

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Сборник материалов
Международной научной конференции
(11 – 15 марта 2024 г.)*

**УФА
АЭТЕРНА
2024**

УДК 51
ББК 22.1
К 637

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук **Р.Н. Гарифуллин** (*отв. редактор*);
д-р физ.-мат. наук **И.Х. Мусин**;
д-р физ.-мат. наук **В.Ю. Новокшенов**;
канд. физ.-мат. наук **Р.А. Башмаков**

К637 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (11 – 15 марта 2024 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2024. – 76 с.**

ISBN 978-5-00177-922-3

Представленные в сборнике тезисы посвящены различным областям фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются различные постановки нелинейных задач. Также рассматриваются задачи теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными и задачи физико-химической механики многофазных сред.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-00177-922-3

© Коллектив авторов, 2024
© ООО «АЭТЕРНА», 2024

Содержание

<i>Абузярова Н.Ф., Семенова Д.В.</i> О делителях в алгебре Бернштейна	7
<i>Аиткужина Н.Н., Гайсин А.М., Гайсин Р.А.</i> Массивность асимптотического множества для целого ряда Дирихле	8
<i>Alfimov G. L., Kutsenko N.A., Zezyulin D. A.</i> Steady-state solutions for a system of two coupled defocusing Gross-Pitaevskii equations with double-well potential	9
<i>Ахмерова Э.Ф., Амангильдин Т.Г.</i> Связь функции Грина оператора Штурма-Лиувилля с ядрами резольвент различных дифференциальных операторов	10
<i>Ахметов А.Т., Гималтдинов И.К., Мухаметзянов А.Ф., Гизатуллин Р.Ф.</i> Усиление ударных волн в насыпных средах	11
<i>Басков О.В., Потапов Д.К.</i> О существовании решений задачи Штурма-Лиувилля с несамосопряженным дифференциальным оператором и разрывной нелинейностью	12
<i>Башмаков Р.А., Исламова А.И., Пангаева А.О.</i> Решение интегродифференциального уравнения фильтрации флюида в гидро-разрывной трещине	13
<i>Белова А.С.</i> Асимптотические формулы высоких порядков для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц	14
<i>Бобков В.Е.</i> Неравенства типа Сегё-Вайнбергера для кольцевых областей с граничными условиями Робена-Неймана	15
<i>Бойко К.В., Федоров В.Е.</i> Решение неоднородного уравнения с дробными производными и гельдеровой неоднородностью	16
<i>Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А.</i> Влияние степени перегрева на форму струи жидкого азота в условиях низких давлений	17
<i>Борисов Д.И., Поляков Д.М.</i> О спектральных свойствах оператора Шрёдингера со сдвигом	18
<i>Volchkova N.P., Volchkov Vit. V.</i> Characterization of harmonic functions by zero spherical means	19
<i>Габдразманов Р.И.</i> Бифуркация Андронова-Хопфа в системах управления с негладкими функциями	20
<i>Гайсин Р.А.</i> Об условии регулярности слабо регулярной последовательности	21
<i>Гайсина Г.А.</i> Разложение аналитических в полуплоскости функций в ряды Дирихле с учетом мажоранты роста, удовлетворяющей условию Левинсона	22
<i>Галеева Д.Р.</i> Консервативная численная схема для решения системы уравнений Кана-Хилларда-Навье-Стокса	23

<i>Галиакбарова Э.В.</i> Акустическое зондирование гидроразрывных трещин в низкопроницаемых пластах через скважину, заполненную водой	24
<i>Галиакбарова Э.В., Каримова Г.Р.</i> Поверхностные акустические волны горизонтальной и вертикальной поляризации на границе раздела пористых сред	25
<i>Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.</i> Акустика линейной части подземного трубопровода, подверженного газогидратным отложениям	27
<i>Гарифуллин Р.Н.</i> О заменах в уравнениях пятого порядка	28
<i>Галимзянов М.Н.</i> Взаимодействие волны давления в трубе, заполненной жидкостью, содержащей сферический пузырьковый кластер	29
<i>Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н.</i> Массоперенос между порами и трещинами при распространении волны сжатия в трещиновато-пористой среде	30
<i>Губайдуллин А.А., Пяткова А.В.</i> Акустическое течение в прямоугольной полости с разнонагретыми горизонтальными стенками	31
<i>Давлетшина М.Р, Аюпов А.Ф.</i> Математическая модель диссоциации газовых гидратов в высокочастотном электромагнитном поле	32
<i>Дворников М.С., Ахметьев П.М.</i> Эволюция магнитного поля в пространственно-неоднородных аксионных структурах	34
<i>Домрин А.В.</i> О динамике особенностей решений интегрируемых эволюционных уравнений	34
<i>Екомасов Е.Г., Дмитриев С.В., Фахретдинов М.И., Самсонов К.Ю., Кабанов Д.К.</i> Нелинейные волны уравнения Клейна-Гордона в модели с несколькими примесями	35
<i>Екомасов Е.Г., Звездин К.А., Антонов Г.И., Нерадовский Д.Ф., Фахретдинов М.И.</i> Нелинейная динамика магнитных вихрей в трех- и пятислойных наноцилиндрах	36
<i>Efremova L.S.</i> On C^1 -smooth Ω -stable skew products on $3D$ -torus	37
<i>Ильясов А.М.</i> Билинейный режим течения в пласте с конечной трещиной авто-ГРП	37
<i>Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.</i> Об одной шкале банаховых пространств аналитических функций на выпуклой области	39
<i>Ишмухаметова А.А., Кабиров И.Ф., Нигматуллин Т.Э.</i> Математическая модель истечения изолирующего состава в проницаемый пласт через горизонтальную скважину	40
<i>Кабанко М.В., Малютин К.Г.</i> Некоторые условия интерполяционности в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости	41

<i>Кадченко С.И., Рязанова Л.С.</i> Асимптотические формулы для собственных чисел дискретных полуограниченных операторов	42
<i>Каримов О.Х., Набиев Дж.И.</i> $L_{2,p}$ - оценки решений нелинейных систем	43
<i>Ковальчук Т.Н., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П.</i> Применение подходов механики многофазных систем для моделирования двухфазной фильтрации в нефтяном пласте	45
<i>Кордюков Ю.А.</i> О топологических препятствиях к существованию непериодических базисов Ванье	46
<i>Кузбеков Т.Т.</i> Об одной факторизации оператора свертки	47
<i>Мамаева З.З.</i> Анализ собственных колебаний столба жидкости в скважине, сообщающейся с пластом	47
<i>Маркова А.В., Абдуллин М.Ф., Поглазов К.Ю.</i> Определение изомерного состава образцов с применением методов газовой хромато-масс-спектрометрии и спектроскопии диссоциативного захвата электронов	48
<i>Maslov E.M., Koutvitsky V.A.</i> On the oscillations of the inflaton scalar field in some Starobinsky-like potentials	49
<i>Мурашов Р.Р.</i> О субгармоничности функций с разделёнными переменными на плоскости	50
<i>Мусакаев Н.Г., Бородин С.Л.</i> Математическая модель процесса закачки холодного углекислого газа в насыщенный метаном и водой зонально-неоднородный пористый пласт	51
<i>Мусин И.Х.</i> О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на классе ультрадифференцируемых функций	52
<i>Мухутдинова А.А.</i> Численное исследование течения жидкости в кольцевых каналах с учетом переменной вязкости	53
<i>Насибуллаева Э.Ш.</i> Исследование акустического рассеяния на системе звукопроницаемых сфер	54
<i>Насырова Д.А.</i> О собственных колебаниях жидкости в вертикальной и горизонтальной скважинах	55
<i>Наумова А.А.</i> Рост субгармонических функций в бесконечном полукольце	56
<i>Низамова А.Д.</i> Численное исследование устойчивости течения жидкости в кольцевом канале	57
<i>Никонорова Р.Ф.</i> Подмодели движения одноатомного газа	58
<i>Павленко В.А.</i> Построение решений аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующих некоторым гамильтоновым системам из списка Кимуры и Кавамуко	59
<i>Павленко В.Н.</i> О числе решений одной задачи с параметром и разрывной нелинейностью	60

<i>Попенов С.В.</i> Задачи интерполяции голоморфными функциями из замыкания системы экспоненциальных мономов с заданными показателями и кратностями	61
<i>Рахимов А.А., Валиев А.А., Ахметов А.Т.</i> Особенности течения нативной и разбавленной крови в микроканале со ступенчатым сужением	62
<i>Рахимова А.И.</i> О гиперциклических операторах в \mathcal{F}_φ	63
<i>Сакбаев В.Ж.</i> Следы функций бесконечномерного аргумента и краевые задачи для оператора Лапласа-Вольтерра	64
<i>Скрипка Н.М., Федоров В.Е.</i> Один класс дробных эволюционных уравнений на прямой без начальных условий	65
<i>Слободянюк А.О., Лебедев С.А.</i> Ошибка в расчетах высоты морской поверхности при отклонении оси антенны альтиметра от положения надира	66
<i>Смирнов А.О.</i> О векторных производных формах нелинейного уравнения Шредингера	67
<i>Сысоев С.Е.</i> Задача интегральной геометрии для одного семейства гипербол	68
<i>Уразбахтина Л.З., Юлмухаметова Ю.В.</i> Плоский коллапс с линейным полем скоростей	69
<i>Хабibuллин Б. Н.</i> Интегральные неравенства для субгармонических функций	70
<i>Хакимов А.Г.</i> Цилиндрический изгиб микро- нанопластики с учетом действия среднего давления	71
<i>Шарипов Р.А.</i> Закон сохранения энергии для гравитационного поля в модели вселенной как 3D-браны	73
<i>Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С.</i> Эквивалентные гамильтновы системы для дифференциальных уравнений с производными четного порядка	74

О делителях в алгебре Бернштейна

Абузярова Н.Ф.¹, Семенова Д.В.^{1,2}

¹Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

²Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\sigma > 0$, $B_\sigma = \{\psi \in H(\mathbb{C}) : \|\psi\|_\sigma := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{\psi(z)}{\exp(\sigma|\operatorname{Im} z|)} < \infty\}$, — банахово пространство целых функций. Линейное пространство

$$B_\infty := B_\sigma = \lim \operatorname{ind} P_\sigma,$$

снабженное топологией индуктивного предела пространств B_σ , является топологической алгеброй и называется *алгеброй Бернштейна*.

Пусть $D(B_\infty)$ — множество *делителей* алгебры B_∞ , определяемое как совокупность всех функций $\varphi \in B_\infty$, для которых справедлива „теорема деления“:

$$F \in B_\infty, \frac{F}{\varphi} \in H(\mathbb{C}) \implies \frac{F}{\varphi} \in B_\infty.$$

Предложение 1. *Функция $\psi \in B_\infty$ является делителем этой алгебры тогда и только тогда, когда*

$$\exists A > 0, x_0 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x_0, \exists x' \in \mathbb{R} :$$

$$|x - x'| \leq A \text{ и } \ln |\psi(x')| \geq -A.$$

Пусть \mathcal{S} — класс функций типа синуса. Легко проверить, что

$$\mathcal{S} \subset D(B_\infty),$$

а из результатов А.М. Седлецкого следует, что это включение собственное.

Для целой функции ψ ее нулевое множество обозначаем символом \mathcal{Z}_ψ . Имеет место

Теорема 1. *Совокупность делителей ψ алгебры Бернштейна, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} \lambda = O(1)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathcal{Z}_\psi$, совпадает с классом \mathcal{S} функций типа синуса.*

Массивность асимптотического множества для целого ряда Дирихле

Аиткужина Н.Н., Гайсин А.М., Гайсин Р.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

В докладе речь пойдет об асимптотическом поведении суммы целого ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n s}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad (1)$$

на кривых ограниченного наклона, уходящих в бесконечность. Исследуемая задача восходит к известной проблеме Поля (см. [1]) для целых трансцендентных функций.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, $Q(z)$ — соответствующее четное произведение Вейерштрасса. Пусть, далее, L — класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на \mathbb{R}_+ положительных функций, Φ — выпуклая функция из L ,

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln M_F(\sigma) \leq \Phi(m\sigma)\}, \quad m \geq 1,$$

где $M_F(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$. Положим $D(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi)$.

Предположим, что мажоранта Φ такова, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty,$$

где φ — функция, обратная к Φ . Пусть

$$W(\varphi) = \left\{ w \in L : \sqrt{x} \leq w(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\}.$$

Через $\mu(\sigma)$ обозначим максимальный член ряда (1).

Будем говорить, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$ -нормальна, если существует $\theta \in L$, такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = 0, \quad -\ln|Q'(\lambda_n)| \leq \theta(\lambda_n), \quad n \geq 1$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть верхняя плотность последовательности Λ конечна, а последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$ -нормальна. Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Phi)$, для любой кривой γ ограниченного наклона на множестве $A \subset \mathbb{R}_+$, $DA = 1$, было справедливо асимптотическое равенство

$$\ln |F(s)| = (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma), \quad s \in \gamma, \quad \text{Res } = \sigma \in A, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} = 0.$$

- [1] Pólya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.

Steady-state solutions for a system of two coupled defocusing Gross-Pitaevskii equations with double-well potential

G. L. Alfimov^{a,c}, N.A. Kutsenko^a, D. A. Zezyulin^{b,c}

^a MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;

^b ITMO University, St. Petersburg, Russia;

^c Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia.

We consider the following system

$$\begin{cases} i\Psi_{1,t} = -\Psi_{1,xx} + U(x)\Psi_1 + (|\Psi_1|^2 + \beta|\Psi_2|^2)\Psi_1, \\ i\Psi_{2,t} = -\Psi_{2,xx} + U(x)\Psi_2 + (\beta|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)\Psi_2. \end{cases} \quad (1)$$

The system (1) has been used to model the dynamics of a two-component Bose-Einstein condensate trapped in an external magnetic potential $U(x)$. When the potential is a double-well, the system can describe quantum tunneling of both components between the wells. This makes it of significant interest for physical applications.

In our study we assume that $\beta > 0$ and the double-well potential is given by the formula

$$U(x) = x^2 + H \operatorname{sech}(\alpha x), \quad H > 0, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

We consider the stationary solutions of (1) that have the form

$$\Psi_{1,2}(t, x) = e^{-i\mu_{1,2}t} u_{1,2}(x), \quad (3)$$

where $\mu_{1,2}$ are real parameters. We focus on *nonlinear localized modes* (NLM) which satisfy the zero boundary conditions at infinity

$$u_{1,2} \rightarrow 0, \quad \text{when } x \rightarrow \pm\infty.$$

In our study, we employ the method of “filtering out” singular solutions described in [1]. It is based on three theorems proved in [1] and allows to compute *all* NLMs that coexist for given values of parameters.

It has been found that, in the case of potential (2), the system (1) exhibits a great diversity of NLMs. A diagram of areas of existence of NLMs of various types have been sketched on the plane of parameters (μ_1, μ_2) . Basic bifurcations associated with the “birth” and “death” of various ILMs have been investigated.

- [1] G.L. Alfimov, A.P. Fedotov, N.A. Kutsenko, D.A. Zezyulin, Stationary modes for vector nonlinear Schrodinger-type equations: A numerical procedure for complete search and its mathematical background, *Physica D*, **454**, art. 133858 (2023) (DOI: 10.1016/j.physd.2023.133858)

Связь функции Грина оператора Штурма-Лиувилля с ядрами резольвент различных дифференциальных операторов Ахмерова Э.Ф., Амангильдин Т.Г.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Задачу о представлении ядра резольвенты различных самосопряженных дифференциальных операторов, в том числе многомерных (см., например, [1]), можно свести к построению функции Грина оператора Штурма - Лиувилля.

Рассмотрим в пространстве $L^2[0, \pi]$ дифференциальный оператор L , порожденный дифференциальным выражением $lu = -u''$ и граничными условиями Дирихле $u(0) = u(\pi) = 0$. Функция Грина $G(x, t, \lambda)$ этого оператора выписана явно в работе [2]. Приведем 2 примера связи.

- Пусть в пространстве $L^2[0, \pi]$ оператор H^0 порожден дифференциальным выражением $(-1)^m u^{(2m)}$ с областью определения $D(H^0) = \{u(x) \in W_{2m}^2[0, \pi], u(0) = u''(0) = \dots = u^{(2m-2)}(0) = 0, u(\pi) = u''(\pi) = \dots = u^{(2m-2)}(\pi) = 0\}$. Тогда ядро резольвенты $R^0(\mu)$ оператора H^0 имеет вид

$$R^0(x, t, \mu) = \mu^{(1-m)/m} \sum_{k=0}^{m-1} b_k G(x, t, \mu^{1/m} \varepsilon_k), \quad b_k \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_n)},$$

где ε_k принимает все значения корня m -ой степени единицы, $\varepsilon_k = e^{2\pi k i/m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

- В качестве второго примера рассмотрим двумерный оператор Лапласа действующий в пространстве $\mathbb{H} = L^2[0, \pi] \otimes L^2[0, \pi]$:

$$H^0 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}.$$

Тогда для ядра резольвенты $R^0(\mu)$ оператора оператора H^0 справедливо представление

$$R^0((x, t); (y, \tau), \mu) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} G(x, t, \mu - m^2) \sin my \sin m\tau.$$

- [1] Akhmerova E.F. Regularized Trace Formula for One Partial Differential Operator, *Azerbaijan Journal of Mathematics*. **11**:1 (2021), 45-66.
- [2] Ахмерова Э.Ф. Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$ -го порядка, *Матем. заметки*, **90**:6 (2011), 833-844.

Усиление ударных волн в насыпных средах

Ахметов А.Т.¹, Гималтдинов И.К.², Мухаметзянов А.Ф.²,
Гизатуллин Р.Ф.¹

¹Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

²ФГБОУ ВО «УГНТУ», г. Уфа, Россия

Обнаружен удивительный эффект усиления повторных волн, в частности, зондирующих импульсов в песке. В качестве источника ударных волн использовалась вертикальная ударная труба, нижняя часть которой (296 мм) заполнена утрамбованным песком с пористостью 38%. Повторные импульсы – переотражённые волны [1]. Амплитуда переотражённых волн при прохождении через песок в 2,5 раза превышала амплитуду основного ударно волнового импульса. Для выяснения причин, приводящих к усилению ударных волн, проведены эксперименты с песком различной уплотненности, а также изучено изменение структуры волны с увеличением слоя песка. В частности, на глубине 60 мм амплитуды прошедших волн нормированные на амплитуды волн у поверхности, для основного импульса: $P'_0/(2P_0) = 0,6$, для зондирующего: $P'_1/(2P_1) = 1,4$. Таким образом, амплитуда повторного импульса в 2,3 раза выше основного. Формирование усиленного импульса связано с изменением структуры песка в

слое 60 мм после прохождения и отражения основного импульса от слоя насыпки [1].

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов в некотором приближении можно использовать теорию акустических волн [2]. Исходя из выражений для коэффициентов отражения и прохождения по интенсивности волн в насыпных средах, для отношения коэффициентов прохождения двух различных пористостей t_1 и t_2 получается выражение: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\rho_1 C_1}{\rho_2 C_2}$, где $\rho_1 C_1$ и $\rho_2 C_2$ – волновые сопротивления утрамбованного и рыхлого песков. В нашем случае расчет дает $t_1/t_2 = 2,6$, т.е. интенсивность волны проходящей в рыхлый песок в 2,6 раза больше чем в более плотный. Максимальное усиление зондирующего импульса в уплотненном песке наблюдалось на глубине 80 мм.

- [1] Ахметов А.Т., Гималтдинов И.К., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф., Богданов Д.Р. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48. № 1. С. 23-26.
- [2] Зацепин А.Ф. Акустический контроль. Введение в физику акустического контроля: учебное пособие. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. - 88 с.

**О существовании решений задачи Штурма–Лиувилля
с несамосопряженным дифференциальным оператором
и разрывной нелинейностью**

Басков О.В., Потапов Д.К.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается проблема существования решений задачи Штурма–Лиувилля

$$Lu(x) \equiv -(p(x)u'(x))' + r(x)u'(x) + q(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (2)$$

с несамосопряженным дифференциальным оператором L и нелинейностью $g(x, u)$, разрывной по фазовой переменной u . Здесь $p \in C_{1,\alpha}([a, b])$, $r, q \in C_{0,\alpha}([a, b])$, $r(x) \not\equiv 0$, $0 < \alpha < 1$, $-\infty < a < b < +\infty$, λ – спектральный параметр, $g(x, 0) = 0$ почти всюду на (a, b) .

Для дальнейших рассуждений потребуются следующие определения.

Определение 1. *Сильным решением* задачи (1), (2) называется функция $u \in W_1^2((a, b)) \cap \dot{W}_2^1((a, b))$, удовлетворяющая уравнению (1) для почти всех $x \in (a, b)$.

Определение 2. *Полуправильным решением* задачи (1), (2) называется такое сильное ее решение u , значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in (a, b)$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

В данной работе осуществляется перенос результатов из [1, 2] для эллиптических краевых задач с параметром и разрывными нелинейностями на задачу (1), (2). Методом верхних и нижних решений устанавливаются теоремы о существовании нетривиальных (положительных и отрицательных) сильных и полуправильных решений при положительных значениях спектрального параметра λ . Приводятся примеры разрывных нелинейностей $g(x, u)$, удовлетворяющих условиям полученных теорем. Демонстрируются графики решений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 23-21-00069, <https://rscf.ru/project/23-21-00069/>.

- [1] Павленко В.Н., Потапов Д.К. Существование полуправильных решений эллиптических спектральных задач с разрывными нелинейностями // Матем. сб. 2015. Т. 206. No 9. С. 121–138.
- [2] Павленко В.Н., Потапов Д.К. Существование решений невариационной эллиптической краевой задачи с параметром и разрывной нелинейностью // Матем. тр. 2016. Т. 19. No 1. С. 91–105.

Решение интегро-дифференциального уравнения фильтрации флюида в гидроразрывной трещине

Башмаков Р.А.¹, Исламова А.И.², Пангаева А.О.³
¹УУНИТ, ²СНЭМА-СЕРВИС, ³УГНТУ, г.Уфа, Россия

Рассматривается вертикальная закрепленная пропантом трещина, полученная путем гидроразрыва пласта (ГРП), полудлины l . В известной литературе рассматриваются трещины бесконечной длины [1 - 2] или не учитывается фильтрация флюида между стенками трещины и пласта, или находятся приближенные решения [3].

В работе находится точное аналитическое решение интегро - дифференциального уравнения [4], описывающего фильтрацию флюида в трещине: $\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \chi_f \int_0^t \frac{\partial \Delta P_f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$, при граничных условиях $\Delta P_f|_{x \geq 0} = 0$, $\Delta P_f|_{x < 0} = 0$.

0, $\frac{\partial \Delta P_f}{\partial x}|_{x=l} = 0$, $\Delta P_f|_{t>0, x=0} = \Delta P_{f(w)} = \text{const}$ – отклонение давления от первоначального значения на скважине. Здесь $P_f = P_f(x, t)$ – давление в трещине на расстоянии x от стенки скважины, $0 \leq x < l$, $t > 0$; $\Delta P_f = P_f - P_0$ – отклонение давления в трещине от первоначального пластового давления P_0 , $\chi_f = (2m_p \sqrt{\kappa_p}) / (d_f m_f \kappa_f)$, где d_f – ширина трещины ГРП, m_p , m_f – пористости, κ_p , κ_f – коэффициенты пьезопроводности. Нижние индексы p и f соответствуют значениям параметров в пласте и трещине ГРП. Рассмотрен режим, при котором поддерживается постоянное давление на скважине.

- [1] Хабибуллин, И.Л. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва/ И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов // Известия РАН. Механика жидкости и газа, – 2019, № 5. – С. 6–14.
- [2] Shagapov, V.S. Evolution of Filtration Pressure Waves in a Hydraulic Fracture during Transient-Well-Operation Modes / V.S. Shagapov, R.A. Bashmakov, N.O. Fokeeva, A.A. Shammatova // Mathematics 2023, 11, 98. <https://doi.org/10.3390/math11010098>
- [3] Шагапов, В.Ш. Приближенное решение задачи об упругом режиме фильтрации в трещине, находящейся в нефтяном пласте/ В.Ш. Шагапов, З.М. Нагаева // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т.93, № 1. – С. 206–215.
- [4] Нагаева, З. М. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте / З. М. Нагаева, В. Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81, № 3. – С. 319 – 329.

Асимптотические формулы высоких порядков для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц

Белова А.С.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Рассматривается автономная гамильтонова система, зависящая от малого параметра ε :

$$\frac{dx}{dt} = JA(\varepsilon)x, \quad x \in R^{2N}. \quad (1)$$

Здесь $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, где I – единичная $(N \times N)$ матрица; $A(\varepsilon)$ – вещественная симметрическая матрица, гладкая с порядком гладкости k по малому параметру ε .

Важную роль при изучении динамики системы (1) в критических случаях (когда все собственные значения матрицы $JA(0)$ являются чисто мнимыми) играют асимптотические формулы для собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ матрицы $JA(\varepsilon)$ вида

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{1/p}\lambda_1 + \varepsilon^{2/p}\lambda_2 + \dots + \varepsilon^{k/p}\lambda_k + o(\varepsilon^{k/p}),$$

в которых натуральное число p связано с кратностью собственного значения λ_0 матрицы $JA(0)$. В большинстве случаев основные качественные характеристики динамики системы (1) определяет первый коэффициент λ_1 в указанной формуле. Поэтому известные здесь работы, как правило, ограничиваются построением только первого приближения (см., например, [1, 2]). В то же время, известен ряд примеров, когда в задаче исследования системы (1) приходится учитывать и некоторые последующие коэффициенты асимптотических разложений.

В докладе предлагается процедура построения асимптотических формул высоких порядков для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц $JA(\varepsilon)$ в ряде критических случаях. На основе полученных формул предлагаются новые критерии устойчивости автономных гамильтоновых систем при малых значениях $|\varepsilon|$.

- [1] Майлыбаев А. А., Сейранян А.П. *Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике* - М. : Физматлит, 2009. - 353 с.
- [2] Yumagulov M. G., Ibragimova L. S. and Belova A. S. *Approximate research of problems on perturbation of periodic and autonomous Hamiltonian systems in critical cases*. Lobachevskii J Math **41**, 1924–1931 (2020).

Неравенства типа Сегё-Вайнбергера для кольцевых областей с граничными условиями Робена-Неймана

Бобков В.Е.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\tau_k(\Omega)$ — k -е собственное значение оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ вида $\Omega_{\text{out}} \setminus \overline{B_\alpha}$ с граничным условием Неймана на $\partial\Omega_{\text{out}}$ и граничным условием Робена с параметром $h \in (-\infty, +\infty]$ на сфере ∂B_α радиуса $\alpha > 0$ с центром в начале координат, где предельный случай $h = +\infty$ понимается как граничное условие Дирихле на ∂B_α .

В случае $h > 0$ известно, что первое собственное значение $\tau_1(\Omega)$ не превосходит $\tau_1(B_\beta \setminus \overline{B_\alpha})$, где $\beta > 0$ выбрано так, что $|\Omega| = |B_\beta \setminus \overline{B_\alpha}|$. Такую оценку можно рассматривать как обратное неравенство типа Фабера-Крана. Мы устанавливаем этот результат для любого $h \in (-\infty, +\infty]$. Более того, мы приводим соответствующие оценки для старших собственных значений при дополнительных геометрических предположениях на Ω . Такие оценки можно рассматривать как неравенства типа Сегё-Вайнбергера.

В качестве вспомогательной информации, мы показываем, что собственные функции соответствующие собственными значениями $\tau_i(B_\beta \setminus \overline{B_\alpha})$ с $i \in \{2, \dots, N + 2\}$ нерадиальны по крайней мере для всех положительных h и всех достаточно больших отрицательных h . В то же время, численные эксперименты показывают, что в плоском случае $N = 2$ уже *вторые* собственные функции могут быть радиальными при некоторых $h < 0$.

Доклад по работе [1].

- [1] Anoop, T.V., Bobkov, V., Drábek, P. Reverse Faber-Krahn and Szegő-Weinberger type inequalities for annular domains under Robin-Neumann boundary conditions. (2023), arXiv:2309.15558

Решение неоднородного уравнения с дробными производными и гельдеровой неоднородностью

Бойко К.В., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто порядка $\alpha > 0$ [1], \mathcal{Z} — банахово пространство.

При $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$ (из множества функций, удовлетворяющих на отрезке $[0, T]$ условию Гельдера), $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_{\alpha, G}^n$ [1] рассмотрим линейное неоднородное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

где $A_k \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, т. е. линейные замкнутые операторы в банаховом пространстве \mathcal{Z} с областями определения $D_{A_k} \subset \mathcal{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Решением задачи Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

для уравнения (1) будем называть функцию $z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$, $\sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (2) и равенство (1) для всех $t \in (0, T]$.

Обозначим $\mathcal{D} := \bigcap_{k=1}^n D_{A_k}$, $R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{D}$, $Y_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda$. Снабдим множество \mathcal{D} нормой $\| \cdot \|_{\mathcal{D}} = \| \cdot \|_{\mathcal{Z}} +$

$\sum_{k=1}^n \| A_k \cdot \|_{\mathcal{Z}}$, относительно которой \mathcal{D} является банаховым пространством.

Теорема Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_{\alpha, G}^n$, \mathcal{D} плотно в \mathcal{Z} , $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (1), (2), при этом оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Y_0(t-s) f(s) ds,$$

$$Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k \right) e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0.$$

- [1] Boyko K. V., Fedorov V. E. The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 46, No. 6. P.1293–1302.

Влияние степени перегрева на форму струи жидкого азота в условиях низких давлений

Болотнова Р.Х.¹, Коробчинская В.А.^{1,2}

¹Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия,

²Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Исследования, направленные на изучение процессов формирования расширяющихся струй криогенных жидкостей при распылении из тонкого сопла в условиях низких давлений, применяются в различных областях промышленности и науки: в частности, в ракетной технике для оптимизации процессов охлаждения и повышения производительности ракетных двигателей.

Целью настоящей работы является численное моделирование процесса вскипания струй криогенного жидкого азота, вытекающих из сосуда

высокого давления через тонкое коническое сопло в вакуумную камеру в условиях, близких к экспериментам [1], в которых изучается влияние увеличения степени перегрева на эволюцию распыления струи вскипающего жидкого азота.

Для описания процесса используется ранее разработанная двухфазная модель [2], [3] парожидкостной смеси в соответствии с двухтемпературным, однодавленческим, односкоростным приближениями с учетом неравновесных процессов испарения и конденсации и контролем условий перехода пузырькового течения в парокapelное. Численная реализация модели выполнена в пакете вычислительной гидродинамики с применением разработанного авторами решателя. Исследованы особенности формирования струи жидкого азота при различных начальных условиях. Проанализировано влияние степени перегрева на угол раскрытия струи. Достоверность разработанного численного метода оценена путем сопоставления с экспериментальными данными.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00309, <https://rscf.ru/project/23-29-00309/>.

- [1] Rees A., Salzmann H., Sender J., Oschwald M. // In: 8th EUCASS conference, 2019. Madrid, Spain.
- [2] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Gainullina E.F. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. No. 5. P. 1579–1586.
- [3] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф. // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 49. № 24. С. 46–49.

О спектральных свойствах оператора Шрёдингера со сдвигом

Борисов Д.И., Поляков Д.М.

ИМВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, ЮМИ ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

Работа посвящена изучению спектральных свойств возмущенного оператора \mathcal{H}^ε , который рассматривается в пространстве $L_2(0, 1)$ и задается равенством

$$(\mathcal{H}^\varepsilon y)(x) = -y''(x) + V(x)y(x) + S(x)(y(x + \varepsilon) - y(x)),$$

где V и S — комплекснозначные функции из пространства $C^1[0, 1]$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а также функция y считается продолженной нулем за пределы отрезка $[0, 1]$, а результат действия сужается на данный отрезок. Область определения данного оператора имеет вид $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon) := \dot{W}_2^2(0, 1)$, где $\dot{W}_2^2(0, 1)$ — подпространство функций из пространства Соболева $W_2^2(0, 1)$, обращающихся в нуль на концах отрезка.

Обозначим через λ_n , $n \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора \mathcal{H}^ε и через $\chi_I = \chi_I(x)$ — характеристическую функцию отрезка I на вещественной прямой.

Наш основной результат посвящен асимптотике собственных значений оператора \mathcal{H}^ε при больших номерах n .

Теорема. Для собственных значений λ_n оператора \mathcal{H}^ε справедлива следующая асимптотика

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \pi^2 n^2 + 2 \int_0^1 V(x) \sin^2 \pi n x \, dx \\ & + 2 \int_0^1 S(x) \sin \pi n x \left(\chi_{[0, 1-\varepsilon]}(x) \sin \pi n(x + \varepsilon) - \sin \pi n x \right) dx \\ & - \frac{\sin \pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^1 (S(x) - V(x)) \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) \, dt - \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(t) \, dt \right) dx \\ & + \frac{\sin 2\pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^{1-\varepsilon} S(x) \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) \, dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{1-\varepsilon} S(t) \, dt \right) dx + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

при $n \rightarrow +\infty$. Оценка остаточного члена равномерна по ε .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>

Characterization of harmonic functions by zero spherical means

Volchkova N.P., Volchkov Vit.V.

Donetsk National Technical University, Donetsk National University,
Donetsk, Russia

Let B_R be an open ball of radius R in \mathbb{R}^n with the center at zero, $B_{0,R} = B_R \setminus \{0\}$ and a function f is harmonic in $B_{0,R}$. If f has zero residue at point $x = 0$, then the flow of its gradient through any sphere lying in $B_{0,R}$ is zero. We study the opposite phenomenon for the case when only spheres of one or two fixed radii r_1 и r_2 are allowed. A description of the class

$$\mathfrak{H}_r(B_{0,R}) = \left\{ f \in C^\infty(B_{0,R}) : \int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, d\omega = 0 \quad \forall x \in B_{R-r} \setminus S_r \right\}$$

was found, where $r \in (0, R/2)$, $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$, $S_r = S_r(0)$. It is proved that if r_1/r_2 is not a ratio of the zeros of the Bessel

function $J_{n/2}$ and $f \in (\mathfrak{H}_{r_1} \cap \mathfrak{H}_{r_2})(B_{0,R})$, then the function f is harmonic in $B_{0,R}$ and $\text{Res}(f, 0) = 0$. This result cannot be significantly improved. Namely, if $r_1/r_2 = \alpha/\beta$, where $J_{n/2}(\alpha) = J_{n/2}(\beta) = 0$, or $R < r_1 + r_2$, then there exists a non-harmonic function $f \in C^\infty(B_R)$ on the set $B_{0,R}$ such that

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0, \quad x \in B_{R-r_j}, \quad j \in \{1; 2\}.$$

In addition, the condition $f \in C^\infty(B_{0,R})$ cannot be replaced, generally speaking, by the requirement $f \in C^s(B_R)$ for an arbitrary fixed $s \in \mathbb{N}$. Our results complement the well-known two-radius theorems for harmonic functions (see [1] and the references there).

- [1] Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Бифуркация Андронова-Хопфа в системах управления с негладкими функциями

Габдрахманов Р.И.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Изучается задача о бифуркации Андронова-Хопфа для системы вида

$$L\left(\frac{d}{dt}; \mu\right) y = M\left(\frac{d}{dt}; \mu\right) (f(y) + \delta g(y)), \quad (1)$$

зависящей от параметров μ и δ и содержащую негладкую функцию $g(y)$. $L(p, \mu)$, $M(p, \mu)$ - взаимно простые вещественные многочлены степеней n и m ($n > m \geq 0$) с непрерывно по μ дифференцируемыми коэффициентами. Функция $f(y)$ предполагается гладкой. Пусть $f(0) = g(0) = 0$; при этом гладкость функции $g(y)$ нарушается именно в точке $y = 0$.

Предполагается, что при $\delta = 0$ для уравнения (1) выполняются классические условия теоремы Андронова-Хопфа, т.е. значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа этой системы в окрестности точки $y = 0$. В докладе обсуждаются условия на негладкую функцию (см. [1]) $g(y)$, при которых бифуркация Андронова-Хопфа сохраняется и при малых δ .

- [1] Enrique Ponce, Javier Ros and Elisabet Vela, Bifurcations in Continuous Piecewise Linear Differential Systems. (Springer-Verlag New York, 2022) 311 p.

Об условии регулярности слабо регулярной последовательности

Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ — некоторая последовательность положительных чисел, а

$$T(r) = \max_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}, \quad r > 0,$$

— функция следа Островского последовательности $\{M_n\}$.

Последовательность $\{M_n\}$ называется *регулярной* (в смысле Е. М. Дынькина), если для чисел $m_n = \frac{M_n}{n!}$ выполняются свойства (см. [1]):

а) $m_n^2 \leq m_{n-1}m_{n+1}$, $n \geq 1$; б) $\sup_{n \geq 0} \left(\frac{m_{n+1}}{m_n} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty$;

в) $m_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Любую последовательность $\{M_n\}$, которая удовлетворяет свойствам а) и в), будем называть *слабо регулярной*.

Введем в рассмотрение последовательность $\{L_n\}$,

$$L_n = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{n!}{M(t)t^n}, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

где $\ln M(t) = T\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 < t \leq 1$.

Из свойств преобразования Юнга-Фенхеля-Лежандра следует, что последовательность $\{L_n\}$ является слабо регулярной.

Теорема. Пусть $\ln M_n = O(n^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для последовательности чисел L_n , заданных формулой (1), выполняется и условие б) регулярности по Е. М. Дынькину.

Для последовательности чисел (1) соответствующий класс Сиддики $C_{00}(L_{n-2}; \gamma)$ нетривиальный, если γ — дуга ограниченного наклона (см. [2]). Как показано в работе [3], при некоторых условиях на M_n^c числа L_n допускают оценки сверху через M_n^c и, тем самым, класс $C_{00}(M_{n-2}^c; \gamma)$ также будет нетривиальным.

[1] Дун'кин Е. М. The pseudoanalytic extension // J. Anal. Math. 1993. V. 60 P. 45–70.

[2] Гайсин А. М., Кинзябулатов И. Г. Теорема типа Левинсона-Шёберга. Применения // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 7. С. 41–62.

[3] Гайсин Р. А. Нетривиальность класса Сиддики на дуге ограниченного наклона // Алгебра и анализ. 2024. Т. 36. № 2 (принята к печати).

Разложение аналитических в полуплоскости функций в ряды Дирихле с учетом мажоранты роста, удовлетворяющей условию Левинсона

Гайсина Г.А.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

В [1] доказана теорема: пусть F – функция, регулярная в полуплоскости $\Pi_0^- = \{z = x + iy: x < 0\}$. Тогда имеется не зависящая от F последовательность $\{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n^\rho} = \tau$, $0 < \tau < \infty$ ($\rho > 1$ – любое), такая, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\mu_n z} + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^-, \quad (1)$$

где Φ – целая функция.

В [2] показано, что если рост функции F вблизи мнимой оси в определенном смысле контролируется некоторой мажорантой $H: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $H(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow 0$, то в разложении (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{\mu_n z}| \leq B H^k \left(\frac{x}{k} \right),$$

$0 < B = \text{const}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$.

Возникает вопрос: при каких ограничениях на мажоранту H , а быть может, и на функцию F целая функция Φ в разложении (1) будет ограничена в вертикальной полосе $\Pi = \{z = x + iy: |x| < 1\}$?

Чтобы сформулировать основной результат, в какой-то степени дающий ответ на этот вопрос, введем необходимые определения.

Пусть K_0 – класс функций, обладающих свойствами:

1. F регулярна в $\Pi_0^+ = \{z = x + iy: x > 0\}$;
2. $F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ равномерно в каждой полуплоскости $\Pi_s = \{z = x + iy: x \geq s > 0\}$;
3. для любого $s > 0$

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Re}z=s>0} |F(z)| |dz| < \infty.$$

Предположим, что мажоранта $H: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $H(s) \downarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$, $H(s) \uparrow \infty$ при $s \rightarrow 0+$, такова, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^n H(s) = \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

причем функции $m(s) = \ln H(s)$ ($s > 0$) и $m(e^{-t})$ ($t \in \mathbb{R}$) выпуклые.

Теорема. Пусть F – четная функция, аналитическая вне отрезка $I_a = [-ai, ai]$, $F \in K_0$, и

$$T_F(s) \leq A_F H(s), \quad s > 0.$$

Если

$$\int_0^d \ln \ln H(x) dx < \infty, \quad H(d) = e,$$

то имеет место представление (1), причем целая функция Φ ограничена в полосе Π .

Вопрос. Можно ли в данной теореме отказаться от условия четности функции F ?

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-950).

[1] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

[2] Гайсина Г.А. Представление аналитических функций рядами экспонент в полуплоскости с учетом мажоранты роста // Уфимский матем. журн. 2021. Т. 13. № 4. С. 8 – 11.

Консервативная численная схема для решения системы уравнений Кана-Хилларда-Навье-Стокса

Галеева Д.Р.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

В работе представлен консервативный численный алгоритм для решения системы уравнений Кана-Хилларда-Навье-Стокса [1], которая используется для моделирования многофазных течений.

$$\rho(\phi)(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) + \mathbf{f}_\sigma(\phi), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = M \Delta \eta(\phi, t), \quad (3)$$

$$\eta(\phi, t) = \phi^3 - \phi - \epsilon^2 \Delta \phi(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v)$ - вектор скорости, ρ - плотность, p - давление μ - вязкость среды. Граничные и начальные условия задаются уравнениями:

$$\begin{aligned} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \nabla \eta \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, t \in (0, T], \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Сила поверхностного натяжения имеет следующий вид:

$$\mathbf{f}_\sigma(\phi) = \frac{\alpha\sigma}{\epsilon}\eta\nabla\phi, \quad \alpha = 6\sqrt{2}, \quad (6)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения.

Построена численная схема для уравнения Кана-Хилларда (3) с учетом скорости течения жидкости. Для уравнения Навье-Стокса используется метод контрольного объема [2], который модифицирован с учетом добавления к уравнению поверхностных сил и переменной фазового поля. Подробно описана реализация предложенных численных алгоритмов. Проведены численные расчеты. Численные результаты указывают на потенциальную полезность предложенного метода для расчета динамики дисперсных систем.

- [1] Junseok Kim. Phase-Field Models for Multi-Component Fluid Flows // Commun. Comput. Phys. 2012. Vol. 12, No. 3, pp. 613-661.
- [2] Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: МЭИ, 1984. 145 с.

**Акустическое зондирование гидроразрывных трещин
в низкопроницаемых пластах через скважину,
заполненную водой**

Галиакбарова Э.В.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа,
Россия

Строится теоретическая модель эхоскопии пластов проницаемостью порядка миллидарси, пересеченных гидроразрывными трещинами, расположенными продольно или радиально к открытому участку скважины [1]. Принята билинейная схема фильтрации. Предполагается, что скважина, пласт и трещины заполнены водой со сжимаемостью в акустическом приближении. Алгоритмические датчики расположены на устье и забое скважины. Принято, что длина сканирующей волны превышает протяженность открытого участка скважины. Для гармонических затухающих волн, распространяющихся по жидкости в скважине с учетом ее вязкостного затухания в тонком пограничном слое, получено аналитически дисперсионное уравнение, коэффициент отражения от забоя скважины. Проведен анализ влияния радиуса скважины, проницаемости пласта и проводимости трещины на динамику импульсного сигнала [2]. Для

построения осциллограмм в алгоритмических датчиках давления применялся алгоритм быстрого преобразования Фурье. Получено, что наличие трещины приводит к трансформации импульсного сигнала в скважине. Образуется импульс сжатия от забоя без трещины или импульс разгрузки при наличии трещины проводимости более 0.5 мД в пласте проницаемостью порядка миллиарды [3]. Для обнаружения радиальной трещины такой проводимости зондирование можно проводить более короткими сигналами [4], с помощью цилиндрического зонда, опущенного в открытый участок скважины.

- [1] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р. К теории локального зондирования трещин, образовавшихся при гидроразрыве пласта, с использованием импульсных волн давления // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. №4. С. 46 - 56.
- [2] V. Sh. Shagapov, E.V. Galiakbarova, Z.R. Khakimova On the Theory of Acoustic Sounding of Hydraulic- fracturing Cracks Perpendicular to the Well // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2021. Vol. 94. No. 5. Pp. 1160 - 1169.
- [3] Башмаков Р.А., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р., Шагапов В.Ш. К теории метода «эхоскопии» призабойной зоны скважины в низкопроницаемом пласте, подверженном ГРП // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87. № 2. С. 314-326.
- [4] Галиакбарова Э.В. Влияние проводимости гидроразрывной трещины на возможность диагностирования с помощью акустического «телевизора» // Вестник Башкирск. ун-та. 2021. Т. 26. №4. С. 866 - 870.

Поверхностные акустические волны горизонтальной и вертикальной поляризации на границе раздела пористых сред

Галиакбарова Э.В.¹, Каримова Г.Р.²

¹Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа, Россия

²Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Одним из перспективных источников углеводородного сырья являются природные газогидраты, которые залегают на дне мирового океана, при давлении порядка 3 - 5 МПа и температурах 3 - 7 °С. Представляется возможным определение глубин залегания, масштабов гидратосодержащих пород по акустическим особенностям донных отложений [1, 2]. Карта возможных режимов разложения газогидратов в природных пластах представлена в работах [3, 4].

В настоящей работе строится модель распространения плоских гармонических волн вертикальной и горизонтальной поляризации на границе раздела водонасыщенного и гидратонасыщенного песка. Принято: 1) источник возбуждения волны находится достаточно далеко от плоскости раздела; 2) насыщенный песок принят упругим изотропным телом; 3) структура волны – комбинация продольных и поперечных волн. Математическая модель включает волновые уравнения для скалярных и векторных потенциалов скоростей, записаны выражения для компонент векторов смещения и напряжения частиц среды, приняты условия непрерывности смещений и напряжений в граничащих средах. Проведен аналитический и численный анализ полученных дисперсионных уравнений по экспериментальным данным [5] для скоростей продольных и поперечных волн.

Из дисперсионного уравнения для волн вертикальной поляризации получено: а) при $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$ и $C_l^{(1)} \neq C_l^{(2)}$, $C_t^{(1)} \neq C_t^{(2)}$ тривиальное решение для скорости поверхностной волны $C = 0$; б) при $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$ и $C_l^{(1)} = C_l^{(2)} = C_l$, $C_t^{(1)} = C_t^{(2)} = C_t$ – решения являются $C = C_l$ или $C = C_t$; в) $\rho^{(1)} \neq \rho^{(2)}$ и $C_l^{(1)} = C_l^{(2)} = C_l$, $C_t^{(1)} = C_t^{(2)} = C_t$ – классические решения для скорости волны Стоунли $C < C_l$, $C < C_t$ (где ρ – плотность, C_l и C_t – скорости продольных и поперечных волн, индексы (1), (2) – гидрато- и водонасыщенный песок).

Получены условия для частоты, при которых волна горизонтальной поляризации будет локализоваться в слое водонасыщенного песка, расположенного над гидратонасыщенной песчаной породой. Показана динамика импульсного сигнала с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье для длины волны, превышающий в 8 раз толщину слоя водонасыщенного песка. Предлагается определять наличие гидрата в песчаной породе по глубине проникания и дисперсии скорости волны горизонтальной поляризации.

- [1] Шагапов В.Ш., Г.Р. Рафикова, Г.Р. Каримова Динамика волн Стоунли на границе «вода – насыщенный водой или газогидратом песок» // Инженерно-физический журнал. 2022. Т. 95. № 4. С. 869-875.
- [2] Galiakbarova E.V., Karimova G.R., Rafikova G.R. Dynamics of Sonic Wave under Reflection and Transmission at the Interface of Water and Sand Saturated with Water or Gas Hydrate // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. No. 5. Pp. 1621–1628.
- [3] Шагапов В. Ш., Сыртланов В.Р., Галиакбарова Э. В. Анализ возможных режимов разложения газовых гидратов в природных пластах // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 1997. – №. 6. – С. 101.

- [4] Галиакбарова Э.В. Некоторые автомодельные задачи фильтрации при разложении газогидратов в пористых средах: Диссертация канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1997. 101 с.
- [5] Дучков А.Д., Дучков А.А., Дугаров Г.А., Дробчик А.Н. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лёд или гидраты метана и тетрагидрофурана // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, №1. С. 94-99.

**Акустика линейной части подземного трубопровода,
подверженного газогидратным отложениям**

Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа,
Россия

Теоретически исследуется эволюция импульсных возмущений давления в газопроводе, заполненном «влажным» метаном на раннем этапе гидратного склероза, поскольку в этом случае закачка метанола или другого ингибитора гидратообразования представляется наиболее эффективным средством борьбы с пристеночными гидратными наростами [1]. Для определения границ суженного участка рассмотрены задачи импульсного сканирования газокапельной среды в длинноволновом и коротковолновом приближениях. Границы участка со склерозом приняты отражающими поверхностями. Вязкость и теплопроводность в газокапельной среде учитывается в тонком пограничном слое. Проведен анализ дисперсионных уравнений, коэффициентов отражения и прохождения границ суженного участка газопровода. Получено, фазовая скорость гармонической волны равна скорости звука в метане при малой влажности, меньшей 1% от массового содержания [2]. Затухание волны происходит за счет совместного проявления теплопроводности, вязкости и двухфазности в газокапельной среде, а также из-за эффектов фильтрации газа в гидратный слой, принятый в виде рыхлого снега при числах $Kd \ll 1$. Для учета затухания сигнала из-за пористого проницаемого газогидратного нароста на внутренней стенке газопровода составлена математическая модель, включающая законы сохранения масс и импульса, с учетом радиальной фильтрации газа в гидратный слой при условии непроницаемости стенки трубопровода. Динамика сигнала для алгоритмических датчиков в газопроводе строится с применением быстрого преобразования Фурье. Представлены результаты численных расчетов, показывающие влияние длительности импульсного сигнала на возможность определения толщины гидратного слоя и границ участка газопровода со склерозом.

- [1] Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа / М.: Наука, 2016. – 240 с.
- [2] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р. Динамика импульсных сигналов в трубопроводе, заполненном метано-парокапельной смесью и подверженной газогидратным отложениям // Инженерно-физический журнал. 2021. Т.94, №3. С. 698-706.

О заменах в уравнениях пятого порядка

Гарифуллин Р.Н.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В докладе обсуждаются замены, связывающие между собой две пары уравнений пятого порядка. Первые уравнения этих пар имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_t = u_5 - \frac{5}{2} \frac{u_2 u_4}{u_1} - \frac{5}{4} \frac{u_3^2}{u_1} + 5 \frac{u_2^2 u_3}{u_1^2} + \frac{5 u_2 u_3}{2\sqrt{u_1}} - 5(u_1 - 2\mu u_1^{1/2} + \mu^2) u_3 \\
 - \frac{35}{16} \frac{u_2^4}{u_1^3} - \frac{5}{3} \frac{u_2^3}{u_1^{3/2}} + 5 \left(\frac{3\mu^2}{4u_1} - \frac{\mu}{\sqrt{u_1}} + \frac{1}{4} \right) u_2^2 + \frac{5}{3} u_1^3 \\
 - 8\mu u_1^{5/2} + 15\mu^2 u_1^2 - \frac{40}{3} \mu^3 u_1^{3/2},
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 u_t = u_5 + \frac{5}{2} \frac{f - u_1}{f^2} u_2 u_4 + \frac{5}{4} \frac{2f - u_1}{f^2} u_3^2 + 5\mu (u_1 + f)^2 u_3 \\
 + \frac{5}{4} \frac{4u_1^2 - 8u_1 f + f^2}{f^4} u_2^2 u_3 + \frac{5}{16} \frac{2 - 9u_1^3 + 18u_1^2 f}{f^6} u_2^4 \\
 + \frac{5\mu}{4} \frac{(4f - 3u_1)(u_1 + f)^2}{f^2} u_2^2 + \mu^2 (u_1 + f)^2 (2f(u_1 + f)^2 - 1),
 \end{aligned} \tag{2}$$

вторые уравнения представляют собой уравнения пятого порядка, которые содержат решение кубического уравнения

$$(f + u_1)^2 (2f - u_1) + 1 = 0, \tag{3}$$

Две такие замены приведены в статье [1]. Полудискретные уравнения, найденные в работе [2], позволяют построить еще пару замен.

- [1] А.Г. Мешков, В.В. Соколов, *Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой*, Уфимск. матем. журн., **4:3**, 104–154 (2012). [Engl. trans.: Ufa Math. Journal **4:3**. 104–152 (2012).]

- [2] R.N. Garifullin, *Classification of semidiscrete hyperbolic type equations. The case of fifth order symmetries*, arXiv:2312.03745 [nlin.SI]

Взаимодействие волны давления в трубе, заполненной жидкостью, содержащей сферический пузырьковый кластер

Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В данной работе изучены двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей сферический кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью. Установлено, что взаимодействие волны типа "ступенька" со сферическим пузырьковым кластером в жидкости приводит к генерации уединенной волны давления с амплитудой, значительно превышающей амплитуду ударной волны. Уменьшение радиуса пузырьков и объемного содержания газа приводит к увеличению амплитуды уединенной волны из-за увеличения акустической жесткости пузырькового кластера. В случае кластера сферической формы, прилегающего к торцевой поверхности канала, воздействие на торцевую стенку с наибольшей амплитудой волны происходит в случае кластера с радиусом равным половине радиуса канала.

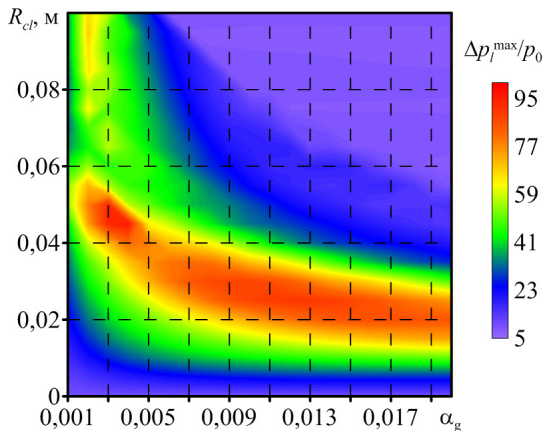


Рис. 1: Значение давления в расчетной области в зависимости от радиуса кластера R_{cl} и начального объемного содержания пузырьков α_{g0} .

На рис. 1 представлена карта зон максимального значения давления в расчетной области в зависимости от радиуса кластера и начального объемного содержания.

Массоперенос между порами и трещинами при распространении волны сжатия в трещиновато-пористой среде

Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г.Тюмень, Россия

Изучен процесс распространения импульсов сжатия в трещиновато-пористой среде. Исследование выполнено в рамках трехскоростной с тремя напряжениями математической модели. Задачи рассмотрены в одномерной и двумерной постановках. Численная реализация модели выполнена с помощью ранее разработанной авторами методики. Выявлены особенности указанного волнового процесса. Установлено, что при малой интенсивности массообмена между системами пор и трещин наблюдается несовпадение давлений в порах и трещинах при распространении волны,

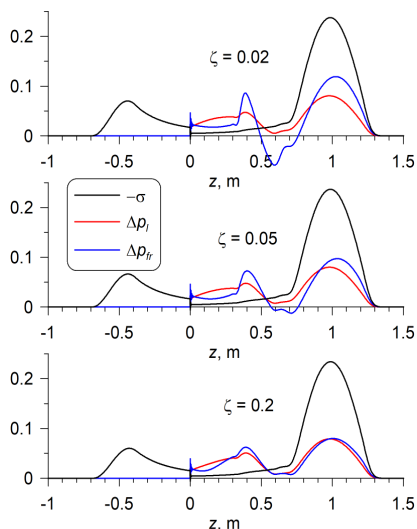


Рис. 1: Расчетные "осциллограммы" и профили безразмерного продольного полного напряжения $-\sigma = \Delta p_l - \sigma_{s*}$, амплитуды среднего давления жидкости Δp_l и давления в трещинах Δp_{fr} трещиновато-пористой среды при различных значениях интенсивности массообмена между системами пор и трещин ($\zeta = 0.02, 0.05, 0.2$) при $t = 0.8$ мс, одномерная постановка

а при увеличении интенсивности происходит быстрое выравнивание давлений. Рис.1 иллюстрирует несовпадение давлений жидкости в системах пор и трещин, при этом в обеих фазах сжатия и разрежения амплитуда давления в трещинах больше, чем в порах. При увеличении значения параметра ζ в выражении для обмена жидкостью между системами пор

и трещин наблюдается быстрое выравнивание давлений в порах (p_f) и трещинах (p_{fr}), т.е. p_f и p_{fr} практически совпадают. Сопоставление решений, полученных в одномерном и двумерном случаях, показало, что их отличие обусловлено геометрией процесса.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН.

Акустическое течение в прямоугольной полости с разнонагретыми горизонтальными стенками

Губайдуллин А.А., Пяткова А.В.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г.Тюмень, Россия

В случае вибрации полости или канала, заполненного газом, помимо колебательного движения газа развивается так называемое акустическое течение [1]. Присутствие перепада температур стенок канала может привести к искажению вихревой картины акустического течения, что, в свою очередь, приведет к изменению теплового потока через изотермические стенки канала и характера распределения средней за период температуры.

Рассмотрим двумерный канал с непроницаемыми стенками, заполненный воздухом. Канал выводится из равновесия вибрационным воздействием. На всех стенках канала задано условие прилипания. Вертикальные стенки канала являются теплоизолированными, горизонтальные стенки поддерживаются при заданной температуре. Перепад температур горизонтальных стенок может варьироваться за счет увеличения температуры верхней стенки. Задача решена численно при помощи методики расчета, описанной в [2] для осесимметричного случая. При малой амплитуде вибрации нелинейные эффекты проявляются слабо, но заметно влияние граничных условий. В случае, когда верхняя и нижняя стенки канала имеют одинаковую температуру, вихри акустического течения симметричны относительно центральной оси канала. При наличии перепада температур вихри акустического течения теряют симметрию. Вихри рэлеевского течения, расположенные ближе к более нагретой стенке, увеличиваются в размерах, а расположенные в нижней части канала уменьшаются и при дальнейшем увеличении перепада температур исчезают. Увеличение амплитуды вибрации приводит к искажению вихрей акустического течения, а увеличение перепада температур стенок в этом случае может привести к появлению дополнительных вихрей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-29-00394).

- [1] Zarembo L.K. Acoustic streaming. High-intensity ultrasonic fields, edited by L.D. Rozenberg. New York: Plenum, 1971. Part III. P. 156–164.
- [2] Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V. The effects of heat transfer through the ends of a cylindrical cavity on acoustic streaming and gas temperature // Mathematics, 2023, Vol. 11, 1840.

Математическая модель диссоциации газовых гидратов в высокочастотном электромагнитном поле

Давлетшина М.Р, Аюпов А.Ф.

УГНТУ, г.Уфа, Россия

При определенных условиях происходит диссоциация газогидрата на газ и воду, то есть фазовый переход, сопровождающийся поглощением теплоты и различными физикохимическими процессами. В данной работе рассматривается процесс разложения газового гидрата под воздействием сверхвысокочастотным электромагнитным излучением в радиальной модельной постановке на примере гидрата метана. Полагаем, что процесс диссоциации происходит в равновесном режиме и в процессе фазового перехода выполняются условия термодинамического равновесия. Исследование физических основ взаимодействия электромагнитных полей с газогидратами свидетельствует, что газовый гидрат представляет собой слабо проводящий немагнитный диэлектрик.

В работе [1] изучена аналитическая зависимость и предложена авторская модельное решение задачи разложения гидрата под воздействием СВЧ-излучения. Предложена математическая модель процессов фильтрации разложения газогидратов посредством электромагнитных излучений более эффективны, чем обычное тепловое воздействие, обусловленное кондуктивной теплопроводностью. В работе [2] представлены результаты натурного эксперимента по разложению гидрата пропана при воздействии сверхвысокочастотного электромагнитного поля. Рассматриваются возможности полного разложения гидратной пробки, образовавшейся в трубопроводе. Как показывают исследования [3, 4], электрическое и силовое воздействие высокочастотного электромагнитного поля с газогидратом характеризуется возникновением моментов сил и источников тепла. Часть энергии электромагнитной волны преобразуется в тепло, что приводит к изменениям термодинамических характеристик гидратного пласта.

В данной работе моделирование диссоциации газогидрата основано на использовании классических уравнений механики жидкости и газа, отражающих законы сохранения массы, импульса и энергии. В данном случае задачу разложения рассматриваем аналогично классической задаче Стефана, с резким фронтом разложения. Математическая модель строится без учета процесса фильтрации.

Ввиду того, что газ и дистиллированная вода являются диэлектриками, поглощение энергии СВЧ излучения происходит в тонком газогидратном слое - фронтальной границе.

В результате такого воздействия в пласте возникают две области: ближняя, примыкающая к скважине и содержащая газ (метан) и воду, и дальняя, насыщенная газогидратом и газом.

Для численного решения задачи с начальными и граничными условиями используется метод ловли границы фазового перехода в узел пространственной сетки, реализованный в программном продукте [6].

В данной работе исследованы особенности разложения гидрата метана при воздействии СВЧ-излучения. Показано, что значения температуры и давления в пласте убывают со временем и расстоянием от источника СВЧ-излучения. Представлены зависимости координаты фронта разложения от времени при различных значениях коэффициента проницаемости.

- [1] Саяхов Ф.Л., Фатыхов М.А., Насыров Н.М. Исследование разложения газогидрата в высокочастотном электромагнитном поле // Разработка газоконденсатных месторождений: докл. междунар. конф. Краснодар: 1990. С. 37-41.
- [2] Шагапов В.Ш., Насырова Л.А., Потапов А.А., Дмитриев В.Л. Тепловой удар под воздействием энергии излучения на пористую среду, частично заполненную газогидратом. // Инженерно-физический журнал. - 2003. Т.76. № 5. - С. 47 - 53
- [3] Фатыхов М. А., Багаутдинов Н. Я., Экспериментальные исследования разложения газогидрата в трубе при сверхвысокочастотном электромагнитном воздействии, ТВТ, 2005, том 43, выпуск 4, 612-617
- [4] Нигматуллин Р. И., Шагапов В. Ш., Насырова Л. А. // Докл. РАН. 1999. Т. 366, № 4. С. 481 - 485.
- [5] Гройсман А.Г. Теплофизические свойства газовых гидратов. Новосибирск: Наука, 1985.94 с.
- [6] Давлетшина М.Р., Столповский М.В., Щеглова Е.П. Расчет температуры в пористых средах конечной длины при тепловом воздействии

в плоскоодномерной постановке. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020610037, 09.01.2020. Заявка № 2019666818 от 18.12.2019.

Эволюция магнитного поля в пространственно-неоднородных аксионных структурах

Дворников М.С., Ахметьев П.М.
ИЗМИРАН, Россия

Изучается временная эволюция магнитных полей в различных конфигурациях пространственно-неоднородных псевдоскалярных полей, представляющих собой когерентную суперпозицию аксионов. Для таких систем выводится новое уравнение индукции для магнитного поля, учитывающее эту неоднородность. На основе этого уравнения исследуется, во-первых, эволюция пары волн Черна-Саймонса (CS), взаимодействующих с линейно убывающим псевдоскалярным полем. Ненулевой градиент псевдоскалярного поля приводит к смешиванию этих волн. Затем рассматривается задача в компактной области, когда исходная волна CS зеркально симметрична. В этой ситуации неоднородность псевдоскалярного поля приводит к эффективному изменению α -параметра динамо. Таким образом, получаем, что влияние пространственно-неоднородного псевдоскалярного поля на эволюцию магнитного поля сильно зависит от геометрии системы.

- [1] Дворников М.С., Ахметьев П.М., Эволюция магнитного поля в пространственно-неоднородных аксионных структурах, ТМФ, 2024, Т. 218, No. 3

О динамике особенностей решений интегрируемых эволюционных уравнений

Домрин А.В.

Московский Государственный Университет, г.Москва, Россия; Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

На примере эволюции полюсов голоморфных (по пространственной и временной переменным) решений уравнений, входящих в иерархии Бюргера и Кортевега-де Фриза, рассматриваются вопросы о возможных ограничениях на лорановские коэффициенты и о расщеплении кратных нулей

тау-функции при эволюции согласно старшим потокам. Полученные результаты и сформулированные гипотезы переносятся на все взвешенно-однородные интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепаратной.

Нелинейные волны уравнения Клейна-Гордона в модели с несколькими примесями

**Екомасов Е.Г.¹, Дмитриев С.В.², Фахретдинов М.И.¹,
Самсонов К.Ю.³, Кабанов Д.К.¹**

¹Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

²ИФМК, УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

³Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия

Одним из популярных уравнений, описывающим многие нелинейные волновые процессы в теоретической и математической физике, является уравнение Клейна-Гордона (УКГ). Наиболее изученными примерами такого класса уравнений являются уравнения синус-Гордона (УСГ) и φ^4 . Для использования УКГ в реальных физических приложениях, обычно возникает необходимость его модифицировать. Например, путём добавления дополнительных слагаемых. Дополнительные слагаемые могут описывать внешнюю силу, диссипацию, неоднородность параметров среды и т.п. Одним из наиболее исследуемых случаев связан с введением неоднородности параметра стоящего перед слагаемым содержащим потенциал в УКГ [1, 2]. В данной работе для уравнения синус-Гордона и φ^4 в модели с двумя и тремя точечными и протяжёнными примесями была исследована возможная динамика кинков, получены различные типы локализованных на примесях волн. Для аналитических расчетов использовался метод коллективных переменных. Показано, что задачу о динамике локализованных на примесях волн в модели с двумя и тремя примесями можно свести к задаче о связанных осцилляторах с нелинейной связью. Для численных расчетов были созданы авторские программы. В связи с особыми требованиями к точности проводимых расчетов для случая резонансов, реализован и особый контроль погрешности результата. Найдено, что протяжённая примесь качественно ведет себя как хорошо изученные точечные примеси, описываемые с помощью, дельта-функции. Определена структура и динамические свойства локализованных на примесях нелинейных волн солитонного и бризерного типа. Показано, что эффект усиления «коллективного влияния» примесей, с увеличением их числа, будет приводить к появлению новых эффектов и сценариев динамики кинка.

- [1] Fakhretdinov M.I., Samsonov K.Yu., Dmitriev S.V., Ekomasov E.G. // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2023. – V. 19. – No. 3. – Pp. 303–320.
- [2] Kabanov D.K., Samsonov K.Yu., Nazarov V.N., Ekomasov E.G. // Physics of the Solid State. – 2023. – V. 65, No. 4. – Pp. 544–550.

Нелинейная динамика магнитных вихрей в трех- и пятислойных наноцилиндрах

**Екомасов Е.Г.¹, Звездин К.А.², Антонов Г.И.¹,
Нерадовский Д.Ф.³, Фахретдинов М.И.¹**

¹Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

²ООО «Новые спинтронные технологии», г.Москва, Россия

³Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия

Известно, что в магнитных наноструктурах между током и намагниченностью может возникнуть прямое (контактное) взаимодействие. Этот эффект обусловлен переносом спинового момента и имеет квантовую природу. Однако, этот эффект можно учесть и путем добавления дополнительного слагаемого в уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта. Системы, в которых таким образом возбуждается прецессия намагниченности, называются спин-трансферными нано-осцилляторами (СТНО). В его основе обычно лежат мультислойные наностолбики, которые имеют два пермалловых магнитных слоя различной толщины, разделенных немагнитной прослойкой. В магнитных слоях может существовать, как основное состояние, магнитный вихрь. Исследуемые в данной работе СТНО имеют два и три магнитные слои из пермаллоя (содержащие магнитные вихри), разделенные немагнитной прослойкой меди. С помощью аналитических и численных методов решения изучена нелинейная динамика двух и трех магнитостатически связанных магнитных вихрей под действием внешнего магнитного поля и спин-поляризованного электрического тока. Численный расчет динамики магнитостатически связанных вихрей проводился с использованием пакета программ для микромагнитного моделирования SpinPM. Рассмотрено влияние изменения толщины немагнитной и магнитной прослойки на связанную динамику вихрей на примере СТНО малого диаметра. Найдены условия для получения в таких системах максимальной частоты и увеличения диапазона токов, при котором наблюдается стационарный режим связанных колебаний вихрей. Также исследован процесс переключения полярности магнитных вихрей

при совместном воздействии спин-поляризованного тока и внешнего магнитного поля на СТНО большого диаметра. Показано, что для отдельного переключения полярности вихрей в СТНО большого диаметра требуется использования меньшей величины магнитного поля по сравнению со случаями среднего и малого диаметров СТНО, что более выгодно с точки зрения практических приложений. Обнаружено, что при увеличении величины тока выше ранее изученного диапазона, существует новый стационарный режим стационарной динамики П-вихрей.

On C^1 -smooth Ω -stable skew products on 3D-torus

Efremova L.S.

Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod;
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

We prove the criterion of C^1 - Ω -stability of self-maps of 3D-torus, which are skew products of circle maps. The C^1 - Ω -stability property is studied with respect to homeomorphisms of skew products type.

We give here the example of the C^1 -smooth Ω -stable skew product of circle maps on 3D-torus and investigate approximating properties of maps under consideration in C^1 -topology.

This research is supported by Russian Science Foundation (RSF), grant No 24-21-00242, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/>.

Билинейный режим течения в пласте с конечной трещиной авто-ГРП

Ильясов А.М.

ООО "РН-БашНИПИнефть г.Уфа, Россия

Рассматривается задача о нестационарном билинейном течении однофазной ньютоновской жидкости в пласте с конечной трещиной авто-ГРП, соединяющей нагнетательную и добывающую скважину. Скважины одновременно начинают работать при постоянных давлениях в изначально невозмущённом бесконечном пласте с вертикальной магистральной трещиной постоянной ширины.

Билинейный поток в бесконечном пласте в закреплённой пропантом трещине ГРП бесконечной длины изучался в работах [1]– [3] операционным методом. Методом преобразования Лапласа получены аналитические решения для давлений в пласте и в трещине. Получена асимптотическая зависимость падения забойного давления как корень четвертой

степени от времени на больших временах. В [4] методом преобразования Лапласа найдены аналогичные аналитические решения для закреплённой проппантом трещины конечной длины в бесконечном коллекторе при заданном забойном давлении или заданном расходе на скважине. В случае конечной трещины решения представляются в виде интегралов от рядов.

В работе [5] операционным методом получены аналитические решения для билинейного течения в бесконечном пласте с не закреплённой проппантом бесконечной трещине авто-ГРП постоянной ширины при заданном постоянном давлении на скважине и постоянном пластовом давлении. Аналитические решения для билинейного потока в случае заданного расхода на скважине для такой же геометрической конфигурации задачи получены в [6]. Недостатком решений, полученных в [5]– [6] является их ограниченность при применении к реальным трещинам авто-ГРП конечной длины. Эти решения можно использовать только до моментов времён, когда частицы жидкости достигнут конца трещины.

В данной работе рассматривается задача о билинейном течении в бесконечном коллекторе с трещиной авто-ГРП конечной длины и постоянной ширины. Методом преобразования Лапласа получены аналитические решения для полей давления в трещине и пласте, скорости течения в трещине, а также уравнения траекторий жидкости в пласте и в магистральной трещине. Полученные решения применены для интерпретации трассерных (индикаторных) исследований.

- [1] Cinco-Ley H., Samaniego V.F. Transient Pressure Analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33. № 9. P. 1749-1766.
- [2] Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319-329.
- [3] Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6-14.
- [4] Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 4. С. 116-125.
- [5] Ильясов. А.М., Киреев В.Н. Нестационарное течение в пласте с магистральной трещиной, пересекающей нагнетательную или добывающую скважину // ПМТФ. 2023. Т.60. № 5. С. 124-138.
- [6] Ильясов. А.М., Киреев В.Н. Аналитическое решение задачи о нагнетании или снижении пластового давления в коллекторе с трещиной // МЖГ. 2024 (в печати).

Об одной шкале банаховых пространств аналитических функций на выпуклой области

Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.

УУНиТ, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Данное исследование связано с задачами теории представления функций рядами экспонент. В 1975г. Левин Б.Я. и Любарский Ю.И. ([1]) доказали, что функции из класса Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D представляются в виде безусловно сходящегося ряда экспонент. В работе [2] эта теорема перенесена на пространство Бергмана $B_2(D)$. Существенной частью этих результатов является описание преобразования Коши функционалов

$$C(S)(\zeta) = S_z \left(\frac{1}{z - \zeta} \right), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

В случае пространств Смирнова $E_2(D)$ оказалось, что $C(E_2^*)$ изоморфно пространству Смирнова на дополнении $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ ([3]). Для произвольных выпуклых областей эта задача решена Меренковым С.А. в работе [4]. Оказалось, что пространство $C(B_2^*)$ изоморфно пространству

$$\left\{ \gamma(\zeta) \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) : \|\gamma\|^2 := \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma'(\zeta)|^2 dm(\zeta) < \infty \right\},$$

где $dm(\zeta)$ — плоская мера Лебега. В работе [5] показано, что пространство $E_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ изоморфно пространству

$$\left\{ \gamma(\zeta) \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) : \|\gamma\|^2 := \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma'(\zeta)| \text{dist}(D, \zeta) dm(\zeta) < \infty \right\},$$

где $\text{dist}(D, \zeta)$ — расстояние от точки ζ до множества \overline{D} . Другими словами, пространство преобразований Коши $C(E_2(D))$ изоморфно пространству $B_2^{(0)}(D)$. Параметризованное семейство пространств

$$B_2^{(\alpha)}(D) = \left\{ h(\zeta) \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) : \|h\|^2 := \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |h(\zeta)|^2 \text{dist}^{2\alpha}(D, \zeta) dm(\zeta) < \infty \right\},$$

образуют естественную шкалу банаховых пространств на любом отрезке $[\alpha_0; \beta_0]$, $-\frac{1}{2} < \alpha < \beta_0 < \infty$. Пусть F_α — гильбертово пространство аналитических в D функций относительно нормы

$$\|f\| = \left((2\alpha + 1) \int_D |f(z)|^2 \delta^{2\alpha}(z) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. Для любого комплексного многочлена $p(z)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\frac{1}{2}} \|p\|_{F_\alpha(D)} = \|p\|_{E^2(D)}.$$

- [1] Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский, "Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент", Изв. АН СССР. Сер. матем., **39** (1975), №3, 657–702.
- [2] К. П. Исаев, "Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках", Уфимск. матем. журн., **2** (2010), №1, 71–86.
- [3] A. P. Calderon, "Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators", Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **74** (1977), №4, 1324–1327.
- [4] A. P. Calderon, "On the Cauchy transform of the Bergman space", Матем. физ., анал., геом., **7** (2000), №1, 119–127.
- [5] В. И. Луценко, Р. С. Юлмухаметов, "Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова", Тр. МИАН, **200** (1991), 245–254.

**Математическая модель истечения изолирующего состава в
проницаемый пласт через горизонтальную скважину**

Ишмухаметова А.А.¹, Кабиров И.Ф.^{2,1}, Нигматуллин Т.Э.¹

¹ООО "РН-БашНИПИнефть г. Уфа, Россия,

²ФГБОУ ВО УГНТУ, г. Уфа, Россия

Задача гидродинамического исследования движения жидкости в горизонтальной скважине с моделированием истечения в проницаемый пласт позволяет автоматизировать подбор дизайна ремонтно-изоляционных работ и уйти в этом процессе от субъективных экспертных оценок. Таким образом, обозначенная тема исследования имеет важное теоретическое значение и практическое применение.

Цель текущей работы – постановка задачи моделирования закачки изолирующих составов в проницаемый пласт через горизонтальную скважину (ГС) и построение ее численного решения.

Рассмотрен процесс одномерного нестационарного течения несжимаемой жидкости, заданной ее вязкостью и плотностью в горизонтальной скважине с проницаемыми стенками, определенной диаметром и длиной проницаемого участка. Заданы также характеристики проницаемого пласта: пористость, проницаемость, мощность, пластовое давление. Несжимаемый пористый скелет и ГС заполнены жидкостью глушения, которая

при закачке изолирующего состава оттесняется в пласт. Необходимо вычислить скорость течения жидкости в ГС, научиться определять радиус проникновения состава в пористый пласт.

Математическая модель представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, включающих в себя уравнение неразрывности, уравнение движения Навье-Стокса, и уравнение фильтрации Дарси. Сложность решения заключается в одновременном решении задачи течения в скважине и фильтрация жидкости в пласт. Для решения поставленной задачи был использован численный алгоритм Simpol. Для упрощения принято осреднение градиента давления на фронте закачиваемого состава и пренебрежение отражениями волн давления от кровли, подошвы и границ продуктивного пласта.

Были построены дискретные аналоги исходных уравнений на основе равномерно-разностной прямоугольной сетки с шагом по времени и линейной координате. В результате была получена трехдиагональная матрица, элементы которой были рассчитаны методом прогонки. На основании искомой матрицы были вычислены скорость течения жидкости в ГС и радиус проникновения состава в пласт.

Таким образом, была осуществлена математическая постановка описанной задачи, построено и исследовано ее численное решение.

Некоторые условия интерполяционности в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости

Кабанко М.В., Малютин К.Г.

Курский государственный университет, г.Курск, Россия

Приведены различные критерии интерполяционности последовательностей в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка. Данные задачи относятся к задачам свободной интерполяции в пространствах целых и аналитических функций, начало изучения которых относится к работе А. Ф. Леонтьева [1]. Дальнейшее развитие этой теории в пространствах целых функций получило в работах Братищева, Коробейника, Гришина и др. В пространстве ограниченных функций в единичном круге – в работах Карлесона, Хавина, Виноградова, Васюнина, Виденского. Для функций конечного порядка $[\rho, \infty)^+$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ в работах Левина, второго автора настоящей статьи [2]. Рассматриваются интерполяционные множества в этих пространствах. Эти примеры аналогичны интерполяционным множествам в пространстве аналитических, ограниченных в единичном круге функций, которые приведены в совместной работе Виноградова и Хавина, опубликованной в Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1974.

В частности, пусть последовательность $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит верхней полуплоскости $A \in \mathbb{C}_+$ и существует $K > 0$ такое, что выполняется условие

$$\prod_{\substack{r_n/2 < r_k < 3r_n/2 \\ k \neq n}} \left| \frac{a_k - a_n}{a_k - \bar{a}_n} \right| \geq \exp[-KV(r_n)]. \quad (J_+(\rho))$$

В этом случае последовательность A является интерполяционной для пространства $[\rho, \infty)^+$. Смысл условия $(J_+(\rho))$ состоит в том, что каждая точка последовательности A достаточно далеко отстоит от остальных точек этой, последовательности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>).

- [1] Леонтьев А.Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка // Докл. АН СССР, **5** (1948), 785–787.
- [2] Maljutin K.G. The problem of multiple interpolation in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type // Russian Acad. Sci. Sb. Math., **78**:1 (1994), 253–266.

Асимптотические формулы для собственных чисел дискретных полуограниченных операторов

Кадченко С.И., Рязанова Л.С.

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.
Носова, г. Магнитогорск, Россия

Современные методы нахождения асимптотических формул для собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов, заданных на компактных множествах в каждом случае индивидуальны. В связи с этим возникает необходимость разработать методику позволяющую находить асимптотические формулы собственных чисел для любых таких операторов. Это значительно упростит их нахождение и позволит написать пакет программ, позволяющий находить их с помощью ЭВМ. Данная методика поможет так же находить асимптотические формулы собственных чисел вектор-операторов заданных на конечных связанных графах.

В статье [1] были доказано, что приближенные значения собственных чисел $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ дискретного полуограниченного дифференциального

оператора L заданного в сепарабельном гильбертовом пространстве H находятся по формулам:

$$\tilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \delta_n, \quad \delta_n = \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k(n-1) - \tilde{\mu}_k(n-1)], \quad (1)$$

где $\tilde{\mu}_k(n)$ — n -е приближение по Галеркину к соответствующему собственному числу μ_k оператора L ; $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированные базисы пространств $H_n \in H$. Последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечных пространств H_n полна в H . В дальнейшем было показано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Значит формулы (1) для очень больших номеров n определяют собственные числа оператора L входящие в асимптотику его спектра.

Для проверки этого утверждения были проведены сравнения известных асимптотических формул для собственных значений некоторых краевых задач с формулами (1). Результаты сравнения показали, что формулы отличаются друг от друга только порядком погрешностей.

Поэтому для нахождения асимптотических формул собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов заданных на компактных множествах можно использовать формулы (1).

- [1] Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Calculation of eigenvalues of discrete semibounded differential operators. J. Comp. Eng. Math., 2017, Volume 4, Issue 1, 38–47.

$L_{2,\rho}$ - оценки решений нелинейных систем

Каримов О.Х., Набиев Дж.И.

Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана

Термин "разделимость дифференциальных выражений" в теорию дифференциальных операторов ввели английские математики В.Н.Эверитт и М.Гирц при исследовании оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории делимости дифференциальных выражений внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см. [1]- [5] и библиографию тамже).

В докладе речь идёт о коэрцитивном свойстве и делимости нелинейного бигармонического дифференциального оператора в весовом гильбертовом пространстве.

Рассмотрим в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ дифференциальное уравнение

$$\Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \quad (1)$$

где Δ —оператор Лапласа, $V(x, z)$ -положительная функция. Предположим, что решение

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_l(x)) \in W_{2,loc}^2(\mathbb{R}^n)^l$$

и что равенство (1) для всех $u(x)$ выполняется почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Потенциал $V(x, \omega) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^l; \text{End} \mathbb{C}^l)$ и его значения являются эрмитовыми положительно определенными $l \times l$ -матрицами. Представим $V(x, \omega)$ в виде

$$V(x, \omega) = F^2(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_1, \dots, \xi_l, \eta_1, \eta_1, \dots, \eta_l)$$

где $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, l}$ определяется из равенства

$$\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2 \dots, \xi_l + i\eta_l),$$

а значения F являются положительно определенными матрицами.

Найдены условия на матрицу-функцию $F(x, \xi, \eta)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l$, и для всех решений $u(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l \cap W_{2,loc}^4(\mathbb{R}^n)^l$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\begin{aligned} & \|\Delta^2 u(x); L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l\| + \|V(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l\| + \\ & + \sum_{i=1}^n \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x)) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}; L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l\| \leq M \|f(x); L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l\|, \end{aligned}$$

где положительное число M не зависит от $u(x), f(x)$.

- [1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
- [2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в \mathbb{R}^n .-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
- [3] E.M.E.Zayed. Separation for the biharmonic differential Operators in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem. J.Math.Anal.Appl., 2008, v.337, pp. 659-666.
- [4] Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом.- Уфимский математический журнал, 2017, т.9, No1, с.55-62.
- [5] Каримов О.Х., Хакимова З.Дж. Коэрцитивные оценки, разделимость и коэрцитивная разрешимость нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений не дивергентного вида-Чебышевский сборник. 2023. No24(2), с.197-213.

Применение подходов механики многофазных систем для моделирования двухфазной фильтрации в нефтяном пласте

Ковальчук Т.Н., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П.

Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия

Работа посвящена моделированию процесса двухфазной фильтрации с целью оценки расположения целиков нефти (остаточная не вытесненная нефть в пласте). Наличие прогнозного варианта расположения целиков нефти позволяет выбрать оптимальный метод разработки месторождения [1], [2].

Существуют различные методы прогнозирования образования целиков, они основаны, как правило, на экспериментальных исследованиях. Однако используемые на данный момент модели не позволяют однозначно определить области появления целиков [3]. Следовательно, целью данной статьи является создание такой методики. Для достижения этой цели используются основная система механики многофазных систем и явная конечно-разностная схема. Предложенный метод может быть применен для расчета различных нефтяных пластов с учетом их основных параметров, а также начальных и граничных условий. Используя разработанную модель, показано, что наличие двух удаленных друг от друга групп скважин приводит к образованию двух зон целиков нефти.

- [1] Alessio L., Moradi B., Kuzmichev D. Locating the remaining oil in mature fields. Society of Petroleum Engineers. – 2017. ISBN: 9781510842021
- [2] Mandal D., Musani N., Mohmad N. I. An Innovative Reservoir Engineering Method to Identify Bypassed Oil and Derisk the Further Development of a Complex Mature Field in Offshore, Malaysia. International Petroleum Technology Conference. 2019. Paper IPTC-19182-MS. 16 pp.
- [3] Ковальчук Т.Н., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П. Физико-математическая модель фильтрации флюида с предельным градиентом сдвига для определения областей целиков остаточной нефти. Сборник избранных статей по материалам научных конференций ГНИИ "Нацразвитие"(Санкт-Петербург, Апрель 2020). 2020. С.124-129.

О топологических препятствиях к существованию непериодических базисов Ванье

Кордюков Ю.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть X — собственное метрическое пространство с мерой, т. е. множество X наделено метрикой d и борелевской мерой m , причем все шары в метрическом пространстве (X, d) компактны. Скажем, что дискретное подпространство $D \subset X$ равномерно дискретно, если расстояние между различными точками множества D отделено от нуля: $d(g, h) > c_0, g, h \in D, g \neq h$, при некотором $c_0 > 0$, и имеет ограниченную геометрию, если для любого $R > 0$ количество точек D в каждом шаре $B_R(x)$ радиуса R с центром в x равномерно ограничено по $x \in X$.

Нас интересует следующий вопрос, связанный с некоторыми задачами математической физики:

Дано замкнутое подпространство H гильбертова пространства $L^2(X, m)$. Допускает ли оно D -финитный базис Ванье с каким-либо равномерно дискретным множеством ограниченной геометрии D , то есть, такой ортонормированный базис $\{\phi_x : x \in D\}$ в H , что $\text{supp } \phi_x \subset B_R(x)$ для любого $x \in D$, где $R > 0$ не зависит от x ?

Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный. Имеются топологические препятствия к существованию D -финитных базисов Ванье. Скажем, что метрическое пространство X имеет ограниченную геометрию, если существует такое $r > 0$, что для любого $R > 0$ существует такое натуральное N , что любой шар радиуса R можно покрыть не более чем N шарами радиуса r . Если X — собственное метрическое пространство ограниченной геометрии с мерой и подпространство H допускает D -финитный базис Ванье с некоторым равномерно дискретным подпространством ограниченной геометрии D , то ортогональный проектор p_H в пространстве $L^2(X, m)$ на H принадлежит некоторой C^* -алгебре ограниченных операторов в пространстве $L^2(X, m)$ — так называемой алгебре $\text{Роу } C^*(X)$. Более того, его класс $[p_H]$ в K -теории $K_0(C^*(X))$ алгебры $\text{Роу } C^*(X)$ тривиален: $[p_H] = 0$.

Если метрическое пространство X имеет полиномиальный рост, то можно рассматривать базисы Ванье, состоящие из быстроубывающих функций. Задача существования таких базисов сводится к случаю финитных базисов Ванье.

Результаты получены совместно с В.М. Мануйловым.

Об одной факторизации оператора свертки

Кузбеков Т.Т.

Башкирский государственный педагогический университет, г. Уфа,
Россия

Пусть $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – целая функция экспоненциального типа. Рассмотрим однородное уравнение свертки с характеристической функцией φ :

$$M_{\varphi}[y] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)} = 0, \quad y \in H(\mathbb{C}). \quad (1)$$

Предположим, что функция φ представляется в виде: $\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(z)}{p_j}$, где p_j – минимальный по модулю и отличный от нуля нуль функции φ_j и для функций $\frac{\varphi_j(z)}{p_j}$ выполняется равномерная по j оценка

$$\left| \frac{\varphi_j(z)}{p_j} \right| \leq a_1 e^{a_2 |z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Положим

$$\varphi_j^*(z) = \frac{\varphi_j(z)}{p_j}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Теорема. Для того, чтобы произвольное решение $y \in H(\mathbb{C})$ уравнения (1) представлялось в виде $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j$, где $y_j \in H(\mathbb{C})$ и $M_{\varphi}[y_j] = 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что

$$c_1 e^{-c_2 |z|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j^*(z)|^2 \leq c_3 e^{c_4 |z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Анализ собственных колебаний столба жидкости в скважине, сообщающейся с пластом

Мамаева З.З.

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В связи с длительным периодом эксплуатации большинства нефтяных скважин происходит снижение пластового давления, обводнение коллекторов, что является причиной снижения их продуктивности и, в том числе, предпосылкой к разработке месторождений трудноизвлекаемых углеводородов. При эксплуатации нефтяных скважин важен оперативный

контроль состояния призабойной зоны пласта, особенно после проведения ремонтных работ и обработки призабойной зоны с целью улучшения ее коллекторских характеристик. Одним из способов существенного изменения дебита скважины является гидравлический разрыв пласта (ГРП). При этом возникают задачи определения качества ГРП, геометрии трещин, изменения коллекторских характеристик. В настоящей работе предложен один из таких возможных способов определения состояния скважины и пластов, качества перфорации и параметров трещины, образовавшейся вследствие ГРП, является способ, основанный на возбуждении собственных колебаний столба жидкости в скважине. При этом период колебаний, а также интенсивность их затухания определяются не только протяженностью столба жидкости в скважине, ее диаметром и реологическими свойствами жидкости, но и коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважин и свойствами трещин, образовавшихся вследствие гидроразрыва пласта). В связи с чем, построена математическая модель собственных колебаний столба жидкости в скважине, возникших вследствие гидроудара [1,2]. Изучено влияние коллекторских характеристик пласта, наличия трещины на частоту и коэффициент затухания собственных колебаний, распределение полей давления в скважине. Показано, что в случае низкопроницаемых пластов (порядка миллиарда и меньше), после проведения ГРП может происходить двукратное снижение собственных частот колебаний.

- [1] Шагапов В.Ш., Башмаков Р. А., Рафикова Г. Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающей-ся с пластом // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 4 (362). С. 5-14.
- [2] Ляпидевский В. Ю., Неверов В. В., Кривцов А. М. Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон.мат. изв. 2018. № 15. С. 1687–1696.

Определение изомерного состава образцов с применением методов газовой хромато-масс-спектрометрии и спектроскопии диссоциативного захвата электронов

Маркова А.В.¹, Абдуллин М.Ф.², Поглазов К.Ю.¹

¹Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

²Уфимский Институт химии УФИЦ РАН

По экспериментальным данным, полученным методом газовой хромато-масс-спектрометрии, основными компонентами в исследуемых образцах

2-coumaranone (Sigma-Aldrich, A18617-1G, степень очистки 97%) могут являться бензофуран-2(3H)-он (индекс сходства (и.с) 87.25) и 5-бензофуранол (и.с 82.29). В образце Benzofuran-3(2H)-one (Sigma-Aldrich, 12502, степень очистки $\geq 97\%$) основными компонентами могут являться бензофуран-3(2H)-он (и.с 94.62), 3-этил фталид (и.с 89.59), о-фталевый альдегид (и.с 84.1), 2-бензофуранол (и.с 83.15). В связи с тем, что различные изомеры, в большинстве своем, будут иметь на кривых эффективного выхода различные резонансы при разных энергиях электронов [1], были проведены исследования экспериментальных образцов с помощью методов спектрометрии диссоциативного захвата электронов и теории функционала плотности. Данные исследования подтвердили наличие большинства указанных примесей в составе экспериментальных образцов, а 3-этил фталид был исключен из состава примесей в Benzofuran-3(2H)-one, т.к. не проявлялся на кривых эффективного выхода.

- [1] Таюпов М.М., Маркова А.В., Сафронов А.М., Галеев Р.В. Определение примесных мод в спектрах диссоциативного захвата электронов молекулами бензофуран-3(2H)-она и бензофуран-2(3H)-она // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2022 – Т. 25 – № 2 – С. 49-59.

On the oscillations of the inflaton scalar field in some Starobinsky-like potentials

Maslov E.M., Koutvitsky V.A.

IZMIRAN, Moscow, Russia

We study dynamics of the inflaton scalar field $\phi(t)$ oscillating at the reheating stage in the Starobinsky-like potentials of the form

$$V(\phi) = V_\infty \left(1 - e^{-f(\chi)}\right)^2,$$

where $\chi = b\phi$, $b = \sqrt{16\pi G/3}$, V_∞ is a positive constant, and $f(\chi)$ is a growing odd function having asymptotics

$$f(\chi) \sim c\chi \quad (c > 1, \chi \rightarrow 0), \quad f(\chi) \sim \chi \quad (\chi \rightarrow \pm\infty).$$

The choice $f(\chi) = \chi$ corresponds to the Starobinsky potential [1].

The inflaton scalar field $\phi(t)$ is governed by the equation

$$\phi_{tt} + 3H\phi_t + V'(\phi) = 0,$$

where $H = a_t/a$ is the Hubble parameter, $a(t)$ is the scale factor, $H^2 = (8\pi G/3)\rho$, and $\rho = \dot{\phi}_t^2/2 + V(\phi)$ is the energy density. If $c \gg 1$, the field $\phi(t)$

performs fast damped oscillations with a frequency $\theta_t \approx \omega(\rho)$ in the narrow potential well where $|\chi| \ll 1$, $f(\chi) \approx c\chi$. In this case $H/\omega \ll 1$, and we apply the technique of separation of fast and slow motions [2] setting

$$\phi = \varphi(\theta, \rho), \quad \phi_t = \omega(\rho)\varphi_\theta(\theta, \rho),$$

where the phase θ and density ρ are the fast and slow variables, respectively, and $\varphi(\theta, \rho)$ is a 2π -periodic solution of the equation

$$\omega^2(\rho)\varphi_{\theta\theta} + V'(\varphi) = 0.$$

As a result, denoting $\varrho = \rho/V_\infty < 1$, we find

$$\varphi(\theta, \rho) = \frac{1}{bc} \ln \frac{1 + \varrho^{1/2} \cos(\theta - \theta_0)}{1 - \varrho}, \quad \omega(\rho) = bc\sqrt{2V_\infty(1 - \varrho)},$$

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_0}}{1 - \sqrt{1 - \varrho}} \right)^{1/3}, \quad y(\varrho) = y(\varrho_0) + \frac{3}{2c}(\theta - \theta_0),$$

where $y(\varrho) = \varrho^{-1/2}(1 + \sqrt{1 - \varrho}) + \arcsin \varrho^{1/2}$, and the values with subscript “0” refer to the beginning of the reheating stage.

- [1] Starobinsky A.A., Phys.Lett. B **91**, 99 (1980);
 Ketov S.V., J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 08400 (2020).
 [2] Koutvitsky V.A., Maslov E.M., Grav. Cosmol. **23**, 35 (2017).

О субгармоничности функций с разделёнными переменными на плоскости

Мурясов Р.Р.

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Теорема. Пусть в интервале (r_1, r_2) , где $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, задана вещественная функция $f \geq 0$, f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (r_1, r_2) , а также имеет в (r_1, r_2) локально интегрируемые по Лебегу обобщённые производные f'_s и f''_s . Пусть в интервале $(-\infty, +\infty)$ задана отличная от константы вещественная 2π -периодическая функция $g \geq 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в $(-\infty, +\infty)$, а также имеет в $(-\infty, +\infty)$ локально интегрируемые по Лебегу обобщённые производные g'_s и g''_s . Функция u , в полярной системе координат (r, θ) имеющая вид $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$,

является субгармонической функцией в кольце K , заданном соотношениями $r_1 < r < r_2$ (K является всей плоскостью без начала координат, если $r_1 = 0$, $r_2 = +\infty$), которому в полярных координатах соответствует полуполоса или полуплоскость $P = (r_1, r_2) \times (-\infty, +\infty)$, тогда и только тогда, когда существует вещественное число $h > 0$, для которого f — это \sqrt{h} -степенно выпуклая функция в интервале (r_1, r_2) , g — это \sqrt{h} -тригонометрически выпуклая функция в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Следствие. Пусть в $[0, +\infty)$, задана вещественная функция $f \geq 0$, f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, $f(0) = 0$, f непрерывна в $[0, +\infty)$, а также имеет в $(0, +\infty)$ локально интегрируемые по Лебегу обобщённые производные f'_s и f''_s . Пусть в интервале $(-\infty, +\infty)$ задана отличная от константы вещественная 2π -периодическая функция $g \geq 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в $(-\infty, +\infty)$ а также имеет в $(-\infty, +\infty)$ локально интегрируемые по Лебегу обобщённые производные g'_s и g''_s . Функция u , в полярной системе координат (r, θ) имеющая вид $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$, является субгармонической во всей плоскости, тогда и только тогда, когда существует вещественное число $h > 0$, для которого f — это \sqrt{h} -степенно выпуклая функция в интервале $(0, +\infty)$, g — это \sqrt{h} -тригонометрически выпуклая функция в интервале $(-\infty, +\infty)$.

- [1] А.Ф.Гришин, К.Г.Малютин. Тригонометрически выпуклые функции: монография; Юго-Зап. гос. ун-т. Курск, 2015. 146 с.
- [2] У.Хейман, П.Кеннеди, Субгармонические функции, Мир, М.,1980.

**Математическая модель процесса закачки холодного
углекислого газа в насыщенный метаном и водой
зонально-неоднородный пористый пласт**

Мусакаев Н.Г., Бородин С.Л.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень, Россия

В последние десятилетия растет глобальный спрос на энергию, что, в свою очередь, обуславливает рост объемов выбросов диоксида углерода. Данное обстоятельство требует поиска стратегий по уменьшению концентрации этого парникового газа в атмосфере. Государственная политика по сокращению выбросов климатических активных газов в атмосферу определяется указом президента Российской Федерации «О сокращении выбросов парниковых газов», согласно которому предполагается сокращение выбросов этих газов на 30% к 2030 году. Технологии улавливания и

хранения диоксида углерода, которые относятся к комплексным методологиям выборочного улавливания диоксида углерода из антропогенных источников выбросов и изоляции CO_2 в геологических формациях или океане, признаются незаменимыми инструментами для борьбы с глобальным потеплением, вызванным увеличением выбросов парниковых газов. Одним из подходящих способов избавиться от избытка CO_2 в атмосфере является улавливание и хранение углекислого газа. Предлагаются различные методы долгосрочного хранения диоксида углерода, в том числе хранение диоксида углерода в подземных хранилищах в газогидратной форме.

В работе на случай двумерного приближения построена математическая модель процесса закачки холодного (с температурой, меньшей исходной температуры пласта) углекислого газа в пористый коллектор, насыщенный в исходном состоянии метаном и водой. В отличие от опубликованных ранее работ учтен ряд дополнительных факторов, а именно: растворимость углекислого газа в воде, движение воды в пористой среде (наряду с фильтрацией газа), теплообмен рассматриваемой области пористой среды с окружающими горными породами, зональная неоднородность пласта. На основе разрабатываемой модели может быть осуществлен анализ влияния параметров закачиваемого углекислого газа и характеристик пористого пласта на динамику распределения полей давления и температуры в пласте, а также на режим и интенсивность образования газового гидрата.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00093, <https://rscf.ru/project/24-29-00093/>

О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на классе ультрадифференцируемых функций

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая область, $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ – семейство выпуклых компактов в \mathbb{R}^n таких, что $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) и $G = \bigcup_{m=1}^\infty K_m$.

Пусть $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m=1}^\infty$ – семейство выпуклых функций $h_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с $h_m(0) = 0$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

- i_1). $h_m(x) = h_m(|x_1|, \dots, |x_n|)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
- i_2). $\exists a_m > 0$: $h_m(x) \geq \|x\| \ln(1 + \|x\|) - a_m \|x\| - a_m$, $x \in \mathbb{R}^n$;
- i_3). $\lim_{x \rightarrow \infty} (h_m(x) - h_{m+1}(x)) = +\infty$;
- i_4). $\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (h_{m+1}(\alpha + \beta) - h_m(\alpha)) < \infty$ для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| = 1$;

$i_5)$. $\forall k \in \mathbb{N} \exists l = l(m, k) \in \mathbb{N}$: $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \exp(h_{m+l}(\alpha + k\gamma) - h_m(\alpha)) < \infty$, где

$\gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Пусть $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(G)$ – пространство функций $f \in C^\infty(G)$ таких, что $\forall m \in \mathbb{N}$

$$p_m(f) = \sup_{x \in K_m, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{h_m(\alpha)}} < \infty.$$

Наделим $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(G)$ топологией, определяемой системой полунорм p_m .

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_m на \mathbb{C}^n по правилу

$$\varphi_m(z) = h_m^*(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_n|), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

где h_m^* – преобразование Юнга-Фенхеля функции h_m .

Введём нормированные пространства

$$P_m = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{H_{K_m}(Im z) + \varphi_m(z)}} < \infty\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где H_{K_m} – опорная функция компакта K_m . Пусть $P_{G, \mathcal{H}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$. Наделим $P_{G, \mathcal{H}}$ топологией индуктивного предела пространств P_m .

Пусть $\hat{\Phi}$ – преобразование Фурье-Лапласа функционала $\Phi \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(G)$, определяемое по формуле $\hat{\Phi}(z) = \Phi(e^{-i\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$. Здесь $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(G)$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(G)$, наделённое сильной топологией.

Теорема. Преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространств $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(G)$ и $P_{G, \mathcal{H}}$.

Численное исследование течения жидкости в кольцевых каналах с учетом переменной вязкости

Мухутдинова А.А.

ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Изучение течения жидкостей с переменной вязкостью является одной из важных задач в научных и инженерных исследованиях. В данной работе исследуется течение несжимаемой жидкости, вязкость которой зависит от температуры, в кольцевом канале, где на внутренней и внешней поверхностях происходит теплообмен с окружающей средой. Рассматриваются две зависимости вязкости жидкости: монотонная и немонотонная [1]. Математическая модель состоит из уравнений неразрывности,

Навье-Стокса и сохранения энергии, записанных в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии [2, 3] в безразмерном виде. Система уравнений математической модели решалась численно с использованием метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) [4], модифицированного для учета переменного коэффициента вязкости. Оригинальный компьютерный код реализован на языке программирования C++. В результате численного исследования получены графики скоростей в различных сечениях кольцевого канала, а также распределения полей температуры и вязкости. Установлено, что в зависимости от интенсивности теплообмена происходит образование высоковязких зон, определяющих характер течения жидкости в канале и её расход.

- [1] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей Издательство "Наука Ленинградское отделение, 1975, 592 с.
- [2] Киреев В. Н., Мухутдинова А. А., Урманчиев С. Ф. О критических условиях теплообмена при течении жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87, № 3. С. 369-378. DOI 10.31857/S0032823523030062.
- [3] Кочин Н. Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2 // М.: Физматлит. 1963. 728 с.
- [4] Patankar S., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 200 p.

Исследование акустического рассеяния на системе звукопроницаемых сфер

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Исследование акустического рассеяния от препятствий малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, поскольку на данном явлении основываются многие применения акустических волн, такие как гидролокация, зондирование атмосферы и океана, приборы неразрушающего контроля, создание позиционируемого 3D звука и т.п.

В настоящей работе изучается акустическое рассеяние сферической волны от монополюсного источника излучения на системе звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве. С целью определения параметров, изменение которых существенным образом влияет на систему в целом,

проводится численный анализ чувствительности системы к малым изменениям физических и геометрических параметров для множества сфер, расположенных в различных конфигурациях.

Проведена верификация обобщенной численной техники, которая показала, что результаты вычислительных экспериментов, представленных в настоящей работе, хорошо согласуются как с экспериментальными данными работы [1], так и с результатами расчетов других исследователей — для слоя капель воды в воздухе в пределах небольшой погрешности с аналогичными результатами для случая малых жестких сфер [2].

Показано, что для плоских конфигураций система наиболее чувствительна к изменению радиуса капель в случае, когда упругость вещества внутри капли меньше, чем у внешней среды, а при увеличении числа сфер в плотных конфигурация, — когда упругость вещества внутри капли много больше, чем у внешней среды. В общем случае получено, что для воздушных пузырьков в воде существенным фактором является тип конфигурации системы; для капель воды в воздухе существенными являются как тип конфигурации, так и число сфер в ней; а для капель дихлорэтана в воде тип конфигурации и число сфер в ней являются несущественными факторами.

- [1] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36.
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.

О собственных колебаниях жидкости в вертикальной и горизонтальной скважинах

Насырова Д.А.

Институт Механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассмотрены собственные колебания столба жидкости в вертикальной нефтяной скважине, возникающие при резком закрытии или открытии насосов скважины (гидроударе). Период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяются протяженностью столба жидкости, ее реологическими свойствами, а также коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважины и свойствами образованных трещин ГРП). Построены математические модели, описывающие движение

столба жидкости в скважине, когда ее верхний конец открыт или закрыт, и фильтрацию в призабойной зоне, подверженной ГРП. Получены решения задачи о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Изучены зависимости частоты и коэффициента затухания колебаний давления на различных участках скважины от значений проницаемости пласта, параметров ГРП.

Также нами были рассмотрены собственные колебания столба жидкости в обсаженной горизонтальной скважине длиной l сообщающейся с пластом посредством N радиальных трещин ГРП, расположенных равномерно вдоль скважины, возникающие при резком закрытии или открытии насосов скважины. Получено трансцендентное уравнение для комплексной частоты собственных колебаний столба жидкости в скважине. На основе этого уравнения определены частотные характеристики, описывающие собственные колебания жидкости в горизонтальной скважине с системой трещин, перпендикулярных стволу скважины. Проведенный численный анализ частотных характеристик колебаний показывает влияние изменения ширины трещины, количества трещин и проницаемости пласта на собственные частоты.

- [1] Шагапов В. Ш., Башмаков Р. А., Хакимова З. Р., Насырова Д. А. *Колебания жидкости в открытой скважине и сообщающейся с пластом, подверженным ГРП* Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27. № 4. С. 872–880.
- [2] Шагапов В. Ш., Башмаков Р. А., Насырова Д. А. *Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП* ПММ. 2022. Т. 86. № 1. С. 88–104.

Рост субгармонических функций в бесконечном полукольце

Наумова А.А.

Курский государственный университет, г.Курск, Россия

В 60-х годах в работах американских математиков Л. Рубела и Б. Тейлора [1], Д. Майлза [2], Д. Шиа и др. начал широко применяться метод рядов Фурье для изучения свойств целых и мероморфных функций. Этот метод является эффективным при решении ряда общих задач теории мероморфных функций и устанавливает ее связь с теорией рядов Фурье.

Результаты Рубела, Тейлора, Майлза были распространены К.Г. Малютиним [3] на дельта-субгармонические функции в полуплоскости $S_+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$. Мы распространяем результаты из работы [3] на бесконечное полукольцо $D_+(R_0) = \{z : |z| > R_0, \text{Im } z > 0\}$.

Обозначим через $SK(R_0)$ класс субгармонических функций в $D_+(R_0)$, имеющих в каждом конечном полукольце $D_+(R_0, R) = \{z : R_0 < |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ положительную гармоническую мажоранту. Функция $v \in SK(R_0)$ называется функцией конечного γ -типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r, v) \leq A\gamma(Br)$ для всех $r > R$, где γ - функция роста. Класс таких функций обозначим через $JS(R_0, \gamma)$.

Теорема. Пусть γ - функция роста, $v \in SK(R_0)$, $c_k(r, v)$ - коэффициенты Фурье. Следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) $v \in JS(R_0, \gamma)$;
- 2) при некоторых положительных A, B и всех $r > R$ выполняется неравенство

$$|c_k(r, v)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00006).

- [1] L. A. Rubel, B. A. Taylor. Fourier series method for meromorphic and entire functions. *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 53–96.
- [2] J. B. Miles. Quotient representations of meromorphic functions. *d'Analyse Math.*, **25** (1972), 371–388.
- [3] К. Г. Малютин. Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости. *Математический сборник*, **192**: 6 (2001), 51–70.

Численное исследование устойчивости течения жидкости в кольцевом канале

Низамова А.Д.

ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В настоящее время накоплен достаточный задел в исследовании устойчивости течений жидкостей в плоских каналах, однако, при изучении этой задачи часто пренебрегают воздействием температурного фактора на смену режима течений [1, 5]. Течения вязких жидкостей возникают в ряде отраслей промышленности при эксплуатации различных технических установок и устройств, при реализации ряда технологических процессов. Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра-Зоммерфельда [2–4]. В настоящей работе рассмотрено течение термовязкой модельной

жидкости в кольцевом канале с заданным температурным полем. Построены спектральные картины собственных значений обобщенного уравнения. Спектральные характеристики определяют структуру собственных функций и критические параметры течения термовязкой жидкости. При этом собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени.

- [1] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
- [2] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, No 3. С. 454–459.
- [3] Nizamova, A.D., Murtazina, R.D., Kireev, V.N., Urmancheev, S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 9, pp. 2211–2215.
- [4] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 5, pp. 1778–1784.
- [5] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. of Fluid Mech. 1971. V. 50. Pp. 689–703. DOI: 10.1017/S0022112071002842

Подмодели движения одноатомного газа

Никонорова Р.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа имеет вид

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, D\rho + \rho \operatorname{div}\vec{u} = 0, DS = 0, p = f(S)\rho^{\frac{5}{3}},$$

где $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия. Все зависимые переменные есть функции времени t и декартовых координат $\vec{x} = (x, y, z)$.

Уравнения допускают группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. Особенностью модели движения одноатомного газа является то, что алгебра Ли содержит проективный оператор $X_{12} = t^2\partial_t + t\vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u}) \cdot \partial_{\vec{u}} - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$. Оптимальная система неподобных подалгебр построена в работе [1].

В работе [2] из оптимальной системы подалгебр выбраны подалгебры, содержащие проективный оператор и построен граф вложенных подалгебр. Для подалгебр размерности 1-4 построены инвариантные подмодели, получены частные решения, описано движение частиц газа, построен звуковой коноид [3, 4].

- [1] Черевко А.А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S) \rho^{5/3}$. Препринт №4-96, РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1996. 39 с.
- [2] Шаяхметова Р.Ф. Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа // Сибирские электронные математические известия. 2014. Т. 11. С. 605–625.
- [3] Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y. New Exact Solutions with a Linear Velocity Field for the Gas Dynamics Equations for Two Types of State Equations // Mathematics. 2022. Vol. 10, issue 1: 123.
- [4] Nikonorova R.F. Simple Invariant Solutions of the Dynamic Equation for a Monatomic Gas // Proc. Steklov Inst. Math. 2023. Vol. 321, suppl. issue 1. P. 186–203.

Построение решений аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующих некоторым гамильтоновым системам из списка Кимуры и Кавамуко

Павленко В.А.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

На сегодняшний день изучение ДУ, которые могут интегрироваться методом изомонодромной деформации (ИДМ) является актуальным. Пока что известен конечный список совместных пар гамильтоновых систем, таких что: (эти ОДУ допускают ИДМ)

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{q_j} \quad (k = 1, 2) \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждое из которых есть условие совместности двух линейных систем ОДУ вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \quad V'_\eta = AV,$$

где квадратные матрицы L_{s_k} и A одинаковой размерности рациональны по переменной η . Некоторые такие пары гамильтоновых систем ОДУ

приведены в статье Х. Кимуры [1]. Чуть позже Кавамуко дополнил этот список.

Настоящая работа посвящена построению решений совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H_{s_k}^{3+1+1}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ ($k = 1, 2$) гамильтоновой системы H^{3+1+1} из статьи [1]. А также построению решений совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H_{s_k}^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ ($k = 1, 2$) гамильтоновой системы $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ из статьи [2]. Построенные решения являются явными в терминах решений линейной системы ОДУ, которая выписана в статье [3]. Следует отметить, что почти все решения соответствующих аналогов временных уравнений Шредингера, которые соответствуют другим гамильтоновым системам уже построены. Некоторые из них построены автором совместно с Сулеймановым Б.И.

- [1] *H. Kimura*. The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure. *Annali di Matematica pura et applicata IV*. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.
- [2] *H. Kawamuko*. On the Garnier system of half-integer type in two variables, *Funkcial. Ekvac.* 2009. V. 52. No. 2. P. 181–201.
- [3] *H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai*. Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations. arXiv:1209.3836 (2012).

О числе решений одной задачи с параметром и разрывной нелинейностью

Павленко В.Н.

ЧелГУ, г. Челябинск, Россия

Рассматривается двухточечная краевая задача со смешанными однородными граничными условиями, параметром и разрывной нелинейностью

$$-U''(x) = \lambda f(U(x)), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$U'(0) = U(1) = 0, \quad (2)$$

где $f(U) = a$, если $U \leq 1$, и $f(U) = -a$, если $U > 1$, $a < 0$, параметр λ положительный.

Решением задачи (1)–(2) называется непрерывно дифференцируемая на $[0,1]$ функция $U(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) на $(0,1)$, за исключением, быть может, конечного числа точек, и граничным условиям (2).

Теорема Множество бифуркационных значений параметра λ - возрастающая последовательность $\lambda(\hat{1}), \lambda(1), \lambda(\hat{2}), \lambda(2), \dots$, где $\lambda(\hat{k}) = -a^{-1}(32k^2 - 32k + 6)$, $\lambda(k) = -a^{-1}(32k^2 - 2)$, $k \in N$. Для каждого натурального k задача (1)-(2) имеет

1. $4k - 2$ решений, если $\lambda = \hat{\lambda}(k)$,
2. $4k - 1$ решений, если $\lambda \in (\hat{\lambda}(k), \lambda(k))$,
3. $4k$ решений, если $\lambda = \lambda(k)$,
4. $4k + 1$ решений, если $\lambda \in (\lambda(k), \hat{\lambda}(k + 1))$.

Если $\lambda \in (0, \hat{\lambda}(1))$, то задача (1)-(2) имеет единственное решение.

Уравнение (1) с граничными условиями $U(0) = U(1) = 0$ исследовалось в [1]. В этом случае график решения $U(x)$ на $(0, 1)$ может пересекать прямую $U = 1$ только в четном числе точек. А при граничных условиях (2), если $U(0) > 1$, то число таких точек нечетно, а если $U(0) < 1$, то четно, что усложняет задачу.

- [1] Басков О.В., Потапов Д.К. О решениях краевой задачи для одного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 2023.- Т.63, №8. С. 1296 - 1308.

Задачи интерполяции голоморфными функциями из замыкания системы экспоненциальных мономов с заданными показателями и кратностями

Попенов С.В.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Обсуждаются постановки ряда задач, связанных с указанной в названии интерполяцией с бесконечным множеством узлов интерполяции во всех выпуклых областях с произвольными узлами интерполяции в этих областях. Рассматривается интерполяция элементами ядер специальных сверточных операторов, интерполяция рядами эвспонент с заданным множеством показателей и интерполяция элементами общих инвариантных подпространств. Получены критерии разрешимости. Установлена эквивалентность этих задач некоторым специальным задачам, в частности, задаче простой аппроксимации интерполяционных ланных, задаваемых во всех узлах интерполяции. Доказано существование рядов

экспонент разреженными показателями и элементов инвариантных подпространств в выпуклой области, которые имеют экзотическое предельное поведение на границе области, как самой функции так и ее производных. В доказательстве необходимости используется эффект принудительного аналитического продолжения рассматриваемых интерполирующих элементов. Часть результатов была анонсирована ранее в работе С. Г. Мерзляков, С. В. Попенов, “Множество показателей для интерполяции суммами рядов экспонент во всех выпуклых областях”, Дифференциальные уравнения. Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 143, ВИНТИ РАН, М., 2017, 48–62

Особенности течения нативной и разбавленной крови в микроканале со ступенчатым сужением

Рахимов А.А., Валиев А.А., Ахметов А.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В организме больного человека со стенозом (сужением) сосудов естественные условия течения крови нарушаются. В узкой части кровеносного сосуда – стенозе, скорость не уменьшается, а возрастает, увеличивается и скорость деформации сдвига, что является аномальным по отношению к гемодинамике здорового организма [1]. Было разработано микрожидкостное устройство (МЖУ) с сужением, составляющим 1/20 часть сечения основного микроканала шириной 1 мм. Изучалось течение нативной (цельной) крови здорового пациента с антикоагулянтом ЭДТА К3 и течение разбавленной крови – жидкости с анизотропными элементами (эритроцитами), не взаимодействующими друг с другом при 1%-й объёмной концентрации в физрастворе. Микросъемка процесса производилась высокоскоростной камерой Photron FASTCAM SA5 через инвертированный микроскоп OLYMPUS IX71. Обнаружено различие скорости и структуры течения нативной и разбавленной крови. Скорости эритроцитов на оси: в цельной крови после сужения ниже, чем до него, в разбавленной наоборот – существенно выше. Для нативной крови скорость движения эритроцитов примерно одинакова на одном и том же расстоянии до входа в сужение и после него. Для разбавленной крови эритроциты ускоряются при прохождении сужения и на выходе из него их скорость выше, чем на том же расстоянии у входа. Ориентация плоскости одиночных эритроцитов разбавленной крови в зоне ускорения (перед стенозом) и стенозе преимущественно вертикальна и совпадает с линиями тока, в зоне торможения эритроциты (дискоциты) переориентируются в горизонтальное положение. Дискоциты при течении потока нативной крови в зоне ускорения и стенозе ориентируются также, а при торможении (после выхода из стено-

за) перестраиваются перпендикулярно линиям тока и параллельно друг другу, что приводит к увеличению вязкости и позволяет предположить, что процесс тромбообразования более вероятен в области кровеносного сосуда, в котором ориентация движущихся дискоцитов перпендикулярна линиям тока, т.е. после сужения.

- [1] Ахметов А.Т., Валиев А.А., Рахимов А.А., Саметов С.П. Анизотропные свойства крови в сосуде со стенозом // Доклады академии наук. 2018. Т. 483, №2. С. 145-149.

О гиперциклических операторах в \mathcal{F}_φ

Рахимова А.И.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ — семейство выпуклых в \mathbb{C}^n функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$$i_1) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty;$$

$$i_2) \varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n;$$

$$i_3) \lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty;$$

$i_4)$ существуют постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что $\varphi_{m+1}(z+t) \leq \varphi_m(z) + b_m$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^n : |t| \leq a_m$.

Далее для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим пространство

$$\mathcal{F}_m = \{f \in H(\mathbb{C}^n), f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty\}.$$

Очевидно, \mathcal{F}_m — банахово пространство. Отметим, что для всех $m \in \mathbb{N}$ вложения $\mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}_m$ непрерывны в силу условия $i_2)$, а ввиду условия $i_3)$ они вполне непрерывны. Положим $\mathcal{F}_\varphi = \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{F}_m$. С обычными операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа \mathcal{F}_φ образует линейное пространство. Снабдим его топологией проективного предела пространств \mathcal{F}_m . Будучи проективным пределом компактной последовательности банаховых пространств \mathcal{F}_m , \mathcal{F}_φ — пространство Фреше–Шварца.

Теорема. Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве \mathcal{F}_φ коммутирует с операторами частного дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T — гиперциклический оператор в \mathcal{F}_φ . [1]

Из теоремы вытекают следующие утверждения.

Следствие. Пусть заданы числа $N \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ и точки $a^j \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^N c_j f(z + a^j)$, не кратный тождественному отображению, гиперцикличесен в \mathcal{F}_φ .

Следствие. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и для каждого $j = 1, 2, \dots, N$ заданы числа $c_j \in \mathbb{C}$, точки $a^j \in \mathbb{C}^n$ и мультииндексы $\alpha^j \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^N c_j (D_z^{\alpha^j} f)(z + a^j)$, действующий в \mathcal{F}_φ и не кратный тождественному, является гиперциклическим.

- [1] А.И. Рахимова. О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — Т. 1, Вып. 58. — С. 88–110.

Следы функций бесконечномерного аргумента и краевые задачи для оператора Лапласа-Вольтерра

Сакбаев В.Ж.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва;
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Самосопряженный оператор Лапласа-Вольтерра Δ в пространстве функций бесконечномерного аргумента задается с помощью введения на пространстве последовательностей $E = \ell_2$ трансляционно инвариантной конечно-аддитивной меры λ . Полугруппа $e^{t\Delta}$, $t \geq 0$, порождаемая оператором Лапласа-Вольтерра в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(E, \lambda, \mathbb{C})$ квадратично интегрируемых по мере λ функций, сглаживает произвольную функцию так, что любая функция из пространства образов $\bigcup_{t>0} e^{t\Delta}(\mathcal{H}) \equiv C_\Delta^\infty$ обладает производной любого порядка по любому базисному направлению, лежащей в пространстве \mathcal{H} (см. [1]).

В общем случае среди "бесконечно дифференцируемых" функций из пространства C_Δ^∞ существуют разрывные. Найдено инвариантное относительно полугруппы $e^{t\Delta}$, $t \geq 0$, подпространство \mathcal{H}_0 такое, что любая функция из образа $\bigcup_{t>0} e^{t\Delta}(\mathcal{H}_0)$ является непрерывной.

Пространство Соболева $W_{2,\Delta}^1$ вводится как область определения замыкания квадратичной формы $K_\Delta(u) = -(\Delta u, u)$, $u \in C_\Delta^\infty$. Установлено, что каждая функция из пространства $W_{2,\Delta}^1$ обладает квадратично интегрируемым следом на гиперповерхности $E_j^a = \{x \in E : x_j = a\}$.

Исследовано краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \text{ in } \Pi, \quad u|_{\partial\Pi} = 0, \quad (1)$$

на непустом параллелепипеде $\Pi = \{x \in E : a_j < x_j < b_j, j \in \mathbb{N}\}$, с положительной мерой $\lambda(\Pi)$, задаваемой безусловно сходящимся произведением $\prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$. Установлено, что если $f \in L_2(\Pi, \Lambda, \mathbb{C}) \equiv \mathcal{H}_{\Pi}$, то задача Дирихле (1) имеет единственное решение, являющееся точкой минимума функционала

$$J(u) = \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathcal{H}_{\Pi}}^2 + 2(u, f)_{\mathcal{H}_{\Pi}}, \quad u \in W_{2, \Delta}^1 : u|_{E_j^{a_j}} = 0 = u|_{E_j^{b_j}} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

- [1] Busovikov V.M., Sakbaev V.Zh. Sobolev spaces of functions on Hilbert space endowed with shift-invariant measures and approximations of semigroups. // *Izvestiya Mathematics*. **84**(4) 694–721, 2020.

Один класс дробных эволюционных уравнений на прямой без начальных условий

Скрипка Н.М., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Некоторые процессы по сути не зависят от своих начальных данных по прошествии достаточно длительного времени. В физике решения соответствующих уравнений имеют смысл промежуточных асимптотик [1–3].

Рассмотрим дробное дифференциальное уравнение на прямой без начальных условий.

$$D^{\alpha} z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ (линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве \mathcal{Z}), использована дробная производная Лиувилля

$$D^{\alpha} z(t) := D^m \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{m-\alpha} z(s) ds}{\Gamma(m-\alpha+1)}, \quad m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}.$$

Решением уравнения (1) будем называть функцию $z \in C(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) \cap L_2(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$, для которой $J^{m-\alpha} z \in C^m(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$ и при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется (1).

Обозначим

$$Z_{\alpha}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} ((-i\omega)^{\alpha} - A)^{-1} e^{-i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\alpha > 0$, $\{(-i\omega)^\alpha : \omega \in \mathbb{R}\} \cap \sigma(A) = \emptyset$, $f \in C(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) \cap L_2(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$. Тогда функция

$$z_f(t) = \int_{\mathbb{R}} Z_\alpha(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением уравнения (1).

- [1] Баренблат Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики математической физики // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2 (158). С. 115–129.
- [2] Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физ. наук. 1985. Т. 146, вып. 3. С. 493–505.
- [3] Костин В. А., Костин Д. В., Алкади Х. Задача без начальных условий для уравнения с дробными производными и промежуточные асимптотики // Челябин. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, вып. 1. С. 18–28.

Ошибка в расчетах высоты морской поверхности при отклонении оси антенны альтиметра от положения надира

Слободянюк А.О.^a, Лебедев С.А.^{a,b,c}

^a Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”, Москва, Россия;

^b Геофизический центр РАН, Москва, Россия;

^c Майкопский государственный технологический университет, Майкоп, Россия.

Благодаря возможности достоверного теоретического описания рассеяния электромагнитного излучения взволнованной водной поверхностью, численное моделирование является эффективным инструментом для моделирования работы радиовысотомера и отладки алгоритмов обработки. С его помощью можно провести численный эксперимент и рассмотреть по отдельности и в комплексе влияние множества факторов, которые вносят вклад в точность измерений.

Геометрия расчёта формы отражённого импульса бралась в соответствии с моделью Брауна [1], а для расчёта отражённой мощности каждой отдельно взятой элементарной площадки при малых углах падения использовался метод Кирхгофа [2].

Анализ формы импульса, отражённого от зеркальной поверхности, проводился для модельного эксперимента, когда угол отклонения оси антенны альтиметра от положения надира изменялся в интервале от 0 до 0,5°.

Обработка формы отражённого импульса алгоритмами ретрекинга Брауна и Осеан-2 показала, что при росте угла отклонения оси антенны происходит смещение середины переднего фронта почти на 3 гейта. При расчётах высот морской поверхности это может приводить к ошибке около 2 м. При этом полученные из ретрекинга значимые высоты волн также уменьшаются.

На практике отклонение оси антенны от положения надира не превышает $0,2^\circ$, что соответствует ошибке примерно 0,3 м.

- [1] Brown G. The average impulse response of a rough surface and its applications, IEEE transactions on antennas and propagation. – 1977. – V. 25. – N. 1. – P. 67–74.
- [2] Басс Ф., Фукс И. Рассеяние волн на статически неровной морской поверхности. — Москва: Наука, 1972.

О векторных производных формах нелинейного уравнения Шредингера **Смирнов А.О.**

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, г.Санкт-Петербург, Россия

Недавно нами была построена иерархия векторного уравнения Герджикова-Иванова и найдены простейшие решения уравнений этой иерархии [1]. За несколько лет до этого мы предложили метод построения единых решений для всех производных форм нелинейного уравнения Шредингера: уравнений Каупа-Ньюэлла, Чень-Ли-Лью и Герджикова-Иванова [2]. Поэтому нами была поставлена задача создать единую пару Лакса для векторных форм этих трех производных уравнений.

В результате проведенных исследований была предложена последовательность пар Лакса, зависящая от функциональных параметров s и s_k ($\partial_x s_k = \partial_{t_k} s$), условием совместности которых является иерархия обобщенного векторного производного нелинейного уравнения Шредингера. Первыми уравнениями этой иерархии ($k = 1$), в частности, являются: векторное уравнение Каупа-Ньюэлла ($s = 2\mathbf{p}^t \mathbf{q}$), векторное уравнение Чень-Ли-Лью ($s = \mathbf{p}^t \mathbf{q}$) и векторное уравнение Герджикова-Иванова ($s = 0$). Как и в случае скалярных уравнений [2], амплитуда многофазных решений и ассоциированные с ними спектральные кривые не зависят от функционального параметра s . Заметим, что полученное нами векторное уравнение Каупа-Ньюэлла немного отличается от “классического” [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00196 (<https://rscf.ru/project/22-11-00196/>).

- [1] Smirnov A.O., Frolov E.A., Dmitrieva L.L. *On a hierarchy of vector derivative nonlinear Schrödinger equations* // Symmetry, 2024. V.16, no.1, 60, 21p.
- [2] Smirnov A.O. *Spectral curves for the derivative nonlinear Schrödinger equations* // Symmetry, 2021, V.13, no.7, 1203, 18p.
- [3] Morris H.C., Dodd R.K. *The two component derivative nonlinear Schrödinger equation* // Phys. Scr., 1979. V.20 , 505.

Задача интегральной геометрии для одного семейства гипербол Сысоев С.Е.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Пусть функция f принадлежит пространству Шварца $S(R^2)$ и известны значения интегралов

$$Pf(\theta, p) = \int_{h(\theta, p)} f(x, y) dl$$

по семейству гипербол $h(\theta, p) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 \cos 2\theta + 2xy \sin 2\theta - y^2 \cos 2\theta = p\}$, $\theta \in [0, \pi)$, $p \geq 0$. Здесь dl – элемент длины на $h(\theta, p)$. Гипербола $h(\theta, p)$ получается из гиперболы $x^2 - y^2 = p$ поворотом вокруг начала координат на угол θ . Рассматривается задача восстановления функции f . Известно [1] решение подобной задачи для софокусных кривых второго порядка на плоскости.

Обозначим $L(\theta, p)$ прямую $x \cos \theta + y \sin \theta = p$. Для функции $g \in S(R^2)$ определим преобразование Радона

$$Rg(\theta, p) = \int_{L(\theta, p)} g(x, y) ds,$$

где ds – элемент длины на прямой $L(\theta, p)$.

Теорема. Для функций $f \in S(R^2)$ и $g \in S(R^2)$ следующие соотношения эквивалентны

$$f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}g(x^2 - y^2, 2xy),$$

$$2Rg(2\theta, p) = Pf(\theta, p).$$

Эта теорема позволяет свести задачу восстановления функции f к задаче обращения преобразования Радона функции g и получить явную формулу для нахождения f .

- [1] K.Denecker, J.Van Overloop and F.Somment, *Inverse Problems*, 14 (1998), p. 615–633.

Плоский коллапс с линейным полем скоростей

Уразбахтина Л.З., Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики УФИЦ РАН, Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Изучение газовой динамики частиц, скорости которых являются линейными функциями от пространственных координат, тесно связано с исследованием динамики жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов. Еще Риман [1] показал, что при условии линейной зависимости поля скоростей от координат наиболее общий тип движения, совместимый с условием сохранения эллипсоидальной формы фигуры равновесия, представляет собой суперпозицию равномерного вращения и внутренних движений с равномерно распределенной завихренностью жидкости. Интерес к данной области обуславливан ее значением для космогонии и астрофизики, в частности, важностью ее выводов для теории фигур небесных тел.

В данной работе найдено новое точное решение уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей с однородной деформацией. При этом матрица линейности является диагональной невырожденной с различными собственными числами [2]. Уравнение состояния есть уравнение с разделенной плотностью. Для рассматриваемого решения с уравнением состояния для политропного газа записаны уравнения мировых линий движения частиц газа. Движение частиц описывает коллапсы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях в различные моменты времени. Показаны движения ограниченных выделенных объемов частиц. Описаны движения звуковой поверхности, характеристик и характеристического коноида. Приведены приближенные формулы для вычисления движения характеристик, проходящих через любую заданную поверхность. Получено точное решение с неоднородной деформацией для матрицы линейности рассматриваемого решения без условий инвариантности плотности и давления.

- [1] Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoides, *Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen*, 1861.

- [2] Уразбахтина Л.З. Интегрируемые гидродинамические подмодели с линейным полем скоростей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 3(51). С. 135–145.

Интегральные неравенства для субгармонических функций

Хабибуллин Б. Н.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Субгармонической функции $u \neq -\infty$ на области в *комплексной плоскости* \mathbb{C} соответствует *распределение масс Рисса* $\Delta_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u$, где Δ — оператор Лапласа на обобщённых функций. Пусть u, M — субгармонические функции в окрестности круга $\overline{D}(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$. **Задача** — каковы соотношения между Δ_u и Δ_M , если $u \leq M$ на этой окрестности? Приведём новый результат по этой задаче.

Пусть число $p > 0$, а $s \geq 0$ — конечная p -тригонометрически выпуклая 2π -периодическая функция на вещественной оси \mathbb{R} , т.е. для любых чисел $\theta_1 < \theta < \theta_2 < \theta_1 + \pi/p$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из $s(\theta_j) \leq c_1 \sin p\theta_j + c_2 \cos p\theta_j$ при $j = 1, 2$ следует неравенство $s(\theta) \leq c_1 \sin p\theta + c_2 \cos p\theta$.

Пусть $F \geq 0$ — p -степенно выпуклая функция на $(0, R]$, т.е. для любых $0 < t_1 < t < t_2 \leq R$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из $F(t_j) \leq c_1 t_j^p + c_2 t_j^{-p}$ при $j = 1, 2$ следует $F(t) \leq c_1 t^p + c_2 t^{-p}$, а также F убывающая и $F(R) = 0$.

Теорема (2024 г.). Если $u \leq M$ на $\overline{D}(R)$, а также $u(0) = 0$, то

$$\iint_{\overline{D}(R) \setminus \overline{D}(r)} F(|z|)s(\arg z) d\Delta_u(z) \leq \iint_{\overline{D}(R) \setminus \overline{D}(r)} F(|z|)s(\arg z) d\Delta_M(z) + Q_M(r)$$

при любом r из промежутка $(0, R)$, где в остаточном слагаемом

$$Q_M(r) := \left(\sup_{\mathbb{R}} s \right) (F(r) - rF'_{\text{lh}}(r)) \left(\Delta_M(\overline{D}(r)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta}) d\theta \right) \geq 0$$

левая производная F'_{lh} на $(0, R)$ всегда существует.

Неравенство новое даже при простейших вариантах функций s и F , например, $s \equiv 1$, $F(t) \equiv t^{-p} - R^{-p}$, $t \in (0, R]$. Получен ряд его приложений к описанию множеств единственности для целых функций и к вопросам аппроксимации экспоненциальными системами через версии для функций на \mathbb{C} . Для конкретных субгармонических функций M на \mathbb{C} , например, при $M(z) := h(\arg z)|z|^p$, где h — p -тригонометрически выпуклая функция, правая часть неравенства легко выписывается в явном виде при любом $p > 0$. При этом остаточное слагаемое Q_M практически не играет

роли и в приложениях может не учитываться. Теорема новая и вполне содержательная и для голоморфных и субгармонических функций в единичном круге, т. е. при $0 < r < R < 1$. Приложения для единичного круга, а также версии этой теоремы для функций многих вещественных и комплексных переменных пока в стадии разработки.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-21-00002, <https://rscf.ru/project/24-21-00002/>.

Цилиндрический изгиб микро- нанопластины с учетом действия среднего давления

Хакимов А.Г.

ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Для элемента деформированного однослойного графена запишем уравнения равновесия [1]

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0, \quad \frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} = 0, \quad Q = \frac{dM}{ds}, \quad (1)$$

где T , Q , M - усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент, R , s - радиус кривизны и длина дуги поперечного сечения деформированного однослойного графена. Изгибающий момент определяется

$$M = D \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right), \quad D = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

где E , ν , h - модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина нанотрубки, D - цилиндрическая изгибная жесткость нанотрубки, R_0 - радиус кривизны в недеформированном начальном состоянии. Для однослойного графена $1/R_0 = 0$. Из (1) с учетом (2) следует

$$T = T_1 - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right), \quad (3)$$

где T_1 , R_1 - усилие натяжения и радиус кривизны линии поперечного сечения деформированного однослойного графена в точке А. В точке А усилие натяжения равно нулю $T_1 = 0$, кривизна поперечного сечения также равна нулю $1/R_1 = 0$, поэтому

$$T = -\frac{D}{2} \frac{1}{R^2}. \quad (4)$$

Уравнение (1) с учетом (2), (4) запишется

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} = 0. \quad (5)$$

Используя соотношения

$$u = \frac{a}{R}, \quad \xi = \frac{s}{a}, \quad x = \frac{x^*}{a}, \quad y = \frac{y^*}{a}, \quad t = \frac{Ta^2}{D}, \quad q = \frac{Qa^2}{D}, \quad m = \frac{Ma}{D},$$

запишем уравнение (1)

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} = 0, \quad (6)$$

где x^* , y^* - размерные координаты. Решение уравнения (6) с условиями при $\xi = 0$: $u = 0$, $du/d\xi = q_0$ выражается через эллиптический синус

$$u(\xi) = \sqrt{2}\sqrt{q_0} \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right).$$

Так как

$$\frac{d\theta}{d\xi} = u(\xi), \quad \theta(\xi) = \int_0^\xi u(\sigma) d\sigma,$$

$$x(\xi) = \int_0^\xi \cos\theta(\sigma) d\sigma, \quad y(\xi) = \int_0^\xi \sin\theta(\sigma) d\sigma,$$

то безразмерные усилия и момент определяются

$$t = -\frac{u^2}{2}, \quad q = \frac{du}{d\xi} = q_0 \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right), \quad m = u,$$

где перерезывающая сила определяется через эллиптические косинус cn и дельта амплитуду dn .

- [1] Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. Издательство Московского университета. 1969. 695 с.

Закон сохранения энергии для гравитационного поля в модели вселенной как 3D-браны

Шарипов Р.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Известно, что в общей теории относительности Эйнштейна имеются определенные проблемы с законом сохранения энергии, см. [1]. Модель вселенной как 3D-браны — это новая теория гравитации, инициированная в [2] и развиваемая в дальнейших публикациях автора. Новая теория основана на критике понятия четырехмерного пространства-времени и предлагает трехмерный подход к описанию гравитации и всей релятивистской физики. В рамках этого подхода в [3] был выведен закон сохранения полной энергии для гравитационного поля и полей материи в форме стандартного интегрального равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathcal{H} \sqrt{\det g} d^3x + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^3 \mathcal{J}^i n_i dS = 0, \quad (1)$$

в котором $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{gr}} + \mathcal{H}_{\text{mat}}$ и $\mathcal{J}^i = \mathcal{J}_{\text{gr}}^i + \mathcal{J}_{\text{mat}}^i$, Ω — трехмерная область в 3D-бране, представляющей собой вселенную, g — трехмерная метрика в этой 3D-бране, являющаяся одной из динамических переменных гравитационного поля, $\partial\Omega$ — граница области Ω , dS — элемент площади на этой границе, определяемый в метрике g и n_i — компоненты единичного ковоктора нормали к $\partial\Omega$. Для плотности энергии гравитационного поля \mathcal{H}_{gr} и для компонент вектора плотности потока энергии гравитационного поля $\mathcal{J}_{\text{gr}}^i$ в работе [3] выведены явные формулы через динамические переменные гравитационного поля. Для аналогичных величин \mathcal{H}_{mat} и $\mathcal{J}_{\text{mat}}^i$, отвечающих полям материи, в [3] прописан алгоритм их вычисления через плотность лагранжиана материальных полей. Область Ω в (1) выбирается неподвижной в сопутствующих координатах, а t — это глобальное мембранное время. Расширение вселенной (3D-браны) на справедливость равенства (1) не влияет. Никаких проблем с законом сохранения энергии, обозначенных в [1], в новой теории не возникает.

- [1] Фаддеев Л.Д., *Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна* // Успехи физ. наук, 1982, Т. 136, No 3, С. 436–457.
- [2] Sharipov R.A., *A three-dimensional brane universe in a four-dimensional spacetime with a Big Bang*, 2022, e-print viXra:2207.0173, 1–10.
- [3] Sharipov R.A., *Energy conservation law for the gravitational field in a 3D-brane universe without equidistance postulate*, 2023, e-print viXra:2308.0175, 1–20.

Эквивалентные гамильтоновы системы для дифференциальных уравнений с производными четного порядка

Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)[f(y) + u(t)], \quad (1)$$

в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1p^{2n-2} + a_2p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}p^2 + a_n, \quad (2)$$

$$M(p) = b_0p^{2m} + b_1p^{2m-2} + \dots + b_{m-1}p^2 + b_m, \quad (3)$$

– взаимно простые многочлены ($0 \leq m < n$), $f(y)$ и $u(t)$ – скалярные $2m$ раз непрерывно дифференцируемые функции. Уравнения вида (1) возникают в теории управления, теории систем и др. Специфика многочленов (2) и (3) в том, что они содержат степени только четных порядков. К таким уравнениям приводят многие задачи гамильтоновой механики, теории гамильтоновых систем и ее приложений (см., например, [1]). Поэтому полезно от уравнения (1) перейти к эквивалентной гамильтоновой системе.

В докладе обсуждается следующая задача. Для уравнения (1) требуется построить эквивалентную гамильтонову систему вида

$$x' = J\nabla H(x, t), \quad y = (x, c); \quad (4)$$

здесь $c \in R^{2n}$ – фиксированный вектор, символ (x, c) обозначает скалярное произведение векторов x и c из R^{2n} , а матрица J и вектор $\nabla H(x, t)$ определяются равенствами

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right)^T,$$

в которых 0 и I – это, соответственно, нулевая и единичная (порядка n) матрицы, $H(x, t)$ – гамильтониан системы (4). Решения $y(t)$ и $x(t)$ уравнения (1) и системы (4) должны быть связаны равенством $y(t) = (x(t), c)$.

- [1] Журавлев В. Ф., Петров Ф. Г., Шундерюк М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015.

Научное издание

**КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Сборник материалов
Международной научной конференции
(11 – 15 марта 2024 г.)*

Подписано в печать 26.02.2024г. Формат 60х90/16.
Печать: цифровая. Гарнитура: Bookman Old Style
Усл. печ. л. 4,50. Тираж 500. Заказ 2066



**Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»**

450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120

<https://aeterna-ufa.ru>

info@aeterna-ufa.ru

+7 (347) 266 60 68