МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник материалов Международной научной конференции (9–13 марта 2026 г.)

УФА

АЭТЕРНА

2026

УДК 51
ББК 22.1
К 637

К 637 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (9 – 13 марта 2026 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2026. – 54 с.**

ISBN 978-5-00249-521-4

Представленные в сборнике материалы охватывают широкий круг различных областей фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются разнообразные нелинейные задачи. Наряду с ними рассматриваются проблемы теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными и вопросы физико-химической механики многофазных сред.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-00249-521-4

9 785002 495214 >

Содержание

Абдрахманов А.М., Абдрахманова Р.П. Краевые задачи для вырождающихся аналогов системы Бицадзе 6
Авилович А.С., Сагимбаева А.О., Карпенко Д.Н. Вырожденные квазилинейные уравнения с производными Римана — Лиувилля 7
Адлер В.Э., Соколов В.В. Неавтономные обобщения системы Гарнье 8
Alfimov G. L., Korchagin P. A., Pelinovsky D. E. and Abdullaev F. Kh. Staggered and unstaggered nonlinear modes for DNLS equation with competing nonlinearities 9
Асфандиаров Н.Л., Рахмеев Р.Г., Пшеничнюк С.А. Нековалентные структуры отрицательных ионов, образующиеся при диссоциативном захвате электронов 10
Ахметьев П.М. Среднее поле в аксионной МГД 10
Байков В.А., Насырова Д.А. Кластерное ГРП: влияние количества трещин ГРП на режимы течения флюида в нелинейном микротрещиноватопористом пласте 11
Борисов Д.И., Поляков Д.М. Равномерные спектральные асимптотики для оператора Шрёдингера с несколькими сдвигами . 12
Волчков В.В., Волчков Вит.В. Интерполяционные задачи для решений уравнений свертки 13
Волчкова Н.П., Волчков Вит.В. Представление решений уравнений s-свёртки на $\mathbb{H}^2$ 13
Габдрахманов Р.И. Кратные бифуркации Тьюринга в диффузионной модели Лэнгфорда 14
Гайсин А.М. Теоремы типа Бореля–Неванлинны: уточнение оценок 15
Гайсин Р.А. Об одном условии усиленной неполноты системы экспонент относительно прямоугольников 16
Гайсина Г.А. Оценка степени устойчивости максимального члена ряда Дирихле 18
Гареева З.В., Гареев Ш.Т., Звездин А.К. Спин - флоп переходы в проводящих тетрагональных антиферромагнетиках 20
Гарифуллин Р.Н. Высшие симметрие редукций цепочек типа Тоды 21
Глухов С.Н. Задача выбора оптимального давления на нефтегазовом месторождении методом Катца 21

Dmitriev S.V., Semenova M.N., Tatarinov V.P., Tarov D.V., Abdullina D.U., Khazimullin M.V., Bebikhov Yu.V. Dynamic effects in the sample-load system caused by a current pulse during the study of the electroplasticity effect 22
Екомасов Е.Г., Фахретдинов М.И., Шарафуллин И.Ф., Кабанов Д.К. Излучение солитонов уравнения Клейна-Гордона в модели с протяженной притягивающей примесью 23
Зайцев Н.Л. Влияние расстояния Ван-дер-Ваальса на положение электронных зон топологических изоляторов XY_2Te_4 . . . 24
Захарова Т.А., Федоров В.Е. Дробные степени оператора в теории разрешимости эволюционных уравнений дробного порядка 25
Калякин Л.А. Бегущая волна в гиперболическом уравнении . . 26
Кордюков Ю.А. Квазиклассическая формула следов для магнитного оператора Шредингера 26
Korznikova E.A., Sugonyako I.S., Tatarinov P.S., Semenov A.S., Yakushev I.A., Latypov V.R., Dmitriev S.V. Estimation of pulsed current parameters required for healing fatigue cracks in steel samples 27
Кузьмин Д.А., Бычков И.В., Екомасов Е.Г. Численное исследование нелинейной динамики намагниченности в цепочке магнитных наноцилиндров с диссипацией 28
Кунгиров М.Н. Оператор сдвига в задаче о бифуркации циклов в динамических системах, близких к гамильтоновым 29
Kutsenko N. A., Alfimov G. L. A Numerical Toolkit for Analysis of Nonlinear Modes in system of 1D-Gross-Pitaevskii equations . 30
Лукошкина Т.А., Нерадовский Д.Ф., Екомасов Е.Г., Кабанов Д.К. Связанная динамика магнитных вихрей одинаковой и разной полярности в трехслойной цилиндрической наноструктуре . . 31
Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б. Соотношение типа Гаусса для функции Горна H_5 32
Мартынова Ю.В., Михайлов С.П. Способ анализа капилляриметрических исследований кернового материала на основе нелинейной аппроксимации разновременных экспериментальных данных 33
Maslov E.M., Koutvitsky V.A. Metric perturbations at the preheating stage in the inflationary E-model 34
Мелехина Д.В., Федоров В.Е. Обратные задачи для уравнений с интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля. Секториальный случай 35
Murenkov Ya. A., Alfimov G. L. Nonlinear modes in the Gross-Pitaevskii Equation with a finite-depth multi-well potentials . . . 35

Мусин И.Х., Юлмухаметов Р.С. Уравнение свёртки в пространстве функций на неограниченном замкнутом выпуклом множестве 36
Мурясов Р.Р. О субфункциях стационарного оператора Шрёдингера с разделёнными переменными 37
Мухутдинова А.А. Особенности течения мицеллярного раствора ПАВ в кольцевом канале 38
Наумова А.А. Дельта-субгармонические функции на открытом полукольце конечного гамма-роста 39
Нефёдова А.А. Экстремальные задачи в классах мероморфных функций на полуплоскости порядка $\rho > 0$ относительно модельной функции 40
Низамова А.Д. Собственные значения задачи устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале с учетом возмущения по температуре 41
Новокшенов В.Ю. Распределение нулей ортогональных многочленов с кубическим потенциалом в закритическом режиме . 42
Павленко В.Н. Резонансная эллиптическая краевая задача с разрывной нелинейностью в $\mathbb{R}^N$ 42
Скрипка Н.М. Краевая задача для уравнения высокого порядка на $\mathbb{R}$ 43
Смирнов А.О., Приходько М.М. О простейших решениях векторного нелинейного уравнения Шредингера 44
Сулейманов Б.И. Типичные с точки зрения математической теории катастроф особенности решений пространственно двумерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами 45
Сысоев С.Е. Восстановление векторного поля на плоскости по данным его экспоненциального преобразования Радона в случае неполного углового диапазона 46
Туктаров Р.Ф., Щукин П.В., Ахметьянов Р.Ф. Моделирование параметров времяпролетного монохроматора электронов . . . 47
Фазуллин З.Ю. Формула следа возмущения оператора Лапласа на квадрате. 48
Фахретдинов М.И., Екомасов Е.Г. Локализованные решения уравнения φ^4 в модели с несколькими примесями 49
Федоров В.Е., Скорынин А.С. Принципы субординации по параметрам для уравнений с производной Хилфера 50
Федоров В.Е., Быков А.А. Один класс возмущенных уравнений с дробной производной Хилфера 51
Хабибуллин Б. Н. Конечно порождённые идеалы и подмодули в функциональных алгебрах и модулях 52
Шарипов Р.А. Граничные условия в лагранжевых теориях поля. 53

Краевые задачи для вырождающихся аналогов системы Бицадзе

Абдрахманов А.М.[1], Абдрахманова Р.П.[2]
[1]Институт развития образования РБ, г.Уфа, Россия,
[2]Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Для одного линейного уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа задача Дирихле не может иметь более одного решения, по крайней мере, локально. Для эллиптических систем оказалось, что разрешимость классических граничных задач существенно отличаются от случая одного уравнения.

А.В.Бицадзе привел пример эллиптической системы двух уравнений второго порядка, для которой нарушается единственность решения задачи Дирихле в круге. Аналогичным образом ведет себя и система

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + 2\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0, \\ -\Delta u_2 + 2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Будем рассматривать некоторое обобщение системы (1)

$$\begin{cases} -x_3\Delta u_1 + \lambda\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = 0, \\ -x_3\Delta u_2 + \lambda\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = 0, \\ -x_3\Delta u_3 + \lambda\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Систему (2) будем рассматривать в полупространстве $E = \{x_3 > 0\}$ и в полосе $D = \{0 < x_3 < 1\}$.

Поставлена задача: найти регулярное в области E решение системы (2), удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} u_1\big|_{x_3=0} = f_1(x_1; x_2); \\ u_2\big|_{x_3=0} = f_2(x_1; x_2); \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = -\left(\dfrac{\partial f_1(x_1;x_2)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2(x_1;x_2)}{\partial x_2}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Доказана

Теорема. Граничная задача (3) для системы (2) в полупространстве E всегда разрешима и ее решение определяется с точностью до произвольной постоянной, входящей в функцию u_3. Решение данной задачи единственно в классе функций, стремящихся к нулю на бесконечности.

Вырожденные квазилинейные уравнения с производными Римана — Лиувилля

Авилович А.С., Сагимбаева А.О., Карпенко Д.Н.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля, L, M — линейные замкнутые плотно определенные в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ операторы, действующие в банахово пространство $\mathcal{Y}$. Через $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ и $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ обозначим банаховы пространства линейных ограниченных операторов на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. По определению $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ [1], если (i) существуют $a_0\geq 0$ и $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$ такие, что для всех $\lambda\in S_{a_0,\theta_0}:=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a_0)|<\theta_0,\mu\neq a_0\}$ $(\lambda^\alpha L-M)^{-1}L\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L(\lambda^\alpha L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$; (ii) при любых $a>a_0$, $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$ существует такая константа $K=K(a,\theta)>0$, что для всех $\mu\in S_{a,\theta}$ $\max\{\|(\mu^\alpha L-M)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|L(\mu^\alpha L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\}\leq\dfrac{K(a,\theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu-a)|}$.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(a_0,\theta_0)$. Тогда $\mathcal{X}=\mathcal{X}^0\oplus\mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^0\oplus\mathcal{Y}^1$. Пусть $\varrho\in\mathbb{N}_0$, $q\in\mathbb{N}$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\leq n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$. Некоторые γ_i могут быть отрицательными. Определим $\underline{\gamma}:=\max\{\gamma_i:\gamma_i-m_i<\alpha-m, i=1,2,\dots,q\}$, $\underline{n}:=\lceil\underline{\gamma}\rceil$, $\overline{\gamma}:=\max\{\gamma_i:\gamma_i-m_i>\alpha-m, i=1,2,\dots,q\}$, $\overline{n}:=\lceil\overline{\gamma}\rceil$, $n^*:=\max\{\underline{n}-1,\overline{n}\}$, $\mu^*:=\max\{n^*+1,0\}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}D^\alpha Lx(t)=Mx(t)+\\+N(t,D^{\alpha-m-\varrho}x(t),\dots,D^{\alpha-1}x(t),D^{\gamma_1}x(t),\dots,D^{\gamma_q}x(t)),\\D^{\alpha-m+k}Lx(t_0)=0,\ k=0,1,\dots,\mu^*-1,\\D^{\alpha-m+k}Lx(t_0)=y_k,\ k=\mu^*,\mu^*+1,\dots,m-1.\end{gathered}\tag{1}$$

Теорема. Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\leq n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$, банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha$, $L_1:=L|_{D_L\cap\mathcal{X}^1}\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1:=M|_{D_M\cap\mathcal{X}^1}\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $N:[t_0,T]\times\mathcal{X}^{m+\varrho+q}\to\mathcal{Y}^1$, отображение $L_1^{-1}N\in C\big([t_0,T]\times\mathcal{X}^{m+\varrho+q};D_{L_1^{-1}M_1}\big)$ липшицево по фазовым переменным $x_1,x_2,\dots,x_{m+\varrho+q}$ в норме графика оператора $L_1^{-1}M_1$, $y_k\in L_1[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $k=\mu^*,\mu^*+1,\dots,m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1) на отрезке $[t_0,T]$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00100, https://rscf.ru/project/24-71-00100/

[1] Федоров В.Е., Романова Е.А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

Неавтономные обобщения системы Гарнье

Адлер В.Э.[1], **Соколов В.В.**[2,3]
[1]ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка,
[2]Высшая Школа Современной Математики МФТИ, Москва,
[3]Высшая Школа Экономики, Москва

Система Гарнье (1919) — интегрируемая по Лиувиллю–Арнольду система классической механики, описывающая набор $2n$ ангармонических осцилляторов с коллективным взаимодействием:

$$u'' + 2(u,v)u + \Omega u = 0, \quad v'' + 2(u,v)v + \Omega v = 0, \quad u(x), v(x) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где Ω — диагональная матрица. Д. и Г. Чудновские показали (1978), что она эквивалентна уравнениям Новикова (стационарным уравнениям для высших симметрий) определяющим n-зонные решения уравнения КдФ $w_t = w_{xxx} - 6ww_x$ (здесь $w \in \mathbb{R}$), а также определяет бегущую волну, модулированную матричной экспонентой, для системы Манакова

$$u_\tau = u_{\xi\xi} + 2(u,v)u, \quad -v_\tau = v_{\xi\xi} + 2(u,v)v. \tag{2}$$

Утверждение 1. Галилеевская редукция (2) описывается системой

$$u'' + 2(u,v)u + \tfrac{1}{2}xu + \Omega u = 0, \quad v'' + 2(u,v)v + \tfrac{1}{2}xv + \Omega v = 0; \tag{3}$$

редукция по подгруппе растяжений — системой

$$u'' + 2(u,v)u + \tfrac{1}{2}(xu)' + \Omega u = 0, \quad v'' + 2(u,v)v - \tfrac{1}{2}(xv)' + \Omega v = 0. \tag{4}$$

Каждая из них допускает изомонодромную пару Лакса $A' = B_\lambda + [B, A]$ в матрицах размера $(n+1) \times (n+1)$.

Утверждение 2. Порядок систем (3), (4) частично понижается за счет первых интегралов. При $n = 1$ возникают уравнения Пенлеве II и IV, соответственно. Для общего n, система (3) определяет стационар симметрии КдФ, построенной оператором рекурсии по симметрии Галилея:

$$P(R)(6tw_x - 1) = 0, \quad R = D_x^2 - 4w - 2w_x D_x^{-1}, \quad \deg P = n,$$

а система (4) эквивалентна $(2n+1)$-квазипериодической цепочке преобразований Дарбу, изучавшейся Веселовым и Шабатом (1993):

$$f_i' + f_{i+1}' = f_i^2 - f_{i+1}^2 + \gamma_i - \gamma_{i+1}, \quad f_{i+2n+1} = f_i, \quad \gamma_{i+2n+1} = \gamma_i + 2.$$

В [1] изучены редукции типа Пенлеве для ряда векторных интегрируемых систем. Доклад основан на примерах, связанных с системой (2).

[1] V.E. Adler, V.V. Sokolov. Vector systems of Painlevé type. *Submitted to J. of Geom. and Physics*, 2026. (arXiv:2512.18828)

Staggered and unstaggered nonlinear modes for DNLS equation with competing nonlinearities

G. L. Alfimov[a,b], **P. A. Korchagin**[a], **D. E. Pelinovsky**[c] **and F. Kh. Abdullaev**[d]

[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;

[b] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia;

[c] McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada;

[d] Physical-Technical Institute of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

We study Discrete Nonlinear Schrödinger (DNLS)-type equations with competing nonlinearities:

$$i\frac{du_n}{dt} + C\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + \kappa \left|u_n\right|^{p-1} u_n - \Gamma \left|u_n\right|^{q-1} u_n = 0. \qquad (1)$$

Physically significant cases, with applications in nonlinear optics and the physics of ultracold gases, correspond to the parameter pairs $(p, q) = (2, 3)$, $(p, q) = (3, 4)$, and $(p, q) = (3, 5)$ with positive values of C, κ and Γ, (see [1]). Our primary interest is in stationary, spatially localized solutions – so-called intrinsic localized modes (ILMs) – which are of the form $\Psi_n(t) = e^{-i\omega t}u_n$ where the lattice function u_n can be taken as real. Such localized solutions can exist provided the frequency ω lies outside the linear phonon band, i.e., for $\omega > 0$ or $\omega < -4C$.

• If $\omega > 0$ the scaled function u_n satisfies the following lattice equation

$$\varepsilon\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) - u_n + \left|u_n\right|^{p-1} u_n - \gamma \left|u_n\right|^{q-1} u_n = 0. \qquad (2)$$

where the parameters $\varepsilon, \gamma > 0$ are related to C, κ, Γ. This situation corresponds to *unstaggered* ILMs.

• If $\omega < -4C$ the scaled function u_n is related to v_n by staggering transform, $u_n = (-1)^n v_n$. The equation for v_n reads,

$$\varepsilon\left(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}\right) - v_n - \left|v_n\right|^{p-1} v_n + \gamma \left|v_n\right|^{q-1} v_n = 0. \qquad (3)$$

This situation corresponds to *staggered* ILMs.

Our approach utilizes numerical continuation from the anti-continuum limit (ACL). Starting from analytically tractable solutions at zero coupling ($\varepsilon = 0$), we trace the bifurcations of fundamental ILM branches as the coupling parameter ε increases. This allows us to identify the solution families that remain dynamically stable under the evolution governed by Eq. (1).

[1] G.L.Alfimov, P.A.Korchagin, and F.K.Abdullaev, Intrinsic localized modes for DNLS equation with competing nonlinearities: Bifurcations, Chaos **35**, 113129 (2025).

Нековалентные структуры отрицательных ионов, образующиеся при диссоциативном захвате электронов

Асфандиаров Н.Л., Рахмеев Р.Г., Пшеничнюк С.А.
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Диссоциативный захват электронов в газовой фазе можно рассматривать как элементарный акт химических реакций, приводящий к образованию новых временно-живущих частиц, электронная и геометрическая структура которых может существенно отличаться о структуры исходных молекул. За последние годы обнаружено около двух-трех десятков примеров так называемых нековалентных структур анионов, потенциальная энергия которых лежит ниже, нежели у «классических» анионных структур, близких по геометрии к родительской молекуле. Это существенно увеличивает время жизни таких структур относительно автоотщепления избыточного электрона и позволяет наблюдать их масс-спектрометрическими методами. Как правило, нековалентные структуры анионов реализуются в молекулах, содержащих один или несколько атомов брома или хлора. Процесс образования нековалентных структур протекает посредством «роуминга» – кругового обхода атомом галогена углеводородного остова аниона. При этом расчеты методами теории функционала плотности предсказывают сохранение планарной геометрии аниона в процессе «роуминга». Результатом является не только энергетическая стабилизация, но и локализация избыточного заряда аниона, достигающая 79-90 В докладе рассмотрены ранее обнаруженные и новые нековалентные структуры анионов. Анализируются перспективы их применения в фармакологии, медицине и синтезе новых материалов для молекулярной электроники. Кроме того сравнивается методика поиска нековалентных структур анионов различными экспериментальными методами.

Среднее поле в аксионной МГД

Ахметьев П.М.
ИЗМИРАН

Уравнение Клейна-Гордона аксионного поля применяется в рамках теории среднего поля. Мы обсудим вопрос, происходят ли резонансы, на каких частотах и в каком диапазоне магнитной спиральности?

Кластерное ГРП: влияние количества трещин ГРП на режимы течения флюида в нелинейном микротрещиноватопористом пласте

Байков В.А., Насырова Д.А.

ООО «РН-Технологии», Уфимский Университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Основной технологией, позволяющей добывать нефть и газ из пластов с низкой и сверхнизкой проницаемостью, является гидроразрыв пласта (ГРП). Эта технология заключается в формировании специальной высокопроводящей трещины в пласте для обеспечения притока добываемой нефти и газа к скважине. Кластерное ГРП - это усовершенствованная технология добычи углеводорода, которая позволяет повысить эффективность разработки трудноизвлекаемых запасов. Кластерный ГРП предполагает одновременную закачку в несколько трещин ГРП. На практике предполагается, что полученные трещины ГРП имеют одинаковые размеры. Данное исследование посвящено разработке диагностических признаков для некоторого класса моделей кластерного ГРП, описывающих несколько поперечных трещин ГРП с незакрепленными бортами в нелинейной микротрещиновотопористой среде. Фильтрация в нелинейной микротрещиноватопористой среде описывается моделью, где одновременно существуют 2 поровые системы: сеть трещин и поровых блоков матрицы с различными значениями геометрических размеров и фильтрационно-ёмкостных свойств. Фильтрация по трещинам описывается системой уравнений сохранения масс и количества движения для вязкой ньютоновской жидкости и так как жидкость слабосжимаема, то замыкается уравнением состояния для слабосжимаемой жидкости.

Была проведена серия расчетов в лицензированных программных продуктах НК Роснефть РН-КИМ и РН-ВЕГА. Расчеты проводились при различных значениях давления раскрытия трещиноватости матрицы породы для 1-4 поперечных трещин ГРП. По результатам расчетов выявлены эффекты влияния давления раскрытия трещиноватости матрицы породы и количества трещин ГРП на форму кривых падения давления.

[1] Андреев Е.Ю., Байков В.А., Борщук О.С. О моделях геометрически сложных трещин и стимулированного объема пласта при его гидравлическом разрыве // Нефтяное хозяйство. – 2024. – № 9. – С. 70-74.

Равномерные спектральные асимптотики для оператора Шрёдингера с несколькими сдвигами

Борисов Д.И., Поляков Д.М.

ИМВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, ЮМИ ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

Работа посвящена изучению спектральных свойств возмущенного оператора $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$, который рассматривается в пространстве $L_2(0,1)$ и задается равенством

$$(\mathcal{H}(\alpha,\beta)y)(x) = -y''(x) + V(x)y(x+\alpha) + Q(x)y(x-\beta),$$

где V и Q — комплекснозначные функции из пространства $L_\infty(0,1)$, α, $\beta \in [0,1]$, а также функция y считается продолженной нулем за пределы отрезка $[0,1]$, а результат действия сужается на данный отрезок. Область определения данного оператора имеет вид $\mathfrak{D}(\mathcal{H}(\alpha,\beta)) := \{y \in W_2^2(0,1) : y'(0) = y'(1) = 0\}$.

Обозначим через λ_n, $n \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$. Наш основной результат описывает точное представление λ_n при больших номерах n.

Теорема. Пусть V и Q — комплекснозначные функции из пространства $L_\infty(0,1)$. Существует фиксированное $n_0 > 0$, независящее от α, $\beta \in [0,1]$, такое, что для $n \geqslant n_0$ собственные значения λ_n являются простыми и имеют вид

$$\lambda_n = \left(\pi n + \frac{1}{\pi n}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_i(n,\alpha,\beta)}{(\pi n)^i}\right)^2.$$

Ряд в этом соотношении сходится равномерно по α, $\beta \in [0,1]$, $n \geqslant n_0$. Для коэффициентов $\rho_i(n,\alpha,\beta)$ выписываются явные рекуррентные формулы, а также имеет место оценка $|\rho_i(n,\alpha,\beta)| \leqslant c_1 c_2^i$, где c_1, c_2 — некоторые постоянные, которые не зависят от i, n, α, β. Для каждого $N \geqslant 1$ остаточный член ряда удовлетворяет неравенству

$$\left|\sum_{i=N}^{\infty} \frac{\rho_i(n,\alpha,\beta)}{(\pi n)^i}\right| \leqslant \frac{2c_1 c_2^N}{\pi^N n^N} \quad \text{для} \quad n \geqslant n_0.$$

Полученная теорема является обобщением соответствующего результата [1].

[1] Борисов Д.И., Поляков Д.М. Спектральные асимптотики для оператора Шрёдингера, возмущенного оператором сдвига. Изв. РАН. Сер. матем. 2025. Т. 89, No 3. С. 23–44.

Интерполяционные задачи для решений уравнений свертки

Волчков В.В., Волчков Вит.В.

Донецкий государственный университет, Донецк, Россия

Изучаются условия разрешимости интерполяционных задач для решений многомерных уравнений свертки с ограничением роста на бесконечности. В случае конечного множества узлов интерполяции получено решение проблемы разрешимости в классе решений минимального роста.

Далее считаем, что $n \in \{2, 3, \ldots\}$ и будем использовать обозначения из [1]. Кроме того, для распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ такого, что $\mathcal{Z}(\widetilde{T}) \neq \varnothing$, положим $\theta_T = \inf\limits_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})} |\mathrm{Im}\,\lambda|$. Пусть также $\mathrm{RA}(\mathbb{R}^n)$ – множество вещественно аналитических комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Z}(\widetilde{T}) \neq \varnothing$ и $q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора различных точек $a_1, \ldots, a_q$ в $\mathbb{R}^n$ и любого набора чисел $b_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, q)$ выполнены следующие утверждения: 1) если $|\mathrm{Im}\,\lambda| > \theta_T$ для всех $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $f \in (\mathcal{D}'_T \cap \mathrm{RA})(\mathbb{R}^n)$ такая, что $f(a_k) = b_k$ для всех $k = 1, \ldots, q$ и при любом $\eta \in \mathbb{Z}^n_+$ справедлива оценка $|\partial^\eta f(x)| \leq c e^{(\theta_T + \varepsilon)|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где постоянная $c > 0$ не зависит от x; 2) если $|\mathrm{Im}\,\lambda| = \theta_T$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, то существует $f \in (\mathcal{D}'_T \cap \mathrm{RA})(\mathbb{R}^n)$ такая, что $f(a_k) = b_k$ для всех $k = 1, \ldots, q$ и для любого $\eta \in \mathbb{Z}^n_+$ справедлива оценка $|\partial^\eta f(x)| \leq c(1 + |x|)^{\frac{1-n}{2}} e^{\theta_T |x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $c > 0$ не зависит от x; 3) если $0 \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, то существует гармонический многочлен f степени не выше $q - 1$ такой, что $f \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$ и $f(a_k) = b_k$ для всех $k = 1, \ldots, q$.*

Отметим, что если среди чисел b_k есть отличное от нуля, то условия роста в теореме 1 являются неулучшаемыми. Исследование проводилось в рамках государственного задания Минобрнауки Российской Федерации (тема № FRRE-2026-0015 и тема № FREM-2026-0004).

[1] Волчков В.В., Волчков Вит.В. О задаче продолжения решений однородных уравнений свертки // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75, № 3. 2011. С. 65–96.

Представление решений уравнений s-свёртки на $\mathbb{H}^2$

Волчкова Н.П., Волчков Вит.В.

Донецкий национальный технический университет, Донецкий государственный университет, Донецк, Россия

В работе исследуется задача о разложении произвольного распределения f на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, удовлетворяющего уравнению s-свёртки $f \overset{s}{\times} T = 0$, в ряд по его элементарным решениям. Получено решение этой задачи для широкого класса свёртывателей T.

Далее считаем, что $\mathbb{H}^2$ реализовано в виде круга $|z| < 1$ на $\mathbb{C}$, и будем использовать обозначения из [1], [2]. Кроме того, введем следующие обозначения: $\mathfrak{N}_s(\mathbb{H}^2) = \Lambda_s^{-1}(\mathfrak{N}_\natural(\mathbb{R}^1))$, где $\mathfrak{N}_\natural(\mathbb{R}^1)$ — множество всех чётных распределений класса $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^1)$ (см. [1], [2]); $\mathcal{Z}^+(w)$ — множество всех нулей λ чётной целой функции $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ таких, что $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ и $i\lambda \notin (0, +\infty)$; $\mathbf{m}_\lambda(w) = m_\lambda(w)$, если $\lambda \in \mathcal{Z}^+(w)\backslash\{0\}$, и $\mathbf{m}_0(w) = m_0(w)/2$, если $\lambda = 0 \in \mathcal{Z}^+(w)$, где $m_\lambda(w)$ — кратность нуля λ функции w.

Теорема 1. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$, $0 < R \leq \infty$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_\natural(B_R) \cap \mathfrak{N}_s(\mathbb{H}^2)$. Тогда $f \overset{s}{\times} T = 0$ в $B_{R-r(T)}$ $\Leftrightarrow$ для любого $\kappa \in \mathbb{Z}$*

$$f^\kappa = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_s^0 T)} \sum_{j=0}^{\mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_s^0 T)-1} \gamma_{\lambda,j,k,s} \mathcal{H}_{\lambda,k}^{s,j}, \quad \gamma_{\lambda,j,k,s} \in \mathbb{C},$$

где ряд сходится в $\mathcal{D}'(B_R)$ (см. [1] относительно обозначений).

В случае $s = 0$ теорема 1 была известна ранее. Отметим также, что этот результат играет важную роль для описания решений уравнений свёртки на группе движений $\mathbb{H}^2$. Исследование проводилось в рамках государственного задания Минобрнауки Российской Федерации (тема № FRRE-2026-0015 и тема № FREM-2026-0004).

[1] Волчков В.В., Волчков Вит.В. Единственность решений уравнений обобщенной свёртки на гиперболической плоскости и группе $PSL(2, \mathbb{R})$ // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 88, № 6. 2024. С. 44–81.

[2] Волчков В.В., Волчков Вит.В. Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 77, № 2. 2013. С. 3–34.

Кратные бифуркации Тьюринга в диффузионной модели Лэнгфорда

Габдрахманов Р.И.
Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассматривается диффузионная модель Лэнгфорда [1]

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D\Delta w + h(w)\,, \tag{1}$$

в которой

$$w = w(x_1, x_2, t) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad A(\mu) = \begin{bmatrix} 2\mu - 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2\mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}, \quad h(w) = \begin{bmatrix} w_1 w_3 \\ w_2 w_3 \\ -(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \end{bmatrix},$$

где d_j – положительные числа, а $\Delta w_j = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2}$.

Уравнение (1) изучается в квадрате

$$\Omega = \{x: \ \ 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant \pi\}$$

с граничными условиями Неймана

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Изучается задача о бифуркации Тьюринга системы (1) в окрестности точки равновесия $w = 0$. Указанная бифуркация возникает, если матрица

$$B_{kl}(\mu) = A(\mu) - (k^2 + l^2)D$$

при некотором $\mu = \mu_0, k = k_0$ и $l = l_0$ имеет простое собственное значение $\lambda = 0$ (см. [2]). Особое внимание уделяется изучению ситуации, когда матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ меет простое собственное значение $\lambda = 0$, при этом оператор $A(\mu_0) + D\Delta \ : \ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ имеет кратное собственное значение $\lambda = 0$. В этом случае коразмерность бифуркации равна одному, а соответствующее операторное уравнение исследуемой бифуркации имеет кратное вырождение. Обсуждается подход к решению указанной задачи.

[1] W. F. Langford, “Numerical Studies of Torus Bifurcations ”, Numerical Methods for Bifurcation Problems **70**, 285–295 (1984).

[2] Юмагулов М. Г., Васенина Н. А., Габдрахманов Р. И. Операторные методы исследования задач об устойчивости и бифуркацмях в системе “реакция-диффузия” и их приложения //Диффренциальные уравнения. – 2025. – Т. 61. – №. 4. – С. 545-562.

Теоремы типа Бореля–Неванлинны: уточнение оценок

Гайсин А.М.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Теоремами типа Бореля–Неванлинны называются утверждения следующего вида: для положительной неубывающей на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функции $u = u(x)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ при всех $x \geq x_0 > 0$ вне некоторого исключительного множества $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+$, например, конечной меры

$$u(x + h(x)) < u(x) + \varepsilon, \tag{1}$$

где $h = h(x)$ – некоторая положительная функция, как правило, стремящаяся к нулю при $x \to \infty$.

В приложениях особый интерес представляет случай, когда функция $u(x)$ имеет произвольный, сколь угодно быстрый рост, а $h(x) \downarrow 0$ при $x \uparrow \infty$ или $h(x) = a(x)/b(x)$, где $a(x)$, $b(x)$ непрерывные монотонные функции.

В оценке (1) число $\varepsilon > 0$ можно заменить на бесконечно малую величину $o(1)$ при $x \to \infty$. Однако в некоторых задачах комплексного анализа, в частности, комплексной динамики, важно знать конкретное поведение величины $o(1)$.

Верна следующая теорема.

Теорема. Пусть $u(x)$ неубывающая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция, $u(x) \to \infty$ при $x \to \infty$; $\varphi(x)$ – положительная и непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция, $\varphi(x) \downarrow 0$ при $x \uparrow \infty$, причем $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда для заданных $\alpha \in (0,\ 1)$, $\beta \in (0,\ 1)$ при $x \to \infty$ вне некоторого C_q-множества $E_{\alpha\beta} \subset \mathbb{R}_+$, т.е. $\overline{\mathrm{dens}} E_{\alpha\beta} \leq q$, $q = q(\alpha) = O(\alpha)$ при $\alpha \to 0$ ($0 \leq q < 1$ при $0 < \alpha \leq \alpha_0 < 1$) верна оценка

$$u\left[x + \varphi(u(x))\right] < u(x) + \frac{1}{\alpha x^{\beta}}.$$

[1] Гайсин А.М. Теоремы типа Бореля–Неванлинны. Применения. Уфа: РИЦ БашГУ, 2010. – 82 с.

Об одном условии усиленной неполноты системы экспонент относительно прямоугольников

Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Понятие усиленной неполноты системы степеней $S(P) = \{z^{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ впервые было введено Дж. Кореваром и М. Диксоном, которое в [1] было перенесено на систему экспонент $e_\Lambda = \{e^{\lambda_n z}\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, а позже в статье [2] — на систему $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$.

Определение. Система экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ называется *усиленно не полной (относительно прямоугольников)*, если для всех a, b ($0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty$) и β, $\beta \neq \pm\lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots,$

$$\inf_{\gamma(-a,a)} \inf_{c_n} \left\| e^{\beta z} - \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_n e^{\mu_n z} \right\|_{\gamma(-a,a)} = \varepsilon_\beta(a,b) > 0.$$

Здесь $||g||_\gamma = \max\limits_{z\in\gamma} |g(z)|$, внутренний инфимум находится по всем квазиполиномам $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_n e^{\mu_n z}$, $\mu_n = \lambda_n$, $\mu_{-n} = -\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$; внешний — по всем спрямляемым кривым $\gamma = \gamma(-a,a)$ из прямоугольника

$$P(a,b) = \{z = x + iy : |x| \leq a, |y| < b\},$$

соединяющим его вертикальные стороны.

Пусть

$$L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

В [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $n=o(\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$, $h(\delta)=h_-(\delta)h_+(\delta)$ *где*

$$h_+(\delta)=\int\limits_0^{\infty}|L(ir)|e^{-\delta r}dr,\qquad h_-(\delta)=\int\limits_0^{\infty}|L(re^{i\delta})|^{-1}e^{-\delta r}dr,\quad \delta>0.$$

Если функция $h(\delta)$ *удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона*

$$\int\limits_0^{d}\ln\ln h(\delta)d\delta<\infty,\quad h(d)=e, \tag{1}$$

то система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ *усиленно не полна относительно прямоугольников.*

Однако условия этой теоремы не сформулированы в терминах основных характеристик распределения точек последовательности $\{\lambda_n\}$.

Пусть W — класс положительных, неограниченно возрастающих и непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций w, таких, что

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{w(x)}{x^2}dx<\infty,$$

а

$$\Omega_0=\{\omega\in W:\frac{\omega(t)}{t}\downarrow \text{ при } t\uparrow\infty\}.$$

Хорошо известно, что условие (1) равносильно условию Левинсона для каждой из функций $h_+(\delta)$ и $h_-(\delta)$; далее, условие

$$\int\limits_0^{d_+}\ln\ln h_+(\delta)d\delta<\infty,\quad h_+(d_+)\geq e,$$

эквивалентно условию

$$n_\Lambda(t)\leq\omega_\Lambda(t),\quad n_\Lambda(t)=\sum_{\lambda_n\leq t}1,\quad \omega_\Lambda\in\Omega_0$$

(см. [1]).

Наша цель — расшифровать условие

$$\int\limits_0^{d_-}\ln\ln h_-(\delta)d\delta<\infty,\quad h_-(d_-)\geq e,$$

и придать ему более понятный и естественный вид, учитывающий явную зависимость от последовательности Λ.

Теорема 2. *Пусть наименьшая вогнутая мажоранта функции* $\ln M_L(r)$ *принадлежит классу* W. *Тогда интегралы*

$$\int\limits_0^{d_-} \ln\ln h_-(\delta)d\delta, \qquad \int\limits_0^{d^*} \ln\ln h^*(\delta)d\delta$$

равносходятся.

Здесь

$$h^*(\xi) = \int\limits_0^{\infty} \exp(I(\lambda) - \xi r)dr, \quad I(\lambda) = \int\limits_0^{1} \frac{n_\sigma(\lambda)}{\sigma}d\sigma, \quad \lambda = re^{i\delta},$$

а $n_\sigma(\lambda)$ *— число точек* λ_n *в круге* $\Delta_\sigma(\lambda) = \{t : |t-\lambda| \le \sigma|\lambda|\}$.

В условиях теоремы 2 справедлива следующая

Теорема 3. *Условие* (1) *(достаточное условие усиленной неполноты системы* $\{e^{\lambda_n z}\}$ *относительно прямоугольников) равносильно тому, что*

$$1^0. \ \ n_\Lambda(t) \le \omega_\Lambda(t), \quad \omega_\Lambda \in \Omega_0;$$

$$2^0. \ \ \int\limits_0^{d^*} \ln\ln h^*(\delta)d\delta < \infty, \quad h^*(d^*) \ge e.$$

[1] Гайсин А.М. // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.

[2] Гайсин Р.А. // Матем. сб. 2021. Т. 212. № 5. С. 58–79.

Оценка степени устойчивости максимального члена ряда Дирихле

Гайсина Г.А.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассматривается задача об оценке степени устойчивости максимального члена ряда Дирихле $\sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $s = \sigma + it$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, область сходимости которого есть полуплоскость $\Pi_0 = \{s\colon \ \mathrm{Re} s < 0\}$. Аналогичная задача для целых рядов Дирихле впервые изучалась А.М. Гайсиным в начале 2000-х гг. – им был тогда получен критерий устойчивости максимального члена этого ряда $\mu(\sigma) = \max_{n\ge1}\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$, т.е. критерий того, когда при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ конечной лебеговой меры (см. [1])

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma),$$

где $\mu_b^* = \max_{n\geq 1}\{|a_n b_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$ – максимальный член всюду сходящегося измененного ряда Дирихле. Позже этот результат был перенесен на случай полуплоскости (см. [2]). Так, в [2] была доказана теорема об устойчивости максимального члена ряда Дирихле, абсолютно сходящегося лишь в полуплоскости $\Pi_0 = \{s\colon \operatorname{Re} s < 0\}$; статья [3] была посвящена применениям этой теоремы к исследованию поведения такого ряда Дирихле на кривой, произвольным образом приближающейся к границе полуплоскости Π_0 – прямой сходимости. Для наглядности поясним суть рассматриваемых в [3] задач в частном случае, а именно для ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad 0 < p_n \uparrow \infty, \quad p_n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

область сходимости которого есть единичный круг $D(0,1) = \{z\colon \ |z| < 1\}$. Пусть γ – любая кривая, начинающаяся в $D(0,1)$ и оканчивающаяся на границе $D(0,1)$ или асимптотически приближающаяся к ней, например, по спирали. Рассматривается специальный измененный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(p_n) z^{p_n}, \tag{2}$$

где $Q(z)$ – четное произведение Вейерштрасса, $Q(0) = 1$, $Q(p_n) = 0$, $n \geq 1$. При выполнении условий на $\{p_n\}$, обеспечивающих устойчивость максимального члена ряда (1), в [3] показано следующее: существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, $|\xi_n| \to 1$, такая, что

$$\ln M_f(|\xi_n|) = (1 + o(1)) \ln |f(\xi_n)|, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 < r < 1.$$

В более поздних публикациях (см., например, [4]) доказаны теоремы о более сильной регулярности роста суммы ряда (1).

Суть основного анонсируемого результата следующая.

Для достаточно широкого класса последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ получена количественная мера устойчивости максимального члена ряда Дирихле, область сходимости которого Π_0, следующего типа: при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нижней плотности

$$de = \varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\operatorname{mes}(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \leq q < 1$$

верна оценка

$$\left| 1 - \frac{\ln \mu_b^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \right| \leq \mathrm{const}|\sigma|^{\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \tag{3}$$

Оценка (3) – принципиально новая. Точную формулировку соответствующего результата здесь не будем приводить. Доказательство неравенства (3) по существу опирается на возрастание функций $|\sigma|^{\gamma} \ln \mu(\sigma)$ и $|\sigma|^{\gamma} \ln \mu_b^*(\sigma)$, $0 < \gamma \leq 1$, при $\sigma \to 0-$. Об этом более подробно речь пойдет в докладе.

[1] А.М. Гайсин // Матем. сборник. **194**:8, 55–82 (2003).

[2] А.М. Гайсин, Т.И. Белоус // Сибир. матем. журн. **43**:6, 1271–1282 (2002).

[3] А.М. Гайсин, Т.И. Белоус. // Сибир. матем. журн. **44**:1, 27–43 (2003).

[4] Т.И. Белоус, А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. // Изв. вузов. Математика. **1**, 3–13 (2024).

Спин - флоп переходы в проводящих тетрагональных антиферромагнетиках

Гареева З.В.[1,2], Гареев Ш.Т.[1], Звездин А.К.[3]
[1]ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
[2]УУНИТ, г.Уфа, Россия
[3]ИОФРАН, г.Москва, Россия

В последнее десятилетие активное развитие получило направление, связанное с использованием антиферромагнетиков в качестве основных компонент элементов спинтроники [1].

В работе исследованы особенности спиновой динамики, реализуемой в проводящих антиферромагнетиках тетрагональной симметрии (CuMnAs, Mn_2Au) под действием переменного магнитного поля. Уравнение динамики для азимутального угла φ, определяющего положение антиферромагнитного вектора, имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \alpha\omega_{ex}\dot{\varphi} - \omega_{an}\omega_{ex}\sin 4\varphi + \frac{1}{2}\omega_h^2\cos 2\varphi = 0,$$

где $\omega_h = \gamma H$, $\omega_{an} = \gamma H_{an}^{(2)}$, $\omega_{ex} = \gamma H_{ex}$, α - параметр затухания, γ - гиромагнитное отношение, H_{an} -поле анизотропии, H_{ex} - обменное поле.

Наличие магнитоэлектрических инвариантов для рассматриваемых антиферромагнетиков разрешает существование магнитогальванических эффектов.

Показано, что при спин-флоп переходе, индуцированном медленно изменяющимся магнитным полем $\mathbf{H}(t)$, возникают осцилляции антиферромагнитного вектора и вектора намагниченности, частота осцилляций лежит в терагерцовой области спектра. При этом возникает гальванический ток

$$j_z = j_0\left[\dot{\varphi}H\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2\varphi\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\dot{H}\right],$$

который также осциллирует с терагерцовой частотой в области спин - флоп перехода. Величина и направление тока связаны с амплитудой магнитного поля и параметрами материала.

[1] A. D. Din, O. J. Amin, P. Wadley, and K. W. Edmonds, *npj Spintronics* **2**, 1 (2024).

[2] P. Wadley et al., *Science* **351**, 587 (2016).

Высшие симметрие редукций цепочек типа Тоды

Гарифуллин Р.Н.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Известно, что интегрируемые цепочки типа Тоды

$$u_{xy}^n = f(u^{n+1}, u^n, u^{n-1}, u_x^n, u_y^n). \tag{1}$$

допускают редукции к конечномерным интегрируемым по Дарбу системам [1]. В докладе рассматриваются трехкомпонентные интегируемые редукций:

$$U_{xy} = F(U, U_x, U_y), \tag{2}$$

где $U = (u_{-1}, u_0, u_1)^T$. Показано, что такие редукции допускают высшие симметрии второго порядка линейные по старшим производным вида:

$$U_t = A(U, U_x)U_{xx} + B(U, U_x). \tag{3}$$

Наличие подобных симметрий у редукций может служит критерием интегрируемости, на его основе можно исследованы уравнения вида (1), которые не являются квазилинейными. Доклад основывается на работе [2].

[1] I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova// Theoret. and Math. Phys., **203**:1 (2020), 569–581.

[2] R.N. Garifullin, I.T. Habibullin // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical (2026) (DOI: 10.1088/1751-8121/ae4ba6) [arXiv:2512.23984].

Задача выбора оптимального давления на нефтегазовом месторождении методом Катца

Глухов С.Н.
Уфимский унивеситет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Увеличение эффективности сепарации является одной из важных проблем, требующей применения обоснованного количества ступеней и давления сепарации на объектах сбора и подготовки скважинной продукции. Оптимизация параметров установок является актуальной задачей, так как позволяет увеличить массовый выход нефти на несколько процентов, что в текущих реалиях существенно увеличивает прибыль компаний и оптимизирует затраты на добычу одной тонны нефти.

В настоящей работе решается задача выбора оптимального давления на нефтегазовом месторождении методом Катца [1]. Сущность метода заключается в том, что количество молей нефти, вошедшей в сепаратор всегда равно сумме количества моль отсепарированного газа и отсепарированной нефти.

Исследуемое месторождение характеризуется маловязкой газонасыщенной нефтью, для которой необходимо несколько ступеней сепарации с целью наиболее эффективного удаления попутного нефтяного газа.

Расчет производился в программном комплексе Excel с использованием таблиц и функции «Поиск решения» для нахождения параметров жидкой и газовой фазы.

Построены графики зависимости выхода нефти от давления двухступенчатой сепарации и зависимости выхода нефти от давления трехступенчатой сепарации. На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что для данного месторождения целесообразно будет использовать 3 ступенчатую, а не 2 или 6 ступенчатую сепарацию.

[1] Денисламов И.З., Ш.А. Гафаров, К.И. Идрисов, Денисламова А.И. Метод Д.Л. Катца в решении нефтепромысловых задач. Уфа: Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов, 2020.

Dynamic effects in the sample-load system caused by a current pulse during the study of the electroplasticity effect

Dmitriev S.V.[1,2], Semenova M.N.[3], Tatarinov V.P.[3], Tarov D.V.[1], Abdullina D.U.[2], Khazimullin M.V.[2], Bebikhov Yu.V.[3]

[1]Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia
[2]Institute of Molecule and Crystal Physics, UFRC RAS, Ufa, Russia
[3]Polytechnic Institute (Branch) in Mirny, North-Eastern Federal University, Mirny, Sakha Republic (Yakutia), Russia

The electroplasticity effect (EPE) in metals has been first described in 1969 by Troitskii [1]. Since then, this effect has found numerous applications in metal forming, allowing the production of parts from hard-to-deform metal alloys. On the other hand, the physical nature of EPE is still under active discussions. To shed light on this phenomenon, experimental works are conducted using various loading techniques. Recently an experimental setup [2] has been offered to study EPE for the wires loaded by the dead load.

Various dynamical regimes realized in a load-sample system when passing short current pulses through the sample are examined. The sample is a wire made of technically pure copper or aluminum; its length is $L = 0.5$ m and diamiter is $d = 1$ or 2 mm. The upper end of the sample is fixed to a frame, and a dead weight of mass M is attached to the lower end. The current pulse causes virtually instantaneous heating of the sample, which leads to the development of thermal stresses within it and a corresponding dynamic response of the system. Two cases are considered. In the first, the pulsed current is so high that compressive stresses arise in the rod, and an Euler instability analysis is performed. In the case of a relatively low current, the heated rod remains subject to tensile stresses, but these stresses do not balance the load, and the resulting longitudinal vibrations of the rod are analyzed. The obtained results are important for the analysis of experimental results of studies of the electroplastic effect.

Funding: This study was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 25-22-00690.

[1] O. A. Troitskii, Electromechanical effect in metals, JETP Letters (1) (1969) 18-22.

[2] Dmitriev S.V., Tatarinov P.S., Semenov A.S., Bebikhov Yu.V., Tatarinov V.P., Tarov D.V. Automated laboratory setup for experimental study of methods for electric pulse treatment of metals. Eurasian Patent No. 052382, issued February 4, 2026.

Излучение солитонов уравнения Клейна-Гордона в модели с протяженной притягивающей примесью

Екомасов Е.Г., Фахретдинов М.И., Шарафуллин И.Ф., Кабанов Д.К.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Уравнение Клейна-Гордона широко используется в математической физике благодаря тому, что оно моделирует множество различных физических явлений и обладает решениями в виде солитонов. Чтобы лучше описать реальные физические системы, в уравнение вводят дополнительные параметры, слагаемые и т. п. Часто рассматривается пространственная модуляция периодического потенциала или наличие примеси. Их присутствие приводит к возникновению примесных мод колебаний [1, 2], которые являются источниками излучения в системе. В данной работе для уравнения синус-Гордона численно исследуется излучение бризера и солитона, локализованных на протяженной притягивающей примеси. Показано, что путем варьирования параметров примеси можно менять амплитуду и частоту излучения. А с помощью метода авторезонанса, добавляя в уравнение гармоническое слагаемое малой амплитуды, путем изменения амплитуды и собственной частоты колебаний бризера, можно управлять частотой излучаемых волн. Для уравнения φ^4 также показано, что, изменяя параметры примеси, можно менять характеристики излучения бризера и кинка.

Работа выполнена в рамках государственного задания, соглашение № 075-03-2024-123/1 от 15.02.2024, тема № 324-21.

[1] Самсонов К.Ю., Кабанов Д.К., Назаров В.Н., Екомасов Е.Г. Локализованные нелинейные волны уравнения синус-Гордона в модели с тремя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование, 2024, т. 16, № 4. – С. 855–868.

[2] Фахретдинов М.И., Екомасов Е.Г. Локализованные волны уравнения φ^4 в модели с двумя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование. – 2025. – Т. 17, №3. – С. 437–449.

Влияние расстояния Ван-дер-Ваальса на положение электронных зон топологических изоляторов XY_2Te_4

Зайцев Н.Л.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия,
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Соединения XY_2Te_4 (где X=Mn,Pb и Y=Bi,Sb), являются слоистыми топологическими изоляторами, где каждые семь моноатомных слоев вдоль направления [0001] связаны силами Ван-дер-Ваальса (вдВ). Соответствующее вдВ-расстояние оказывает существенное влияние на распределение электронных зон и величину щели рассматриваемых соединейний. При этом в данных системах при сжатии или растяжении, возможны, и часто наблюдаются, топологические фазовые переходы из состояния топологического изолятора в тривиальный, а также в состояние Дираковского и Вейлевского полуметаллов [1, 2].

В данной работе методом теории функционала электронной плотности, учитывающим слабое вдВ-взаимодействие исследуются геометрические характеристики исследуемых соединений и их влияние на расположение электронных зон. Проведенные расчеты показывают, что разброс вдВ-расстояний в зависимости от выбранного метода учета дисперсионных сил достигает 0.15 Å, а увеличение вдВ-расстояния на эту величину приводит к сужению щели на $\sim 60-80\,meV$. При этом магнитные соединия $MnBi_2Te_4$ и $MnSb_2Te_4$ при таком изменении геометрии испытывают топологический фазовый переход из полуметалла Вейля или топологического изолятора в тривиальный, в зависиомти от магнитного состояния.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, шифр проекта 125022702939-2.

[1] Shikin A.M., Zaitsev N.L., Estyunina T.P., et.al. Phase transitions, Dirac and Weyl semimetal states in Mn1-xGexBi2Te4, Sci Rep 15 (2025) 1–19.

[2] Shikin A.M., Zaitsev N.L., Eryzhenkov A.V., et.al. Topological phase control in Mn1-xGexBi2Te4 via spin–orbit coupling and magnetic configuration engineering, Journal of Physics and Chemistry of Solids 208 (2026) 113042.

Дробные степени оператора в теории разрешимости эволюционных уравнений дробного порядка

Захарова Т.А., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, A — линейный замкнутый оператор, плотно определенный в $\mathcal{Z}$. $S_{\theta_0,a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0,\ \lambda \neq a_0\}$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Для $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ класс операторов A, таких, что выполняются следующие два условия:

(i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует $K = K(\theta, a) > 0$, такое, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = B\left(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \ldots, D^{\alpha_n} z(t)\right) \tag{2}$$

на отрезке $[t_0, T]$. Здесь $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{Z}$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Функция $z \in C((t_0, T]; D_A)$ называется решением задачи (1), (2), если $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_1} z, D^{\alpha_2} z, \ldots, D^{\alpha_n} z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и для всех $t \in [t_0, T]$ — равенство (2).

Пусть задано отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n \to \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}_\gamma = D_{A^\gamma}$ с нормой $\|\cdot\|_\gamma := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}_\gamma} = \|A^\gamma \cdot\|_{\mathcal{Z}}$ [1], существуют константы $q > 0$, $\delta \in (0, 1]$, такие, что для всех $(s, x_1, x_2, \ldots, x_n), (t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n$

$$\|B(s, x_1, \ldots, x_n) - B(t, y_1, \ldots, y_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq q \left(|s - t|^\delta + \sum_{l=1}^n \|x_l - y_l\|_\gamma \right). \tag{3}$$

Теорема. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 0 < \alpha \leq 1$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n \to \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (3) с $\gamma \in (0, 1)$, $z_0 \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) на $[t_0, T]$.

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Fedorov V. E., Avilovich A. S., Zakharova T. A. Complex powers of fractional sectorial operators and quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, No. 2. P. 580–593.

Бегущая волна в гиперболическом уравнении

Калякин Л.А.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается полулинейное гиперболическое уравнение, которое приведено к виду

$$\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f(\varphi)=0,\quad x\in\mathbb{R},\ t>0;\quad \delta=\mathrm{const}>0. \tag{1}$$

Предполагается, что

$$f(0)=f(1)=0;\quad f'(0)>0,\quad f'(1)<0.$$

Нули функции $f(\varphi)$ являются тривиальными решениями – равновесиями уравнения (1). Одно из них $\varphi\equiv 0$ будет динамически устойчиво, другое $\varphi\equiv 1$ не устойчиво. Под бегущей волной понимается функция $\Phi(s)$, зависящая от одной переменной типа $s=x-S(t)$. Точное решение уравнения (1) в виде волны с постоянной скоростью $V=S'(t)=\mathrm{const}>0$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\delta V^2-1)\frac{d^2\Phi}{ds^2}-V\frac{d\Phi}{ds}+f(\Phi)=0. \tag{2}$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) с краевыми условиями

$$\Phi(s)\to 0\ \text{ при } s\to-\infty,\quad \Phi(s)\to 1 \text{ при } s\to+\infty$$

для уравнения в частных производных (1) описывает переход (волну) из устойчивого равновесия $\varphi\equiv 0$ в неустойчивое $\varphi\equiv 1$. В отличие от известных результатов [1] рассмотрен случай быстрой волны, когда $V>1/\sqrt{\delta}$. Выявлены условия существования таких волн и анализируется их устойчивость относительно возмущения начальных данных.

[1] Л. А. Калякин, Асимптотика выхода на волну, бегущую из седла в узел, УМН, 80:3(483) (2025), 67–112

Квазиклассическая формула следов для магнитного оператора Шредингера

Кордюков Ю.А.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть (X,g) — полное риманово многообразие и (L,h^L) — эрмитово линейное расслоение на X с эрмитовой связностью ∇^L. Предположим, что они имеют ограниченную геометрию. Это означает, что кривизны R^{TX} и R^L связности Леви-Чивиты ∇^{TX} и связности ∇^L соответственно и их ковариантные производные любого порядка равномерно ограничены на X по норме, индуцированной g и h^L, а радиус инъективности многообразия (X, g) положителен.

Для любого $p \in \mathbb{N}$ пусть $L^p := L^{\otimes p}$ — p-я тензорная степень L и $\nabla^{L^p} : C^\infty(X, L^p) \to C^\infty(X, T^*X \otimes L^p)$ — индуцированная эрмитова связность на L^p. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка H_p, действующий на $C^\infty(X, L^p)$ по формуле

$$H_p = \frac{1}{p^2}\Delta^{L^p} + V,$$

где $\Delta^{L^p} = \left(\nabla^{L^p}\right)^* \nabla^{L^p}$ — магнитный лапласиан и $V \in C^\infty(X)$ — вещественнозначная функция.

Для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ обозначим через $\varphi(H_p)$ ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(X, L^p)$, определяемый спектральной теоремой, и через $K_{\varphi(H_p)} \in C^\infty(X \times X)$ его интегральное ядро относительно римановой формы объема.

Теорема. Справедливо асимптотическое разложение

$$K_{\varphi(H_p)}(x_0, x_0) \sim p^d \sum_{r=0}^{\infty} f_r(x_0) p^{-r}, \quad p \to \infty,$$

равномерное по $x_0 \in X$, где $d = \dim X$ и f_r — гладкие функции на X. Старший коэффициент этого разложения задается формулой:

$$f_0(x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(|\xi|^2 + V(x_0)) d\xi.$$

Следующие коэффициенты разложения имеют вид

$$f_r(x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\ell=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} P_{r,\ell,x_0}(\xi) \varphi^{(\ell-1)}(|\xi|^2 + V(x_0)) d\xi, \quad r \geq 1,$$

где $P_{r,\ell,x_0}(\xi)$ — универсальный многочлен, зависящий от конечного числа производных V и кривизн R^{TX} и R^L в x_0.

Estimation of pulsed current parameters required for healing fatigue cracks in steel samples

Korznikova E.A.[1], Sugonyako I.S.[1], Tatarinov P.S.[2], Semenov A.S.[2], Yakushev I.A.[2], Latypov V.R.[1], Dmitriev S.V.[1]
[1]Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia
[2]Polytechnic Institute (Branch) in Mirny, North-Eastern Federal University, Tikhonov St. 5/1, 678170 Mirny, Sakha Republic (Yakutia), Russia

The problem of crack initiation and propagation in metallic materials and structures is a cause of their premature failure, resulting in significant economic losses. This motivates researchers to develop various crack healing methods. Electric pulse treatment (EPT) is one of the rapidly developing approaches to crack healing [1]. In our recent study [2], a novel approach has been developed to determining the parameters of electric pulse healing of fatigue cracks.

In this study, the following strategy for selecting pulsed current parameters was used to achieve complete fatigue crack healing. First, the energy stored in the capacitor bank was chosen as the determining parameter: $E = CU^2/2$, where C is the capacitor's capacitance and U is its voltage. If the energy E is too high, the release of Joule heat near the crack tip causes the metal to boil, which leads to the formation of a blow hole due to the ejection of some of the metal. If the energy E is too low, the metal at the crack tip does not melt. With the correct E value, some of the metal near the crack tip melts, leading to partial healing. As the crack partially heals, the pulse energy should increase because the cross-section of the specimen being healed increases. Note that the capacitor voltage required to restore the crack depends on the specific experimental setup. Charging energy is an important parameter, but it is not universal, as energy losses can vary significantly depending on the experimental setup used.

Funding: This study was supported by the PRIORITY 2030 Program of the Ufa State Petroleum Technological University.

[1] Cai, Q., Zhou, M., Bagherpour, et al. New insight into crack-healing mechanism via electropulsing treatment. Metal. Mater. Trans. A 2023, 54(7), 2960-2974.

[2] Kukudzhanov, K.V., Korznikova, E.A., Chentsov, A.V., Dmitriev, S.V. A novel approach to determining the parameters of electric pulse healing of fatigue cracks. Materials Letters 2026, 404, 139565.

Численное исследование нелинейной динамики намагниченности в цепочке магнитных наноцилиндров с диссипацией

Кузьмин Д.А.[1], Бычков И.В.[1], Екомасов Е.Г.[2]

[1]Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

[2]Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

В работе представлены результаты численного моделирования нелинейной динамики намагниченности в одномерной цепочке магнитных наночастиц в виде соосных цилиндров. Модель основана на уравнения Ландау–Лифшица с учётом дипольного взаимодействия и диссипации. Основное внимание уделено исследованию условий возникновения и устой- чивости решений бризерного типа - локализованных волн, не распространяющихся вдоль цепочки

Система уравнений решалась численно с использованием высокоточного неявного метода Рунге–Кутты, адаптированного для жестких систем дифференциальных уравнений. Для анализа бризерных решений применялись критерии сохранения формы и локализации волнового пакета. Была изучена зависимость амплитуды и ширины бризера от параметров системы, проведен анализ устойчивости к малым возмущениям и диссипации.

Показано, что при определенных параметрах (сила дипольного взаимодействия, геометрические параметры наночастиц, уровень диссипации) в системе возникают решения, близкие к бризерным. Обнаружено, что наличие слабой диссипации не разрушает бризерные режимы, но приводит к постепенному уменьшению амплитуды и росту частоты. Установлена зависимость времени жизни и профиля бризера от амплитуды начального возмущения, величины дипольного взаимодействия и параметра диссипации (коэффициента затухания Гильберта). Выявлены пороговые значения параметров, при которых локализованные решения теряют устойчивость и преобразуются в линейные волны.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что цепочка магнитных наночастиц может служить удобной дискретной моделью для изучения нелинейных волновых явлений, в частности — магнонных солитонов. Наличие управляемых параметров (расстояние между частицами, анизотропия, внешнее поле) позволяет гибко настраивать свойства системы, что открывает перспективы для проектирования устройств магнонной логики и передачи информации.

Исследование проводилось при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№075–00187-24–04) и Государственного задания (Приказ №075-03-2024–123/1 от 15 февраля 2024 г., тема №324-21).

Оператор сдвига в задаче о бифуркации циклов в динамических системах, близких к гамильтоновым

Кунгиров М.Н.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассматривается зависящая от малого параметра α динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = J\nabla H(x) + \alpha f(x)\,, \quad x \in R^{2N} \qquad (N \geqslant 1)\,, \tag{1}$$

в которой $H(x)$ и $f(x)$ – дважды непрерывно дифференируемые скалярная функция и вектор-функция соответственно, определенные при всех x ; $\nabla H(x) = \begin{bmatrix} H'_u \\ H'_v \end{bmatrix}$; матрица J определена равенством: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$.

При $\alpha = 0$ система (1) является гамильтоновой:

$$\frac{dx}{dt} = J\nabla H(x)\,, \quad x \in R^{2N}\,. \tag{2}$$

Предполагается, что невозмущенная система (2) имеет точку равновесия $x = 0$, т.е. $\nabla H(x) = 0$ при $x = 0$. При этом предполагается, что в некоторой окрестности начала координат пространства R^{2N} имеется гладкое двумерное многообразие Φ, проходящее через точку $x = 0$ и составленное из замкнутых кривых, которые являются циклами системы (2).

В настоящем докладе обсуждаются условия, при выполнении которых у системы (1) при малых ненулевых α в окрестности некоторой периодической траектории невозмущенной гамильтоновой системы (2) сохраняется предельный цикл (бифуркация циклов). Задача о бифуркации циклов изучалась многими авторами. Фундаментальным результатом здесь является теорема Понтрягина (см. [1]), в которой предложен метод исследования задачи о бифуркации циклов в системах, близких к гамильтоновым. В докладе предлагается новый подход исследования задачи о бифуркации циклов, основанный на применении оператора сдвига по траекториям дифференциальных уравнений и отображения Пуанкаре (см., например, [2]).

[1] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* // М.: Наука. 1990. 486 с.

[2] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* М.: Наука. 1975. 511 с.

A Numerical Toolkit for Analysis of Nonlinear Modes in system of 1D-Gross-Pitaevskii equations

Kutsenko N. A., Alfimov G. L.

MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia

We consider stationary solutions, of the form $\Psi_1(t,x) = e^{-i\mu_1 t}u_1(x)$, $\Psi_2(t,x) = e^{-i\mu_2 t}u_2(x)$, called also *nonlinear modes*, for a system of coupled 1D Gross-Pitaevskii equations

$$i\Psi_{1,t} + \beta_1\Psi_{1,xx} - V_1(x)\Psi_1 - (\alpha_{11}|\Psi_1|^2 + \alpha_{12}|\Psi_2|^2)\Psi_1 = 0, \qquad (1)$$

$$i\Psi_{2,t} + \beta_2\Psi_{2,xx} - V_2(x)\Psi_2 - (\alpha_{21}|\Psi_1|^2 + \alpha_{22}|\Psi_2|^2)\Psi_2 = 0. \qquad (2)$$

Here $\beta_1, \beta_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ are positive constants, $V_1(x)$ and $V_2(x)$ are real functions (called *potentials*). The system (1)-(2) is of exceptional interest for several branches of physics, notably nonlinear optics and the physics of ultracold gases. Respectively, finding of *all* nonlinear modes that coexist for given parameters is of primary importance for these physical applications.

In this contribution, we present a computational tool that allows to find all coexisting nonlinear modes for the system (1)- (2) and guarantees the completeness of the search. It is based on the method of "filtering out" solutions with singularities for the ODE system

$$\beta_1 u_{1,xx} + (\mu_1 - V_1(x))u_1 - (\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{12}u_2^2)u_1 = 0, \qquad (3)$$

$$\beta_2 u_{2,xx} + (\mu_2 - V_2(x))u_2 - (\alpha_{21}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2)u_2 = 0. \qquad (4)$$

developed by our team previously [1]. The tool provides an interactive interface. The algorithm first performs a preliminary scan over two auxiliary parameters, producing a plane map of candidate points where nonlinear modes are expected. The user then manually verifies these candidates and retains the valid modes for further analysis. This analysis includes computing of characteristics of the found nonlinear modes as well as study of their stability.

We illustrate the capabilities of the software tool by applying it to system (1)-(2) with several examples involving single-well and double-well potentials.

[1] G.L. Alfimov, A.P. Fedotov, N.A. Kutsenko, D.A. Zezyulin, Stationary modes for vector nonlinear Schrodinger-type equations: A numerical procedure for complete search and its mathematical background, *Physica D*, **454**, art. 133858 (2023) (DOI: 10.1016/j.physd.2023.133858)

Связанная динамика магнитных вихрей одинаковой и разной полярности в трехслойной цилиндрической наноструктуре

Лукошкина Т.А.[1], Нерадовский Д.Ф.[1], Екомасов Е.Г.[2], Кабанов Д.К.[2]

[1]Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

[2]Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Исследуется связанная динамика магнитных вихрей в трёхслойном спин-трансферном наноосцилляторе (СТНО), который представляет собой наноцилиндр с двумя магнитными (пермаллоевыми) слоями, между которыми лежит немагнитный слой. Для описания нелинейной динамики векторов намагниченности в каждом из ферромагнитных слов используется обобщенное уравнение Ландау-Лифшица. Для упрощённого описания движений связанных вихрей в рамках метода коллективных координат можно получить систему уравнений Тиля для векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, определяющих положение центров вихрей.

$$\vec{G}_i \times \dot{\vec{r}_i} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} W\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right), \ i = \overline{1,2} \tag{1}$$

где $\vec{G}_i = -G_i \vec{e}_z$, $G_i = 2\pi L_i \frac{M_{s_i}}{\gamma} p_i$, M_{s_i} – намагниченность насыщения i-го слоя, p_i – полярность кора в i-м слое, γ – гиромагнитное отношение, L_i – толщина i-го слоя. Энергия $W\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right)$ системы двух связанных вихрей содержит квазиупругую энергию вихрей и энергию диполь-дипольном взаимодействия вихрей.

Полученная система уравнений Тиля для координат центров вихрей решается аналитически для случая параллельных вихрей одинаковой полярности и численно для случая разной полярности. При определенном соотношении безразмерных параметров, входящих в уравнение (1), для обоих случаев можно получить стационарный (установившийся) режим движения вихрей. Получившиеся спектры частот отличаются от линейного случая, который не учитывает магнитостатическое взаимодействие между намагниченностью в корах вихрей. Полученное решение уравнения Тиля для случая одинаковых полярностей вихрей даёт качественное согласие с результатами, которые получаются при численном решении обобщенного уравнения Ландау-Лифшица-Гильберта при наличии спин-поляризованного тока.

Соотношение типа Гаусса для функции Горна H_5

Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.

Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

В теории обобщенного волнового уравнения и осесимметрического уравнения Гельмгольца важную роль играет конфлюэнтная функция Горна [1]

$$H_3\left(\alpha, \beta; \delta; x, y\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}.$$

Отметим, что функция Горна H_3 записывается через функцию Гаусса и для нее известны [1, 2] соотношения, которые при $y = 0$ как частный случай переходят в известные соотношения для функции Гаусса.

В этой работе рассматривается функция Горна H_5

$$H_5(\alpha; \gamma; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n}}{(\gamma)_m} \frac{y^n}{n!} \frac{x^m}{m!},$$

которую можно записать через функцию Кумера

$$H_5(\alpha; \gamma; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n} \frac{y^n}{n!} \ {}_1F_1(\alpha - n; \gamma; x).$$

Доказана формула

$$\delta H_5(\alpha; \delta; x, y) - \delta H_5(\alpha - 1; \delta; x, y) - x H_5(\alpha; \delta + 1; x, y) =$$

$$= \frac{-\delta y}{(1-\alpha)(2-\alpha)} H_5(\alpha - 2; \delta; x, y),$$

из которой при $y = 0$ как частный случай следует известная [3] формула

$$\delta \ {}_1F_1(\alpha; \delta; x) - \delta \ {}_1F_1(\alpha - 1; \delta; x) - x \ {}_1F_1(\alpha; \delta + 1; x) = 0.$$

[1] Капилевич М. Б. О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения, 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.

[2] Мавлявиев Р. М., Гарипов И. Б. Некоторые соотношения между функциями Горна // Проблемы математического анализа. Вып. 104 - Новосибирск, 2020, С. 57–62

[3] Лебедев Н. .Н. Специальные функции и их приложения. - 2-е изд., перераб. и доп. М.-Л.: Физматгиз, 1963

Способ анализа капилляриметрических исследований кернового материала на основе нелинейной аппроксимации разновременных экспериментальных данных

Мартынова Ю.В., Михайлов С.П.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Целью данной работы является разработка инструмента оценки качества и нормализации капилляриметрических исследований керна методом полупроницаемой мембраны, в основе которого — алгоритм нелинейной аппроксимации экспериментальных данных для случая минимизации квадратов абсолютных отклонений.

В работе [1] предложен способ нормализации капилляриметрических данных исследований керна, который заключается в подборе аппроксимирующей функции $f(x, \vec{a}) = (\frac{1-a_1}{x-a_1})^{a_2} + a_3$, наиболее точно описывающей кривую капиллярного давления.

Пусть имеется n значений капиллярного давления $y_1, ..., y_n$ и соответствующих значений водонасыщенности $x_1, ..., x_n$. В случае нелинейной аппроксимации алгоритм нахождения значений a_1, a_2, a_3 следующий:

1. Вычислить $S(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i, \vec{a}) - y_i)^2$.

2. Выбрать значение λ.

3. Решить линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta\vec{a}$

$$(J^T(\vec{a})J(\vec{a}) + \lambda diag(J^T(\vec{a})J(\vec{a})))\Delta\vec{a} = -J^T(\vec{a})\vec{e}(\vec{a}),$$

где $J(\vec{a})$ – матрица Якоби, $\vec{e}(\vec{a}) = (f(x_1, \vec{a}) - y_1, ..., f(x_n, \vec{a}) - y_n)$.

4. Вычислить $S(\vec{a} + \Delta\vec{a}) = S(\vec{a}) + 2\Delta\vec{a}^T J^T(\vec{a})(\vec{e}(\vec{a}) + J(\vec{a})\Delta\vec{a})$.

5. Если $S(\vec{a} + \Delta\vec{a}) \leq S(\vec{a})$, то увеличить λ в несколько раз и вернуться к шагу 3.

6. Если $S(\vec{a}+\Delta\vec{a}) < S(\vec{a})$, то уменьшить λ в несколько раз, скорректировать вектор $\vec{a} = \vec{a} + \Delta\vec{a}$ и вернуться к шагу 3.

Итерации заканчиваются при достижении погрешности

$$|S(\vec{a} + \Delta\vec{a}) - S(\vec{a})|^{(k)} = |S(\vec{a} + \Delta\vec{a}) - S(\vec{a})|^{(k+1)}.$$

Данный способ апробирован для одного из месторождений углеводородов Западной Сибири, он позволяет оценивать качество экспериментальных данных и устранять дефекты, полученные в ходе проведения эксперимента.

[1] Колонских А.В., Мартынова Ю.В., Михайлов С.П., Муртазин Р.Р. Метод восстановления коэффициента остаточной водонасыщенности горных пород путем настройки математической модели капиллярной кривой // Нефтепромысловое дело. – 2018. – №11. — С. 27-30.

Metric perturbations at the preheating stage in the inflationary E-model

Maslov E.M., Koutvitsky V.A.
IZMIRAN, Moscow, Russia

We study scalar perturbations of the metric at the preheating stage in the inflationary model with the potential

$$V(\phi) = V_\infty \left(1 - e^{-C\chi}\right)^2,$$

where $\chi = b\phi$, $b = \sqrt{16\pi G/3}$, $C \gg 1$. At this stage the inflaton field $\chi(\tau)$ performs fast damped oscillations

$$\chi(\tau) = \frac{1}{C} \ln \frac{1 - \varrho^{1/2}(\tau)\cos\theta(\tau)}{1 - \varrho(\tau)},$$

where $\tau = bV_\infty^{1/2} t$, $\varrho = \rho/V_\infty$ is the slowly varying energy density, $\theta_\tau = \Omega \equiv C\sqrt{2(1-\varrho)}$. Scalar perturbations of the metric caused by fluctuations $\delta\chi$ are described by the gravitational potential Φ satisfying the Poisson equation (see e.g., [1])

$$\Delta\Phi = \frac{3a_0}{4a} \bar{z} \frac{d\chi}{d\eta} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\bar{u}}{\bar{z}}\right),$$

where a is the scale factor, $d/d\eta = a d/dt$, $\bar{z} = \chi_\tau (\varrho/2)^{-1/2} a/a_0$, and $\bar{u} = (a/a_0)\,\delta\chi + \bar{z}\Phi$ satisfies the Mukhanov-Sasaki equation [2]. As a result, using these equations, we find the Fourier modes of Φ:

$$\Phi_k \simeq -\frac{3}{4q^2} \Omega^{1/2} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3/2} \frac{\sqrt{2\varrho(1-\varrho)}}{1 - \varrho^{1/2}\cos\theta} \left(\frac{\varrho^{1/2} - \cos\theta}{1 - \varrho^{1/2}\cos\theta} Y_k + \sin\theta \frac{dY_k}{d\theta}\right),$$

where $q = \left(bV_\infty^{1/2}\right)^{-1} k/a$ is the normalized physical momentum. The function $Y_k(\theta)$ is governed by the Hill equation with slowly varying parameters q and ϱ. For this equation we find numerically the resonance zones and the Floquet exponent on the (q, ϱ)-plane. We show that long-scale modes with $q \lesssim 5$ are the most amplified ones.

[1] Weinberg S. Cosmology. Oxford University Press, 2008.

[2] Mukhanov V.F., Feldman H.A., and Brandenberger R.H. Phys. Rept. **215**, 203, 1992.

Обратные задачи для уравнений с интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля. Секториальный случай

Мелехина Д.В.[1,2], Федоров В.Е.[1]
[1]Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия
[2]Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Россия

Рассматривается обратная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Римана—Лиувилля в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$:

$$D^{m,K}z(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \ t \in (0,T], \tag{1}$$

$$D^{k,K}z(0) = z_k \in D_A, \ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{2}$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \ t \in (0,T], \tag{3}$$

где

$$D^{m,K}z(t) = D^m J^K z(t) = D^m \int_0^t K(t-s)z(s)ds, \quad m \in \mathbb{N},$$

$K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ — сингулярное ядро интегрального оператора, A — линейный замкнутый секториальный оператор в $\mathcal{Z}$, $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, $B(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathcal{Z})$ — известный операторный коэффициент, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{Z};\mathfrak{U})$ — оператор наблюдения.

Решением задачи (1)–(3) будем называть такую пару функций (z,u), что $z \in C((0,T];D_A) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$, $J^K z \in AC^m([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^m((0,T];\mathcal{Z})$, выполнены условия (2), (3) и равенство (1) при соответствующем $u \in C([0,T];\mathfrak{U})$.

В работе исследуются вопросы корректности поставленной задачи. Полученные абстрактные результаты применены к начально-краевым задачам для уравнений с частными производными, содержащих интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля с ядром Прабхакара [1].

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Mathematical Journal.—1971.—№ 19.—С. 7–15.

Nonlinear modes in the Gross-Pitaevskii Equation with a finite-depth multi-well potentials

Murenkov Ya. A., Alfimov G. L.
MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia

We consider stationary solutions, $\Psi(t,x) = e^{-i\omega t}u(x)$, called also *nonlinear modes*, of the 1D Gross-Pitaevskii equation

$$i\frac{d\Psi}{dt} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi - |\Psi|^2\Psi = 0. \tag{1}$$

If the potential $V(x)$ is periodic or bichromatic (e.g., of the form $V(x) = A_1 \cos 2x + A_2 \cos 2\theta x$ with θ irrational) then, under certain conditions, *all* nonlinear modes can be put in one-to-one correspondence with bi-infinite sequences over a finite alphabet [1, 2].

The potentials $V(x)$ can be viewed as an infinite chain of potential wells that are either identical (in the periodic case) or distinct (in the bichromatic case). Then the nonlinear modes for $V(x)$ can be regarded as bound states of *elementary* nonlinear modes that correspond to individual wells. The results of [1,2] imply that, under certain conditions, these elementary modes can be coupled in all possible combinations.

In this contribution, we study the coupling of elementary nonlinear modes for Eq. (1) in the prototypical setting of a double-well potential. The key parameters of the potential are the depths of the wells and the distance between them. To compute both the elementary modes and their bound states, we employ the technique developed in [3]. This method allows us to find all nonlinear modes of Eq. (1) and to justify the completeness of the search. It thereby enables us (i) to describe bifurcations of nonlinear modes as the parameters vary and (ii) to determine the parameter range in which all bound states exist.

[1] M. E. Lebedev, G. L. Alfimov, Numerical Evidence of Hyperbolic Dynamics and Coding of Solutions for Duffing-Type Equations with Periodic Coefficients, Regular and Chaotic Dynamics, **29**, 3, 451 (2024).

[2] G. L. Alfimov, A. P. Fedotov, Ya. A. Murenkov, and D. A. Zezyulin, Towards the complete description of stationary states of a Bose-Einstein condensate in a one-dimensional quasiperiodic lattice: A coding approach, Chaos, (2026), accepted.

[3] G. L. Alfimov, D. A. Zezyulin, Nonlinear modes for the Gross–Pitaevskii equation – demonstrative computation approach, Nonlinearity, **20**, 2075 (2007).

Уравнение свёртки в пространстве функций на неограниченном замкнутом выпуклом множестве

Мусин И.Х., Юлмухаметов Р.С.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале, b – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$, $U = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ -\langle \xi, y\rangle \ \le b(y), \forall y \in C\}$, V – внутренность U.

Пусть $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых функций $h_m : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ с $h_m(0) = 0$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$i_1)$ $h_m(x) = h_m(|x_1|, \dots, |x_n|), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$i_2)$ $\exists\, a_m > 0$: $\ h_m(x) \ge \|x\| \ln(1 + \|x\|) - a_m\|x\| - a_m, \ x \in \mathbb{R}^n$;

$i_3)$ $\lim\limits_{x\to\infty}(h_m(x)-h_{m+1}(x))=+\infty$;

$i_4)$ $\sup\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}(h_{m+1}(\alpha+\beta)-h_m(\alpha))<\infty$ для $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta|=1$;

$i_5)$ $\forall p\in\mathbb{N}\ \exists l=l(m,p)\in\mathbb{N}$: $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\exp(\max\limits_{|\beta|\le p}h_{m+l}(\alpha+\beta)-h_m(\alpha))<\infty$.

Пусть $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ – проективный предел пространств $\mathcal{E}_m(U)$ $C^\infty(U)$-функций f таких, что

$$\|f\|_{m,U}=\sup_{x\in V,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{|(D^\alpha f)(x)|(1+\|x\|)^m}{e^{h_m(\alpha)}}<\infty\ ,m\in\mathbb{N}.$$

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная выпуклая область, $K=\overline{D}$.

Для произвольного множества $M\subset\mathbb{R}^n$ определим его опорную функцию H_M в $\mathbb{R}^n$ по формуле $H_M(x)=\sup\limits_{\xi\in M}(-\langle x,\xi\rangle),\ x\in\mathbb{R}^n$.

Определим свёртку $\mu*f$ функционала $\mu\in(C^\infty(K))'$ и функции $f\in\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U+K)$ по правилу: $(\mu*f)(x)=\langle\mu_t,f(x+t)\rangle,\ x\in U$. Показывается, что $\mu*f\in\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$. Определим оператор $M_\mu:\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U+K)\to\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ по правилу: $M_\mu(f)=\mu*f$.

Для $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ и $r>0$ $\Delta(z,r)=\{w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{C}^n:|w_j-z_j|\le r,\ j=1,\dots,n\}$.

Теорема. Пусть $\mu\in(C^\infty(K))'$. Допустим, что функция

$$\hat{\mu}(z)=(\mu,e^{i\langle\xi,z\rangle}),\ z\in\mathbb{C}^n,$$

такова, что существуют положительные числа $A,L,N>1$ такие, что какова бы ни была точка $z\in T_C$ для любого $\varepsilon\in(0,1)$ найдётся не превосходящее $\frac{L}{\varepsilon^N}$ число $a_\varepsilon\ge1$ такое, что

$$e^{H_K(Im\,z)-A\ln(1+\|z\|)}\le a_\varepsilon\max_{w\in\Delta(z,\varepsilon)\subset T_C}|\hat{\mu}(w)|.$$

Тогда оператор $M_\mu:\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U+K)\to\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ является сюръективным.

О субфункциях стационарного оператора Шрёдингера с разделёнными переменными

Мурясов Р.Р.
ИМВЦ УФИЦ РАН

В докладе будут даны необходимые и достаточные условия принадлежности функций, представимых в полярных координатах на плоскости и в многомерных сферических координатах в виде произведения функции от радиуса и функции точки на единичной сфере, классу субфункций оператора Шрёдингера. Эти условия являются распространением результатов, полученных автором в работах [1], [2] для субгармонических функций с разделёнными переменными, на субфункции оператора Шрёдингера. Ранее некоторые теоремы для аналитических и субгармонических функций были распространены на субфункции оператора Шрёдингера Б.Я. Левиным и А.И. Хейфицем в работах [3], [4].

[1] Р.Р.Мурясов, Субгармонические функции с разделёнными переменными и их связь с функциями, выпуклыми относительно пары функций, Изв. вузов матем., 2024, номер 6, 49–67

[2] Р.Р.Мурясов, Субгармонические функции с разделёнными переменными и их связь с функциями, выпуклыми относительно пары функций II. Многомерный случай, Изв. вузов матем. (в печати)

[3] B.Ya.Levin and A.Kheyfits, Asymptotic behavior of subfunctions of the Shrödinger operator in an n-dimensional cone, Soviet Math. Dokl., 1989, Vol. 38, 109–112

[4] Boris Ya. Levin and Alexander I. Kheyfits, Asymptotic Behavior of Subfunctions of the Stationary Shrödinger Operator, arXiv:math/0211328v1., 2002, 97pp.

Особенности течения мицеллярного раствора ПАВ в кольцевом канале

Мухутдинова А.А.
ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается течение мицеллярного раствора поверхностно-активного вещества [1] в кольцевом канале. Предполагается, что температура втекающей жидкости выше, чем температура окружающей среды. На Рис. 1 показана кривая зависимость вязкости от температуры, чёрными кружочками приведены данные для раствора катионных сурфактантов из статьи [1], а кривая красного цвета означает их аппроксимацию.

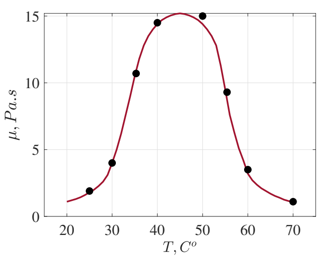

Рис. 1: Зависимость вязкости от температуры

Показано влияние граничных условий на структуру потока и расход жидкости. Получены как слабо нелинейные колебания томсоновского типа,так и затухающие колебания. Основные закономерности однозначно подтверждают результаты исследований [2]. Показано влияние граничных условий на структуру потока и расход жидкости. Определены характерные режимы течения и факторы, определяющие их устойчивость.

[1] G.C. Kalur, B. D. Frounfelker, B. H. Cipriano, A. I. Norman, S. R. Raghavan Viscosity increase with temperature in cationic surfactant solutions due to the growth of wormlike micelles // Langmuir: 21 (24), 10998-11004, 2005.

[2] A. A. Mukhutdinova, V. N. Kireev, S. F. Urmancheev Numerical Modeling of Unsteady Flow Regimes of Anomalously Thermoviscous Liquids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46, No. 5. P. 2172-2182.

Дельта-субгармонические функции на открытом полукольце конечного гамма-роста

Наумова А.А.

Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Следуя работе [1], определим коэффициенты Фурье дельта-субгармонической функции $v \in \delta S(R)$ в полукольце $D_+(R) = \{z : R < |z| < \infty, \Im z > 0\}$ равенством:

$$c_k(r,v) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi v(re^{i\theta})\sin k\theta\, d\theta, & \text{если} \quad r \geq 2R,\ k \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi v((r-R)e^{i\theta})\sin k\theta\, d\theta, & \text{если } R < r \leq 2R,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Введем понятие дельта-субгармонической функции конечного (γ_1, γ_2)-типа на $D_+(R)$, которое описывает рост функции как в окрестности бесконечной точки, так и в окрестности дуги $L_R = \{z : z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Обозначим через

$$T_\infty(r,v) := m_\infty(r,v) + N_\infty(r,v), \quad r > 2R\,,$$
$$T_R(r,v) := m_R(r,v) + N_R(r,v), \quad R < r \leq 2R\,,$$

где $m_\infty, N_\infty, m_R, N_R$ — характеристики роста в окрестности бесконечности и дуги L_R.

Пусть γ_1 — функция роста. Дельта-субгармоническая функция v называется функцией конечного γ_1-типа в окрестности ∞ ($v \in \delta S_\infty(R, \gamma_1)$), если существуют постоянные A_1 и $B_1 > 0$ такие, что $T_\infty(r,v) \leq A_1\gamma_1(B_1 r)$ для всех r, $r > 2R$. Пусть γ_2 — функция роста. Функция $v \in \delta S(R)$ называется функцией конечного γ_2-типа в окрестности дуги L_R ($v \in \delta S_{L_R}(R, \gamma_2)$), если существуют постоянные A_2 и $B_2 > 0$ такие, что $T_R(r,v) \leq A_2\gamma_2\left(\frac{B_2}{r-R}\right)$ для всех r, $R < r \leq 2R$.

Найдены критерии конечного γ_1-типа в окрестности ∞ и конечного γ_2-типа в окрестности дуги L_R дельта-субгармонической функции.

Теорема. Пусть $v \in \delta S(R)$, $\lambda_v = \lambda_v^+ - \lambda_v^-$ — полная мера функции v, γ_1 — функция роста. Следующие два утверждения эквивалентны:

1) $v \in \delta S_\infty(R, \gamma_1)$;

2) мера λ_v^+ и мера λ_v^- имеют конечную γ_1-плотность в окрестности ∞ и для всех r, $r \geq 2R$, при некоторых положительных A, B выполняется неравенство

$$|c_k(r, v)| \leq Ar\gamma_1\left(Br\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема. Пусть $v \in \delta S(R)$, $\lambda_v = \lambda_v^+ - \lambda_v^-$ — полная мера функции v, γ_2 — функция роста. Следующие два утверждения эквивалентны:

1) $v \in \delta S_{L_R}(R, \gamma_2)$;

2) мера λ_v^+ (или мера λ_v^- имеет конечную γ_2-плотность в окрестности полуокружности L_R и для всех r, $R < r \leq 2R$, при некоторых положительных A и B выполняется неравенство

$$|c_k(2r, v)| \leq \frac{A}{r-R}\gamma_2\left(\frac{B}{r-R}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

[1] Малютин К.Г. Ряды Фурье и $\delta-$субгармонические функции конечного $\gamma-$типа в полуплоскости // Мат. сб., **192**:6 (2001), 843–861.

Экстремальные задачи в классах мероморфных функций на полуплоскости порядка $\rho > 0$ относительно модельной функции

Нефёдова А.А.

Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Рассматривается задача об оценке снизу отношения характеристик роста относительно модельной функции γ [1] мероморфной функции f на полуплоскости. Предполагается, чтовыполняется условие $\gamma(2r) \leq A\gamma(r)$ при некотором $A > 0$. Пусть $\lambda = \lambda_f$ — полная мера функции f, $\lambda_f = \lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — разложение Жордана меры λ_f.

Положим $m(r, f) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\pi \ln^+|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\, d\varphi$, $\widehat{N}(r, f) := \displaystyle\int_1^r \frac{\lambda_-(t)}{t^2}\, dt$, $\widetilde{N}(r, f) = \displaystyle\int_1^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt$, $N(r, f) = \displaystyle\int_{r/2}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt$, $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) + m\left(r/2, 1/f\right)$, если $\rho \leq 1$, $T(r, f) = m(r, f) + \widetilde{N}(r, f) + m\left(1, 1/f\right)$, если $\rho \geq 1$.

Функция $f \in JM$ называется функцией конечного порядка относительно модельной функции роста γ, если

$$\rho_f = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln(T(r, f))}{\ln\gamma(r)} + 1 < \infty.$$

Пусть

$$0 < \rho_\gamma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \gamma(r)}{\ln r} < \infty\,.$$

Число $\rho = \rho_\gamma \cdot \rho_f$ называется обобщенным порядком функции f относительно модельной функции γ.

Теорема. Пусть $0 < \rho < \infty$ — обобщенный порядок мероморфной функции f Тогда

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\widehat{N}(r,f)+\widehat{N}(r,1/f)}{m_1(r,f)} \geq \frac{|\sin \pi\rho|}{\rho(\rho+1)} \sqrt{1 \Big/ \left(1-\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right)}\,, \tag{1}$$

и это неравенство точное, т.е. для некоторой мероморфной функции f в (1) справедливо равенство.

[1] Хабибуллин Б.Н. Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета, **5:1 (2020), 1–5.**

Собственные значения задачи устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале с учетом возмущения по температуре

Низамова А.Д.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Классическая теория гидродинамической устойчивости основывается на модели жидкости с постоянной вязкостью [1]. Однако для решения многих прикладных задач необходимо учитывать влияние температурных полей. Актуальность таких исследований подтверждается их важностью для различных технологий, например, при течении хладагентов или использовании жидкометаллических теплоносителей в судовых энергоустановках [2].

В настоящей работе рассматривается течение несжимаемой жидкости в плоском канале с нагреваемой верхней стенкой и экспоненциальной зависимостью вязкости жидкости от температуры. Параметр, определяющий зависимость вязкости жидкости от температуры назовем параметром термовязкости. Получена система двух дифференциальных уравнений, содержащих обобщенное уравнение Орра-Зоммерфельда и уравнение относительно возмущения температуры для исследования устойчивости течения в плоском канале. В результате проведенных исследований построены спектры собственных значений для течения различных модельных жидкостей в плоском канале с учетом возмущения по температуре. Показано, что спектры могут иметь как схожую структуру в случае без учета температурного возмущения, так и отличную от нее.

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданиям FMRS-2024-0001, FMRS-2026-0012.

[1] Drazin P.G. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press. Cambridge, 2002.

[2] Боришанский В.М., Кутателадзе С.С., Новиков И.И., Федынский О.С. Жидкометаллические теплоносители. М.: Атомиздат, 1976.

Распределение нулей ортогональных многочленов с кубическим потенциалом в закритическом режиме

Новокшенов В.Ю.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Для многочленов $Q_n(z) := z^n + \ldots$, определяемых трехчленными рекуррентными соотношениями порядка $p+1$:

$$Q_{n+1} = zQ_n - a_{n-p+1}Q_{n-p}, \quad p \geq 1,$$

с зависящими от параметра N коэффициентом $a_n \equiv a_{n,N}$ (varying recurrence coefficient), найдены распределения нулей в квизиклассическом режиме при $n \to \infty, \frac{n}{N} \to t$, и $a_{n,N} \to a(t)$. Эти распределения существенно различны при $t < t_{crit}$ и при $t > t_{crit}$. Вычисление величины t_{crit} и докритическое распределение нулей было выполнено ранее. Показано, что закритическое (при $t > t_{crit}$) рождение нулей порождает ветвящиеся структуры в комплексной плоскости, сходные с фракталями. Результаты применены к задаче о лапласовском росте и распределении собственных значений ансамблей нормальных случайных матриц.

Резонансная эллиптическая краевая задача с разрывной нелинейностью в $\mathbb{R}^N$

Павленко В.Н.
ЧелГУ, г.Челябинск, Россия

Рассматривается эллипитическая краевая задача

$$\begin{gathered} -\Delta u + u = \lambda_k h(x) \cdot u(x) + g(x, u(x)), \\ x \in \mathbb{R}^N,\ N \geq 3,\ u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^N), \end{gathered} \tag{1}$$

где λ_k — k-е собственное значение задачи

$$-\Delta u + u = \lambda h(x) \cdot u(x),\ x \in \mathbb{R}^N,\ u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^N),$$

$h(x) > 0$ п.в. на $\mathbb{R}^N$, $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Предполагается, что
(g1) функция $g(x,u)$ суперпозиционно измерима на $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$;
(g2) для п.в. $x \in \mathbb{R}^N$ функция $g(x,\cdot)$ для каждого $u \in \mathbb{R}$ имеет односторонние конечные пределы $g(x,u-)$ и $g(x,u+)$,
причём $g(x,u) \in [\underline{g}(x,u), \overline{g}(x,u)]$, где $\underline{g}(x,u) = \min\{g(x,u-), g(x,u+)\}$, $\overline{g}(x,u) = \max\{g(x,u-), g(x,u+)\}$;
(g3) существует $\mathcal{L} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ положительная п.в. на $\mathbb{R}^N$ такая, что для п.в. $x \in \mathbb{R}^N$ $|g(x,u)| \le \mathcal{L}(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$;
(g4) $\lim\limits_{\|v\|\to+\infty, v\in N_{\lambda_k}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(x,v(x))\,dx = +\infty$ или $-\infty$, где N_{λ_k} — собственное подпространство ассоциированное с собственным значением λ_k, $G(x,t) = \int\limits_0^t g(x,\tau)\,d\tau$.

Вариационным методом, базирующимся на понятии квазипотенциального оператора (см. [1]), получен следующий результат.

Теорема. Пусть выполнены условия (g1)–(g4). Тогда задача (1) имеет обобщённое слабое решение.

В случае, когда функция $g(x,u)$ непрерывна на $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, задача (1) изучалась в [2].

[1] Павленко В.Н. Вариационный метод для эллиптических систем с разрывными нелинейностями / В. Н. Павленко, Д.К. Потапов // Матем. сб., 2021. – Т 212. – N5. – С. 133–152.

[2] Garcia A.R.G. Existence of solutions for a problem of resonance using variational method / A.R.G. Garcia, M.D. Sautos, A.D.D. Neto // Differ. Equ. Dyn. Syst., 2012. – V20. – N2. – P. 161–178.

Краевая задача для уравнения высокого порядка на $\mathbb{R}$

Скрипка Н.М.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть $P_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} c_j\lambda^j$, $Q_\varsigma(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varsigma} d_j\lambda^j$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0,1,\ldots,\varrho \in \mathbb{N}_0$, $c_\varrho \neq 0$, $d_j \in \mathbb{C}$, $j = 0,1,\ldots,\varsigma \in \mathbb{N}_0$, $d_\varsigma \neq 0$, $\varrho \ge \varsigma$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(\xi) := \sum_{|q|\le 2r} a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}},\ \ a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(\xi) := \sum_{|q|\le r_l} b_{lq}(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}},\ \ b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1,2,\ldots,r.$$

Пусть оператор Λ в пространстве $\mathfrak{X} = H^{2r\varrho}(\Omega)$ определен на множестве $H^{2r\varrho}(\Omega)$, его спектр ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций этого оператора, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$, занумерованным по невозрастанию с учетом их кратностей.

Теорема [1]. Пусть $\varrho \geq \varsigma$, $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$a < b < -\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{Q_\varsigma(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)}\right|\right)^{1/m} \text{ или } \left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{Q_\varsigma(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)}\right|\right)^{1/m} < a < b,$$

$P_\varrho(\Lambda)^{-1}h \in C^1_{a,b}(\mathbb{R};\mathfrak{X})$. Тогда существует единственное решение задачи

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}P_\varrho(\Lambda)u(\xi,t) = Q_\varsigma(\Lambda)u(\xi,t) + h(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

$$B_l\Lambda^k u(\xi,t) = 0, \ k = 0,1,\ldots,\varrho-1, \ l = 1,2,\ldots,r, \ (\xi,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}.$$

Оно имеет вид

$$u(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\omega(t-s)}d\omega\langle h(\cdot,s),\varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}ds}{(-i\omega)^m P_\varrho(\lambda_k) - Q_\varsigma(\lambda_k)}\varphi_k(\xi).$$

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002.

[1] Fedorov, V.E., Shishatskaya, P.S., Skripka, N.M. Study of a Class of High-Order Equations on R by Two-Sided Laplace Transform. Lobachevskii Journal of Mathematics, 45(9), 4500-4507

О простейших решениях векторного нелинейного уравнения Шредингера

Смирнов А.О., Приходько М.М.

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, г.Санкт-Петербург, Россия

С увеличением числа компонент векторного нелинейного уравнения Шредингера

$$i\partial_t\mathbf{p} + \partial_x^2\mathbf{p} - 2|\mathbf{p}|^2\mathbf{p} = 0$$

растет род спектральных кривых, ассоциированных с многофазными решениями, а также увеличивается число параметров, от которых зависят спектральные кривые и многофазные решения. Это приводит к появлению нелинейных волн с одной и той же эволюцией и разными профилями. Чем больше количество компонент, тем большее разнообразие профилей.

Например, однофазные решения N-компонентного нелинейного уравнения Шредингера, ассоциированы со спектральной кривой рода N, а величина

$u = 2|\mathbf{p}|^2$ в общем случае является g-зонным потенциалом оператора Шредингера, где $g \leq N$, или его вырождением. Таким образом, даже в случае решений в виде бегущих волн, профили компонент могут быть достаточно разнообразными. Вместе с тем, существуют значения параметров, при которых соответствующие функции перестают удовлетворять уравнению, т.е. перестают быть решениями. Поскольку параметры спектральных кривых зависят от начальных данных, то существуют области начальных данных, при которых построенные решения с течением времени перестают удовлетворять уравнениям. Случай $N = 2$ был нами рассмотрен ранее в работах [1] – [3].

[1] Smirnov A.O., Gerdjikov V.S., Matveev V.B. *From generalized Fourier transforms to spectral curves for the Manakov hierarchy. II. Spectral curves for the Manakov hierarchy.* ur. Phys. J. Plus, 2020, V.135, 561.

[2] Smirnov A.O., Caplieva A.A. *The vector form of Kundu-Eckhaus equation and its simplest solutions.* Уфимский математический журнал, 2023, V.15, no.3, 151-166.

[3] Смирнов А.О., Сугак Д.В. *Система Манакова и фуксовы уравнения* Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия, 2025, Т.12 (70), вып.2, С.269-285.

Типичные с точки зрения математической теории катастроф особенности решений пространственно двумерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами

Сулейманов Б.И.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Описаны сингулярности решений, рассматриваемые как типичные с точки зрения математической теории катастроф особенности преобразования Лежандра гладких решений нелинейного дифференциального уравнения, двойственного относительно данного преобразования пространственно двумерному линейному волновому уравнению с постоянными коэффициентами

$$U_{TT} = U_{XX} + U_{YY}.$$

Показано, что генотипы таких особенностей, соответствующими росткам в нуле функций

$$A_k : x^{k+1},$$

$$D_4^{\pm} : x^2 y \pm y^3,$$

а также функций

$$D_5^{\pm} : x^2 y + y^4,$$

и, что особенно примечательно,

$$E_6 : x^3 + y^4.$$

Обсуждается гипотеза о том, что подобными генотипами будут обладать и типичные сингулярности пространственно двумерных нелинейных волновых уравнений (таких, как например, уравнение Хохлова – Заболоцкой, эквивалентного бездисперсионному пределу $U_{TX} + U_{YY} = (U^2)_{XX}$ интегрируемого уравнения Кадомцева-Петвиашвили $U_{TX}+U_{YY}+U_{XXXX} = (U^2)_{XX}$), линеаризации которых сводятся к линейному волновому уравнению с постоянными коэффициентами. (Подобное наследование генотипов типичных особенностей, как установлено в [1] , имеет место в пространственно одномерном случае.)

Доклад основан на совместном с А.М. Шавлуковым исследовании.

[1] Сулейманов Б. И., Шавлуков А. М. О наследовании решениями уравнений движения изоэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового уравнения. Математические заметки. 2022. Т. 112, Вып. 4. С. 625 – 640.

Восстановление векторного поля на плоскости по данным его экспоненциального преобразования Радона в случае неполного углового диапазона

Сысоев С.Е.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ определим экспоненциальное векторное преобразование Радона

$$g_1(\theta,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu t}\langle f(p\theta + t\theta^\perp), \theta^\perp\rangle dt$$

и экспоненциальное нормальное преобразование Радона

$$g_2(\theta,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu t}\langle f(p\theta + t\theta^\perp), \theta\rangle dt,$$

где $\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{S}^1$, $\theta^\perp = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, $p \in \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Коэффициент поглощения $\mu \equiv const > 0$. В [1] получена явная формула для восстановления f в случае, когда функции $g_1(\theta,p)$ и $g_2(\theta,p)$ заданы на множестве $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Как правило, в приложениях функции $g_1(\theta,p)$ и $g_2(\theta,p)$ бывают известны лишь для θ, принадлежащих некоторому подмножеству $U \subset \mathbb{S}^1$. В этом случае говорится о неполном угловом диапазоне. Предложен метод однозначного восстановления функций $div f$ и $curl_\perp f(x) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}$ по данным $g_1(\theta,p)$ и $g_2(\theta,p)$ при условии, что обе эти функции заданы на множестве $U \times \mathbb{R}$, где $U = (-\varphi_0, \varphi_0), 0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Метод основан на применении формулы интерполяции значений целой функции экспоненциального типа, заданной на кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, которая получена в [2]. Проанализирована устойчивость описанного алгоритма решения рассматриваемой задачи по отношению к возможным ошибкам в данных. Показано, что алгоритм восстановления является условно корректным.

[1] С.Е. Сысоев, Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения. Сборник материалов Международной конференции. Уфа, 2025, с. 45-46.

[2] С.Е. Сысоев, Успехи мат. наук, 51 (1994), No 2, с. 171-172.

Моделирование параметров времяпролетного монохроматора электронов

Туктаров Р.Ф., Щукин П.В., Ахметьянов Р.Ф.
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Создание монокинетизированных электронных пучков является важной задачей приборостроения. В работе [1] был предложен способ монохроматизации, основанный на селективном ускорении электронов различных энергий переменным электрическим полем. Было установлено, что потенциал должен изменяться по гиперболическому закону. В настоящей работе выполнено моделирование работы времяпролетного монохороматора с учетом реальных характеристик. При построении модели было проведено последовательное приближение, включающее учет следующих факторов: 1) конечную длительность запускающего импульса, 2) наличие сил кулоновского расталкивания, 3) влияние фокусирующего магнитного поля. Показано, что для конечного распределения с шириной на полувысоте менее 0.1 эВ, длительность запускающего импульса должна быть менее 1 нс. Малая скважность запускающих импульсов неизбежно ведет к уменьшению среднего выходного электронного тока, поэтому требуется значительное увеличение электронного тока на входе. Значительный заряд электронного пакета приводит к кулоновскому расталкиванию электронов, и, соответственно, ускорению «быстрых» электронов и замедлению «медленных». Уменьшить влияние этого эффекта предполагается за счет модифицирования гиперболической формы ускоряющего потенциала с помощью расчетной корректирующей функции.

[1] Р.Ф. Туктаров, Р.В. Хатымов, П.В. Щукин, Р.Ф. Ахметьянов. Сборник материалов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» 2025, с. 48.

Формула следа возмущения оператора Лапласа на квадрате.

Фазуллин З.Ю.
Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассмотрим оператор $L_0u = -\Delta u$ с краевыми условиями Дирихле в пространстве $L^2(K)$, где $K = \{(x, y), \quad 0 \le x, y \le \pi\}$. Хорошо известно, что спектр оператора L_0 состоит из собственных чисел $\lambda_{km} = k^2 + m^2$, $k, m = 1, 2, ...,$ и $f_{km}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin kx \sin my$ соответствующие им ортонормированные собственные функции. Пусть V – оператор умножения на ограниченную, измеримую функцию $v(x, y)$, действующий в $L^2(K)$ и $L = L_0 + V$ возмущенный оператор с граничными условиями Дирихле на K.

Пусть $v(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y)$, тогда $L = L_0 + V$ есть сумма двух операторов $L_i, \quad i = 1, 2$:

$$L_i = -f''(t) + v_i(t)f(t), \quad f(0) = f(\pi) = 0, \quad i = 1, 2.$$

$\sigma(L_i) = \left\{\mu_k^{(i)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ – спектр оператора $L_i, \quad i = 1, 2$, $f_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt$ – собственные функции оператора, $M_0f(t) = -f''(t)$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

Положим $\rho(n_l + 0) = \sum\limits_{k^2+m^2 \le n_l} [\lambda_{km} + (V f_{km}, f_{km}) - \mu_{km}]$,

μ_{km} – собственные числа оператора L.

Теорема 1. Пусть $v(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$, $v_i \in W_2^2(0, \pi)$. Тогда

а) при каждом фиксированном натуральном z

$$\lim_{\mathbb{N}\ni l\to\infty} \rho(l^2 + z + 0) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{[\sqrt{z}]} \left(k^2 + (v_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}\right) +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_K v^2(x, y)dxdy - \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_K v(x, y)dxdy\right)^2\right].$$

б) $\exists$ подпоследовательность $z_l \to \infty$, $z_l \le 2l + 1$, что

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho\left(l^2 + z_l + 0\right) = \frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_K v^2(x, y)dxdy - \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_K v(x, y)dxdy\right)^2\right].$$

[1] Фазуллин З.Ю.// Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. №12. С. 1712-1715.

Локализованные решения уравнения φ^4 в модели с несколькими примесями

Фахретдинов М.И., Екомасов Е.Г.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

В нашей работе исследуется нелинейное дифференциальное уравнение φ^4 (1) с пространственными неоднородностями (примесями) $K(x)$.

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \tag{1}$$

Рассматривались два вида функций $K(x)$. Первая из них бралась в виде двух точечных примесей, расположенных на расстоянии d друг от друга, описываемых с помощью дельта-функций Дирака:

$$K(x) = 1 - \varepsilon\delta(x) - \varepsilon\delta(x - d). \tag{2}$$

Вторая функция $K(x)$ бралась в виде трех точечных примесей, расположенных на расстоянии d друг от друга:

$$K(x) = 1 - \varepsilon\delta(x) - \varepsilon\delta(x - d) - \varepsilon\delta(x - 2d). \tag{3}$$

С помощью метода коллективных переменных, получена система дифференциальных уравнений, описывающие амплитуды примесных мод. Анализ решений уравнения (1) для этих видов неоднородностей показал, что для случая двух примесей (2) возможны связанные синфазные и антифазные колебания локализованных на примесях волн, как частный случай, и биения, как общий случай. Получена зависимость частот примесных мод от расстояния между примесями. Проведенное прямое численное исследование (1) показывает хорошее согласие с аналитическими результатами, полученными методом коллективных переменных [1].

Анализ решений уравнения (1) для случая трех примесей (3) показал, что возможны три типа колебательных мод, из которых вторая и третья обладают порогом локализации по частоте ($\omega < \sqrt{2}$): они вносят вклад в динамику лишь при превышении критического расстояния между примесями d. Сравнение с численным расчетом показало хорошее согласие для больших расстояний между примесями d и некоторое расхождение при малых d.

[1] Fakhretdinov M. I., Kabanov D. K., Ekomasov E. G., Localized Waves of the φ^4 Equation in the Model with Two-Point Impurities, Rus. J. Nonlin. Dyn., 2025, Vol. 21, no. 3, pp. 419-432

Принципы субординации по параметрам для уравнений с производной Хилфера

Федоров В.Е., Скорынин А.С.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, для линейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$, $D^{\alpha,\beta}z$ — дробная производная Хилфера, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, т. е. линейный замкнутый плотно определенный в $\mathcal{Z}$ оператор.

Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется разрешающим семейством типа $\omega \geq 0$ для уравнения (1), если

(i) $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Kt^{-(1-\beta)(m-\alpha)}e^{\omega t}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ сильно непрерывно на $\mathbb{R}_+$, при этом $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} J^{(1-\beta)(m-\alpha)}S(t) = I$;

(iii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ при всех $z_0 \in D_A$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(iv) для любого $z_0 \in D_A$ функция $S(t)z_0$ является решением задачи типа Коши $D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_0$, $D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения (1).

Здесь $D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}$ дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $(1-\beta)(m-\alpha)$, $D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = 0$ — дробные производные Римана — Лиувилля порядка $k-(1-\beta)(m-\alpha)$, $k = 1, 2, \dots, m-1$.

Необходимые и достаточные условия существования разрешающего семейства операторов уравнения (1) в терминах резольвенты оператора A найдены в [1]. В данной работе показано, что если существует разрешающее семейство операторов уравнения (1) с производной Хилфера D^{α_1,β_1}, $\alpha_1 \in (0,2]$, $\beta_1 \in [0,1]$, то существует аналитическое разрешающее семейство операторов уравнения (1) с производной Хилфера D^{α_2,β_2}, $\alpha_2 \in (0,\alpha_1)$, $\beta_2 \in [0,1]$. Такое утверждение представляет собой принцип субординации по порядку производной Хилфера.

Кроме того, доказано, что если существует разрешающее семейство операторов уравнения (1) с производной Хилфера D^{α,β_1}, $\alpha \in (0,2]$, $\beta_1 \in [0,1]$, то существует и разрешающее семейство операторов уравнения (1) с производной Хилфера D^{α,β_2}, $\beta_2 \in (\beta_1,1]$. Это утверждение — принцип субординации по типу производной Хилфера.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Fedorov V.E., Du W.-S., Kostic M., Plekhanova M.V., Skorynin A.S. Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative // Fractal and Fractional. 2025. Vol.9. P.81.

Один класс возмущенных уравнений с дробной производной Хилфера

Федоров В.Е., Быков А.А.
Челябинский Государственный университет, г. Челябинск, Россия
Югорский Государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Россия

Дробное интегро-дифференциальное исчисление в последние годы активно используется в задачах математического моделирования. Его активно развивающимся направлением является теория разрешающих семейств операторов для уравнений с дробными производными в банаховых пространствах.

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Символом $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ будем обозначать банахово пространство всех линейных ограниченных операторов на пространстве $\mathcal{Z}$, а через $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$ и действующих в это пространство.

При $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $\beta\in[0,1]$, $\omega\in\overline{\mathbb{R}}_+$ оператор $A\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ будем называть оператором класса $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$, если выполняются следующие два условия:

(i) если $\mathrm{Re}\lambda>\omega$, то $\lambda^\alpha\in\rho(A):=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu-A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) существует такое $K\in\mathbb{R}_+$, что при всех $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ и $n\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha-A)^{-1}\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leq\frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}.$$

В работе [1] показано, что существует разрешающее семейство операторов уравнения $D^{\alpha,\beta}z(t)=Az(t)$, где $D^{\alpha,\beta}z(t)$ — производная Хилфера, в том и только в том случае, когда $A\in\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$.

Рассмотрим задачу Коши для возмущенного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t)=(A+B)z(t),$$

где $A\in\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$, $B\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Теорема. Пусть $\alpha\in(1,2)$, $\beta\in[0,1]$, $A\in\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega)$, $B\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Тогда $A+B\in\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K_2,\omega+K^{1/\alpha}\|B\|^{1/\alpha}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))^{1/\alpha})$ при некотором $K_2>1$.

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/.

[1] Fedorov V.E., Du W.-S., Kostic M., Plekhanova M.V., Skorynin A.S. Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative // Fractal and Fractional. 2025. Vol.9. P.81.

Конечно порождённые идеалы и подмодули в функциональных алгебрах и модулях

Хабибуллин Б. Н.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Исследование строения и структуры идеалов и подмодулей, например, над кольцом многочленов, в различных функциональных пространствах вещественно- или комплекснозначных функций представляет не только внутренний интерес, но и через различные двойственные схемы находит широкие применения в исследованиях пространств решений однородных уравнений свертки, в частности, дифференциальных и разностных уравнений, задачах спектрального синтеза и пр. [1], [2]. Выделяются как чисто алгебраический аспект, так и топологический — последнее в случае функциональных пространств, наделённых топологией, и тогда рассматриваются, как правило, уже замкнутые идеалы и подмодули. Для различных алгебр функций или модулей, в основном над кольцом многочленов, будут обсуждены следующие два вопроса:

1) Когда каждый (замкнутый) идеал или подмодуль главный или конечно порождённый, в частности, 2-порождённый (см. [3]– [5])?

2) Построение специальных контрпримеров, например, как в [6], по ряду вопросов, связанных с предыдущей общей задачей.

[1] И. Ф. Красичков-Терновский, Абстрактные приемы локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций // Матем. сб., **181**:12 (1990), 1640–1658.

[2] И. Ф. Красичков-Терновский, Спектральный синтез и локальное описание для многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем., **63**:4 (1999), 101–130.

[3] Н. Ф. Абузярова, “Конечно порожденные подмодули в модуле целых функций, определяемом ограничениями на индикатор”, Матем. заметки, **71**:1 (2002), 3–17.

[4] Б. Н. Хабибуллин, Замкнутые идеалы голоморфных функций с двумя порождающими // Матем. заметки, **76**:4 (2004), 604–609.

[5] Б. Н. Хабибуллин, Замкнутые подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Функц. анализ и его прил., **38**:1 (2004), 65–80.

[6] B. Khabibullin, E. Menshikova, On the intersection of principal ideals in function spaces, 2019, 5 pp., https://arxiv.org/abs/1903.00887

Граничные условия в лагранжевых теориях поля.

Шарипов Р.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия.

Принцип наименьшего действия широко и успешно применяется в лагранжевых теориях. Например для классических, то есть не квантовых, версий калибровочных полей, отвечающих за сильное, слабое и электромагнитное взаимодействие в Стандартной модели строения элементарных частиц, см. [1]. Другой пример — это описание динамики нелинейных релятивистских упругих сред в Модели вселенной как 3D-браны, см. [2].

В перечисленных выше примерах поля считаются гладкими, то есть не имеющими разрывов во всех порядках по производным. Однако на практике различные среды, формирующие эти поля, могут быть разделены границами. Например, границей между металлами в биметаллической пластине или границей космического аппарата, отделяющей его от окружающего вакуума. Специально для таких случаев в работе [3] принцип наименьшего действия был расширен на случай полей, разделённых границами и описываемых различными плотностями лагранжианов по разные стороны от границ. Это позволило вывести граничные условия для полей на границах раздела сред.

Обычно в физике граничные условия для полей выписываются на основе законов физики и физической интуиции. Подход, применённый в [3], позволит получить граничные условия для полей даже в случае релятивистских сред в новых нестандартных теориях, когда физическая интуиция, выработанная в классической физике, может давать сбой, а новая интуиция ещё не выработана.

[1] Рубаков В. А., Классические калибровочные поля. Изд-во «Эдиториал УРСС», Москва, 1999.

[2] Sharipov R. A., Relativistic elasticity in the 3D-brane universe model. Part 1., ResearchGate publication № 388315101, 2025, DOI: 10.13140/RG.2.2.28837.61920.

[3] Sharipov R. A., Boundary conditions in Lagrangian field theories, ResearchGate publication № 393645020, 2025, DOI: 10.13140/RG.2.2.14737.34403.

Научное издание

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник материалов Международной научной конференции (9–13 марта 2026 г.)

Подписано в печать 27.02.2026г. Формат 60x90/16.
Печать: цифровая.
Усл. печ. л. 3,20. Тираж 50. Заказ 2603

АЭТЕРНА
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»
450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120
https://aeterna-ufa.ru
info@aeterna-ufa.ru
+7 (347) 266 60 68