрона. Была оценена величина сродства к электрону по данным о временах жизни молекулярных отрицательных ионов кумарина. В ходе эксперимента, обнаружена температурная зависимость кривых эффективного выхода анионов от температуры. Выявлены наиболее вероятные структуры осколочных ионов ([M − H]−, образующихся при распаде молекулярных ОИ. В рамках приближения Аррениуса была оценена величина адиабатического сродства к электрону (EAa). Установлено, что теоретические значения EAa, вычисленные методом B3LYP/6-31+G(d) с минимальными добавлением диффузных функций как разность полных энергий нейтральной молекулы и анион радикала, коррелируют с величинами EAa, полученными из эксперимента.

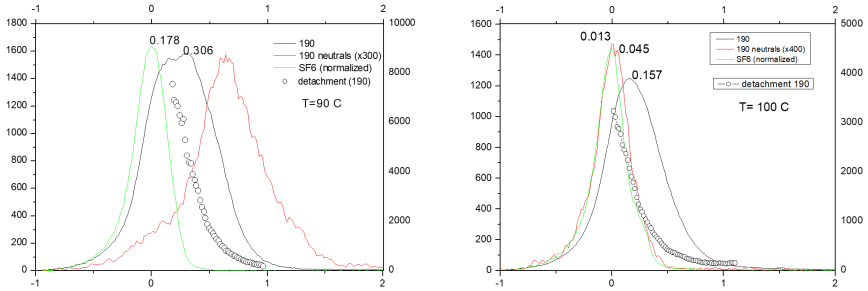


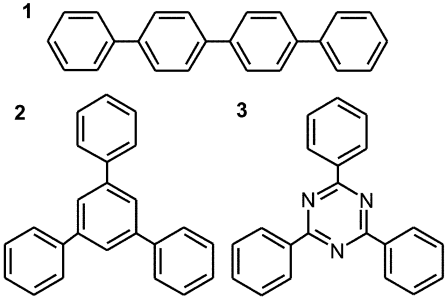
Рис. 1: Кривые эффективного выхода и времена жизни молекулярных отрицательных ионов кумарина при T=90 C и T=100 C.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 19-13-00021.

Долгоживущие молекулярные отрицательные ионы полифенилов

Туктаров Р.Ф.[1], **Муфтахов М.В.**[1], **Хатымов Р.В.**[1,2]
[1]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
[2]Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, г.Москва, Россия

Олигофенилы, благодаря своей химической стабильности и особым оптическим свойствам, регулируемым как длиной фенильных цепей, так и их взаимным расположением в структуре молекул, представляют практический интерес в качестве сцинтилляторов для регистрации рентгеновского излучения, светопреобразователей для жесткого ультрафиолетового излучения, активных сред для лазеров на красителях, прекурсоров соединений для жидких кристаллов. Уникальная электронная структура и обусловленная ею электропроводимость этих соединений открывают перспективы их использования в молекулярной и тонкопленочной органической электронике. В связи с этим представляет интерес исследование взаимодействия индивидуальных молекул олигофенилов с низкоэнергетическими электронами, которые могут появляться в конденсированных средах в процессах фотоионизации, а также при переносе заряда в органических полупроводниковых материалах. В настоящей работе методом масс-спектрометрии резонансного захвата электронов (РЗЭ) [1] исследованы процессы взаимодействия низкоэнергетических (0 – 15 эВ) свободных электронов с изолированными молекулами линейного олигофенила пара-кватерфенила (1), его изомера 1,3,5-трифенилбензола (2) и азазамещенного аналога 2,4,6-трифенил-1,3,5-триазина (3).



Все соединения исследованного ряда показали высокую устойчивость к диссоциативному распаду под воздействием электронов. Как и для ранее исследованных полициклических ароматических углеводородов [2, 3, 4, 5], фрагментация, признаком которой при РЗЭ служит интенсивное образование осколочных отрицательных ионов (ОИ), возникает при энергиях налетающих электронов (E_e) не ниже 5 эВ. При этом единственным каналом фрагментации является отщепление атома водорода с образованием депротонированных молекул $[M-H]^-$. Долгоживущие (масс-спектрометрически регистрируемые) молекулярные ОИ M^- обнаружены при $E_e \sim 0$ эВ для соединений (1) и (3), что свидетельствует о положительном адиабатическом электронном (EA_a) сродстве этих молекул [5]. Для соединения (3) выход ионов M^- обнаружен также в области при

$E_e \approx 0.93$ эВ. Образование таких («аномальных») ионов M^- при нетепловых энергиях характерно для молекул с высоким $EA_a > 0.7$ эВ [4], что подтверждается оценками на основе статистических теорий и теоретическими квантово-химическими расчетами [6, 7].

[1] Мазунов В.А., Щукин П.В., Хатымов Р.В., Муфтахов М.В. // Масс-спектрометрия. 2006. Т. 3. С. 11.

[2] Муфтахов М.В., Хатымов Р.В., Туктаров Р.Ф. // Журнал технической физики. 2018. V. 88. P. 1893.

[3] Хатымов Р.В., Туктаров Р.Ф., Муфтахов М.В. // Письма в ЖЭТФ. 2011. V. 93. P. 482.

[4] Khatymov R.V., Muftakhov M.V., Shchukin P.V. // Rapid Commun. Mass Spectrom. 2017. V. 31. P. 1729.

[5] Хатымов Р.В., Терентьев А.Г. // Известия АН, Сер. хим. 2021. Т. 4. С. (в печати).

[6] Khatymov R.V., Muftakhov M.V., Tuktarov R.F., Raitman O.A., Shokurov A.V., Pankratyev E.Y. // J. Chem. Phys. 2019. V. 150. P. 134301.

[7] Khatymov R.V., Shchukin P.V., Muftakhov M.V., Yakushchenko I.K., Yarmolenko O.V., Pankratyev E.Y. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2020. V. 22. P. 3073.

Задача типа Коши для линейного уравнения с несколькими дробными производными

Туров М.М., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть D_t^β — дробная производная Римана — Лиувилля [1], $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$. Зададим r групп чисел с одинаковой дробной частью внутри каждой группы и с разными дробными частями — для разных групп:

$$0 \le \alpha_{1,1} < \alpha_{1,2} < \dots < \alpha_{1,n_1},\ m_1 - 1 < \alpha_{1,n_1} \le m_1 \in \mathbb{N},$$

$$\dots$$

$$0 \le \alpha_{r-1,1} < \alpha_{r-1,2} < \dots < \alpha_{r-1,n_{r-1}},\ m_{r-1} - 1 < \alpha_{r-1,n_{r-1}} \le m_{r-1} \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \alpha_{r,1} < \alpha_{r,2} < \dots < \alpha_{r,n_r} < \alpha_{r,n_r+1} = \alpha,\ m_r - 1 < \alpha \le m_r \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим задачу типа Коши для линейного уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_k} A_{k,l} D_t^{\alpha_{k,l}} z(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$D_t^{\alpha_{in_i} - m_i + k_i} z(0) = z_{k_i}, \quad k_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{2}$$

где $z_{k_i} \in \mathcal{Z}, k_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1, i = 1, 2, \ldots, r$, $A_{k,l} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $l = 1, 2, \ldots, n_k$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, что $J_t^{m_i - \alpha_{in_i}} z \in C^{m_i}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}) \cap C^{m_i - 1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Теорема. Пусть $A_{k,l} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $l = 1, 2, \ldots, n_k$, $z_{k_i} \in \mathcal{Z}$, $k_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1, i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) и оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{k_r=0}^{m_r - 1} Z_{k_r}(t) z_{k_r} - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k_i=0}^{m_i - 1} Z_{k_i}(t) z_{k_i},$$

где $Z_{k_i}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \lambda^{m_i - 1 - k_i} (\lambda^{\alpha} I - \lambda^{\alpha_{1,1}} A_{1,1} - \cdots - \lambda^{\alpha_{r,n_r}} A_{r,n_r})^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$, контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\}$, $\Gamma_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\}$,$\Gamma_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}$, $r_0 > 0$ — достаточно большое число.

[1] Podlubny I. Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications. San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto: Academic Press, 1999.

Bifurcations and stability of solitons in vector three-component NLS equation with additional potential

Fedotov A.P., Alfimov G.L.

MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia

We study soliton states for the system of three nonlinearly coupled NLS-type equations with additional potential $V(x)$,

$$\begin{cases} i\psi_{1,t} + \psi_{1,xx} - V(x)\psi_1 - (|\psi_1|^2 + \beta_{12}|\psi_2|^2 + \beta_{13}|\psi_3|^2)\psi_1 = 0, \\ i\psi_{2,t} + \psi_{2,xx} - V(x)\psi_2 - (\beta_{21}|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \beta_{23}|\psi_3|^2)\psi_2 = 0, \\ i\psi_{3,t} + \psi_{3,xx} - V(x)\psi_3 - (\beta_{31}|\psi_1|^2 + \beta_{32}|\psi_2|^2 + |\psi_3|^2)\psi_3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Here $\beta_{i,j} > 0$ and $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$. The soliton states for Eq. (1) correspond to the anzatz

$$\psi_k(t, x) = e^{i\mu_k t} u_k(x), \quad k = 1, 2, 3,$$

and the boundary conditions

$$u_k(x) \to 0, \quad x \to \pm\infty, \quad k = 1, 2, 3.$$

Here $\mu_k \in \mathbb{R}$ and $u_k(x)$ are real functions. Then $u_k(x)$ satisfy a system of three ODE of the second order.

We employ the method described in [1] that allows to found *all* soliton states for Eq. (1), for given set of β_{ij} and μ_k. It is assumed that the potential is harmonic, $V(x) = x^2$. We consider two situations:

(a) $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{13}$;

(b) $\beta_{13} = \beta_{31} = 0$, $\beta_{12} = \beta_{23}$.

In both the cases, the components $u_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, are: (i) bright soliton (no zeros, even solution, labelled (B)) and (ii) dark soliton (one zero, odd solution, labelled (D)). The three component soliton states are composed by these entities. We denote them BBD (bright-bright-dark), BDD (bright-dark-dark) and so on. In our presentation we describe the bifurcations of these states and report on their stability/instability.

The research is supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 20-11-19995)

[1] G.L.Alfimov, I.V.Barashenkov, A.P.Fedotov, V.V.Smirnov, D.A.Zezyulin, Physica D, **397**, 39-53 (2019).

Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах

Филин Н.В.[1,2], **Фёдоров В.Е.**[2]

Югорский государственный университет, г.Ханты-Мансийск, Россия;
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Линейное пространство функций, для которых определено преобразование Лапласа, обозначим через $\widehat{\mathcal{Z}}$. Через $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ обозначим множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в $\mathcal{Z}$, действующих в пространство $\mathcal{Z}$.

Введем обозначения $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi, t \neq 0\}$ при $\psi \in (0, \pi/2]$.$\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi, t \neq 0\}$ при $\psi \in (0, \pi/2]$, $S_{\theta,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\}$ при $\theta \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ назовем принадлежащим классу $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, если

1) существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$ $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\lambda - a|}$.

Теорема Пусть $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in D_A$. Тогда существует единственное в $\widehat{\mathcal{Z}}$ решение задачи Коши $z^{(l)}(0) = z_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, для дифференциального уравнения с дискретно распределенной дробной производной Римана — Лиувилля

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t), \quad t > 0.$$

При этом решение аналитично в секторе $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$ и имеет вид

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} \frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}} \left(W(\lambda) I - A\right)^{-1} z_l d\lambda, \quad t > 0.$$

Здесь $\Gamma = \partial S_{a,\theta}$ при $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $W(\lambda) := \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k}$, $W_l(\lambda) := \sum\limits_{k=k_l}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k}$, $k_l = \min\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : \alpha_k > l\}$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 21-51-54003.

Integrals of subharmonic functions over planar sets

Khabibullin B.N.
Bashkir State University, Ufa, Russian Federation

Let $\overline{D}(R)$ be a closed disc in the complex plane $\mathbb{C}$ of radius $R > 0$ centered at $0 \in \mathbb{C}$. Let $U = u - v$ be a *difference of subharmonic functions* $u, v \not\equiv -\infty$ on a neighborhood of $\overline{D}(R)$ with the *Riesz charge* $\Delta_U := \frac{1}{2\pi} \triangle(u - v)$ where $\triangle$ is the *Laplace operator.* For simplicity, $u(0) = v(0) = 0$. For $U^+ := \sup\{0, U\}$, the *Nevanlinna characteristic* T_U of U is defined as

$$\mathsf{T}_U(R) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^+(Re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta + \int_0^R \frac{\Delta_U^-\big(\overline{D}(t)\big)}{t} \mathrm{d}t,$$

where $\Delta_U^- := \sup\{0, -\Delta_U\}$ is the *lower variation of the Riesz charge* of U.

Theorem ([2], [1, Theorem 2]). *Let $0 < r < R < +\infty$, $E \subset \overline{D}(r)$ be a measurable subset with respect to the planar Lebesgue measure λ. Then*

$$\int_E U^+ \, \mathrm{d}\lambda \leq \frac{2R}{R - r} \mathsf{T}_U(R) \lambda(E) \ln \frac{100R^2}{\lambda(E)}. \tag{1}$$

We will consider also generalizations of this Theorem in several directions:
1) for functions U on the *unit disc* $\overline{D}(1) \subset \mathbb{C}$ or in $\mathbb{C}$;
2) for *convex functions* and their differences;
3) for subharmonic functions and their differences on a $\mathtt{d}$-*dimensional space* $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ for $\mathtt{d} > 2$ with $E \subset \overline{B}(R) := \{x \in \mathbb{R}^{\mathtt{d}} \colon |x| \le R\}$;
4) for *fractal sets* E of finite $\mathtt{s}$-dimensional *Hausdorff measure* in $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ for $\mathtt{d} = 1, 2, \dots$ with $\mathtt{s} \in \big((\mathtt{d}-2)^+, \mathtt{d}\big]$ or *outer Hausdorff h-measures* with an increasing *measure function* (see [3]–[6]) $h \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ under condition $\int_0 h(t) t^{1-\mathtt{d}} \mathrm{d}t < +\infty$, an also for Borel measures μ on these sets E satisfying $\mu\big(x + B(t)\big) \le h(t)$ for each $x \in \mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ and $t \in \mathbb{R}^+$, etc.

[1] Khabibullin B. N. Integrals of subharmonic functions and their differences with weight over small sets on a ray//Matematychni Studii, **54**:2 (2020), 162–171.

[2] Gabdrakhmanova L. A., Khabibullin B. N. A Small Intervals Theorem for Subharmonic Functions // Russian Mathem., **64**:9 (2020), 12–20.

[3] Carleson L. Selected Problems on Exceptional Sets, Nostrand, 1967.

[4] Federer H. Geometric measure theory, NY: Springer-Verlag, 1969.

[5] Rogers C. A. Hausdorff measures, Cambridge Univ. Press, 1970.

[6] Evans L. C., Gariepy R. F. Measure theory and fine properties of functions, Boca Raton, FL: CRC Press, 1992.

Характеристическая алгебра Ли интегрируемых дифференциально-разностных уравнений в 3D.

Хабибуллин И.Т.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В докладе планируется обсудить алгебраический подход к проблеме интегрируемой классификации дифференциально-разностных уравнений с одной непрерывной и двумя дискретными переменными. В качестве критерия классификации мы выдвигаем следующую гипотезу. Любое интегрируемое уравнение рассматриваемого типа допускает бесконечную последовательность конечнополевых редукций, интегрируемых по Дарбу. Свойство интегрируемости по Дарбу конечнополевой системы формализуется как условие конечномерности характеристической алгебры Ли-Райнхарта. Это позволяет вывести эффективные условия интегрируемости в виде дифференциальных уравнений на правую часть исследуемого уравнения. Для проверки гипотезы используем известные интегрируемые уравнения из рассматриваемого класса. В работе [1] показано, что все известные примеры действительно обладают этим свойством.

[1] Habibullin I.T., Khakimova A.R. Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D, arXiv:2102.07352.

Простые волны конических движений

Хабиров С.В.
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Модели сплошной среды газодинамического типа допускают 11-мерную алгебру Ли группы Галилея, расширенную равномерным растяжением всех независимых переменных. Объектом исследования является построение подмоделей цепочки вложенных подалгебр размерностей от 1 до 4, описывающие конические движения газа. Для выбранной цепочки найдены согласованные инварианты в цилиндрической системе координат. На их основе получены представления инвариантного решения для каждой подмодели из цепочки. Подстановкой их в систему уравнений газовой динамики получены вложенные инвариантные подмодели рангов от 0 до 3. Доказано, что решения подмодели, построенной по подалгебре большей размерности, будут являться решениями подмоделей, построенных по подалгебрам меньших размерностей.

Из выбранной цепочки рассмотрена 4-х мерная подалгебра, производящая нерегулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1 в цилиндрических координатах. В газовой динамике такие решения называются простыми волнами. Изучена совместность соответствующей подмодели с помощью системы альтернативных предположений, получаемых из уравнений подмодели. Получены решения, зависящие от произвольных функций, а также частные решения, которые могут быть инвариантными относительно подалгебр, вложенных в рассматриваемую подалгебру, но не обязательно из рассматриваемой цепочки.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052)

Инвариантные многообразия интегрируемых уравнений и их приложения

Хакимова А.Р.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

В докладе планируется обсудить некоторые приложения понятия обобщенного инвариантного многообразия (ОИМ) нелинейных интегрируемых уравнений. В работах [1]-[5] было замечено, что ОИМ является хорошим инструментом построения пары Лакса и оператора рекурсии. В работе [6], на примере уравнения Вольтерра, было показано, что ОИМ могут быть применены и для построения частных решений уравнения. В докладе будут рассмотрены ОИМ для нелинейного уравнения Шредингера. Будет показано, что при помощи инвариантных многообразий можно вывести уравнения Дубровина, которые позволяют находить частные решения уравнения Шредингера.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России»

[1] Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M.N. On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations. J. Phys. A: Math. Theor., **49**:3 (2016), 35 pp.

[2] Habibullin I.T., Khakimova A.R. On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz. J. Phys. A: Math. Theor., **50**:30 (2017), 19 pp.

[3] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек. ТМФ, **191**:3 (2017), 369-388.

[4] Habibullin I.T., Khakimova A.R. On the recursion operators for integrable equations. J. Phys. A: Math. Theor., **51**:42 (2018), 22 pp.

[5] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей. ТМФ, **196**:2 (2018), 294-312.

[6] Habibullin I.T., Khakimova A.R. Invariant manifolds and separation of the variables for integrable chains. J. Phys. A: Math. Theor., **53**:38 (2020), 17 pp.

Аналитическая нормализация слоений индуцированных бинарными уравнениями

Черепанова Е.А., Воронин С.М.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Бинарное уравнение (BE — binary equation [1]) — это неявное дифференциальное уравнение вида

$$ap^2 + 2bp + c = 0, \tag{1}$$

где $p = \frac{dy}{dx}$, а функции $a = a(x, y),\ b = b(x, y),\ c = c(x, y)$ определены в окрестности точки $(0, 0)$.

Два бинарных уравнения будем называть эквивалентными, если некоторая локальная замена координат $(x, y) \mapsto (X, Y)$ переводит решение одного уравнения в решение другого.

К настоящему времени классификация BE исследована недостаточно полно, см.[1]; наибольшие проблемы при этом возникали при одновременном обращении в нуль всех трёх коэффициентов уравнения (1):

$$a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0. \tag{2}$$

Для таких уравнений в [1] доказано следующие утверждение

Теорема [1]. Типичное ВЕ (1), (2) формально эквивалентно уравнению вида

$$yp^2 + 2(b_2 y + \beta(x))p - y = 0, \tag{3}$$

где $\beta(0) = 0$.

При этом вопрос об аналитической приводимости к нормальной форме (3) оставался открытым. Ниже мы получим некоторые близкие результаты, связанные с аналитической нормализацией уравнений вида (1), (2). Будем рассматривать комплексную версию ВЕ: $(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0)$, $p \in \mathbb{C}, a, b, c$ — голоморфные в $(\mathbb{C}^2, 0)$ функции, удовлетворяющие условиям (2).

Лемма 1. Для типичного ВЕ (1), (2) уравнение (1) определяет в $(\mathbb{C}^2, 0)\times \mathbb{C}$ гладкую гиперповерхность (поверхность уравнения). Эта гиперповерхность продолжается до комплексного подмногообразия M (подмногообразие уравнения) в $(\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{C}P^1$. При этом:

1. M — окрестность сферы $\mathbb{P} = (0, 0) \times \mathbb{C}P^1$;
2. Индекс самопересечения сферы $\mathbb{P}$ в M равен -2: $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = -2$.

Пример. Для ВЕ $xp^2 = y$, его поверхность уравнения M_0 есть комплексное многообразие, полученное из областей $\{|x| < \epsilon,\ |u| < 2\} \subset \mathbb{C}^2$ и $\{|v| < 2,\ |y| < \epsilon\} \subset \mathbb{C}^2$ склейкой по отображению $(x, u) \mapsto (v, y)$, $v = u^{-1}$, $y = xu^2$. Сфера $\mathbb{P}$ получается при этом из дисков $\{x = 0,\ |u| < 2\}$ и $\{y = 0,\ |v| < 2\}$ склейкой по отображению $v = u^{-1}$.

Контактные плоскости $dy = pdx$ высекают на поверхности уравнения некоторое поле направлений. Рассмотрим слоение поверхности уравнения на интегральные кривые этого поля направлений.

Лемма 2. Для типичного ВЕ (1), (2), определенное выше слоение продолжается до голоморфного слоения F (с особыми точками) всего подмногообразия уравнения M. При этом:

1. Слоение F имеет ровно три особые точки на сфере $\mathbb{P} \subset M$;
2. Слоение F является недикритическим: сфера $\mathbb{P}$ (с удаленными особыми точками) является слоем слоения F.

Слоение F окрестности $(M, \mathbb{P})$ сферы $\mathbb{P}$, определённое в Леммах 1 и 2 по бинарному уравнению (1), (2), будем называть слоением, индуцированным этим ВЕ. Пусть $\mathcal{V}$ — класс всех слоений $(F,\ M,\ \mathbb{P})$, для которых выполнены утверждения 1. и 2. лемм 1 и 2. В частности, слоение, индуцировануые типичными ВЕ — слоения класса $\mathcal{V}$. Два слоения $(F,\ M,\ \mathbb{P})$ и $(\widetilde{F},\ \widetilde{M},\ \widetilde{\mathbb{P}})$ из $\mathcal{V}$ будем называть аналитически эквивалентным, если существует голоморфизм некоторой окрестности $M^{'} \subset M$ сферы $\mathbb{P}$ на некоторую окрестность $\widetilde{M'} \subset \widetilde{M}$ сферы $\widetilde{\mathbb{P}}$), переводящий слои (ограничения на $M^{'}$) слоения F в слои (ограничения на $\widetilde{M'}$) слоения $\widetilde{F}$.

Лемма 3. Аналитически эквивалентным ВЕ соответствуют аналитически эквивалентные индуцированные слоения.

Таким образом, Леммы 1 — 3 сводят (частично) задачу об аналитической классификации BE (1), (2) к задаче об аналитической классификации слоений класса $\mathcal{V}$. А вот эту последнюю задачу удалось решить почти полностью.

Теорема. Типичное слоение класса $\mathcal{V}$ аналитически эквивалентно слоению F_γ стандартного подмногообразия M_0 (из примера) на слои аналитического поля направлений, порождаемого (в карте (x, u) на M_0) векторным полем $x(b_1 u + \gamma(x))\frac{\partial}{\partial x} + u(1+u)\frac{\partial}{\partial u}$, где γ — голоморфна в $(\mathbb{C}, 0)$, $\gamma(0) = 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 21-51-54003).

[1] J.W. Bruce, F. Tari. On binary differential equations, Nonlinearity 8(2):255, 1995.

Математическая модель устойчивости состояний образца сегнетоэлектрического жидкого кристалла во внешних скрещивающихся электрических полях

Шапошников Н.С., Зиннуров М.И.
Башкирский государственный педагогический университет
им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Большинство теоретических моделей, описывающих поведение сегнетоэлектрических жидких кристаллов (ЖК), рассматриваются в одноконстантном приближении. В работе [1] рассмотрен процесс и возможность возникновения периодических искажений смектических слоев в скрещенных магнитном и электрическом полях.

В данной работе проводится анализ поведения сегнетоэлектрической многослоевой жидкокристаллической ячейки в перпендикулярных электрических полях вблизи точек бифуркации.

Задача минимизации свободной энергии в объеме исследуемого образца сводится к решению уравнения

$$\eta\phi_t = -I\phi_{tt} + K\phi_{zz} \pm P(E_1 \sin\phi + E_2 \cos\phi) + \frac{1}{8\pi}\Delta\epsilon(E_1^2 - E_2^2)\sin^2\theta \sin(2\phi),$$

для которого получено равновесное решение, выражающееся в эллиптических интегралах первого рода. Имея равновесное решение динамического уравнения, проведен анализ его устойчивости методом малых возмущений. Анализ устойчивости равновесных состояний во внешнем электрическом поле проведен ранее в работе [2].

Наличие двух перпендикулярно направленных электрических полей позволяет регулировать азимутальный угол даже при очень слабых значениях приложенных полей, что дает возможность детально проследить

за динамикой переориентации директора для конечного образца сегнетоэлектрического ЖК, расположенного в обычной геометрии со смектическими плоскостями, перпендикулярными ограничивающим пластинам.

[1] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Периодические искажения слоев смектического жидкого кристалла в магнитном и электрическом полях // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 19 (2019), №1, с. 79-86. DOI: 10.18083/LCAppl.2019.1.79

[2] Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Исследование устойчивости равновесных состояний наноматериалов на основе сегнетоэлектрических жидких кристаллов во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. 2015. Т. 15, № 3, с. 133-142. DOI: 10.18083/LCAppl.2015.3.125

Омбилическая особенность решения системы уравнений газовой динамики

Шавлуков А.М.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается типичная (с точки зрения математической теории катастроф) омбилическая особенность решения системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

соответствующей уравнению состояния $p = a^2\rho^\gamma$, $a = const$, ρ – плотность газа, γ – показатель политропы. Рассмотрены случаи $\gamma = 3$, $\gamma = \frac{5}{3}$. Показатель $\gamma = \frac{5}{3}$ относится к одноатомному газу.

Система переписывается в терминах инвариантов Римана и переводится в систему квазилинейных уравнений. В случае $\gamma = 3$ это система уравнений Хопфа.

В окрестности точки потери гладкости решение описывается каноническим уравнением сечения гиперболической омбилики. Возмущение ростка катастрофы при этом отличается от описанного в [1]. Выдвигается гипотеза о неточности представленной в [1] классификации особенностей инвариантов Римана.

Исследование выполнено совместно с Б.И. Сулеймановым.

[1] А. Х. Рахимов, “Особенности римановых инвариантов”, Функц. анализ и его прил., 27:1 (1993), 46–59; Funct. Anal. Appl., 27:1 (1993), 39–50

Задача смешанного управления для дробного уравнения

Шуклина А.Ф., Мелехина Д.В.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Введем обозначения $g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1}$, $\tilde{g}_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}(t-t_0)^{\delta-1}$, $J_t^\delta h(t) := \int\limits_{t_0}^{t} g_\delta(t-s)h(s)ds$ для $\delta > 0$, $t > 0$. D_t^m – обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 – тождественный оператор. Дробная производная Герасимова — Капуто функции h определяется формулой $D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}(t)\right)$, $t > t_0$.

Пусть $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z})$. Введём в рассмотрение пространство управлений $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой $\|(u,v)\|_{\mathfrak{U}} = \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}$. Рассмотрим задачу смешанного управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + Bu(t),\ t \in (t_0,T), \tag{1}$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k,\ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{2}$$

$$(u,v) = (u;v_0,v_1,\dots,v_{m-1}) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(z,u,v) \to \inf, \tag{4}$$

где непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства $\mathfrak{U}$ — множество допустимых управлений, набор $(u,v) = (u;v_0,v_1,\dots,v_{m-1}) \in \mathfrak{U}$ задаёт управление, J — функционал качества, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \le m$.

Исходя из вида уравнения (1), решения задачи (1), (2) будем искать в пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) :=$

$$\left\{z \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z}) :\ J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0,T;\mathcal{Z})\right\}.$$

Теорема Пусть $\alpha > 0$, $(\alpha - m + 1)^{-1} < q$, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, в банахово пространство $\mathfrak{Y} \subset L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y} \times L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, коэрцитивный на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$. Тогда существует решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи (1)–(4). Если функционал J является строго выпуклым на $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}$, то решение задачи (1)–(4) единственно.

Формулы первого приближения для дефинитных и индефинитных мультипликаторов гамильтоновых систем и их приложения

Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается нелинейная гамильтонова система [1]

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + S(t,\varepsilon)\right]x + a(x,t,\varepsilon)\,, \quad x \in R^{2N}\,, \tag{1}$$

зависящая от скалярного или векторного параметра ε. Здесь J – кососимметрическая блочная матрица размерности $2N \times 2N$, A_0 и $S(t,\varepsilon)$ – симметрические матрицы размерности $2N \times 2N$, при этом $S(t,\varepsilon)$ – T-периодическая по t и удовлетворяет условию: $S(t,0) \equiv 0$. Нелинейность $a(x,t,\varepsilon)$ предполагается T-периодической по t и удовлетворяет условию: $\|a(x,t,\varepsilon)\| = O(\|x\|^2)$ при $x \to 0$.

Пусть в T-периодической задаче линейная невозмущенная система

$$\frac{dx}{dt} = JA_0x\,, \quad x \in R^{2N}\,, \tag{2}$$

имеет кратный мультипликатор μ_0 такой, что $|\mu_0| = 1$. Пусть для простоты эта кратность равна 2.

Кратные мультипликаторы подразделяются на дефинитные и индефинитиные [1]. Если мультипликатор μ_0 является дефинитным, то при любом малом линейном периодическом гамильтоновом возмущении системы (2) мультипликатор μ_0 может расщепиться на пару мультипликаторы μ_1 и μ_2 только так, что μ_1 и μ_2 останутся на единичной окружности. Если же кратный мультипликатор μ_0 является индефинитным, то существуют малые возмущения, при которых эти мультипликаторы сойдут с единичной окружности.

В докладе предлагаются формулы первого приближения в задаче о возмущении дефинитных и индефинитных мультипликаторов. Рассматриваются приложения к анализу динамики нелинейного уравнения (1) в окрестности решения $x = 0$.

[1] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972.

Кинематические свойства тонких аккреционных дисков вокруг черной дыры Айон-Беато-Гарсиа

Юсупова Р.М.[1], **Измаилов Р.Н.**[1,2], **Карамов Д.Д.**[2]
[1] ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
[2] БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

В данной работе исследуются кинематические свойства тонких аккреционных дисков вокруг черной дыры Айон-Беато-Гарсиа (АБГ) на основе модели Пейджа-Торна.

Метрика несингулярной статичной сферически-симметричной заряженной черной дыры АБГ с отношением заряда к массе $g = q/2M$ является решением уравнения нелинейной электродинамики Борна-Инфельда и имеет вид [1]:

$$ds^2 = -H(r)dt^2 + dr^2/H(r) + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad (1)$$

$$H(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{\left(r^2+q^2\right)^{3/2}} + \frac{q^2r^2}{\left(r^2+q^2\right)^2}, \quad (2)$$

где M и q – масса и заряд черной дыры АБГ, соответственно.

В ходе исследований физических параметров тонкого аккреционного диска черной дыры АБГ были получены аналитические выражения и профили угловой скорости, энергии связи, углового момента и рассчитана эффективность излучения, показывающая отношение мощности излучения фотонов с поверхности диска к мощности поглощения фотонов центральным объектом. Так как вылетевшие фотоны уходят в бесконечность, то эффективность определяется через удельную энергию $E(r)$, определяемую на наименьшей стабильной орбите $r_{\rm ms}$: $\epsilon = 1 - E(r_{\rm ms})$.

Таблица 1: Эффективность при различных значениях q.

q/M	$r_{\rm ms}/M$	ϵ (%)
0.1	5.97	5.745
0.4	5.47	6.205
0.6	4.63	7.135

Значения эффективности при различных значениях q приведены в таблице 1. Согласно результатам, представленным в таблице 1, видно, что с увеличением электрического заряда черной дыры эффективность увеличивается.

[1] Ayón-Beato E., García A., Phys. Rev. Lett. **80**, 5056 (1998).

Научное издание

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник тезисов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 15 – 19 марта 2021 г.)

В авторской редакции

Издательство не несет ответственности за опубликованные материалы.
Все материалы отображают персональную позицию авторов.
Мнение Издательства может не совпадать с мнением авторов

Подписано в печать 08.03.2021 г. Формат 60x84/16.
Печать: цифровая. Гарнитура: Times New Roman
Усл. печ. л. 4,82. Тираж 500. Заказ 1377.

АЭТЕРНА
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»
450076, г. Уфа, ул. М. Гафури 27/2
https://aeterna-ufa.ru
info@aeterna-ufa.ru
+7 (347) 266 60 68