МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

***Сборник материалов Международной научной конференции (17 – 21 марта 2025 г.)***

**УФА**
**АЭТЕРНА**
**2025**

УДК 51
ББК 22.1
К 637



К637 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (17 – 21 марта 2025 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2025. – 58 с**

ISBN 978-5-00249-223-7

Представленные в сборнике тезисы посвящены различным областям фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются различные постановки нелинейных задач. Также рассматриваются задачи теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными и задачи физико-химическая механики многофазных сред.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1
ISBN 978-5-00249-223-7

# Содержание

**Задача типа Коши для некоторых квазилинейных уравнений с производными Римана — Лиувилля**

**Авилович А.С., Карпенко Д.Н., Пестерев И.Н.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $D^\alpha$ — дробная производная Римана — Лиувилля, $q\in\mathbb{N}$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\le n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\ne\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$. Некоторые $\gamma_i$ могут быть отрицательными. Пусть $i_0:=\min\{i\in\{1,2,\dots,q\}:\gamma_i>0\}$, если $\{i\in\{1,2,\dots,q\}:\gamma_i>0\}$ не пусто, при $\gamma_q\le 0$ будем считать, что $i_0:=q+1$. Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $D_A\subset\mathcal{Z}$ — область определения линейного замкунтого оператора $A:D_A\to\mathcal{Z}$, снабженная его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A}=\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}+\|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$.

**Определение.** Пусть $\theta_0\in(0,\pi/2)$, $a_0\ge 0$. Через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$ обозначим класс операторов $A\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия
(i) для любого $\lambda\in S_{\theta_0,a_0}:=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a_0)|<\theta,\ \mu\ne a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha\in\rho(A)$;
(ii) для любых $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$, $a\ge a_0$ найдется такое $K=K(\theta,a)>0$, что $\forall\lambda\in S_{\theta,a}\quad\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le\frac{K(\theta,a)}{|\lambda|^\alpha}$.

Рассмотрим уравнение

$$D^\alpha z(t)=Az(t)+B(t,D^{\alpha-m-\varrho}z(t),D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t),\dots,$$
$$D^{\alpha-1}z(t),D^{\gamma_1}z(t),\dots,D^{\gamma_q}z(t)).\qquad(1)$$

Определим $\underline{\gamma}:=\max\{\gamma_i:\gamma_i-m_i<\alpha-m,\ i=1,2,\dots,q\}$, $\underline{n}:=\lceil\underline{\gamma}\rceil$, $\overline{\gamma}:=\max\{\gamma_i:\gamma_i-m_i>\alpha-m,\ i=1,2,\dots,q\}$, $\overline{n}:=\lceil\overline{\gamma}\rceil$, $n^*:=\max\{\underline{n}-1,\overline{n}\}$. В работе [1] $n^*$ называется дефектом задачи типа Коши. Для исследования уравнения (1) потребуется существование конечных пределов $\lim\limits_{t\to t_0}D^{\gamma_i}z(t):=D^{\gamma_i}z(t_0)$, $i=1,2,\dots,q$, поэтому определим $\mu^*:=\max\{n^*+1,0\}$, будем рассматривать задачу

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0)=0,\ k=0,1,\dots,\mu^*-1,$$
$$D^{\alpha-m+k}z(t_0)=z_k,\ k=\mu^*,\mu^*+1,\dots,m-1.\qquad(2)$$

Обозначим $\overline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_{m+\varrho+q})\in\mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$.

**Теорема.** Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\le n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\ne\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D_A$, $k=\mu^*,\mu^*+1,\dots,m-1$, $B\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^{m+\varrho+q};D_A)$ липшицево по $\overline{x}$ в норме $D_A$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение на $[t_0,T]$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00100, https://rscf.ru/project/24-71-00100/

[1] Федоров В.Е., Туров М.М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля. *Сиб. мат. журн.* 2021;62(5):1143–1162.

## Полиномиальные интегралы высокой степени геодезических потоков и обобщенный метод годографа

**Агапов С.В.**
ИМ СО РАН, НГУ, г.Новосибирск, Россия

Исследуются интегрируемые двумерные геодезические потоки, обладающие дополнительным полиномиальным по импульсам первым интегралом высокой степени. Задача построения таких интегралов сводится к поиску решений некоторых полугамильтоновых квазилинейных систем уравнений в частных производных ( [1]— [3]). При помощи обобщенного метода годографа мы строим новые интегрируемые примеры с полиномиальными интегралами степеней 3, 4, 5 ( [4]).

[1] Царев С.П., Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа. Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:5 (1990), 1048 – 1068.

[2] Bialy M.L., Mironov A.E., Rich quasi-linear system for integrable geodesic flows on 2-torus. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 29:1 (2011), 81 – 90.

[3] Pavlov M.V., Tsarev S.P., On local description of two-dimensional geodesic flows with a polynomial first integral. J. Phys. A — Math. Theor., 49:17 (2016), 175201.

[4] Agapov S., Local high-degree polynomial integrals of geodesic flows and the generalized hodograph method, arXiv:2411.18920v2.

**Localized excitations in DNLS equation with competing nonlinearities: bifurcations and stability**

**G. L. Alfimov[a,b], P. A. Korchagin[a], D. E. Pelinovsky[c] and F. Kh. Abdullaev[d]**

[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;
[b] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia;
[c] McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada;
[d] Physical-Technical Institute of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

We study nonlinear excitations described by DNLS-type equations with so-called competing nonlinearities, of the form

$$i\frac{du_n}{dt} + \alpha\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) - u_n + |u_n|^p\, u_n - \gamma\, |u_n|^q\, u_n = 0, \qquad (1)$$

where $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\alpha > 0$ and $\gamma > 0$. We call the lattice equations of such kind $p : q$*-models*. A peculiarity of $p : q$-models is the presence of two governing parameters: $\alpha$, that describe the coupling between the lattice sites and $\gamma$, that measures the balance between competing powers. Of our primary interest, are the solutions of these discrete equations that are localized on a few lattice sites (so-called intrinsic localized modes (ILM)). The basic example for our study is the $2 : 3$-model that recently has been used to describe BEC in mean field approximation with Lee-Huang-Yang corrections.

Our approach employs numerical continuation from the anti-continuum limit (ACL) where the coupling between the lattice sites is neglected ($\alpha = 0$). We analyze bifurcations of basic ILMs when the coupling parameter $\alpha$ grows. Our study shows that the "most part" of branches originated at ACL bifurcate and do not exist for large values of $\alpha$. Comprehensive tables of bifurcations for the ILMs that involve not more than 3 excited lattice sites are presented. We show that the 2:3-model supports nonsymmetric ILMs that have no counterparts in ACL limit.

We study the branches of ILMs that can be continued unlimitedly when $\alpha \to \infty$ (called here $\infty$-branches). It was found that for any $\gamma$ there are exactly two $\infty$-branches and when $\gamma$ grows these branches undergo a sequence of bifurcations. We compare our results with the results for $1 : 2$-model and $2 : 4$-model (called DNLS-CQ model) and found no qualitative difference in (a) tables of bifurcations, (b) forms of nonsymmetric ILM that have no ACL counterpart and (c) scenario of switching of $\infty$-branches when $\gamma$ varies.

Finally, we studied the stability of the ILMs for $\alpha \ll 1$ and formulate several conditions for their linear stability/instability.

## Оценка электронного сродства молекул $Ir(ppy)_3$ и $Alq_3$ из данных о времени жизни молекулярных отрицательных ионов

**Асфандиаров Н.Л.[1], Муфтахов М.В.[1], Зайцев Н.Л.[1], Пшеничнюк С.А.[1], Кухта А.В.[2]**

[1]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

[2]Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета

Молекула $Ir(ppy)_3$, широко используемая в OLED-устройствах, была исследована методом спектроскопии диссоциативного захвата электронов. В рамках простого приближения Аррениуса сродство к электрону было оценено как 0.78-0.98 эВ. Аналогичные оценки были сделаны для $Alq_3$ с использованием ранее опубликованных данных о времени жизни молекулярных ионов. Сродство к электрону молекулы $Alq_3$, изученной нами ранее [1], было оценено как 0.83-0.94 эВ. Полученные результаты интерпретированы с помощью расчетов в приближении теории функционала плотности на уровне ma-def2-TZVP. Оценка сродства к электрону была выполнена при помощи ранее обнаруженной эмпирической зависимости [2]:

$$\tau_a = \tau_0 exp\left[\frac{N * EA_a}{EA_a + Nk_BT + \varepsilon}\right] \tag{1}$$

Здесь $\tau_0$ – преэкспоненциальный фактор с величиной 100-1000 фс, $N$ – число колебательных степеней свободы, $EA_a$– сродство к электрону, $k_B$ – постоянная Больцмана, $T$ – температура камеры ионизации масс-спектрометра, $\varepsilon$ – энергия электрона.

Расчеты в приближении DFT с базисом ma-def2-TZVP в случае $Alq_3$ $EA_a^{DFT}$=0.87 эВ хорошо согласуются с экспериментальными оценками $EA_a$=0.77-0.87 эВ.

В случае $Ir(ppy)_3$ согласие между расчетом $EA_a^{DFT}$ =0.33 эВ и экспериментальными оценками гораздо хуже $EA_a$=0.82-0.94 эВ. Обсуждаются возможные причины этого расхождения.

[1] Kukhta A.V., Ritchik D.V., Asfandiarov N.L., Fal'ko V.S., Lukin V.G., Pshenichnyuk S.A. Long-lived negative ion formation by Alq3// Int. J. Mass Spectrom., 230, 41-44 (2003).

[2] Asfandiarov N.L., Pshenichnyuk S.A., Vorob'ev A.S., Nafikova E.P., Modelli A. Electron affinity evaluation for nitrobenzene derivatives using negative ion lifetime data // Rapid Commun. Mass Spectr., 29, 910-912 (2015).

**Variational formalism for oscillons and breathers**

**Barashenkov I.V.**
University of Cape Town, South Africa,
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia.

Oscillons are long-lived localised pulsating states in the nonlinear Klein-Gordon equations. We formulate a multiscale variational method for the analysis of oscillons that is free from singularities that marred all previously proposed variational techniques. For the model with a symmetric vacuum, a single-harmonic variational Ansatz provides an excellent agreement with the numerical results. For a model with broken symmetry (the $\varphi^4$ equation), the numerical analysis reveals that the energy-frequency diagram of the standing wave is fragmented into disjoint segments with $\omega_{n+1} < \omega < \omega_n$. In the interval $(\omega_{n+1}, \omega_n)$, the wave develops small-amplitude wings consisting of the $n$-th harmonic radiation ($n = 2, 3, ...$). The variational approximation involving the first, zeroth and second harmonic components provides an accurate description of the oscillon with the frequency in $(\omega_3, \omega_2)$, but breaks down as $\omega$ falls out of that interval.

**Решение системы уравнений, описывающих фильтрацию флюида в трещине гидроразрыва и окружающем трещину пласте**

**Башмаков Р.А., Коробчинская О.Г.**
Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассматривается система уравнений, предложенная в работах [1-3]:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2\frac{m_p}{m_f}\frac{\varkappa_p}{d_f}\left(\frac{\partial P_p}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}, \qquad (0 < x < l)\,,$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \qquad (0 < x < l,\ 0 < y < \infty)\,,$$

Здесь $\varkappa_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$ $(i = f, p)$ –коффициенты пьезопроводности.

$P_f = P_f(t, x)$, и $P_p = P_p(t, x, y)$ – давление в трещине и пласте, соответственно.

В работах [1-4] рассматривались решения этой системы при дополнительном предположении о бесконечной протяженности трещины $l = \infty$. В данной работе длина трещины конечна.

[1] Cinco-Ley, H. Effect of Well bore Storage and Damage on the Transient Pressure Behaviour of Vertically Fractured Wells / H. Cinco-Ley, V.F. Samaniego // SPE 6752. SPE Annual Fall Meeting, Denver, Colorado, 9-12 Oct, 1977. https://doi.org/10.2118/6752-MS

[2] И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2019. – N 5. – С. 6–14.

[3] З.М. Нагаева, В.Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81. – С. 319 – 329.

[4] Shagapov, V.S.; Bashmakov, R.A.; Fokeeva, N.O.; Shammatova, A.A. Evolution of Filtration Pressure Waves in a Hydraulic Fracture during Transient-Well-Operation Modes. Mathematics 2023, 11, 98. https://doi.org/10.3390/math11010098

## Один класс линейных неоднородных уравнений с производной Римана — Лиувилля

**Вершинина Д.А., Федоров В.Е.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Линейный замкнутый плотно определенный в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ оператор $A$ называется оператором класса $\mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$ при некоторой константе $\omega \geq 0$, если выполняются следующие условия:

(i) если $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) существует $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left( \lambda^{m-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K\Gamma(\alpha - m + n + 1)}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{\alpha - m + n + 1}}.$$

Рассмотрим задачу типа Коши для линейного неоднородного уравнения

$$D^{\alpha-2} z(0) = z_0, \quad D^{\alpha-1} z(0) = z_1, \tag{1}$$

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \ \ t \in (0, T], \tag{2}$$

где $\alpha \in (1, 2]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$, $f : [0, T] \to \mathcal{Z}$, $D^\beta$ — дробная производная Римана — Лиувилля при $\beta > 0$, дробный интеграл Римана — Лиувилля при $\beta \leq 0$. Решением задачи (1), (2) назовем такую функцию

$z \in C((0,T];D_A) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$, что $D^{\alpha-2}z \in C^1([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^2((0,T];\mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (2) при $t \in (0,T]$.

Определим для $s > \omega$

$$Z(t) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} H^{(k)}(n+\omega), \quad t > 0,$$

где $H(\lambda) := \lambda^{m-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}$ для $\lambda > \omega$.

**Теорема 1.** Пусть $\alpha \in (1,2]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$, $z_0, z_1 \in D_A$, $f \in L_1(0,T;D_A) \cup W_1^1(0,T;\mathcal{Z})$. Тогда функция

$$z(t) = Z(t)z_0 + J^1 Z(t) z_1 + \int_0^t J^1 Z(t-s) f(s) ds.$$

является единственным решением задачи типа Коши (1), (2).

Работа поддержана Российским научным фондом (грант №24-11-20002) и Правительством Челябинской области.

[1] Fedorov V.E., Vershinina D.A. Strongly continuous resolving families of equations with Riemann–Liouville derivative // Journal of Mathematical Sciences. 2025. Vol.287, no.1. P.52–68.

## On the kernel of the local Radon transform on $SO(3)/O(2)$

**Volchkova N.P., Volchkov Vit.V.**

Donetsk National Technical University, Donetsk State University, Donetsk, Russia

Let $X = SO(3)/O(2)$ be the real projective plane of constant sectional curvature 1. We shall assume that $X$ is realized in the same manner as in [1, Sect. 3.2]. In this case $X = \mathbb{R}^2 \cup A_0$, where $A_0$ is the antipodal manifold of the point $0 \in \mathbb{R}^2$. The distance from 0 to point $x \in X$ is determined by $d(0,x) = \arctan|x|$ if $x \in \mathbb{R}^2$, and $d(0,x) = \pi/2$ if $x \in A_0$.

For $0 \le \delta < \pi/2$, we put $B_{\delta,\infty} = \{x \in X : d(0,x) > \delta\}$. Denote by $\mathcal{R}_\delta$ the set of functions $f \in C^\infty(B_{\delta,\infty})$ having zero integrals over all closed geodesics on $X$ lying in $B_{\delta,\infty}$. We will identify $\mathbb{R}^2$ with the complex plane $\mathbb{C}$.

The main result of the work is the following description of class $\mathcal{R}_\delta$.

**Theorem 1**. Let $f \in C^\infty(B_{\delta,\infty})$ and assume that $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^k(z)$ is the Fourier series of the function $f$ in $B_{\delta,\infty}$, i.e.

$$f^k(z) = \int_{SO(2)} f(\tau z)\tau^{-k} d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad |z| > \tan\delta.$$

Then $f \in \mathcal{R}_\delta$ if and only if the decomposition

$$f^k(z) = |z|^{-k-|k|} z^k \sum_{j=1}^{[|k|/2]} c_j (1+|z|^2)^j, \quad |z| > \tan\delta, \quad c_j \in \mathbb{C}$$

is valid for any $k \in \mathbb{Z}$, where for $|k| \leq 1$ the sum is assumed to be zero.

Regarding the results on the injectivity of the Radon transform over geodesics on compact symmetric spaces, see [2, Chap. IV].

The study was conducted on the topics of the state assignment (registration number: 124012400352-6).

[1] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. New York: Springer, 2009.

[2] Helgason S. Integral Geometry and Radon Transforms. New York: Springer, 2010.

## Теоремы Полиа–Ковари–Хеймана о минимуме модуля и обобщения

**Гайсин А.М.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad p_n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

– целая трансцендентная функция. В докладе речь пойдет о следующей задаче: при каких условиях на распределение точек $p_n$ при $r = |z| \to \infty$ вдоль некоторого асимптотического множества $A \subset \mathbb{R}_+$ выполняется соотношение

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln m_f(r), \tag{2}$$

где $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $m_f(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$.

Будет обращено внимание на развитие основных идей и методов доказательства асимптотического равенства (2) и его обобщений, а также будут указаны применения и сформулирована новая актуальная задача.

## Критерий интерполяционности в смысле Павлова-Коревара-Диксона в терминах сходимости ряда из квазиполиномов

**Гайсин Р.А.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Omega$ — класс вогнутых на $\mathbb{R}_+$ функций $\omega = \omega(r)$, $0 < \omega(r) \uparrow \infty$, $r \to \infty$,

$$\int_1^\infty \frac{\omega(r)}{r^2} dr < \infty.$$

**Определение.** Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, называется *интерполяционной в смысле Павлова-Коревара-Диксона*, если найдется функция $\omega \in \Omega$, зависящая только от $\Lambda$, что для любых $a_n$, $|a_n| \le 1$ ($a_n \in \mathbb{C}$), существует целая функция экспоненциального типа $f$, такая, что:

$$1.\ \ f(\lambda_n) = a_n, \quad n \ge 1; \qquad 2.\ \ M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \le e^{\omega(r)}.$$

Пусть $H : (0,1] \to \mathbb{R}_+$ — убывающая функция, $H(x) \to \infty$ при $x \to 0+$. Функция $H$ удовлетворяет условию Левинсона, если

$$\int_0^1 \ln^+ \ln^+ H(x) dx < \infty. \tag{1}$$

Будем говорить, что *последовательность* $\Lambda$ *подчинена условию Левинсона*, если функция

$$h_+(x) = \int_0^\infty M_L(r) e^{-rx} dx$$

удовлетворяет условию повторного логарифма (1). Здесь

$$M_L(r) = \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|, \qquad L(\lambda) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Пусть последовательность $\Lambda$ подчинена условию Левинсона.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Для того, чтобы последовательность* $\Lambda$ *была интерполяционной в смысле Павлова-Коревара-Диксона, необходимо и достаточно, чтобы последовательность*

$$P_s(z) = \sum_{\nu=1}^{n_s} \frac{a_\nu}{L'(\lambda_\nu)} e^{\lambda_\nu z}, \quad s \geq 1,$$

*при любых* $a_n \in \mathbb{C}$, $|a_n| \leq 1$, $n \geq 1$, *сходилась равномерно внутри полуплоскости* $\Pi_0^- = \{z = x + iy : x < 0\}$, *причем для предельной функции* $P(z)$ *была верна оценка*

$$|P(z)| \leq H(|x|), \quad z = x + iy,$$

*где* $H : (0, 1] \to \mathbb{R}_+$ *— убывающая функция,* $H(t) \to \infty$ *при* $t \to 0+$, *удовлетворяющая условию Левинсона* (1).

Этот результат является дополнением и развитием идей А.Ф. Леонтьева о сходимости последовательностей полиномов из экспонент и о ее связи с интерполяцией (см. [1]).

[1] Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980. — 384 с.

## Равномерная отделимость от нуля характеристики типа Полиа для целого ряда Дирихле

**Гайсина Г.А.**

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\tau = \overline{\lim}_{n\to\infty} n/\lambda_n < \infty$, а ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходится во всей плоскости. Через $D(\Lambda)$ обозначим класс всех функций $F$, представимых во всей плоскости рядами (1). Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \tag{2}$$

то любая функция $F \in D(\Lambda)$ не ограничена на $\mathbb{R}_+$ (см. [1], [2]).

Для последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$, имеющих конечную верхнюю плотность $\tau$ и конечный индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

аналогичное утверждение доказано Н.Н. Юсуповой. Пример более частного характера в 1962 году был построен М.А. Евграфовым (более подробно см. в [2]).

Рассмотрим измененный ряд Дирихле

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}. \tag{3}$$

Если $F \in D(\Lambda)$, то легко заметить, что и $F^* \in D(\Lambda)$. В [2] показано, что если ряд (2) расходится, то существует функция $F \in D(\Lambda)$, для которой

$$d^*(F; \mathbb{R}_+) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln \mu^*(\sigma)} < 0,$$

где $\mu^*(\sigma)$ – максимальный член ряда (3).

Если для последовательности $\Lambda$ выполняется условие (2), причем для некоторой мажоранты $w$ из класса сходимости

$$W = \{\varphi \in C(\mathbb{R}_+) \colon 0 < \varphi(x) \uparrow \infty \text{ при } x \to \infty; \quad \varphi(x)(1+x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)\}$$

наименьшая неубывающая мажоранта $q_0(t)$ последовательности $\{-\ln|L'(\lambda_n)|\}$ подчинена оценке

$$q_0(\lambda_n) \le w(\lambda_n), \quad n = 1, 2, ..., \tag{4}$$

то $d^*(F) = d(F) = 1$ (см. [1]), где $d^*(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d^*(F;\gamma)$, $d(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma)$,

$$d^*(F;\gamma) = \overline{\lim_{\substack{s\in\gamma \\ s\to+\infty}}} \frac{\ln|F(s)|}{\ln \mu^*(\sigma)}, \quad d(F;\gamma) = \overline{\lim_{\substack{s\in\gamma \\ s\to+\infty}}} \frac{\ln|F(s)|}{\ln \mu(\sigma)}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

$\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (1), а $\Gamma = \{\gamma\}$ – семейство кривых, уходящих в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $\sigma = \mathrm{Re}s \to +\infty$. При условии (2) всегда $d(F) \ge 0$ (см. [1]).

Оказывается, в терминах центрального показателя можно указать условие на коэффициенты ряда (1), при выполнении которого для соответствующей функции $F \in D(\Lambda)$ верна оценка $d(F) > 0$.

**Теорема**. Пусть выполняется условие (2), $\lambda_\nu$ ($\nu = \nu(\sigma)$ — центральный индекс) — центральный показатель ряда (1). Если

$$\underline{\tau} = \sup_e \varliminf_{\substack{\sigma\in e,\\ \sigma\to+\infty}} \frac{\ln \frac{1}{|L'(\lambda_\nu)|}}{\ln \mu(\sigma)} < 1, \tag{5}$$

то $q(F) \geq 1 - \underline{\tau} > 0$, где

$$q(F) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_e \varlimsup_{\substack{\sigma\in e,\\ \sigma\to+\infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)}$$

Здесь величины $\underline{\tau}$ и $q(F)$ определяются по всем множествам $e \subset \mathbb{R}_+$, каждое из которых получается удалением из $\mathbb{R}_+$ некоторой системы отрезков конечной суммарной длины.

**Следствие**. При условии (5) выполняется оценка $d(F) \geq 1 - \underline{\tau} > 0$, т.е. равномерная отделимость от нуля характеристики Полиа $d(F;\gamma)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНОМЦ ПФО, соглашение № 075-02-2024-1444.

[1] Гайсин А.М. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 55–82.

[2] Гайсин А.М., Гайсина Г.А. Оценка скорости роста и убывания функций в теоремах типа Макинтайра-Евграфова / А.М. Гайсин, Г.А. Гайсина // Уфимский матем. журнал. — 2017. — Т. 9, № 3. — С. 27–37.

## An inverse iteration scheme for approximation of the $p$-Laplace higher eigenvalues

**Galimov T.I.**

Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa Federal Research Centre, Ufa, Russia

Let $1 < p < \infty$ and let $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ be a domain of finite measure, $D \geqslant 1$. Consider the problem of finding an *eigenvalue* $\lambda \in \mathbb{R}$ and an *eigenfunction* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ such that

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\Omega = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, d\Omega \quad \text{for any } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

This is a weak form of the Dirichlet eigenvalue problem for the $p$-Laplace operator

$$\Delta_p(\cdot) := \mathrm{div}(|\nabla(\cdot)|^{p-2}\nabla(\cdot)),$$

turning into the classic Dirichlet Laplace eigenvalue problem for $p = 2$.

It is known (see, for example, [1]) that there exists the smallest eigenvalue $\lambda_1(\Omega, p)$, called the *first* eigenvalue, and that $\lambda_1(\Omega, p)$ is also the only eigenvalue admitting sign-constant eigenfunctions (all of which being constant multipliers of one-another). The properties of $\lambda_1(\Omega, p)$ allow to develope different numerical methods for its numerical approximation, among which algorithms based on inverse iteration schemes play an important role. All the other eigenvalues are called *higher*, and they are much less studied from both the theoretic and the numeric viewpoints.

We propose a novel algorithm using inverse iterations to approximate some higher eigenvalues alongside the corresponding eigenfunctions. We prove that, given an arbitrary sign-changing initial guess $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ with the null level set of measure 0, this algorithm generates a numerical sequence $\{R_k\}$ monotonically decreasing towards one of the higher eigenvalues (the value of the latter depends on the choice of an initial guess $u_0$). We also prove that it generates a functional sequence $\{u_k\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ such that $\rho(u_k, \mathfrak{U}) \to 0$, where $\rho$ stands for the distance function in $W_0^{1,p}(\Omega)$ and $\mathfrak{U}$ denotes the set of eigenfunctions associated to the eigenvalue $\inf R_k$. We also demonstrate the performance of the proposed algorithm in a series of numerical experiments.

The talk is based on a joint work in progress with V. Bobkov.

[1] Lindqvist, P. (1995). On a nonlinear eigenvalue problem. Topics in mathematical analysis, 3, 175-203.

## Решения уравнения Ишимори.

**Гарифуллин Р.Н.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

В докладе обсуждается построение новых частных решений уравнения Ишимори [1]

$$\begin{aligned} &S_T = -\frac{a}{2}S \times (S_{YY} - \varepsilon^2 S_{XX}) + \varphi_X S_Y + \varphi_Y S_X, S^2 = 1, \\ &\varphi_{YY} + \epsilon^2 \varphi_{XX} = \varepsilon^2 a S(S_X \times S_Y), \end{aligned} \tag{1}$$

здесь $S = (S^1, S^2, S^3) \in \mathbb{C}^3$ – неизвестная вектор-функция, $\varphi$ – неизвестная функция, $a, \varepsilon$ параметры, $T, X, Y$ – независимые переменные. Это уравнение является пространственно-двумерным интегрируемым обобщением уравнения Гайзенберга.

На основе связи уравнения Ишимори (1) с цепочкой Ферапонтова-Шабата-Ямилова [2], [3]

$$u_{n,xy} = u_{n,x} u_{n,y} \left( \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n} \right), \tag{2}$$

получено принципиально новое решение уравнения Ишимори, содержащее несколько произвольных функций. Более подробно результаты описаны в статье [4].


[1] Ishimori Yu., Progr.Theor. Phys., 72:1 (1986), 33–37

[2] E.V.Ferapontov, *Laplace transformations of hydrodynamic-type systems in Riemann invariants*, Theoret. and Math. Phys., 110:1 (1997), 68–77.

[3] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *To a transformation theory of two–dimensional integrable systems* // Phys. Lett., A, **227**:1–2, 15–23 (1997).

[4] R.N. Garifullin, I.T. Habibullin, On a class of exact solutions of the Ishimori equation// arXiv:2412.18195


## О способах восстановления значений ряда параметров процессов полимеризации


**Гиззатова Э.Р., Корнилова А.А.**

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия


Одной из важных задач исследования процессов химической кинетики является определение констант скоростей реакций. В литературе достаточно много методов позволяющих, с минимальными погрешностями и временными затратами, определять искомые параметры. Решение обратной задачи сводится к минимизации функционалов типа:

$$I = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left( M_n^{\exp} - f(\tau) \right)^2 d\tau \tag{1}$$

или нахождению максимума отклонения:

$$\lambda = \max_{\tau \in Q} \left| M_n^{\exp} - f(\tau) \right| .$$

Здесь $M_n$ – числовая характеристика полимера. Как видно, $I$ и $\lambda$ ассоциируются с векторами невязки и поэтому, чем точнее приближение, чем меньше величина вектора невязки, тем ближе расчетные параметры к экспериментально найденным.

## Условия локальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида

**Донцова М.В.**

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В [1] рассмотрена задача Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ — неизвестные функции, $a_2,\ g_2$ — известные константы, $a_1(t),\ b_1(t),\ b_2(t),\ c_1(t),\ g_1(t)$ — известные функции, с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

Обозначим $C([0,T])$ - пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0,T]$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\},$$

$$l = \max\{\sup_{[0,T]} a_1(t),\ \sup_{[0,T]} b_1(t),\ \sup_{[0,T]} b_2(t),\ \sup_{[0,T]} c_1(t),\ \sup_{[0,T]} g_1(t),\ |a_2|,\ |g_2|\}.$$

В [1] определены условия локальной разрешимости задачи Коши (1), (2):

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$ и выполняются условия

1) $a_1(t) > 0,\ b_1(t) < 0,\ b_2(t) < 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) < 0, \quad t \in [0,T]$,

2) $\varphi_1'(x) \ge 0,\ \varphi_2'(x) \le 0 \quad x \in R$.

Тогда для любого $T \leqslant \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$.

[1] Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 4. С. 384–394.

## Локализованные волны уравнения $\varphi^4$ в модели с двумя примесями

**Екомасов Е.Г., Фахретдинов М.И.**
Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

В нашей работе исследуется нелинейное дифференциальное уравнение $\varphi^4$ (1) с пространственными неоднородностями (примесями) $K(x)$.

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \tag{1}$$

Рассматривались два вида функций $K(x)$. Первая из них бралась в виде двух точечных примесей, расположенных на расстоянии $d$ друг от друга, описываемых с помощью дельта-функций Дирака:

$$K(x) = 1 - \varepsilon\delta(x) - \varepsilon\delta(x - d) \tag{2}$$

С помощью метода коллективных переменных, получена система дифференциальных уравнений, описывающие амплитуды примесных мод. Анализ решений этой системы показал, что для уравнения (1) возможны связанные синфазные и антифазные колебания локализованных на примесях волн, как частный случай, и биения, как общий случай. Получена зависимость частот примесных мод от расстояния между примесями. Проведенное прямое численное исследование (1) показывает хорошее согласие с аналитическими результатами, полученными методом коллективных переменных.

Также нами рассмотрен случай $K(x)$ с двумя протяженными примесями, описываемыми с помощью функций прямоугольного вида шириной $W$, глубиной $\Delta K$ и находящихся на расстоянии $d$ друг от друга. Получены результаты, качественно совпадающие со случаем точечных примесей, которые являются предельным случаем протяженных примесей. В пределе $d \to \infty$, результаты совпадают с результатами для случая одной протяженной примеси [1].

[1] Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Y., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G., Attractive Impurity as a Generator of Wobbling Kinks and Breathers in the $\varphi^4$ Model, Rus. J. Nonlin. Dyn., 2024, Vol. 20, no. 1, pp. 15-26.

## Влияние ангармонических поправок к энергии на нелинейную связанную динамику вихрей в спин-трансферных нано-осцилляторах

**Екомасов Е.Г.[1], Нерадовский Д.Ф.[2], Лукошкина Т.А.[2]**
[1]Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия
[2]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия

Рассматривается связанная нелинейная динамика магнитных вихрей в трёхслойном двухвихревом спин-трансферном нано-осцилляторе (СТНО). Для описания гиротропного движения вихрей используются динамические дифференциальные уравнения Тиля [1, 2]. Они получены из обобщенного уравнения Ландау-Лифшица — Гильберта для намагниченности на основе метода коллективных переменных для координат центра вихрей и в приближении неизменной динамической структуры вихрей. В данной работе энергия рассматриваемой системы в приближении парного взаимодействия записывается с учётом ангармонических поправок для квазиупругой энергии каждого из вихрей. Эффективные динамические дифференциальные уравнения для координат центров вихрей решаются численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Показано, что учёт нелинейных слагаемых в энергии СТНО приводит к появлению дополнительных гармоник в спектре колебаний вихрей по сравнению с линейным случаем.

[1] Thiele A.A. Phys. Rev. Lett. 30, 6. 230 (1973).

[2] Звездин К.А., Екомасов Е. Г. ФММ 123, 3, 219 (2022).

## Локальная разрешимость вырожденного квазилинейного уравнения

**Захарова Т.А.**
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – банаховы пространства. $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, т. е. линейные замкнутые операторы с плотными в пространстве $\mathcal{X}$ областями определения, действующие в $\mathcal{Y}$.

Решением на отрезке $[t_0, T]$ задачи

$$(Lx)^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1}$$

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) \tag{2}$$

называется такая функция $x : [t_0, T] \to D_M \cap D_L$, что $Mx \in C((t_0, T]; \mathcal{Y})$, $Lx \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^\alpha Lx \in C((t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^{\alpha_l} x \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$. Здесь $\alpha_1 < \alpha - 2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$.

**Определение** [1]. Пара $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$,

(i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \ge 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая постоянная $K = K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\max\{\|R^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \le \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Введем обозначения $\ker(\mu L - M)^{-1} L := \mathcal{X}^0$, $\ker L(\mu L - M)^{-1} := \mathcal{Y}^0$. Через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) обозначим замыкание образа $\mathrm{im}(\mu L - M)^{-1} L$ ($\mathrm{im} L(\mu L - M)^{-1}$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$), а через $L_k$ ($M_k$) — сужение оператора $L$ ($M$) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k$), $k = 0, 1$.

Определим отображение $QN_1 \circ L_1^{-1} : \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n \to \mathcal{Y}$, действующее по правилу $QN_1 \circ L_1^{-1}(t, z_2, \dots, z_n) := QN_1(t, L_1^{-1} z_1, L_1^{-1} z_2, \dots, L_1^{-1} z_n)$.

**Теорема**. Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $N : \mathbb{R} \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$ выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$, где $N_1 \in C(\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{X})$, $QN_1 \circ L_1^{-1} \in C(\mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n; D_{M_1 L_1^{-1}})$ липшицево по $\overline{z}$, $y_k \in D_{M_1 L_1^{-1}}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[t_0, T]$.


[1] Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А.. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 93–107.


## Асимптотика выхода на бегущую волну в уравнении КПП


**Калякин Л.А.**

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия


Для полулинейного параболического уравнения в частных производных рассматривается асимптотическое решение, которое на далеких временах $t$ выходит на бегущую волну. Скорость такой волны зависит от времени и для нее строится асимптотика при $t \to \infty$ [1]. Выяснено, что асимптотика содержит логарифмы и не может быть построена в виде степенного ряда. Этот результат принципиально отличается от известных утверждений [2].


[1] Л. А. Калякин, "Об асимптотике скорости бегущей волны на траектории седло-узел", Матем. Заметки, **116**:6 (2024), 898–915.

[2] U. Ebert , W. van Saarloos, "Front propagation into unstable states: Universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts,, Physica D: Nonlinear Phenomena, **146**:1-4 (2000), 1-99.


## Экспериментальная и теоретическая оценка энергии связи атомов водорода гидроксильных групп молекул ряда антиоксидантов в газовой фазе


**Камалов Ф.К., Маркова А.В., Галеев Р.В.**

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН


С помощью методов спектроскопии диссоциативного захвата электронов и теории функционала плотности были исследованы энергетические особенности отрыва атомов водорода гидроксильных групп у веществ, проявляющих антиоксидантные свойства. Было показано, что их молекулы являются хорошими акцепторами электронов и вступают в реакции диссоциативного захвата электронов при тепловых и надтепловых энергиях. Установлено, что образование фрагментарных анионов $[M\text{-}H]^{-}$ путем разрыва OH-связи термодинамически выгоднее альтернативных механизмов связанных с отрывом атомов водорода от бензольных колец [1]. Предложены возможные механизмы нейтрализации свободных радикалов с помощью атомов водорода гидроксильных групп. Выявлено, что эти атомы внутри отрицательных ионов могут туннелировать и образовывать анионы с новой пространственной структурой, которые могут обладать токсичными свойствами [2].


[1] Таюпов М.М. и др. Оценка сродства к электрону по данным о временах жизни отрицательных молекулярных ионов p-кумаровой и кумарин-3-карбоновых кислот // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2023 – Т. 26 – № 2 – С. 54-67.

[2] Таюпов М.М., Маркова А.В., Рыбальченко А.В. Комплексное исследование структуры электронных орбиталей молекул пентахлорфенола. Эксперименты и моделирование // Вестник Башкирского

государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. – 2023. – Т.66 – № 1-1– С. 94-99.

## Экспоненциальная локализация собственных функций магнитного оператора Шредингера

**Кордюков Ю.А.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассмотрим квазиклассический магнитный оператор Шредингера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ вида

$$H_\hbar = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j(x)\right)^2 + \hbar V(x), \quad \hbar > 0,$$

где $A_j, j = 1, \ldots, 2n$, и $V$ — гладкие вещественнозначные функции. Положим

$$B_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad j, k = 1, \ldots, 2n.$$

Предполагается, что функции $B_{jk}, j, k = 1, \ldots, 2n$, и $V$ ограничены в $\mathbb{R}^{2n}$ вместе с производными произвольного порядка. Предполагается также, что ранг матрицы $B(x) = (B_{jk}(x))$ для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ равен $2n$, причем существует такая постоянная $c_0 > 0$, что $|B(x)| \geq c_0$ для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ обозначим через $\pm i a_j(x), j = 1, \ldots, n$, с $a_j(x) > 0$ собственные значения кососимметрической матрицы $B(x)$. Положим

$$\Lambda_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{j=1}^{n} (2k_j + 1) a_j(x) + V(x), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Для конечного отрезка $[a, b]$ рассмотрим замкнутое подмножество $\mathcal{K}_{[a,b]}$ в $\mathbb{R}^{2n}$, состоящее из всех точек $x \in \mathbb{R}^{2n}$, для которых $\Lambda_{\mathbf{k}}(x) \in [a, b]$ при некотором $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$.

Предположим, что множество $\mathcal{K}_{[a,b]}$ компактно.

Теорема 1. *Существуют такие $\epsilon > 0$ и $\hbar_0 > 0$, что для любого $\hbar \in (0, \hbar_0]$ спектр оператора $H_\hbar$ на интервале $[\hbar a + \epsilon\hbar^{5/4}, \hbar b - \epsilon\hbar^{5/4}]$ дискретен.*

Теорема 2. *Для любых $a_1 > a$ и $b_1 < b$ существуют такие $\hbar_0 > 0$ и $C, c > 0$, что для любой собственной функции $u_\hbar \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \cap L^2(\mathbb{R}^{2n})$*

*оператора $H_\hbar$ при некотором $\hbar \in (0, \hbar_0]$ с соответствующим собственным значением $\lambda_\hbar \in [\hbar a_1, \hbar b_1]$: $H_\hbar u_\hbar = \lambda_\hbar u_\hbar$, справедлива оценка*

$$\int_X e^{2cd(x,\mathcal{K}_{[a,b]})/\hbar^{1/2}} |u_\hbar(x)|^2 dx \leq C\|u_\hbar\|^2,$$

*где $d(x, \mathcal{K}_{[a,b]})$ обозначает расстояние от $x$ до $\mathcal{K}_{[a,b]}$.*

## Quasi-analytic properties of mean-periodic functions with respect to the Bessel convolution

**Krasnoschekikh G.V., Volchkov Vit.V.**
Donetsk State University, Donetsk, Russia

The properties of solutions to the convolution equations generated by the Bessel shift operator are studied. The case is considered when the equation convolver is an indicator of a segment symmetric with respect to zero or a Dirac measure with a support at a given point. Based on recent results in [1], new two-radius theorems for the Bessel convolution operator related to quasi-analytic classes of functions have been obtained.

Let us formulate one of the established results. Let $\alpha > -1/2$, $E_\alpha$ be the set of all possible relations of positive zeros of the Bessel function $J_{\alpha+1}$, and $\mathcal{B}_\alpha = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\frac{d}{dx}$ be the Bessel differential operator. Denote by $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ the space of even locally summable functions with respect to the measure $|x|^{2\alpha+1}dx$ on the interval $I_R = (-R, R)$. For $0 < r < R$, we put $V_r(I_R) = \{f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R) : f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0 \text{ on } I_{R-r}\}$, where $f \overset{\alpha}{\star} \chi_r$ is the convolution of order $\alpha$ of the function $f$ and the indicator $\chi_r$ of the segment $[-r, r]$ (see [1]). Let also $0 < r_1 < r_2 < R$, $V^\infty_{r_1,r_2}(I_R) = V_{r_1}(I_R) \cap V_{r_2}(I_R) \cap C^\infty(I_R)$.

**Theorem 1**. (i) Suppose that $r_1/r_2 \notin E_\alpha$, $f \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_R)$ and there exists a sequence of positive numbers $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ such that

$$\sup_{x\in I_{r_1}} \left|\mathcal{B}^n_\alpha f(x)\right| \leq M_n, \ n \in \mathbb{N}, \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\inf\limits_{n\geq k} M_n^{1/2n}} = +\infty.$$

Then $f = 0$ on $I_R$.

(ii) If $R < r_1 + r_2$ and $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ is an arbitrary sequence of positive numbers for which the above series converges, then there exists a non-zero function $f \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_R)$ such that $\sup_{x\in I_R} \left|\mathcal{B}^n_\alpha f(x)\right| \leq M_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

The research was carried out in the framework of the State Assignment (no. 124012400352-6).

[1] Volchkov Vit.V., Krasnoschekikh G.V. A refinement of the two-radius theorem on the Bessel–Kingman hypergroup // Math. Notes. Vol. 116, № 2. 2024. P. 223–237.

## Влияние геометрических размеров магнитных наночастиц в линейной цепочке на условия генерации, структуру и свойства дискретных бризеров

**Кузьмин Д.А.[1], Бычков И.В.[1], Екомасов Е.Г.[2]**
[1]Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия
[2]Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Свойствам периодических массивов магнитных наночастиц уделяется внимание достаточно долгое время. Помимо их потенциальной прикладной пользы, эти массивы предоставляют удобную платформу для изучения различных нелинейных магнитных волновых явлений. Ангармоническая локализация колебаний в решетках занимает особое место среди других нелинейных волновых явлений. Дискретные бризеры (ДБ) представляют собой периодические во времени и пространственно локализованные возбуждения. Ранее существование ДБ было предсказано теоретически для цепочек магнитных наноточек связанных диполь-дипольным взаимодействием [1]. Однако в расчетах не учтено наличие размагничивающих полей в наночастицах с конечными размерами. Настоящая работа посвящена исследованию возможности и условий существования ДБ в цепочке магнитных наночастиц, с учетом указанных особенностей.

Каждая частица представляет собой эллипсоид с полуосями $a, b$ и $c$. Предполагается, что размеры частиц и температурный режим, позволяют считать частицы однодоменными с однородным распределением намагниченности. Моделирование динамики намагниченности в такой цепочке проведено в рамках численного решения уравнения Ландау-Лифшица. Рассмотрены цепочки из 50, 30 и 10 наночастиц пермаллоя с размерами $a = b = 50$ нм, $c = 10$ нм и расстояниями между частицами $l = 150, 200$ и 300 нм. Начальное отклонение намагниченности средней частицы составляло $M_z = 0.5M_0$, намагниченности всех остальных частиц направлены вдоль оси x. В цепочке магнитных наночастиц обнаружено существование ДБ, особенно ярко выраженных в цепочках частиц с $a = b >> c$ (т.е. близких по форме к дискам). Компоненты намагниченности $M_x$ и $M_y$ совершают осцилляции, в то время как компонента $M_z$ остается практически неизменной.

Увеличение размерности системы (2D – решетки магнитных наночастиц) открывает возможности для существования нелинейных состояний, связанные с разнообразием симметрии решеток и возможностью существования топологически защищенных состояний в таких системах.

[1] R.L. Pylypchuk, Y. Zolotaryuk, Low Temp. Phys. 41, 733 (2015).

## К вопросу о «метастабильных сигналах» в масс-спектре отрицательных ионов кумарина

**Маркова А.В., Рахмеев Р.Г., Камалов Ф.К.**
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Долгоживущие (т.е. которые можно зафиксировать в эксперименте спектроскопии диссоциативного захвата электронов) метастабильные отрицательные ионы (ОИ), обычно образуются при распаде молекулярных ОИ и ОИ, имеющих в своей структуре «тяжелые» атомы заместителей (F, S, Cl, Br и т.д). Отрывы же, например, атомов водорода H происходят очень быстро и меньше времени вытягивания ОИ из ячейки столкновений, поэтому, до этого метастабильные ОИ такого рода не фиксировались. Тем не менее, в работе [1], было заявлено, что в масс-спектре ОИ молекул кумарина наблюдалось метастабильное состояние с m/z=144, которое может быть связано с отрывом от молекулярного ОИ атома водорода. В представленной работе, мы покажем, что данные выводы были ошибочными. Проведя анализ масс-спектров ОИ кумарина и кривых эффективного выхода для молекулярного ОИ и фрагментарного ОИ [M-H]-, мы полагаем, что обсуждаемые метастабильные ионы регистрируются на спектре, потому что они образуются не в ячейке столкновений, а путем распада молекулярных ионов при их столкновении с молекулами кислорода и азота в первой бесполевой области масс-спектрометра до сепарирующего магнита.

[1] Таюпов М.М., Галеев Р.В. Аномально метастабильное состояние в спектре диссоциативного захвата электронов молекулами кумарина //Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2021» – Уфа – 2021 –С.135-136.

**Resonant phenomena at the preheating stage in the inflationary E-model**

**Maslov E.M., Koutvitsky V.A.**
IZMIRAN, Moscow, Russia

We study scalar perturbations at the preheating stage in the inflationary model with the potential

$$V(\phi) = V_\infty \left(1 - e^{-C\chi}\right)^2,$$

where $\chi = b\phi$, $b = \sqrt{16\pi G/3}$, $C \gg 1$. Such perturbations are described by the variable $u = a\left(\delta\phi + \Phi\dot{\phi}/H\right)$, where $\delta\phi(t, \mathbf{r})$ is a perturbation of the inflaton field background $\phi(t)$, and $\Phi(t, \mathbf{r})$ is the gravitational potential. The Fourier component of $u$ (denoted as $u_k$) is governed by the Mukhanov-Sasaki equation [1].

Since $C \gg 1$, the field $\phi(t)$ performs fast damped oscillations in the narrow potential well where $|\chi| \ll 1$. Denoting $\tau = bV_\infty^{1/2}t$, $\varrho = \rho/V_\infty$, we find [2]

$$\chi(\tau) = \chi(\theta, \varrho) = \frac{1}{C} \ln \frac{1 - \varrho^{1/2}(\tau)\cos(\theta(\tau) - \theta(\tau_0))}{1 - \varrho(\tau)},$$

$$\varrho_\tau = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\varrho^{3/2}\gamma(\varrho), \quad \theta_\tau = \Omega(\varrho), \quad \frac{a_\varrho}{a} = -\frac{1}{3\varrho\gamma(\varrho)},$$

where $\gamma(\varrho) = 2\varrho^{-1}\sqrt{1-\varrho}\left(1 - \sqrt{1-\varrho}\right)$, $\Omega(\varrho) = C\sqrt{2(1-\varrho(\tau))} \gg 1$. Thus, the energy density $\varrho$ and scale factor $a$ vary slowly compared to $\theta$. Considering $\theta$ as a new time variable instead of $\tau$ and setting $u_k = a^{-1/2}(\varrho)\Omega^{-1/2}(\varrho)Y_k(\theta)$, we reduce the Mukhanov-Sasaki equation to the Hill equation with the slowly varying parameter $\varrho$,

$$\frac{d^2Y_k}{d\theta^2} + \frac{1}{\Omega^2}\left[q^2 + \Omega^2 \frac{1 - 2\varrho + \varrho^{1/2}\cos(\theta - \theta_0)}{\left(1 - \varrho^{1/2}\cos(\theta - \theta_0)\right)^2} + 6\sqrt{2}\Omega\varrho^{1/2}(1-\varrho)\frac{\sin(\theta - \theta_0)\left(\varrho^{1/2} - \cos(\theta - \theta_0)\right)}{\left(1 - \varrho^{1/2}\cos(\theta - \theta_0)\right)^3}\right] Y_k = 0,$$

where $q = \left(bV_\infty^{1/2}\right)^{-1} k/a$ is the normalized physical momentum. The third term in the brackets is due to the influence of metric perturbations. Assuming $\varrho$ to be frozen, we find numerically the resonance zones and the values of the Floquet exponent on the $(q, \varrho)$-plane. We show that the resonant properties of the system are determined mainly by the anharmonicity of the inflaton field oscillations, and not by the metric perturbations.

[1] Mukhanov V.F,, Feldman H.A,, and Brandenberger R.H., Phys. Rept., **215**, 203 (1992).

[2] Koutvitsky V.A., Maslov E.M., Grav. Cosmol., **23**, 35 (2017).

## Линейная задача идентификации с ограниченным оператором

**Мелехина Д.В.[1,2], Федоров В.Е.[1]**

[1]Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

[2]Югорский государственный университет, г. Ханты — Мансийск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}, \mathcal{U}$ — банаховы пространства. Рассмотрим задачу

$$\int\limits_0^t K(t-s)z^{(m)}(s)ds = Az(t) + B(t)u + g(t),\ t \in (0,T], \tag{1}$$

$$z^{(k)}(0) = z_k \in \mathcal{Z},\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^T z(t)d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \tag{3}$$

где $\mu$ — функция ограниченной вариации на $(0, T]$. Задача Коши (1), (2) исследована в [1]. В нашем случае неизвестными в задаче являются функция $z$ и параметр $u \in \mathcal{U}$. Сформулируем следующее условие.

($\mathcal{K}$) Пусть при некотором $R_0 > 0$ существует однозначная аналитическая функция $\widehat{K} : \Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \pi, |\mu| \geq R_0\} \to \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — преобразование Лапласа функции $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. При этом для любого $\lambda \in \Omega_{R_0}$ существует обратный оператор $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ и для $c > 0$, $\chi > -1$ при всех $\lambda \in \Omega_{R_0}$ выполняется неравенство $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \geq c|\lambda|^{\chi}$.

Обозначим оператор $\Theta := \int\limits_0^T \int\limits_0^t Y(t-s)B(s)dsd\mu(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, где $Y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$.

**Теорема 1.** Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K$ удовлетворяет условию ($\mathcal{K}$), для $t > 0$ $\left(\int\limits_0^t K(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C([0,T]; \mathcal{Z})$, $B \in C([0,T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$,

$z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$, $\mu \in BV((0,T];\mathbb{C})$. Тогда задача (1)–(3) корректна в том и только в том случае, когда существует $\Theta^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z};\mathcal{U})$.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015.

[1] Федоров В.Е., Годова А.Д. Интегро-дифференциальные уравнения типа Герасимова с секториальными операторами // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т.30, № 2. С.243–258.

## Steady states for the Gross-Pitaevskii equation with coefficients of incommensurate periods

**Ya.A. Murenkov**[a], **G. L. Alfimov**[a,b], **A. P. Fedotov**[a]
[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;
[b] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia.

We consider the Gross-Pitaevskii equation of one of the two following forms

$$(a): \quad i\Psi_t = \Psi_{xx} + U(x)\Psi - P(x)|\Psi|^2\Psi, \tag{1}$$

$$(b): \quad i\Psi_t = \Psi_{xx} + (U_1(x) + U_2(x))\Psi - |\Psi|^2\Psi. \tag{2}$$

Here $U(x)$ and $P(x)$ in the case (a) and $U_1(x)$ and $U_2(x)$ in the case (b) are periodic functions of incommensurate periods. The equations of such kind arise in the theory of Bose-Einstein Condensate (BEC), particularly in model where a cigar-shaped cloud of BEC is confined by an optical potential $U(x)$ and influenced by a periodic pseudo-potential $P(x)$. In our work, we concentrate on bounded steady-state solutions of Eqs (1)-(2) of the form $\Psi(x,t) = e^{-i\omega t}U(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Then $u(x) \in \mathbb{R}$ solves the equation

$$u_{xx} + (\omega + U(x))\, u - P(x)u^3 = 0 \quad \text{or} \tag{3}$$

$$u_{xx} + (\omega + U_1(x) + U_2(x))\, u - u^3 = 0. \tag{4}$$

in the cases (a) and (b) respectively. Our goal is to provide a comprehensive description of all bounded solutions to the ODEs above. For this purpose, we extend the approach developed for Eq. (3) with coefficients of the same period (see [1]) to the case of incommensurate periods. The technique developed in [1] involves numerical scanning of some area $\Omega$ in the plane of initial data $(u(0), u_x(0))$. This allows to “filter out” collapsing solutions (i.e., solutions that tend to infinity at a finite point of real axis) and to describe "the rest" of solutions in terms of symbolic dynamics. In the case of incommensurate periods this procedure has to be modified, and the scanning has to be applied to 3D set $\Omega \times \mathbb{S}$. We analyze the model case where $U_1(x)$, $U_2(x)$ and $P(x)$ are cosines of incommensurate periods and show that the complete description of bounded solutions for Eqs. (3)-(4) is possible for a specific range of parameters.

The research is supported by Russian Science Foundation, Grant No. 23-11-00009.

[1] M.E. Lebedev, G.L. Alfimov. Numerical Evidence of Hyperbolic Dynamics and Coding of Solutions for Duffing-Type Equations with Periodic Coefficients. *Regul. Chaot. Dyn.*, **29**, 451–473 (2024). DOI: 10.1134/S156035472451004X

## Молекулярный докинг системы «пентахлорфенол–модель белка»

**Мурсалимова В.Ф.[1], Маркова А.В.[2], Камалов Ф.К.[2]**
[1]Уфимский медицинский колледж
[2]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Пентахлорфенол– одно из токсичных фенольных соединений, которое используется в основном в составе фунгицидов и пестицидов. Ранее нашей группой, было проведено комплексное исследование строение его вакантных электронных орбиталей и его диссоциации в газовой фазе под воздействием «медленных электронов» [1]. В представленной работе проведен молекулярный докинг в системе «пентахлорфенол–модель белка» методами молекулярной механики с применением вычислительного модуля AutoDock Vina на платформе SwissDock [2]. Были установлены потенциальные карманы, выделены аминокислотные/нуклеотидные последовательности, вычислена энергия связывания в системе взаимодействия, определено количество образовавшихся межмолекулярных водородных связей, гидрофобных контактов и др. Как показала вычисленная нулевая величина топологической полярной поверхности (TPSA), данное соединение легко способно абсорбироваться через клеточные мембраны из ЖКТ в кровоток.

[1] Таюпов М.М., Маркова А.В., Рыбальченко А.В. Комплексное исследование структуры электронных орбиталей молекул пентахлорфенола. Эксперименты и моделирование // Вестник БГПУ им. М. Акмуллы. – 2023. – Т.66 – № 1-1– С. 94-99.

[2] Bugnon M. et al. SwissDock 2024: major enhancements for small-molecule docking with Attracting Cavities and AutoDock Vina //Nucleic Acids Research. – 2024. – С. 300.

## О субгармонических функциях и субфункциях дифференциальных операторов

**Мурясов Р.Р.**
ИМВЦ УФИЦ РАН

Пусть задана некоторая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $L$ — некоторый линейный дифференциальный оператор. Будем называть функцию $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ субфункцией оператора $L$ тогда и только тогда, когда $u$ полунепрерывна сверху в $\Omega$, интегрируема по Лебегу на любом компакте $K \subset \Omega$, и $Lu \geqslant 0$ в смысле обобщённых функций. Например, субфункциями оператора Лапласа являются субгармонические функции. В одномерном случае субфункции обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка на интервале исследованы А.И. Хейфицем в работе [1].

Субгармонические функции с разделёнными переменными в различных областях на плоскости в декартовой и полярной системах координат исследованы в статье [2]. В ходе дальнейших исследований получены результаты для многомерного случая.

**Теорема 1.** Пусть $x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^l$, в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ соответственно заданы функции $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$, которые непрерывны, имеют слабые производные до второго порядка включительно, и обращаются в нуль лишь на множествах $m$-мерной и $l$-мерной меры нуль соответственно. Функция $u(x, y) = f(x)g(y)$ является субгармонической в области $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, тогда и только тогда, когда найдётся такое вещественное число $c$, для которого верно одно из следующих утверждений.

1) $c \neq 0$, $f$ — субфункция оператора $\Delta_m - c$, $g$ — субфункция оператора $\Delta_l + c$, где $\Delta_l$ — $l$-мерный оператор Лапласа, $\Delta_m$ — $m$-мерный оператор Лапласа.

2) $c = 0$, $f$ — субгармоническая в $\Omega_1$ функция, $g$ — субгармоническая в $\Omega_2$ функция.

Исследования выполнены за счёт средств гранта РНФ, проект №24-21-00002.

[1] А.И.Хейфиц, Аналитические свойства функций, выпуклых относительно решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференц.уравнения, 1981, том 17, номер 6, 1025–1034

[2] Р.Р.Мурясов, Субгармонические функции с разделёнными переменными и их связь с функциями, выпуклыми относительно пары функций, Изв. вузов матем., 2024, номер 6, 49–67

## Математическое моделирование процесса отбора газа из гидратосодержащих залежей в режиме депрессионного воздействия на пласт

**Мусакаев Н.Г.**

ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», г. Тюмень, Россия

Гидрат природного газа – это кристаллическое вещество, образованное соединением природного газа и воды под высоким давлением и при низкой температуре, наблюдается в основном в вечной мерзлоте, на шельфе, на дне водоемов (Истомин, Якушев, 1992; Sloan, Koh, 2003). Его ресурсные запасы более чем в два раза превышают обычные мировые ресурсы нефти и газа; газогидраты считаются одним из самых перспективных в мире источников энергии (Makogon et al., 2007; Li et. al., 2023). В отличие от эксплуатации традиционных энергетических ресурсов, таких как нефть и газ, разработка залежей гидрата природного газа осложнена необходимостью предварительной диссоциации газогидрата в пласте. Основные методы отбора газа из гидратосодержащих залежей, предложенные учеными как внутри страны, так и за рубежом, включают в себя сброс давления (депрессионное воздействие на пласт) и нагрев (тепловое воздействие на пласт). Идея каждого из них состоит в том, чтобы изменить условия в пласте на такие, при которых начинается процесс разложения газогидрата. Рядом исследователей (Moridis, Sloan, 2007; Liang et. al., 2023) отмечается, что метод сброса давления является наиболее экономически целесообразным и эффективным методом добычи газа среди применяемых в настоящее время для разработки гидратонасыщенных пластов. Для выявления механизмов и особенностей разложения газовых гидратов при депрессионном воздействии на пласт необходимы разработка математической модели и расчеты, чтобы обеспечить в будущем эффективные решения для осуществления этого процесса (Roostaie, Leonenko, 2020; Mo, Shi, 2023).

В работе на основе уравнений сохранения масс, энергии и закона Дарси в двумерном осесимметричном приближении осуществлено математическое моделирование процессов, протекающих в пористом пласте (насыщенном в исходном состоянии газом и его гидратом), при отборе газа из гидратонасыщенной залежи. Предложена численная реализация математической модели и осуществлен анализ влияния параметров на забое добывающей скважины на динамику распределения полей давления, температуры и насыщенностей фаз в пласте.

## О вейвлет-преобразовании периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье

**Мусин И.Х.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – семейство раздельно радиальных выпуклых функций $h_\nu : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} (h_{\nu+1}(x) - h_\nu(x)) = +\infty$;

3) $\sum\limits_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} e^{h^*_{\nu+1}(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)-h^*_\nu(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)} < \infty$, где $h^*_\nu$ – преобразование Юнга-Фенхеля функции $h_\nu$.

Пусть $J(\mathcal{H})$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$J(h_\nu) = \{f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{N}_\nu(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{h_\nu(\alpha)}} < \infty \},\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\Omega$ – совокупность всех семейств $\omega = \{\omega_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, состоящих из функций $\omega_\nu : \mathbb{Z}^n_+ \to [0, \infty)$ таких, что:

$i_1)$ $\forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \ \exists b_\nu > 0$: $\omega_\nu(\alpha+\beta) \le b_\nu + \omega_{\nu+1}(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \cap [0,1]^n$;

$i_2)$ $\exists\, \sigma > 1\ \ \forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \ \exists\, l_\nu > 0\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$: $l_\nu + \sigma|\alpha| + \omega_\nu(\alpha) \le \omega_{\nu+1}(\alpha)$.

Для $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}, \psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \in \Omega$ $\ \mathcal{S}^\psi_\varphi$ – индукт. предел пространств

$$\mathcal{S}^{\psi_\nu}_{\varphi_\nu} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_\nu = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{|x^\alpha (D^\beta f)(x)|}{e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}} < \infty\}.$$

При определённых условиях на $\psi$ с помощью нетривиальной функции $g \in \mathcal{S}^\varphi_\psi$ каждой функции $f \in J(\mathcal{H})$ сопоставим по определённому правилу функцию $W_g(f)$ на $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \times \mathbb{R}^n$. Будут описаны некоторые свойства функции $W_g(f)$. В частности, будет показано, что функция $W_g(f)$ продолжается до функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Это будет вытекать из следующего утверждения, в котором

$$w_\alpha : (r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \hat{g}(-\alpha \cdot r) e^{-i\langle \alpha, \theta \rangle},$$

$\hat{g}$ – преобразование Фурье функции $g$, $\hat{f}_\alpha$ – коэффициент Фурье функции $f \in J(\mathcal{H})$ $(\alpha \in \mathbb{Z}^n)$.

**Предложение**. Пусть $f \in J(\mathcal{H})$, $g \in \mathcal{S}_\psi^\varphi$ $(g \neq 0)$. Тогда для любых $p, q \in \mathbb{Z}_+^n$ абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ сходится ряд

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \overline{\hat{f}_\alpha} \frac{\partial^{|p|+|q|} w_\alpha}{\partial^p \theta \, \partial^q r}(r, \theta), \; r \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^n.$$

## Построение решений аналогов нестационарных уравнений Шредингера, соответствующих паре изомонодромных гамильтоновых систем $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ и $H^{\frac{5}{2}+2}$ иерархии вырождений системы Гарнье

**Павленко В.А.**
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

На сегодняшний день изучение ДУ, которые могут интегрироваться методом изомонодромной деформации (ИДМ) является актуальным. Пока что известен конечный список совместных пар гамильтоновых систем, таких что: (эти ОДУ допускают ИДМ)

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{p_j} \quad (k = 1, 2) \quad (j = 1, 2) \qquad (1)$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждое из которых есть условие совместности двух линейных систем ОДУ вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \quad V'_\eta = AV,$$

где квадратные матрицы $L_{s_k}$ и $A$ одинаковой размерности рациональны по переменной $\eta$. Некоторые такие пары гамильтоновых систем ОДУ приведены в статье Х. Кимуры [1]. Чуть позже Кавамуко [2] дополнил этот список.

Настоящая работа посвящена построению решений совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{\frac{5}{2}+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ гамильтоновой системы $H^{\frac{5}{2}+2}$ из статьи [2]. А также построению решений совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ гамильтоновой системы $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ из статьи [2].

Построенные решения являются явными в терминах решений некоторой линейной системы ОДУ.


[1] *H. Kimura.* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure. Annali di Matematica pura et applicata IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.

[2] H. Kawamuko . *O*n the Garnier system of half-integer type in two variables, Funkcial. Ekvac. 2009. V. 52. No. 2. P. 181—201.


## Анализ путей развития алгоритма Диффи-Хеллмана


**Поглазов К.Ю.[1], Таюпов М.М.[2]**

[1]Уфимский колледж статистики, информатики и вычислительной техники

[2]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН


В постиндустриальном обществе всё большую роль оказывает криптография. Особенно это заметно сейчас, когда всевозможные мессенджеры борются с друг с другом за право быть признанными более конфиденциальными и защищенными, чем их конкуренты. К тому же современная криптография столкнулась с рядом новых фундаментальных вызовов. Во-первых, это появление квантовых компьютеров, и уже сегодня постквантовое шифрование вошло в стандарт NIST (Национальный институт стандартов и технологий США). Во-вторых, конторы, которые отвечают за национальную безопасность и выдают сертификаты безопасности, сами оставляют для себя лазейки для взлома данных. Например, АНБ, для этой цели, организовало уязвимости в широко применяемом алгоритме Диффи-Хеллмана и многих других алгоритмах [1].

Таким образом, у общества, все острее встает вопрос о модернизации алгоритмов, как шифрования, так и передачи данных. Для этой цели применяется множество различных методик. В частности, в публикации Федюшиной [2] говорится о модернизации, уже упомянутого, алгоритма Диффи-Хеллмана путем двойного дискретного логарифмирования для увеличения его криптостойкости за счет увеличения числа неизвестных. Этот подход, на наш взгляд является достаточно спорным.

В представленной нами работе, рассмотрено двойное дискретное логарифмирование и тройное дискретное логарифмирование алгоритма Диффи-Хеллмана и выведена общая формула для n-го дискретного логарифмирования данного алгоритма. Проведен анализ криптостойкости с применением, как частных примеров, так и общих доказательств. Сделаны выводы по критикуемой публикации на соответствие их реальности. Рассмотрены дальнейшие возможные пути развития шифрования по алгоритму Диффи-Хеллмана.


[1] Adrian D. et al. Imperfect forward secrecy: How Diffie-Hellman fails in practice //Proceedings of the 22nd ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security. – 2015. – С. 5-17.

[2] Федюшина Е. О. Уязвимость и защита алгоритма Диффи-Хеллмана // Безопасность информационного пространства – 2014. — С. 247-253.


## Спектральные характеристики оператора четвертого порядка с параметром в граничных условиях


**Поляков Д.М.**

ЮМИ ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия


В пространстве $L_2(0,1)$ рассматривается следующая спектральная задача для уравнения четвертого порядка вида

$$\begin{gathered} y^{(4)}(x) - (p(x)y'(x))' = \lambda y(x), \\ y''(0) = y''(1) = 0, \quad Ty(0) - a\lambda y(0) = 0, \quad Ty(1) - c\lambda y(1) = 0, \end{gathered}$$

где $p$ — вещественная абсолютно непрерывная функция на $(0,1)$, $Ty = y''' - py'$, где $a > 0$, $c < 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Наш основной результат посвящен асимптотике собственных значений $\lambda_n$ данной спектральной задачи. Для его формулировки определим коэффициенты Фурье для некоторой функции $f \in L_1(0,1)$:

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \widehat{f}_{cn}(\varepsilon) = \int_0^1 f(x)\cos\pi(2n-\varepsilon)x\,dx,$$

$$\widehat{f}_{sn}(\varepsilon) = \int_0^1 f(x)\sin\pi(2n-\varepsilon)x\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где $\varepsilon$ — некоторая константа.

**Теорема.** Пусть $p \in W_1^1(0,1)$. Тогда собственные значения $\lambda_n$ являются вещественными, простыми и удовлетворяют следующей асимптотике

$$\lambda_n = \pi^4(n-2)^4 + \pi^2(n-2)^2\Big(p_0 + \widehat{p}_{cn}(4) + \frac{2(c-a)}{ac}\Big) + \mathcal{O}(n),$$

при $n \to +\infty$. Если дополнительно предположить, что $p \in W_1^3(0,1)$ и $p(0) = p(1)$, то асимптотика примет вид

$$\lambda_n = \pi^4(n-2)^4 + \pi^2(n-2)^2\Big(p_0 + \frac{2(c-a)}{ac}\Big) - \pi(n-2)\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\Big) + \frac{(p_0 + 7p(0))(c-a)}{2ac} + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3}\Big) + \frac{\widehat{p}'''_{sn}(4)}{32\pi(n-2)} + \mathcal{O}(n^{-2}) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

## Об аппроксимациях интегралов Пуассона на отрезке рациональными интегральными операторами

**Поцейко П.Г.**

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г.Гродно, Республика Беларусь

Полиномиальная аппроксимация на классах интегралов Пуассона в периодическом случае имеет богатую историю, связанную с именами известных математиков [1–3]. Вместе с тем как полиномиальные, так и рациональные аппроксимации на классах интегралов Пуассона на отрезке $[-1,1]$ остаются практически не исследованными.

В 1979 году Е.А. Ровба [4] ввел рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышёва, ассоциированные с системой алгебраических дробей Чебышёва–Маркова, которые являются обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва.

В настоящем докладе планируется осветить круг вопросов, относящихся к аппроксимации интегралов Пуассона на отрезке $[-1,1]$. В качестве методов приближений рассматриваются рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышёва и их суммы Фейера и Валле Пуссена с фиксированным количеством геометрически различных полюсов.

Подробно рассматривается случай, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1,\ 1]$ степенную особенность. Как следствие полученных результатов установлены асимптотические выражения точных верхних граней уклонений частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва и методов их суммирования на классах интегралов Пуассона.


[1] Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Известия АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.

[2] Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.

[3] Степанец А.И. Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Матем. сборник. 2001. Т. 192, № 1. С. 113–138.

[4] Ровба Е.А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Доклады АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.


## Один класс квазилинейных уравнений с производными Хилфера


**Скорынин А.С., Федоров В.Е.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия


Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определим следующим образом: $J^\alpha f(t) := \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds, \quad J^0 f(t) := f(t) \quad t > t_0$. Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, задается равенством ${}^R D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t)$, где $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$ — обычная производная целого порядка. Будем также использовать обозначение ${}^R D^{-\alpha} f(t) := J^\alpha f(t)$, $\alpha \geq 0$. Производную Хилфера [1] определим как

$$D^{\alpha,\beta} f(t) := D^{m-\beta(m-\alpha)}(J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t) -$$

$$- \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(t_0)).$$

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $U$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+r}$, $B : U \to \mathcal{Z}$, $m-1 < \alpha \leq m$, $\beta \in [0,1]$, $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотри задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} x(t_0) = x_k \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + B(t, D^{\alpha-m-r,\beta}x(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(t)), \qquad (2)$$

на отрезке $[t_0, t_1]$. Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, для которой $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, существует $D^{\alpha,\beta}x \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$ и выполняются равенства (1), (2).

**Теорема**. Пусть $m - 1 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta < 1$, $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $U$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+r}$, отображение $B \in C(U; \mathcal{Z})$ локально липшицево по фазовым переменным. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (1), (2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

Работа поддержана Российским научным фондом (грант №24-11-20002) и Правительством Челябинской области.

[1] Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific, 2000.

[2] Федоров В.Е., Скорынин А.С. Один класс квазилинейных уравнений с производными Хилфера // Прикладная математика & Физика. 2023. Т. 55, № 4. С. 289–298.

## Один класс краевых задач для дифференциального уравнения с дробной производной Лиувилля

**Скрипка Н.М., Федоров В.Е.**

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть $P_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} c_j\lambda^j$, $Q_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} d_j\lambda^j$, $c_j, d_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, \varrho \in \mathbb{N}_0$, $c_\varrho \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(\xi) := \sum_{|q| \leq 2r} a_q(\xi) \frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(\xi) := \sum_{|q| \leq r_l} b_{lq}(\xi) \frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \dots, r.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$B_l\Lambda^k u(\xi, t) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ (\xi, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \qquad (1)$$

$$D_t^\alpha P_\varrho(\Lambda)u(\xi, t) = Q_\varrho(\Lambda)u(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \qquad (2)$$

где функция $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дробная производная Лиувилля [1] по переменной $t$ порядка $\alpha \in (m-1, m]$.

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора $\Lambda$ в $L_2(\Omega)$ с соответствующей областью определения, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, им соответствует ортонормированная система собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выбирая подходящие пространства и операторы, при условии, что $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, задача (1), (2) может быть исследована путем редукции к уравнению $D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t)$ с ограниченным оператором $A$.

**Теорема**. Пусть $\alpha > 0$, $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $\{(-i\omega)^\alpha : \omega \in \mathbb{R}\} \cap \{Q_\varrho(\lambda_k)/P_\varrho(\lambda_k) : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, $h \in C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)) \cap L_1(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), оно имеет вид

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega(t-s)} d\omega}{(-i\omega)^\alpha P_\varrho(\lambda_k) - Q_\varrho(\lambda_k)} \langle h(\cdot, s), \varphi_k \rangle_{L_2(\Omega)} \varphi_k(\xi) ds.$$

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002.

[1] Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

## Простейшие конечнозонные эллиптические решения трехкомпонентного нелинейного уравнения Шредингера

**Смирнов А.О.**

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, г.Санкт-Петербург, Россия

Конечнозонные решения спаренного трехкомпонентного нелинейного уравнения Шредингера

$$i\partial_z \mathbf{p} = -\partial_t^2 \mathbf{p} + \left(2\mathbf{p}^t \mathbf{q}\right) \mathbf{p}, \quad i\partial_z \mathbf{q} = \partial_t^2 \mathbf{q} - \left(2\mathbf{p}^t \mathbf{q}\right) \mathbf{q}, \tag{1}$$

строятся по спектральной кривой рода $g = 3n$, где $n \in \mathbb{N}$ есть некоторый числовой параметр. Т.е. при $n = 1$ род соответствующей кривой равен $g = 3$. Вместе с тем, эволюция решения при $n = 1$ имеет достаточно простой вид $(k = 1, 2, 3)$

$$p_k(t, z) = \widehat{p}_k(t - c_1 z) e^{ic_k z + ic_1 t/2}, \quad q_k(t, z) = \widehat{q}_k(t - c_1 z) e^{-ic_k z - ic_1 t/2}, \tag{2}$$

где $c_1, c_k \in \mathbb{R}$ есть параметры решения.

Чтобы построить решения уравнения (1) при $n = 1$, воспользуемся следующими формулами

$$\widehat{p}_j = \sqrt{u_j}\exp\left\{-\int \frac{w_j}{2u_j}dt\right\}, \quad \widehat{q}_j = \sqrt{u_j}\exp\left\{\int \frac{w_j}{2u_j}dt\right\}, \tag{3}$$

где $u_j = \widehat{p}_j\widehat{q}_j$ и $w_j = \widehat{p}_j\partial_t\widehat{q}_j - \widehat{q}_j\partial_t\widehat{p}_j$. Из стационарных уравнений, которым удовлетворяют конечнозонные решения при $n = 1$, вытекают зависимости $w_j$ от $u_1, u_2, u_3$, а также $u_j$ от $u = u_1 + u_2 + u_3$. Таким образом, зная функцию $u(t, z)$ и используя соотношения (3) и (2), можно найти решения уравнения (1).

Хорошо известно (см., например, [1]), что $m$-зонные потенциалы $U(x)$ оператора Шредингера при $m \leq M$ удовлетворяют уравнению Новикова

$$I_M(U) + a_1 I_{M-1}(U) + \cdots + a_M I_0(U) + a_{M+1} = 0, \tag{4}$$

где $I_k(U)$ есть так называемые интегралы Новикова, $a_j$ – некоторые постоянные. Стационарное уравнений на функцию $u(t)$ при $n = 1$ является аналогом уравнения (4) при $M = 3$. Соответственно, по любому $m$-зонному ($m \leq 3$) эллиптическому потенциалу оператора Шредингера можно построить эллиптические конечнозонные решения уравнения (1). Наличие дополнительных параметров, от которых зависят функции $u_j$, позволяют по одной и той же функции $u(t)$ строить различные решения $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

[1] Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза. I. // Функц. анализ и его прил. 1974, Т.8, вып.3, 54-66.

## Нелинейный резонанс в асимптотически автономных системах

**Султанов О.А.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются неавтономные возмущения колебательных систем на плоскости. Предполагается, что интенсивность возмущений затухает со временем, а частота является асимптотически постоянной с предельным значением, удовлетворяющим резонансному условию. Исследуется вопрос появления притягивающих решений с асимптотически постоянной амплитудой. Такие эффекты в задачах с малым возмущением обычно связывают с явлением нелинейного резонанса. С помощью комбинации техники усреднения и метода функций Ляпунова, выводятся модельные уравнения, решения которых описывают возмущенную динамику. Показано, что резонансные решения близкие к периодическим могут иметь место в режиме фазовой синхронизации. Найдены условия существования и устойчивости таких решений.

Доклад основан на работах [1,2].


[1] O. A. Sultanov, Resonance in isochronous systems with decaying oscillatory perturbations, Qualitative Theory of Dynamical Systems, 23 (2024), 295, 29 pp.

[2] O. A. Sultanov, Nonlinear resonance in oscillatory systems with decaying perturbations, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 45:5 (2025), 1691–1719.


## Восстановление векторного поля на плоскости по данным его экспоненциального преобразования Радона


**Сысоев С.Е.**

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия


Для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ определим экспоненциальное векторное преобразование Радона

$$g_1(\theta,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu(\theta)t}\langle f(p\theta + t\theta^\perp), \theta^\perp\rangle dt$$

и экспоненциальное нормальное преобразование Радона

$$g_2(\theta,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu(\theta)t}\langle f(p\theta + t\theta^\perp), \theta\rangle dt,$$

где $\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in S^1$, $\theta^\perp = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, $p \in \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Коэффициент поглощения $\mu$ зависит от направления $\mu = \mu(\theta)$. Требуется по известным функциям $g_1(\theta,p)$ и $g_2(\theta,p)$, $\theta \in S^1$, $p \in \mathbb{R}$, восстановить функцию $f$. Используя методы, предложенные в работах [1], [2] и [3], получена

**Теорема**. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, $\mu \in C^1(S^1)$, тогда

$$\operatorname{div} f(x) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu(\theta)\langle\theta^\perp,x\rangle}\frac{\cos\mu(\theta)q}{2\pi q}\left(\frac{\partial}{\partial q} + \mu'(\theta)\right)G_1(\theta,\langle\theta,x\rangle - q)dqd\varphi,$$

$$\operatorname{curl}_\perp f(x) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu(\theta)\langle\theta^\perp,x\rangle}\frac{\cos\mu(\theta)q}{2\pi q}\left(\frac{\partial}{\partial q} + \mu'(\theta)\right)G_2(\theta,\langle\theta,x\rangle - q)dqd\varphi,$$

где

$$G_1(\theta, \langle\theta, x\rangle - q) = \frac{\partial}{\partial q} g_2(\theta, \langle\theta, x\rangle - q) + \mu(\theta) g_1(\theta, \langle\theta, x\rangle - q),$$

$$G_2(\theta, \langle\theta, x\rangle - q) = \frac{\partial}{\partial q} g_1(\theta, \langle\theta, x\rangle - q) - \mu(\theta) g_2(\theta, \langle\theta, x\rangle - q),$$

$curl_{\perp} f(x) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}$, $\mu'(\theta) = \frac{d\mu(\theta(\varphi))}{d\varphi}$ и интеграл по $q$ понимается в смысле главного значения.


[1] P. Kuchment and I. Shneiberg, Appl. Anal. 53(1994), 221-231.

[2] V.P. Palamodov, Inverse Problems 12 (1996), 717-729.

[3] С.Е. Сысоев, Успехи мат. наук, 51 (1996), No 3, с. 177-178.


## Уязвимости классического алгоритма Диффи-Хеллмана


**Таранов Д.В., Поглазов К.Ю.**

Уфимский колледж статистики, информатики и вычислительной техники


Неотъемлемой частью современного цифрового ландшафта является необходимость обеспечения надежной защиты данных в условиях открытых и потенциально небезопасных каналов связи. Алгоритм Диффи-Хеллмана стал основой для многих систем обмена данными, но при этом его уязвимости могут привести к серьезным последствиям. Важно отметить, что в современном мире, где информация становится всё более ценным ресурсом, критически важно не только иметь систему для её защиты, но и разбираться в тех механизмах, которые могут её подорвать. Киберугрозы, такие как атаки «человек посередине», подчеркивают тот факт, что даже самые утонченные алгоритмы могут быть уязвимы в руках опытных злоумышленников. Зная о таких рисках, пользователи и организации могут заранее принимать меры предосторожности, устанавливая дополнительные уровни защиты и действуя с умом. Важность этой проблемы сложно переоценить. Мы живем в эпоху, когда данные и приватная информация стали объектом охоты не только со стороны коммерческих структур, но и злоумышленников, представляющих опасность для личной безопасности. Поэтому анализ уязвимостей алгоритма Диффи-Хеллмана и его применение в реальных системах — это необходимость, которая касается не только специалистов в области информационной безопасности, но и рядовых пользователей, чьи данные можно подвергнуть компрометации. Мы должны быть готовы адаптироваться к изменениям и активно следить за развитием технологий, чтобы обеспечивать безопасность не только личных данных, но и информации, имеющей значение для общества в целом. Безопасность в цифровую эпоху — это не просто вопрос технологий, это вопрос культуры, понимания и взаимной ответственности всех участников процесса.

В представленной работе проведены вычисления частных случаев и общий криптоанализ классического алгоритма Диффи-Хеллмана. Сделаны выводы по статье [1] о не состоятельности классического алгоритма Диффи-Хеллмана и предложены изменения для повышения его криптостойкости.

[1] Diffie W., Hellman M. E. New directions in cryptography // Information Theory, IEEE Transactions on. — 1976. — нояб. — т. 22, № 6. — с. 644—654.

## Времяпролетный электронный монохроматор

**Р.Ф. Туктаров[1], Р.В. Хатымов[2], П.В. Щукин[1], Р.Ф.Ахметьянов[1]**

[1]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
[2]Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, г.Москва, Россия

Предлагается новый тип электронного монохроматора, в котором все электроны в пучке подвергаются воздействию переменного электрического поля таким образом, что на выходе приобретают одинаковую энергию. Конструкция монохроматора примитивная и представляет собой камеру – область дрейфа, ограниченную с торцов 2 сетками. Электроны, помощью короткого запускающего импульса одновременно влетают в область дрейфа. Из-за различия времени нахождения в области дрейфа электронов разных энергий (скоростей), воздействие переменного электрического поля на электроны будет отличаться. Можно подобрать такую зависимость ускоряющего поля от времени, при которой на выходе из дрейфовой камеры все электроны будут иметь одинаковую энергию.

Пусть $v = f(\tau)$, $f'_\tau<0$ есть распределение скорости от любого параметра $\tau$, $v_k=f(\tau_k)$, $v_1$-максимальное значение, $\Delta v_k = v_k - v_{k+1} > 0$, $k=1,\ldots,n$. Можно получить что для любого $k$-го электрона в момент времени $t_{k-1} < t < t_k$ мы должны подать постоянную напряженность поля $E_k$ чтоб он достиг скорость $V$ в положение $L$

$$E_k = \frac{m}{e}\frac{V + \frac{\Delta v_{k-1}}{2}}{t_k},\ t_k = t_1 \frac{\prod\limits_{p=1}^{k-1}(2V + \Delta v_p)}{\prod\limits_{p=1}^{k-1}(2V - \Delta v_p)},\ t_1 = \frac{2L}{V + v_1},\ k = 2, \ldots, n$$

При непрерывном распределении $\Delta v_k \sim f^{'}_{\tau_k}\Delta\tau_k$, и при $\Delta\tau_k \to 0$ для равномерной гладкой убывающей функции $f(\tau)$, $\Delta v_k \to 0$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = \Delta v_k T_k \to 0$, $\Delta E_k = E_k - E_{k+1} = (\Delta v_{k-1} + \Delta v_k)A_k \to 0$ при $k \geqslant 2$, то есть $E(t)$ тоже будет непрерывным но в области $t > t_1$.

Любой $n$-ый электрон ($v_n < v_1$) долетит до $L$ с конечной скоростью $V$ за время $t_1 \exp\left(\frac{v_1 - v_n}{V}\right)$ с напряженность электрического поля вида

$$E(t) = \begin{cases} \dfrac{m(V^2 - v_1^2)}{2eL}, & 0 < t < t_1 \\ \dfrac{mV}{e}\dfrac{1}{t}, & t > t_1 \end{cases}$$

## Об одном асимптотическом тождестве и его приложениях.


**Фазуллин З.Ю.**

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия


Рассмотрим класс самосопряженных, ограниченных снизу операторов $L_0$ с компактной резольвентой, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, и соответствующих классов симметрических относительно компактных возмущений $V$.

По теореме Като-Реллиха оператор $L = L_0 + V$ имеет компактную резольвенту и полуограничен снизу. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\lambda_k < \lambda_{k+1})$ – собственные числа оператора $L_0$, пронумерованные без учета кратностей, $\nu_k$ – кратность $\lambda_k$, $\left\{\mu_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\nu_k}$, $(\mu_i^{(k)} < \mu_{i+1}^{(k)})$, $k = 1, 2, ...$ собственные числа оператора $L$, на которые расщепляют $\lambda_k$ при возмущении $V$, $P_k$ – ортогональный проектор на собственное подпространство, соответствующее $\lambda_k$. Если $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\nu_k}$ – собственные вектора оператора $L_0$, образующие ортонормированный базис пространства $P_k\mathbb{H}$, то

$$\operatorname{tr} P_k V = \sum_{i=1}^{\nu_k} (V f_{k_i}, f_{k_i}) \, .$$

Далее, пусть $r_n = \frac{1}{2}\min(\lambda_{n+1}-\lambda_n; \lambda_n-\lambda_{n-1})$ и существует последовательность $d_n$, такая что $0 < d_n \le r_n$, $\inf\limits_{n\ge 2} d_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-\lambda_n|\le d_n} \|R_{0n}(z)V\| = 0, \qquad (1)$$

где $R_{0n}(z) = R_0(z) - (\lambda_n - z)^{-1}P_n$, $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$.

Введем функции

$$\rho(t) = \sum_{\lambda_k<t}\left[\sum_{i=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k - \mu_i^{(k)}\right) + \operatorname{tr} P_k V\right], \quad K(z) = \left(R_0(-z)V\right)^2 R_0(-z).$$

Справедлива

**Теорема**. Если $V$ произвольный ограниченный симметрический оператор в $\mathbb{H}$, $\operatorname{tr} K(z) < \infty$ и выполнено (1), то при $t \to +\infty$

$$\int_0^t \rho(\tau)d\tau = \sum_{\lambda_k<t} \operatorname{tr}\left(P_k V^2 - (P_k V)^2\right)(1+o(1)).$$

## О порождении разрешающих семейств операторов уравнений с дробной производной Хилфера

**Федоров В.Е.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Линейный замкнутый плотно определенный в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ оператор $A$ называется оператором класса $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$ при некоторой константе $\omega \ge 0$, если выполняются следующие условия:

(i) если $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) существует $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ для всех $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (2)$$

где $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$, $D^\beta$ — дробная производная Римана — Лиувилля при $\beta > 0$, дробный интеграл Римана — Лиувилля при $\beta \leq 0$, дробная производная Хилфера имеет вид

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = D^{m-\beta(m-\alpha)}\left(D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0)\frac{t^k}{k!}\right),$$

при достаточно гладком $z$ $D^{\alpha,\beta}z(t) = D^{-\beta(m-\alpha)}D^m D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}z(t)$.

**Теорема 1.** Разрешающее семейство операторов уравнения (2) существует в том и только в том случае, когда $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$. При этом его операторы имеют вид

$$Z(t) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!}H_\beta^{(k)}(n+\omega), \quad t > 0,$$

где $H_\beta(\lambda) := \lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}$ для $\lambda > \omega$.

Работа поддержана Российским научным фондом (грант №24-11-20002) и Правительством Челябинской области.

[1] Fedorov V.E., Du W.-S., Kostić M., Plekhanova M.V., Skorynin A.S. Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative // Fractal and Fractional. 2025. Vol.9. P.81.

## Об однозначной разрешимости неоднородного уравнения с распределенной дробной производной Герасимова — Капуто, заданной интегралом Стилтьеса

**Филин Н.В.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в $\mathcal{Z}$, действующих в пространство $\mathcal{Z}$, $D^\alpha$ — дробная производная Герасимова — Капуто.

При $b < c$, $m-1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, для функции ограниченной вариации $\mu : (b,c] \to \mathbb{C}$ (коротко, $\mu \in BV((b,c];\mathbb{C})$) обозначим интегралы Римана — Стилтьеса $W(\lambda) := \int\limits_b^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$, $W_k(\lambda) := \int\limits_{b_k}^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$, $b_k = \max\{k,b\}$, $k = 0,1,\dots,m-1$.

Пусть $K \geq 1$, $\omega \geq 0$, оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ принадлежит классу $\mathcal{C}_W(K,\omega)$ [1], если удовлетворяет следующим условиям:

1) если $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то $W(\lambda) \in \rho(A)$;

2) если $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то для всех $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left( \frac{W_0(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{Kn!}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}.$$

Через $D_A$ обозначим область определения оператора $A$, снабженную нормой его графика.

**Теорема**. Пусть $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c \in (1, 2]$, $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$, $c$ — точка вариации меры $d\mu(\alpha)$, $D_A$ плотно в $\mathcal{Z}$, $f \in W_1^1(0, T; D_A) \cap L_1(0, T; D_{A^2})$, $A \in \mathcal{C}_W(\omega)$. Тогда при любых $z_0, z_1 \in D_A$ существует единственное решение задачи Коши $z(0) = z_0$, $z^{(1)}(0) = z_1$ для уравнения

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) = Az(t) + f(t), \;\; t \in (0, T].$$


[1] Филин Н. Порождение сильно непрерывных разрешающих семейств операторов уравнений с распределённой производной // Челяб. физ.-матем. журн. 2024. Т. 9, вып. 3. С. 426–445.


## Понижение роста субгармонических функций целыми


**Хабибуллин Б. Н.**

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия


Ряд задач теории роста функций, голоморфных на области $D$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, сводится к следующему вопросу. Насколько можно понизить рост функции $U$ на $D$ со значениями в расширенной числовой прямой сложением её $U + \ln|h|$ с логарифмом модуля $\ln|h|$ какой-нибудь ненулевой голоморфной функции $h$ на $D$? Здесь ограничиваемся лишь случаем $D := \mathbb{C}$ и субгармоническими функциями $U$ на $\mathbb{C}$, а также результатами, в основе которых следующая основная

**Теорема** (2025 г., в печати). *Для любой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции $U$ с $U(0) \neq -\infty$ и любого числа $p \geqslant 1$ найдётся ненулевая целая функция $h$, с которой при всех числах $r \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\sup_{|z|=r} \bigl( U(z) + \ln|h(z)| \bigr) \underset{\forall r \geqslant 0}{\leqslant} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(rte^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta \right) \frac{p^2 t^{p-1} \, \mathrm{d}t}{(1 + t^p)^2}.$$

*Это неравенство неулучшаемо с точностью до аддитивной постоянной, а именно: для любого $p \geqslant 1$ найдётся целая функция $f$ с $f(0) = 1$,* *для которой при $U := \ln|f|$ для любой ненулевой целой функции $h$ сумма левой части этого неравенства с некоторым числом $C \geqslant 0$ больше правой части этого неравенства при всех $r \geqslant 0$.*

Предлагаемые применения этой теоремы будут касаться новых точных теорем о мультипликаторе для радиального роста, о границах радиуса полноты на $\mathbb{C}$ для экспоненциальных систем, о представлении мероморфной функций отношением целых функций наименьшего возможного роста относительно роста характеристики Неванлинны этой мероморфной функции. Эта теорема и её применения также распространяются и на плюрисубгармонические функции $U$ на $\mathbb{C}^n$, но пока с сохранением точности лишь при $1 \leqslant p \leqslant 2$. Полученные результаты развивают и усиливают ряд более ранних результатов, описанных в обзоре [1], а доказательства в значительной мере опираются на недавние из [2].


[1] B. N. Khabibullin, The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results // Матем. физ., анал., геом., **9**:2 (2002), 146–167.

[2] Е. Г. Кудашева, Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, Двойственная конструкция и существование (плюри)субгармонической миноранты // Уфимск. матем. журн., **16**:3 (2024), 69–77.


## Активационный барьер на пути автоотщепления электрона из газофазных молекулярных отрицательных ионов


**Р.В. Хатымов[1], М.В. Муфтахов[2], П.В. Щукин[2], Л.З. Хатымова[2] А.Г. Терентьев[1], Г.Ф. Рудаков[1], Р.Ф. Туктаров[2]**

[1]Российский химико-технологический университет им. Д.И.Менделеева, г.Москва, Россия

[2] Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия


В исследованиях электронофильных органических соединений в последние годы наметился прогресс в связи с появлением методов определения адиабатического электронного сродства ($\mathrm{EA}_a$) на основе измерений времени жизни ($\tau_a$) изолированных отрицательных ионов (ОИ) относительно автоотщепления электрона [1]. Оба метода (простая аррениусовская модель и модель РРКМ, ИФМК, г. Уфа, Россия), исходят из предположения, что после резонансного захвата электронов в образовавшихся молекулярных ОИ избыточная электронная энергия статистически перераспределяется по колебательной системе ОИ, и дальнейший выброс лишнего электрона происходит из основного электронного состояния аниона. Отрыв (автоотщепление) электрона рассматривается как преодоление активационного барьера $\varepsilon_a$, который и принимается за величину $\mathrm{EA}_a$.

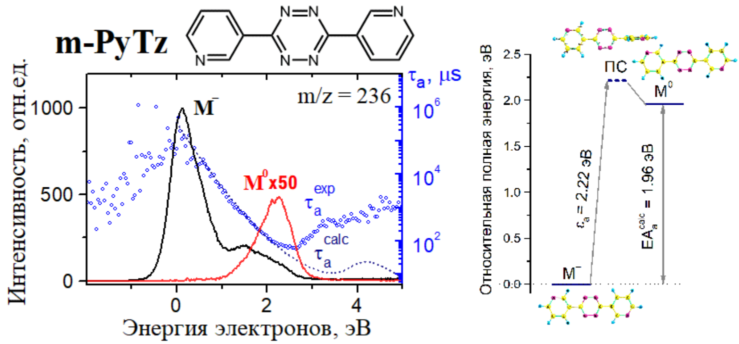


Рис. 1: Структура молекулы **m-PyTz**, кривые энергетической зависимости (слева) и энергетические диаграммы основных электронных состояний $\mathrm{M}^-$, $\mathrm{M}^0$ и переходного состояния ПС между ними (справа).

Между тем, предположение о том, что $\varepsilon_a \equiv \mathrm{EA}_a$, оказывается верным только для конформационно жестких молекул, таких как, напр., полициклические ароматические углеводороды [2, 3]. В настоящей работе исследованы образование (см. в качестве примера кривые $\mathrm{M}^-$ для одного из объектов исследования на рис.1), автонейтрализация (кривые $\mathrm{M}^0$) и время жизни (кривые $\tau_a$) молекулярных ОИ дифенил- (**PhTz**) и двух изомерных дипиридин-производных (**o-PyTz** и **m-PyTz**, см. структуру последнего на рис.1) тетразина, энергонасыщенного аза-замещенного аналога бензола, находящего применение в органической электронике. Эти молекулы имеют возможность изгибаться, а боковые кольца – поворачиваться вокруг одинарной связи, соединяющей их с тетразиновым циклом.

При оптимизации геометрии структур обнаружилось, что геометрия $\mathrm{M}^-$ заметно отличается от нейтральных молекул $\mathrm{M}^0$, и было решено произвести поиск переходных состояний (ПС) между ними с помощью процедуры QST-2 в рамках квантово-химического приближения CAM-B3LYP/6-311+G(d,p) (Gaussian 09). Найденные ПС (активированные комплексы) представляют собой структуры с повернутыми друг относительно друга плоскостями шестичленных циклов (см. на рис.1 справа); энергии ПС на 0.26–0.35 эВ превышают расчетные величины $\text{EA}_a^{\text{calc}}$. Единственные мнимые колебательные частоты в ПС отвечают за торсионные колебания боковых колец и составляют $\nu_a$ = -65.72, -55.46 и -67.61 см$^{-1}$ для **PhTz**, **o-** и **m-PyTz**, соответственно. Можно считать, что естественным образом попутно решена давняя проблема выбора активной частоты, ответственной за автоотщепление электрона, которая до этого оценивалась исходя из общих физических соображений лишь приблизительно (см. [3]).

Действительно, расчетные кривые энергетической зависимости $\tau_a^{\text{calc}}$, полученные с помощью статистической модели РРКМ с подстановкой вышеобсужденных численных значений $\varepsilon_a$, $\text{EA}_a^{\text{calc}}$ и $\nu_a$, принятых в качестве параметров начального приближения, совпали с монотонным участком экспериментальных кривых $\tau_a^{\text{calc}}$ (рис.1). При минимальной подгонке для достижения наилучшей сходимости кривых, значения $\text{EA}_a$ молекул составили 1.68 эВ для **PhTz**, 1.61 эВ для **o-PyTz** и 1.87 эВ для **m-PyTz**.


[1] Chen E.S., Chen E.C.M. //Rapid Commun. Mass Spectrom. 2018. V. 32. P. 604.

[2] Khatymov R.V., Muftakhov M.V., Tuktarov R.F., Shchukin P.V., Khatymova L.Z., Pancras E., Terentyev A.G., Petrov N.I. // J. Chem. Phys. 2024. V. 160.

[3] Khatymov R.V., Shchukin P.V., Muftakhov M.V., Yakushchenko I.K., Yarmolenko O.V., Pankratyev E.Y. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2020. V. 22. P. 3073.


## Упругие среды в модели вселенной как 3D-браны.


**Шарипов Р.А.**

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия.


Модель вселенной как 3D-браны — это название новой неэйнштейновской теории гравитации. Требование преемственности между теорией Эйнштейна и новой теорией диктует необходимость интерпретации эффектов, предсказанных теорией относительности, в рамках новой теории. Эффект замедления времени для быстро движущегося наблюдателя рассматривался в [1] с использованием пружинного маятника в качестве датчика времени. В докладе излагаются результаты другой работы [2], где рассматривается эффект сокращения длин быстро движущихся объектов в направлении их движения. Для этого в [2] в рамках новой теории был построен лагранжев формализм и выведены уравнения релятивистской динамики нелинейных упругих сред с учётом гравитационного поля. Отправной точкой для этого стал нелинейный тензор деформации

$$u_{ij} = (\breve{g}_{ij} - G_{ij})/2\,. \tag{1}$$

Здесь $G_{ij}$ — метрика, индуцированная отображением вложения изначально недеформированной упругой среды в реальную трёхмерную вселенную, а $\breve{g}_{ij}$ — метрика, полученная из метрики реальной трёхмерной вселенной $g_{ij}$ путём модифицирования при помощи оператора, обратного оператору релятивистского сжатия в направлении вектора скорости движения среды. Выбор тензора деформации в форме (1) обеспечивает совпадение характера релятивистского сжатия упругих сред в направлении их движения в двух теориях при условии отсутствия упругих напряжений в них, причём при любой форме линейного или нелинейного упругого отклика этих сред. Указанное совпадение имеет место лишь для упругих сред из обычной барионной материи. Для упругих сред из тёмной материи (если таковые существуют), характер релятивистского сжатия может быть иным, ибо новая теория допускает отличие предельной скорости для тёмной материи от предельной скорости барионной материи, которую принято считать совпадающей со скоростью света.

[1] Sharipov R. A., Relativistic hardening and softening of fast moving springs, ResearchGate publication No 379537924, 2024, DOI: 10.13140 /RG.2.2.10991.24488.

[2] Sharipov R. A., Relativistic elasticity in the 3D-brane universe model. Part 1., ResearchGate publication No 388315101, 2025, DOI: 10.13140 /RG.2.2.28837.61920.

## Формула следа двумерного гармонического осциллятора в полосе.

**Яндыбаева И.Г.**

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассмотрим оператор

$$L = L_0 + V,$$

где $V$ – оператор умножения на ограниченную измеримую финитную вещественнозначную функцию $V\,(x)$, $x \in \Pi$. Оператор $L_0$ в пространстве

$L_2(\Pi)$,

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, \pi]\},$$

порожденный дифференциальным выражением

$$lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1^2 u$$

и граничными условиями Дирихле:

$$u \in L_2(\Pi), \quad u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Так, что оператор $L_0$ имеет область определения

$$D(L_0) = \left\{u(x_1, x_2) : u \in W_2^2(\Pi), \quad u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0\right\}.$$

Пусть $\lambda_k$ – собственные значения оператора $L_0$, $\nu_k$ – кратность собственных значений $\lambda_k$, $\mu_s^{(k)}$ – собственные значения оператора $L$, $P_k$ - ортогональный проектор по собственному числу $\lambda_k$. Тогда $\nu_k = \dim P_k$.

Справедлива [1]

**Теорема**. Пусть $V(x) \in C_0^2(\Pi)$, тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1,3\}} \left[\sum_{s=1}^{\nu_k} \left(\lambda_k - \mu_s^{(k)}\right) + \operatorname{Sp} P_k V\right] = \frac{1}{12\pi} \int\limits_{\Pi} V^2(x) dx.$$

[1] Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г. Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе // Дифф. ур. 2019. Т.55. №5, С. 691–701.

**Научное издание**

**КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**Сборник материалов Международной научной конференции (17 – 21 марта 2025 г.)**

Подписано в печать 05.03.2025г. Формат 60x90/16.
Печать: цифровая.
Усл. печ. л. 3,40. Тираж 50. Заказ 2339

АЭТЕРНА
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

**Отпечатано в редакционно-издательском отделе НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»**
**450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120**
**https://aeterna-ufa.ru**
**info@aeterna-ufa.ru**
**+7 (347) 266 60 68**