Содержание

Программа конференции «Комплексный анализ и приложения»

ИМВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа

https://telemost.yandex.ru/j/42187192861305

11 июня

Время уфимское (мск + 2)

13.50–14.00 *Открытие конференции*

Председатель: А.М. Гайсин

14.00–14.30 **А.Ю. Попов (МГУ)** *Новые задачи о связи минимума модуля и максимума модуля аналитической функции*
14.35–15.05 **В.Б. Шерстюков (МГУ)** *Оценка снизу минимума модуля целой функции рода нуль через отрицательную степень максимума модуля на частой последовательности окружностей*
15.10–15.40 **Г.Г. Брайчев (МГПИ)** *О множествах единственности в классах целых функций*

15.45 -16.00 *Перерыв*

16.00–16.30 **А.Ю. Дютин, С.Р. Насыров (Казанский (Приволжский) федеральный университет)** *Однопараметрические семейства конформных отображений неограниченных двусвязных многоугольных областей*
16.35–17.05 **М.В. Кабанко, К.Г. Малютин (Курский государственный университет)** *Об обобщении теоремы Вейерштрасса*
17.10–17.40 **Д.А. Полякова (ЮФУ)** *Об образе операторов свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций*

12 июня

Председатель: Б.Н. Хабибуллин

10.00–10.30 **В.В. Капустин (Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН)** *Множество нулей дзета-функции Римана и возмущения самосопряженных операторов*
10.35–11.05 **П.Л. Шабалин (Казань)** *Задача Римана для обобщенных аналитических функций со сверхсингулярной линией*

11.10–11.30 *Перерыв*

11.30–12.00 **А.В. Домрин (МГУ)** *Глобальная разрешимость вещественно-аналитической задачи Коши для фокусирующих уравнений нелинейной оптики*
12.05–12.35 **А.Д. Баранов (СПбГУ)** *Ёмкости конечных множеств и оценки норм обратных матриц* (д)
12.40–13.00 **Р.Ш. Хасянов (СПбГУ)** *Оценки весовых сумм коэффициентов в классе ограниченных функций в круге*

13.05–14.30 *Перерыв*

14.30–15.00 **С.Н. Мелихов (ЮФУ)** *О делении на многочлены от нескольких переменных в пространствах аналитических функционалов*
15.05–15.25 **О.А. Иванова (ЮФУ)** *Об обратимости оператора Дюамеля в пространствах ультрадифференцируемых функций*
15.30–15.50 **И.А. Колесников (Томский государственный университет)** *Однопараметрическое семейство конформных отображений кольца на двусвязный многоугольник*
15.55–16.15 **С.В. Попенов ((ИМВЦ)** *Интерполяция суммами рядов экспонент в специальной ситуации*

13 июня

Председатель: И.Х. Мусин

10.00–10.20 **Г.А. Гайсина (УУНиТ)** *Обобщение теоремы Гайсина–Аиткужиной об устойчивости максимального члена ряда Дирихле*
10.25–10.45 **Р.Р. Мурясов (ИМВЦ)** *О субгармоничности функций с разделёнными переменными в многомерных сферических координатах*
10.50–11.10 **А.И. Рахимова (ИМВЦ)** *Гиперциклические операторы в пространстве целых функций*

11.15–11.30 *Перерыв*

11.30–12.00 **Н.Ф. Абузярова ИМВЦ)** *Спектральный синтез для пересечения ядер операторов свертки в неквазианалитических классах функций* (д)
12.00–12.30 **А.М. Гайсин (ИМВЦ)** *Усиленно неполные (свободные) системы степеней* $\{z^{p_n}\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$*, их обобщения и классические задачи*
12.35–13.05 **А.В. Абанин (ЮФУ)** *Топологические свойства операторов в квазибанаховых функциональных пространствах* (д)

Топологические свойства операторов в квазибанаховых функциональных пространствах

Абанин А.В.

Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ;
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

В последние годы значительная часть исследований по описанию топологических свойств линейных операторов в весовых функциональных пространствах различной природы сосредоточена на разработке общих подходов и методов, позволяющих охарактеризовать наличие или отсутствие какого-либо свойства (непрерывность, компактность, определенная структура инвариантных подпространств и др.) в зависимости от веса, задающего пространство. Представление о круге рассматриваемых вопросов и установленных на этом пути результатов для классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций можно получить из недавнего обзора Х. Бонета [1]. В решении ряда задач (напр., в описании динамических свойств оператора сдвига и инвариантных подпространств операторов интегрирования и дифференцирования в пространствах Бергмана, Фока и др.) определяющую роль сыграли результаты Д.В. Якубовича и М.П. Томаса, установленные ими для оператора сдвига в весовых пространствах числовых последовательностей $\ell^p(w)$. Подчеркнем, что подавляющая часть упомянутых выше результатов была получена для банаховых пространств (в частности, для $\ell^p(w)$ при $p \geq 1$). В то же время, в приложениях (см., напр., [2]) возникает необходимость привлекать для проведения исследований и формулировки результатов небанаховы пространства $\ell^p(w)$, $0 < p < 1$, которые относятся к классу квазибанаховых пространств и к которым имеющиеся для банаховых и гильбертовых пространств методы неприменимы. В докладе будет представлена техника, развитая автором совместно с Р.С. Маннаниковым для оператора весовой композиции в $\ell^p(w)$, которая эффективно работает на всей шкале $0 < p < \infty$. Отметим, что при этом в квазибанаховом случае $0 < p < 1$ возникает ряд новых моментов, которые требуют дополнительного анализа и осмысления.

[1] Bonet J. Weighted spaces of holomorphic functions and operators between them // Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A., **116**, Article 184.

[2] Schwab C., Zech J. Deep learning in high dimension: neural network expression rates for generalized polynomial chaos expansions in UQ // Research report 2017 — 57. Seminar for Appl. Math., ETH, Zurich, 2018. 28 pp.

Продолжение сепаратно-гармонических функции вдоль фиксированного направления

Абдикадиров С.М.

Каракалпакский государственный университет и институт математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, Нукус, Узбекистан

Рассмотрим следующий класс: $\mathcal{H}(\widehat{D})-$минимальный класс плюри-субгармонических функций, который содержит в себе все функции вида $\alpha \ln |f(z)|$, где $f(z) \in \mathcal{O}(\widehat{D}) \cap h(D), \alpha > 0$, и является замкнутым относительно операции "верхняя регуляризация", т.е. для любого семейства $u_\lambda(z) \in \mathcal{H}(\widehat{D})$, $\lambda \in \Lambda$ локально ограниченных сверху функций, функция $u(z) = \overline{\lim\limits_{\zeta\to z}} \sup \{u_\lambda(\zeta) : \lambda \in \Lambda\}$ также принадлежит классу $\mathcal{H}(\widehat{D})$.

Не трудно убедится, что $\mathcal{H}(\widehat{D}) \subset psh(\widehat{D})$ и $\mathcal{H}(\widehat{D}) \neq psh(\widehat{D})$.

Величина

$$\gamma^*(z, E, \widehat{D}) =$$

$$= \overline{\lim_{w\to z}} \sup \left\{ \alpha \ln |f(w)| : f \in \mathcal{O}(\widehat{D}),\, f|_D \in h(D), \|f\|_E \leq 1, \|f\|_{\widehat{D}}^{\alpha} \leq e, \alpha > 0 \right\},$$

которая, дальнейшем мы называем её h-мерой, в свою очередь отличается от P-меры $\omega^*(z, E, \widehat{D})$ только тем, что в её определении фигурирует дополнительное условие гармоничности $f|_D$. Тем не менее множества нулевой h-меры более тонкие, чем множества нулевой P-меры.

Например, для множества $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \frac{1}{2}\} \subset B(0,1)$ мера $\gamma^*(x, S, B) \not\equiv 1$, но $\omega^*(z, S, \widehat{B}) \equiv 1$.

Отметим, что h-мера $\gamma^*(x, E, D)$ более подходящая для точных оценок чем величина $h(x, E, D)$, которая фигурирует в работах Дж. Хекарда (см. [1], [2]) и следовательно верна следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $u(x, y)$ сепаратно-гармонична в области

$$D \times V_r = D \times \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r, r > 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$$

и для каждого фиксированного $x^0 \in E \subset D$, где множество E не является h-плюриполярным, функция $u(x^0, y)$ переменного y гармонически продолжается на всю плоскость $\mathbb{R}^2$. Тогда функция $u(x, y)$ гармонически продолжается в область $D \times \mathbb{R}^2$ по совокупности переменных.

[1] Hecart J. On Zahariutas extremal functions for harmonic functions. Vietnam. J. Math., Vol. 27, Issue 1, 53-59 (1999).

[2] Hecart J. Harmonicity domains far Separately harmonic functions. Potential. Anal., Vol. 13, 115-126 (2000).

Спектральный синтез для пересечения ядер операторов свертки в неквазианалитических классах функций

Абузярова Н.Ф.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается задча об описании множества решений однородного уравнения свертки или системы таких уравнений (в том числе бесконечной), а именно: о возможности приближения каждого решения линейными комбинациями элементарных решений — экспоненциальных одночленов. Рассматриваемые операторы свертки действуют в пространстве $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$, состоящем из Ω-ультрадифференцируемых функций (Ω-УДФ) на интервале $(a;b)$, и, соответственно, они порождены Ω-ультрараспределениями с компактными носителями в этом интервале (теория Ω-ультрараспределений подробно изложена в [1], [2]). Так как, в отличие от случая классических распределений, Ω-ультрараспределение с точечным носителем не сводится к конечной линейной комбинации производных δ-функции, то и порожденный таким Ω-ультрараспределением оператор свертки, вообще говоря, не сводится только к дифференциальному оператору конечного порядка с постоянными коэффициентами. Даже для случая одного уравнения свертки в пространстве $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$ вопрос об описании множества решений рассматривался ранее лишь для частных случаев $\Omega = \{r_n\omega\}$, где ω — канонический вес, $r_n = n$ или $0 < r_n \nearrow 1$. При этом, так как речь шла о представлении решений в виде рядов (со скобками) из элементарных решений, на характеристическую функцию ультрараспределения, порождающего оператор свертки, накладывалось довольно сильное требование — быть мультипликатором соответствующего пространства целых функций $\mathcal{F}(\mathcal{U}'_\Omega(a;b))$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье-Лапласа.

Нами доказаны утверждения о приближении решений одного уравнения свертки и (бес)конечных систем уравнений свертки в пространствах Ω-УДФ линейными комбинациями элементарных их решений для случая, когда $\Omega = \{\omega_n\}$ — произвольная правильная последовательность неквазианалитических весов ω_n. На Ω-ультрараспределения, порождающие операторы свертки накладывается лишь требование точечности носителя. Используемый метод исследования состоит в переходе к эквивалентной двойственной задаче о подмодулях целых функций в $\mathcal{F}(\mathcal{U}'_\Omega(a;b))$ с последующим ее решением.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

[1] Абанин А.В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. М.: Наука, 2007.

[2] Абанин А.В. Ω-ультрараспределения// Известия РАН, сер. Матем., 72:2, 207–240 (2008).

Усиленно неполные (свободные) системы степеней $\{z^{p_n}\}$ ($p_n \in \mathbb{N}$), их обобщения и классические задачи

Гайсин А.М.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В докладе речь будет идти об усиленно неполных (минимальных) системах экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) на семействе кривых.

В терминах считающей функции и весового индекса концентрации (и конденсации) будут указаны достаточные условия усиленной неполноты (минимальности) системы экспонент на семействе кривых из прямоугольника $\{z = x + iy\colon\ a \le x \le b, |y| < c\}$, соединяющих его вертикальные стороны. Как выяснилось, в этой связи следует отдельно рассматривать случай вертикальной полосы $\{z = x+iy\colon\ a \le x \le b, |y| < \infty\}$ (см. [1]). К этим вопросам тесно примыкают интерполяционные задачи в классе целых функций из класса сходимости (см. [1]). Будут обсуждаться вопросы аналитического продолжения, регулярности роста целых рядов Дирихле в терминах специальных характеристик типа Полиа (см. [2], [3]), о количественных оценках степени минимальности системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ в $C[0, \delta]$ при $\delta \to 0$. Будут обозначены и открытые проблемы.

[1] Гайсин Р.А. Интерполяционные последовательности и неполные системы экспонент // Матем. сб. 2021. Т. 212. № 5. С. 58 – 79.

[2] Гайсин А.М. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931 – 945.

[3] Гайсин А.М. Регулярный рост целых функций, представленных рядами Дирихле. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2024. – 212 с.

Обобщение теоремы Гайсина–Аиткужиной об устойчивости максимального члена ряда Дирихле

Гайсина Г.А.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$ – последовательности, такие, что $\ln n = \mathrm{O}(\lambda_n)$, $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = -\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|b_n|}{\lambda_n} < \infty.$$

Через $\mu(\sigma)$ и $\mu_b^*(\sigma)$ обозначим максимальные члены целых рядов Дирихле с показателями λ_n и коэффициентами a_n и $a_n b_n$ соответственно. Пусть Φ – возрастающая выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция, φ – обратная к ней, Ψ – двойственная с Φ по Юнгу функция (см. [1, с. 186]), $\psi(x) = \Psi(x)x^{-1}$, $x > 0$. Хорошо известно, что $\ln \mu(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ тогда и только тогда, когда

$$|a_n| \le e^{-\Psi(\lambda_n)}, \quad n \ge 0.$$

Считаем, что Λ фиксирована и подчинена условиям: для любого $\eta > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\psi(\eta R)} \sum_{0<\lambda_n\le R} \frac{1}{n\lambda_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \psi(\eta\lambda_n)} = 0. \tag{1}$$

Пусть $\underline{W}(\psi)$ – класс непрерывных возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций w, таких, что: для всякого $\eta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)}{x\psi(\eta x)} = 0, \quad \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{\psi(\eta x)} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0. \tag{2}$$

Положим $D(\Phi) = \cup_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi)$, где

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda)\colon\ \ln M_F(\sigma) \le \Phi(m\sigma)\}, \quad m \ge 1,$$

$D(\Lambda)$ – класс целых рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|.$$

Основной результат. Пусть Λ удовлетворяет условиям (1). Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Phi)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой нижней плотности имело место соотношение $\ln \mu(\sigma) \sim \ln \mu_b^*(\sigma)$, достаточно, а в классе последовательностей B,

$-\ln|b_n| \le \theta(\lambda_n)$, $n \ge 0$, $\theta \in \underline{W}(\psi)$, и необходимо, чтобы для какой-то функции $w \in \underline{W}(\psi)$ выполнялись оценки $|\ln|b_n|| \le w(\lambda_n)$, $n \ge 0$.

Этот результат существенно усиливает соответствующую теорему об устойчивости из [2], где предполагалось выполнение условий:

1) для наименьшей вогнутой мажоранты $n_l(t)$ функции $\ln n(t)$, $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{n_l(t)}{t^2} dt = 0, \tag{3}$$

где функция φ, обратная к Φ, подчинена еще и условию

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty.$$

Из (3) следует, что $\ln n = o(\varphi(\lambda_n)\lambda_n)$, $n \to \infty$. Так как φ – вогнутая, то $\varphi(\eta x) \ge \eta\varphi(x)$, $\eta \in (0,1)$. Кроме того,

$$\Psi(x) = \sup_{\xi>0}(x\xi - \Phi(\xi)) > \frac{1}{2}x\varphi(x), \quad x \ge x_0,$$

т.е. $\psi(x) \ge \frac{1}{2}\varphi(x)$, $x \ge x_0$.

Таким образом, в [2] к Λ и Φ предъявлены более жесткие требования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант НОМЦ ПФО, соглашение № 075-02-2024-1444).

[1] Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. – 320 с.

[2] Gaisin A.M., Aitkuzhina N.N. Stability criterion for maximal terms of Dirichlet series // Journal of Math. Sci. 2022. 260:6, 715 – 724.

Глобальная разрешимость вещественно-аналитической задачи Коши для фокусирующих уравнений нелинейной оптики

Домрин А.В.

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Основной моделью, описывающей распространение сигнала в оптоволоконной линии связи, является нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma|u|^2 u$$

на комплекснозначную функцию $u(z,t)$ от двух вещественных переменных z,t. Мы покажем, что в случае $\sigma > 0$ (который отвечает притягивающей нелинейности и называется фокусирующим) задача Коши для этого уравнения с начальными условиями

$$u(z,0) = u_0(z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(z,0) = u_1(z), \qquad a < z < b,$$

имеет единственное вещественно-аналитическое решение $u(z,t)$ в области $-\infty < t < \infty, a < z < b$ (т.е. разрешима глобально по времени как при прямом, так и при обратном его отсчёте) для любых вещественно-аналитических функций $u_0(z), u_1(z)$. Обсуждаются также вопросы об аналоге этого результата для высших уравнений иерархии нелинейного уравнения Шрёдингера (описывающих влияние более сильных нелинейностей) и о структуре особенностей решения в дефокусирующем случае $\sigma < 0$.

Однопараметрические семейства конформных отображений неограниченных двусвязных многоугольных областей

Дютин А.Ю., Насыров С.Р.
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Мы предлагаем приближённый метод нахождения конформного отображения концентрического кругового кольца на произвольную неограниченную двусвязную многоугольную область, основаный на параметрическом методе Левнера–Комацу. Мы изучаем гладкие однопараметрические семейства конформных отображений $\mathcal{F}(z,t)$ концентрических колец на двусвязные многоугольные области $\mathcal{D}(t)$, которые получаются из фиксированной неограниченной двусвязной многоугольной области $\mathcal{D}$ проведением конечного числа полигональных разрезов переменной длины. В интегральное представление для конформных отображений $\mathcal{F}(z,t)$ входят неизвестные (акцессорные) параметры. Мы находим дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяют такие семейства конформных отображений, и выводим из него систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику акцессорных параметров и конформного модуля в зависимости от параметра t. Отметим, что в правые части полученной системы ОДУ входят функции, которые являются скоростями движения концевых точек разрезов. Это позволяет полностью контролировать динамику разрезов, в частности, добиваться их согласованного изменения в случае, если в области $\mathcal{D}$ проводится более одного разреза.

Рассмотрены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

Отметим, что для случая произвольных ограниченных двусвязных многоугольных областей аналогичный метод был разработан в работе [1], а для неограниченных областей, являющихся внешностью двух отрезков — в [2].

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант No 23-11-00066)

[1] Dyutin A., Nasyrov S. One parameter families of conformal mappings of bounded doubly connected polygonal domains // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – V. 45. – № 1. – P. 387–407.

[2] Dautova D., Nasyrov S., Vuorinen M. Conformal module of the exterior of two rectilinear slits // Comput. Methods Funct. Theory. – 2021. – V. 21. – P. 109–130.

Об обобщении теоремы Вейерштрасса

Кабанко М.В., Малютин К.Г.

Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Рассматривается представление целой функции в виде канонического произведения, которое является обобщением факторизационной теоремы Вейерштрасса. Получено обобщение теоремы Бореля о порядке канонического произведения. Приведены примеры, которые показывают эффективность применения рассматриваемой теории к практическим вопросам. Результаты частично опубликованы в [1]. Целью работы является получить формулы для целых функций, рост которых определяется максимумом модуля заданной целой функцией F. Обозначим через

$$M(r) := M(r, F) = \max_{|z|=r} |F(z)|$$

— максимум модуля функции F на окружности $|z| = r$. Известно, что $\ln M(e^r)$ является выпуклой функцией. Поэтому функция $M(r)$ является модельной функцией роста в смысле определения, введенного Хабибуллиным [2]. Мы используем функцию $M(r)$ для оценки роста целых функций, а функцию F для их канонического представления, обобщающего известную факторизационную теорему Вейерштрасса.

Теорема 1. Любую целую функцию f можно представить в виде

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{F(z)}{F(a_n)}; p_n\right) \quad (\omega \leq \infty)\,, \tag{1}$$

где g — целая функция, $a_n \neq 0$ – нули f и m — кратность нуля f в точке $z = 0$, G — канонический множитель Вейерштрасса.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/)

[1] Malyutin K., Kabanko M. On the Proximate Order with Respect to the Model Function // March 2024, Journal of Mathematical Sciences DOI:10.1007/s10958-024-06957-w

[2] Хабибуллин Б.Н. Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета. — Т. 5, № 1. — 2020. — С. 1–5.

Множество нулей дзета-функции Римана и возмущения самосопряженных операторов.

Капустин В.В.

Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН, г. С.-Петербург, Россия

Согласно недавнему результату автора [1] множество нулей дзета-функции после разворота на вещественную прямую реализуется как спектр одномерного несамосопряжённого возмущения самосопряжённого оператора с регулярным спектром. При предположении, что гипотеза Римана верна, существует самосопряжённый оператор, спектр которого в точности соответствует нулям дзета-функции. Пусть задана некоторая регулярная последовательность, функция распределения которой близка к функции распределения множества нулей дзета-функции. Естественно возникает вопрос, какому классу может принадлежать оператор, представляющий собой разность двух самосопряжённых операторов, спектры которых соответветствуют самому множеству нулей дзета-функции и его регуляризации. В докладе даются ответы для некоторых естественных вариантов такой регуляризации.

[1] Капустин В.В. Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора. Алгебра и анализ, **33** (2021), вып.4, 107–124.

Однопараметрическое семейство конформных отображений кольца на двусвязный многоугольник

Колесников И.А.

НИ Томский государственный университет, г.Томск, Россия

В работе рассматривается семейство двусвязных многоугольников, получаемое из некоторого начального многоугольника движением его вершин при условии сохранения углов. Семейство многоугольников может получаться, например параллельным сдвигом одной из сторон (нескольких сторон) двусвязного многоугольника, или проведением разреза (разрезов). Решается задача о построении семейства конформных однолистных отображений кольца на такое семейство двусвязных многоугольников. Для представления семейства используется формула Кристоффеля–Шварца, таким образом, задача заключается в определении акцессорных параметров, входящих в формулу Кристоффеля–Шварца. Для семейства отображений кольца на семейство двусвязных многоугольников получено дифференциальное уравнение по параметру t, отвечающему за движение вершин. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно акцессорных параметров семейства отображений.

Данный результат позволяет пошагово строить конформное отображение кольца на заданный двусвязный многоугольник. Результат обобщает метод, предложенный в [1]. Метод идейно близок к методу П.П. Куфарева [2], обобщенному на случай двусвязных областей в работе [3].

[1] Колесников И.А. *Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца* // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 784–802.

[2] Куфарев П.П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля // ДАН СССР. 1947. Т. 57, № 6. С. 535–537.

[3] Dyutin A., Nasyrov S. One parameter families of conformal mappings of bounded doubly connected polygonal domains // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. V. 45, № 1. P. 390–411.

О наилучшем приближении аналитических функций в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Лангаршоев М.Р., Чоршанбиева М.Ч.

ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты МЧС России», Россия

Пусть $\mathscr{B}_{2,\mu}$ $(\mu > -1)$ – пространство аналитических функций f с нормой

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}} = \left(\int\limits_0^1 (\mu+1)(1-\rho^2)^{\mu}\mathscr{L}_2^2(\rho,f)\rho d\rho\right)^{1/2} < \infty,$$

где

$$\mathscr{L}_2(\rho,f) = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt\right)^{1/2}, \ 0<\rho\le 1,\ 0<t\le 2\pi.$$

$\mathscr{P}_{n-1}$ – множество всех комплексных алгебраических полиномов степени $\le n-1$. Величина $E_n(f)_{2,\mu} = \inf\{\|f-p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1}\in\mathscr{P}_{n-1}\}$ называется наилучшее приближение функции $f\in B_{2,\mu}$ множеством $\mathscr{P}_{n-1}$.

$\omega_m(f,t)_{2,\mu} = \sup\{\|\Delta_h^m(f,\cdot,\cdot)\|_{2,\mu} : |h|\le t\}$ – интегральный модуль непрерывности m-го порядка, где $\Delta_h^m(f;\rho,u) = \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$.

Для любых $r\in\mathbb{Z}_+$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$. Символ $\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ означает множество функций $f\in U(\mathbb{D})$, у которых $z^r f^{(r)}\in\mathscr{B}_{2,\mu}$.

Теорема. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$, $0<h\le\pi/n$, $\varphi(t)$ – весовая на $(0,h)$ функция. Тогда для любого $0<p\le\infty$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p(z^r f^{(r)},t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}{2^{m/2}\alpha_{n,r}\left\{\int\limits_0^h \Big(1-\cos nt\Big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}, \qquad (1)$$

где $\alpha_{n,r} = n!\{(n-r)!\}^{-1}$. Неравенство (1) является точным в том смысле, что существует функция $f_0(z)\in\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$ для которой оно обращается в равенство.

О субгармоничности функций с разделёнными переменными в многомерных сферических координатах

Мурясов Р.Р.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Теорема. Пусть в n-мерных сферических координатах задана функция $u = f(r)g(\theta_1, ..., \theta_{n-1})$, где f положительна, непрерывна и дважды дифференцируема в обобщённом смысле в интервале (r_1, r_2), g положительна, непрерывна и дважды дифференцируема в обобщённом смысле на n-мерной сфере единичного радиуса. Если существует такое вещественное число $h > 0$, что функция f — L_h-выпуклая [1] в интервале (r_1, r_2), где

$$L_h = \frac{d^2}{dr^2} + (n-1)r\frac{d}{dr} - h,$$

а g — субсферическая [2] функция порядка $\dfrac{\sqrt{(n-2)^2+4h}+2-n}{2}$, то u — субгармоническая функция в области, ограниченной n-мерными сферами радиусов r_1 и r_2.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-21-00002, https://rscf.ru/project/24-21-0002/.

[1] А.И.Хейфиц, Аналитические свойства функций, выпуклых относительно решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференц.уравнения, 1981, том 17, номер 6, 1025–1034

[2] Б.Н. Хабибуллин, Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка, Матем. сб., 1991, том 182, номер 6, 811–827

Об образе операторов свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций

Полякова Д.А.

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН, г. Владикавказ; Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Пусть $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ — пространство Берлинга ультрадифференцируемых функций нормального типа $p \in (0, \infty)$ на числовой прямой. Здесь ω —

весовая функция, задающая пространство. В $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ исследуются операторы свертки T_μ с символами μ, представляющими собой целые функции с определенными ограничениями роста.

Ранее в [1] были установлены необходимые и достаточные условия на символ μ, при которых T_μ сюръективен, т. е. при которых выполняется равенство $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) = \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. В настоящей работе для несюръективного оператора T_μ решается задача о том, при каких условиях имеет место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, где σ — некоторая другая весовая функция, $q \in (0,\infty)$. Центральными результатами работы являются две следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0,\infty)$; $p\omega \le q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Для того чтобы имело место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$(A)\quad \forall r \in (0,p)\ \ \forall \delta \in (0,\infty)\ \ \exists s \in (0,q)\ \ \exists R_0 > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \ge R_0$$
$$\exists w \in \mathbb{C} : |w - x| \le \delta\sigma(x) \ \text{ и } \ |\mu(w)| \ge \exp\big\{r\omega(w) - s\sigma(w)\big\}.$$

Теорема 2. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0,\infty)$; $p\omega \le q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Если для целой функции μ выполнено условие*
(B) $\forall r \in (0,p)$ $\exists s \in (0,q)$ $|$ $\forall \delta \in (0,\infty)$ $\exists R_0 > 0$: каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \ge R_0$ и $|y| \le \delta\sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \le \delta\sigma(x)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \ge \exp\big\{r\omega(\zeta) - s\sigma(\zeta)\big\},$$

то имеет место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

[1] Абанина А. В., Абанина Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций. Владикавказ. мат. ж. 2010. Т. 12, № 3. С. 3–21.

Гиперциклические операторы в пространстве целых функций

Рахимова А.И.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $T: X \to X$ линейный непрерывный оператор, определенный в топологическом векторном пространстве X. Тогда оператор T *гиперциклический* [1, глава 1, введ., опр. 0.1], [2, опр. 2.15] в X, если существует элемент $x \in X$, орбита которого плотна в X, причем $x \in X$ называется *гиперциклическим вектором* оператора T в X. Оператор T *суперциклический* [1, глава 1, введ., опр. 0.2], [2, опр. 2.16] в X, если существует элемент $x \in X$, проективная орбита которого $\{\lambda T^m x: \ \lambda \in \mathbb{C}\}_{m=0}^{\infty}$ плотна в X. Здесь $x \in X$ является *суперциклическим вектором* оператора T в X.

Теорема. Пусть заданы числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, определим оператор $Tf(z) = \frac{\partial}{\partial z_j} f(\lambda z + b)$, $j \in (1;n)$, в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$. Тогда оператор T при условии $|\lambda| < 1$ не суперциклический и не гиперциклический в $H(\mathbb{C}^n)$, при условии $|\lambda| \geq 1$ он суперциклический и гиперциклический в $H(\mathbb{C}^n)$.

[1] Bayart F., Matheron E. Dynamics of Linear Operators. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[2] Grosse–Erdmann K.-G., Peris A. Linear chaos. New York: Universitext, 2011.

Одно неравенство для субгармонических функций

Хабибуллин Б. Н., Меньшикова Э. Б.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Через $\mathfrak{m}_2$ обозначаем *плоскую меру Лебега* на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{m}_1$ — *одномерная мера Хаусдорфа на* $\mathbb{C}$*,* сужение которой на липшицеву дугу или кривую — это мера длины этой дуги или кривой.

Теорема. *Пусть L — объединение конечного числа ограниченных в $\mathbb{C}$ непересекающихся открытых дуг или замкнутая кривая класса C^1 и для пары непересекающихся ограниченных областей $\{D_j\}_{j=0,1}$ в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкими границами объединение L содержится в пересечении $\partial D_0 \bigcap \partial D_1$ их границ, а области D_j расположены по разные стороны от L в том смысле, что в каждой точке $z \in L$ внутренние нормали $\vec{\mathbf{n}}^{\rm in}_{D_0}(z)$ к D_0 и $\vec{\mathbf{n}}^{\rm in}_{D_1}(z)$ к D_1 противоположны; $\overline{D}_j$ — замыкание D_j. Пусть пара положительных функций $V_j \in C^1(\overline{D}_j) \bigcap C^2(D_j)$ такова, что на ∂D_j вне L функция V_j обращается в нуль, V_0 и V_1 совпадают на L и положителен оператор Лапласа от V_j, т. е. $\Delta V_j \geqslant 0$ на D_j при $j = 0,1$. Построим по ним непрерывную на $\mathbb{C}$ склеенную функцию*

$$V = \begin{cases} V_0 & \text{на } \overline{D}_0, \\ V_1 & \text{на } \overline{D}_1, \\ 0 & \text{на } \mathbb{C} \setminus D, \end{cases} \qquad \text{где } D := D_0 \cup L \cup D_1 \text{ — область.}$$

Если разность U субгармонических на замыкании $\overline{D}$ функций, не равных $-\infty$, с распределением зарядов Рисса $\mathit{\Delta}_U := \frac{1}{2\pi}\Delta U$ отрицательна $\mathfrak{m}_2$-почти всюду на некоторой окрестности замыкания $\overline{D}$, то

$$\iint_D V \mathrm{d}\mathit{\Delta}_U \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_L U\left(\frac{\partial V_0}{\partial \vec{\mathbf{n}}^{\mathrm{in}}_{D_0}} + \frac{\partial V_1}{\partial \vec{\mathbf{n}}^{\mathrm{in}}_{D_1}}\right)\mathrm{d}\mathfrak{m}_1, \quad \text{где } \vec{\mathbf{n}}^{\mathrm{in}}_{D_0} + \vec{\mathbf{n}}^{\mathrm{in}}_{D_1} = \vec{0} \text{ на } L.$$

Эта теорема существенно развивает [1, основная теорема 2.1, леммы 2.2, 2.3] и позволяет установить разнообразные новые теоремы единственности в терминах распределения корней голоморфных на области D функций и ограничений на их рост вблизи границы ∂D, а также новые аппроксимационные теоремы для систем целых функций. Её доказательство основано на развитии общей интегральной формулы [2, теорема 1].

[1] Хабибуллин Б. Н. *Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка* // Матем. сб., 1991, **182**:6, 811–827.

[2] Меньшикова Э. Б. *Интегральные формулы типа Карлемана и Б.Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций* // Изв. вузов. Матем., 2022, № 6, 37–53.

Оценки весовых сумм коэффициентов в классе ограниченных функций в круге

Хасянов Р.Ш.

Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург, Россия

Пусть $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$, $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$ и $c_n \ge 0$, $n \ge 0$. В докладе будет рассказано об оценках следующих функционалов в классе ограниченных аналитических функций в круге:

$$\sum_{n\ge m} c_n |a_n|^2 r^{2n} \text{ и } \sum_{n\ge m} c_n |a_n| r^n, \quad 0 \le r < 1,\ m \ge 0.$$

Частными случаями этих сумм являются функционал площади $S_r = \pi\sum_{n\ge 1} n|a_n|^2 r^{2n}$, вторая норма на окружности $\|f(rz)\|_2^2 = \sum_{n\ge 0} |a_n|^2 r^{2n}$ и мажорантный ряд $M_r f = \sum_{n\ge 0} |a_n| r^n$.

Мы развиваем метод И.Р. Каюмова и С. Поннусами, используя в оценках результат Э. Райха [3], который обобщает теорему Голузина о мажорации подчинённых функций. Сначала мы докажем общую теорему, после чего сформулируем важные следствия, например, мы докажем следующее точное неравенство.

Теорема. Пусть $s \geq 1$, тогда

$$S_r f \leq \pi s r^{2s} \|f\|_\infty^2, \quad \frac{s-1}{s} \leq r^2 \leq \frac{s}{s+1}.$$

Далее мы рассмотрим задачу об оценке мажорантного ряда производной степенного ряда в круге с фиксированным начальным коэффициентом (эта задача непосредственно связана с неравенством Х. Бора [2]). А именно для функций вида $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$, $|a_1| = a$, мы пытаемся вычислить максимальный $r(a)$, для которого верно неравенство

$$M_r f' \leq \|f\|_\infty.$$

Применяя теорему Э. Райха, мы получаем более точные оценки этой величины по сравнению с теми, которые были получены в работе [1].

[1] Голузин Г. М. Оценка производной для функций, регулярных и ограниченных в круге // Матем. сб. — 1945 — Т.16, №58 — С.295—306.

[2] Bohr H. A theorem concerning power series // Proc. Lond. Math. Soc. — 1914 — V.13 — P.1—5.

[3] Reich E. An inequality for subordinate analytic functions // Pacific J. Math. — 1954 — V.4, No.2 — P.259—274.

Задача Римана для обобщенных аналитических функций со сверхсингулярной линией

Шабалин П.Л.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия

В плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z = x+iy$ рассмотрим $E^+ = \{z : \Im z > 0\}$, $E^- = \{z : \Im z < 0\}$, вещественную ось $\Gamma = \{z : \Im z = 0\}$ и мнимую ось $L = \{z : \Re z = 0\}$. В областях E^+ или E^- рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши-Римана

$$\partial_{\overline{z}} U - \frac{(\overline{z}+z)a(z)}{|\overline{z}+z|^{\alpha+1}} U = F(z),\ a(z), F(z) \in C(\overline{\mathbb{C}} \setminus L),\ 1 < \alpha < 2.$$

Будем предполагать, что для $a(z)$ существует такая аналитическая в E^+ (E^-), ограниченная в $\overline{E}^+$ $(\overline{E}^-)$ функция $a_0^+(z)$ $(a_0^-(z))$, что

$$\frac{(\overline{z}+z)[a(z) - a_0^\pm(z)]}{|\overline{z}+z|^{\alpha+1}} \in L^{p,q}(E^\pm),\ 1 < q < 2 < p.$$

Граничные значения функций $a_0^{\pm}(z)$, будем считать непрерывными по Гёльдеру на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. На концах интервала эти функции имеют односторонние пределы. Кроме того, на функции $a_0^{\pm}(z)$ дополнительно налагаем следующие ограничения:

$$|a_0^{\pm}(z) - a_0^{\pm}(-\overline{z})| \leq K(|z + \overline{z}|^{\gamma}), \quad x \to 0,\ y \neq 0,\ 0 < \gamma < 1,$$

$$a_0^{\pm}(z) = O(|z|^{\gamma}),\ |z| \to 0, \quad \gamma > 0,\ y \neq 0.$$

Для этой системы получим формулу общего решения следуя работе [1], но при менее жестких ограничениях на коэффициент $a(z)$. Для ограниченных решений системы рассмотрим краевую задачу Римана с краевым условием на оси Γ, непрерывными коэффициентом и правой частью и конечным индексом. Решение этой задачи сводится к решению краевой задачи Римана для аналитических функций, но уже с бесконечным индексом степенного порядка $\alpha - 1$ и завихрением в двух точках пересечения осей Γ и L. Выведена формула общего решения задачи Римана для обобщенных аналитических функций и описано множество решений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00212.

[1] Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщённого уравнения Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 52 (5), 637-650 (2016).