

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Сборник материалов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 13 – 17 марта 2023 г.)*

**УФА
АЭТЕРНА
2023**

УДК 51
ББК 22.1
К 637

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, с.н.с. **Р.Н. Гарифуллин** (*отв. редактор*);
д-р физ.-мат. наук **И.Х. Мусин**;
д-р физ.-мат. наук **В.Ю. Новокшенов**;
канд. физ.-мат. наук **Р.А. Башмаков**

К 637 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (оз. Банное, 13 – 17 марта 2023 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2023. – 130 с.**

ISBN 978-5-00177-608-6

Представленные в сборнике тезисы посвящены различным областям фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются различные постановки нелинейных задач. Также рассматриваются задачи теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными и задачи механики сплошных сред.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1
ISBN 978-5-00177-608-6

© Коллектив авторов, 2023
© ООО «АЭТЕРНА», 2023

Содержание

О Владиславе Шайхулагзамовиче Шагапове	10
<i>Александрова Е.А., Башмаков Р.А.</i> Собственные колебания флюида в горизонтальной скважине с множественными трещинами гидроразрыва	14
<i>Alfitov G. L., Gavrilov M. A., Zezyulin D. A.</i> On bounded solutions of non-autonomous Duffing equation with periodic or quasi-periodic potential	15
<i>Арсланбекова С.А., Дик Е.Н., Загиров И.И.</i> О кинетической энергии сепаратора, приводимого линейным электродвигателем	16
<i>Асфандиаров Н.Л., Муфтахов М.В., Сафронов А.М., Пиенчинок С.А.</i> Образование и распад молекулярных отрицательных ионов фторанила и хлоранила	17
<i>Байбулатова Г.Д.</i> Группа симметрий системы уравнений динамики неизотермической двухфазной среды	18
<i>Байков В.А., Борщук О.С.</i> Согласованная модель утечек жидкости гидравлического разрыва в пласт	19
<i>Белова А.С., Ибрагимова Л.С.</i> Построение границ областей устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы	20
<i>Белова С.В., Дударева О.В., Чиглинцева А.С.</i> Осесимметричная задача об образовании гидрата при нагнетании холодного газа в снежный массив	21
<i>Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А.</i> Энергетические потери при разрушении водной пены за ударной волной	22
<i>Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф.</i> Уравнение состояния азота в области криогенных температур	23
<i>Бойко К.В., Федоров В.Е.</i> Решение неоднородного уравнения с дробными производными	24
<i>Бобков В.Е.</i> Нерадиальность второй собственной функции дробного Лапласа в шаре	25
<i>Bostrem I.G., Ekomasov E.G., Fakhretdinov M.I., Ovchinnikov A.S., Sinitsyn V.E.</i> Discrete Breathers in a Monoaxial Chiral Helimagnet with Easy-Plane Anisotropy	26
<i>Булатова З.А., Шаяхметов Г.Ф.</i> Прохождение импульсных сигналов через пузырьковый слой в жидкости	27
<i>Бурханова(Хаджи) И.А.</i> Обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе	28

<i>Валеев Н.Ф., Султанаев Я.Т.</i> Оптимизационная обратная спектральная задача для матричных операторов Шредингера . . .	29
<i>Валеева Д.Н., Носов М.А.</i> Длинные волны в замкнутых водоемах, инициируемые землетрясениями	30
<i>Валиев А.А.</i> Неустойчивое вытеснение нефти в широком диапазоне соотношения вязкостей и капиллярных сил	31
<i>Volchkova N.P., Volchkov Vit.V.</i> Integral geometry problem for spherical means	32
<i>Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.</i> Interpolation problems for mean periodic functions	33
<i>Габдрахманов Р.И.</i> О бифуркациях в нелинейных уравнениях с модулем	34
<i>Гайсин А.М., Гайсина Г.А.</i> Устойчивость максимального члена ряда Дирихле из класса $D(\Phi)$	35
<i>Гайсин Р.А.</i> Оценка, близкая к признаку В.П. Ермакова. Применение	36
<i>Гайсина Г.А.</i> Ряды экспонент с заданной мажорантой роста вблизи границы	37
<i>Галиакбарова Э. В.</i> Теоретические модели для технологий добычи и подготовки нефти	38
<i>Галиакбарова Э.В., Каримова Г.Р.</i> Отражение и преломление акустической волны при наклонном падении на границу раздела «вода – песок, насыщенный водой или газогидратом» . .	40
<i>Галкин В.Д., Ноздринова Е.В., Починка О.В.</i> Круговая схема Флейтас для градиентно-подобных потоков поверхности	41
<i>Гарифуллин Р.Н.</i> Об одной версии полудискретного уравнения типа Цицейки	41
<i>Гиззатуллина А.А.</i> Тепловое воздействие на высоковязкую нефть в пласте через одиночный горизонтальный канал	43
<i>Гималтдинов И.К., Баянов И.М., Столповский М.В., Гиззатуллин Р.М.</i> Численное исследование горения слоя гидрата и гидратной взвеси в атмосфере окислителя	44
<i>Годова А.Д., Федоров В.Е.</i> Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа Римана-Лиувилля в банаховых пространствах	45
<i>Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н.</i> Отражение волны сжатия от гидратосодержащего слоистого участка в пористой среде	46
<i>Давлетшина М.Р.</i> Тепловое воздействие на газогидратную залежь	47

<i>Делев В.А., Салимов Р.К., Скалдин О.А.</i> Неупругие столкновения автосолитонов в электроконвективной структуре жидкого кристалла	48
<i>Донцова М.В.</i> Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида	49
<i>Дударева О.В., Русинов А.А.</i> Моделирование процесса фильтрации в низкопроницаемых пластах	50
<i>Екомасов Е.Г., Дмитриев С.В., Фахретдинов М.И., Самсонов К.Ю., Кабанов Д.К., Назаров В.Н.</i> Нелинейные волны уравнений синус-Гордона и ϕ^4 в модели с примесями	51
<i>Ефремова Л.С.</i> Об интегрируемых дискретных динамических системах	52
<i>Захарова Т.А., Федоров В.Е.</i> Об однозначной нелокальной разрешимости квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто	52
<i>Запивахина М.Н.</i> Влияние исходных характеристик инжектируемого газа на процесс разложения газового гидрата в пористой среде	53
<i>Жукова Н.И., Тоньшева Н.С.</i> Хаотические группы гомеоморфизмов топологических многообразий	54
<i>Ишмухаметова А. А., Кабиров И. Ф., Мухаметов Ф. Х.</i> Моделирование ограничения водопритока в неоднородный газовый пласт с учетом неньютоновских свойств закачиваемых составов.	55
<i>Кабанко М.В., Малютин К.Г., Хабибуллин Б.Н.</i> Уточнённый порядок для модельной функции роста	56
<i>Кабиров И. Ф., Ишмухаметова А. А., Мухаметов Ф. Х.</i> Моделирование ликвидации заколонной циркуляции жидкости в газодобывающей скважине закачкой тампонажного раствора с учетом законов Оствальда - де Ваале и Бингама - Шведова	58
<i>Кадченко С.И., Рязанова Л.С.</i> Вычисление собственных чисел спектральных задач заданных на квантовых графах	60
<i>Калякин Л.А.</i> Возмущение простой волны: численный эксперимент и аналитика	61
<i>Каримов О.Х.</i> О разделимости общего дифференциального волнового уравнения в гильбертовом пространстве	62
<i>Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г.</i> Устойчивость поля директора смектика к изменению шага спирали в электрическом поле	63
<i>Кордюков Ю.А.</i> Квазиклассические асимптотики спектральной функции магнитного оператора Шредингера	64

<i>Кордюкова С.А.</i> Пенлеве анализ одного уравнения магнитодинамики	64
<i>Кужаев А.Ф.</i> О достаточных условиях неполноты системы экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями	65
<i>Кунгиров М.Н.</i> Бифуркация Андронова-Хопфа в гамильтоновых системах с возмущениями	66
<i>Кудашева Е.Г., Хабibuллин Б.Н.</i> Полнота экспоненциальных систем в терминах площади	67
<i>Лачинов А.Н., Арутюнов К.Ю., Карамов Д.Д., Лачинов А.А., Галиев А.Ф.</i> Аномальная электропроводность тонких пленок органических диэлектриков	68
<i>Мамаева З. З., Рафикова Г. Р.</i> Анализ влияния коллекторских характеристик пласта на собственные колебания столба жидкости в скважине	69
<i>Маркова А.В., Таяпов М.М., Сафронов А.М., Рыбальченко А.В.</i> Исследования молекул пентахлорфенола методом циклической вольт-амперметрии	70
<i>Мартынова Ю.В.</i> Об использовании операции свертки электрических свойств породы для прогноза характера насыщенности пластов	71
<i>Маслов Е.М., Кутвщцкий В.А.</i> Фinitные движения пробных частиц в осциллирующих сгустках темной материи	72
<i>Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.</i> Обобщенное понятие сопряженного дифференциального уравнения	73
<i>Мелехина Д.В., Федоров В.Е.</i> Группы преобразований эквивалентности для нелинейного уравнения типа Блэка — Шоулса	74
<i>Мурясов Р.Р.</i> О субгармонических функциях в пространствах Соболева	75
<i>Мусакаев Н.Г., Бородин С.Л., Огай В.А., Юшков А.Ю.</i> Изучение восходящего двухфазного течения в газовой скважине применительно к проблеме накопления жидкости на забое	76
<i>Мусин И.Х.</i> Преобразования Фурье быстро убывающих функций в \mathbb{R}^n	77
<i>Мухаметзянов А.Ф.</i> Воздействие ударных волн на рыхлую насыпную среду	78
<i>Мухарямова Г.И., Зиннатуллин Р.Р. Киреев В.Н., Ковалева Л.А.</i> Комплексный анализ влияния электромагнитной обработки на некоторые свойства тайлаковской нефти	79
<i>Нагаева З.М., Аносова Е.П.</i> Фильтрация флюида в трещине ГРП, расположенной перпендикулярно горизонтальной скважине	80

<i>Насырова Д.А., Башмаков Р.А.</i> Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом системой радиальных трещин	81
<i>Наумова А.А.</i> Представление аналитических функций в полукольце	82
<i>Нерадовский Д.Ф., Фахретдинов М.И., Екомасов Е.Г.</i> Локализованные магнитные неоднородности солитонного типа в ферромагнетиках с трехмерными дефектами	83
<i>Павленко В.А.</i> Построение решений аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующей Гамильтоновой системе H^{2+2+1}	83
<i>Павленко В.Н.</i> Полуправильные решения обобщенного уравнения фильтрации	85
<i>Панов А.В.</i> Бифуркации кривой особых точек в трехмерных динамических системах	86
<i>Поляков Д.М.</i> Формула следа самосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами	87
<i>Поглазов К.Ю., Сафронов А.М., Рыбальченко А.В.</i> Определение ширины запрещенной зоны в зеленом и фиолетовом бромкрезолах методом оптическом спектрометрии	88
<i>Поташев К.А., Мазо А.Б.</i> Модель стока под залежь в окрестности нагнетательной скважины при мгновенном раскрытии трещин	89
<i>Пшеничник С.А., Асфандияров Н.Л., Рахмеев Р.Г., Таяпов М.М., Сафронов А.М., Маркова А.В.</i> О глубоких состояниях отрицательных ионов отдельных молекул органических кислот, (иногда) наблюдаемых методом спектроскопии диссоциативного захвата электронов	90
<i>Рахимов А.А., Валиев А.А., Данилко К.В., Ахметов А.Т.</i> Изучение миграции моноцитов в микрожидкостной системе	91
<i>Рахимова А.И.</i> Гиперцикличность оператора сдвига в весовом пространстве	92
<i>Родионов А.С., Саетгамиев И.Э.</i> Численное решение задачи о распаде разрыва для пустой трубы	93
<i>Русинов А.А., Шпелькевич О.А., Чиглинцева А.С.</i> Математическая модель процесса гидратообразования при нагнетании газа в снежный массив	93
<i>Русинов А.А., Валеев Д.Ф.</i> Математическая модель процесса извлечения газа из гидратного пласта	94
<i>Сабитов К.Б.</i> Презентация рукописи монографии "Обратные задачи для уравнений математической физики"	95

<i>Sabitov D.I., AlBahrani H.I., Charara M.</i> Modeling aspects of plastic zone development near cylindrical underground openings	97
<i>Салимова А.Е. , Хабибуллин Б.Н.</i> Оценки мер Рисса субгармонических функций	98
<i>Сакбаев В.Ж.</i> Кольцевая эргодичность меры относительно группы и унитарные представления преобразований гильбертова пространства	100
<i>Сергеев А.Г.</i> Топологические фазы в физике твердого тела	101
<i>Сидоров С.Н.</i> Об одной начально-граничной задаче для трехмерного уравнения параболо-гиперболического типа со степенным вырождением	102
<i>Сираева Д.Т.</i> Регулярное частично инвариантное решение уравнений газовой динамики с уравнением состояния специального вида	103
<i>Скорынин А.С., Федоров В.Е.</i> Сильно непрерывные разрешающие семейства операторов для уравнений с дробной производной	104
<i>Султанов О.А.</i> Резонансы в нелинейных системах с затухающими чирпированными возмущениями	105
<i>Султанова А. А., Яхина К. Р., Мазота А.А.</i> Опресовка скважин для диагностики трещин ГРП	106
<i>Сысоев С.Е.</i> Обращение сферического преобразования Радона в n -мерной полосе	106
<i>Тазетдинов Б.И.</i> К теоретическим представлениям о разложении метастабильного гидрата метана	108
<i>Тазетдинова Ю.А.</i> Снижение давления пара вследствие конденсации при контакте с жидкостью	109
<i>Тяупов М.М., Яцык И.В., Суханов А.А.</i> Исследования методом электронно-парамагнитного резонанса радикалов этил мальтола образованных путем разрыва О-Н связи	109
<i>Тимиров Ю.И., Хазимуллин М.В., Басырова Е.Р., Скалдин О.А.</i> Управление структурой и оптическими свойствами ЖК-капель путем модификации поверхности.	110
<i>Туров М.М.</i> Об одном классе начально-краевых задач для уравнений динамики вязкоупругих сред	111
<i>Утяшев И.М., Шакирьянов М.М.</i> Пространственные колебания изогнутого трубопровода на вибрирующем основании	112
<i>Филлин Н.В., Федоров В.Е.</i> Об одном свойстве уравнений с распределенной производной Герасимова — Капуто, заданной интегралом Стильтьеса	113
<i>Филиппов А.И., Зеленова М.А.</i> Асимптотическое решение задачи о температурном поле в стволе действующей скважины	115

<i>Филиппов А.И., Зеленова М.А., Левина Т.М.</i> Математическая модель формирования зоны проникновения долота в процессе вскрытия проницаемого пласта бурением	116
<i>Филиппов А.И., Михайлов П.Н.</i> Задачи тепломассопереноса с нелокальным интегральным условием	118
<i>Фокеева Н.О.</i> Эволюция давления в окрестности скважины с вертикальной трещиной ГРП	120
<i>Хабибуллин Б.Н.</i> Огибающие по выпуклому конусу из (плюри-)субгармонических функций и их применения	121
<i>Хакимов А.Г.</i> Определение плотности газа по собственной частоте колебаний нанопластинки, контактирующей с газом	122
<i>Хасянов Р.Ш.</i> Оценки мажорирующих рядов аналитических функций	123
<i>Хатымов Р.В., Муфтахов М.В., Туктаров Р.Ф., Шукин П.В., Хатымова Л.З.</i> Оценка адиабатического электронного сродства молекул по времени жизни их газофазных молекулярных отрицательных ионов относительно автоотщепления электрона	125
<i>Хусаинов И.Г.</i> Математическое моделирование очистки прискважинной зоны с помощью энергии взрыва	127
<i>Черепанова Е.А., Воронин С.М.</i> О линейризуемости вырожденных особых точек бинарных дифференциальных уравнений .	128
<i>Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.</i> Моделирование нестационарной фильтрации жидкости в системе пласт-трещина гидроразрыва	128
<i>Шарипов Р.А.</i> Вселенная как 3D-брана и поле тяготения в ней	129
<i>Юмагулов М.Г.</i> Гамильтоновы координаты нелинейных уравнений Лурье	130

О Владиславе Шайхулагзамовиче Шагапове



17 марта 2023 года исполнилось бы 75 лет заслуженному деятелю науки Российской Федерации, доктору физико-математических наук, действительному члену Академии наук Республики Башкортостан, профессору В.Ш. Шагапову.

Владислав Шайхулагзамович в 1971 году окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. Ломоносова. В этом же году поступил в аспирантуру МГУ, а в 1974 году под руководством ученого мирового уровня, академика РАН Роберта Искандеровича Нигматулина защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. После окончания аспирантуры преподавал в Башкирском государственном университете, работал старшим научным сотрудником в отделе физики и математики Башкирского филиала АН СССР. В 1988 г. был приглашен в Тюмень, где возглавил лабораторию волновой динамики многофазных сред Института механики многофазных систем СО РАН (ныне Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН). Одновременно преподавал на кафедре механики многофазных систем ТюмГУ, являлся членом докторского диссертационного совета в Тюменском госуниверситете. В 1996 г. вернулся в Башкортостан, где создал кафедру прикладной математики и механики в Стерлитамакской государственной педагогической академии и кафедру прикладной математики и механики в Бирской государственной социально-педагогической академии (ныне – Стерлитамакский и Бир-

ский филиал Уфимского университета науки и технологий). С 1995 года работал главным научным сотрудником в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН.

В 1989 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. В 1993 г. Владиславу Шайхулагзамовичу было присвоено ученое звание профессора по кафедре механики многофазных систем. В 1991 г. был избран членом-корреспондентом, а в 2012 г. – действительным членом Академии наук Республики Башкортостан.

Владислав Шайхулагзамович – один из ведущих специалистов в области механики многофазных систем. Впечатляет сфера его научных интересов, которая включает в себя такие направления, как волновая динамика газожидкостных систем, акустика насыщенных пористых сред, фильтрационные течения с фазовыми превращениями, гидродинамика двухфазных потоков со склеротическими осложнениями, математическое моделирование химических реакторов, динамика атмосферных выбросов. В нашей стране и за рубежом широко известны его научные труды по механике многофазных систем, которые играют значительную роль при изучении большого круга проблем, возникающих при решении вопросов разведки, добычи и транспортировки углеводородного сырья, при реализации новых и совершенствовании существующих методов повышения отдачи нефтенасыщенных пластов, при решении вопросов безопасности энергетических установок и т.п.

В работах Владислава Шайхулагзамовича с его учениками была развита теория распространения нелинейных и детонационных волн в неоднородных пузырьковых жидкостях, установлен и обоснован ряд новых физических эффектов. В частности установлено, что за счет двухфазных и нелинейных эффектов возможно инициирование детонации в жидкости с горючей газовой смесью в пузырьках при гораздо меньших амплитудах первоначального волнового импульса, чем это имеет место в одномерных процессах. Разработаны теоретические основы дистанционного и локального способов акустического зондирования прискважинных зон открытых участков газовых и нефтяных скважин. Обобщена теория Стефана для задач с фазовыми переходами в пористых средах. Развита теория инъекции теплоносителей в пористые среды при-

менительно к проблемам доставки тепла из геотермальных резервуаров и извлечения углеводородных систем из битумных залежей. Предложенная схема «газового подшипника» позволила объяснить явление «сверхтекучести», наблюдаемое в экспериментах по фильтрации газонасыщенной жидкости. Созданы теоретические основы для ряда химико-технологических процессов, таких как обжиг известняка в коксовой печи, сушка ленточного каучука, получение хлорорганических продуктов в трубчатых или барботажных реакторах и т.п. Развита теория двухфазного течения в скважинах, трубопроводах и трубчатых реакторах с учетом образования склеротических бляшек на стенках каналов. На основе этой теории показано, что исключить образование твердой фазы на стенках каналов можно даже только за счет определенной технологической культуры эксплуатации гидравлических систем. В работах В.Ш. Шагапова построена теория разложения и/или образования газовых гидратов в насыщенных пористых средах. Установлено, что в отличие от плавления обычных твердых тел, когда фазовые переходы происходят на фронтальных границах, разложение газогидратов может происходить в объемных зонах. Построена теоретическая модель разработки газогидратного пласта и проанализирована принципиальная возможность полного извлечения газа, находящегося в составе гидрата, за счет тепловых резервов самих пластов и окружающих его горных пород. Изучена динамика накопления и диссоциации газогидратных отложений в горизонтальных трубопроводах. Полученные результаты позволили расширить и углубить теоретические представления о различных процессах в многофазных системах и вошли в учебники и монографии, а также нашли отражение в спецкурсах лекций для студентов и аспирантов университетов. Владиславу Шайхулагзамовичу принадлежат более 300 научных работ, в том числе изобретения и монографии. В 2016 году была выпущена монография «Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа», в основу которой были положены исследования, проводимые под руководством профессора В.Ш. Шагапова на протяжении долгих лет в Институте механики многофазных сред СО РАН, Институте механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Стерлитамакской государственной педагогической академии, Бирской государственной социально-педагогической академии, Башкирском государственном университете.

Много сил В.Ш. Шагапов отдавал научно-организационной и общественной деятельности. Долгое время он являлся членом диссертационных советов, функционирующих в различных научных и учебных организациях. Был инициатором и организатором большого числа научных конференций и школ-семинаров, выступал с докладами на многих российских и международных конференциях. Был руководителем и ответственным исполнителем российских и региональных грантов и научных проектов.

Особо стоит отметить умение Владислава Шайхулагзамовича вдумчиво и терпеливо работать со своими учениками. За годы своей научно-педагогической деятельности он подготовил семь докторов и более шестидесяти кандидатов наук. Восхищают его высокий профессионализм, мудрость и каждодневный труд учителя! С каждым своим учеником он проходил все стадии научного исследования от постановки задачи до анализа полученных результатов. В ряде городов России функционируют научно-исследовательские группы из числа его учеников по различным аспектам механики многофазных систем.

Вся жизнь Владислава Шайхулагзамовича отражала его стремление к научному познанию, преданность своей профессии, яркий талант, человеколюбие и честность.

Светлая память о Владиславе Шайхулагзамовиче ШАГАПОВЕ – выдающемся УЧЕНОМ, прекрасном УЧИТЕЛЕ, верном ДРУГЕ и замечательном ЧЕЛОВЕКЕ – навсегда сохранится в наших сердцах.

Ученики, друзья, коллеги

Собственные колебания флюида в горизонтальной скважине с множественными трещинами гидроразрыва

Александрова Е. А.¹, Башмаков Р. А.^{1,2}

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Институт Механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается обсаженная горизонтальная скважина длиной l , которая сообщается с пластом посредством N радиальных трещин, полученных путем гидроразрыва пласта (ГРП), расположенных равномерно вдоль скважины. Число трещин ГРП, приходящееся на единицу длины скважины $n = N/l$. Запишем уравнения движения для малых возмущений в скважине. Поскольку скважина обсаженная, приток флюида из пласта в скважину происходит только через трещины ГРП. Тогда уравнения массы и импульсов запишется как:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{2}{a} \rho_0 n d_f u_{f(a)}, \\ \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{2\sigma}{a} \quad (0 < z < l), \\ \sigma &= \mu \int_{-\infty}^t \frac{\partial w / \partial \tau}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} d\tau, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \rho = \frac{p}{C^2}.\end{aligned}$$

Здесь σ – касательное напряжение в жидкости на поверхности стенки скважины, μ и ν – динамическая и кинематическая вязкости жидкости, C – скорость звука в жидкости, a – радиус скважины, $u_{f(a)}$ – скорость фильтрации. Уравнения записаны в линеаризованном виде относительно гидростатического состояния равновесия. Принятые уравнения неразрывности в таком виде означают, что расход флюида через трещины “размазывается” равномерно на всю длину скважины, а это в свою очередь означает, что длина волны (для рассматриваемой задачи она порядка длины скважины) значительно больше расстояния между соседними трещинами ГРП, т.е. $l/N \gg l$ (или $N \gg 1$).

В работе получены уравнения для нахождения комплексных частот собственных колебаний жидкости в скважине. Для этого рассматривается фильтрация жидкости в пласте вокруг скважины. Найдены зависимости частотных характеристик от длины скважины, параметров пласта и количества трещин. Аналогичные задачи, применительно к вертикальным скважинам без трещины ГРП и с вертикальной трещиной рассматривались в [1] и [2].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

- [1] Шагапов В. Ш., Башмаков Р. А., Рафикова Г. Р., Мамаева З. З. *Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом* // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 4 (362). – С. 5 – 14.
- [2] Башмаков Р.А., Насырова Д.А., Шагапов В.Ш. *Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП* // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 1. С. 88-104.

On bounded solutions of non-autonomous Duffing equation with periodic or quasiperiodic potential

Alfimov G. L.¹, Gavrilov M. A.¹, Zezyulin² D. A.

¹ MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;

² ITMO University, St. Petersburg, Russia.

Consider the second-order differential equation

$$u_{xx} + (\mu - U(x))u - u^3 = 0, \quad (1)$$

where $\mu \in \mathbb{R}$ and $U(x)$ is real periodic or quasiperiodic function (called a *potential* in physical applications). It is known that if $\mu < 0$ and $U(x) \equiv 0$ no bounded solutions of Eq. (1) (except zero solution) exist. In this case all the nonzero solutions *collapse*, i.e., tend to infinity at some point of real axis.

However, if $U(x) \not\equiv 0$ the situation becomes more complex. It is known [1] that if $U(x) = A \cos 2x$ then for certain areas in the plane of parameters (μ, A) the bounded solutions correspond to a fractal set $U_\infty \subset \mathbb{R}^2$ in the plane of initial data $(u_x(0), u(0))$. Due to this fact, it was possible to code all the bounded solutions of Eq. (1) by bi-infinite sequences of symbols of some finite alphabet.

In the talk we (i) present some new numerical results on the structure U_∞ for those parameters (μ, A) that remain poorly understood and (ii) expand these results to the case of quasiperiodic potential $U(x)$ that has two incommensurable frequencies,

$$U(x) = A_1 \cos 2x + A_2 \cos 2\theta x$$

where θ is irrational. We argue that for certain values of μ, A_1, A_2 the coding of all bounded solution is also possible.

The work of DAZ was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation, goszadanie no. 2019-1246

- [1] G.L.Alfimov, A.I.Avramenko *Coding of nonlinear states for the Gross-Pitaevskii equation with periodic potential, Physica D*, **254**, pp.29-45, (2013).

О кинетической энергии сепаратора, приводимого линейным электродвигателем

Арсланбекова С.А., Дик Е.Н., Загиров И.И.

ФГБОУ ВО БГАУ, г.Уфа, Россия

1. Разработан механизм качающегося сепаратора для просеивания зерновой смеси. Использование в приводе асинхронного линейного электродвигателя позволяет обеспечить более благоприятные условия для просеивания зерновой смеси по сравнению с существующими машинами, приводимыми двигателями вращения. К числу достоинств предлагаемого механизма относятся возможность безостановочного регулирования режимов колебательного плоскопараллельного движения решетных станов (амплитуды, частоты и углов качания), снижение энергетических затрат на сепарацию зерновой смеси, отсутствие необходимости применения массоемких и энергозатратных элементов привода: редуктора, устройства преобразователя вращательного движения в поступательное и др.

2. Показано, что в качестве обобщенной координаты, определяющей положения звеньев механизма, целесообразно использовать перемещение ротора линейного электродвигателя относительно его статора. Показано, что в выбранном диапазоне работы механизма максимальный ход шатуна 2 (одновременно амплитуда колебаний решет) составляет $\pm 0,1$ м, а угол качания решет сепаратора φ_2 меняется в пределах от $6,23$ до $-9,24^\circ$ при частоте колебаний $k = 12$ рад/с, что соответствует рациональным режимам разделения зерновой смеси (см. [1]).

3. Определены геометрические и кинематические параметры механизма как функции обобщенной координаты и обобщенной координаты, что облегчит предстоящее динамическое исследование механизма с использованием уравнений Лагранжа II рода.

- [1] *Корнев А.С.* Повышение эффективности работы плоских решет, решетных станов зерноочистительных машин // Инновационные технологии и технические средства для АПК. – 2014. – часть III, - С. 84-89.

Образование и распад молекулярных отрицательных ионов фторанила и хлоранила

Асфандияров Н.Л., Муфтахов М.В., Сафронов А.М.,
Пшеничнюк С.А.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, 450075, Уфа,
Россия

Методом спектроскопии диссоциативного захвата электронов исследованы молекулы фторанила (FA) и хлоранила (CA). Масс-спектры и кривые эффективного выхода отрицательных ионов схожи со случаем парабензохинона (p-BQ). Для всех трех молекул известна величина сродства к электрону (EA_a), что позволяет сделать оценку времени жизни молекулярных ионов τ_a относительно автоотщепления:

$$\tau_a = \tau_0 \exp \left[\frac{NEA_a}{EA_a + Nk_B T + \varepsilon} \right] \quad (1)$$

Здесь τ_0 – обратный частотный фактор, N – число колебательных степеней свободы, k_B – постоянная Больцмана, T – температура, ε – энергия электрона. Результаты этих оценок приведены в пятом столбце Таблицы 1.

Соед.	EA_a , эВ	ε , эВ	Эксп. τ_a , мкс	τ_a , мкс, (1)	τ_a , мкс, (2)
p-BQ	1.89	1.35	41	0.09	13.2
FA	2.92	0.85	988	14	1181
		1.3	256	2.7	154
CA	2.76	0.87	1003	8.7	838
		1.3	192	1.8	116

Налицо существенное расхождение между оценкой и экспериментом. Однако если предположить, что выброс избыточного электрона происходит через электронно-возбужденное состояние аниона 2A_u , то в уравнении (1) должен появиться член, учитывающий энергию возбужденного состояния иона 2A_u , TS :

$$\tau_a = \tau_0 \exp \left[\frac{N(EA_a + TS)}{EA_a + Nk_B T + \varepsilon} \right] \quad (2)$$

В результате оценка τ_a станет вполне адекватной, см. последний столбец в Таблице 1. В докладе обсуждаются причины этого явления и роль сверхбыстрого внутримолекулярного переноса электрона.

Работа поддержана РНФ, грант №19-13-00021.

**Группа симметрий системы уравнений динамики
неизотермической двухфазной среды**

Байбулатова Г.Д.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Исследуются свойства симметрий системы уравнений динамики двухфазной разреженной среды [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) &= 0, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) &= 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 \right) + \nabla p(\rho_1, e_1) &= -\frac{\rho_2}{\tau} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \\ \rho_2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{u}_2 \right) &= \frac{\rho_2}{\tau} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \\ \frac{\partial e_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla e_1 + p(\rho_1, e_1) \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_1} \right) + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho_1} \right) \right) &= \\ = \frac{\rho_2}{\tau \rho_1} ((u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2) - \frac{\rho_2}{\rho_1} q_0 (e_1 - \delta e_2), \\ \frac{\partial e_2}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla e_2 &= q_0 (e_1 - \delta e_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ – векторы скоростей первой и второй фаз, ρ_1, ρ_2 – плотности, e_1, e_2 – внутренние энергии, $p(\rho_1, e_1)$ – давление в первой фазе (функциональный параметр), δ, q_0, τ – заданы.

Теорема 1. Базис ядра основных алгебр Ли системы (1) с произвольным p имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = t \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2}, \quad X_5 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ X_6 &= t \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2}, \quad X_7 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial v_2}, \\ X_8 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} + w_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial w_2}, \\ X_9 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + w_1 \frac{\partial}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial}{\partial w_2}, \quad X_{10} = \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Алгебра Ли группы симметрий системы уравнений (1) разреженной газовой смеси в одномерном случае при $p = a\rho_1 e_1$ имеет базис операторов $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2}$, $X_4 = \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Челябинской области № 22-21-20063.

- [1] Федоров А.В., Фомин П.А., Фомин В.М., Тропин Д.А., Чен Дж.-Р. Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011.

Согласованная модель утечек жидкости гидравлического разрыва в пласт

Байков В.А., Борщук О.С.

ООО «РН-БашНИПИнефть», г.Уфа, Россия

Пласты баженовской свиты относятся к трудноизвлекаемым (сланцевым) запасам. Они характеризуется сверхнизкой проницаемостью (менее 0.1 мД), низкой пористостью (5%), высокой температурой (более 120°C) и аномально высоким пластовым давлением (более 350 атм.) при глубине залегания 2700–2900 м. В баженовской свите сосредоточены значительные запасы углеводородного сырья. Фактически единственной технологией рентабельной разработки таких месторождений является технология добычи из горизонтальных скважин с множественными трещинами гидравлического разрыва пласта (ГРП).

При операции гидроразрыва в пласт под большим давлением закачивается жидкость разрыва (вязкий гель), которая создаёт протяжённую трещину. Для поддержания трещины в открытом состоянии используют расклинивающий агент — пропант, керамические частицы определённого размера сферической формы. Заполненная пропантом трещина имеет высокую проводимость, что обеспечивает дополнительный приток жидкости к скважине и соответственно прирост добычи.

Для оценки технологических и геометрических параметров создаваемой трещины ГРП необходимо согласованное численное решение задач геомеханики, течения жидкости неньютоновской реологии с моделью переноса пропанта и учёта утечек жидкости разрыва в пласт. Современные коммерческие симуляторы используют упрощённую модель утечек Картера с небольшими модификациями.

Целью настоящей работы является решение совместной задачи течения жидкости в трещине и 2-фазной фильтрации жидкости разрыва в пласт. В полной постановке такая задача на сегодняшний день не решена.

Приведены результаты совместного моделирования развития трещины ГРП и гидродинамического моделирования 2-фазной фильтрации в пласт жидкости разрыва. Проведено сравнение с измеренными данными. Показано, что фактические данные утечек не могут быть объяснены проницаемостью матрицы, полученной по лабораторным анализам керны.

Результаты моделирования показывают необходимость введения микротрещиноватости. Полученные результаты позволяют адекватно учесть влияние жидкости разрыва при гидродинамическом моделировании.

Построение границ областей устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

Белова А.С., Ибрагимова Л.С.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Рассматривается автономная гамильтонова система (см., [1], [2])

$$\frac{dx}{dt} = JA(\mu)x, \quad x \in R^4, \quad (1)$$

зависящая от параметра $\mu \in \mathbb{R}^2$. Здесь $A(\mu)$ – вещественная симметрическая матрица, а матрица J определена равенством: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$; здесь I – единичная (2×2) матрица.

Связное множество G в пространстве параметров \mathbb{R}^2 называют *областью устойчивости (неустойчивости)* точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $\mu \in G$ точка $x = 0$ является устойчивой (неустойчивой). Точку $\mu_0 \in \mathbb{R}^2$ называют *граничной точкой* области устойчивости G , если в любой ее окрестности содержатся точки как из области устойчивости G , так и из области неустойчивости. Множество граничных точек назовем *границей области устойчивости*.

Необходимым условием того, чтобы μ_0 была граничной точкой является требование, чтобы все собственные значения матрицы JA_0 системы (1) имели нулевую вещественную часть. Это условие не является достаточным, чтобы точка μ_0 была граничной.

В настоящем докладе обсуждаются достаточные условия, при которых параметр μ_0 является граничной точкой области устойчивости. Проводится приближенное построение границы области устойчивости в малой окрестности точки μ_0 . Это исследование базируется на методах теории возмущения и развитии некоторых результатов, полученные в [3].

- [1] Якубович В.А., Старжинский В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения* М.: Наука, 1972. — 718 с.
- [2] Маркеев А.П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*. М.: Наука. 1978.
- [3] M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova and A. S. Belova, “Approximate research of problems on perturbation of periodic and autonomous Hamiltonian systems in critical cases”, *Lobachevskii J Math* **41**, 1924–1931 (2020).

Осесимметричная задача об образовании гидрата при нагнетании холодного газа в снежный массив

Белова С.В.¹, Дударева О.В.¹, Чиглинцева А.С.²

¹Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск, ²УГНТУ, г.Уфа, Россия

Открытие природных газогидратов, их высокая энергоемкость, экологическая значимость стимулировали огромный интерес исследователей всего мира к газогидратной тематике [1]. Данная отрасль перспективна в технологиях хранения и транспортировки газа в газогидратном состоянии, а также может обеспечить беструбную газификацию, увеличить концентрацию хранения газа и его компактность [2].

В работе построена математическая модель нагнетания холодного газа метана в снежный массив, частично насыщенный тем же газом, сопровождаемого образованием гидрата в осесимметричной постановке. Рассмотрена диффузионная схема, согласно которой интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией газа через гидратную корку, образующуюся между снегом и газом. Исследовано образование гидрата по равновесной схеме, которая соответствует предельному случаю, когда коэффициент диффузии стремится к бесконечности. Полученная в работе система уравнений с начальными и граничными условиями решена методом конечных разностей по явной схеме [3, 4]. В результате численного исследования получена динамика давления, температуры, гидратонасыщенности и снегонасыщенности в случаях диффузионной и равновесной схем.

- [1] Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условия. М.: Недра, 1992. 236 с.
- [2] Kuhs W. F., Staykova D. K., and Salamatin A. N. Formation of methane hydrate from polydisperse ice powders // J. Phys. Chem. B. 2006. Vol. 110, No. 26. Pp. 13283-13295
- [3] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Белова С.В. Нагнетание холодного газа в снежный массив, частично насыщенный газом, сопровождаемое гидратообразованием // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 5 С. 2262-2268.
- [4] Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В. Численное моделирование образования газогидрата в пористом пласте конечной протяженности при продувке его газом // Прикладная механика и техническая физика 2011. Т. 52. № 4 (308). С. 116-126.

Энергетические потери при разрушении водной пены за ударной волной

Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

При изучении динамики сильных ударных волн (УВ) в водной пене используется подход, в котором предполагается, что нарушение структурных связей пены под воздействием сильной УВ трансформирует ее в газокапельную смесь [1]. При этом влияние разрушения структуры пены на интенсивность ударного воздействия не учитывается.

Оценим потери энергии УВ при разрушении водной пены с объемным водосодержанием $\alpha_{10} = 0.0083$ при взрыве ВВ [1]. Критическое капиллярное давление распада пены с характерным радиусом ячейки $a \approx 0.2$ мм составляет $p_{cr, cap} \approx 1.2$ бар [2]. В этом случае внутренняя энергия разрушения жидких пленок водной пены в единице объема оценивается, как:

$$e_{decay} = \sigma_{cr} \sum_{i=1}^N S_i = \frac{3}{2} \frac{p_{cr, cap}}{\rho} (1 - \alpha_{10}) \approx 1.88 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг, где } \sigma_{cr} \text{ —}$$

критическое поверхностное натяжение жидких пленок пены, S_i — площадь поверхности i -й ячейки, N — число ячеек.

Удельная энергия в переходной зоне δr на фронте УВ в случае сферического взрыва для условий решаемой задачи при давлении в УВ $p \approx 40$ бар вычисляется, как

$e_{sw} = p\Delta V = -p/\rho^2 \Delta\rho = 2.6 \cdot 10^6$ Дж/кг, где $\Delta\rho$ — изменение плотности в переходной зоне.

Таким образом, энергия разрушения пены e_{decay} для рассматриваемых условий составляет менее 1% от энергии УВ e_{sw} .

Для более слабых УВ эффект потери энергии на схлопывание пены увеличивается, что приводит к более сильной диссипации УВ. Независимо от интенсивности УВ учет потери этой энергии приводит к усилению эффективности демпфирующих свойств водной пены.

- [1] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L. et al. *Shock Waves*. 2013. V. 23, No. 1. P. 39–53.
- [2] Khristov Khr., Exerowa D., Minkov G. *Colloids Surf. A Physicochem. Eng. Asp.* 2002. Vol. 210. P. 159–166.
- [3] Drenckhan W., Hutzler S. *Advances in Colloid and Interface Science*. 2015. Vol. 224. P. 1–16.

Уравнение состояния азота в области криогенных температур

Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Теоретическое изучение процессов формирования экстремально расширяющихся струй криогенных жидкостей при распылении из тонкого цилиндрического канала в вакуумную камеру при наличии тепло-, энерго- и массообмена представляет особую важность при изучении проблемы внезапного вскипания и истечения газо- паронасыщенных жидкостей из труб и сопел, применяемых во многих областях современной энергетики [1]. При изучении таких процессов возникает потребность описания термодинамических свойств парожидкостных систем с применением достаточно простых единых уравнений состояния жидкости и газа в аналитической форме.

На основе ранее разработанной методики [2] построено единое аналитическое уравнение состояния для жидкого и газообразного азота молекулярной фазы в форме Ми-Грюнайзена в виде суммы потенциальной и тепловой составляющих для давления и внутренней энергии для области невысоких давлений $p \leq 300$ бар и криогенных температур $60 \text{ K} < T < 400 \text{ K}$: $p = p_p + p_T$, $e = e_p + e_T + e_c$. Холодная составляющая давления и энергии описывается потенциалом типа Борна-Майера [2]. Для тепловых составляющих принято упрощающее приближение, следующее из условия постоянства теплоемкости и зависимости функции Грюнайзена от объема, компонента e_c служит для согласования внутренних энергий фаз. Полученное уравнение состояния учитывает поведение вещества на линии насыщения в окрестности критической точки, согласуется с экспериментальными данными по изотермической сжимаемости, на линии насыщения [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00309, <https://rscf.ru/project/23-29-00309/>.

- [1] Rees A., Salzmann H., Sender J., Oswald M. // In: 8th EUCASS conference, 2019. Madrid, Spain.
- [2] Нигматулин Р. И., Болотнова Р. Х. // ТВТ. 2017. Т. 55, Вып. 2. С. 206–215.
- [3] Термодинамические свойства азота. Сычев В.В. Вассерман А. А., Козлов А.Д., и др. М.: Издательство стандартов, 1977, 352 с.

Решение неоднородного уравнения с дробными производными

Бойко К.В., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто порядка $\alpha > 0$ [1], \mathcal{Z} — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — множество линейных непрерывных операторов действующих из \mathcal{Z} в \mathcal{Z} .

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n D_t^{\alpha_k} A_k z(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, с заданными начальными условиями

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Обозначим при $t > 0$

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$Z_l(t) = \frac{t^l}{l!} I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k e^{\lambda t} d\lambda,$$

где $n_l = \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : l \leq [\alpha_k] - 1\}$,

$$\gamma = \Gamma \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-, \quad \Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\Gamma_{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pm\pi, \lambda \in [-\infty, -r_0]\},$$

$$A := \max \left\{ \frac{1}{2n}, \|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : k = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad r_0 := (2An)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_n}}.$$

Теорема Пусть $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда функция

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Z(t-s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (1), (2).

Работа поддержана Российским научным фондом (грант 22-21-20095).

- [1] Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными // *Мат. заметки СВФУ*. 2021. Т. 28, № 3. С. 85–104.

Нерадиальность второй собственной функции дробного Лапласа в шаре

Бобков В.Е.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В 2004 г., в связи с работой [1], Kulczycki выдвинул гипотезу о том, что вторая собственная функция оператора дробного Лапласа в шаре не радиальна, и более того, антисимметрична относительно центрального сечения шара плоскостью. В случае размерностей пространства 1 и 2, данная гипотеза была доказана в работе Dyda, Kuznetsov, & Kwaśnicki [4], а в случае размерности 3, в работе Ferreira [6], с использованием методов Ароншайна и Релея-Рица для нахождения нижних и верхних оценок на собственные значения. В недавней работе Fall, Feulefack, Temgoua, Weth [5], гипотеза Кульчицкого была доказана с помощью оценок индекса Морса собственных функций. Нами, в работе [2], представлен альтернативный подход к доказательству данной гипотезы во всех размерностях, основанный на развитии т.н. метода движущейся поляризации, введённого ранее в [3], применительно к задачам с дробными операторами, принципиально отличный от предыдущих подходов.

- [1] Bañuelos, R., & Kulczycki, T. (2004). The Cauchy process and the Steklov problem. *Journal of Functional Analysis*, 211(2), 355-423.
- [2] Benedikt, J., Bobkov, V., Dhara, R., & Girg, P. (2022). Nonradiality of second eigenfunctions of the fractional Laplacian in a ball. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 150(12), 5335-5348.
- [3] Bobkov, V., & Kolonitskii, S. (2019). On a property of the nodal set of least energy sign-changing solutions for quasilinear elliptic equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 149(5), 1163-1173.
- [4] Dyda, B., Kuznetsov, A., & Kwaśnicki, M. (2017). Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the unit ball. *Journal of the London Mathematical Society*, 95(2), 500-518.

- [5] Fall, M. M., Feulefack, P. A., Temgoua, R. Y., & Weth, T. (2021). Morse index versus radial symmetry for fractional Dirichlet problems. *Advances in Mathematics*, 384, 107728.
- [6] Ferreira, R. A. (2019). Anti-symmetry of the second eigenfunction of the fractional Laplace operator in a 3-D ball. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 26(6), 8 pp.

Discrete Breathers in a Monoaxial Chiral Helimagnet with Easy-Plane Anisotropy

**Bostrem I.G.¹, Ekomasov E.G.², Fakhretdinov M.I.²,
Ovchinnikov A.S.¹, Sinitsyn V.I.E.¹**

¹Institute of Natural Science and Mathematics, Ural Federal University,
Ekaterinburg, Russia

²Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Nonlinearity and discreteness are two pivotal factors for an emergence of discrete breather excitations in various media. We argue that these requirements are met in the forced ferromagnetic phase of the monoaxial chiral helimagnet CrNb3S6 due to the specific domain structure of the compound [1, 2]. The stationary, time-periodic breather modes appear as the discrete breather lattice solutions whose period mismatches with a system size. Thanks to easy-plane single-ion anisotropy intrinsic to CrNb3S6, these modes are of the dark type with frequencies lying within the linear spin-wave band, close to its bottom edge. They represent cnoidal states of magnetization, similar to the well-known soliton lattice ground state, with differing but limited number of embedded 2π kinks (Fig.1).

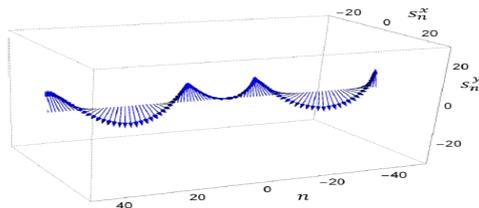


Figure 1: The dark discrete breather mode near the bottom edge of the spin-wave band.

The linear stability of these dark breather modes is verified by means of Floquet analysis. Their energy, which is controlled by two parameters,

namely, the breather lattice period and amplitude, falls off linearly with a growth of the kink number. These results may pave a path to design spintronic resonators on the base of chiral helimagnets.

- [1] I.G. Bostrem, E.G. Ekomasov, J. Kishine, A.S. Ovchinnikov and Vl.E. Sinitsyn, Phys. Rev. B 104, 214420 (2021).
 [2] I.G. Bostrem, A.S. Ovchinnikov, E.G. Ekomasov, Vl.E. Sinitsyn, A.E. Fedorov, A.A. Voronina, TME, V. 214, No. 2, Pp. 250–264 (2023).

Прохождение импульсных сигналов через пузырьковый слой в жидкости

Булатова З.А., Шаяхметов Г.Ф.

Институт нефтехимии и нефтепереработки, г.Салават, Россия

В работе представлены результаты исследования динамики волнового сигнала при прохождении через парогазовые пузырьковые «завесы» в жидкости, с учетом теплообмена на межфазной поверхности в акустическом приближении. На основе численных расчетов, с помощью метода быстрого преобразования Фурье, получены волновые картины для эволюции импульсов давления и проведен анализ влияния различных параметров состояния жидкости с парогазовыми пузырьками на отражение и прохождение акустических волн через «завесу».

Рассмотрено распространение акустической волны через пузырьковую «завесу» конечной толщины в жидкости (рис.1).

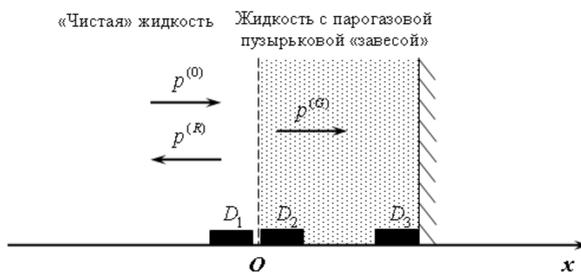


Рис 1. Схема парогазовой пузырьковой «завесы» в жидкости.

Для этой системы примем следующие общепринятые допущения. Жидкость однородная и акустически сжимаемая. Сферические пузырьки помимо пара, содержат нерастворимый в жидкой фазе газ. Для пузырькового слоя жидкости вязкостные и теплообменные процессы учитываются лишь при межфазных взаимодействиях между жидкостью

и пузырьками при распространении волновых возмущений, тензор напряжений выбран шаровой (жидкость с парагазовыми пузырьками идеальная). Длина рассматриваемой волны меньше толщины пузырьковой «завесы». В пузырьковом слое для описания межфазных тепло и массообменных процессов примем ячеистую схему S.1. Двухфазная среда в целом движется адиабатически и, следовательно, выполняется условие адиабатичности ячейки S.2. Приведенные результаты расчетов показывают, что с ростом температуры, интенсивность затухания импульса давления проходящего сигнала через «завесу» усиливается. Это обстоятельство, связано с ролью фазовых переходов при повышении температуры. С повышением температуры кардинально меняются акустические характеристики пузырьковой жидкости. При температуре 373К, толщине «завесы» $b = 0.2\text{м}$, объемном содержании $\alpha_0 = 10^{-3}$ и радиусах пузырьков $a_0 = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\text{м}$ «завесы» с парагазовыми пузырьками в жидкости являются защитным экраном, так как импульсные сигналы полностью в ней затухают.

- [1] *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [2] *Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И.* Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе “чистой” и пузырьковой жидкостей при прямом их падении // ТВТ. 2019. Т. 57. № 2. С. 284-290.

Обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе Бурханова(Хаджи) И.А.

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, г. Стерлитамак, Россия

Рассмотрим уравнение смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе

$$\mathcal{L}u \equiv u_{xx} + (\text{sgny})u_{yy} - bu = f(x) \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, l – заданные положительные числа, b – любое действительное число и следующую краевую задачу.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям: $u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$; $f(x) \in C(0, l) \cap L[0, l]$; $\mathcal{L}u(x, y) \equiv f(x)$, $(x, y) \in D_+ \cup D_-$; $u(0, y) = u(l, y) = 0$, $-\alpha \leq y \leq \beta$; $u(x, \beta) = \varphi(x)$, $u(x, -\alpha) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$;*

$u_y(x, -\alpha) = g(x)$, $0 \leq x \leq l$; где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Данная обратная задача при $b = 0$ рассмотрена в [1]. Случай когда $b \neq 0$ изучен в работе [2]. В этих работах установлены необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи и решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказана устойчивость решения по граничным данным по нормам пространств W_2^n и $C(\overline{D}_\pm)$.

При обосновании сходимости рядов возникает проблема малых знаменателей, в связи с чем были найдены оценки об отделенности от нуля в зависимости от значений отношения α/l сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области D .

- [1] Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия вузов. Математика. 2011. № 5. С. 44-52.
- [2] Хаджи И.А. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева- Бицадзе // Матем. заметки. 2012. № 6. С. 908-919.

Оптимизационная обратная спектральная задача для матричных операторов Шредингера

¹Валеев Н.Ф., ²Султанаев Я.Т.

¹ИМВЦ УФИЦ РАН, ²БГПУ г.Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{M}_n^2(0, 1)$ - гильбертово пространство $n \times n$ матриц с элементами-функциями из $L^2(0, 1)$ с нормой $\|Q\|_{\mathcal{M}_n^2}^2 = \int_0^1 \text{tr}(Q^*(x)Q(x)) dx$.

Введем в рассмотрение функционал $\lambda_1(Q)$ определенный на матричных функциях следующим образом:

$$\lambda_1(Q) := \inf_{\|w\|_{\mathcal{M}_n^2} = 1} \{(w', w')_{\mathcal{M}_n^2} + (Qw, w)_{\mathcal{M}_n^2}\},$$

где $w, w' \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$, $w(0) = w(1) = 0$.

В работе исследуется следующая оптимизационная обратная спектральная задача:

(P): Для заданного вещественного числа λ_1^* и матричного эрмитового потенциала $Q_0(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$, требуется найти потенциал $\hat{Q}(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ такой, что

$$\bullet \|Q_0 - \hat{Q}\|_{L^2}^2 = \inf_{V \in \mathcal{M}_n^2(0,1)} \left\{ \|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2(0,1)}^2 : \lambda_1(Q) = \lambda_1^* \right\}.$$

Справедлива теорема существования и единственности:

Теорема 1. Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda_1^*$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача (P) имеет единственное решение.

Нами доказано, что оптимальный потенциал удовлетворяет нелинейному матричному уравнению Шредингера.

Теорема 2. Пусть \hat{Q} - решение задачи (P), тогда

$$-\frac{d^2}{dx^2}w(x) + (Q_0(x) + w(x)w^*(x))w(x) = \lambda_1^*w(x), w(0) = w(1) = 0.$$

- [1] Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма-Лиувилля, Дифф. уравнения, т.58, №12, стр.1707-1711
- [2] Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev On nonlinear boundary value problem corresponding to N - dimensional inverse spectral problem, J. Diff. Eq., 266 (2019), No. 8, 4533–4543. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.003>
- [3] Yavdat Ilyasov, Nur Valeev Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, Physica D: Nonlinear Phenomena, 426 (2021), 5 pp. 10.1016/j.physd.2021.132985

Длинные волны в замкнутых водоемах, инициируемые землетрясениями

Валеева Д.Н., Носов М.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

Основными целями работы являются: разработка численной модели колебаний водных масс в закрытых водоёмах на основе уравнений теории мелкой воды под воздействием сейсмических колебаний, численное воспроизведение сейшевых колебаний с использованием реальных сейсмических записей. В основу численной модели положена расчетная схема сквозного счета на сетке Аракавы для системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -(a_z - g) \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -(a_z - g) \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_y \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u(\xi+H)}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi+H)}{\partial y} = 0 \\ (V, n)|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Математическим результатом работы является утверждение, что при слабых (по сравнению с ускорением свободного падения) вертикальных

сейсмических движениях сейши в водоемах малых размеров формируются преимущественно за счет горизонтальных ускорений дна, а вертикальные ускорения играют пренебрежимо малую роль. Резонансный отклик водоемов на реальные сейсмические колебания рассмотрен на примере модельных водоемов с простой геометрией (прямоугольной и круговой). Установлено, что амплитуда сейшевых колебаний растет с увеличением глубины водоема.

Выполнено численное моделирование сейшевых колебаний в естественных водоемах с учетом реальной батиметрии и с использованием акселерограмм двух сейсмических событий (землетрясение Тохоку 2011 и Охотоморское глубокофокусное землетрясение 2013 года). Показано, что данные землетрясения могли инициировать сейши заметных амплитуд даже на больших расстояниях от эпицентра. В частности, в озере Смердяче (Шатурский район Московской области) Охотоморское землетрясение должно было вызвать колебания уровня с амплитудой порядка нескольких сантиметров, а в аналогичном ему по батиметрии озере на расстоянии 450 км от эпицентра землетрясения Тохоку сейшевые волны могли бы достигать высот более метра.

- [1] M. Bondevik, S., B. Gjevik, and B. Sorensen Norwegian seiches from the giant 2011 Tohoku earthquake, *Geophys. Res. Lett.*, 40 (2013), 3374–3378, doi:10.1002/grl.50639

Неустойчивое вытеснение нефти в широком диапазоне соотношения вязкостей и капиллярных сил

Валиев А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Вытеснение нефти менее вязкими средами из ячейки Хеле-Шоу – физической модели трещины в нефтяном пласте, важно для прогнозирования процессов связанных с добычей нефти из пористых сред [1]. Вытеснение нефти менее вязкими средами приводит к неустойчивости фронта и образованию «вязких пальцев». Наиболее информативно динамику изменения границы раздела между нагнетаемым флюидом и вытесняемой нефтью при изменении физических параметров можно изучить с помощью ячейки Хеле-Шоу. Использование ячейки с малым зазором позволяет отследить влияние изменения поверхностного натяжения (на границе раздела вытесняющая флюид–нефть) на процесс формирования «вязких пальцев». Представлены результаты экспериментального исследования развития «вязких пальцев» при неустойчивом вытеснении нефти, газом, водой и водным раствором ПАВ из ячейки Хеле-Шоу.

Изменялись следующие физические параметры: поверхностное натяжение и режимы течения, влияющие на формирование «вязких пальцев». Установлено, что увеличение градиента давления вытесняющей жидкости приводит к росту площади охвата и уменьшению ширины «вязких пальцев». В случае газа, наблюдается обратное. После прорыва наблюдается падение доли вытесненной нефти. Использование ПАВ уменьшает поверхностное натяжение на границе двух сред, увеличивает охват и существенно снижает число и размер остаточных целиков нефти, это приводит к увеличению эффективности вытеснения. Фрактальный анализ размерностей «вязких пальцев» позволил установить корреляцию фрактальной размерности с эффективностью вытеснения — увеличение фрактальной размерности связано с ростом нефтеизвлечения. Таким образом, изменение физических параметров при неустойчивом вытеснении позволяет найти определяющие факторы для увеличения нефтеизвлечения на различных стадиях вытеснения.

- [1] Мавлетов М.В., Валиев А.А. Эффективность неустойчивого вытеснения нефти из ячейки Хеле-Шоу // Нефтепромысловое дело. 2018. № 8. С. 42-45.

Integral geometry problem for spherical means

Volchkova N.P., Volchkov Vit.V.

Donetsk National Technical University, Donetsk National University,
Donetsk, Russia

Let $n \geq 2$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ and $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ be the spaces of distributions and compactly supported distributions on \mathbb{R}^n respectively, $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ be the space of all radial distributions in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, \tilde{T} be the Fourier-Bessel transform of a distribution $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Z}_+(\tilde{T})$ be the set of all zeros of an even entire function \tilde{T} lying in the half-plane $\operatorname{Re} z \geq 0$ and not belonging to the negative part of the imaginary axis. Let χ_r be the indicator of the ball $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. The problem of L. Zalcman on reconstruction of a distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ by known convolutions $f * \chi_{r_1}$ and $f * \chi_{r_2}$ is studied (see [1], Sect. 8). This problem is correctly posed only under the condition $r_1/r_2 \notin E_n$, where E_n is the set of all possible ratios of positive zeros of the Bessel function $J_{n/2}$. We have proven that if $r_1/r_2 \notin E_n$, then an arbitrary distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ can be expanded into an unconditionally convergent series

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_2})} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 - \mu^2)\tilde{\xi}'_{r_1}(\lambda)\tilde{\xi}'_{r_2}(\mu)} \left(p_{r_2}(\Delta)((f * \chi_{r_2}) * \xi_{r_1}^\lambda) - \right.$$

$$-p_{r_1}(\Delta)((f * \chi_{r_1}) * \xi_{r_2}^\mu)),$$

in the space $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, where Δ is the Laplace operator in \mathbb{R}^n , p_r is an explicitly given polynomial of degree $[(n+7)/4]$, ξ_r and ξ_r^λ are explicitly constructed radial distributions supported in the ball \overline{B}_r . The result obtained significantly simplifies known procedures for recovering a function f from given ball means $f * \chi_{r_1}$ and $f * \chi_{r_2}$ (see [2], Part II, Chap. 3).

- [1] Zalcman L. Offbeat integral geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. Vol. 87. No. 3. P. 161–175.
- [2] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.

Interpolation problems for mean periodic functions

Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.

Donetsk National University, Donetsk, Russia

The classical problem of interpolation in classes of entire functions is to find a function that belongs to a given class and takes given values $b_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ at given points $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. We study the conditions for the solvability of an interpolation problem with knots on a line in the classes of solutions of multidimensional convolution equations of tempered growth.

Let $n \geq 2$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ be the space compactly supported distributions on \mathbb{R}^n , $\mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$ be the space of all radial distributions in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, \tilde{T} be the spherical transform of a distribution $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Z}_+(\tilde{T}) = \{\lambda > 0 : \tilde{T}(\lambda) = 0\}$, $C_T^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : f * T = 0\}$.

Theorem 1. Let $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$ and let $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ be a strictly increasing sequence of real numbers such that $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_k) = +\infty$.

(i) If $\mathcal{Z}_+(\tilde{T}) \neq \emptyset$ then for any sequence $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ of complex numbers satisfying the condition $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+|b_k|)}{\ln(2+|k|)} < +\infty$, there exists a function $f \in C_T^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that $f(a_k, 0, \dots, 0) = b_k$ for all $k \in \mathbb{Z}$, and $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+|\partial^\eta f(x)|)}{\ln(2+|x|)} < +\infty$ for all $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$.

(ii) If $\mathcal{Z}_+(\tilde{T}) = \emptyset$ then there exists a bounded sequence $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ of complex numbers such that the conditions for f in statement (i) do not hold simultaneously for any of the functions $f \in C_T^\infty(\mathbb{R}^n)$.

We note that the first assertion of Theorem 1 is, generally speaking, false in the case $n = 1$. For other results related to properties of class $C_T^\infty(\mathbb{R}^n)$, see [1]– [3].

- [1] Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [2] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. New York: Springer, 2009.
- [3] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.

**О бифуркациях в нелинейных уравнениях с модулем
Габдрахманов Р.И.**

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

В нелинейной динамике и ее приложениях фундаментальное значение имеет теорема о центральном многообразии (см. [1]), которая применима для систем с гладкими функциями.

Многие задачи нелинейной динамики приводят к уравнениям, содержащим модуль. Для таких задач теорема о центральном многообразии не применима. В этой связи актуальной является разработка аналогов теорем о центральном многообразии для уравнений с негладкими функциями.

В настоящей работе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение

$$x' = A_0 \tilde{x} + \varphi(x), \quad x \in R^2, \tag{1}$$

в котором A_0 - квадратная матрица, а $\tilde{x} = \begin{bmatrix} |x_1| \\ x_2 \end{bmatrix}$ или $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ |x_2| \end{bmatrix}$, $\varphi(x) = O(\|x\|^2)$ при $|x| \rightarrow 0$.

Для таких уравнений изучены вопросы об аналогах теоремы о центральном многообразии и рассмотрены приложения. Основным приложением изучается дифференциальное уравнение

$$y'' + ay' + by + c|y'| = 0 \tag{2}$$

Для уравнения (2) получены условия бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности нулевого решения $y = 0$.

- [1] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — Москва-Ижевск: ИКИ, 2002.

**Устойчивость максимального члена ряда Дирихле из
класса $D(\Phi)$**

Гайсин А.М., Гайсина Г.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия, Уфимский
университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Впервые понятие устойчивости максимального члена ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad \Lambda = \{\lambda_n\}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad (1)$$

абсолютно сходящегося в \mathbb{C} , введено в [1]. При этом предполагалось, что λ_n – нули целой функции конечного порядка, а F имеет произвольный рост. Это было связано с тем, что в [1] исследовалась одна классическая задача о целых функциях с лакунами Фейера.

По определению, максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (1) устойчив, если при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры (нулевой плотности или нулевой нижней плотности)

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma),$$

где $\mu^*(\sigma)$ – максимальный член целого ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}$.

В [1] получен критерий устойчивости в случае, когда $\ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$. В общем случае это требование можно ослабить (см. [2]), предполагая лишь, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \lambda_n} < \infty. \quad (2)$$

Для функций F вида (1) из класса $D(\Phi)$, определяемого через некоторую выпуклую мажоранту роста Φ , условие (2) тоже можно ослабить (см. [3]). В этом случае предполагается лишь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \varphi(\lambda_n)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{0 < \lambda_n < x} \frac{1}{n \lambda_n} = 0, \quad (3)$$

где φ – функция, обратная к Φ , такая, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty. \quad (4)$$

Нами показано, что этот результат из [3] допускает существенное усиление, если в условиях (3) функцию $\varphi(x)$ заменить на $\psi(\eta x)$ ($\eta > 0$ – любое), где $\psi(x)x = \Psi(x)$ – двойственная с Φ по Юнгу функция. Оказывается, в этом случае условие (4) вообще излишне (см. [4]).

- [1] Гайсин А.М. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 194:8 (2003), 55–82.
- [2] Skaskiv O.B., Trakalo O.M. On the stability of the maximum term of the entire Dirichlet series. // Ukr. Math. J. 57:4 (2005), 571–576.
- [3] Gaisin A.M., Autkukhina N.N. Stability criterion for maximal terms of Dirichlet series // Journal of Math. Sciences. 260:6 (2022), 715–724.
- [4] Гайсин А.М., Гайсина Г.А. Об устойчивости максимального члена ряда Дирихле // Известия вузов. Математика. 1 (2023), 25–35.

**Оценка, близкая к признаку В.П. Ермакова. Применение
Гайсин Р.А.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Если $r = r(t)$ — убывающая непрерывная на \mathbb{R}_+ функция, то при

$$q_+ \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t r(e^t)}{r(t)} < 1$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r(n)$ сходится (признак В.П. Ермакова).

Теорема. Пусть $\nu > 0$, $r = r_\nu(t)$ — положительная непрерывная на \mathbb{R}_+ функция, $tr_\nu(t) \downarrow$, $t^{1+\nu}r_\nu(t) \uparrow$ при $1 \leq t \uparrow$, такая, что

$$\int_1^{\infty} r_\nu(t) dt < \infty.$$

Тогда $\inf_{\nu > 0} q_+(\nu) \leq 1$, где

$$q_+(\nu) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t r_\nu(e^t)}{r_\nu(t)}.$$

Эта теорема (как и ее доказательство) представляет самостоятельный интерес. Она имеет полезное применение при доказательстве равносильности условий неполноты системы экспонент $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$, где γ — дуга ограниченного наклона.

Ряды экспонент с заданной мажорантой роста вблизи границы

Гайсина Г.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

В докладе речь пойдет о поведении рядов экспонент вблизи границы в случаях, когда область регулярности суммы ряда – вся плоскость, полуплоскость и ограниченная выпуклая область.

Для класса аналитических в ограниченной выпуклой области G функций, представимых в ней рядом экспонент, в терминах порядка роста вблизи границы ∂G изучено поведение коэффициентов разложения в ряд экспонент. В случае, когда область G имеет гладкую границу, установлены наилучшие двусторонние оценки для порядка через характеристики, зависящие только от коэффициентов, показателей ряда экспонент и опорной функции области G .

Для ряда Дирихле, сходящегося лишь в некоторой полуплоскости, найдено оптимальное условие на показатели, при выполнении которого порядок его суммы может быть подсчитан при помощи определенной формулы, зависящей только от коэффициентов и показателей. Найденное условие является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы для порядка суммы любого такого ряда Дирихле была справедлива данная формула.

В терминах порядка ρ_R по Ритту изучена связь между ростом целого ряда Дирихле и скоростью убывания коэффициентов разложения и получено условие на показатели, необходимое и достаточное для того, чтобы была верна известная формула Дж. Ритта для ρ_R . Разные условия, достаточные для справедливости этой формулы, были в свое время получены К. Сугимурой и С. Танаки. При этом последним автором был доказан более общий результат, вытекающий из неравенств

$$-R \leq -\frac{1}{\rho_R} \leq -R + \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln N(x)}{x \ln x}, \quad (1)$$

где R – характеристика Ритта, $N(x) = \sum_{[x] \leq \lambda_n < x} 1$, $[x]$ – целая часть x .

Нами доказана точность оценок С. Танаки (1) для R -порядка ρ_R , тем самым, получен критерий справедливости формулы Дж. Ритта.

Наконец, получено представление аналитических в полуплоскости $\Pi_0^+ = \{z = x + iy: x > 0\}$ функций рядами экспонент с учетом заданной выпуклой мажоранты роста.

Приведенные выше результаты опубликованы в работах [1] – [4].

[1] Г.А. Гайсина. Порядок роста ряда экспонент вблизи границы области сходимости // Алгебра и анализ. 33:3 (2021), 31–50.

- [2] Г.А. Гайсина. Порядок роста суммы ряда Дирихле: зависимость от коэффициентов и показателей // Уфимск. матем. журн. 12:4 (2020), 31–41.
- [3] А.М. Гайсин, Г.А. Гайсина. Теоремы типа Ритта–Сугимур // Владикавк. матем. журн. 22:3 (2020), 47–57.
- [4] Г.А. Гайсина. Представление аналитических функций рядами экспонент в полуплоскости с учетом мажоранты роста // Уфимск. матем. журн. 13:4 (2021), 8–16.

Теоретические модели для технологий добычи и подготовки нефти

Галиакбарова Э. В.

Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия
УГНТУ, г.Уфа, Россия

Для интенсификации добычи нефти из пластов с низкой проницаемостью и высокой вязкостью искусственно образуют трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Известные методы гидродинамического испытания скважин не адаптированы к пластам с низкой проницаемостью, а методы сейсморазведки дорогие и трудоемкие. Предполагается проводить диагностику наличия и качества трещин ГРП с помощью акустического зондирования с применением импульсных сигналов, образуемых во флюиде, заполняющем скважину. Предложена теоретическая модель [1–3] динамики импульсного сигнала в открытом участке скважины с акустически сжимаемой жидкостью, при учете фильтрации жидкости в трещины ГРП, продольные или радиальные скважине, а также в пласт. Проводится аналитический и численный анализ влияния фильтрационных характеристик трещин и вида жидкости в скважине на кривые фазовой скорости и коэффициента затухания для продольных трещин, а также коэффициентов отражения и прохождения для радиальных трещин, от круговой частоты. Результаты численных экспериментов на основе алгоритмов быстрого преобразования Фурье по эволюции импульсного сигнала в канале, окруженном пластом проницаемости санти- и миллдарси, заполненном водой или нефтью позволяют диагностировать наличие и проводимость трещин. Аналогичная теория создана для методики нахождения поврежденного участка трубопровода [4,5], заполненного углеводородной жидкостью при подземном и наземном расположении.

Поскольку нефть, добываемая из пластов с низкой проницаемостью, сильно обводнена, а пластовая вода сильно минерализована, то существуют проблемы подготовки нефти: очистка от солей, перемешивание

с более легкими фракциями для снижения расслаивания. Предложен и обоснован на промысловых данных метод [6, 7] очистки нефти от минерализованных частиц пластовой воды с помощью струйного введения капелек промывочной воды навстречу потоку нефти. Для этого созданы теоретические основы, построены алгоритмы программ для численных экспериментов, моделирующих зацепление капельками промывочной воды минерализованных частиц в нефти. Кроме того, предложена теоретическая модель [8, 9] вынужденного перемешивания нефти с помощью инжекторных насосов с более легкими фракциями в вертикальных цилиндрических емкостях для увеличения их текучести и снижения расслаивания. Проведены численные расчеты и их анализ, применительно к конкретным системам, позволяющие определить оптимальный режим работы для более глубокого перемешивания.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

- [1] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р. К теории локального зондирования трещин, образовавшихся при гидроразрыве пласта, с использованием импульсных волн давления // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. №4. С. 46 - 56.
- [2] Shagapov V. Sh., Galiakbarova E.V., Khakimova Z.R. On the Theory of Acoustic Sounding of Hydraulic- fracturing Cracks Perpendicular to the Well // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2021. Vol. 94. No. 5, pp. 1160 - 1169.
- [3] Shagapov V. Sh., Galiakbarova E.V., Khakimova Z.R. Acoustic Sounding of Hydraulic Fractures in a Low-permeability Reservoir // Mathematics 2023, 11(1), 97. <https://doi.org/10.3390/math11010097>
- [4] Shagapov V.Sh., Galiakbarova E.V., Khakimova Z.R. On the Theory of Acoustic Scanning of Damage to Underground Pipelines// Acoustical Physics. 2021. Vol. 67. No. 6, pp. 583 - 594.
- [5] Система контроля магистральных трубопроводов: пат. 2606719, Рос. Федерация, дата подачи 16.12.2015, опубл. 10.01.2017, БИИ/ Галиакбаров В.Ф., Галиакбарова Э.В., Ковшов В.Д., Хакимова З.Р.
- [6] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Гималтдинов И.К. К теории вымывания солей из водонефтяной эмульсии пресной водой // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. №4. С. 91 - 99.
- [7] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В. Влияние размеров и начальной скорости капель промывочной воды при струйной инжекции на эффективность промывки нефти от минерализованных частиц // Труды Академэнерго. 2020. № 1. С. 84 - 94.

- [8] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В. Элементы теории вынужденного перемешивания нефтей в резервуарах// Многофазные системы. 2019. Т. 14. №2. С. 101 - 107.
- [9] Shagapov V.Sh., Galiakbarova E.V. On the Theory of Forced Mixing of Hydrocarbon Fluids in Storage Systems// Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2021. Vol. 94. No. 2, pp. 458 - 466.

Отражение и преломление акустической волны при наклонном падении на границу раздела «вода – песок, насыщенный водой или газогидратом»

Галиакбарова Э.В.^{1,2}, Каримова Г.Р.¹

¹Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

²Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Россия

Для обследования морского дна применяют метод «эхоскопии», основанный на особенностях отражения и прохождения упругих волн границы раздела двух сред [1,2].

Построена математическая модель отражения и прохождения акустической волны при наклонном падении на границу раздела «вода – песок, насыщенный водой или гидратом метана». Предполагается, что источник импульсного сигнала расположен вдали от границы раздела, а фронт падающей волны - под углом $\theta \leq 90^\circ$. Кроме того, вода полагается сжимаемой в акустическом приближении, а песок – упругим изотропным телом. Для каждой из областей записаны основные уравнения потенциалов для падающей, отраженной, прошедшей продольной и поперечной волн, вектора смещения частиц среды, компоненты тензоров напряжений, которые дополнены условиями на границе раздела. Получены коэффициенты отражения в воде, прохождения продольной и поперечной волн в песке. В численных расчетах использовались значения скоростей волн из экспериментальных данных [3]. Найдены зависимости углов преломления продольной и поперечной волн, а также модулей и аргументов коэффициентов отражения и прохождения от угла падения при насыщенностях $S_i = 0.1 \div 0.7$. Для песка с гидратом найдены углы полного внутреннего отражения продольных и поперечных волн.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

- [1] Лепендин Л.Ф. Акустика // Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1978.

- [2] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности отражения и преломления акустических волн на границе раздела между газом и дисперсной системой // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5(333). С. 119-129.
- [3] Дучков А.Д., Дучков А.А., Дугаров Г.А., Дробчик А.Н. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лёд или гидраты метана и тетрагидрофурана // Доклады академии наук. 2018. Т. 478, №1. С. 94-99.

Круговая схема Флейтас для градиентно-подобных потоков поверхности

Галкин В.Д., Ноздринова Е.В., Починка О.В.
НИУ ВШЭ - Нижний Новгород, Россия

В настоящей работе получена классификация градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях посредством обобщения круговой схемы Флейтас. В 1975 году она доказала, что такая схема является полным инвариантом топологической эквивалентности для полярных потоков на 2- и 3-многообразиях. В настоящей работе мы обобщаем понятие круговой схемы на произвольные градиентно-подобные потоки на поверхностях. Доказываем, что класс изоморфности таких схем является полным инвариантом топологической эквивалентности. Также в работе исчерпывающим образом решен вопрос реализуемости абстрактной круговой схемы градиентно-подобным потоком на поверхности. Кроме того, построен эффективный алгоритм различения изоморфности круговых схем.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101

Об одной версии полудискретного уравнения типа Цицейки **Гарифуллин Р.Н.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

В докладе обсуждаются результаты полученные в ходе симметричной классификации полудискретных уравнений гиперболического типа. Такие уравнения имеют вид:

$$u_{n+1,x} = f(u_{n,x}, u_{n+1}, u_n, x). \quad (1)$$

В качестве критерия интегрируемости требуется наличие двух высших симметрий, одна из которых в x -направлении:

$$u_{n,t} = g \left(x, u_n, u_{n,x}, u_{n,xx}, \dots, \frac{\partial^N u_n}{\partial x^N} \right), \quad (2)$$

а вторая в n -направлении:

$$u_{n,\tau} = h(u_{n-M}, u_{n-M+1}, \dots, u_{n+M-1}, u_{n+M}, x). \quad (3)$$

В работе [1] показано, что в этом случае высшие симметрии вида (2) являются уравнениями с постоянной сепарантой, которые полностью получены в статье [2]. Обозначения и определения смотри в статье [1].

Основное внимание доклада посвящено уравнению

$$\frac{du_{n+1}}{dx} = \frac{du_n}{dx} + \lambda_1(e^{u_n} + e^{u_{n+1}}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{-u_n - u_{n+1}}. \quad (4)$$

Это уравнение имеет высшие симметрии

$$u_t = u_5 + 5(u_2 - u_1^2 - \lambda_1^2 e^{2u} + \lambda_2 e^{-u})u_3 - 5u_1 u_2^2 - 15\lambda_1^2 e^{2u} u_1 u_2 + u_1^5 + 5(\lambda_1^2 e^{2u} - \lambda_2 e^{-u})^2 u_1, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad (5)$$

$$\frac{du_n}{d\tau} = \frac{e^{u_{n+1}} e^{u_{n-1}}}{e^{u_{n+1}} + e^{u_n} + e^{u_{n-1}}} (T - T^{-1}) \left(\frac{1}{e^{u_{n+1}} + e^{u_n} + e^{u_{n-1}}} - \frac{1}{e^{u_n}} \right). \quad (6)$$

Этот пример является дискретизацией уравнения Цицейки по одному из направлений, в отличие от известного примера [1] он может быть записан в рациональном виде.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-11-00006)

- [1] R.N.Garifullin, I.T.Habibullin. *Generalized symmetries and integrability conditions for hyperbolic type semi-discrete equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:20, 205201 (2021).
- [2] А.Г. Мешков, В.В. Соколов. *Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой* // Уфимск. матем. журн. **4**:3, 104–154 (2012).
- [3] R. Yamilov. *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**(45), R541 (2006).

Тепловое воздействие на высоковязкую нефть в пласте через одиночный горизонтальный канал

Гиззатуллина А.А.

ФГБОУ ВО УГНТУ, г.Уфа, Россия

Представлено численное исследование процесса фильтрации высоковязкой нефти через одну горизонтальную скважину, которая используется сначала в качестве обогревательного канала, а потом как добывающая скважина. Получена система дифференциальных уравнений для давления и температуры, при заданных граничных условиях. Система уравнений решена численно методом конечных разностей по явной схеме. Решение задачи представлено в три этапа. На первом этапе происходит нагревание нефтяного пласта, который дает возможность контролировать процесс нагревания пласта, время которого зависит от толщины залегающей породы. На втором этапе для повышения нефтеотдачи происходит выдержка в закрытых условиях до достижения наиболее равномерного распространения температуры в нефтяном пласте. На третьем этапе работы скважины происходит фильтрация разогретой нефти с уменьшенным коэффициентом вязкости через исследуемый горизонтальный канал. Из полученных решений видно, что фильтрационная волна проникает в нефтяной пласт значительно дальше области температурных перепадов. С течением времени происходит снижение температуры пласта вблизи скважины и соответствующее увеличение вязкости, что будет приводить к замедлению процесса фильтрации нефти в пласте. В заключение следует отметить, что предложенный способ направлен на повышение эффективности разработки нефтяного пласта с высоковязкой нефтью за счет обеспечения равномерного прогрева разрабатываемой зоны месторождения.

- [1] Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. М.: Недра, 1988. 422 с.
- [2] Байбаков Н.К., Гарушев А.Р. Тепловые методы разработки нефтяных месторождений. М.: Недра, 1988. 344 с.
- [3] Шейнман А.Б., Малофеев Г.Е., Сергеев А.И. Воздействие на пласт теплом при добыче нефти. М.: Недра, 1969. 256 с.
- [4] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
- [5] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

Численное исследование горения слоя гидрата и гидратной взвеси в атмосфере окислителя

Гималтдинов И.К., Баянов И.М., Столповский М.В.,
Гиззатуллин Р.М.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа,
Россия

В работе численно исследуются процессы горения газового гидрата (ГГ) в открытой атмосфере, а также горение монодисперсной взвеси частиц газогидрата в метановоздушной смеси на основе теоретических моделей, предполагающих полное испарение воды на границе ГГ. При этом для случая горения ГГ в открытой атмосфере предполагаются допущения, аналогичные рассмотренным в [1]. Динамика газовой смеси с учетом горения описывается уравнениями масс, импульсов и энергии. Тепломассообмен в газовой смеси при горении осуществляется за счет турбулентного перемешивания компонентов. На основе численных расчетов проанализированы температура горения газовой смеси, скорость диссоциации гидрата, интенсивность горения и т.д. в зависимости от коэффициентов переноса.

Также рассматривается одномерное течение смеси метана с воздухом, содержащую частицы ГГ метана (аэровзвесь). В качестве инициирующего выбран ударный способ. Это означает, что в некоторой области $0 \leq x \leq x_0$ в начальный момент времени $t = 0$ имеется газовая смесь с высокими динамическими и термодинамическими параметрами (горючая смесь). При $t > 0$ на границе между горячей смесью и аэровзвесью, находящейся при нормальных условиях, начинается распад разрыва. По холодной взвеси пойдет ударная волна, а по горячей – волна разрежения. За фронтом ударной волны параметры газа возрастают так, что возможно воспламенение и горение газозвеси. Предполагается, что тепломассообмен между газом и каплями происходит в квазистационарном режиме. Скорость химической реакции в газе описывается законом Аррениуса. Интенсивность диссоциации частиц ГГ полагается пропорциональной разности температур частицы ГГ и окружающего горючего газа. На основе численных расчетов показано, что для выбранной схемы сгорания смеси скорость горения является сверхзвуковой. Радиус частицы ГГ под действием волны горения очень быстро разрушается.

- [1] Гималтдинов И.К., Баянов И.М., Столповский М.В., Чиглинцева А.С. О горении гидрата в замкнутом объеме. Инженерно-физический журнал. 2022. Т. 95. № 3. С. 605 - 613.

Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа Римана-Лиувилля в банаховых пространствах

Годова А.Д., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — банаховы пространства, M — линейный замкнутый оператор с плотной в \mathcal{X} областью определения D_M , действует в \mathcal{Y} , $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, т.е. L — вырожденный линейный ограниченный оператор. Введем обозначения $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$, $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L := L(\mu L - M)^{-1}$. Пусть $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > a\} \subset \rho^L(M)$, определим проекторы $P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, где $r > a$. Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q$, $L_k(M_k)$ — сужение оператора $L(M)$ на \mathcal{X}^k , $k = 0, 1$. Известно, что $L_k, M_k : \mathcal{X}^k \rightarrow \mathcal{Y}^k$, $k = 0, 1$, существует $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$. Обозначим также $G := M_0^{-1}L_0$. При условии $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$ для некоторого $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ оператор M называется (L, p) -ограниченным. Кроме того, определим $(D^{m,K}x)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)x(s)ds$, где D^m — производная порядка m .

Теорема [1]. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$. Существует преобразование Лапласа \widehat{K} , которое является однозначной аналитической функцией в $\Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > R_0, |\arg \mu| < \pi\}$ при некотором $R_0 > 0$ и удовлетворяет условию

$$\exists \chi > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^{-1} > c|\lambda|^{\chi-1},$$

при этом для всех $\lambda \in \Omega_{R_0}$ существует $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $g \in C((0, T]; \mathcal{Y}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Y})$, $(D^{m,K}G)^l M_0^{-1}(I-Q)g$, $D^{m,K}(D^{m,K}G)^l M_0^{-1}(I-Q)g \in C((0, T]; \mathcal{X})$ для $l = 0, 1, \dots, p$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи

$$D^{k,K}(Px)(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

для линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения

$$LD^{m,K}x(t) = Mx(t) + g(t), \quad t \in (0, T].$$

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

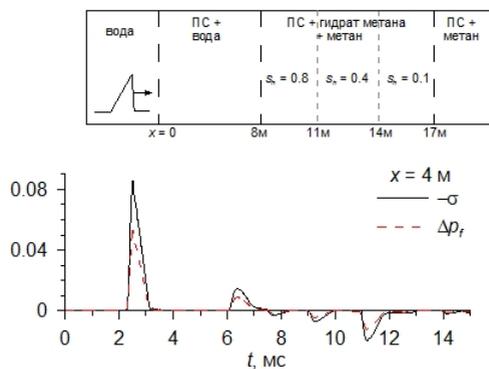
- [1] 1. Fedorov V.E., Godova A.D., Kien B.T. Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2022. № 2 (106). P. 93–107.

Отражение волны сжатия от гидратосодержащего слоистого участка в пористой среде

Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г.Тюмень, Россия

Изучение волновых процессов в газогидратных породах необходимо для правильной интерпретации результатов сейсмических исследований и акустического каротажа. Рассмотрена задача о распространении волны сжатия в пористой среде, включающей несколько участков с различным содержанием гидрата. Численное моделирование проведено на основе конечно-разностного метода Мак-Кормака с использованием двух-скоростной с двумя напряжениями модели пористой среды.



Рассмотрен процесс отражения и прохождения импульса сжатия через слоистый гидратонасыщенный участок с уменьшающимся или увеличивающимся гидратосодержанием. На рисунке показано изменение полного напряжения и давления во флюиде перед гидратосодержащим слоем. Исходный импульс треугольной формы длительности 0.8 мс задается в воде и проходит в пористую среду. В данном случае импульс является относительно коротким (относительно протяженности гидратного слоя), поэтому в сигнале отчетливо различаются проходящая волна, а также последующие отдельные вступления волн, отраженных от границ участков с различным содержанием гидрата. При более длительном исходном импульсе отраженные от границ внутри слоя волны интерферируют и сливаются друг с другом, картина отражения становится значительно более сложной.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Тюменской области в рамках научного проекта № 20-41-720003.

Тепловое воздействие на газогидратную залежь

Давлетшина М.Р.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.
Уфа, Россия

В работе исследуется процесс разложения газогидрата путем решения задачи о фазовых переходах при постоянном потоке тепла. Представлена математическая модель процесса разложения газогидрата метана, полностью насыщающего пористое пространство пласта [1,2]. В работе предложена технологическая схема, а также соответствующая теоретическая модель процесса добычи природного газа из пласта, полностью насыщенного гидратом метана [3]. При построении теоретической модели полагаем, что разложение происходит по фронтальной схеме, вода, выделившаяся в результате разложения неподвижна, фильтрационным сопротивлением пренебрегаем.

В данной работе задается поток тепла и исследуется процесс разложения газогидрата путем решения задачи о фазовых переходах гидрат метана – метан + вода при включении в них источника тепла. Изучена эволюция температурных полей при постоянном потоке тепла на погонный метр скважины, равном 1 кВт. Расчеты показывают, что предлагаемая технология устраняет основные неудобства процесса теплового воздействия и имеет определенные преимущества по сравнению с другими подходами добычи метана из газогидрата [4]. Ожидается, что его эффективность составит порядка 10. В рамках данной работы проведено моделирование процесса разложения гидрата путем воздействия на пласт тепловым источником постоянной мощности. Для радиальной задачи с фронтальной границей фазовых переходов построены решения, описывающие поля температур и динамику движения границы разложения гидрата и дебита газа.

- [1] Черский Н.В., Бондарев Э.А. О тепловом методе разработки газогидратных месторождений // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 203. – № 3. – С. 550.
- [2] Бондарев Э.А., Максимов А.М., Цыпкин Г.Г. К математическому моделированию диссоциации газовых гидратов // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 308. – № 3. – С. 575.
- [3] Шагапов, В.Ш. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа / В.Ш. Шагапов, Н.Г. Мусакаев. – М.: Наука, 2016. – 238с.
- [4] Шагапов В.Ш., Давлетшина М.Р. К вопросу разработки гидратного пласта тепловым воздействием // Теплофизика высоких температур. 2022, Т.60, № 1. С.131-138.

Неупругие столкновения автосолитонов в электроконвективной структуре жидкого кристалла

Делев В.А.¹, Салимов Р.К.², Скалдин О.А.¹

¹Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия,

²Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Исследуется динамика и взаимодействие топологических дефектов в электроконвективной структуре закрученного на $\pi/2$ нематического жидкого кристалла (НЖК). В структуре валов (роллов) закрученных на $\pi/2$ НЖК, как и в планарно ориентированных, возникают краевые дислокации с топологическими зарядами $S = \pm 1$. Движение дислокаций происходит как вдоль роллов (*climb* — переползание), так и перпендикулярно им (*glide* — скольжение). При этом дислокации с противоположными топологическими зарядами притягиваются, с одноименными — отталкиваются. Особенностью структуры роллов в закрученных НЖК является то, что гидродинамические потоки в них, наряду с тангенциальной компонентой скорости, имеют и аксиальную составляющую, направление которой противоположно в соседних роллах. Аксиальная компонента скорости возникает в результате сильной связи между исходной закрученной ориентацией директора \mathbf{n} (\mathbf{n} — единичный вектор, описывающий направление преимущественной ориентации молекул в слое НЖК) и скоростью гидродинамического потока. Это приводит к образованию топологических дефектов особого типа — дислокаций с “размытым” ядром, или линейных дефектов, которые ориентированы перпендикулярно роллам и двигаются преимущественно вдоль них. При этом возникающий линейный дефект имеет такой же топологический заряд, что и исходная краевая дислокация.

Показано, что взаимодействие пары линейных дефектов с противоположными топологическими зарядами $S = \pm 1$ качественно хорошо описывается уравнением синус-Гордона с диссипативным слагаемым:

$$u_{tt} + R(u_t) - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (1)$$

где $R(u_t) = \gamma_1 u_t + \gamma_2 u_t^3$, γ_1 и γ_2 — малые положительные параметры.

В численных расчетах использовался модифицированный разностный метод Кристиансена-Ломдала четвертого порядка точности [1].

- [1] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.

Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида

Донцова М.В.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В [1] рассмотрена задача Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (a_1(t)u(t, x) + b_1(t)v(t, x))\partial_x u(t, x) = a_2 u(t, x) + b_2(t)v(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + (c_1(t)u(t, x) + g_1(t)v(t, x))\partial_x v(t, x) = g_2 v(t, x), \end{cases} \quad (1)$$

где $u(t, x)$, $v(t, x)$ — неизвестные функции, a_2 , g_2 — известные константы, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c_1(t)$, $g_1(t)$ — известные функции, с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x) \quad (2)$$

в области $\Omega_T = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$.

В [1] получена система интегральных уравнений:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau) + \int_0^s (a_2 w_1 + b_2(\tau)w_3)d\tau, \quad (3)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau) + \int_0^s g_2 w_2 d\tau, \quad (4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau), \quad (5)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau). \quad (6)$$

Обозначим $C([0, T])$ - пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0, T]$.

Теорема. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(\mathbb{R})$, $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$ и выполняются условия

$$1) a_1(t) > 0, b_1(t) < 0, b_2(t) < 0, c_1(t) > 0, g_1(t) < 0, \quad t \in [0, T],$$

$$2) \varphi_1'(x) \geq 0, \varphi_2'(x) \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

- [1] Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 4. С. 384–394.

Моделирование процесса фильтрации в низкопроницаемых пластах

Дударева О.В., Русинов А.А.

Бирский Филиал УУНиТ, г.Бирск, Россия

В последнее время, в связи с уменьшением запасов углеводородного сырья, разрабатываются пласты со сверхнизкой проницаемостью. Примерами таких пластов могут служить песчаники, глиносодержащие песчаники, известняки с проницаемостью $k = 10^{-16} \text{ м}^2$. В экспериментальных данных [1] показано, что в таких пластах, при малых скоростях фильтрации наблюдаются отклонения от линейной фильтрации. Возникновение этого явления может возникать за счет поверхностного взаимодействия между флюидом и твердым скелетом породы.

На основе предложенной ранее теоретической модели фильтрации [2] рассмотрена задача фильтрации, описывающая приток нефти к скважине в низкопроницаемых пластах при переменных перепадах давления. Пористая среда однородна, ее фильтрационные характеристики проницаемость и пористость одинаковы во всех областях. Предполагается, что жидкость поступает к скважине радиусом r_c , расположенной в центре пласта радиуса R_0 , по предложенному нелинейному закону фильтрации [2]. Первоначально давление в пласте и на забое скважины постоянно и равно p_0 .

Установлено, что по результатам исследований скважин, при переменных режимах ее работы возможно выявлять нелинейные эффекты фильтрации. Соответствующие формы индикаторных кривых скважины при переменных режимах ее работы позволяют качественно и количественно выявлять степень отклонения закона фильтрации от линейного закона Дарси и судить о коллекторских характеристиках пласта.

- [1] Xu J., Jiang R., Xie L., Yang M. et al. Transient pressure behavior for dual porosity low permeability reservoir based on modified darcy's equation. // SPE 153480. 2012.
- [2] Шагапов В.Ш., Дударева О.В. Нелинейные эффекты фильтрации при переходных режимах работы скважины // Инженерно-физический журнал. Т.89. № 2. 2016.

Нелинейные волны уравнений синус-Гордона и ϕ^4 в модели с примесями

Екомасов Е.Г.¹, Дмитриев С.В.², Фахретдинов М.И.¹,
Самсонов К.Ю.³, Кабанов Д.К.¹, Назаров В.Н.²

¹Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

²ИФМК, УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

³Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия

Одним из популярных модельных уравнений, имеющим солитонные решения, и описывающим многие нелинейные волновые процессы в теоретической и математической физике, является нелинейное уравнение Клейна-Гордона (УКГ). Наиболее изученными примерами такого класса уравнений являются уравнения синус-Гордона (УСГ) и ϕ^4 . Для использования УКГ в реальных физических приложениях, возникает необходимость его модифицировать. Например, путём добавления дополнительных слагаемых. Дополнительные слагаемые могут описывать внешнюю силу, диссипацию, неоднородность параметров среды и т.п. Одним из наиболее исследуемых случаев связан с введением неоднородности параметра стоящего перед слагаемым содержащим потенциал в УКГ. Модифицированное УКГ уже не имеет точных аналитических решений. Однако существует ряд широко применяемых аналитических методов, позволяющих получить, хоть и приближённо, аналитическое решение задачи. В данной работе для уравнения синус-Гордона и ϕ^4 в модели с одной или несколькими точечными и протяжёнными примесями была исследована возможная динамика кинков, получены различные типы локализованных на примесях волн. Для аналитических расчетов использовался метод коллективных переменных. Для численных расчетов были созданы программы с использованием явной схемы. В связи с особыми требованиями к точности проводимых расчетов, реализован и особый контроль погрешности результата. Найдено, что протяженная примесь качественно ведет себя как хорошо изученные точечные примеси, описываемые с помощью, дельта-функции. Существенные количественные различия проявляются в особенностях динамики кинка при взаимодействии с примесью. Определены и описаны все возможные сценарии динамики кинка с учетом резонансных эффектов. Найдены зависимости критических и резонансных скоростей кинка в зависимости от параметров примеси. Показано, что эффект усиления «коллективного влияния» примесей, с увеличением их числа, будет приводить к появлению новых эффектов и сценариев динамики кинка.

Об интегрируемых дискретных динамических системах

Ефремова Л.С.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия;
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

Введено понятие вполне геометрически интегрируемой дискретной динамической системы, заданной на клетке, цилиндре или торе размерности $n \geq 2$ [1]. Это понятие является естественным расширением понятия геометрической интегрируемости, введенного ранее для отображений компактного прямоугольника в плоскости [2] – [4].

Сформулированы геометрический и аналитический критерии полной геометрической интегрируемости дискретных динамических систем. Приведен пример применения полученных результатов к исследованию динамики рассматриваемых отображений.

- [1] Efremova L.S. *Introduction to completely geometrically integrable maps in high dimensions.* // *Mathematics.* 2023. Vol.11. No 4, 926. DOI: 10.3390/math11040926.
- [2] Belmesova S.S., Efremova L.S.. *On the concept of integrability for discrete dynamical systems. Investigation of wandering points of some trace map.* // *Nonlin. maps and their applic., Springer Proc. Math. Statist.* 2015. Vol. 112. P. 127–158.
- [3] Ефремова Л.С. *Динамика косых произведений отображений интервала.* // *УМН.* 2017. Т. 72. №. 1. P. 101–178.
- [4] Efremova L.S. *Geometrically integrable maps in the plane and their periodic orbits.* // *Lobachevskii J. Mathematics.* 2021. Vol. 42. No 10. P. 2315-2324.

Об однозначной нелокальной разрешимости квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто

Захарова Т.А., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть \mathcal{Z} — банахово пространство, D_t^β — производная Герасимова — Капуто порядка $\beta > 0$ или интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta$ при $\beta \leq 0$. Банахово пространство всех линейных ограниченных операторов на \mathcal{Z} будем обозначать через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, а через $\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве \mathcal{Z} и действующих \mathcal{Z} . Пусть $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{Z}$,

$m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$. Решением задачи Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \quad (2)$$

на отрезке $[t_0, T]$ является функция $z \in C((t_0, T]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D_t^{\alpha_l} z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, выполняются условия (1) и при $t \in (t_0, T]$ — равенство (2).

Отметим, что при $\alpha_l < 0$ нелинейный оператор зависит от дробного интеграла Римана — Лиувилля $D_t^{\alpha_l} z(t) := J_t^{-\alpha_l} z(t)$.

При $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \geq 0$ обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ [1] класс операторов $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ и $a > a_0$ найдется такая константа $K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, a}$ $\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda-a)|}$.

Теорема. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, отображение $B \in C([t_0, T]; D_A)$ липшицево по \bar{x} . Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение на $[t_0, T]$.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

- [1] Федоров В. Е., Авилов А. С. Задача типа Коши для вырожденно-го уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т.60, № 2. С.461-477.

Влияние исходных характеристик инжектируемого газа на процесс разложения газового гидрата в пористой среде

Запивахина М.Н.

Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск, Россия

В плоскоодномерной автомодельной постановке изучен процесс разложения газогидрата при инжекции газа в пористую среду. Проанализировано влияние параметров пористой среды, давления и температуры нагнетаемого газа на протяженность области разложения газогидрата в пористом пласте.

Одним из альтернативных источников энергии являются газогидраты - принципиально новый вид топлива, покоящегося на дне морей и в

зонах вечной мерзлоты. По мнению многих ученых и аналитиков, разработка газогидратных залежей может пошатнуть равновесие сил на энергетическом рынке мира. Разложение гидрата в замкнутом объеме сопровождается значительным повышением давления. Процесс разложения газогидрата происходит с поглощением тепла. В данной работе в плоскооднородном приближении рассматривается задача о разложении газогидрата при нагнетании в пористую среду газа, одноименного исходному. Как показывает анализ, наиболее полное разложение газогидрата наблюдается при малой гидратонасыщенности и высокой проницаемости пласта, высоких температурах и низких давлениях инжектируемого газа.

- [1] Бык, С.Ш. Газовые гидраты / С.Ш. Бык, Ю.Ф. Макогон, В.И. Фомин. - М.:Химия,1980. - 296с.
- [2] Запихахина, М.Н. Моделирование процесса разложения газовых гидратов при закачке теплого газа / Запихахина М.Н. ? В сборнике: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов в 4-х томах, 2019. - С. 133-135.
- [3] Запихахина, М.Н. Математическое моделирование разложения газогидрата при инъекции газа в пористый пласт / Запихахина М.Н., Иманов Л.В. // Инженерная физика. - 2019. - № 7. - С. 20-22.

Хаотические группы гомеоморфизмов топологических многообразий

Жукова Н.И., Тонышева Н.С.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Россия

Исследуются хаотические группы гомеоморфизмов как конечномерных, так и бесконечномерных топологических многообразий.

Мы называем группу G гомеоморфизмов топологического многообразия X хаотической, если она имеет всюду плотную незамкнутую орбиту и объединение компактных орбит всюду плотно в X . Указанные группы гомеоморфизмов обладают чувствительностью к начальным условиям, поэтому хаотические группы гомеоморфизмов можно рассматривать как аналог хаотических каскадов в смысле Дивани.

Хаотические группы гомеоморфизмов на конечномерных многообразиях исследовались авторами и Левиным в [3]. В данной работе мы применяем торальные скручивающие отображения и результаты Дивани [2],

а также развиваем метод построения хаотических групп гомеоморфизмов, предложенный в [1].

Нами доказано, что на каждой замкнутой поверхности существует счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов, изоморфных \mathbb{Z} .

Нами также построены континуальные семейства попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов на некоторых бесконечномерных топологических многообразиях.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение No 075-15-2022-1101; Н.С. Тоньшева) и гранта РНФ (№ 22-21-00304; Н.И. Жукова).

- [1] G. Cairns, G. Davis, D. Elton, A. Kolganova, and P. Perversi. *Chaotic Group Actions*, Enseignement Mathematique 41 (1995), pp. 123–133.
- [2] R.L. Devaney. *Linked Twist Mappings are Almost Anosov*, Global Theory of Dynamical Systems (1980), pp. 121–145.
- [3] N.I. Zhukova, G.S. Levin, N.S. Tonysheva. *Chaotic Topological Foliations*, Russian Mathematics, 66(8) (2022), pp. 66–70.

Моделирование ограничения водопритока в неоднородный газовый пласт с учетом неньютоновских свойств закачиваемых составов.

Ишмухаметова А. А.¹, Кабиров И. Ф.², Мухаметов Ф. Х.¹

¹ООО “РН-БашНИПИнефт”, г. Уфа, Россия,

²ФГБОУ ВО УГНТУ, г. Уфа, Россия

Для математической модели ограничения водопритока в неоднородный газовый пласт качестве основы применялась модель blackoil селективной изоляции водопритока. [1]. В этой модели, в квазистационарном приближении, описаны процессы закачки изолирующих несжимаемых составов в нефтяную скважину. Было оценено влияние свойств тампонажного состава на приток флюидов после ремонтно-изоляционных работ (РИР). Все эти достижения были использованы авторами в текущей работе.

Однако следует отметить, что представленная модель описывает закачку составов как ньютоновских жидкостей, а в качестве добываемого флюида рассматривается нефть. Поскольку при РИР часто закачиваются полимерные растворы (геланты), имеющие неньютоновские свойства,

в существующую модель были внесены следующие изменения и дополнения для учёта неньютоновских свойств:

- рассмотрена динамика набора вязкости закачиваемых составов на основе степенной модели Оствальда - де Ваала;
- разработан алгоритм расчета распределения тампонирующих составов в пропластках, насыщенных пластовой водой и газом;
- построены распределения полей давления при закачке неньютоновской жидкости в слоисто неоднородный пористый пласт через перфорационные каналы.

Существующая модель была адаптирована применительно к газовой скважине. Для этого приток флюида после РИР описан на основе модели Лейбензона фильтрации совершенного газа в пористой среде. Кроме того, был модифицирован алгоритм [1] для изоляции водопритока в газовых пропластках посредством учета изменения проницаемости коллектора. При этом оценка эффективности выполненных РИР по ограничению водопритока была произведена по изменению объема добываемого газа и водо-газового фактора.

- [1] Ломакина И.Ю. Построение математической модели процесса селективной изоляции водопритока / И. Ю. Ломакина, А. М. Ильясов, Ю. А. Поддубный, Корнилов, К.В. Стрижнев // Сборник статей аспирантов и молодых специалистов “Проблемы геологии, геофизики, бурения и добычи нефти. Экономика и управление”. - Уфа: изд-во “НПФ “Геофизика,” 2008. - Вып. 5 - С. 205-217.

Уточнённый порядок для модельной функции роста

Кабанко М.В.¹, Малютин К.Г.,² Хабибуллин Б.Н.³

^{1,2}Курский государственный университет, г.Курск, Россия

³Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Понятие уточненного порядка широко используется в теориях целых, мероморфных, субгармонических и плюрисубгармонических функций. Классический уточненный порядок — это уточненный порядок в смысле Валирона [1, Глава I, §12]. Приводится общая трактовка этого понятия как уточненной функции роста относительно модельной функции роста. Это определение использует лишь одно условие. Такая форма определения новая и для классического уточненного порядка. Доказывается, что для любой функции, определенной на положительном луче, рост которой определяется модельной функцией роста, существует собственная уточненная функция роста относительно данной модельной функции роста. Мы рассматриваем классы эталонных функций, введенных в статье

Б. Н. Хабибуллина [2]. Введенное здесь понятие модельной функции роста, охватывает большой класс функций. Функции f конечного порядка относительно модельной функции, могут иметь порядок роста в классическом его понимании равный бесконечности или нулю. Например, к модельным функциям роста относятся функции от $r > 0$ вида $\exp^{\text{on}} r$, где \exp^{on} — n -кратная суперпозиция с $n = 1, 2, \dots$ показательной функции \exp , степени логарифмической функции $\ln^p(e+r)$ при любом $p \geq 1$, и вообще любая дифференцируемая функция $M(r) > 0$ при всех $r > 0$ с возрастающей функцией $rM'(r) > 0$ при всех $r > 0$.

Определение 1. Строго положительная возрастающая неограниченная функция M на $(0, +\infty)$ при выпуклости суперпозиции $M \circ \exp$ на $(-\infty, +\infty)$ называется *модельной функцией роста*.

Определение 2. Строго положительная дифференцируемая функция V на некотором луче $R_{\rightarrow} := (a, +\infty)$ называется *уточненной функцией роста относительно модельной функции роста M* , если существует хотя бы один из равных между собой пределов $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(\ln v(x))'}{(\ln m(x))'} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(x)v'(x)}{m'(x)v(x)} \in [0, +\infty)$, где функция $m: x \mapsto M(e^x)$ по определению 1 выпуклая на действительной прямой, а $v: x \mapsto V(e^x)$ дифференцируемая на $\ln R_{\rightarrow} := \{\ln r : r \in R_{\rightarrow}\}$.

Основные результаты исследования — следующие три теоремы.

Теорема 1. Пусть M — модельная функция роста, V — строго положительная дифференцируемая функция на R_{\rightarrow} . Эквивалентны два утверждения: 1) Функция V — уточненная функция роста относительно функции M . 2) Для функции $\rho_M(r) := \ln V(r)/\ln M(r)$, называемой *уточнённым порядком для модельной функции роста*, существуют два предела $\varrho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)} \in [0, +\infty)$ и

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \ln M(r) \rho'_M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r)}{(\ln M(r))'} \rho'_M(r) = 0.$$

При выполнении любого из этих двух утверждений справедливы равенства $\varrho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}$.

Теорема 2. Пусть M — модельная функция роста, A — возрастающая строго положительная функция конечного порядка относительно M в том смысле, что $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} = \varrho \in [0, +\infty)$. Тогда существует уточнённая функция роста $V: r \mapsto (M(r))^{\varrho + \psi(r)}$ относительно модельной функции роста M , для которой

1) $\rho_M(r) = \varrho + \psi(r)$ — абсолютно непрерывная монотонная функция;

$$2) \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 1;$$

3) Если $\psi \neq 0$, то функции ψ и $\psi \ln^2 M$ — монотонные при $r \geq r_0$, $M(r_0) \geq e$, имеющие различные направления роста, и, в частности,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h} \right| \leq \frac{2|\psi(r)|M'(r)}{M(r) \ln M(r)} \quad \text{при } r \geq r_0.$$

И в этом случае $A(r) \leq V(r)$, а также существуют такие последовательности $r_n \rightarrow \infty$ и $t_{k,n}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{k,n} = r_n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A(t_{k,n}) = V(r_n)$.

Теорема 3. Пусть A — положительная функция на $[0, \infty)$, $V(r) = M^{\rho(r)}(r)$ — уточненная функция роста относительно модельной функции роста M , для которой $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r)/V(r) = 0$. Тогда существует такой уточненный порядок $\tilde{\rho}_M$ относительно модельной функции роста M , что для функции $\tilde{V}(r) = M^{\tilde{\rho}_M(r)}(r)$ имеют место равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_M(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_M(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tilde{V}(r)}{V(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{\tilde{V}(r)} = 0.$$

Исследование МКГ выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00012, <https://rscf.ru/project/22-21-00012/>). Исследование ХБН выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00026, <https://rscf.ru/project/22-21-00026/>).

- [1] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
- [2] Хабибуллин Б.Н. Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета, 5:1 (2020), 1–5.

**Моделирование ликвидации заколонной циркуляции
жидкости в газодобывающей скважине закачкой
тампонажного раствора с учетом законов Оствальда - де
Ваале и Бингама - Шведова**

Кабиров И. Ф.¹, Ишмухаметова А. А.², Мухаметов Ф. Х.²

¹ФГБОУ ВО УГНТУ, г. Уфа, Россия,

²ООО "РН-БашНИПИнефть г. Уфа, Россия

Заколонная циркуляция жидкости (ЗКЦ) — это явление, при котором пластовая вода из неперфорированного водонасыщенного пласта проникает через систему трещин в цементном кольцев перфорированный

продуктивный пласт и далее в скважину. Под ликвидацией ЗКЦ понимают изоляцию перетока по заколонному пространству. Для повышения качества изоляции зачастую используют комплексную закачку цемента и гелеобразующих составов (гелантов).

На практике этот вид ремонтно-изоляционных работ (РИР) можно осуществить двумя способами: через существующий интервал перфорации напротив продуктивного пласта и через спецотверстия, создаваемые в процессе ремонта скважины в интервале перетока или напротив водяного пласта. В первом случае состав сначала попадает в газовый пласт и далее через систему трещин в водяной, во втором случае движение происходит в обратном порядке. При решении данной задачи необходимо учитывать специфику обоих случаев.

Разработка модели РИР по ликвидации ЗКЦ разделена на следующие подзадачи:

- 1) определение фильтрационно-емкостных свойств параметров трещины в цементном кольце;
- 2) моделирование закачки тампонажных материалов с неньютоновскими свойствами. Продвижение фронта составов определяется в первую очередь градиентом давления, а набор вязкости геланта описывается степенным законом Оствальда- де Вааля, цементного раствора - функцией Бингама Шведова;
- 3) определение устойчивости составов в цементном кольце и пласте;
- 4) определение дебита газа из продуктивного пласта.

Взяв за основу модель из [1], последовательно решив эти подзадачи, получили математические модели и расчетные шаблоны в системе MathCad для обоих описанных выше случаев.

- [1] Ильясов А. М. Моделирование процесса ликвидации заколонной циркуляции жидкости / А. М. Ильясов, И. Ю. Ломакина, Корнилов, К.В. Стрижнев // Сборник статей аспирантов и молодых специалистов “Проблемы геологии, геофизики, бурения и добычи нефти. Экономика и управление”. - Уфа: изд-во “НПФ “Геофизика”, 2009. - Вып. 6 - С. 80-90.

Вычисление собственных чисел спектральных задач заданных на квантовых графах

Кадченко С.И., Рязанова Л.С.

Магнитогорский государственный технический университет,
г.Магнитогорск, Россия

Разработан численный метод вычисления собственных чисел спектральных задач заданных на конечных связанных ориентированных квантовых графах $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{V_i\}_{i=1}^{j_0}$ - множество вершин, а $\mathbf{E} = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$ - множество ребер графов. На каждом ребре \mathbf{G} заданы вектор-операторы Шредингера $\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_{j_0})$, где $H_j \psi_j(x_j) = -\psi_j'' + q_j(x_j)\psi_j(x_j)$, $x_j \in (0, l_j)$, $\psi_j, q_j \in W_2^2(0, l_j)$, $j = \overline{1, j_0}$ действующие в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2 = L_2(\mathbf{G}) = \{\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{j_0}), g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением $(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$, $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{G}$.

Каждое ребро графов \mathbf{G} имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. Для вектор-операторов \mathbf{H} в вершинах \mathbf{V} заданы граничные условия означающие, что поток через каждую вершины V_j равен нулю, а их собственные вектор-функции $\Psi_n = (\psi_{1_n}, \psi_{2_n}, \dots, \psi_{j_0_n})$ в каждой вершине непрерывны.

В основу методики нахождения приближенных собственных чисел $\tilde{\mu}_n$ положены формулы для вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов заданных на компактных множествах. В нашем случае они имеют вид:

$$\tilde{\mu}_n = \lambda_n + \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} q_j(x_j) \varphi_{j_n}^2(x_j) dx_j + \tilde{\delta}_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_n = 0, \forall n \in N.$$

Числа λ_n и вектор-функции $\Phi_n = (\varphi_{1_n}, \varphi_{2_n}, \dots, \varphi_{j_0_n})$ являются собственными числами и собственными вектор-функциями операторов \mathbf{H} при $q_j(x_j) \equiv 0$ для любых $j = \overline{1, j_0}$. Системы функций $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортонормированные базисы в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. В математической среде Maple написан и зарегистрирован пакет программ позволяющий находить эти спектральные характеристики и характеристические уравнения матриц операторов \mathbf{H} для любых конечных связанных графах. Используя выше записанные формулы, вычисляются собственные значения операторов \mathbf{H} с необходимым номером. Написан пакет программ для вычисления собственных значений операторов \mathbf{H} заданных на любых конечных связанных ориентированных квантовых графах используя матрицы инцидентности графов \mathbf{G} и значения потенциалов $q_j(x_j)$ заданных на их ребрах.

**Возмущение простой волны:
численный эксперимент и аналитика**

Калякин Л.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается задача о возмущении простой волны на примере уравнения динамики доменной стенки:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega^2 \sin \phi \cos \phi + \omega^2 \sin \phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Коэффициенты $c(\tau)$, $\Omega(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\omega(\tau)$ предполагаются положительными функциями, гладко зависящими от медленной переменной $\tau = \varepsilon t$. Асимптотика по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ строится на большом промежутке времени $0 < t < \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, когда деформация уравнения становится существенной. Анзатц для асимптотического решения [1]:

$$\phi_{as}(x, t; \varepsilon) = \Phi(s; \tau) + \varepsilon \Phi_1(s; \tau) + \varepsilon^2 \Phi_2(s; \tau) + \dots \quad (2)$$

с одной быстрой переменной

$$s = x - \varepsilon^{-1} S(\tau) - \sigma(\tau) - \varepsilon \sigma_1(\tau) - \dots, \quad (\tau = \varepsilon t).$$

Функции $S(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ подлежат определению наряду с $\Phi(s; \tau)$. Подстановка анзатца (2) в исходное уравнение (1) приводит к одному уравнению на две функции: $\Phi(s, \tau)$ и $V_0(\tau) = S'(\tau)$.

$$[V_0^2 - c^2] \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \Omega^2 \sin \phi \cos \Phi + \omega^2 \sin \Phi - \alpha V_0 \frac{d\Phi}{ds} = 0. \quad (3)$$

Краевое условие соответствует невозмущенной простой волне

$$\Phi(s; \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s; \tau) \rightarrow \pi \quad \text{при } s \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

На основе численных экспериментов найден способ построения асимптотического решения. Главным достижением является алгебраическое уравнение для скорости $V_0(\tau)$.

[1] В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов, *Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса*, М.:Наука. 1987. 352 с.

О разделимости общего дифференциального волнового уравнения в гильбертовом пространстве

Каримов О.Х.

Институт математики им.А Джураева НАНТ, г.Душанбе, Таджикистан

Термин “разделимость” впервые ввели в научную литературу английский математик В.Н.Эверитт и шведский математик М.Гирц. Огромный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см. [1]- [4] и имеющиеся там ссылки).

Введем пространство $L_2(R^{n+1})$ с конечной нормой

$$\|u; L_2(R^{n+1})\| = \left\{ \int_0^\infty \int_{R^n} |u(x, t)|^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $x \in R^n$, $t \in R_+$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(R^{n+1})$ дифференциальный оператор вида

$$L[u] = - \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} u(x, t) + V(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $t \in R_+$, $k = \frac{i}{c}$, c -скорость волны, $i = \sqrt{-1}$.

Найдены условия на функцию $V(x, t)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в гильбертовом пространстве $L_2(R^{n+1})$, и для всех решений $u(x, t) \in L_2(R^{n+1}) \cap W_{2,loc}^2(R^{n+1})$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x, t) \in L_2(R^{n+1})$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|Vu\| + \sum_{j=1}^n \left\| V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| + \left\| V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\| \leq M \|f(x, t)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x, t)$, $f(x, t)$.

- [1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
- [2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n .-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
- [3] S.Omran, Khaled A. Gepreel, Emad T.,A.Nofal. Separation of The General Differential Wave Equation in Hilbert Space.-International Journal of Nonlinear Science. 2011, Vol.11, No3, pp.358-365.

- [4] Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве - Чебышевский сборник, 2021, т.22, №1(77), с.163-176.

Устойчивость поля директора смектика к изменению шага спирали в электрическом поле

¹Кондратьев Д.В., ²Мигранов Н.Г.

¹Академия наук РБ, ²Башкирский государственный медицинский университет, г.Уфа, Россия

Важным направлением в исследовании смектических жидких кристаллов (ЖК) являются вопросы структурообразования в ЖК, которым посвящена статья [1]. В продолжение этой проблематики в предлагаемой работе рассмотрен смектический жидкий кристалл типа С*, в котором нормаль к смектическому слою направлена вдоль оси z , азимутальный угол ϕ между s -директором и осью x для каждого слоя в ЖК постоянен, а полярный угол θ считается одинаковым для всех слоев.

Для случая, когда электрическое поле направлено вдоль оси y , с учетом энергии взаимодействия между спонтанной поляризацией P_s хирального смектика с электрическим полем E , плотность упругой энергии Франка можно рассматривать в виде: $f/K = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} - q_0\right)^2 - \frac{P_s E}{K} \cos\phi$, где K – коэффициент упругости Франка, q_0 имеет вид, приведенный в работе [3].

Ранее в [2] проводилось исследование устойчивости поля директора в образце смектика С* с использованием теории катастроф. Здесь используется континуальный подход для расчета зависимости энергии от приложенного внешнего электрического поля и от количества слоев в образце смектического жидкого кристалла, при этом проведен анализ влияния значения спонтанной поляризации P_s на эти зависимости.

- [1] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Периодические искажения слоев смектического жидкого кристалла в магнитном и электрическом полях // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 19 (2019), №1, с. 79-86. DOI: 10.18083/LCAppl.2019.1.79
- [2] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г., Мигранова Д.Н. Приложение теории катастроф к описанию неустойчивостей в сегнетоэлектрических жидких кристаллах в магнитном поле // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 20 (2020), № 3, с. 34-40. DOI: 10.18083/LCAppl.2020.3.34

- [3] Sadahito Uto. A helix unwinding process in ferroelectric liquid crystals with fixed boundaries // Journal of Applied Physics 97, 014107 (2005); doi: 10.1063/1.1829145.

Квазиклассические асимптотики спектральной функции магнитного оператора Шредингера

Кордюков Ю.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В данной работе мы изучаем асимптотические спектральные свойства оператора Шредингера в равномерно ограниченном магнитном поле в евклидовом пространстве в квазиклассическом пределе. Дано грубое асимптотическое описание спектра такого оператора. Доказано полное внедиагональное асимптотическое разложение для его сглаженной спектральной функции. В качестве следствий доказаны квазиклассическая формула следа и свойство асимптотической локализации спектральной функции оператора в случае, когда магнитное поле имеет максимальный ранг.

Пенлеве анализ одного уравнения магнитодинамики

Кордюкова С.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Выполнен тест Пенлеве для ряда нелинейных уравнений, допускающих решения в виде простой волны со стабилизацией на бесконечности. Одним из примеров является уравнение магнитодинамики, выведенное в [1]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega^2 \sin \phi \cos \phi + \omega^2 \sin \phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Уравнение имеет тривиальные решения – равновесия $\phi \equiv 0$, $\phi \equiv \pi$. Рассматриваются решения со стабилизацией на бесконечности

$$\phi(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad \phi(x, t) \rightarrow \pi \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

В случае постоянных коэффициентов можно выделить такие решения в виде простой волны $\phi = \Phi_0(x - vt)$. Ее отыскание сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[v^2 - c^2] \frac{d^2 \Phi_0}{ds^2} + \Omega^2 \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 + \omega^2 \sin \Phi_0 - \alpha v \frac{d\Phi_0}{ds} = 0, \quad s = x - vt. \quad (3)$$

Уравнение (3) обладает спецификой, которая была обнаружена Звездиным, [1]. Волна со скоростью, удовлетворяющей

$$\alpha \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Omega = \omega^2. \quad (4)$$

выписывается через элементарные функции

$$\Phi_0(s) = 2 \arctan \exp(s \lambda), \quad \lambda = \Omega / \sqrt{c^2 - v^2}, \quad s = x - vt. \quad (5)$$

Простые волны с другими скоростями при краевых условиях (2) существуют, если $\omega^2 > \Omega^2$. Но для них выражений для элементарные функции не известно. Оказывается, тест Пенлеве для уравнения, связанного заменой с (3), выполняется только при параметрах, удовлетворяющих (4).

Подобная закономерность установлена и для других известных уравнений: КПП, Фишера, Зельдовича [2].

- [1] А. К. Zvezdin, *Dynamics of domain walls in weak ferromagnets* // Письма в ЖЭТФ. Т.29, вып.10 (1979), с.605–610.
 [2] В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов, *Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса*, М.: Наука. 1987. 352 с.

**О достаточных условиях неполноты системы
экспоненциальных мономов с почти вещественными
показателями**

Кужаев А. Ф.

УУНиТ, УГНТУ, г. Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k . Считаем, что $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Следуя работе [1], будем говорить, что последовательность Λ является *почти вещественной*, если $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ ($k \geq 1$), $\operatorname{Im} \lambda_k / \operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Символом $n(r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей, попавших в замкнутый круг с центром в нуле, радиуса r , и пусть $\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} n(r, \Lambda) / r$ — верхняя плотность последовательности Λ . Пусть далее $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda, \rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси \mathbb{R} таких, что $\omega(0) = 0, \omega(t) \leq \rho|t|, t \leq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, функция $\omega(2\sigma_{\Lambda}(t))/t^2$ является интегрируемой на луче $[1; +\infty)$.

Рассматривается также весовое пространство комплекснозначных абсолютно интегрируемых со степенью p функций на вещественной прямой

$$L_p^\omega = \left\{ f : \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\omega(t)}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, p \geq 1 \right\}.$$

Символом $W^p(\Lambda, \omega)$ обозначим замыкание линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1}$ в пространстве L_p^ω .

Теорема. Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и имеет конечную верхнюю плотность $\bar{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda, \rho}$. Предположим, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ (здесь $\omega(t) = \omega_0(t)$ при $t \leq 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$ при $t > 0$) продолжается до целой функции F , для которой имеет место представление

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} c_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_{k,n} \in \mathbb{C},$$

где ряд сходится равномерно на компактах в плоскости. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве L_p^ω .

- [1] Кривошеева О. А., Кривошеев А. С. *Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром* // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29 (4), С. 82–139.

Бифуркация Андронова-Хопфа в гамильтоновых системах с возмущениями

Кунги́ров М.Н.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассматривается зависящая от малого параметра α нелинейная система

$$x' = JA_0x + \alpha(A_1x + a_p(x)), \quad x \in R^2, \quad (1)$$

в которой $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, A_0 – симметричная матрица, $a_p(x)$ – однородная (порядка p) нелинейность. При $\alpha = 0$ система (1) является гамильтоновой.

Пусть матрица JA_0 имеет собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$. Тогда значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (1). Изучается задача о свойствах такой бифуркации.

Специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что бифуркация может оказаться нелокальной: периодические решения могут возникать не только в малой окрестности нулевой точки равновесия $x = 0$, но и за ее пределами, в том числе в окрестности бесконечности.

В докладе основное внимание уделяется случаям $p = 2$ и $p = 3$. Предлагаются подходы, позволяющие провести качественный и численный анализ бифуркаций в таких системах. Используются асимптотические формулы, полученные в [1].

- [1] Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Имангулова Э.С. Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа и их приложения // Дифференциальные уравнения. **53**:12 (2017), 1627-1643.

Полнота экспоненциальных систем в терминах площади

Кудашева Е.Г., Хабибуллин Б.Н.

БГПУ, ИМВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Система векторов *полна* в топологическом векторном пространстве, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с пространством. Локально конечному распределению попарно различных точек $Z := (z_j)_{j=1,2,\dots}$ на комплексной плоскости \mathbb{C} сопоставляем *экспоненциальную систему* $\text{Exp}^Z := \left\{ z \mapsto e^{z_j z} \mid j = 1, 2, \dots \right\}$. Следующая наш новый результат дополняет шкалы условий полноты экспоненциальных систем из [1, теорема 4.1], [2, теорема А], [3, теорема 3.3.5].

Теорема. Пусть $\text{area}(\text{conv } D) > 0$ — евклидова площадь выпуклой оболочки $\text{conv } D$ ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ с опорной 2π -периодической функцией $s_D: \theta \mapsto \sup_{z \in D} \text{Re } z e^{-i\theta}$, а функция $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

такова, что функция $x \mapsto \sqrt{x} f(\sqrt{x})$ выпукла, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, а

также $\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$. Если

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_1^r f(x) dx} \sum_{1 \leq |z_j| \leq r} f(|z_j|) s_D(\arg \bar{z}_j) \geq \frac{1}{\pi} \text{area}(\text{conv } D),$$

то экспоненциальная система Exp^Z полна в векторном пространстве над полем \mathbb{C} голоморфных функций на D с топологией равномерной сходимости на компактах из D .

Этот результат в терминах площади распространяется и на более жёсткие банаховы пространства непрерывных функций на компакте, одновременно голоморфных в его внутренности, с \sup -нормой по компакту. Имеют место и многомерные версии для областей в \mathbb{C}^n в случае, когда $Z \subset \mathbb{C}^n$ — главное аналитическое множество коразмерности 1.

- [1] Хабибуллин Б. Н. Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка // Матем. сб., **182**:6 (1991), 811–827.
- [2] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Матем. заметки, **66**:4 (1999), 603–616.
- [3] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. Монография-обзор, издание четвёртое дополненное. Уфа: Редакционно-издательский центр Башкирского государственного университета, 2012, xvi+176 с., ISBN: 978-5-7477-2992-6.

Аномальная электропроводность тонких пленок органических диэлектриков

**Лачинов А.Н.^{1,2}, Арутюнов К.Ю.³, Карамов Д.Д.¹,
Лачинов А.А.¹, Галиев А.Ф.¹**

¹ ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия ²БГПУ им. М.Акмиллы, г.Уфа, Россия ³НИУ «Высшая школа экономики», г.Москва, Россия

В докладе обсуждаются особенности переноса заряда в тонких субмикронных пленках органических диэлектриках. Известно, что при достижении определенной критической толщины в диэлектрической пленке может быть реализована аномально высокая металлоподобная электропроводность. Критическая толщина коррелирует с глубиной проникновения поля поверхностного заряда. Недавно было установлено, что возникающая электропроводность сопоставима с проводимостью металлов, а температурная зависимость имеет металлический вид вплоть до 5 К. При этом проводимость имеет признаки одномерной проводимости, так как возникает не во всем объеме органической пленки, а в отдельных ее областях, которые имеют наноскопические размеры от 100 до нескольких нанометров. Перенос носителей заряда по квазиодномерным областям происходит практически без рассеяния энергии электронов. Неоднократно отмечалось то, что аномальная проводимость пленки ограничивается по величине проводимостью металлического электрода. Недавно были реализованы эксперименты с двумя видами сверхпроводящих (СП) металлов в качестве электродов (Pb, Nb). Было установлено, что в структуре СП/органический диэлектрик/СП при достижении

СП температуры сверхпроводящего перехода наблюдается падение сопротивления до аппаратного нуля. Этот эффект наблюдается при том условии, что исходно органическая пленка находится в металлическом состоянии. Этот эффект подобен эффекту близости в нормальных металлах. Отличие заключается в том, что толщина диэлектрических пленок значительно превышает длину когерентности куперовской пары СП металла.

Анализ влияния коллекторских характеристик пласта на собственные колебания столба жидкости в скважине

Мамаева З. З., Рафикова Г. Р.

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

На сегодняшний день в нефтегазовой индустрии существует проблема повышения уровня трудноизвлекаемых запасов нефти, которые влекут за собой целый ряд задач, основанных, прежде всего, на диагностике состояния пластов и повышении продуктивности скважин. Одним из методов, направленных на рост дебита скважины, является гидравлический разрыв пласта, в связи с чем, возникает интерес к оценке эффективности, геометрии и коллекторских характеристик полученных трещин. К настоящему времени существует обширный спектр методов, позволяющих провести оценку трещин ГРП, одним из них является метод акустической спектроскопии скважин, который предполагает возбуждение собственных колебаний столба жидкости в скважине и определение коллекторских характеристик призабойной зоны пласта, параметров трещины ГРП на основе анализа полученных волновых характеристик колебаний [1, 2].

В настоящей работе построена теоретическая модель собственных колебаний столба жидкости в скважине, возникших вследствие гидроудара. Изучено влияние коллекторских характеристик пласта, наличия трещины на частоту и коэффициент затухания собственных колебаний, распределение полей давления в скважине. Показано, что в случае низкопроницаемых пластов (порядка миллиардари и меньше), после проведения ГРП может происходить двукратное снижение собственных частот колебаний. Представлены некоторые рекомендации по определению геометрических параметров трещин на основе сопоставительного анализа результатов расчета с промысловыми данными [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

[1] Горное дело: Терминологический словарь / ред. К. Н. Трубецкой, Д. Р. Каплунова. – 5-е изд., перераб. и доп. М: Горная книга. 2016.

- [2] Шагапов В.Ш., Башмаков Р. А., Рафикова Г. Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 4 (362). С. 5-14.
- [3] Байков В. А., Булгакова Г. Т., Ильясов А. М., Кашапов Д. В. К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта. Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2018. № 5, С. 64–75

Исследования молекул пентахлорфенола методом циклической вольт-амперметрии

Маркова А.В.¹, Таюпов М.М.¹, Сафронов А.М.¹,
Рыбальченко А.В.²

¹Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

²МГУ им. М.В. Ломоносова

Измерения проводили в условиях инертной атмосферы аргона в перчаточном боксе MBRAUN Labstar. Регистрацию кривых циклической вольт-амперметрии регистрировали со скоростью развертки потенциала $100 \text{ мВ} \cdot \text{с}^{-1}$ при помощи потенциостата Элинс Пи-50-Про-3 (Electrochemical Instruments, Россия) при температуре окружающей среды 20°C ($T = 293\text{K}$) в самодельной односекционной ячейке с дисковым платиновым электродом, платиновым спиральным противэлектродом и электродом сравнения представляющим из себя серебряную проволоку, погруженную в раствор 0.01M AgNO_3 и $0.1\text{M Bu}_4\text{NBF}_4$ в ацетонитриле,

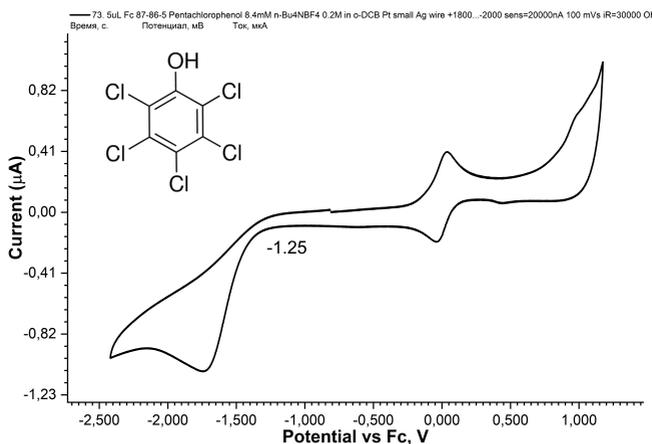


Рис. 1: График ЦВА для пентахлорфенола

вым электродом, платиновым спиральным противэлектродом и электродом сравнения представляющим из себя серебряную проволоку, погруженную в раствор 0.01M AgNO_3 и $0.1\text{M Bu}_4\text{NBF}_4$ в ацетонитриле,

отделённая от основного отсека мембраной Coralpro в пропиленкарбонате с использованием 0.10M Bu_4NBF_4 в качестве фонового электролита. Орто-дихлорбензол и пропиленкарбонат очищали фракционной перегонкой при пониженном давлении в присутствии CaH_2 с последующей пропусканьем через колонку с SiO_2 . После эксперимента в ячейку добавляли ферроцен в качестве внутреннего стандарта. Потенциал редокс пары $Fc^{+/0}$ в пропиленкарбонате составил $-0,015$ В относительно пары $Ag/AgNO_3$.

Об использовании операции свертки электрических свойств породы для прогноза характера насыщенности пластов

Мартынова Ю.В.

ООО «РН-БашНИПинефть», г.Уфа, Россия

По комплексу геофизических исследований скважин производится детальная разбивка литологии пласта, а по результатам лабораторных исследований керна строится капиллярная модель насыщения с помощью J-функции Леверетта, для которой варьируемым параметром будет уровень зеркала свободной воды h_{ZSV} :

$$J = \frac{P_c r_p}{\sigma \cos \theta} = \frac{(\rho_w - \rho_o)g(h_{ZSV} - h)r_p}{\sigma \cos \theta}.$$

Расчет коэффициентов водонасыщенности S_w по разрезу пласта производится с помощью полученного значения J-функции:

$$S_w = S_w^* + (1 - S_w^*) \left(\frac{J}{c} + 1 \right)^{1/d}.$$

Далее строится электрическая модель насыщения согласно формуле Арчи-Дахнова, по которой определяют значения удельного электрического сопротивления пласта R_r :

$$R_r = \frac{aR_w}{S_w^n \phi^m}.$$

Затем, используя процедуру конволюции УЭС по разрезу пласта $R_r(h)$ с вертикальной характеристикой прибора индукционного каротажа $f(x)$, строится модельная кривую индукционного каротажа $R_m(h)$:

$$R_m(h) = \int_{\mathbb{R}} R_r(x) f(h-x) dx = (R_r * f)(h).$$

Посредством подбора параметров капиллярной модели насыщения минимизируется расхождение кривой индукционного каротажа $R_{IK}(h)$, зарегистрированного в скважине, и кривой $R_m(h)$, полученной в результате моделирования:

$$\frac{\sum_{h \in H} |R_m(h) - R_{IK}(h)|}{\sum_{h \in H} R_{IK}(h)} \xrightarrow{h_{ZSV}} \min.$$

- [1] Колонских А.В., Жонин А.В., Михайлов С.П., Федоров А.И., Муртазин Р.Р. Способ определения насыщенности низкопроницаемых пластов: патент РФ 2675187, МПК G01 V 3/38 (2006.01), G01 V 11/00 (2006.01). – 2018. – Бюл. № 35.

Финитные движения пробных частиц в осциллирующих сгустках темной материи

Маслов Е.М., Кутвицкий В.А.

ИЗМИРАН, г. Москва, Россия

Методами теории возмущений мы исследуем уравнения геодезических, описывающие финитные движения пробных частиц в периодическом по времени гравитационном поле, создаваемом сферически-симметричным распределением осциллирующей темной материи. Соответствующая метрика имеет вид

$$ds^2 = B(t, r) dt^2 - A(t, r) dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

где $A = 1 - 2\psi$, $B = 1 + 2\chi$, а $\psi(t, r)$ и $\chi(t, r)$ – малые периодические по времени функции. Рассмотрены радиальные и орбитальные траектории пробных частиц. Показано, что в случае малых радиальных колебаний $r(t)$ уравнение движения пробной частицы сводится к уравнению Хилла

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left[\ddot{\psi}(t, 0) + \frac{\ddot{\chi}(t, 0)}{2} + \chi''(t, 0) \right] u = 0,$$

где $(\cdot) = \partial/\partial t$, $(\prime) = \partial/\partial r$, а $r(t) = u(t) \exp(\psi(t, 0) + \chi(t, 0)/2)$. В случае орбитальных движений мы полагаем

$$r(t) = r_0(1 + \eta(t)),$$

где $|\eta(t)| \ll 1$, а r_0 определяется из уравнения $r_0 \bar{\chi}'(r_0) = \gamma(r_0)$, где $\bar{\chi}$ есть среднее по периоду, $\gamma(r) = J^2/(r^2 + J^2)$, J – угловой момент. Уравнение для функции $\eta(t)$ приводится к неоднородному уравнению Хилла

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left[\frac{3\gamma(r_0)}{r_0^2} + \ddot{\psi}(t, r_0) + \frac{\ddot{\chi}(t, r_0)}{2} + \chi''(t, r_0) \right] u = -\frac{\tilde{\chi}'(t, r_0)}{r_0},$$

где $\tilde{\chi} = \chi - \bar{\chi}$, а $\eta(t) = u(t) \exp(\psi(t, r_0) + \chi(t, r_0)/2)$.

Рассмотрен пример сферически-симметричного осциллирующего сгустка скалярной темной материи с логарифмическим потенциалом самодействия. В этом случае соответствующие уравнения Хилла оказываются сингулярными. Исследована структура резонансных зон в различных пространствах параметров системы (диаграммы типа Айнса-Стратта) и вычислены показатели Флоке.

Обобщенное понятие сопряженного дифференциального уравнения

Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.

Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$L[y] \equiv \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0, \tag{1}$$

где $a_k = a_k(x) \in C(a, b)$. Уравнение

$$M[z] \equiv \sum_{k=0}^n (a_k z)^{(k)} = 0$$

называется сопряженным к уравнению (1) [1, 2]. С целью обобщения сопряженным к уравнению (1) в обычном смысле будем называть уравнение

$$(-1)^n M[z] = 0.$$

Оператор $L^* = ALA^{-1}$ называется сопряженным к оператору L относительно оператора A в широком смысле.

При $n = 1$ и $n = 2$ найден оператор A такой, что $(-1)^n M = L^*$. Оператор A представляет собой умножение на функцию $\mu = \frac{1}{a_n} e^{2 \int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}$. То есть A совпадает с множителем, при умножении на который уравнение (1) становится самосопряженным в обычном смысле.

- [1] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: URSS. 2016.
 [2] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (5-е изд.). СПб: Лань, 2003

Группы преобразований эквивалентности для нелинейного уравнения типа Блэка — Шоулса

Мелехина Д.В., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Рассматривается нелинейное уравнение типа Блэка — Шоулса

$$u_t + x\beta(t, xu_{xx}) + r(xu_x - u) = 0, \quad (1)$$

где $\beta(t, xu_{xx})$ — достаточно гладкая функция, зависящая от времени и второй производной по основному активу. Данное уравнение описывает ценообразование опционов на неликвидном рынке [1]. В работе [2] рассматривается случай, когда функция β зависит только от второй производной по основному активу, т. е. $\beta = \beta(xu_{xx})$.

Инфинитезимальные операторы групп преобразований эквивалентности уравнения (1) ищутся в виде $Y = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \alpha\partial_\beta$, где τ, ξ, η зависят от t, x, u , а α зависит от $t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \beta$.

Теорема. Группа преобразований эквивалентности уравнения (1) порождается операторами

$$Y_1 = e^{rt}\partial_u, \quad Y_2 = x\partial_x + u\partial_u, \quad Y_3 = u\partial_u + \beta\partial_\beta, \quad Y_4 = x \ln|x|\partial_u - r\partial_\beta,$$

$$Y_B = B(t)x\partial_u - B'(t)\partial_\beta, \quad Y_\tau = \tau(t)\partial_t + r\tau(t)x\partial_x + r\tau(t)u\partial_u - \tau'(t)\beta\partial_\beta.$$

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

- [1] M. Jandačka, D. Ševčovič. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, 2005, vol. 2005, no. 3, 235–258.
 [2] V.E. Fedorov, M.M. Dyshaeв. Group classification for a class of nonlinear models of the RAPM type. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 92, 105471.

О субгармонических функциях в пространствах Соболева

Мурясов Р.Р.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ №22-21-00026.

Рассмотрим интервал (a, b) и линейный дифференциальный оператор второго порядка L , такой, что $Lf = f'' + pf + q$, где p и q непрерывные в интервале (a, b) функции. Функция f называется L -выпуклой в интервале (a, b) , если для каждого интервала единственности $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ и для любых $x, x_1, x_2 \in (a_1, b_1)$: $x_1 \leq x \leq x_2$, выполняется неравенство

$$f(x) \leq u(x, x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)),$$

где $u(x, x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ — это решение краевой задачи

$$Lu = 0, u(x_1) = f(x_1), u(x_2) = f(x_2)$$

В [1] исследованы свойства L -выпуклых функций.

$W_1^2(a, b)$ — пространство Соболева функций, интегрируемых по Лебегу в интервале (a, b) вместе со своими обобщёнными производными первого и второго порядка.

Теорема 1. Пусть на плоскости задана функция u , в полярных координатах имеющая вид $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$, где $f > 0$ в (r_1, r_2) и принадлежит пространству $W_1^2(r_1, r_2)$, $g > 0$ в (θ_1, θ_2) и принадлежит пространству $W_1^2(\theta_1, \theta_2)$. Если существует вещественное число c , для которого f — L_1 -выпуклая в (r_1, r_2) , g — L_2 -выпуклая в (θ_1, θ_2) , где $L_1 = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - c$, $L_2 = \frac{d^2}{d\theta^2} + c$, то u — субгармоническая функция в кольцевом секторе, которому в координатах (r, θ) соответствует прямоугольник $(r_1, r_2) \times (\theta_1, \theta_2)$.

Теорема 2. Пусть на плоскости задана функция u , в полярных координатах имеющая вид $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$, где $f > 0$ в (r_1, r_2) , принадлежит пространству $W_1^2(r_1, r_2)$ и имеет в (r_1, r_2) абсолютно непрерывную производную f' , $g > 0$ в (θ_1, θ_2) , принадлежит пространству $W_1^2(\theta_1, \theta_2)$ и имеет в (θ_1, θ_2) абсолютно непрерывную производную g' . Если u — субгармоническая функция в кольцевом секторе, которому в координатах (r, θ) соответствует прямоугольник $(r_1, r_2) \times (\theta_1, \theta_2)$, то существует вещественное число c , для которого f — L_1 -выпуклая в (r_1, r_2) , g — L_2 -выпуклая в (θ_1, θ_2) , где $L_1 = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - c$, $L_2 = \frac{d^2}{d\theta^2} + c$.

- [1] А.И.Хейфиц, Аналитические свойства функций, выпуклых относительно решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференц.уравнения, 1981, том 17, номер 6, 1025–1034

Изучение восходящего двухфазного течения в газовой скважине применительно к проблеме накопления жидкости на забое

Мусакаев Н.Г.^{1,2}, Бородин С.Л.^{1,2}, Огай В.А.¹, Юшков А.Ю.¹

¹Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, Россия

²Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень, Россия

На сегодняшний день для стабильной эксплуатации «самозадавливающих» скважин нередко используют технологию ввода в скважину пенообразующих поверхностно-активных веществ (ПАВ), которая отличается относительно низким уровнем капитальных вложений и высоким уровнем эффективности. Для эффективного применения технологии ввода в скважину пенообразующих поверхностно-активных веществ необходимо экспериментальное и теоретическое изучение особенностей течения газожидкостных смесей с ПАВ.

В работе экспериментальное исследование вспененных газожидкостных потоков проведено на разработанной авторами установке. Изучение стационарного восходящего двухфазного течения проводилось при различных значениях давления на входе в установку (до 1 МПа), разных объёмных расходах газа и воды и при различной концентрации ПАВ (использовался ОП-10). Теоретическое исследование особенностей восходящего двухфазного потока в вертикальной скважине и анализ влияния различных факторов (объёмный расход флюида, давление на забое и т.д.) на значения параметров такого потока осуществлялся на основе математической модели, в одномерном приближении описывающей восходящее установившееся двухфазное течение в вертикальном канале. При теоретическом изучении использовались эмпирические зависимости, построенные с учетом проведенных экспериментов с водой, газом и ПАВ.

По итогам исследований сделан вывод о том, что увеличение давления на входе в установку (на забое скважины) приводит к более выраженному проявлению свойств пенного потока при одинаковых значениях концентрации пенообразователя, расхода жидкости и газа. Подбор оптимальных объёмов (концентраций пенообразователя), при которых наблюдается достижение минимума перепада давления, может привести к снижению забойного давления, увеличению притока газа из пласта (увеличению дебита скважины). В то время как закачка избыточных объёмов реагента ведёт к лишним эксплуатационным затратам и снижению объёма добываемого газа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Тюменской области в рамках научного проекта № 20-41-720002.

Преобразования Фурье быстро убывающих функций в \mathbb{R}^n

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – семейство раздельно радиальных выпуклых функций $h_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с $h_\nu(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty; 2) \forall M > 0 \exists A_{\nu, M} > 0:$$

$$h_\nu(x) \leq \sum_{1 \leq j \leq n: x_j \neq 0} x_j \ln \frac{x_j}{M} + A_{\nu, M}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n;$$

3) существует число $d_\nu > 0$ такое, что

$$h_{\nu+1}(x) - h_\nu(x) \geq 2 \sum_{j=1}^n \ln(1 + x_j) - d_\nu, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n;$$

4) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $l_\nu > 0$ такое, что

$$h_\nu(x + y) \leq h_{\nu+1}(x) + h_{\nu+1}(y) + l_\nu, \quad x, y \in [0, \infty)^n.$$

Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$G_m(h_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m, h_\nu} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \leq m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} < \infty\}.$$

Положим $G(\mathcal{H}) = \bigcap_{\nu=1}^\infty \bigcap_{m=0}^\infty G_m(h_\nu)$.

Для $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ введём пространство

$$\mathcal{E}_m(h_\nu) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m, \nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}} < \infty\}.$$

Положим $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \bigcap_{\nu=1}^\infty \bigcap_{m=0}^\infty \mathcal{E}_m(h_\nu)$. Наделим $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ счётно-нормированной топологией, определяемой семейством норм $\rho_{m, \nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}$).

Определим преобразование Фурье функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : f \in G(\mathcal{H}) \rightarrow \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $G(\mathcal{H})$ и $\mathcal{E}(\mathcal{H})$.

Воздействие ударных волн на рыхлую насыпную среду

Мухаметзянов А.Ф.

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», ул. Космонавтов,1, 450050, г. Уфа, Россия

В процессе изучения распространения ударных волн в газоводонасыщенных насыпных средах на установке типа «ударная труба» выявлено изменение эпюр давления в зависимости от пористости насыпки. Ударная труба состоит из трех секций: камера высокого давления (КВД), камера низкого давления (КНД) и секции насыпных сред (СНС). Нагнетание воздуха в КВД приводит к разрыву диафрагмы из промасленной бумаги, разделяющей КВД и КНД. После разрыва диафрагмы в трубе формируется ударная волна. Исследуемая среда размещается в СНС и представляет собой водогазонасыщенную насыпку из песчинок, размеры которых находятся в диапазоне от 160 до 650 μm , среднеарифметический размер 390 μm [1].

Анализ показывает, что на первом датчике после прохождения слоя 2 см свеженасыпанного песка верхняя часть импульса сглаживается, задний фронт растягивается, на датчике под слоем 12 см сглаживание сильнее, как и растяжение заднего фронта. На нижнем датчике (слой 22 см) передний фронт растягивается еще сильнее, верхняя часть импульса еще более сглажена.

Переотраженный – зондирующий импульс проходит через 10 мс после возмущения насыпной среды ударным импульсом. В случае первичного нагружения свеженасыпанного без утряски песка, форма зондирующего импульса схожа с формой падающего. При повторном нагружении данной насыпки наблюдается изменение в форме регистрируемых эпюр – кардинально изменяется ее форма, растягивается передний фронт и формируется пик на заднем фронте. Амплитуда пика несколько превышает амплитуду удвоенной зондирующей волны. Зондирующие импульсы становятся несколько шире по сравнению с первоначальным импульсом, но в песке они растягиваются существенно больше, при этом пик смещается к концу импульса и становится более отчетливым.

- [1] Ахметов А.Т., Гималтдинов И.К., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф., Богданов Д.Р. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48. № 1. С. 23-26.

Комплексный анализ влияния электромагнитной обработки на некоторые свойства тайлаковской нефти

**Мухарямова Г.И., Зиннатуллин Р.Р. Киреев В.Н.,
Ковалева Л.А.**

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Добыча, переработка и трубопроводный транспорт некоторых сортов нефти осложняется высокой вязкостью проявлением аномальных реологических свойств, обусловленных повышенным содержанием асфальтенов, смол и парафинов в их составе, тенденциями к образованию асфальтено-парафиновых отложений и образования стойких водонефтяных эмульсий. С целью решения перечисленных проблем и упрощения процессов применяются различные методы воздействия на нефть, в числе которых электромагнитное воздействие.

В рамках данной работы выполнено комплексное исследование влияния электромагнитной обработки на свойства Тайлаковской нефти. Выполнена оценка динамики образования асфальто-смоло-парафиновых отложений (АСПО) на внутренних стенках нефтепроводов перекачивающих Тайлаковскую нефть и фиксация изменений структуры нефти под влиянием высокочастотной (ВЧ) и сверхвысокочастотного (СВЧ) электромагнитного (ЭМ) воздействий. Исследовано влияние ЭМ обработки на интенсификацию процессов деэмульсации нефти.

Обработка нефти производилась ВЧ и СВЧ электромагнитными генераторами с рабочими частотами 13,56 МГц и 2,4 ГГц соответственно в специализированной лаборатории кафедры физики ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий». В результате обработки выявлено уменьшение значений коэффициентов динамической вязкости нефти в температурном интервале 0 – 30°С. Также в рамках работы были выполнены снимки структурных изменений данной нефти до и после ВЧ и СВЧ ЭМ обработок, на лабораторных стеклах с помощью оптического микроскопа Olimpus IX 71 при температуре 10°С. С целью выяснения влияния электромагнитной обработки на процессы образования АСПО на внутренних стенках оборудования и нефтепроводов для перекачки данной нефти, был выполнен эксперимент связанный моделированием транспорта исследованной нефти. В результате было выявлено, что ЭМ обработка Тайлаковской нефти способствует уменьшению образования АСПО.

Таким образом, ВЧ и СВЧ ЭМ обработка Тайлаковской нефти, является не только эффективным способом снижения коэффициента ее динамической вязкости нефти, но и превентивным методом борьбы с отложениями АСПО за счет изменений происходящих с нефтью на микроуровне. Кроме того, проведенные в работе экспериментальные исследе-

дования показали, что СВЧ и ВЧ ЭМ обработки проводят к интенсификации процессов деэмульсации Тайлаковской нефти.

Рассмотренная в работе и экспериментально проанализированная электромагнитная обработка является перспективным методом улучшения некоторых свойств Тайлаковской нефти. Она существенно улучшает реологические свойства нефти, снижает тенденцию к образованию отложений на стенках нефтепровода и оборудования, интенсифицирует процесс деэмульсации. Максимальную эффективность электромагнитная обработка показывает сразу после воздействия электромагнитного поля и при невысоких температурах нефти, для рассмотренного образца это диапазон температур от 0°C до 20°C , что соответствует температурам эксплуатации магистральных нефтепроводов.

Фильтрация флюида в трещине ГРП, расположенной перпендикулярно горизонтальной скважине

Нагаева З.М.^{1,2}, Аносова Е.П.²

¹Институт Механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

²ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», г.Уфа, Россия

Рассматривается трещина, образованная гидроразрывом пласта, расположенная перпендикулярно к горизонтальной скважине. Течение жидкости в трещине — радиально симметричное. Распределение давления в трещине описывается интегро-дифференциальным уравнением [1]. Пусть в исходном состоянии флюид в трещине и окружающей ее пористой среде находится в равновесии, следовательно, давление однородно. В момент времени $t = 0$ начинается с постоянным расходом отбор ($q > 0$) или нагнетание ($q < 0$) жидкости из скважины в трещину. Для получения решения, описывающего эволюцию давления в трещине, используется преобразование Лапласа и формула обращения Меллина (формула обратного преобразования Лапласа). В процессе решения данной задачи была получена формула, описывающая распределение давления в трещине при задании постоянного значения расхода флюида на скважине. Помимо точного аналитического решения было получено и приближенное решение методом последовательной смены стационарных состояний (ПССС), описывающее распределение давления в трещине при задании постоянного значения расхода флюида на скважине.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

- [1] Шагапов В. Ш., Аносова Е.П., Нагаева З.М. О динамике гармонических фильтрационных волн в гидроразрывной трещине, распо-

Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом системой радиальных трещин

Насырова Д.А., Башмаков Р.А.

Институт Механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Построена математическая модель для определения собственных колебаний жидкости в горизонтальной скважине длиной l , сообщающейся с пластом посредством N радиальных трещин, полученных путем гидроразрыва пласта (ГРП) и закрепленных пропантом, расположенных равномерно вдоль скважины. В работах [1] – [3] рассматривалась аналогичная задача для вертикальных скважин при отсутствии трещин и при наличии вертикальной трещины ГРП, параллельной оси скважины.

Период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяют протяженностью ствола скважины, свойствами жидкости, а также коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважины и свойствами образованных трещин ГРП). Получены трансцендентные уравнения, позволяющие определять комплексные собственные частоты, приведены численные решения при конкретных значениях параметров скважины, пласта и трещин.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

- [1] Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 4 (362). – С. 5 – 14.
- [2] Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Насырова Д.А. Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 1. С. 88-104.
- [3] Шагапов В. Ш., Башмаков Р. А., Хакимова З. Р., Насырова Д. А. Колебания столба жидкости в открытой скважине и сообщающейся с пластом, подверженным ГРП // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27. №4. С. 872-880.

Представление аналитических функций в полукольце

Наумова А.А.

Курский государственный университет, г.Курск, Россия

Пусть $D_+(R_1, R_2) = \{z : 0 < R_1 < |z| \leq R_2 < +\infty, \text{Im } z > 0\}$ — полукольцо в верхней полуплоскости. А. Ф. Гришин [1] распространил формулы Карлемана [2] и Левина [3], связывающие логарифм модуля функции, аналитической и мероморфной в замыкании полукольца $D_+(R_1, R_2)$ и в замыкании полукруга $D_+(0, R)$ с расположением её нулей и полюсов, на функции субгармонические в полукольце $D_+^*(R_1, R_2) = \{z : 0 < R_1 \leq z \leq R_2 < +\infty, \text{Im } z > 0\}$ и в полукруге $D_+^*(0, R)$. Обозначим через $AK(R_1, R_2)$ класс функций аналитических и ограниченных в полукольце $D_+(R_1, R_2)$. Мы распространяем формулу Гришина на функции, аналитические в полукольце $D_+(R_1, R_2)$. Пусть $G_{R_1, R_2}(z, \zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+^*(R_1, R_2)$, $\partial G / \partial n$ — её производная по внутренней нормали, функция $K_{R_1, R_2}(z, \zeta) = G_{R_1, R_2}(z, \zeta) / (\text{Im } z)$ распространяется по непрерывности на $(-R_2, -R_1) \cup (R_1, R_2)$. Справедлива следующая

Теорема. Пусть функция $f \in AK(R_1, R_2)$. Пусть λ — полная мера функции f . Тогда существуют вещественные числа a_1 и a_2 , такие, что при $z \in \overset{\circ}{D}(R_1, R_2)$ справедлива формула

$$\ln |f(z)| = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\overline{D_+(R_1, R_2)}} K_{R_1, R_2}(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + a_1 M(z, -R_1) + \frac{R_2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G_{R_1, R_2}(z, R_2 e^{i\phi})}{\partial u} \ln |f(R_2 e^{i\phi})| d\phi + a_2 M(z, R_2),$$

где $M(z, \zeta)$ — функция Мартина области $D_+(R_1, R_2)$, отвечающая граничной точке ζ , а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками $-R_1$ и R_2 .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00012, <https://rscf.ru/project/22-21-00012/>).

- [1] Гришин А.Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций // Матем., Физ., Анализ, Геом. - 1994. - Т. 1, № 2. - С. 193-215.
- [2] Carleman T. Sur une in galit diff rentielledans la th orie des fonctions anlriques // C. r. Acad. Sci. - 1933. - Vol. 196. - P. 995-997.
- [3] Левин Б.Я. О функциях голоморфных в полуплоскости // Труды Одесского державного ун-та. - 1941. - № 3. - С. 5-14.

Локализованные магнитные неоднородности солитонного типа в ферромагнетиках с трехмерными дефектами

Нерадовский Д.Ф.¹, Фахретдинов М.И.², Екомасов Е.Г.²

¹Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия

²Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

В работе исследована структура магнитных неоднородностей локализованных на 3Д дефектах в бесконечном образе одноосного ферромагнетика. Требование минимума его энергии приводит к модифицированному уравнению типа статического синус-Гордона:

$$A\nabla^2\theta - K_1(\vec{r})\sin\theta\cos\theta = 0. \quad (1)$$

Где A — параметр обменного взаимодействия, $K_1(\vec{r})$ — константа магнитной анизотропии, имеющая из-за наличия дефектов вид функции от координат, θ — угол между осью легкого намагничивания и вектором намагниченности. Рассмотрен случай магнитного дефекта, приводящего к сферически симметричной неоднородности константы магнитной анизотропии:

$$K_1(\vec{r}) = K_1(1 + f(r)). \quad (2)$$

Функция $f(r)$ моделирует наличие сферически-симметричного локального изменения константы магнитной анизотропии, $r = |\vec{r}|$ — радиальная координата сферической системы координат. Предложена возможная структура локализованных на дефекте магнитных неоднородностей типа 0-градусной доменной границы. Найден вид сферически симметричного дефекта, на котором возможна генерация устойчивых магнитных неоднородностей такого вида. Вычислена энергия 0-градусной доменной границы и рассмотрены условия для ее зарождения. Показано, что используя полученные результаты можно далее решать и некоторые практические задачи. Например, зная энергию устойчивой 0-градусной доменной границы локализованной на 3Д дефекте можно найти величину коэрцитивной силы.

Построение решений аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующей Гамильтоновой системе H^{2+2+1}

Павленко В.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

На сегодняшний день ученые интересуются работами, которые посвящены дифференциальным уравнениям, которые могут интегрироваться

методом изомонодромной деформации (ИДМ). Пока что известен конечный список совместных пар гамильтоновых систем, таких что: (эти ОДУ допускают ИДМ)

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{p_j} \quad (k = 1, 2) \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждое из которых есть условие совместности двух линейных систем ОДУ вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \quad (2)$$

$$V'_\eta = AV, \quad (3)$$

где квадратные матрицы L_{s_k} и A одинаковой размерности рациональны по переменной η . Соответствующие решения дифференциальных уравнений, являющихся условием совместности таких пар, называются изомонодромными. Некоторые такие пары гамильтоновых систем ОДУ приведены в статье Х. Кимуры [1].

Настоящая работа посвящена построению решений совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H_{s_k}^{2+2+1}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ ($k = 1, 2$) гамильтоновой системы H^{2+2+1} из статьи [1].

Построенные решения являются явными в терминах решений линейной системы ОДУ, которая выписана в статье [2].

Следует отметить, что почти все решения соответствующих аналогов временных уравнений Шредингера, которые соответствуют другим гамильтоновым системам уже построены. Некоторые из них построены автором совместно с Сулеймановым Б.И.

- [1] *H. Kimura*. The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure. *Annali di Matematica pura et applicata* IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.
- [2] *H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai*. Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations. arXiv:1209.3836 (2012).

Полуправильные решения обобщенного уравнения фильтрации

Павленко В.Н.

ЧелГУ, г. Челябинск, Россия

Рассматривается эллиптическое квазилинейное уравнение

$$-div(a(|\nabla u|^2) \nabla u) = g(x, u(x)), x \in \Omega, \quad (1)$$

в ограниченной области Ω с граничным условием

$$u(x) = 0, x \in \delta\Omega. \quad (2)$$

Функция $a : R_+ \rightarrow R_+$ абсолютно непрерывная и для некоторого $t_0 \geq 0$ $a(t) = 0$ на $[0, t_0]$ и существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ и $p > 1$ такие, что $C_1(t - t_0)^{p-1} \leq a(t^2) * t \leq C_2(t - t_0)^{p-1}$ при $t \geq t_0$. Функция $g(x, u)$ суперпозиционно измеримая и неотрицательная на $\Omega \times R$. Для почти всех $x \in \Omega$ $g(x, \cdot)$ имеет конечные односторонние пределы $g(x, u-), g(x, u+)$ для любого $u \in R$, причем $g(x, u-) \leq g(x, u+)$ и $g(x, u) \in [g(x, u-), g(x, u+)]$.

Слабое решение $u \in W_p^1(\Omega)$ задачи (1)-(2) называется полуправильным, если $mes\{x \in \Omega : g(x, u-) < g(x, u+)\} = 0$.

Если в (1) $g(x, u) = g(x)$, то (1) уравнение стационарной фильтрации несжимаемой жидкости ($u(x)$ - давление, $a(|\nabla u|^2) \nabla u$ - скорость фильтрации, $g(x)$ - плотность источников), рассмотренное в [1].

Вариационным методом, базирующемся на понятие квазипотенциального оператора, получен следующий результат.

Теорема 1. *Предположим дополнительно, что*

1) *функция $a(t^2)t$ неубывающая на R_+ ;*

2) *для почти всех $x \in \Omega$ $g(x, u) \leq b(x) + C|u|^{p-1} \forall u \in R$, где $b \in L_q(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$, $C > 0$ постоянная;*

3) *$\int_0^u g(x, s)du \leq d(x) + r(x) \cdot |u|^{p-r} \forall u \in R$ и почти всех $x \in \Omega$, $d \in L_1(\Omega)$, $r < p$, $r \in L_{p/r}(\Omega)$.*

Тогда задача (1)-(2) имеет полуправильное решение.

По сравнению с аналогичными работами например [2], ослаблены ограничения на точки разрыва $g(x, u)$ по u .

[1] Ляшко А. Д. О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации/ А. Д. Ляшко, М. М. Карчевский// Изв. вузов. Матем.- 1975.- №6. С. 73-81.

- [2] Santos J.A. A global result for a degenerate quasilinear eigenvalue problem with discontinuous nonlinearities/J.A. Santos, P.F.S. Pontes, S.H.M.Soares // Calc. Var. - 2023. - Vol. 62. № 91. - 33 p

Бифуркации кривой особых точек в трехмерных динамических системах

Панов А.В.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

В различных задачах динамики двухфазной среды возникают трехмерные динамические системы с неизолированными особыми точками. Причем для описания всех типов течений среды, возникающих в этих задачах, необходимо исследование динамической системы при различных значениях некоторого параметра. Таким параметром может быть, например, отношение начальных расходов фаз. Однако при непрерывном изменении параметра возникают качественные перестройки в фазовом портрете исследуемой динамической системы. Такие перестройки принято называть бифуркациями фазового портрета [1]. В докладе будет рассказано об исследовании бифуркаций фазового портрета динамической системы вида

$$\dot{x} = x\varphi_1(x, y, z) + y\varphi_2(x, y, z),$$

$$\dot{y} = x\psi_1(x, y, z) + y\psi_2(x, y, z),$$

$$\dot{z} = x\chi_1(x, y, z) + y\chi_2(x, y, z),$$

происходящих в некоторой окрестности кривой особых точек $\{x = 0, y = 0\}$, точнее говоря, в окрестности начала координат. Используя теорему трансверсальности Тома, получены условия типичности бифуркаций. Некоторые типичные бифуркации приведены к предварительным нормальным формам.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда и Челябинской области № 22-21-20063

- [1] Арнольд В.И., Айфраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техн., Соврем. проб. мат., Фундам. напр.. М.: ВИНТИ. - 1986. - Т.5 - С. 5-218.

Формула следа самосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами

Поляков Д.М.

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
г.Владикавказ, Россия

Рассмотрим самосопряженный оператор четвертого порядка H , действующий в гильбертовом пространстве $L^2(0, 1)$ и имеющий вид

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0,$$

где коэффициенты p и q являются вещественными периодическими (периода 1) функциями из пространства $L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Область определения этого оператора имеет вид

$$D(H) = \{y \in L^2(0, 1) : y', y'', y''' + py' \in W_1^1(0, 1), y^{(4)} + (py')' + qy \in L^2(0, 1), y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0\}.$$

Основные результаты работы связаны с асимптотикой собственных значений дифференциального оператора H как в случае коэффициентов $p, q \in L^1(\mathbb{T})$, так и при различных предположениях гладкости коэффициентов p и q . Используя эти результаты, мы докажем формулу следа для рассматриваемого оператора H .

Рассмотрим оператор со сдвигом $H_t(p_t, q_t)$, где $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$. Мы обозначим через $\mu_n(t)$ собственные значения оператора H_t .

Имеет место следующий результат.

Теорема. Пусть $p''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда существует такое число $N = N(p, q) \in \mathbb{N}$, что каждая из функций $\sum_{n=1}^N \mu_n(t)$ и $\mu_n(t)$, $n > N$, принадлежит пространству $C^2(0, 1)$. Кроме того, для оператора H справедлива следующая формула следа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n(t) - \mu_n(0) - 3(p(t) - p(0))\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) + \frac{p''(t) - p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{2(q(t) - q(0))}{\pi(2n+1)} \right) = \frac{p''(t) - p''(0)}{2} + q(0) - q(t) + \frac{p^2(t) - p^2(0)}{4}.$$

Ряд в формуле следа сходится абсолютно и равномерно.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-160.2022.1.1)

Определение ширины запрещенной зоны в зеленом и фиолетовом бромокрезолах методом оптического спектрометрии

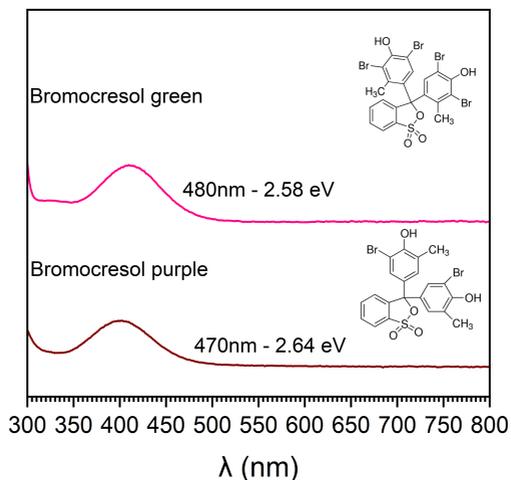
Поглазов К.Ю.¹, Сафронов А.М.¹, Рыбальченко А.В.²

¹Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

²МГУ им. М.В. Ломоносова

Бромокрезолы зеленый и фиолетовый являются красителями, используемыми в качестве индикаторов pH в таких областях, как питательные среды для микроорганизмов и титрования. Понятие «краситель» или «хромофор», как и большинство научных понятий, является условным. Это понятие связано с устройством световых рецепторов нашего глаза. Задача современной теории цветности, которая только начала развиваться несколько десятилетий назад, состоит в том, чтобы научиться понимать и предсказывать пути создания хромофоров с ожидаемыми свойствами и красителей спектрально чистых тонов во всем интервале видимой части спектра. В частности, большую роль изучении красителей имеют исследования структуры их молекулярных орбиталей.

Эксперимент проводился на оборудовании, представляющем из себя спектрограф для получения спектров оптического поглощения. В этой роли применялся прибор типа оптоволоконного спектрометра UV/Vis/NIR AvaSpec-2048 (Avantes). Экспериментальные образцы подготавливались путем растворения исследуемых веществ при $T=293$ °К, в толуоле очищенном на Na , в концентрации около 30 моль/л.



Модель стока под залежь в окрестности нагнетательной скважины при мгновенном раскрытии трещин

Поташев К.А., Мазо А.Б.

Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского КФУ,
г. Казань, Россия

Для описания непроницаемой закачки предложена математическая модель стока нагнетаемой в нефтяной пласт воды в соседние горизонты. Сток происходит при мгновенном раскрытии трещин в непроницаемой перемычке толщиной δ_* при достижении давлением заданного давления раскрытия трещин p_* . Модель сведена к решению одномерной задачи стационарной фильтрации в радиальной постановке в окрестности нагнетательной скважины в пренебрежении сжимаемостью пористой среды и жидкости, а также полем силы тяжести [1, 2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0,$$

$$r_w < r < R; 0 < z < H, r = R : p = p_R; r = r_w : p = p_w = \text{const} > p_R,$$

$$z = H : \sigma \frac{\partial p}{\partial z} = 0; z = 0 : -\sigma \frac{\partial p}{\partial z} = w_* = -\frac{k_*}{\mu} \frac{p - p_\Gamma}{\delta_*} h(p - p_*).$$

Получено аналитическое решение задачи:

$$p(r) = \frac{1}{A_w \ln r_w [J_1(iA_w) Y_0(-iA_*) + J_0(iA_*) Y_1(-iA_w)] \cdot (Y_0(-iA) [-iJ_0(iA_*) + A_w p_* J_1(iA_w) \ln r_w] + J_0(iA) [iY_0(-iA_*) + A_w p_* Y_1(-iA_w) \ln r_w]), \quad r_w \leq r < r_*,}$$

где J_0, J_1, Y_0, Y_1 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков соответственно; $A = r\sqrt{\alpha}$, $A_w = r_w\sqrt{\alpha}$, $A_* = r_*\sqrt{\alpha}$, $\alpha = R^2 K / H \delta$, $K = k_*/k$, r_* – радиус области стока.

Проанализированы условия эффективности нагнетания в пласт воды. Продемонстрирована оценка параметров системы трещин по фактическим замерам показателей работы нагнетательных скважин.

- [1] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 212 с.
- [2] Mazo A.B., Potashev K.A., Mirsaitov R.G. Model of water leakage under the reservoir in the vicinity of the injection well with instantaneous opening of fractures // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, No.8, pp. 2222–2229.

О глубоких состояниях отрицательных ионов отдельных молекул органических кислот, (иногда) наблюдаемых методом спектроскопии диссоциативного захвата электронов

**Пшеничнюк С.А., Асфандиаров Н.Л., Рахмеев Р.Г.,
Таюпов М.М., Сафронов А.М., Маркова А.В.**

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Электронные свойства молекул органических соединений, вовлеченных в биохимические реакции, важны для понимания клеточных процессов на молекулярном уровне. Ранее методом спектроскопии диссоциативного захвата электронов (СДЗЭ) были обнаружены долгоживущие отрицательные молекулярные ионы (ОМИ) для альфа-кетоглutarовой и щавелевоуксусной кислот [Pshenichnyuk, S.A., Asfandiaryov, N.L. Phys. Chem. Chem. Phys. 22 (2020) 16150]. На основе расчетов методом B3LYP/6-31+G(d) было показано, что в своей оптимальной геометрии данные ОМИ способны удерживать электрон с энергией связи более 1 эВ (глубокие состояния), а также имеют большую прочность за счёт образования водородных связей, что объясняет экспериментальные результаты.

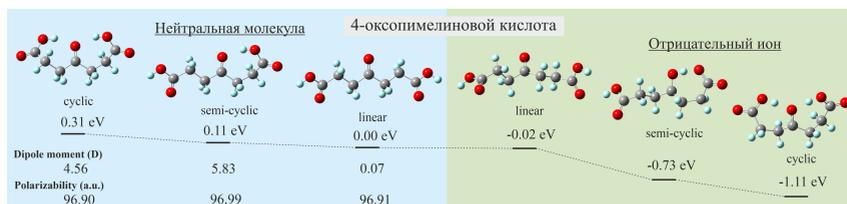


Рис. 1: Структуры нейтральной молекулы и ОМИ, полные энергии, дипольные моменты и поляризуемость по данным расчетов методом B3LYP/6-31+G(d) для 4-оксопимелиновой кислоты.

В данной работе с целью обнаружения аналогичных свойств исследованы структурно близкие карбоксильные кислоты. Расчеты подтверждают наличие глубоких состояний ОМИ, как показано на рис.1 для 4-оксопимелиновой кислоты. Однако долгоживущие ОМИ наблюдаются не для всех соединений, а некоторые из них не поддаются исследованию методом СДЗЭ из-за термодеструкции при формировании молекулярного пучка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект №19-13-00021-П).

Изучение миграции моноцитов в микрожидкостной системе
Рахимов А.А.^{1,2}, Валиев А.А.^{1,2}, Данилко К.В.², Ахметов А.Т.¹
¹Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия
²Башкирский государственный медицинский университет, г. Уфа,
Россия

В работе экспериментально изучалась миграция моноцитов при взаимодействии с хемоаттрактантом. Методом мягкой фотолитографии изготовлена двухуровневая миграционная система, прототипами которой являлись ячейки в работах [1], [2]. Она состоит из двух подводящих жидкость каналов и двух камер («градиентной» и «накопительной») высотой 50 мкм, которые сообщаются через «миграционные» каналы высотой 10 мкм шириной 10, 15, 25 и 50 мкм. К «градиентной» камере ячейки подавались хемоаттрактант и питательная среда. За счет диффузии формируется градиент концентрации хемоаттрактанта перпендикулярный направлению течения, стимулирующий движение клеток в «накопительной» камере. В качестве хемоаттрактанта для моноцитов использовали среду, кондиционированную клетками рака предстательной железы (РПЖ) андрогеннезависимой линии РС3 или андрогензависимой линии LNCaP. Сравнение миграции моноцитов у здоровых людей и пациентов с РПЖ показало, что наибольшее количество мигрировавших клеток у моноцитов здорового человека и клетками LNCaP. Средняя скорость миграции к линии LNCaP (37 мкм/ч) выше, чем к линии РС-3 (12 мкм/ч). Средние скорости миграции моноцитов пациентов с РПЖ и здоровых людей практически не отличались. Разработка микрожидкостных устройств для наблюдения за миграцией клеток является важным шагом на пути улучшения диагностики и терапии онкологических заболеваний.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-25-00531, <https://rscf.ru/project/22-25-00531/>.

- [1] Tong Z., Balzer E. M., Dallas M. R., Hung W., Stebe K. J., Konstantopoulos K. 2012. Chemotaxis of Cell Populations through Confined Spaces at Single-Cell Resolution. PLoS ONE 7(1) e29211.
- [2] Рахимов А.А., Ахметов А.Т., Валиев А.А., Данилко К.В., Саметов С.П., Хисматуллин Д.Б. К вопросу о механизме клеточной миграции // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 17–26.

Гиперцикличность оператора сдвига в весовом пространстве

Рахимова А.И.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Рассмотрим весовое пространство \mathcal{F}_φ целых функций, которое имеет такой вид [1]. Возьмем $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ — семейство выпуклых функций в \mathbb{C}^n $\varphi_m : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, для которых при всех $m \in \mathbb{N}$:

$$i_1) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty;$$

$$i_2) \varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n;$$

$$i_3) \lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty;$$

$i_4)$ можно найти константы $a_m > 0$ и $b_m > 0$, для которых

$$\varphi_{m+1}(z+t) \leq \varphi_m(z) + b_m, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{C}^n : |t| \leq a_m.$$

При любом $m \in \mathbb{N}$ введем пространство

$$\mathcal{F}_m = \{f \in H(\mathbb{C}^n), f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty\}.$$

Пространство $\mathcal{F}_\varphi = \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{F}_m$ с обычными операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа и топологией проективного предела \mathcal{F}_m является пространством типа (FS) . Оно инвариантно относительно дифференцирования.

Изучим оператор сдвига в \mathcal{F}_φ . В \mathcal{F}_φ оператор сдвига T_a имеет вид $T_a(f)(z) = f(z+a)$, где $a \in \mathbb{C}^n$ — некоторая константа, не равная нулевому элементу.

Теорема. Оператор T_a — гиперциклический в \mathcal{F}_φ .

- [1] Ахтямов Н.Т., Мусин И.Х. О существовании базиса в весовом пространстве целых функций // Уфимский математический журнал. — 2009, Т. 1, № 1. — С. 3–15.

Численное решение задачи о распаде разрыва для пустой трубы

Родионов А.С., Саегалиев И.Э.

ФГБОУ ВО Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Россия

Для исследования процессов, происходящих в насыпных средах, создана ударная труба длиной 2540 мм с пьезоэлектрическими датчиками, типа ЛХ 610 и системой регистрации на базе L-CARD, сопряженной с компьютером. Напряжение, соответствующее импульсам давления в камере низкого давления (КНД) и показания тензометрического датчика, который регистрирует уровень давления разрыва диафрагмы в камере высокого давления (КВД), записываются в памяти компьютера и, впоследствии, для представления в графическом виде, конвертируются в .dat файлы. В установке использовалось всего 4 датчика, расположенных на расстоянии 1167, 2279, 2407 и 2514 мм от начала КВД.

Методом конечных объемов [1] получено численное решение задачи о распаде разрыва в газе для пустой ударной трубы. Проведены тестовые эксперименты для пустой трубы и записаны показания датчиков. Расчеты и эксперимент проводились при следующих параметрах: давление в КВД $p_1=1.4$ бар, давление в КНД $p_2=1.0$ бар, исследуемый газ – воздух при 20 °С.

Анализ результатов расчетов показал, что численное решение достаточно хорошо сходится с экспериментальными данными.

Авторы выражают благодарность Ахметову А.Т. за проведение эксперимента и Гималтдинову И.К. за помощь в осуществлении расчетов.

- [1] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Учебное пособие. – 3-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992.

Маематическая модель процесса гидратообразования при нагнетании газа в снежный массив

Русинов А.А., Шепелькевич О.А., Чиглинцева А.С.

Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск, Россия, ООО
“РН-БашНИПИнефть”, г.Уфа, Россия

Решена задача о нагнетании гидратообразующего газа в снежный массив, в исходном состоянии насыщенный тем же газом. Для осесимметричной задачи построены автомодельные решения, описывающие поля температур и давлений, а также насыщенностей гидрата в массиве.

В данной работе рассматривается процесс нагнетания гидратообразующего газа (метана) в чистый снежный массив конечной протяженности, насыщенный тем же газом. Представляется, что через пробуренную в массиве скважину закачивается газ, с постоянным массовым расходом при постоянной температуре. В результате чего образуются три характерные зоны: “гидрат+газ”, “гидрат+снег+газ” и “снег+газ”. Возникают две фронтальные границы: между дальней и промежуточной зонами, где начинается переход снега в состав гидрата, и между ближней и промежуточной зонами - заканчивается процесс образования гидрата. [1]

Подобная задача была описана в работе [2], в плоскоодномерной постановке. Особенностью данной работы является то, что рассматривается задача в осесимметричном приближении.

В промежуточной зоне, где происходит образование гидрата, гидратонасыщенность не постоянна, и монотонно меняется вдоль координаты и на ближней границе снег полностью переходит в состав гидрата, при этом гидратонасыщенность терпит скачок и принимает максимальное значение в ближней зоне, которая представляет собой достаточно тонкий слой. Показано, что с ростом расхода газа от 0.002 до 0.004 кг/м процесс гидратообразования происходит активнее, в следствие чего максимальная температура, реализуемая в массиве, растет. Это приводит к увеличению протяженности объёмной зоны образования гидрата.

- [1] Шепелькевич О.А., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. Математическое моделирование процесса гидратообразования в снежном массиве при нагнетании холодного газа // Международная молодежная научная конференция. 2018. С. 91-94.
- [2] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А., Хасанов М.К., Хусаинов И.Г. О нагнетании гидратообразующего газа в пласт снега, насыщенный тем же газом // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 3 (349). С. 43-56.

Математическая модель процесса извлечения газа из гидратного пласта

Русинов А.А., Валеев Д.Ф.
Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск

Изучение газовых гидратов как потенциального источника энергии требует понимания их извлечения из подземных резервуаров, расположенных в недрах Земли и Мирового океана, с акцентом на наиболее известные месторождения и использования тепла для разложения гидратов. Предполагается, что давление и температура во время добычи

газа однородны, а при снижении давления ожидаются изменения температуры и геологических температурных полей.

Разработка газогидратных пластов включает анализ состояния пласта, которое определяется его температурой, давлением, насыщенностью гидратами, газонасыщенностью и водонасыщенностью, и связывание этих переменных с помощью уравнения, учитывающего теплоприток при разложении гидратов и теплоприток из окружающего массива пород[1]. Извлечение газа из гидратных коллекторов происходит в циклическом режиме, когда извлечение газа чередуется с консервацией пласта, для полного разложения гидрата требуется до 40 лет. Поэтому очень важно разработать схемы полного извлечения газа при наименьшем времени разработки месторождения.

Полученные результаты дают ценную информацию для оптимизации управления газогидратными пластами для производства энергии[2]. В частности, уменьшение толщины пласта и увеличение начальной гидратонасыщенности может привести к сокращению времени эксплуатации в первом цикле, но в конечном итоге может увеличить общий срок службы пласта, в то время как снижение температуры и периода консервации может иметь значительные последствия для эффективного управления газогидратными пластами.

- [1] Шепелькевич О.А., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. Математическое моделирование процесса гидратообразования в снежном массиве при нагнетании холодного газа // Международная молодежная научная конференция. 2018. С. 91-94.
- [2] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А., Хасанов М.К., Хусаинов И.Г. О нагнетании гидратообразующего газа в пласт снега, насыщенный тем же газом // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 3 (349). С. 43-56.

Презентация рукописи монографии "Обратные задачи для уравнений математической физики"

Сабитов К.Б.

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Монография посвящена изучению нерешенных вопросов теории обратных задач по отысканию начальных условий, правых частей (источников) и коэффициентов основных классических уравнений математической физики. Наряду с этим такие задачи исследованы для вырождающихся уравнений математической физики.

Основной задачей предлагаемой монографии является изучение обратных задач по отысканию начальных условий, правой части и коэффициентов основных уравнений математической физики с целью построения их решений в явном виде и доказательство соответствующих теорем единственности, существования и устойчивости решений.

Монография состоит из семи глав, разбитых на 35 параграфов.

В первой главе для уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} + bu = F(x, t) = f(x)g(t),$$

где a и b постоянные, в прямоугольной области изучены обратные задачи по отысканию начального условия и правой части.

Во второй главе для двумерного неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = F(x, y, t) = f(x, y)g(t)$$

в параллелепипеде изучены первая начально-граничная задача и обратные задачи по отысканию множителей правой части, зависящих от пространственных переменных и времени, и начальной функции.

В третьей главе для вырождающегося уравнения теплопроводности

$$t^n u_{xx} - x^m u_t - bt^n x^m u = F(x, t) = x^m f(x)g(t),$$

где n и m – вещественные постоянные и одновременно в нуль не обращаются, b – любая вещественная постоянная, в прямоугольной области исследованы на корректность постановки первой начально-граничной задачи и обратных задач по определению начального условия и множителей правой части данного уравнения. Для общего вырождающегося параболического уравнения установлены теоремы единственности обратных задач с нелокальными условиями наблюдения.

В четвертой главе исследуется начально-граничная задачи и обратные задачи в прямоугольной области для телеграфного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + bu = F(x, t) = f(x)g(t).$$

В пятой главе для вырождающегося телеграфного уравнения

$$t^m u_{xx} - u_{tt} - bt^m u = F(x, t) = f(x)g(t),$$

где $m = \text{const} > -1$, b – любая постоянная, в прямоугольной области изучены начально-граничная задача и обратные задачи по отысканию множителей правой части.

В шестой главе для уравнений

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0,$$

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = 0,$$

$$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) + q(x, y)u = 0$$

в прямоугольных областях изучены начально-граничные задачи с граничными условиями третьего рода, когда $q(x)$ и $q(x, y)$ известные достаточно гладкие функции. Затем приведены постановки обратных задач для данных уравнений с неизвестными функциями $q(x)$, $q(x, y)$ и коэффициентами при граничных условиях. Опираясь на теорию обратных спектральных задач Штурма-Лиувилля достаточно просто установлены теоремы единственности и существования решения поставленных обратных задач.

В седьмой главе изучаются прямые и обратные задачи для уравнения Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} - cu = F(x, y) = f(x)g(y),$$

где C постоянная, в области $D = \{(x, y) | 0 < x < l, 0 < y < \beta\}$.

Modeling aspects of plastic zone development near cylindrical underground openings

Sabitov D.I.¹, AlBahrani H.I.², Charara M.¹

¹Aramco Innovations, Moscow, Russia;

²Saudi Aramco, Dhahran, Saudi Arabia

Modern drilling operations in oil and gas industry provide many challenges of interest to mathematics and mechanics. One of the important problems with a clear mathematical formulation is the wellbore stability analysis for inclined boreholes [1]. This problem consists in determining the stress-strain state near the cylindrical hole which position is inclined relatively to the principal directions of the given stress tensor in the rock. The supporting pressure in the well can be controlled from the surface, and the ultimate goal of the stability analysis is to determine the minimum pressure that can prevent the well from collapsing and failing. The problem of wellbore stability is solved analytically for linear elastic rocks [2]. Special emphasis is placed on the formulation of this analysis for rocks demonstrating the developed plastic behavior. In this case, it is necessary to find a solution of the equilibrium equation for stresses satisfying the given yield criterion, which is a non-linear equation [3].

This work studies the numerical solution of the problem of determining the stress-strain state of a plastic material around a long cylindrical opening. The boundary conditions for such a problem are the expressions for

the normal derivatives of the displacement vector at the body surface, thus the solution in terms of displacements ceases to be unique. To stabilize the numerical solution, one can introduce additional conditions based on Lagrange multipliers that prohibit the rotations and translation movements of the region as a rigid body. Another option is to reformulate the boundary conditions into Dirichlet-type ones, which guarantee the uniqueness of the solution if it exists. We compare the efficiency of the numerical solution for two mentioned approaches.

- [1] Sabitov D., Garavand A. Numerical Near-Wellbore and Stability Analysis for Inclined Boreholes in Plastic Rocks. 82nd EAGE Annual Conference & Exhibition, October 2021.
- [2] Fjær, E., Holt, R. M., Horsrud, P., Raaen, A. M., and Risnes, R. Petroleum Related Rock Mechanics. 2nd Ed. Elsevier B.V., 2008.
- [3] Kachanov, L. M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. Dover Publications, inc., 2008.

Оценки мер Рисса субгармонических функций

Салимова А.Е. , Хабибуллин Б.Н.

УГНТУ, ИМВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ — две субгармонические функции на комплексной плоскости \mathbb{C} с мерами Рисса $\nu_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u$, Δ — оператор Лапласа, и μ_M , для которых $u(z) \leq O(|z|)$ и $M(z) \leq O(|z|)$ при $z \rightarrow \infty$. Пусть для локально интегрируемой на вещественной оси \mathbb{R} функции v

$$J_{\mathbb{R}}(r, R; v) := \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{v(x) + v(-x)}{x^2} dx, \quad 0 < r < R < +\infty,$$

а для локально интегрируемой на мнимой оси $i\mathbb{R}$ функции v

$$J_{i\mathbb{R}}(r, R; v) := \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{v(-iy) + v(iy)}{y^2} dy, \quad 0 < r < R < +\infty.$$

Нам также потребуются специальные меры интервалов. Для положительной борелевской меры μ на комплексной плоскости \mathbb{C} полагаем

$$l_{\mu}^{\text{rh}}(r, R) := \int_{\substack{r < |z| \leq R \\ \text{Re } z > 0}} \text{Re} \frac{1}{z} d\mu(z), \quad 0 < r < R < +\infty,$$

$$l_\mu^{\text{lh}}(r, R) := \int_{\substack{r < |z| \leq R \\ \operatorname{Re} z < 0}} \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{z} \right) d\mu(z), \quad 0 < r < R < +\infty,$$

— правая и левая логарифмические меры интервалов $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ для меры μ , соответственно. Они порождают логарифмическую субмеру интервалов $l_\mu(r, R) := \max\{l_\mu^{\text{lh}}(r, R), l_\mu^{\text{rh}}(r, R)\}$, $0 < r < R < +\infty$.

Теорема [1, Основная теорема]. Пусть u и M — функции, введённые выше, $\nu := \nu_u$, $\mu := \mu_M$, положительная функция $q_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ локально интегрируема на \mathbb{R} , положительная функция $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ непрерывна и $\limsup_{|y| \rightarrow +\infty} q(y)/|y| < 1$, а для измеримого по мере Лебега mes на \mathbb{R} подмножества $E \subset \mathbb{R}^+$ с

$$E^r := E \cap [0, r], \quad q_E(r) := \operatorname{mes}(E^r) \ln \frac{er}{\operatorname{mes}(E^r)} =: q_E(-r),$$

имеют место неравенства

$$\begin{aligned} u(iy) + u(-iy) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(iy + q(y)e^{i\theta}) d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(-iy + q(-y)e^{i\theta}) d\theta + q_0(y) + q_0(-y) \end{aligned}$$

для каждого $y \in \mathbb{R}^+ \setminus E$. Тогда для любых чисел $r_0 > 0$ и $N \in \mathbb{R}^+$ найдётся число $C \in \mathbb{R}^+$, для которого

$$\begin{aligned} \max\{l_\nu(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; u)\} &\leq \min\{l_\mu^{\text{lh}}(r, R), l_\mu^{\text{rh}}(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; M)\} \\ &+ C J_{\mathbb{R}}(r, R; q_0 + q_E) + C I_N(r, R; q) + C \end{aligned}$$

при всех $r_0 \leq r < R < +\infty$, где

$$I_N(r, R; q) := \int_r^R t^N \sup_{s \geq t} \frac{q(s) + q(-s)}{s^{2+N}} dt.$$

Несколько громоздко выглядящий последний интеграл при очень незначительных дополнительных ограничениях на функцию $Q_N(s) := Q(s)/s^{2+N}$, где $Q(s) := q(s) + q(-s)$, $s \in \mathbb{R}^+$, можно включить в наш стандартный интеграл $J_{\mathbb{R}}$. Пусть функция Q_N убывающая на некотором интервале $(A, +\infty) \neq \emptyset$ или же она непрерывно дифференцируемая на этом интервале и $\limsup_{y \rightarrow +\infty} yQ'(y)/Q(y) < +\infty$. Тогда найдутся числа $r_0 > 0$, $N \in \mathbb{R}^+$ и $C \in \mathbb{R}^+$, для которых

$$I_N(r, R; q) := \int_r^R t^N \sup_{s \geq t} Q_N(s) dt \leq C \int_r^R \frac{Q(t)}{t^2} dt = C J_{\mathbb{R}}(r, R; q).$$

В частности, интеграл $I_N(r, R; q)$ можно заменить на $J_{\mathbb{R}}(r, R; q)$, а заключительную оценку в теореме можно записать как

$$\max\{l_{\nu}(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; u)\} \leq \min\{l_{\mu}^{\text{rh}}(r, R), l_{\mu}^{\text{lh}}(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; M)\} \\ + CJ_{\mathbb{R}}(r, R; q_0 + q_E + q) + C \quad \text{при всех } r_0 \leq r < R < +\infty,$$

Эти результаты сыграли важную роль при обобщениях теоремы Мальявена – Рубела о росте целых функций экспоненциального типа вдоль прямой в работах [2], [3].

- [1] Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. *Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса* // Уфим. матем. журнал, **12:2** (2020), 35–48.
- [2] Салимова А. Е. *Версия теоремы Мальявена – Рубела для целых функций экспоненциального типа с корнями около мнимой оси* // Изв. вузов. Матем. **8** (2022), 46–55.
- [3] Хабибуллин Б. Н. *Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы* // Изв. РАН. Сер. матем., 60 стр., 2023 (принято к печати).

Кольцевая эргодичность меры относительно группы и унитарные представления преобразований гильбертова пространства

Сакбаев В.Ж.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Конечно-аддитивные меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно групп преобразований, рассмотрены в работе [1]. Было установлено, что пространство квадратично интегрируемых по построенной инвариантной мере функций, несепарабельно, а унитарное представление в нем группы сдвигов не является непрерывным в сильной операторной топологии.

Напомним, что G -инвариантная мера $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, заданная на алгебре \mathcal{A} подмножеств группы G , называется эргодической относительно группы G , если для каждого G -инвариантного множества $A \in \mathcal{A}$ либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(E \setminus A) = 0$.

Определение. G -инвариантная мера $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty)$, заданная на кольце \mathcal{R} подмножеств группы G , называется *эргодической по кольцу* относительно группы G если для любых G -инвариантных подколец r_1, r_2

кольца \mathcal{R} из условий а), б) следует, что найдется множество $A \in r_1 \cap r_2$, удовлетворяющее условию $\mu(A) > 0$. Здесь условия а), б) имеют вид

а) $\mu|_{r_1} \neq 0, \mu|_{r_2} \neq 0$,

б) кольцо \mathcal{R} является пополнением по мере μ кольца, порожденного объединением колец $r_1 \cup r_2$.

Найдено эргодическое по кольцу разложение трансляционно инвариантной меры на гильбертовом пространстве в сумму взаимно сингулярных трансляционно инвариантных эргодических мер. Показано, что для каждой эргодической компоненты полученного разложения пространство квадратично интегрируемых функций сепарабельно. Найдены подгруппы группы сдвигов, допускающие в этом пространстве непрерывное представление.

Приложения предложенного подхода рассмотрены в работе [2] в связи с задачей параметризации множества трансляционно инвариантных неразложимых мер.

- [1] Глазатов В.А., Сакбаев В.Ж. *Меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно гамильтоновых потоков* // Уфимск. матем. журн., 14:2 (2022), 3–22.
- [2] Sakbaev V.Zh. *Flows in Infinite-Dimensional Phase Space Equipped with a Finitely-Additive Invariant Measure* // Mathematics **2023**, 11, 1161. <https://doi.org/10.3390/math11051161>

Топологические фазы в физике твердого тела

Сергеев А.Г.

Математический институт имени В.А.Стеклова РАН, Москва

Доклад посвящен теории топологических фаз, в основе которой лежит гомотопический подход к исследованию свойств твердых тел. Нетривиальным примером топологических фаз могут служить топологические диэлектрики.

Обозначим через H гамильтониан, описывающий твердое тело, и через G его группу симметрии. Рассмотрим далее множество Ham_G классов гомотопической эквивалентности G -симметричных гамильтонианов с нулевым ядром. На этом множестве можно ввести естественную операцию сложения, относительно которой Ham_G является абелевой полугруппой с нулевым элементом. Группа обратимых элементов этой полугруппы и называется топологической фазой.

Оказывается, что семейство (F_d) d -мерных топологических фаз образует Ω -спектр. Так называется набор топологических пространств F_d ,

обладающих тем свойством, что пространство петель ΩF_{d+1} гомотопически эквивалентно пространству F_d . Это открывает путь к широкому использованию достижений алгебраической топологии для исследования топологических фаз. Более конкретно, каждому Ω -спектру отвечает обобщенная теория когомологий, задаваемая функтором h^d , сопоставляющим топологическому пространству X множество $[X, F_d]$ классов гомотопической эквивалентности отображений $X \rightarrow F_d$. Пространства $[X, F_d]$ подробно исследованы в алгебраической топологии, что дает надежду на получение полной топологической классификации топологических фаз.

**Об одной начально-граничной задаче для трехмерного
уравнения параболо-гиперболического типа
со степенным вырождением**

Сидоров С.Н.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа,
Россия

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа $\mathcal{L}u = F(x, y, t)$, здесь

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} u_t - t^n(u_{xx} + u_{yy}) + bt^nu, \\ u_{tt} - (-t)^m(u_{xx} + u_{yy}) - b(-t)^mu, \end{cases} \quad F(x, y, t) = \begin{cases} F_1(x, y, t), t > 0, \\ F_2(x, y, t), t < 0, \end{cases}$$

заданное в трехмерной области $Q = \{(x, y, t) | (x, y) \in D, t \in (-\alpha, \beta)\}$, где $D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\}$, $n, m, \alpha, \beta, p, q$ – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, $F_i(x, y, t)$ ($i = 1, 2$) – заданные функции, и поставим задачу.

Начально-граничная задача. *Найти функцию $u(x, y, t)$, определенной в области Q и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, t) \in C(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(Q) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-);$$

$$\mathcal{L}u(x, y, t) \equiv F(x, y, t), (x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0, -\alpha \leq t \leq \beta;$$

$u(x, y, t)|_{t=-\alpha} = \psi(x, y), (x, y) \in \bar{D}, Q_- = Q \cap \{t < 0\}, Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$, где $F(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Используя идею работ [1, 2], установлен критерий единственности решения поставленной задачи. Решение задачи построено в явной форме в виде суммы ортогонального двумерного ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов, затрудняющая сходимость построенного ряда. В

связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения. Установлена устойчивость решения по граничной функции $\psi(x, y)$ и правой части уравнения.

- [1] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для трёхмерного уравнения парабола-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 8. С. 1071-1080.
- [2] Sidorov S.N. Three-dimensional initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2022. V. 12, № 1. С. 49–67.

Регулярное частично инвариантное решение уравнений газовой динамики с уравнением состояния специального вида

Сираева Д.Т.

ИМех УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассматриваются уравнения газовой динамики [1]:

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad (1)$$

где $D = \partial_t + (\vec{u} \cdot \nabla)$ — оператор полного дифференцирования; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным \vec{x} ; \vec{u} — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; t — время. Уравнение состояния имеет вид [1]

$$p = f(\rho) + h(S), \quad (2)$$

в силу которого последнее уравнение системы (1) может быть записано для энтропии

$$DS = 0.$$

Система (1) с учетом уравнения состояния (2) допускает двенадцатимерную алгебру Ли L_{12} . Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} построена в работе [2].

Для некоторых 4-мерных подалгебр алгебры Ли L_{12} [2] вычислены инварианты. Для одной 4-мерной подалгебры построена частично инвариантная подмодель ранга 1 дефекта 1. Получено новое точное решение уравнений газовой динамики (1) с уравнением состояния специального вида (2).

- [1] Овсянников Л. В. Программа «Подмодели». Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
- [2] Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, вып. 1. С. 94–107.

Сильно непрерывные разрешающие семейства операторов для уравнений с дробной производной

Скорынин А.С., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть \mathcal{Z} — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов на \mathcal{Z} , D^α — дробная производная Герасимова — Капуто порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, A — линейный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве \mathcal{Z} . Рассмотрим уравнение

$$D^\alpha z(t) = Az(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ называется разрешающим для уравнения (1) (см. [1]), если выполняются следующие условия:

- (i) $S(t)$ сильно непрерывно на $\overline{\mathbb{R}}_+$, $S(0) = I$;
- (ii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ для всех $z_0 \in D_A$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;
- (iii) $S(t)z_0$ является решением задачи Коши $z(0) = z_0$, $D^k z(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения (1) при любом $z_0 \in D_A$.

Будем говорить, что линейный, замкнутый, плотно определенный в банаховом пространстве \mathcal{Z} оператор A принадлежит классу $C_\alpha(K, a)$ при некоторых $K > 1$, $a > 0$, если выполняются следующие условия:

- (i) если $\operatorname{Re} \lambda > a$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;
- (ii) если $\operatorname{Re} \lambda > a$, то при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1}) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{Kn!}{(\operatorname{Re} \lambda - a)^{n+1}}.$$

Для $\alpha \in (0, 1)$ возьмем такое $r \in \mathbb{N}$, что $r-1 \leq 1/\alpha < r$.

Теорема. Пусть $\alpha \in (0, 2]$, D_{A^r} плотно в \mathcal{Z} , если $\alpha \in (0, 1)$. Тогда существует разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$

уравнения (1), такое, что $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq Ke^{at}$ при некоторых $K > 1$, $a \in \mathbb{R}_+$, тогда и только тогда, когда $A \in C_\alpha(K, a)$. При этом

$$S(t) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nt} \left(I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+a)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} H^{(k)}(n+a) \right), \quad t > 0,$$

где $H(\lambda) := \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$.

Работа поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

- [1] Bajlekova E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces: PhD thesis. Eindhoven, Eindhoven University of Technology, 2001.

Резонансы в нелинейных системах с затухающими чирпированными возмущениями

Султанов О.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается класс сильно нелинейных автономных систем на плоскости с осциллирующими возмущениями. Предполагается, что интенсивность возмущений затухает со временем, а частота полиномиально растет. Обсуждается долговременное поведение траекторий возмущенной системы вдали от равновесия. Показано, что в зависимости от структуры и параметров возмущений система имеет по крайней мере два асимптотических режима: режим синхронизации и режим фазового дрейфа. В первом случае существуют резонансные решения с неограниченно растущей энергией. Исследована устойчивость и асимптотика на бесконечности для таких решений с помощью комбинации техники усреднения и метода функций Ляпунова. Предложенная теория применяется к осциллятору Дуффинга с различными затухающими колебательными возмущениями.

- [1] O. A. Sultanov, Resonances in asymptotically autonomous systems with a decaying chirped-frequency excitation, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 28 (2023), 1719–1749.

Опрессовка скважин для диагностики трещин ГРП

Султанова А. А., Яхина К. Р., Махота А.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Рассмотрим вертикальную скважину постоянного сечения, пусть жидкость в скважине находится в гидростатическом равновесии. В верхней части скважины по уровню жидкости находится герметичная полость, заполненная газом, Верхняя часть полости закрыта, нижняя часть ограничена подвижным поршнем. Предполагается, что вся скважина за исключением полости с газом, заполнена флюидом. В нижней части скважины находится перфорированный участок, через который флюид может перетекать в пласт.

В некоторый момент времени давление в верхней части трубы резко увеличивается до значения P_g . В результате этого подвижный нижний поршень приходит в движение, продавливая жидкость в пласт через перфорированную зону. Постепенно давление в пласте будет возвращаться к первоначальному давлению P_0 . Полость, заполненная газом, играет роль пружины, выталкивающей поршень. Изучается изменение давления в полости (движение поршня) в случаях наличия или отсутствия вертикальной трещины ГРП. Для решения поставленной задачи используются формулы, описывающие о фильтрацию флюида в трещине ГРП, из работы Шагапова В.Ш. и Нагаевой З.М. [1].

- [1] Нагаева З. М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81, № 3. – С. 319 – 329.
- [2] Хусаинов И. Г. Моделирование процесса релаксации давления в скважине после ее опрессовки при наличии плоской или круговой границ // Вестник Башкирского университета. 2020. Т. 25. №1. с. 4-11. <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2020.1.1>

Обращение сферического преобразования Радона в n -мерной полосе

Сысоев С.Е.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Для $x, y \in R^n$ обозначим $x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Через $S(a, r)$ обозначим сферу с центром $a \in \{x \in R^n : x_n = 0\}$ и радиусом

$r > 0$. Для непрерывной финитной функции f с носителем в верхнем полупространстве $P = \{x \in R^n : x_n > 0\}$ положим

$$Mf(a, r) = \int_{S(a, r)} f(x) dS,$$

где dS – элемент площади поверхности сферы $S(a, r)$. Известно [1] решение задачи восстановления функции f по данным $Mf(a, r)$, заданных для всех сфер с центрами на гиперплоскости $x_n = 0$.

Рассмотрим задачу восстановления функции f в n -мерной полосе $H = \{x \in R^n : 0 < x_n < h\}$, где $h > 0$, исходя из интегралов $Mf(a, r)$, заданных только для сфер с центрами на гиперплоскости $x_n = 0$ и радиусами $0 < r < h$, то есть для семейства верхних полусфер, содержащихся в n -мерной полосе H . Эта задача имеет единственное решение [2]. Она сводится к решению внешней задачи для преобразования Радона функции g с носителем в эллипсоиде

$$E = \{y \in R^n : \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y_k^2}{1+h^2} + \frac{(y_n - h^2)^2}{(1+h^2)^2} < 1\}.$$

Эта функция связана с f соотношением

$$f(x) = \frac{2^n(1+h^2)^{(n+1)/2}x_n}{(1+x^2)^n} g\left(\frac{2\sqrt{1+h^2}x'}{1+x^2}, \frac{1+2h^2-x^2}{1+x^2}\right),$$

а ее преобразование Радона

$$Rg(\xi, p) = \frac{Mf\left(\frac{\sqrt{1+h^2}\xi'}{p+\xi_n}, \frac{\sqrt{(1+h^2)(1-p^2)+h^2(p+\xi_n)^2}}{|p+\xi_n|}\right)}{\sqrt{(1+h^2)(1-p^2)+h^2(p+\xi_n)^2}}.$$

известно для всех гиперплоскостей, не пересекающих единичный шар $B = \{y \in R^n : |y| < 1\} \subset E$. Восстановив функцию g и используя связь между f и g , находим f в полосе H .

[1] A.Denisjuk, *Fract. Calc. and Appl. Anal.*, 2 (1999), No 1, p. 31–46.

[2] С.Е.Сысоев, *Успехи мат. наук*, 52 (1997), No 4, с. 213–214.

К теоретическим представлениям о разложении метастабильного гидрата метана

Тазетдинов Б.И.

Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск, Россия

Рассмотрен процесс разложения газогидрата метана при атмосферном давлении, находящегося в перегретом состоянии по отношению к равновесной температуре (193 К) при положительных ($T > 273$ К) и отрицательных температурах ($T < 273$ К) в соответствии с имеющимися экспериментальными данными. Причем в области отрицательных температур выделены два температурных диапазона ($193 \text{ К} < T < 240 \text{ К}$ и $240 \text{ К} < T < 273 \text{ К}$), а в области положительных температур один ($T > 273 \text{ К}$). Для диапазона низких отрицательных температур при построении теоретической модели принято, что основным доминирующим фактором, определяющим интенсивность разложения газогидрата на лед и газ, является кинетика аррениусовского типа и кондуктивный теплоперенос. Причем здесь рассмотрены две схемы разложения фронтальная и объемная. Для диапазона высоких отрицательных температур, где в опытах наблюдается эффект аномальной консервации, в теоретической модели принято, что процесс выхода газа из состава гидрата лимитируется диффузионным механизмом переноса газа через твердую фазу или поверхностную корку льда. В области положительных температур принято, что скорость разложения определяется интенсивностью потока тепла через стекающий слой водяной пленки, образованной за счет разложения гидрата. Расчеты проводились при различных начальных и граничных температурах, результаты которых анализировались и сопоставлялись применительно к имеющимся экспериментальным данным [1, 2].

- [1] Laura A. Stern, Susan Circone, Stephen H. Kirby, and William B. Durham Temperature, pressure, and compositional effects on anomalous or «self» preservation of gas hydrates // Proc. Of the 4th. intern. Conf. on Gas Hydrates. Yokohama, Japan. 2002. P. 673–677
- [2] Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И. К теории разложения метастабильного гидрата // Теоретические основы химической технологии. 2013. Т.47. №4. С. 454-463.

Снижение давления пара вследствие конденсации при контакте с жидкостью

Тазетдинова Ю.А.

Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск, Россия

Изучается задача о снижении давления пара в замкнутом объеме вследствие конденсации на межфазной границе с холодной жидкостью. Получены приближенные формулы, описывающие законы падения давления в случае контакта пара с холодной водой в виде слоя жидкости на горизонтальной поверхности, а также в виде капель.

Система основных уравнений состоит из уравнения неразрывности, теплопроводности, уравнения состояния для газа, Клапейрона-Клаузиуса с системой граничных условий - баланса массы и тепла [1]. Задача решена в двух постановках - при контакте воды с паром на горизонтальной поверхности и при инъекции капель воды в пар. Для каждого случая получены интегро-дифференциальные уравнения, которые решены методом преобразования Лапласа [2]. Показано, что для оперативного снижения давления наиболее целесообразным является введение жидкости в виде капель [3, 4].

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
- [2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798
- [3] Хабеев Н.С., Шагапов В.Ш., Юмагулова Ю.А. Снижение давления пара в замкнутом объеме вследствие конденсации на границе контакта с холодной жидкостью // ПММ. 2013. Т.77. Вып.1. С. 49-56
- [4] Khabeev N.S., Shagapov V.S., Yumagulova Y.A., Bailey S.S. Evolution of vapor pressure at contact with liquid // Acta Astronautica. 2015. №114. P. 147-151.

Исследования методом электронно-парамагнитного резонанса радикалов этил мальтола образованных путем разрыва О-Н связи

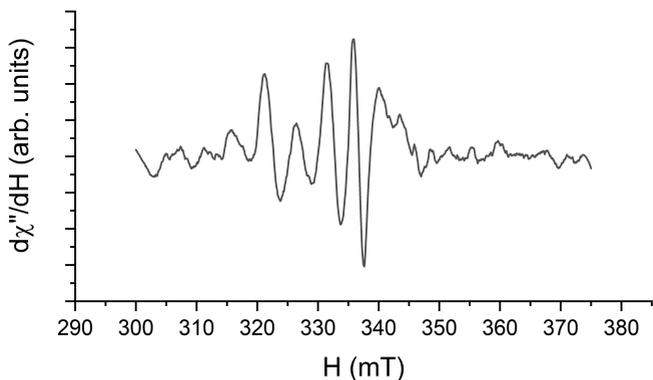
Таюпов М.М.¹, Яцьк И.В.², Суханов А.А.²

¹Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

²КФТИ им. Е.К. Завойского КазНЦ РАН

Экспериментальный образец получали путем окисления этил мальтола, растворенного в толуоле, диоксидом свинца PbO_2 . Пять раз проводили операцию по удалению кислорода из образца методом замораживание – откачка – размораживание. В данном случае, при окислении

исходного вещества происходит отрыв гидроксильного водорода с образованием соответствующего радикала (аналогичный процесс в случае молекулы мальтола не наблюдался). Измерения проводились на ЭПР спектрометре «Elexsys E 580» фирмы «Bruker», работающем в X диапазоне с частотой 9.4 МГц, при комнатной температуре ($T=293$ °К).



Как показал эксперимент, основная группа линий на спектре, включающая в себя четыре линии, возникает при взаимодействии неспаренного электрона с группой, состоящей из трех атомов водорода, расположенных на конце этильной группы.

Управление структурой и оптическими свойствами ЖК-капель путем модификации поверхности.

**Тимиров Ю.И., Хазимуллин М.В., Басырова Е.Р.,
Скалдин О.А.**

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Возможностью управления топологической структурой ЖК-капель при изменении граничных условий при помощи поверхностно-активных или фоточувствительных материалов являются актуальной задачей современности.

В данной работе мы изучаем способ получения контролируемого изменения контактного ЖК-капель с подложкой путем модификации поверхности подложек. Для достижения цели работы подложки обрабатывались фторированным силаном при различной времени выдержки образцов. Модификация поверхности токопроводящих ИТО-подложек проводилось методом химического парофазного осаждения фторированного

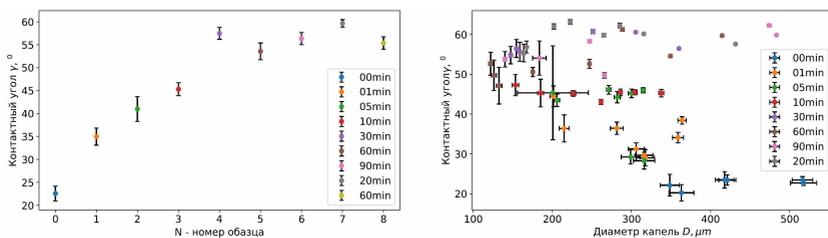


Рис. 1: Зависимость контактного угла от времени выдержки в камере осаждения (слева); зависимость контактного угла от размера ЖК-капель от степени модификации поверхности (справа).

силана. ЖК-капли сажались на поверхность с помощью микропипетки с внутренним диаметром $\sim 1 - 2$ мкм.

В работе показано, что с увеличением времени выдержки подложек в камере осаждения степень модификации поверхности меняется, что позволяет получить плавный рост контактного угла капель с подложкой. Дальнейшее же увеличение времени выдержки подложек позволяет получать сидячие капли с контактным углом до $\sim 90^\circ$. Среднее значения контактного угла капель на модифицированных фторированным силаном не зависят от размера (диаметра) посаженных капель (рис. 1). Так же обсуждаются и механизмы изменения контактного угла и формирование структуры ЖК-капель от степени упаковки монослоя фторированного силана на поверхности подложки. Полученные результаты обеспечивают основу для дальнейших экспериментальных исследований ориентационной структуры и топологических дефектов в ЖК-каплях.

Об одном классе начально-краевых задач для уравнений динамики вязкоупругих сред

Туров М.М.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

В работе [1] была введена названная дефектом целочисленная характеристика m^* задачи типа Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка с несколькими производными Римана — Лиувилля, которая характеризует отклонение количества произвольных начальных условий в задаче от максимального их количества. Были получены абстрактные теоремы об однозначной разрешимости таких задач. Про-

иллюстрируем данные результаты на некоторых примерах начально-краевых задач для уравнений в частных производных.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k}v(\xi, 0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = m^*, m^* + 1, \dots, m - 1, \quad (1)$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (2)$$

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = \chi D_t^{\delta_1} \Delta v(\xi, t) + \nu D_t^{\delta_2} \Delta v(\xi, t) + \kappa D_t^{\delta_3} \Delta v(\xi, t) - r(\xi, t) + g(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (3)$$

$$\nabla \cdot v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (4)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\alpha > 0$, $\chi, \nu, \kappa \in \mathbb{R}$, $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $m - 1 < \max\{\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} \leq m \in \mathbb{N}$, некоторые или все числа δ_i могут быть отрицательными. Здесь D_t^β — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\beta \geq 0$ (или дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta > 0$ в случае $\beta < 0$) по переменной t , m^* — дефект задачи типа Коши. Неизвестными являются вектор-функции скорости $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ и градиента давления $r = (r_1, r_2, \dots, r_d) = \nabla p$, вектор-функция $g : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ задана.

Если $\alpha = \delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 < 0$, то система (3), (4) представляет собой линеаризацию обобщенной системы уравнений Осколкова динамики вязкоупругой жидкости с ядром $h(s, t) = \kappa(t - s)^{-\delta_3 - 1} / \Gamma(-\delta_3)$ в интегральном операторе. При $\alpha = 1$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = 0$, $\nu \neq 0$, $\kappa = 0$ (3), (4) есть линеаризованная система динамики жидкости Кельвина — Фойгта; если при этом $\nu = 0$, то (3), (4) — линеаризованная система динамики жидкости Скотт-Блэра.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

- [1] Fedorov V.E., Turov M.M. The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann–Liouville derivatives. Siberian Mathematical Journal, 2021, vol. 62, pp. 925–942.

Пространственные колебания изогнутого трубопровода на вибрирующем основании

Утяшев И.М., Шакирьянов М.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Исследованы пространственные колебания изогнутого двухопорного трубопровода с заключенной в нем жидкостью при поступательных

вибрационных движениях основания. Трубопровод крепится к опорам с помощью сферических шарниров. Одна из опор неподвижна относительно основания, другая, имеющая продольные упругие элементы крепления, может скользить по нему. Колебания основания происходят в горизонтальном направлении с равными амплитудами, частотами и фазами. Учитываются взаимодействия внутреннего постоянного давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы [1]. Деформации трубы, связанные с выходом ее оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми (отсутствует деформация кручения). Поэтому в основе исследования лежит модель изгибно-вращательных движений трубопровода. Согласно этой модели пространственные движения трубы рассматриваются как совокупность относительных изгибных колебаний в одной плоскости, переносных вращений этой плоскости вокруг прямой, проходящей через опоры, и переносных поступательных перемещений подвижного основания. В результате принятия данной модели пространственные колебания трубы описываются системой двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно угловых и изгибных перемещений. Функция прогиба трубопровода, удовлетворяющая шарнирным креплениям на опорах, аппроксимируется по первой основной форме. Подстановка аппроксимирующей функции в указанную выше систему и применение во втором ее уравнении метода Бубнова-Галеркина приводит к задаче Коши, которая далее решается численно методом Рунге-Кутты. Также изучен случай малых изгибных и угловых движений трубы, для которого получено аналитическое решение задачи. Числовые расчеты были проведены для стальной, титановой и композитной труб с равными длинами, внутренними радиусами и толщинами стенок. Для сравнительного анализа результатов вычислений для всех труб были построены графические зависимости угловых и изгибных перемещений от времени, их фазовые траектории, картины Пуанкаре и спектры частот.

- [1] Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2017. No 6. С. 83-96.

**Об одном свойстве уравнений с распределенной производной
Герасимова — Капуто, заданной интегралом Стилтеса
Филин Н.В., Фёдоров В.Е.**

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть \mathcal{Z} — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства \mathcal{Z} в \mathcal{Z} ,

$\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в \mathcal{Z} , действующих в пространство \mathcal{Z} . Обозначим $S_{\theta,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\}$ при $\theta \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$. При $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$ для функции ограниченной вариации $\mu : (b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим интеграл Римана — Стильтьеса через $W(\lambda) := \int_b^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$.

Пусть оператор $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что $W(\lambda) \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ $\left\| (W(\lambda)I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{|\lambda|K(\theta, a)}{|W(\lambda)||\lambda - a|}$.

В таком случае мы будем говорить что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$.

В [1] показано, что $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда существует разрешающее семейство операторов уравнения

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) = Az(t),$$

где D^α — оператор производной Герасимова — Капуто. Показано, что такое семейство в случае неограниченного оператора A может существовать только при $c \leq 2$:

Теорема [1] Пусть $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, $2 < c$, функция $\mu : (b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ имеет ограниченную вариацию, c — точка вариации меры $d\mu(t)$, $\mu(t) \in \mathbb{R}$ для всех t из левой окрестности точки c , $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$. Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

- [1] Fedorov V. E., Filin N. V. On the Solvability of Equations with a Distributed Fractional Derivative Given by the Stieltjes Integral // Mathematics. 2022. Vol.10, № 2979. P. 1–20.

Асимптотическое решение задачи о температурном поле в стволе действующей скважины

Филиппов А.И., Зеленова М.А.

Уфимский университет науки и технологий, Стерлитамакский филиал,
г. Стерлитамак, Россия

Классическая модель температурного поля в скважине, представленная в виде задачи сопряжения для уравнения гиперболического типа первого порядка, основана на использовании закона Ньютона-Рихмана для описания теплообмена потока жидкости в стволе скважины с окружающей средой. Впервые модели такого рода развиты в работах Ю.А. Намиота, Э.Б. Чекалюка и др. В дальнейшем эти результаты послужили для развития скважинной термометрии и в настоящее время широко используются другими авторами, несмотря на то что созданы другие более совершенные модели [1], в том числе основанные на использовании асимптотических подходов.

Основным недостатком классических моделей, использующих закон Ньютона-Рихмана, являются то, что они описывают усреднённые по сечению скважины температурные поля и не позволяют детально описывать радиальные распределения температуры в скважине. Здесь рассматривается одна из возможностей устранения этого недостатка путём использования асимптотических представлений решения задачи, которые развиты в работах [2,3].

В отличие от классических работ, рассмотрена новая задача о температурном поле в потоке флюида в скважине, которая обеспечивает более детальный учёт процесса теплообмена потока с окружающей средой. Для этого постановка задачи осуществлена с использованием уравнения конвективной теплопроводности, учитывающего радиальный кондуктивный поток тепла, представленный радиальной компонентой оператора Лапласа, и осевой конвективный поток, выраженный соответствующей компонентой градиента температуры. Решение задачи построено на основе асимптотического метода. Авторами предложен метод параметризации задачи, основанный на дополнении радиальной части оператора Лапласа множителем, обратным формальному асимптотическому параметру. Разработана оригинальная процедура расщепления уравнений, содержащих коэффициенты асимптотического разложения соседних порядков, на основе которой осуществлена постановка задач для нулевого и первого коэффициентов разложения и построены аналитические решения этих задач. Для случая, когда коэффициенты уравнения конвективной теплопроводности являются постоянными, показано, что найденные решения задач совпадают с соответствующими коэффициентами разложения точного решения в ряд Маклорена по асимпто-

ческому параметру.

Показано, что при созданной параметризации нулевой коэффициент описывает усреднённое по сечению области значение температуры, а первый коэффициент уточняет радиальное распределение температурного поля.

Преимуществом развитого метода является возможность построения аналитических решений задач для уравнений математической физики с переменными коэффициентами и нелинейных задач.

- [1] Филиппов А.И., Ковальский А.А., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Губайдуллин М.Р. Макроскопическое фильтрационное поле давления в среде с двойной пористостью // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 4. С. 863-874.
- [2] Филиппов А.И., Щеглова Е.П. Интерпретационная модель радиального термокаротажка // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 3. С. 741-752.
- [3] Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А. Метод покоэффициентного осреднения в задаче о ламинарном течении газа в скважине // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 1 (347). С. 71-82.
- [4] Филиппов А.И., Шабаров А.Б., Ахметова О.В. Температурное поле турбулентного потока в скважине с учетом зависимости теплоемкости от температуры // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 4. - С. 575 - 581. DOI: 10.31857/S004036440003638-5.

Математическая модель формирования зоны проникновения долота в процессе вскрытия проницаемого пласта бурением

Филиппов А.И.¹, Зеленова М.А.¹, Левина Т.М.²

¹Уфимский университет науки и технологий, Стерлитамакский филиал, г. Стерлитамак, Россия; ²Институт нефтепереработки и нефтехимии Уфимского государственного нефтяного технического университета в городе Салавате, г. Салават, Россия

Математическая модель формирования зоны проникновения фильтра бурового раствора с учётом конечной скорости проходки долота, основана на использовании асимптотического метода, развитого ранее для исследования задачи о ламинарном течении газа в скважине. Изначально для построения таких математических моделей в научной литературе сформировались два подхода. Первый подход предполагает

усложнение модели за счет расширения возможных факторов, определяющих поля насыщенности в зоне проникновения. Комплексные модели такого рода создаются на основе конечно-разностных методов. Недостатком таких моделей является сложность анализа результатов расчетов с целью выделения вклада каждого процесса в отдельности.

Второй подход основан на создании математических моделей, отражающих влияние определяющих факторов. Преимуществом такого подхода является возможность расширенного использования аналитических моделей, которые позволяют более детально выявлять вклад каждого из факторов. Вместе с тем, реализация таких подходов требует использования и создания новых методов математической физики, что представляет существенные трудности. Модели, созданные на основе второго подхода, часто используются как интерпретационные, которые позволяют определить «кажущиеся» значения физических параметров, например, кажущееся удельное сопротивление при использовании электрокаротажа [1].

На основе совершенствования развитой ранее модификации асимптотического метода авторами найдено решение нелинейной двумерной задачи о насыщенности в пласте ограниченной толщины с учётом процесса вскрытия пласта бурением. В отличие от классических работ рассмотрена задача формирования зоны проникновения фильтрата бурового раствора с учётом конечной скорости проходки долота, которая получена с помощью закона Дарси и функции насыщенности в виде соотношения Баклея – Леверетта. Это обеспечивает более детальный учёт того, что на входе в пористую среду формируются изосаты, каждая из которых движется с собственной скоростью. На основе полученных решений созданы программы и выполнены расчёты пространственно-временных распределений функции нефтенасыщенности в зоне проникновения бурового раствора в проницаемый пласт, вскрываемого буровой скважиной [2]. Использование развитой математической модели позволяет усовершенствовать интерпретацию результатов промысловых геофизических исследований для определения характера насыщенности проницаемых пластов и технологию бурения с целью уменьшения экранирующего влияния зоны проникновения.

- [1] Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А. Метод покоэффициентного осреднения в задаче о ламинарном течении газа в скважине // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 1. С. 71–82.
- [2] Филиппов А.И., Зеленова М.А., Кабиров И.Ф., Левина Т.М. Пространственно-временные распределения насыщенности при за-

Задачи тепломассопереноса с нелокальным интегральным условием

Филиппов А.И., Михайлов П.Н.

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ,
г. Стерлитамак, Россия; Уфимский университет науки и технологий,
Стерлитамакский филиал, г. Стерлитамак, Россия

Задачи о полях давления составляют основу теории массопереноса в пористой среде и имеют большое практическое значение для нефте- и газодобычи, гидрогеологии и экологии [1 – 3]. Многообразие природных условий и развитие технологии добычи неуклонно выдвигают новые теоретические задачи, требующие развития новых подходов и методов исследований [1, 4]. К этому числу относятся задачи о полях давления в слоисто-неоднородных пластах, поскольку соответствующие уравнения пьезопроводности в этом случае содержат физические параметры, зависящие от пространственных координат, а подходы к решению таких задач развиты недостаточно [5].

В реальных условиях границы интервалов перфорации не совпадают с границами пласта. Это, с одной стороны, связано с технологическими трудностями, с другой стороны, часто геологические условия, например, при наличии водо-нефтяного контакта, позволяют перфорировать только часть пласта. Указанное обстоятельство приводит к необходимости решения задач о полях давления, в которых учтено, что только перфорированный центральный слой пласта подвержен эксплуатации. Такие задачи важны для учета вертикальных потоков в пластах, которые определяют нефтеотдачу из неперфорированных частей пласта.

Классические аналитические решения задач о поле давления при фильтрации в пористой среде получены преимущественно для однородных и изотропных пластов. Однако все природные коллекторы неоднородны по толщине и простираюнию [1 – 6]. По этой причине исследование фильтрационных процессов приводит к необходимости учета неоднородности пластов и зависимости коэффициента проницаемости от пространственных координат. Это существенно усложняет решение задач, в сравнении с рассмотренными в [7 – 11], поскольку входящие в эти задачи дифференциальные уравнения в частных производных содержат переменные коэффициенты. Кроме того, такие задачи естественным образом приводят к необходимости выполнения нелокальных интегральных

условий. Ввиду сложности задач фильтрации, для их решения используются приближенные аналитические и численные методы [4 – 14], либо постановка задач существенно упрощается [10, 11]. Для построения более точных физико-математических моделей фильтрации требуется разработка новых и развитие существующих методов моделирования. В работе представлены результаты, полученные асимптотическим методом.

Показано: 1) классическая теория заданного отбора, положенная в основу в теорию разработки нефтегазовых месторождений и интерпретации скважинных барограмм, неадекватно отражает физические процессы в призабойной зоне в реальных нефтяных пластах, 2) для совершенствования моделей необходимо использование решений задач о взаимосвязанных полях давления в скважине и пласте, 3) разработанная аналитическая и численная модель массопереноса в слоисто неоднородных коллекторах, которая позволяет учесть вертикальные фильтрационные потоки, может служить основой для развития теории добычи трудноизвлекаемых запасов нефти, объем которых значительно превышают разрабатываемых ныне, 4) результаты вычислительных экспериментов создают основу для развития оперативных физических методов определения параметров призабойной зоны пластов на основе пьезометрии.

- [1] Чекалюк Э.Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. Киев: ГИТЛ УССР, 1965, 228 с.
- [2] Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М.: Недра, 1959.
- [3] Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. ? М.: Институт компьютерных исследований, 2004. ? 609 с.
- [4] Филиппов А.И., Ахметова О.В., Филиппов И.М. Фильтрационное поле давления в неоднородном пласте при постоянном отборе // Инженерно-физический журнал. 2012. ? Т. 85. № 1. ? С. 3?17.
- [5] Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А. Асимптотическое представление фильтрационного поля в пласте со слоистой неоднородностью // Прикладная физика и математика. ? 2017. ? № 6. ? С. 33?45.
- [6] Дмитриев Н.М., Кадет В.В., Михайлов Н.Н. и др. Эффект асимметрии при фильтрации в анизотропных пористых средах // Технологии нефти и газа. 2007. № 1 (48). С. 52 – 55.
- [7] Исламов Д.Ф., Садретдинов А.А. Исследование температурного поля в слоистом пласте//Известия Томского политехнического университета. 2019. № 330. С. 27-36.

- [8] Ахметова О.В., Филиппов А.И., Филиппов И.М. Квазистационарные поля давления при линейной фильтрации в неоднородном анизотропном пласте в асимптотическом приближении // Механика жидкости и газа, 2012. № 3. С. 89–100.
- [9] Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А. и др. Первое асимптотическое приближение задачи о поле давления в неоднородной ортотропной пористой среде // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. №1. С. 5 – 12.
- [10] Сираев Р.Р. Фильтрация жидкости в неоднородной пористой среде // Фундаментальные исследования. 2013. №11. С. 451-455.
- [11] Хасанов М.М., Торопов К.В., Лубнин А.А. Определение профиля вертикального распределения проницаемости с учетом данных эксплуатации скважин // Нефтяное хозяйство. 2009. № 8. С. 26 – 31.
- [12] Морозов П.Е. Полуаналитическое решение задачи нестационарного потока жидкости к несовершенной скважине // Уч. записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки, 2017. Т. 159, №13. – С. 340-353.
- [13] Цапаев А.В. Решение задач трехфазной фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами на гетерогенных вычислительных системах // Уч. записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки, 2013. Т. 155, №3. – С. 71-79.
- [14] Бахтий Н.С., Кутрунов В.Н. Приток жидкости к несовершенной скважине из радиального пласта // Вестник ТюмГУ, 2010, №6. – С. 134-139.

Эволюция давления в окрестности скважины с вертикальной трещиной ГРП

Фокеева Н.О.

Институт механики УФИЦ РАН имени Р.Р. Мавлютова, г.Уфа, Россия

Рассматривается вертикальная нагнетательная скважина с трещиной ГРП, закрепленной пропантом. Ширина трещины меньше ее длины и давление вдоль трещины не зависит от глубины, что позволяет использовать двумерные модели.

Найдена связь между динамикой давления на забое скважины, в трещине, в пласте при изменении расхода жидкости. Изучено влияние коллекторских характеристик пласта, трещины ГРП, геометрии трещины на эволюцию давления в трещине гидроразрыва [1], [2].

В данной работе рассматриваются кусочно-постоянные изменения давления или дебита скважины. Приводится результат и для непрерывного изменения давления или дебита. Для достижения цели аналитически решено интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} - \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}}. \quad (1)$$

Полученное в работе решение протестировано на фактических промысловых данных [3]. Результат показал, что построенная математическая модель воспроизводит фильтрацию флюида в скважине с трещиной ГРП. Есть возможность определить при известных коллекторских характеристиках дебит или забойное давление при заданном законе изменения давления на забое или дебита скважины, или, наоборот, зная кривые «дебит-давление» для реальной скважины определить проводимость трещины и описать изменение давления в трещине ГРП.

- [1] Башмаков Р.А., Фокеева Н.О., Шагапов В.Ш. Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины. ПМТФ. 2022. Т.63, №3. С. 117 – 127.
- [2] Башмаков Р.А., Фокеева Н.О., Шагапов В.Ш. Давление и дебит при переходных режимах работы скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва. ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 998 – 1012.
- [3] Shagapov, V.S., Bashmakov, R.A., Fokeeva, N.O., Shammatova, A.A. Evolution of Filtration Pressure Waves in a Hydraulic Fracture during Transient-Well-Operation Modes. Mathematics 2023, 11, 98.

Огибающие по выпуклому конусу из (плюри-)субгармонических функций и их применения

Хабибуллин Б.Н.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Через m_d обозначаем меру Лебега на евклидовом пространстве \mathbb{R}^d размерности $d \in \{1, 2, \dots\}$. Один из характерных наших результатов — **Теорема.** Пусть H — выпуклый конус, состоящий из субгармонических функций на области $D \subset \mathbb{R}^d$, не содержащий константу $-\infty$ и содержащий константы 0 и -1 , а также для любой последовательности функций из H , локально ограниченной сверху на D , верхняя регуляризация поточечного верхнего предела этой последовательности

принадлежит выпуклому конусу H , когда верхний предел этой последовательности не константа $-\infty$. Для любой пары функций $u \in H$ и $M \in H$ существование функции $h \in H$, с которой $u + h \leq M$ на D , равносильно существованию какого-нибудь замкнутого шара $\bar{B}_o(r) \subset D$ радиуса $r > 0$ с центром $o \in D$, для которого

$$\sup_{\mu} \left(\int_D u \, d\mu - \int_D M \, d\mu \right) < +\infty,$$

где \sup берётся по всем положительным мерам μ с компактным носителем в D , удовлетворяющим ограничению

$$\int_{\bar{B}_o(r)} h \, dm_d \leq \int_D h \, d\mu \quad \text{для всех функций } h \in H.$$

Это развитие результатов из [1]– [2] будет применяться к нетривиальности весовых классов голоморфных функций, распределению нулей для этих функций, а также к представлению мероморфных функций в виде отношения голоморфных функций с ограничениями на их рост.

- [1] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б. Порядковые версии теоремы Хана–Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // В кн.: Комплексный анализ. Математическая физика. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. М.: ВИНТИ РАН, Т. 162, 93–135, 2019; перевод на англ.: Khabibullin B. N., Rozit A. P., Khabibullina E. B. Order versions of the Hahn–Banach theorem and envelopes. II. Applications to function theory // Journal of Mathematical Sciences, **257**:3 (2021), 366–409.
- [2] Хабибуллин Б. Н. Огибающие в теории функций. Уфа.: РИЦ Башкирского государственного университета, 140 с., ISBN 978-5-7477-5396-9, 2021.

Определение плотности газа по собственной частоте колебаний нанопластины, контактирующей с газом

Хакимов А.Г.

ИМех им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пластина опирается на опоры, расположенные на равных расстояниях L и допускающие свободный поворот. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на пластину в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности пластины контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. На нижнюю и верхнюю

поверхность пластины действуют давления p_1 и p_2 жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Здесь p_1, p_2 – избыточные давления. При определении нагрузки q исходим из предположения, что ρ_1, ρ_2 и p_1, p_2 остаются постоянными при изгибе пластины. В [1] определяется низшая собственная частота пластинки с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действия присоединенной массы газовой среды с удаленными границами. Решение обратной задачи определения плотности несжимаемой среды по собственной частоте изгибных колебаний следует из [1] для $\rho_1 = \rho_2, p_1 = p_2$

$$\rho_1 = \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \rho h \beta \left(1 + \frac{p_1 h}{D \beta^2} \right) - \frac{\rho h \beta}{2}, \quad \omega_0^2 = \frac{D \beta^4}{\rho h}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta = \pi/L,$$

где E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала, h – толщина пластины, ω_0 – частота пластины, не контактирующей с жидкостью. Решение обратной задачи определения плотности сжимаемой среды по собственной частоте изгибных колебаний имеет вид

$$1 - Z + \frac{p_1 \beta^2}{\rho \omega_0^2} - \frac{2\rho_1 Z}{\rho h \beta \sqrt{1 - \frac{\rho_1 \omega^2}{\kappa_1 p_1 \beta^2}}} = 0, \quad Z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2},$$

и определяется из уравнения

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \frac{[\rho(Z-1)\omega_0^2 + p_1 \beta^2] \sqrt{\frac{\beta^2 c_1^2 - Z \omega_0^2}{c_1^2}}}{Z \omega_0^2}, \quad Z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad c_1^2 = \kappa_1 \frac{p_1}{\rho_1}, \quad \rho_{1a} = \frac{\rho_1 p_{1a}}{p_1}.$$

При $E = 76$ ГПа, $\nu = 0.37, \rho = 10500$ кг/м³, $h = 20$ нм, $L = 2000$ нм, $\kappa_1 = 1.4$, атмосферном давлении $p_a = 0.1$ МПа, $p_1 = 2$ МПа, $f_1 = 6.745$ МГц решение уравнения дает корень: $\rho_{1a} = 1.29$ кг/м³.

По низшей частоте изгибных колебаний пластины определяется плотность среды.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 22-21-00578.

- [1] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. №3. С. 88-96.

Оценки мажорирующих рядов аналитических функций

Хасянов Р.Ш.

Санкт-Петербургский государственный университет

В 1914 году Х. Бор, изучая ряды Дирихле, обнаружил следующий интересный факт в комплексном анализе, который называется теперь явлением Бора [2]:

Теорема. Пусть $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ и $\|f\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$ в единичном круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Тогда $M_r f := \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \leq 1$, $0 \leq r \leq 1/3$. При этом константа $1/3$ – неулучшаемая.

В докладе будут обсуждены разные вопросы о радиусе Бора для производных аналитических функций в круге, а именно мы рассмотрим задачи об оценках мажорирующих рядов функций через равномерную норму их производных и, наоборот, оценки мажорирующих рядов производных функций через норму. Некоторые из результатов получены в более общей постановке. Для этого мы ввели понятие радиуса Бора пары операторов. С помощью него мы обобщили теорему Б. Бховмика и Н. Даса о сравнении мажорирующих рядов подчинённых функций [1].

Далее через $\mathcal{H}(D)$ мы обозначаем пространство всех голоморфных в области D функций, через $\mathcal{C}_m[z]$ – подпространство многочленов до степени m включительно, $\mathcal{C}_{-1}[z] := \{0\}$.

Определение. Пусть $T_1 : \mathcal{H}(t_1 \mathbb{D}) / \mathcal{C}_{m-1}[z] \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $T_2 : \mathcal{H}(t_2 \mathbb{D}) / \mathcal{C}_{m-1}[z] \rightarrow \mathcal{H}(s_2 \mathbb{D})$ – линейные операторы. Максимальный R , для которого

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |T_1 f(z)| \leq 1 \implies M_r(T_2 f) \leq 1, \quad r \leq R,$$

будем называть **радиусом Бора пары операторов** T_1 и T_2 и обозначать $R_{T_1 \rightarrow T_2}$. Если $T_1 = T_2$, просто пишем R_{T_1} .

Теорема. Пусть $f(z) = \sum_{n \geq m} a_n z^n$ и пусть оператор $Tf(z) = \sum_{n \geq m} c_n a_n z^{n-m}$, где $m \geq 0$, обладает свойством $|c_n| \leq |c_{n+1}|$, $n \geq m$. Тогда если $Tf \prec Tg$ (или $|Tf(z)| \leq |Tg(z)|$) в \mathbb{D} , то

$$M_r f \leq M_r(Tg), \quad r \leq R_{T \rightarrow id}.$$

- [1] B. Bhowmik, N. Das, Bohr phenomenon for subordinating families of certain univalent functions, J. Math. Anal. Appl. 462(2) (2018), 1087-1098.
- [2] H. Bohr, A theorem concerning power series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 13 (1914), 1-5.

Оценка адиабатического электронного сродства молекул по времени жизни их газофазных молекулярных отрицательных ионов относительно автоотщепления электрона

**Хатымов Р.В.^{1,2}, Муфтахов М.В.¹, Туктаров Р.Ф.¹,
Шукин П.В.¹, Хатымова Л.З.¹**

¹Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

²Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева

Адиабатическое сродство к электрону (EA_a) является таким же важным индивидуальным энергетическим параметром молекул, как и энергия ионизации и энтальпия образования. Наряду с фотонными, полярографическими, методами электронно-захватного детектора и межмолекулярного переноса электрона, для определения EA_a молекул в последние годы стал использоваться еще один метод, базирующийся на зависимости от величины EA_a масс-спектрометрически измеримого времени жизни τ_a газофазных молекулярных отрицательных ионов (ОИ, M^-) относительно автоотщепления электрона [1]. Для численного моделирования экспериментальных $\tau_a(M^-)$ разработаны теоретические аррениусовская [2], простая аррениусовская модели [3] и модель мономолекулярного распада ОИ на основе статистической теории Райса-Рамспергера-Касселя-Маркуса (РПКМ) [4].

В настоящей работе с помощью модели РПКМ оценивалась величина EA_a полициклического аза-ароматического соединения акридина. Полученные методом масс-спектрометрии резонансного захвата электронов [5] кривые зависимости выхода молекулярных ОИ M^- и нейтральных продуктов M_0 от энергии захватываемых электронов, определенная из отношения этих кривых экспериментальная зависимость $\tau_a^{\text{эксп}}$ и результат теоретического моделирования $\tau_a^{\text{теор}}$ вместе с значениями варьируемых параметров модели, при которых получено наилучшее воспроизведение $\tau_a^{\text{эксп}}$, показаны на рис. 1. Установлено, что воспроизводимость минимума, наблюдаемого на кривой $\tau_a^{\text{эксп}}$ в области 1.5 эВ, зависит от степени асимметрии аппаратной функции энергетического распределения электронов захвата, и наилучшие результаты достигаются при использовании в качестве последней кривой SF_6^- , записанной в том же эксперименте для калибровки шкалы энергии электронов.

Экспериментальная величина $EA_a = 1.08$ эВ для акридина, оцененная с помощью теоретической модели РПКМ, несколько превышает данные метода фотоэлектронной спектроскопии ОИ 0.896 ± 0.010 эВ [6], однако находится в удовлетворительном согласии с результатами квантово-химических расчетов ΔSCF с учетом энергии нулевых колебаний методами РВЕ/3z (1.11 эВ) и В3LYP/6-311+G(d,p) (1.04 эВ).

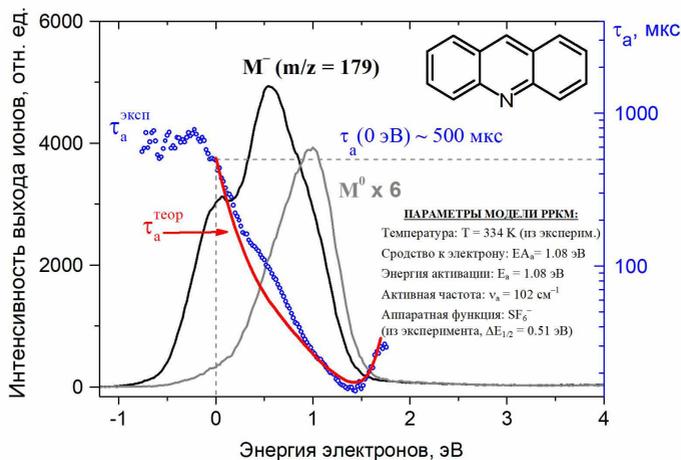


Рис. 1: Кривые эффективного выхода долгоживущих ОИ M^- из акридина, продуктов их автонеutralизации M_0 , экспериментальные и теоретические кривые времени жизни τ_a ионов M^- в зависимости от энергии электронов.

- [1] Chen E.S., Chen E.C.M. // Rapid Commun. Mass Spectrom., 2018. V.32. P.604.
- [2] Matejcik S., Mark T.D., Spanel P., Smith D., Jaffke T., Illenberger E. // J. Chem. Phys., 1995. V.102. P.2516.
- [3] Asfandiarov N.L., Pshenichnyuk S.A., Vorob'ev A.S., Nafikova E.P., Modelli A. // Rapid Commun. Mass Spectrom., 2015. V.29. P.910.
- [4] Khatymov R.V., Shchukin P.V., Muftakhov M.V., Yakushchenko I.K., Yarmolenko O.V., Pankratyev E.Y. // Phys. Chem. Chem. Phys., 2020. V.22. – P. 3073
- [5] Хатымов Р.В., Терентьев А.Г. // Известия АН, Сер. хим., 2021. V.4. P.605.
- [6] Kokubo S., Ando N., Koyasu K., Mitsui M., Nakajima A. // J. Chem. Phys., 2004. V.121. P.11112.

Математическое моделирование очистки прискважинной зоны с помощью энергии взрыва

Хусаинов И.Г.

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, г.Стерлитамак, Россия

Как известно, из пласта углеводороды добываются в течение продолжительного времени. В процессе их фильтрации через поровые каналы происходит засорение этих каналов. Это происходит за счет того, что твердые частицы (смолистые вещества, парафины и т.п.) оседают на стенки пор. Радиус свободной части пор уменьшается, и это приводит к уменьшению скорости фильтрации, т.е. к снижению дебита скважины [1].

Для очистки призабойной зоны пласта используют кислотные ванны, закачку раствора поверхностно-активных веществ и другие экологически вредные способы. В данной работе для очистки пор призабойной зоны предлагается использовать горячий газ, например, энергию взрыва. Если внутри скважины создать взрыв небольшой мощности, то давление в скважине увеличивается и температура газа поднимается. В результате этого высокотемпературный газ проникает глубоко в пористые породы и нагревает и расплавляет парафины, осевших на стенках пор. Это приводит к очистке призабойной зоны пласта.

Кроме этого, исследования, проведенные по изменению давления внутри скважины, позволяют сделать оценку коллекторских параметров пласта.

Математическая модель включает закон сохранения флюида, уравнение пьезопроводности, закона Дарси, уравнение состояния. Записаны начальное и граничное условия. Используя принцип Дюгамеля получено нелинейное интегральное уравнение, описывающее зависимость давления от времени внутри плоско-одномерной полости. Нелинейное интегральное уравнение было исследовано численным методом. Получены зависимости периода полувосстановления давления внутри полости от параметра проницаемости среды. Показана, что с помощью взрыва можно очистить пористую зону вокруг полости и оценить параметр проницаемости среды.

- [1] Шагапов В.Ш., Хусаинов И.Г., Хакимова З.Р. Релаксация давления в трубчатом канале, имеющем поврежденный участок, после опресовки. Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 2. С. 466-473.

О линейризуемости вырожденных особых точек бинарных дифференциальных уравнений

Черепанова Е.А., Воронин С.М.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Топологическая классификация вырожденных особых точек бинарных дифференциальных уравнений исследовалась в работе [1]. В этой работе было показано, что, в типичных случаях, вырожденное бинарное дифференциальное уравнение (то есть, неявное дифференциальное уравнение вида

$$ap^2 + 2bp + c = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

с аналитическими в $(\mathbb{R}^2, 0)$ коэффициентами $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$, такими, что $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$) топологически эквивалентно одной из восьми указанных в работе нормальных форм.

Все восемь топологических нормальных форм из [1] являются “линейными” (их коэффициенты a, b, c – линейные функции). В связи с этим, интересным является вопрос об аналитической приводимости вырожденного бинарного дифференциального уравнения к линейному виду. В типичных ситуациях, частичный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Из формальной линейризуемости типичного вырожденного бинарного дифференциального уравнения следует его аналитическая линейризуемость: формальные линейризующие ряды сходятся.

- [1] J.W. Bruce, F. Tari. On binary differential equations, *Nonlinearity*, No. 8(2), 255 – 271, 1995.

Моделирование нестационарной фильтрации жидкости в системе пласт-трещина гидроразрыва

Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Моделирование нестационарной фильтрации жидкости в пластах с вертикальной трещиной гидроразрыва является актуальным с точки зрения оценки дебита скважины с трещиной гидроразрыва и развития методов гидродинамических исследований пластов. Эту задачу можно исследовать на основе модели билинейной фильтрации, описывающей два взаимно перпендикулярных потока жидкости в пласте и в трещине. Математическая постановка задачи включает систему двух взаимосвязанных уравнений пьезопроводности с соответствующими краевыми условиями. Решения этой задачи при различных краевых условиях

рассмотрены в работах [1,2] методом интегральных преобразований Лапласа.

В докладе приводится сравнительный анализ полученных в этих работах решений.

- [1] Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81. – № 3. – С. 319-329.
- [2] Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Механика жидкости и газа», Известия Российской академии наук, номер 5, 2019 г. С. 6-14.

Вселенная как 3D-брана и поле тяготения в ней Шарипов Р.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Вопреки наблюдаемой трёхмерности вселенной её описание в СТО, ОТО и космологии является четырёхмерным и смешивает события прошлого, настоящего и будущего. Взамен понятия одновременности, ставшего относительным, в [1] было предложено понятие *временного* (ударение на «о») или *поврежённого сосуществования* (temporal coexistence), из которого выводится представление вселенной как 3D-браны с трёхмерной метрикой g_{ij} , описывающей поле тяготения. Эволюция метрики в зависимости от космологического времени $x^0 = ct$ даётся уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{b}_{ij}}{c} - \sum_{k=1}^3 \frac{\dot{b}_k^k}{c} g_{ij} - \sum_{k=1}^3 (b_{ki} b_j^k + b_{kj} b_i^k) - \frac{g_{ij}}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 b_q^k b_k^q - \\ & - \frac{g_{ij}}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 b_k^k b_q^q + \sum_{k=1}^3 b_k^k b_{ij} + R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ij}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $b_{ij} = 1/2 c^{-1} \dot{g}_{ij}$, c — скорость света, γ — гравитационная постоянная, Λ — космологическая константа, R_{ij} — компоненты трёхмерного тензора Риччи, R — трёхмерная скалярная кривизна, T_{ij} трёхмерная часть компонент тензора энергии-импульса, обычно интерпретируемая как тензор напряжений или тензор давления для материи.

Уравнение (1) было выделено из четырёхмерных уравнений Эйнштейна как их часть в [1]. Затем в [2] и [3] оно было получено уже в чисто трёхмерном формализме в рамках лагранжевого и гамильтонового подходов. Доклад посвящён изложению именно этих подходов к описанию эволюции вселенной.

- [1] Sharipov R.A., *A three-dimensional brane universe in a four-dimensional spacetime with a Big Bang*, 2022, e-print viXra:2207.0173, 1–10.
- [2] Sharipov R.A., *Lagrangian approach to deriving the gravity equations for a 3D-Brane universe*, 2023, e-print viXra:2301.0033, 1–12.
- [3] Sharipov R.A., *Hamiltonian approach to deriving the gravity equations for a 3D-Brane universe*, 2023, e-print viXra:2302.0120, 1–21.

Гамильтоновы координаты нелинейных уравнений Лурье Юмагулов М.Г.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$L \left(\frac{d}{dt} \right) y = M \left(\frac{d}{dt} \right) f(y), \quad (1)$$

в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1 p^{2n-2} + a_2 p^{2n-4} + \dots + a_{n-1} p^2 + a_n,$$

$$M(p) = b_0 p^{2m} + b_1 p^{2m-2} + \dots + b_{m-1} p^2 + b_m$$

– операторные многочлены, содержащие степени только четных порядков ($0 \leq m < n$), а $f(y)$ – скалярная непрерывная функция. Такие уравнения называют [1] *уравнениями Лурье*. Они часто возникают в теории гамильтоновых систем. Естественен вопрос о конструировании соответствующей эквивалентной гамильтоновой системы.

В докладе обсуждается вопрос об условиях, при которых для уравнения (1) существует эквивалентная ей гамильтонова система вида

$$x' = JAx + \xi f(y), \quad y = (x(t), c),$$

в которой гамильтонова матрица JA имеет нормальную форму, ξ и c – некоторые векторы из R^{2n} . Предлагается конструктивная схема перехода от уравнения (1) к эквивалентной гамильтоновой системе.

- [1] Красносельский А. М., Рачинский Д. И. О гамильтоновости систем Лурье. // Автоматика и телемеханика, 2000. № 8. С. 25–29.

Научное издание

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Сборник материалов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 13 – 17 марта 2023 г.)*

В авторской редакции

Подписано в печать 07.03.2023 г. Формат 60x90/16.

Печать: цифровая.

Усл. печ. л. 7,50. Тираж 80. Заказ 1773.



**Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»**

450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120

<https://aeterna-ufa.ru>

info@aeterna-ufa.ru

+7 (347) 266 60 68