**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**
**УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР**
**РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**
**БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР**
**ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА**
**ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

# КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

***Сборник материалов***
***Международной научной конференции***
***(оз. Банное, 14 – 18 марта 2022 г.)***

**УФА**
**АЭТЕРНА**
**2022**

УДК 51
ББК 22.1
К 637



К 637 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения:** сборник материалов Международной научной конференции (оз. Банное, 14 – 18 марта 2022 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2022. – 84 с.

ISBN 978-5-00177-351-1

Представленные в сборнике тезисы посвящены различным областям фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются различные постановки нелинейных задач. Также рассматриваются задачи теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-00177-351-1

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION
OF THE RUSSIAN FEDERATION

UFA FEDERAL RESEARCH CENTRE
OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

BASHKIR STATE UNIVERSITY

SCIENTIFIC EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER
OF VOLGA FEDERAL DISTRICT

CHELYABINSK STATE UNIVERSITY

# COMPLEX ANALYSIS, MATHEMATICAL PHYSICS AND NONLINEAR EQUATIONS

*Book of abstracts*
*of the International conference*
*Bannoe Lake, Russia*
*March 14 - 18, 2022*

**UFA – 2022**

UDC 51
BBK 22.1

**Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations:** Book of Abstracts of the International Conference. – Ufa, Russia: Aeterna, 2022. – 84 p.

ISBN 978-5-00177-351-1

Presented in the collection abstracts are devoted to various areas of fundamental and applied mathematics. In most of the works, different formulations of nonlinear problems are investigated. Also problems of approximation theory, inverse problems and equations with fractional derivatives are considered.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-00177-351-1

# Содержание

**Представление $D$-инвариантных подпространств в пространстве ультрадифференцируемых функций нормального типа на интервале**

**Абузярова Н.Ф.**

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\omega : [0;\infty) \to [0;\infty)$ — непрерывная, неубывающая функция, такая, что $\varphi(e^t) := \omega(e^t)$ выпукла на $[0;\infty)$ и при $x \to \infty$ $\omega(x) = o(x)$, $\ln x = o(\omega(x))$; $\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2}\mathrm{d}x < \infty$; $\forall \sigma > 1$ $\exists C > 0:$ $\omega(x+y) \le \sigma(\omega(x)+\omega(y))+C$, $\forall x,y \ge 0$. Далее, $\{[-c_k;c_k]\}_{k=1}^\infty$ — последовательность отрезков, исчерпывающая интервал $(-a;a)$, $\varphi^*$ — сопряженная по Юнгу к функции $\varphi$. Положим $\|f\|_{\omega,q,k} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\sup_{|x|\le c_k}\frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*(j/q)}}$, где $f \in C^\infty(-a;a)$, $q \in (0;1)$, $k = 1,2,\ldots,$

$$\mathcal{U}_a = \{f \in C^\infty(-a;a) : \ \|f\|_{\omega,q,k} < \infty \forall q \in (0;1), \ \forall k = 1,2,\ldots\}$$

— *пространство ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа на интервале* $(-a;a)$. Пусть $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ — оператор дифференцирования, действующий в $\mathcal{U}_a$, $W \subset \mathcal{U}_a$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно $D$, короче, $D$-*инвариантное* подпространство, $I_W$ — резидуальный промежуток подпространства $W$, а последовательность $\Lambda = \{(\lambda_k;m_k)\}$ такова, что множество всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в $W$, есть $\operatorname{Exp} W = \{t^j e^{-\mathrm{i}\lambda_k}t, \ j = 0,1,\ldots,m_k-1\}$. $D$-инвариантное подпространство $W$ допускает *спектральный синтез в слабом смысле*, если

$$W = \overline{W_I + \operatorname{span}\operatorname{Exp} W}. \tag{1}$$

Задача слабого спектрального синтеза изучена нами в [1].

**Теорема.** Пусть $D$-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{U}_a$ имеет вид (1) и резидуальный промежуток $I_W$ компактен в $(-a;a)$. Тогда найдутся два (быть может, совпадающих) ультрараспределения $S_1, S_2 \in \mathcal{U}'_a$, аннулирующих $W$, таких, что
$W = \{f \in \mathcal{U}_a : \quad S_j(f^{(n)}) = 0, \ n = 0,1,\ldots, \ j = 1,2\}$.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).*

[1] Abuzyarova N.F. Differentiation operator in the Beurling space of ultradifferentiable functions of normal type on an interval.// Lobachevskii J. of Math. 2022 (to appear)

# Steady-state radial solutions of 2D vector defocusing Gross-Pitaevskii equation

**G. L. Alfimov**[a,c], **N. A. Kutsenko**[a], **D. A. Zezyulin**[b,c]
[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;
[b] ITMO University, St. Petersburg, Russia;
[c] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia.

We consider the steady-state solutions for the system of coupled Gross-Pitaevskii equations

$$\begin{cases} i\Psi_{1,t} = -\Delta\Psi_1 + V(|\mathbf{r}|)\Psi_1 + (|\Psi_1|^2 + \beta|\Psi_2|^2)\Psi_1, \\ i\Psi_{2,t} = -\Delta\Psi_2 + V(|\mathbf{r}|)\Psi_2 + (\beta|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)\Psi_2. \end{cases} \tag{1}$$

Here $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ is the 2D Laplace operator, $V(|\mathbf{r}|)$, $\mathbf{r} = (x, y)$, is a trap potential and $\beta > 0$ is a real parameter. The model describes the dynamics of two-component Bose-Einstein condensate. We consider the steady-state solutions of (1) of the form

$$\Psi_{1,2}(t, r) = e^{-i\mu t}\psi_{1,2}(r), \tag{2}$$

where $r^2 = x^2 + y^2$ and $\mu$ is a real parameter.

The special class of the steady-state solutions for the system (1) are such that $\psi_1 = \psi_2$ (symmetric solutions). They can be regarded as one-parametric family depending on $\beta$ (for a fixed $\mu$) or $\mu$ (for a fixed $\beta$). To seek for the solutions such that $\psi_1 \neq \psi_2$ we employ the method of “filtering out” of singular solutions described in [1]. It was found that for the harmonic potential $V(r) = r^2$ such solutions (i) do exist; (ii) emerge as a result of pitchfork bifurcation of the family of the symmetric solutions.

The research is supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 20-11-19995)

[1] G.L.Alfimov, I.V.Barashenkov, A.P.Fedotov, V.V.Smirnov, D.A.Zezyulin, Physica D, **397**, 39-53 (2019).

**Нековалентные структуры отрицательных ионов, образующиеся при диссоциативном захвате электронов молекулами**

**Асфандиаров Н.Л., Муфтахов М.В., Сафронов А.М., Пшеничнюк С.А.**

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Методом спектроскопии диссоциативного захвата электронов исследована молекула 1-хлорнафталина. Экспериментальные данные интерпретированы с помощью квантово-химических расчетов в приближении DFT CAM-B3LYP/6-311+G(d,p), см. рис. 1.

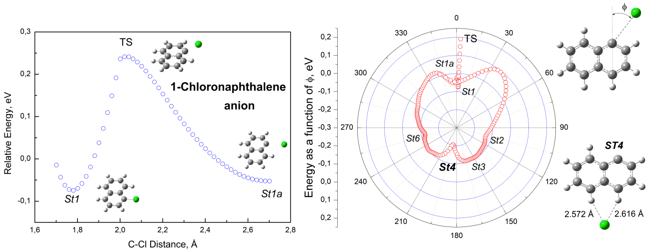



Рис. 1: CAM-B3LYP расчеты энергий аниона $1ClN^-$. Слева – профиль полной энергии (только электронная часть) как функция длины связи $r_{C-Cl}$. Справа показана электронная часть полной энергии аниона как функции угла $\phi$ между связью $C - Cl$ и линией, соединяющей противолежащие атомы углерода в кольце. Наиболее стабильная структура St4 показана в правой части. TS означает переходное состояние аниона с атомом хлора, выведенным из плоскости кольца.

Наиболее энергетически стабильной структурой аниона является структура St4, изображенная на рис. 1. Ее относительная энергия с учетом энергии нулевых колебаний $E_{zpv} = -0.296$ эВ практически совпадает с экспериментально измеренной величиной $EA_a = 0.2771 \pm 0.003$ эВ [1]. Исследование ряда бром- и хлор-замещенных производных бифенила, нафталина и антрацена показало, что анионы этих молекул способны образовывать необычные структуры с нековалентными связями H—Hal—H, повышающими их стабильность по сравнению с «обычными» структурами с $r_{C-Cl}$ 1.9 Å.

[1] Steelhammer, J.C.; Wentworth, W.E., J. Chem. Phys., 51, 5, 1802 (1969).

# Вырожденное нелинейное уравнение с дробными производными Герасимова – Капуто.

**Байбулатова Г.Д.**
Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (линейный непрерывный оператор), действующий из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (линейный замкнутый плотно определенный в $\mathfrak{X}$ оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$). Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$, $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен, если множество $\sigma^L(M)$ ограничено. Возьмем контур $\gamma$, внутри которого лежит $\sigma^L(M)$. Тогда [1] операторы $P = \frac{1}{2\pi i}\int R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $Q = \frac{1}{2\pi i}\int L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ – проекторы. Положим $\mathfrak{X}^0 := \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 := \ker Q$; $\mathfrak{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathfrak{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Через $L_k$ $(M_k)$ обозначим сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathfrak{X}^k$ $(D_{M_k} := \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{X}^k)$, $k = 0,1$. Тогда [1] $M_1 \in \mathcal{L}\big(\mathfrak{X}^1;\mathfrak{Y}^1\big)$, $M_0 \in \mathcal{C}l\big(\mathfrak{X}^0;\mathfrak{Y}^0\big)$, $L_k \in \mathcal{L}\big(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k\big)$, $k = 0,1$; существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0\big)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1\big)$. Обозначим $G := M_0^{-1}L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, если он $(L,\sigma)$-ограничен и верно, что $G^p \neq \mathbb{O}$, $G^{p+1} = \mathbb{O}$. Рассмотрим задачу

$$D^\alpha_t Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}_t x(t), D^{\alpha_2}_t x(t), \ldots, D^{\alpha_n}_t x(t)), \tag{1}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{2}$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{N}$, $k = 1,2,\ldots,n$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $D^\alpha_t$, $D^{\alpha_1}_t, \ldots D^{\alpha_n}_t$ — дробные производные Герасимова — Капуто, $N : [t_0,T] \times \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{Y}$.

**Теорема**. Пусть $m_n \leq \frac{m-1}{2}$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, оператор $M$ $(L,0)$-ограничен, $N : [t_0,T] \times \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{Y}$ для всех $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathfrak{X}$ и почти всех $t \in (t_0,T)$ выполняется $N(t,z_1,\ldots,z_n) = N_1(t,Pz_1,\ldots,Pz_n)$ при некотором $N_1 : [t_0,T] \times (\mathfrak{X}^1)^n \to \mathfrak{Y}$, таком, что отображение $QN_1 : [t_0,T] \times (\mathfrak{X}^1)^n \to \mathfrak{Y}$ каратеодориево и равномерно липшицево по $(z_1,\ldots,z_n) \in (\mathfrak{X}^1)^n$, для всех $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathfrak{X}^1$ и почти всюду на $(t_0,T)$ $\|QN_1(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)\|_\mathfrak{Y} \leq a(t) + c\sum\limits_{k=1}^{n}\|z_k\|_\mathfrak{X}$ для некоторых $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$; $(I-Q)N_1 \in C^{m_n}([t_0,T] \times (\mathfrak{X}^1)^n;\mathfrak{Y})$, $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathfrak{X}^1$, для решения задачи

$$D^\alpha_t v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D^{\alpha_1}_t v(t), D^{\alpha_2}_t v(t), \ldots, D^{\alpha_n}_t v(t)),$$

$$v^{(k)}(t_0) = x_k,\ k = 0,1,\ldots,m-1,$$

выполняются равенства: если $\alpha_k < m_k$, то $v^{(m_k+r)}(t_0) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $r = \overline{0, m_n - 1}$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное сильное решение.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1 и грантом РФФИ № 20-31-90015.

[1] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP. 216 p.

**Устойчивость точек равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в задаче о параметрическом резонансе**

**Белова А.С.**

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Рассматривается нелинейная периодическая гамильтонова система с двумя степенями свободы, зависящая от малого параметра $\varepsilon$ вида

$$\frac{dx}{dt} = J\nabla H(x,t,\varepsilon), \qquad x \in R^4, \tag{1}$$

в котором гамильтониан $H(x,t,\varepsilon)$ представим в виде $H(x,t,\varepsilon) = H_2(x,t,\varepsilon) + H_3(x,t,\varepsilon) + \ldots$, здесь $H_j(x,t,\varepsilon)$ – однородные порядка $j$ относительно $x$ и $T$-периодические по $t$ функции;

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad \nabla H(x,t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} H'_{x_1} \\ H'_{x_2} \\ H'_{x_3} \\ H'_{x_4} \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что $H_2$ представима в виде $H_2 = H_{20}(x) + \varepsilon H_{21}(x,t)$, где $H_{20}(x), H_{21}(x,t)$ – квадратичные формы по $x$.

Пусть $x = 0$ – положение равновесия аналитической гамильтоновой системы (1). В этом случае систему (1) удается представить виде

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon A_1(t)\right]x + a(x,\varepsilon,t), \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{2}$$

где $A_0$, $A_1(t)$ – вещественные симметрические матрицы, $A_1(t)$ – $T$-периодическая по $t$ матрица (т.е. $A_1(t+T,\varepsilon) \equiv A_1(t,\varepsilon)$), функция $\|a(x,\varepsilon,t)\| = O(\|x^2\|)$ при $x \to 0$, равномерно по $\varepsilon$ и $t$.

Наряду с уравнением (2) рассматриваются линейная периодическая гамильтонова система (ЛПГС) вида

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon A_1(t)\right]x, \qquad x \in \mathbb{R}^4. \tag{3}$$

В докладе представлены результаты об устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы (2) и устойчивость системы (3) в ситуации, при выполнении одного из условий:

**S1)** среди собственных значений матрицы $JA_0$ имеется хотя бы одно $i\omega_0$ такое, что выполняется условие простого резонанса:

$$\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T} \quad \text{при некотором целом неотрицательном} \quad k_0;$$

**S2)** для собственных значений $i\omega_1$ и $i\omega_2$ выполняется условие комбинационного резонанса:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi k_0}{T} \quad \text{при некотором целом} \quad k_0.$$

Условия типа **S1** или **S2** означают, что рассматривается задача о параметрическом резонансе (см., например, [1]).

Проводится исследование устойчивости по Ляпунову систем (1) – (2) в указанных условиях **S1** и **S2**. Это исследование базируется на методах теории возмущения и развитии некоторых результатов, полученные в [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

[1] Маркеев А.П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике.* М.: Наука. 1978.

[2] M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova and A. S. Belova, *Perturbation theory methods in problem of parametric resonance for linear periodic hamiltonian systems*, Ufa Math. J., **13** (3), 174–190 (2021).

## О задаче Чигера для областей вращения

**Бобков В.Е.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Мы исследуем свойства множеств Чигера ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеющих вращательную симметрию относительно выделенной оси. Если множество Чигера $C$ такой области $\Omega$ наследует вращательную симметрию, то её свободная граница $\partial C \cap \Omega$ состоит из кусков поверхностей Делоне, являющихся поверхностями вращения постоянной средней кривизны. Мы показываем, что если $\Omega$ выпукла, то свободная граница множества $C$ может состоять только из кусков сфер и нодоидов. Этот результат остается в силе для невыпуклых областей, при условии что производящая кривая множества $C$ замкнута, выпукла и достаточно гладка. Результаты проиллюстрированы примерами нахождения областей Чигера для цилиндров, конусов и двойных конусов. Кроме того, мы приводим численный пример невыпуклой области, такой что в свободной границе её множества Чигера могут появляться куски ундулоидов и цилиндров.

Доклад по работе [1].

[1] Bobkov, V., & Parini, E. (2021). On the Cheeger problem for rotationally invariant domains. Manuscripta Mathematica, 166(3), 503-522.

## Обратная задача для уравнения с дробными производными

**Бойко К.В.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $D_t^\alpha$ — дробная производная Герасимова — Капуто порядка $\alpha > 0$ [1], $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Рассмотрим обратную задачу для уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j D_t^{\alpha_j} z(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \leq m$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\varphi \in C([0,T]; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Z}$, $T > 0$, с начальными условиями Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l \in \mathcal{Z}, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

и с условием переопределения

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \tag{3}$$

где $\mu$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0,T]$. Обозначим

$$\psi := z_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l d\mu(t), \quad \chi := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z(t-s)\varphi(s) ds,$$

где оператор-функции $Z_l(t)$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $Z(t)$ определены в [1].

Решением обратной задачи (1)–(3) (с неизвестным $u \in \mathcal{Z}$) называется пара $(z(t), u)$, где функция $z$ является решением задачи (1), (2) с данным $u$ и удовлетворяет условию переопределения (3).

Задачу (1)–(3) назовем корректной, если для любых $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $(z(t), u)$, для которого

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leq C \left( \sum_{l=0}^{m-1} \|z_l\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} \right),$$

где константа $C$ не зависит от $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$.

В данной работе в терминах условий на операторы в уравнении получен критерий корректности задачи (1)–(3). При выполнении этого критерия решение будет имеет вид $u = \chi^{-1}\psi$.

Исследование выполнено за счет гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

[1] Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 85–104.

## О бифуркации порогов существенного спектра в присутствии спектральной сингулярности

**Борисов Д.И.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В работе исследуется оператор Шрёдингера на плоскости с потенциалом вида $V_1(x)+V_2(y)+\varepsilon W(x,y)$, где $V_2$ и $W$ – финитные комплексные потенциалы. Предполагается, что одномерные операторы Шредингера $\mathcal{H}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$ и $\mathcal{H}_2 = -\frac{d^2}{dy^2} + V_2(y)$ обладают следующими свойствами: $\mathcal{H}_1$ имеет два вещественных собственных значения $\Lambda_0$, $\Lambda_1$, а $\mathcal{H}_2$ имеет виртуальный уровень на краю существенного спектра $\lambda = 0$ и спектральную сингулярность во внутренней точке существенного спектра $\lambda = \mu > 0$. При этом происходит наложение собственных чисел и спектральной сингулярности во внутреннем пороге $\lambda_0$ существенного спектра двумерного оператора в смысле равенства $\lambda_0 := \Lambda_0 + \mu = \Lambda_1$. В работе показано, что возмущение потенциалом $\varepsilon W$ приводит к бифуркации внутреннего порога $\lambda_0$ на четыре спектральных объекта, которые являются резонансами и/или собственными значениями. Эти объекты соответствуют полюсам локальных мероморфных продолжений резольвенты, причём наличие спектральной сингулярности у оператора $\mathcal{H}_2$ качественно меняет структуру этих полюсов по сравнению с ранее исследованным случаем, когда спектральная сингулярность отсутствовала. В работе детально исследован данный эффект и описано асимптотическое поведение возникающих полюсов и соответствующих спектральных объектов рассматриваемого оператора Шрёдингера.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).

## О росте решений уравнения свертки на лучах

**Волчков В.В., Волчков Вит.В.**
Донецкий национальный университет, г.Донецк

Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство распределений в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство распределений с компактными носителями в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Обозначим через $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ множество всех радиальных распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Простейшим примером распределения из класса $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ является дельта-функция Дирака $\delta_0$ с носителем в нуле. В работе изучается рост решений уравнения свертки $f * T = 0$ на заданном луче в $\mathbb{R}^n$. Для $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ положим $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : f * T = 0\}$.

**Теорема 1**. Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ и $T \neq c\delta_0$, $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тогда для любого луча $L$ в $\mathbb{R}^n$ и любой функции $g \in C(L)$ существует функция $f \in (C^\infty \cap \mathcal{D}'_T)(\mathbb{R}^n)$, такая что $|f(x)| > |g(x)|$ для всех $x \in L$. В частности, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ существует решение $u$ уравнения Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0$, удовлетворяющее условию $|u(x)| > |g(x)|$, $x \in L$.

Нетрудно видеть, что условие радиальности распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ в теореме 1 является существенным. Действительно, если, например, $T = \frac{\partial}{\partial x_1}\delta_0$, то любое решение уравнения $f * T = 0$ не зависит от переменной $x_1$, и указанное утверждение не выполняется.

Отметим также, что теорема 1, вообще говоря, неверна и для одномерного уравнения $f * T = 0$, где естественным аналогом условия радиальности является условие четности распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$. Соответствующий контрпример легко построить, например, для распределения $T = \left(\frac{d}{dx_1}\right)^2\delta_0$.

Относительно других результатов, связанных с ростом решений уравнения свертки, см. [1]– [3].

[1] Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[2] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. New York: Springer, 2009.

[3] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.

## О периодических в среднем векторных полях на плоскости Лобачевского

**Волчкова Н.П., Волчков Вит.В.**
Донецкий национальный технический университет, Донецкий национальный университет, г.Донецк

Получено описание векторных полей, имеющих нулевой поток через все окружности фиксированного радиуса на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$. Будем использовать для $\mathbb{H}^2$ хорошо известную модель Пуанкаре. Все обозначения ниже, используемые без объяснений, см. в [1, часть 2, гл. 2].

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = (i\lambda + 1)/2$. Для $k \in \mathbb{Z}$, $\rho \in [0, 1)$ положим $H_{\lambda,k}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j (\nu)_j}{(2j+|k|+2)(|k|+1)_j \, j!} \rho^{2j} F\left(2 - \nu, j + \frac{|k|+2}{2}; j + 1 + \frac{|k|+2}{2}; \rho^2\right)$. Пусть $\overrightarrow{n_h}$ – единичный вектор внешней нормали в $\mathbb{H}^2$, $ds_h$ – элемент длины на $\mathbb{H}^2$, $\mathcal{V}_r(B_R) = \left\{\overrightarrow{A} \in C(B_R) : \int_{gS_r} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{n_h} \rangle \, ds_h = 0 \ \forall g \in \mathcal{M}(B) : gS_r \subset B_R\right\}$.

**Теорема 1**. Пусть $r > 0$, $r < R \leq +\infty$, $\overrightarrow{A} : B_R \to \mathbb{C}^2$ – векторное поле класса $C^\infty$. Для того чтобы $\overrightarrow{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{A}(z) = (1 - |z|^2)^2 \mathcal{B}(z) \overrightarrow{z} + \overrightarrow{C}(z)$, где $\overrightarrow{C}$ – соленоидальное векторное поле класса $C^\infty$, $\mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(\rho e^{i\varphi})$ – скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами $\mathcal{B}_k(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,\lambda} \, \rho^{|k|} H_{\lambda,k}(\rho)$, в которых константы $\gamma_{k,\lambda}$ убывают быстрее любой фиксированной степени $\lambda$ при $\lambda \to \infty$.

Относительно скалярных аналогов теоремы 1 и их обобщений см. [1–3].

[1] Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[2] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. New York: Springer, 2009.

[3] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.

# Аналитические нормальные формы иррегулярных особых точек линейных систем

**Воронин С.М.**
ЧелГУ, г.Челябинск, Россия

Мы будем рассматривать линейные системы вида

$$t^2\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{C}^n, \quad t \in (\mathbf{C}, 0) \tag{1}$$

с голоморфной в $(\mathbf{C}, 0)$ матричнозначной функцией $A(t)$. Как обычно (см. [1] ), две такие системы будем называть *аналитически (формально) эквивалентными*, если одну из них можно перевести в другую заменой координат вида $x \mapsto H(t)x$ с голоморфной в $(\mathbf{C}, 0)$ (формальной) матрицей $H(t)$; эквивалентность будем называть *сильной* в случае $H(0) = E$. Система(1) называется *нерезонансной*, если все собственные значения матрицы $A(0)$ различны. Как формальная, так и аналитическая классификации систем вида (1) хорошо известны [1]. Так, нерезонансная система (1) формально эквивалентна системе $t^2\dot{x} = \Lambda(t)x$ с диагональной матрицей $\Lambda(t)$ вида $\Lambda(t) = \Lambda_0 + t\Lambda_1$. Однако приводимость к такой нормальной форме аналитической заменой, вообще говоря, невозможна: препятствием является нетривиальность так называемых операторов (матриц) Стокса. Отметим, что в задаче о строгой аналитической классификации нерезонансных систем (1) с фиксированной матрицей $A(0) = \Lambda_0$ имеется ровно $n^2$ модулей ($n$ «формальных» - элементов диагональной матрицы $\Lambda_1$, и $n^2 - n$ «аналитических» - нетривиальных элементов матриц Стокса, см. [2]). Но это в точности есть размерность пространства матриц размера $n \times n$. Этим замечанием была мотивирована следующая

**Гипотеза**. Нерезонансная система (1) в случае $A(0) = \Lambda_0$ строго аналитически эквивалентна (единственной!) системе вида

$$t^2\dot{x} = (\Lambda_0 + tB)x \tag{2}$$

Гипотеза эта оказалась неверной (частное сообщение Кристиан Руссо). Тем не менее, можно доказать следующую её «слабую» версию:

**Теорема**. Нерезонансная система (1), достаточно близкая к своей формальной нормальной форме, аналитически эквивалентна системе (2).

[1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения./ В.И.Арнольд, Ю.С.Ильяшенко // Итоги науки и техн., Соврем. проб. мат., Фундам.напр.. М:ВИНИТИ.-1985.-Т.1- С.71-140.

[2] Sibuya Y., Stokes phenomena. Bull.Amer.Math.Soc.,1977,83,1075-1077.

## Об одной бифуркации кривой особых точек

**Воронин С.М., Панов А.В.**
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В докладе будет рассказано об одной бифуркации кривой особых точек, возникшей в трехмерной динамической системе, определяющей кинематику сферически симметричных стационарных движений двухфазной среды.

При данной бифуркации на кривой особых точек возникают две более вырожденные точки (в этих точках два нулевых собственных значения у линейной части динамической систем). Часть кривой, заключенная между этими точками, становится притягивающим множеством. Наличие притягивающего множества сильно меняет характер кинематики двухфазной среды — появляется возможность непрерывного перехода через скорость звука.

Также в докладе будет рассмотрена задача о бифуркации таких особых точек в общем виде. А именно, в классе динамических систем с кривой особых точек выделим однопараметрическое семейство. Пусть в данном семействе при некотором значении параметра в некоторой точке особой кривой происходит зануление одного из собственных значений. Возникают вопросы о качественном описании динамики в окрестности указанной точки при различных значениях параметра, близких к бифуркационному, о типичности однопараметрического семейства в классе таких динамических систем и о нормальных формах типичных бифуркаций [1]. Для деформаций такого вида выведены условия типичности. Рассмотрены две деформации, удовлетворяющие условиям типичности.

[1] Арнольд В.И., Айфраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техн., Соврем. проб. мат., Фундам. напр.. М.: ВИНИТИ. - 1986. - Т.5 - С. 5-218.

## Теоремы об устойчивости максимального члена ряда Дирихле

**Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Впервые понятие устойчивости максимального члена введено в [1] для класса $D(\Lambda)$ рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it,\ \Lambda = \{\lambda_n\},\ 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1}$$

абсолютно сходящихся в $\mathbb{C}$. При этом предполагалось, что $\lambda_n$— нули целой функции конечного порядка, а $F$ имеет произвольный рост. По определению, максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (1) устойчив, если при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры (нулевой плотности, нулевой нижней плотности)

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma), \tag{2}$$

где $\mu^*(\sigma)$— максимальный член измененного ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n z}$ из $D(\Lambda)$.

В [1] показано: для того, чтобы максимальный член $\mu(\sigma)$ был устойчив, а именно, чтобы соотношение (2) выполнялось вне некоторого множества конечной меры, необходимо и достаточно, чтобы

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)}, \quad n \geq 1,$$

где $w$— некоторая мажоранта из класса сходимости $W$.

Этот результат в [1] был применен для доказательства утверждения, дающего ответ на одну гипотезу Полиа (1929).

В докладе речь пойдет об устойчивости максимального члена ряда Дирихле (1) заданного роста. Пусть $D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln M(\sigma) \leq \Phi(m\sigma)\}$, $m \in \mathbb{N}$, $D(\Phi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi)$, где $\Phi$— некоторая выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция. Наименьшую вогнутую мажоранту функции $\ln^+ n(t)$, $\ln^+ n(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, обозначим $n_l(t)$, где $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leq t} 1$.

Предположим, что $n_l(t) \leq \theta(t)$, $-\ln |b_n| \leq \theta(\lambda_n)$, $n \geq 1$, где $\theta$— некоторая возрастающая непрерывная функция, такая, что при $x \to \infty$

$$\frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = o(1), \tag{3}$$

$\varphi$— функция, обратная к $\Phi$.

**Теорема**. Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Phi)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой нижней плотности выполнялось соотношение устойчивости (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$|\ln |b_n|| \leq w(\lambda_n), \quad n \geq 1,$$

где $w$— некоторая возрастающая непрерывная функция, для которой на какой-то последовательности $\{x_n\}$, $x_n \uparrow \infty$, выполнялось условие (3).

[1] Гайсин А.М. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых// Матем. сб. 194: 8(2003), 55–82.

**Уточнение теоремы о неполноте системы экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$**

**Гайсин Р.А.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — произвольная последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность,

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n} z^{2n}.$$

Возьмем $M_{2n} = a_{2n}^{-1}$, $M_{2n+1} = \infty$.

Дугу $\gamma$, заданную уравнением $\gamma(t) = t + ih(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$, где функция $h$ удовлетворяет условию Липшица

$$\sup_{t_1 \neq t_2}\left|\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}\right| = M_\gamma < \infty,$$

будем называть *дугой ограниченного наклона.*

Доказана следующая

**Теорема 1.** *Пусть существует положительная вогнутая на $\mathbb{R}_+$ функция $\omega$, такая, что*

$$n(t) \leq \omega(t), \quad t > 0, \quad \int_1^{\infty}\frac{\omega(t)}{t^2}dt < \infty. \tag{1}$$

*Тогда найдется последовательность $\{N_n\}$, $\left(\frac{N_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \uparrow \infty$ при $n \to \infty$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n}{N_{n+1}} < \infty,$$

*такая, что*

$$N_n \leq M_n^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n^{\frac{1}{n}}} < \infty, \quad \frac{n}{N_n^{\frac{1}{n}}}\downarrow, \quad \frac{n^{1+\nu}}{N_n^{\frac{1}{n}}}\uparrow, \quad \nu > 0, \tag{2}$$

*причем для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $k \in \mathbb{N}$, для которого*

$$\ln N_n^{\frac{1}{n}} - \ln N_k^{\frac{1}{k}} \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)\ln n - c_0, \quad c_0 > 0. \tag{3}$$

Ранее была получена следующая

**Теорема 2.** *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \tag{4}$$

*и выполняется условие, аналогичное условию* (3) *из теоремы 1 для* $\{M_n^c\}$ *(*$\{M_n^c\}$ *— выпуклая регуляризация последовательности* $M_n$*), то система экспонент* $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ *не полна в* $C(\gamma)$ *для любой дуги ограниченного наклона* $\gamma$*.*

Теорема 1 уточняет теорему 2, а именно, пару условий (4) и (3) (для $\{M_n^c\}$) в следующем смысле. При условии (1) в теореме 2 мы можем предполагать выполнения условия (3) для последовательности не $\{M_n^c\}$, ибо существует последовательность чисел $N_n$, являющаяся минорантой $\{M_n^c\}$ (не обязательно логарифмически выпуклой), обладающей группой условий (2) и удовлетворяющей требуемому свойству (3).

## Дополнение к теореме типа Макинтайра–Евграфова

**Гайсина Г.А.**
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $D(\Lambda)$ — класс рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящихся во всей плоскости. Как известно, при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty \tag{2}$$

любая функция $F \in D(\Lambda)$ не ограничена на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Если ряд (2) расходится, то существует ряд (1), сумма которого ограничена на $\mathbb{R}_+$: для натуральных $\lambda_n$ это показано Макинтайром (1952); для последовательностей $\Lambda$, имеющих конечную верхнюю плотность $D$ и конечный индекс конденсации $\delta$ – Н.Н. Юсуповой (2009); пример более частного характера ранее был построен М.А. Евграфовым (1962) (подробнее об этом см. в [1]).

В [1] была доказана

**Теорема 1**. Пусть $D < \infty$, $\delta < \infty$. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty,$$

то существует ряд (1), сумма $F$ которого стремится к нулю вдоль $\mathbb{R}_+$, причем

$$d^*(F;\mathbb{R}_+) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln\mu^*(\sigma)} \le -1,$$

где

$$\mu^*(\sigma) = \max_{n\ge1}\{|a_n||L'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma}\}, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Основной результат, о котором будет идти речь в докладе, следующий: если выполняется условие (2), то $d^*(F;\mathbb{R}_+) \ge 0$.

Таким образом, верна

**Теорема 2**. Пусть

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < \infty, \quad \delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right| < \infty.$$

Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda)$ была верна оценка $d^*(F;\mathbb{R}_+) \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Фейера (2).

Оценка $d^*(F;\mathbb{R}_+)$ уточняет результаты работы [2] и означает, что функция $F \in D(\Lambda)$ не может сколь угодно быстро стремиться к нулю вдоль $\mathbb{R}_+$: существуют функция $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$, последовательность $\{x_n\}$, $x_n \uparrow \infty$, такие, что при $n \to \infty$

$$\ln|F(x_n)| > -\varepsilon(x_n)\ln\mu^*(x_n). \tag{3}$$

Аналогичная оценка для рядов Тейлора–Дирихле, т.е. для функций $F \in D(\mathbb{N})$, была получена Бёрлингом (1949): для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\{x > 0\colon\ \ln|F(x)| > -(1+\varepsilon)\ln M_F(x)\}, \tag{4}$$

$M_F(x) = \sup_{|t|<\infty}|F(x+it)|$, не ограничено (см. [2].

Как видно, оценка (3) гораздо лучше, чем (4), что обусловлено тем, что теорема 2 получена для рядов Дирихле с лакунами Фейера.


[1] Гайсин А.М., Гайсина Г.А. Оценка скорости роста и убывания функций в теоремах типа Макинтайра–Евграфова // Уфимский матем. журнал. 9:3 (2017), 27–37.

[2] Гайсин А.М. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 194:8 (2003), 55-82.

# Об одном интегрируемом полудискретном уравнении гиперболического типа

**Гарифуллин Р.Н.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

В докладе обсуждаются результаты полученные в ходе симметрийной классификации полудискретных уравнений гиперболического типа. Такие уравнения имеют вид:

$$u_{n+1,x} = f(u_{n,x}, u_{n+1}, u_n, x). \tag{1}$$

В качестве критерия интегрируемости требуется наличие двух высших симметрий, одна из которых в $x$-направлении:

$$u_{n,t} = g\left(x, u_n, u_{n,x}, u_{n,xx}, \ldots, \frac{\partial^N u_n}{\partial x^N}\right), \tag{2}$$

а вторая в $n$-направлении:

$$u_{n,\tau} = h(u_{n-M}, u_{n-M+1}, \ldots, u_{n+M-1}, u_{n+M}, x). \tag{3}$$

В работе [1] показано, что в этом случае высшие симметрии вида (2) являются уравнениями с постоянной сепарантой, которые полностью получены в статье [2]. Обозначения и определения смотри в статье [1].

Основное внимание доклада посвящено уравнению

$$\begin{aligned} u_{n+1,x}u_{n,x} =& a_1 u_{n+1,0}^2 u_{n,0}^2 + a_2 u_{n+1,0} u_{n,0}(u_{n+1,0} + u_{n,0}) \\ &+ a_3(u_{n+1,0}^2 + u_{n,0}^2) + a_5 u_{n+1,0} u_{n,0} \\ &+ a_6(u_{n+1,0} + u_{n,0}) + a_9. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $a_i$ произвольные константы. Это уравнение имеет высшие симметрии

$$u_{n,t} = u_{n,xxx} - \frac{3}{2}\frac{u_{n,xx}^2}{u_{n,x}} + \frac{c_4 u_n^4 + c_3 u_n^3 + c_2 u_n^2 + c_1 u_n + c_0}{u_{n,x}} \tag{5}$$

$$u_{n,\tau} = \frac{R(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}} \tag{6}$$

$$R(u,v,w) = 2uw(a_1v^2 + a_2v + a_3) + (u+w)(a_2v^2 + a_5v + a_6) + 2a_3v^2 + 2a_6v + 2a_9$$

Константы $c_i$ однозначно определяются в терминах $a_i$. Уравнения (5) и (6) известны, см. [2, 3], а уравнение (4) представляется новым.

Также на докладе обсуждается способ построения высшей симметрии вида (3), если известна пара связанных уравнений вида (1) и (2).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-11-00006)

[1] R.N.Garifullin, I.T.Habibullin. *Generalized symmetries and integrability conditions for hyperbolic type semi-discrete equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:20, 205201 (2021).

[2] А.Г. Мешков, В.В. Соколов. *Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой* // Уфимск. матем. журн. **4**:3, 104–154 (2012).

[3] R. Yamilov. *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**(45), R541 (2006).


**c**

## Интегро-дифференциальные уравнения типа Римана—Лиувилля в банаховых пространствах


Годова А.Д., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, РоссияИнтегро-дифференциальные уравнения типа Римана—Лиувилля в банаховых пространствах


Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, т.е. $A$ — линейный ограниченный оператор, $K \in C([0,\infty); \mathcal{L}(\mathcal{X}))$. Определим интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля

$$D^{m,K}x(t) := D^m(J^K x)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)x(s)ds,$$

где $D^m$ — производная порядка $m$.

**Теорема**. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$, существует преобразование Лапласа $\widehat{K}$, которое является однозначной аналитической функцией в $\Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > R_0, |\arg \mu| < \pi\}$ при некотором $R_0 > 0$ и удовлетворяет условию

$$\exists \chi > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} > c|\lambda|^{\chi-1}, \tag{1}$$

при этом для всех $\lambda \in \Omega_{R_0}$ существует $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Тогда для всех $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathcal{X}$ существует единственное решение задачи типа Коши $(J^K x)^{(k)}(0) = x_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, для уравнения $D^{m,K}x(t) = Ax(t)$. Решение имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} X_k(t)x_k,$$

где

$$X_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\lambda^{m-1-k}e^{\lambda t}d\lambda, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$\gamma := \gamma_R \cup \gamma_{R,+} \cup \gamma_{R,-}$ — положительно ориентированный контур, $\gamma_R := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\gamma_{R,+} := \{re^{i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $\gamma_{R,-} := \{re^{-i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $R > R_0$.

**Пример.** Помимо очевидного примера функции $K(s) = s^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, дающей дробную производную Римана — Лиувилля, рассмотрим более сложный пример. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $K(s) = s^{-\beta}E_{\alpha,1-\beta}(as^{\alpha})I$, где $E_{\alpha,1-\beta}$ — функция Миттаг-Леффлера. Тогда преобразование Лапласа $\widehat{K}(\lambda) = \lambda^{\alpha+\beta-1}(\lambda^{\alpha} - a)^{-1}I$ удовлетворяет условию (1) с $\chi \in (0, \beta)$ и обратима при $|\lambda| > a^{1/\alpha}$.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

## Darboux and Puiseux integrability for polynomial vector fields in the plane

**Demina M.V.**

Department of Applied Mathematics, HSE University, Moscow, Russia

The Darboux theory of integrability provides a method of constructing first integrals for a polynomial vector field. First integrals that can be found in the framework of this theory are expressible via Darboux or Liouville functions. In this talk we shall focus on the two-dimensional case [1]. The Darboux method is based on the number and properties of invariant algebraic curves and exponential invariants of the vector field. The great advantage of the method lies in the fact that it can give the necessary and sufficient conditions of integrability for multi-parameter families of vector fields.

The aim of this talk is to discuss some modern aspects of the Darboux theory of integrability. The problem of classifying irreducible invariant algebraic curves will be described in details. The main difficulty in deriving invariant algebraic curves lies in the fact that their degrees are not known in advance. We shall describe a method that makes finding the curves purely algebraic [2]. In addition, we plan to present a generalization of the Darboux theory of integrability. We call the new type of integrability as the Puiseux integrability [3]. If a polynomial vector field is Darboux or Liouville integrable, then it is Puiseux integrable. The converse statement is not valid in general. We shall demonstrate that the new theory is able to find the necessary and sufficient conditions of integrability with first integrals that are not Liouville functions.

Several applications of these two theories will be considered. To be more precise, we shall present the complete solution of the integrability problem for some families of polynomial Liénard vector fields.

*The research reported in this talk was supported by Russian Science Foundation grant 19–71–10003.*


[1] Singer M. F. Liouvillian first integrals of differential systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, **333**, 673–688 (1992).

[2] Demina M.V. Necessary and sufficient conditions for the existence of invariant algebraic curves. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **48**, 1–22 (2021).

[3] Demina M.V., Giné J., Valls C. *Qualitative Theory of Dynamical Systems.* **21 (2)**, 1–35 (2022).


## Математическая физика: о методике преподавания.

**Дик Е.Н., Арсланбекова С.А.**
ФГБОУ ВО БГАУ, Россияя

Дисциплина «Математическая физика» - возникла как математический аппарат изучения физических полей. В настоящее время круг вопросов математической физики связан с изучением различных физических процессов. Сюда относятся явления из области гидродинамики, теории теплопроводности, электродинамики, теории упругости и т.д. Математические задачи, которые являются моделями исследуемых процессов, содержат много общих элементов и составляют предмет математической физики. Во многих случаях математическими моделями реальных процессов являются дифференциальные уравнения с частными производными при определенных начальных условиях.

В настоящей работе излагается методика вывода уравнений и постановки задач математической физики.

Все многообразие линейных относительно старших производных (или просто линейных) уравнений может быть разделено на три класса (типа): гиперболический, параболический и эллиптический.

Уравнения в частных производных 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессом колебания; параболического типа – в задачах теории теплопроводности, диффузии. При исследовании стационарных процессов различной физической природы обычно приходят к уравнениям эллиптического типа.

Для изучения физических задач с помощью дифференциальных уравнений нужно, прежде всего, дать математическую формулировку задачи. Это делается по следующему плану:

1. Реальный физический процесс (явление, объект) заменяется некоторым идеальным процессом (явлением, объектом), причем так, что последний значительно проще первого, но в то же время сохраняет основные его черты (идеализация процесса).
2. Выбирается величина (функция), характеризующая процесс и законы, по которым он происходит.
3. На основании выбранных законов выводится дифференциальное уравнение для величины, характеризующей процесс.
4. Также в соответствии с выбранными законами выводятся дополнительные условия – начальные и граничные.

Совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий представляет собой математическую формулировку физической задачи и называется задачей математической физики. В настоящей работе рассматриваются задачи математической физики, приводящие к уравнениям с частными производными второго порядка.

## О решениях матричных солитонных уравнений

**Домрин А.В.**

МГУ, г.Москва, Россия; ИМ с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Описаны дтфференциальные и интегро-дифференциальные эволюционные уравнения, являющиеся редукциями условий нулевой уривизны связностей с произвольной диагональной матрицей в коэффициенте при $dx$, не равной скалярному кратному тождественной матрицы. Показано, что все локальные голоморфные решения таких уравнений допускают аналитическое продолжение до глобально мероморфных функций от $x$ при каждом фиксированном $t$.

## Исследование разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы квазилинейных уравнений

**Донцова М.В.**

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В [1] рассмотрена задача Коши для системы вида:

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u(t,x) + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{array} \right. \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ — неизвестные функции, $a_1,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ g_1$ — известные функции, $a_2,\ g_2$— известные константы, с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

В [1] получена система интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau)\exp(a_2 s) + \\ + \int\limits_0^s b_2(\tau)w_3 \exp(a_2(s-\tau))d\tau, \end{aligned} \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (c_1(\tau)w_4(\tau,t,x) + g_1(\tau)w_2(\tau,t,x))d\tau)\exp(g_2 s), \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau). \tag{6}$$

Обозначим $C_\varphi = \max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\}$,

$$l = \max\{\sup_{[0,T]} |a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} b_2(t),\ \sup_{[0,T]} |c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\}.$$

$C([0,T])$ - пространство функций, непрерывных на $[0,T]$.

**Теорема**. Пусть $\varphi_1,\varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $a_1,b_1,b_2,c_1,g_1 \in C([0,T])$ и выполняются условия

1) $a_1(t) < 0,\ b_1(t) < 0,\ b_2(t) \ge 0,\ c_1(t) < 0,\ g_1(t) < 0, \quad t \in [0,T]$,

2) $\varphi_1'(x) \le 0,\ \varphi_2'(x) \le 0, \quad x \in R$.

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1),(2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

[1] Dontsova M.V. Solvability of the Cauchy Problem for a Quasilinear System in Original Coordinates // Journal of Mathematical Sciences. 2020. V. 249. № 6. P. 918–928.

## On the Killing vectors of the $14D$ metric related to the Navier-Stokes equations

**Dryuma V.S.**
Institute of Mathematics and Computer Science, Academy of Sciences of Moldova

**Theorem**. The Riemann metric

$$ds^2 = 2\,dxdu + 2\,dydv + 2\,dzdw + (-W(\vec{x},t)w - V(\vec{x},t)v - U(\vec{x},t)u)\,dt^2 +$$

$$\left(U(\vec{x},t)p + u\left(U(\vec{x},t)\right)^2 + uP(\vec{x},t) - w\mu\,\frac{\partial}{\partial z}U(\vec{x},t) - wU(\vec{x},t)W(\vec{x},t)\right)d\eta^2 +$$

$$+\left(v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}U(\vec{x},t) - vU(\vec{x},t)V(\vec{x},t) + u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}U(\vec{x},t)\right)d\eta^2 + 2\,d\eta d\xi + 2\,d\rho d\chi -$$

$$-\left(V(\vec{x},t)p + vP(\vec{x},t) + V(\vec{x},t)W(\vec{x},t)w - v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}V(\vec{x},t) + uU(\vec{x},t)V(\vec{x},t)\right)d\rho^2 +$$

$$+\left(-uU(\vec{x},t)W(\vec{x},t) - w\left(W(\vec{x},t)\right)^2 - wP(\vec{x},t) + w\mu\,\frac{\partial}{\partial z}W(\vec{x},t)\right)dm^2 +$$

$$+\left(v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}W(\vec{x},t) - vV(\vec{x},t)W(\vec{x},t) + u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}W(\vec{x},t) - W(\vec{x},t)p\right)dm^2 +$$

$$+2\,dmdn + \left(u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}V(\vec{x},t)\right)d\rho^2 \qquad (1)$$

in the local coordinates $\vec{x} = (x, y, z, t, \eta, \rho, m, u, v, w, p, \xi, \chi, n)$ is the Ricci-flat $R_{ik} = 0$ on solutions of the NS-equations.

To the study properties of the Killing vectors $\vec{K}(\vec{x})$ for the metric () defined by the equations of the form

$$K_{i,j} + K_{j,i} - 2\Gamma^k_{ij}K_k = 0, \quad or \quad K^k g_{ij,k} + g_{ik}K^k, j + g_{jk}K^k, i = 0$$

are investigated and a new examples of reductions of the $NS$-equations are constructed.

[1] Dryuma V. S., *On spaces related to the Navier-Stokes equations*, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova., Matematica, 3(64), 107–110 (2010).

[2] Dryuma V. S., *The Ricci-flat spaces related to the Navier-Stokes equations*, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova., Matematica, 2(69), 99–102 (2012). de Stiinte a Republicii Moldova.

# О модификации уравнения Блэка — Шоулса

**Дышаев М.М., Федоров В.Е.**
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Для нелинейного уравнения типа Блэка — Шоулса получены новые модификации при линейной и квадратичной функции стоимости ликвидности $l(h) = \frac{1}{2}\varepsilon h^{\alpha}$.

Функция общей премии за риск $r_R = r_{TC} + r_{VP} + r_{IL}$ [1] для разных $\alpha$ имеет вид, представленный на рис. 1:

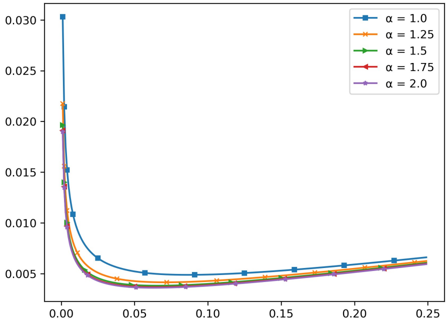



Рис. 1: Функция общей премии за риск $r_R$ для различных $\alpha$

Если стоимость ликвидности является линейной функцией ($\alpha = 1$), получаем следующее нелинейное уравнение Блэка — Шоулса:

$$u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \qquad (1)$$
$$q = 3((k+\varepsilon)^2 R/2\pi)^{1/3}.$$

В случае $\alpha = 2$ (см. [2])

$$u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} - pxu_{xx}\right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \qquad (2)$$
$$q = 3(k^2 R/2\pi)^{1/3}, \quad p = 2\varepsilon/\pi.$$

[1] Jandačka M. and Ševčovič D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. Journal of Applied Mathematics, 2005, vol. 2005, no. 3, pp. 235–258.

[2] Дышаев М. М., Федоров В. Е. Учет недостаточной ликвидности и транзакционных издержек при дельта-хеджировании. Прикладная математика & Физика, 2021, т. 53, № 2, с. 132–143.

# Possible types of discrete magnetic breathers and their stability in monoaxial chiral helimagnet

**Ekomasov E.G.[1], Ovchinnikov A.S.[2], Bostrem I.G.[2], Sinitsyn V.E.[2], Fakhretdinov M.I.[1]**
[1]Bashkir State University, 450076, Ufa, Russia
[2]Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, 620026, Ekaterinburg, Russia

The possibility of the existence of internal localized nonlinear excitations, namely, discrete "dark type" breathers, is shown for a one-dimensional chiral spin chain with an easy-plane anisotropy in the state of forced ferromagnetism. A spin chain of finite length $L$ is described by the Hamiltonian:

$$H = -2J\sum_n S_n S_{n+1} + A\sum_n (S_n^z)^2 - H_0\sum_n S_n^z + D\sum_n [S_n \times S_{n+1}]_z\,,$$

where $S_n$ is the spin vector of the $n$ site. The first term corresponds to the exchange interaction of spins along the $z$ axis with the interaction constant $J > 0$, the second to the single-ion anisotropy of the quantity $A > 0$ of the "easy plane" type, the third term describes the Zeeman interaction with an external magnetic field $H_0$ directed along the axis chains $z$. The last term corresponds to the antisymmetric Dzyaloshinskii-Moriya exchange with the interaction vector $D$ directed along the axis of the chain. We modify the numerical algorithm suggested in [1] to find the nonlinear solutions. Their analytical description in the continuum limit is developed, and their stability is proved by using the linear Floquet theory [2]. It is shown that "dark" breathers [3], in contrast to the previously considered "bright type" ones [4], which do not resonate with linear spin waves, can exist at a small values of the easy-plane magnetic anisotropy. This makes promising to detect experimentally these nonlinear excitations in real prototypes of chiral helimagnets.

The work is supported by the RFFI grant (project 20-02-00213).

[1] S. Rakhmanova and D.L. Mills, Phys. Rev. B 54, 9225 (1996).

[2] J.M. Khalack, Y. Zolotaryuk, and P.L. Christiansen, Chaos 13, 683 (2003).

[3] I.G. Bostrem, E.G. Ekomasov, J. Kishine, A.S. Ovchinnikov, and Vl.E. Sinitsyn, Phys. Rev. B 104, 214420 (2021).

[4] I.G. Bostrem, Vl.E. Sinitsyn, A.S. Ovchinnikov, E.G. Ekomasov, and J. Kishine, AIP Advances 11, 015208 (2021).

# Структура и динамика магнитных вихрей Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица в модели с внешней силой и затуханием

**Екомасов Е.Г.[1,2], Степанов С.В.[2], Антонов Г.И.[2],Мухамадеева В.В.[2], Звездин К.А.[3]**

[1]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия

[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

[3]Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН г. Москва, Россия

В настоящее время одним из перспективных технических устройств для спинтроники, является микроволновой спин-трансферный наноосциллятор (СТНО). В его основе обычно лежат мультислойные наностолбики, которые имеют два магнитных слоя различной толщины, разделенных немагнитной прослойкой [1]. В магнитных слоях может существовать, как основное состояние, магнитный вихрь. Появилось много работ, посвященных исследованию вихревых СТНО, когда вихрь существует в каждом из магнитных слоев (см., например, [2,3]). Показано, что для системы из двух взаимодействующих магнитостатически магнитных вихрей магнитных дисков, динамика вихрей может кардинально измениться по сравнению с одновихревым СТНО. Также экспериментально показана возможность раздельного переключения полярности каждого из вихрей при совместном приложении магнитного поля и спин поляризованного тока.

Исследуемые в данной работе СТНО имеют магнитные слои из пермаллоя толщиной 4нм и 15нм разделенные немагнитной прослойкой меди толщиной 10нм. С помощью численного решения обобщенного уравнения Ландау-Лифшица изучена динамика двух магнитостатически связанных магнитных вихрей под действием внешнего магнитного поля и спин-поляризованного электрического тока. Рассмотрено влияние изменения толщины немагнитной прослойки на связанную динамику вихрей на примере СТНО малого диаметра (120 нм). Показано, что при увеличении толщины немагнитной прослойки наблюдается сдвиг величины критических токов в меньшую сторону, а диапазон токов, при котором наблюдается стационарный режим связанных колебаний вихрей, увеличивается. При достаточно малой толщине немагнитного слоя может меняться сценарий возможной динамики вихря в тонком слое, с вылета за пределы диска на динамическое переключение полярности вихря и перехода на новую стационарную орбиту колебаний. Также исследован процесс переключения полярности магнитных вихрей при совместном воздействии спин-поляризованного тока и внешнего магнитного поля на СТНО большого (400нм) диаметра. Построена диаграмма зависимости от величины спин поляризованного тока величины магнитного поля, раздельно переключающего полярность вихря в магнитных слоях спин-трансферного наноосциллятора. Показано, что для раздельного переключения полярности вихрей в СТНО большого диаметра требуется использования меньшей величины магнитного поля по сравнению со случаями среднего и малого диаметров СТНО, что более выгодно с точки зрения практических приложений.


[1] Екомасов А. Е., Степанов С. В., Звездин К. А., Екомасов Е. Г. ФММ, **118**:4 (2017), 345-351.

[2] Ekomasov A.E., Stepanov S.V., Zvezdin K.A., Ekomasov E.G. JMMM, **471** (2019), 513-520.

[3] Екомасов Е.Г., Степанов С.В., Звездин К.А., Пугач Н.Г., Антонов Г.И. ФММ, **122**:3 (2021), 212-220.


## Локальная однозначная разрешимость квазилинейного уравнения с производной Герасимова — Капуто


**Захарова Т.А., Федоров В.Е.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия


Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $D_t^\beta$ — производная Герасимова — Капуто порядка $\beta > 0$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, т. е. линейный замкнутый оператор с плотной в $\mathcal{Z}$ областью определения $D_A$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $Z$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B : Z \to \mathcal{Z}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Решением задачи Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

для квазилинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \ldots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \tag{2}$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ является функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D_t^{\alpha_k} z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, выполняются условия (1), при $t \in (t_0, t_1]$ выполняются включение

$$(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \ldots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \in Z$$

и равенство (2). Отметим, что на знаки $\alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ограничений не предполагается, при $\alpha_k < 0$ нелинейный оператор зависит от дробного интеграла Римана — Лиувилля $D_t^{\alpha_k} z(t) := J_t^{-\alpha_k} z(t)$.

При $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \geq 0$ обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ [1] класс операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ и $a > a_0$ найдется такая константа $K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta,a}$ $\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda-a)|}$.

Используя начальные данные $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, определим $\widetilde{z}(t) = z_0 + (t-t_0)z_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!}z_2 + \cdots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}z_{m-1}$, $\widetilde{z}_k = D_t^{\alpha_k}|_{t=t_0}\widetilde{z}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

**Теорема.** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $Z$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, отображение $B \in C(Z; D_A)$ локально липшицево по фазовым переменным, $(t_0, \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ldots, \widetilde{z}_n) \in Z$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (1), (2) имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

[1] Федоров В. Е., Авилович А. С. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т.60, № 2. С.461-477.

## Дискретные бризеры в кристалле NaI в рамках *ab initio* молеклярной динамики

**Зайцев Н.Л., Дмитриев С.В.**

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Внутренние локализованные моды или дискретные бризеры (ДБ) — это локализованные в пространстве колебания большой амплитуды в нелинейных бездефектных кристаллических решетках [1]. Для существования ДБ в трехмерном кристалле необходимо, чтобы его частота находилась в щели фононного спектра этого кристалла. Так называемые, щелевые ДБ, были описаны в рамках молеклярно-динамического подхода, а также, были обнаружены экспериментально в термодинамически равновесном кристалле NaI [1]. Это щёлочно-галоидный кристалл, с ионным типом межатомной свзи, который состоит из двух ГЦК подрешёток, сдвинутых друг относительно друга на полупериод (Рис. 1).

Однако, результаты классических молеклярно-динамических расчетов, существенно зависят от выбора межатомного потенциала взаимодействия, модельный вид которого навязывает системе не присущие ей свойства. Чтобы избавиться от этого недостатка, в данной работе, проведены *ab initio* молеклярно-динамические расчеты ДБ в кристалле NaI,

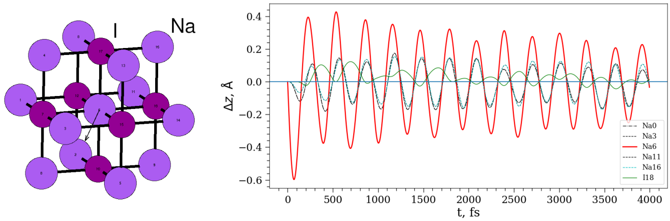



Рис. 1: (*слева*) Структура кристалла NaI, стрелкой показано направление колебания атома Na. (*справа*) Отклонение атома натрия и его ближайших соседей от положения равновесия в зависимости от времени.

где межатомные силы вычислялись в рамках теории функционала электронной плотности. Рассчитанный ДБ, поляризованный в направлении (111), как видно из (Рис. 1) почти не теряет амплитуды колебаний в интервале 4 пс.

Работа поддержана грантом РНФ номер 21-12-00229.

[1] Дмитриев С.В., Корзникова Е.А., Баимов Ю.А., Веларде. М.Г., Дискретные бризеры в кристаллах, Успехи физических наук. 186, 471, 2016.

## Разрешимость начальной задачи для линейного уравнения с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна

**Ижбердеева Е.М., Плеханова М.В.**
Челябинский государственный университет, Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ – банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ – банахово пространство всех линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $D^{\sigma_n}$ – дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, которая определяется набором чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Функция $z \in C((0,T];\mathcal{Z})$ является решением задачи (1), (2), если $D_t^{\sigma_k} z \in C([0,T];\mathcal{Z})$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $D_t^{\sigma_n} z \in C((0,T];\mathcal{Z})$, равенство (1) выполняется при всех $t \in (0,T]$ и выполнено условие (2).

**Теорема**. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $0 < \alpha_k \le 1$, $k = 0,1\dots,n$, $\sigma_n > 0$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$. Тогда функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}A)z_k + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds$$

является единственным решением задачи (1), (2).

Здесь использована функция Миттаг — Леффлера:

$$E_{\alpha,\beta}(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad Z \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и ВАНТ, проект 21-51-54003.

[1] Fedorov V.E., Plekhanova M.V., Izhberdeeva E.M. Initial Value Problems of Linear Equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan Derivative in Banach Spaces // MDPI: Symmetry 2021, 13(6), 1058. – June 2021.

## Об одном аналоге формулы Гельфанда –Левитана для оператора Штурма–Лиувилля на кривой

**Ишкин Х.К.**

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\gamma$ – гладкая кривая с параметризацией $z = x + ig(x)$, $x \in [0,1]$, $g(0) = g(1) = 0$, и $q \in L^1(\gamma)$. Рассмотрим оператор $L_\gamma$, действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $L_\gamma y = -y'' + qy$, $\quad D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) : y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma),\ y(0) = y(1) = 0\}$. Оператор $L_\gamma$ — замкнут, плотно определен и имеет компактную резольвенту [1]. Если

$$q(z) = \frac{k(k+1)}{(z-a)^2}, \quad a \in (0,1), \tag{1}$$

и $k \in \mathbb{Z}$, то [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - (\pi n)^2 - c_0\right) = \frac{c_0}{2} - \frac{q(0)+q(1)}{4}, \quad c_0 = \int_\gamma q(z)dz. \tag{2}$$

В случае нецелых $k$ картина совсем другая. Так, при дополнительном условии $a = p/m$, $p, m \in \mathbb{N}$, спектр распадается на $2m$ серий, уходящих к бесконечности по параболам $\lambda = t^2 + 2ic_j t$ $(j = 1, \ldots, 2m)$. При этом формула регуляризованного следа сильно отличается от формулы (2)). Если $a \notin \mathbb{Q}$, то ситуация еще более неопределенная.

Возникает вопрос: почему при целых $k$ спектр реагирует на возмущение (1) так же, как при гладких $q$? подобная устойчивость спектра – следствие специальных свойств оператора с указанным потенциалом или отражение более общей закономерности? какими свойствами должна обладать функция $q$ с неинтегрируемыми особенностями на $(0, 1)$, чтобы для следа оператора $L_\gamma$ с таким потенциалом имела место формула вида (2)?

Нами найдены условия на мероморфный вблизи $[0, 1]$ потенциал, при которых верна формула (2).

**Теорема 1**. Пусть функция $q$ имеет вид

$$q(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{k_n(k_n - 1)}{(z - a_n)^2} + V(z), \tag{3}$$

где $a_n \in (0, 1)$, $k_n \in \mathbb{N}$ $(n = \overline{1, N})$, функция $V$ голоморфна в некоторой окрестности $D$ отрезка $[0, 1]$ и такова, что в каждом своем полюсе $q$ удовлетворяет условию тривиальной монодромии [3]. Далее пусть $\gamma$ – произвольная кривая, лежащая в области $D$, соединяющая точки 0 и 1 и не проходящая через полюса $q$. Тогда справедлива формула (2).

Отказ от условия тривиальной монодромии в точках $a_1, \ldots, a_N$ существенно усложняет исследование асимптотики спектра даже в случае $N = 1$. Поэтому естественно ожидать, что этот полюс должен как-то повлиять на асимптотику $\lambda_n$. Однако и в этой ситуации формула (2) все еще верна.

**Теорема 2**. Пусть

$$q(z) = \frac{k(k + 1)}{(z - a)^2} + V(z), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < a < 1,$$

где функция $V$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, кроме условия тривиальной монодромии в точке $a$. Далее пусть $\gamma$ – такая же кривая, что в теореме 1. Тогда справедлива формула (2)).

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

[1] Kh. K. Ishkin, R. I. Marvanov. On the class of potentials with trivial monodromy // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. No 6. P. 1166–1174.

[2] Kh. K. Ishkin, L. G. Davletova. Regularized Trace of a Sturm–Liouville Operator on a Curve with a Regular Singularity on the Chord // Differential Equations. 2020. V. 56. No 10. P. 1291–1303.

[3] Kh. K. Ishkin. On a trivial monodromy criterion for the Sturm–Liouville equation // Mathematical Notes. 2013. V. 94. No 3-4. P. 508–523.

## Нахождение собственных значений спектральных задач заданных на квантовых графах

**Кадченко С.И., Рязанова Л.С.**
Магнитогорский государственный технический университет,
г.Магнитогорск, Россия

Разработан численный метод вычисления собственных значений спектральных задач заданных на конечных связанных ориентированных квантовых графах $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{V_i\}_{i=1}^{i_0}$ - множество вершин, а $\mathbf{E} = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$ - множество ребер графов . На каждом ребре $\mathbf{G}$ заданы вектор-операторы Шредингера $\mathbf{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_{j_0})$, где $H_j\psi_j(x_j) = -\psi_j'' + q_j(x_j)\psi_j(x_j)$, $x_j \in (0, l_j)$, $\psi_j, q_j \in W_2^2(0, l_j)$, $j = \overline{1, j_0}$ действующие в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2 = L_2(\mathbf{G}) = \{\mathbf{g} = (g_1, g_2.\ldots, g_{j_0}),\ g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением $(\mathbf{g},\mathbf{h}) = \sum\limits_{j=1}^{j_0} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j h_j dx,\ \ \mathbf{g},\mathbf{h} \in \mathbf{G}$. Каждое ребро графов $\mathbf{G}$ имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. Для вектор-операторов $\mathbf{H}$ в вершинах $\mathbf{V}$ заданы граничные условия означающие, что поток через каждую вершины $V_j$ равен нулю, а их собственные вектор-функции $\mathbf{\Psi}_n = (\psi_{1_n}, \psi_{2_n}, \ldots, \psi_{{j_0}_n})$ в каждой вершине непрерывны.

В основу методики нахождения приближенных собственных значений $\tilde{\mu}_n$ положены формулы для вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов заданных на компактных множествах. В нашем случае они имеют вид:

$$\tilde{\mu}_n = \lambda_n + \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} q_j(x_j)\varphi_{j_n}^2(x_j)dx_j + \tilde{\delta}_n,\ \lim_{n\to\infty} \tilde{\delta}_n = 0, \forall n \in N.$$

Числа $\lambda_n$ и вектор-функции $\mathbf{\Phi}_n = (\varphi_{1_n}, \varphi_{2_n}, \ldots, \varphi_{{j_0}_n})$ являются собственными значениями и собственными вектор-функции операторов $\mathbf{H}$ при $q_j(x_j) \equiv 0$ для любых $j = \overline{1, j_0}$. Системы функций $\{\mathbf{\Phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортонормированные базисы в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. В математической среде Maple написан и зарегистрирован пакет программ позволяющий находить эти спектральные характеристики и характеристические уравнения матриц операторов **H** для любых конечных связанных графах. Используя выше записанные формулы, вычисляются собственные значения операторов **H** с необходимым номером. Написан пакет программ для вычисления собственных значений операторов **H** заданных на любых конечных связанных ориентированных квантовых графах используя матрицы инцидентности графов **G** и значения потенциалов $q_j(x_j)$ заданных на их ребрах.

## Возмущение модели доменной стенки

**Калякин Л.А..**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Исходным объект – уравнение магнитодинамики [1]

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \Omega^2\sin\phi\cos\phi + \omega^2\ \sin\phi + \alpha\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

Все коэффициенты предполагаются положительными. В уравнении (1) имеются точные решения – равновесия $\phi \equiv 0, \pm\pi$. Задача об отыскании простой волны $\phi = \Phi(\kappa x - \nu t)$ с параметрами $\kappa, \nu = \mathrm{const}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению типа маятника. Волна $\Phi(s)$, которая соответствует траектории из равновесия $\Phi = 0$ в равновесие $\Phi = \pi$, описывает движение доменной стенки в модели слабого ферромагнетика. Для уравнения (1) с постоянными коэффициентами такие решения существуют.

Исследуется задача, поставленная А.К.Звездиным [1] об описании похожих решений при медленном изменении коэффициентов. На этом пути построено асимптотическое по малому параметру решение, главный член которого представляет медленно меняющуюся волну. Основной результат состоит в вычислении скорости этой волны, на основе решения соответствующего уравнения Гамильтона -Якоби.

[1] A. K. Zvezdin Dynamics of domain walls in weak ferromagnets. Письма в ЖЭТФ. Т.29, вып.10 (1979), с.605–610.

## О разделимости дифференциального оператора Грушина в гильбертовом пространстве

**Каримов О.Х., Хакимова З.Дж.**
Институт математики им.А Джураева НАНТ, г.Душанбе, Таджикистан

Термин "разделимость дифференциальных операторов"впервые ввели в научную литературу английский математик В.Н.Эveритт и шведский математик М.Гирц. Значительный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см. [1]- [4] и имеющиеся там ссылки).

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(R^2)$ дифференциальный оператор Грушина

$$L[u] = -\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + Q(x,y)u(x,y) = f(x,y), \qquad (1)$$

для любого $(x,y) \in R^2$.

Найдены условия на функцию $Q(x,y)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в гильбертовом пространстве $L_2(R^2)$, и для всех решений $u(x,y) \in L_2(R^2) \cap W^2_{2,loc}(R^2)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x,y) \in L_2(R^2)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|Qu; L_2(R^2)\| + \left\|x^2 Q^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}; L_2(R^2)\right\| +$$
$$+ \left\|Q^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}; L_2(R^2)\right\| + \left\|\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\right\| \le M\|f(x,y); L_2(R^2)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x,y)$, $f(x,y)$.

[1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

[2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в $R^n$.-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

[3] H.A.Atia. Separation of the Grushin Differential operator weighted Hilbert spaces. - Lobacheskii Journal of Mathematics. 2011, Vol.32, No3, pp.180-188.

[4] Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве - Чебышевский сборник, 2021, т.22, No1(77), с.163-176.

## Обобщения неравенства Турана для производной многочлена

**Комаров М.А.**
Владимирский гос. университет, г. Владимир, Россия

П. Туран [1] доказал, что для производной полиномов $P$ степени $n$, все корни которых принадлежат отрезку $[-1, 1]$, верна оценка

$$\|P'\| > (\sqrt{n}/6)\ \|P\|, \quad \|f\| := \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|, \tag{1}$$

а в случае полиномов, все $n$ корней которых лежат в замкнутом единичном круге $D = \{z : |z| \le 1\}$, выполняется оценка

$$M(P') \ge (n/2)\ M(P), \quad M(f) := \max_{|z|=1} |f(z)|. \tag{2}$$

Эти оценки обратны к известным неравенствам А.А. Маркова и С.Н. Бернштейна. Заметим, что согласно результату С.Д. Ревеса (2006), для любого выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}$ величина

$$\varphi(K, n) := \inf_P \|P'\|_{C(K)}/\|P\|_{C(K)}$$

на классе полиномов $P$ степени $n$, все корни которых принадлежат $K$, имеет порядок $n$ (как в (2)), если и только если внутренность $K$ непуста.

С помощью нового подхода, использующего специальные оценки снизу модуля логарифмической производной $P'/P$, удается построить обобщения неравенства Турана (1) и его $L_p$-аналогов. В частности, доказана

**Теорема.** Для полинома с корнями в полукруге $\{|z| \le 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$

$$\|P'\| > A\sqrt{n}\ \|P\|, \qquad A = 2/(3\sqrt{210e}) = 0.0279\ldots.$$

Полукруг нельзя заменить полным единичным кругом $D$.

Оценка $\varphi(K, n)$ снизу в случае, когда корни полиномов лежат в более широком, чем $K$, множестве, ранее была известна только в случае круга [2]: если все $n$ корней полинома $P$ лежат в круге $|z| \le \varrho$ ($\varrho \ge 1$), то

$$M(P') \ge n(1 + \rho^n)^{-1} M(P).$$

Некоторый аналог последней оценки получен также для экспоненциальных сумм вида $g_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k z}$, где $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $|\lambda_k| = 1$.

[1] Turán P. Über die Ableitung von Polynomen // Compos. Math. — 1939. — Vol. 7. — P. 89–95.

[2] Govil N.K. On the derivative of a polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 41. – No. 2. – P. 543–546.

## Исследование устойчивости поля директора сегнетоэлектрика к изменению шага спирали в наклонном электрическом поле при жестких граничных условиях

**Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г.**

Академия наук РБ, Башкирский государственный медицинский университет, г.Уфа, Россия

Большинство теоретических моделей, описывающих поведение сегнетоэлектрических жидких кристаллов (ЖК), рассматриваются в одноконстантном приближении, хотя есть работы [1,2], в которых приходится рассматривать реальные значения упругих постоянных. В нашей постановке для проведения анализа устойчивости поля директора достаточно одноконстантного приближения.

В данной работе рассмотрен сегнетоэлектрический ЖК SmC*, в котором нормаль к смектическому слою направлена вдоль оси $z$, азимутальный угол $\phi$ между $c$-директором и осью $x$ для каждого слоя в сегнетоэлектрическом ЖК постоянен, а полярный угол $\theta$ считается одинаковым для всех слоев. Тогда единичные вектора $\mathbf{n}$ и $\mathbf{c}$ будут иметь следующие компоненты: $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, $\mathbf{c} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ .

Для случая, когда электрическое поле направлено вдоль оси $y$, с учетом энергии взаимодействия между спонтанной поляризацией $P$ хирального смектика с электрическим полем $E$, плотность энергии Франка для SmC* можно рассматривать в виде: $f/K = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} - q_0\right)^2 - \frac{PE}{K}\cos\phi$, где $q_0$ имеет вид, приведенный в работе [3].

Основным результатом работы является расчет зависимости энергии от приложенного внешнего электрического поля и от количества слоев в образце сегнетоэлектрического жидкого кристалла.

[1] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Периодические искажения слоев смектического жидкого кристалла в магнитном и электрическом полях // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 19 (2019), №1, с. 79-86. DOI: 10.18083/LCAppl.2019.1.79

[2] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г., Мигранова Д.Н. Приложение теории катастроф к описанию нестабильностей в сегнетоэлектрических жидких кристаллах в магнитном поле // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 20 (2020), № 3, с. 34-40. DOI: 10.18083/LCAppl.2020.3.34

[3] Sadahito Uto. A helix unwinding process in ferroelectric liquid crystals with fixed boundaries // Journal of Applied Physics 97, 014107 (2005); doi: 10.1063/1.1829145.

# О достаточных условиях неполноты системы экспоненциальных мономов

**Кужаев А.Ф.**
БашГУ, УГНТУ, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных положительных чисел $\lambda_k$ и их кратностей $n_k$. Считаем, что $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty, k \to \infty$.

Пусть далее $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda,\rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|, t \leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2} dt < +\infty$$

Рассматривается также весовое пространство комплекснозначных непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega := \{f : \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| < +\infty\}.$$

Введем семейство экспоненциальных мономов $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$. Символом $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим замыкание линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве $C^\omega$.

Результат, сформулированный ниже, сформулирован так же в работе [1, Lemma 10] в более полном виде, но представляет собой и самостоятельный интерес.

**Теорема**. Пусть $\rho > 0$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Предположим, что каждая функция $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$ (здесь $\omega(t) = \omega_1(t) - t, t \leqslant 0, \omega(t) = \omega_1(t) + t + t^2, t > 0$) продолжается до целой функции $F$, для которой имеет место представление

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} c_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_{k,n} \in \mathbb{C},$$

где ряд сходится равномерно на компактах в плоскости. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $L_p^\omega(C^\omega)$.

[1] Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F. The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions from Weight Subspaces on a Line // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, No. 6, P. 1183–1200.

# Об аппроксимации двухслойных палеток бокового каротажного зондирования

**Кузьмичев О.Б., Мартынова Ю.В.**
ООО «РН-БашНИПинефть», г.Уфа, Россия

Основная цель бокового каротажного зондирования – получение фактической кривой изменения кажущегося сопротивления, которая сравнивается с расчетными кривыми, собранными в палетки. В итоге сравнения устанавливается совпадение фактической и одной из палеточных кривых, при этом параметры модели, для которой рассчитана палеточная кривая, принимаются в качестве результата интерпретации.

Одним из основных видов палеток, используемых для интерпретации, являются двухслойные палетки БКЗ-1, которые рассчитаны для одной цилиндрической границы раздела, моделирующей скважину и пласт бесконечной мощности.

Основной целью работы является построение аппроксимации палеточных зависимостей для двухслойных палеток БКЗ в виде отношения полиномов от двух переменных:

$$\ln\frac{\rho_K}{\rho_C}=\frac{\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{6-i}a_{ij}\left(\ln\frac{\rho_P}{\rho_C}\right)^i\left(\frac{L}{d}\right)^j}{\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{6-i}b_{ij}\left(\ln\frac{\rho_P}{\rho_C}\right)^i\left(\frac{L}{d}\right)^j},$$

где $\rho_K$ – кажущееся сопротивление, $\rho_C$ – сопротивление бурового раствора, $\rho_P$ – сопротивление пласта, $L$ – длина зонда, $d$ – диаметр скважины, коэффициенты $a_{ij}$, $b_{ij}$ выписаны в явном виде.

Аппроксимационная формула справедлива в силу асимптотического поведения

$$\lim_{L/d\to\infty}\frac{\rho_K}{\rho_C}=\frac{\rho_P}{\rho_C},\ \lim_{\rho_P/\rho_C\to\infty}\frac{\rho_K}{\rho_C}=\frac{8L^2}{d^2}.$$

Аппроксимация проводилась на равномерной логарифмической сетке методом наименьших квадратов, при изменении $\rho_P/\rho_C$ в пределах от 1 до 2048 и $L/d$ от 1 до 128. Наименьшая ошибка аппроксимации достигается при использовании полиномов 6-й степени и не превышает $0,3\%$ во всем диапазоне изменения параметров.

[1] Шеин Ю.Л., Пантюхин В.А., Кузьмичев О.Б. Алгоритмы моделирования показаний зондов БКЗ, БК, ИК в пластах с зоной проникновении // Автоматизированная обработка данных геофизических и геолого-технологических исследований нефтегазоразведочных скважин и подсчет запасов нефти и газа с применением ЭВМ. – Калинин: НПО «Союзпромгеофизика», 1989. – С. 75-81.

# Некоторые аналоги теоремы Линделёфа

**Малютин К.Г., Кабанко М.В., Костенко И.В.**
Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Вопросы описания нулей целых и аналитических функций играют важную роль в теории функций. Классическая теорема Е. Линделёфа утверждает, что нули целой функции конечного целого порядка и нормального типа, кроме конечной плотности должны обладать еще и определённой симметрией. Для целых функций, рост которых определяется некоторой весовой функцией, обобщение этого критерия дано Л. Рубелом [1]. Для функций, аналитических в полуплоскости — получено в работе [2]. Для пространств функций, рост которых определяется весовой функцией $r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточнённый порядок в смысле Бутру, мы получаем уточнение этих критериев, которое, на наш взгляд, является более удобным для практических приложений, чем в [1] и в [2]. Для этого мы описываем некоторые свойства нулей целых функций и функций аналитических в полуплоскости.

Пусть $\rho(r)$, $r \in [0, +\infty)$, —уточнённый порядок в смысле Бутру. Обозначим через $[\rho(r), \infty)_B$ (через $[\rho(r), \infty)_B^+$) пространство целых функций (функций, аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$) $f(z)$, таких, что для всех $z \in \mathbb{C}$ (для всех $z \in \mathbb{C}_+$) выполняется неравенство

$$\ln |f(z)| \leq K_f V(|z|)\,,$$

где $K_f > 0$ — постоянная, зависящая от $f$ и не зависящая от $z$.

Мы обобщаем результаты Е. Линделёфа [3] и А. Ф. Гришина [4] и доказываем две теоремы о распределении нулей функций из пространств $[\rho(r), \infty)_B$ и $[\rho(r), \infty)_B^+$.

[1] Rubel L.A. A generalized canonical product. In the collection *Contemporary problems of analytic functions.* M.: Nauka, 1965.

[2] Malyutin K.G. and Sadik N. Representation of subharmonic functions in a half-plane // Sb. Math. Vol. 98, No. 12, pp. 1747–1761, 2007.

[3] Lindelöf E. Fonctions entières d'ordre entier // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., Vol. 41, pp. 369–395, 1905.

[4] Гришин А.Ф. О регулярности роста субгармоническихх функций. II// Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Выпуск 7. С. 59–84, 1968.

## О классе потенциалов с тривиальной монодромией

**Марванов Р.И.**
БашГУ, г.Уфа, Россия

Рассматривается задача описания класса мероморфных в односвязной области $\Omega$ потенциалов, для которых уравнение Штурма–Лиувилля имеет тривиальную монодромию. Для любого набора точек, которые могут накапливаться только к границе $\Omega$, строится достаточно широкий класс $TM(\Omega)$ потенциалов с полюсами в этих точках. В случае, когда множество полюсов конечно, дается полное описание класса $TM(\Omega)$.

**Теорема 1**. Пусть $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$ $(N < \infty)$, $M = \{m_1, \dots, m_N\}$. Тогда $q \in TM(\Omega, Z, M)$ тогда и только тогда, когда для $q$ справедливо представление

$$q(z) = q_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k(m_k+1)}{(z-z_k)^2},$$

где

$$q_0(z) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=0}^{2m_k-1} q_{ks} H_{ks}(z) + P(z)R(z),$$

$$H_{ks}(z) = \frac{(z-z_k)^s}{s!} P_k(z) \sum_{j=0}^{2m_k-s-1} \frac{1}{j!} \left[\frac{1}{P_k(z)}\right]^{(j)}_{z=z_k} (z-z_k)^j,$$

$$P(z) = \prod_{i=1}^{N} (z-z_i)^{2m_i}, \quad P_k(z) = \frac{P(z)}{(z-z_k)^{2m_k}},$$

$$q_{k,2j} = q_0^{(2j)}(z_k), \quad q_{k,2j-1} = c_{kj} := \sum_{i \neq k, 1 \leq i \leq N} \frac{(2j)! m_i(m_i+1)}{(z_k-z_i)^{2j+1}},$$

$$k = \overline{1,N}, \; j = \overline{1,m_k},$$

$R$ – произвольная функция, голоморфная в области $\Omega$.

**Теорема 2**.Пусть последовательность $z_k \in \Omega$ $(k \in \mathbb{N})$ не имеет предельных точек в $\Omega$. Тогда для произвольной последовательности натуральных чисел $\{m_k\}_1^\infty$ и любого набора чисел $\nu_{kj} \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \dots j = -2, -1, \dots, m_k - 1)$ существует мероморфная в области $\Omega$ функция $q$, которая имеет полюсы в точках $z_k$ и только в них, причем вблизи каждого $z_k$ справедливо разложение

$$q(z) = \sum_{s=-2}^{m_k-1} \nu_{ks}(z-z_k)^s + O\left((z-z_k)^{m_k}\right), \quad z \to z_k.$$

[1] Duistermaat J.J., Grünbaum F.A. Differential equations in the spectral parameter. Commun. Math. Phys., 1986

## Квантово-химическое моделирование вакантных молекулярных орбиталей пентахлорофенола

**Маркова А.В., Таюпов М.М.**
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, 450075, Уфа, Россия

В данной работе был проведен теоретический анализ вакантных орбиталей молекул пентахлорфенола с использованием квантово-химических расчетов энергий орбиталей, исследованных методами теории функционала плотности (DFT) с помощью гибридного функционала B3LYP [1] в базисе 6-31G(d), реализованными в программном пакете Gaussian 09. На основе изображений пространственного распределения орбиталей определяли их $\pi^*$- и $\sigma^*$-характер, так как $\sigma^*$-орбиталь симметрична относительно линии связи, а $\pi^*$-орбиталь симметрична относительно плоскости, проходящей через линию связи. Для уточнения рассчитанных значений энергий орбиталей (virtual orbital energies, VOE) использовали подход, предложенный в работе [2], состоящий в корректировке — масштабировании согласно результатам исследований для малых сопряженных органических молекул [2, 3].

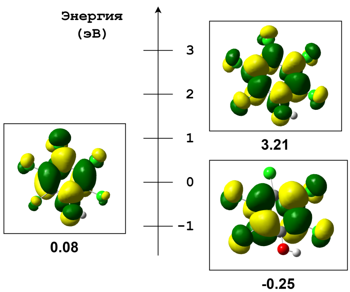



Рис. 1: Схематическое изображение и энергии первых трех вакантных молекулярных орбиталей $\pi$-типа

Работа выполнена в рамках гранта в форме субсидий в области науки из бюджета Республики Башкортостан для государственной поддержки молодых ученых – аспирантов и кандидатов наук (НОЦ-ГМУ-2021).

[1] A.D. Becke. J. Chem. Phys. 98, 5648 (1993).

[2] P.D. Burrow, A. Modelli. SAR and QSAR in Env. Res. 24, 647 (2013).

[3] Таюпов М.М. и др., Математическая физика и компьютерное моделирование, Том 24, № 2, 2021, с. 54-67.

## Рассеяние пробных частиц осциллирующими сгустками темной материи

**Маслов Е.М., Кутвицкий В.А.**
ИЗМИРАН, г. Москва, Россия

Методами теории возмущений исследуются уравнения геодезических, описывающие инфинитные движения пробных частиц в периодических по времени сферически-симметричных гравитационных полях. Такие поля могут создаваться, например, компактными сгустками темной материи, совершающими радиальные релаксационные колебания. При этом осциллирующее гравитационное поле внутри сгустка будет периодически воздействовать на геодезические и, следовательно, на угол отклонения траекторий пробных частиц при рассеянии на таких объектах. В приближении слабого гравитационного поля получены решения уравнений геодезических и выведены общие формулы, определяющие угол отклонения $\Delta\varphi$ в главном порядке [1]. На основе этих результатов вычислен угол отклонения при рассеянии пробных частиц на сгустке гравитирующего скалярного поля с логарифмическим потенциалом самодействия

$$U(\phi) = \left(m^2/2\right)\phi^2\left[1 - \ln\left(\phi/\sigma\right)^2\right], \tag{1}$$

где $m$ – масса скалярного поля, $\sigma$ – его характерная амплитуда. Результат может быть представлен в виде

$$\Delta\varphi = \frac{2GM}{bv^2}\left(1+v^2\right)\left(1-e^{-m^2b^2}\right) + 2\pi G\sigma^2 mbe^{3-m^2b^2}\frac{1-v^2}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty} a^2 e^{-\xi^2} d\xi, \tag{2}$$

где $G$ – гравитационная постоянная, $M$ – масса сгустка, $b$ – прицельный параметр, $v$ – начальная скорость частицы. Функция $a(\theta)$ есть решение уравнения нелинейного осциллятора $a_{\theta\theta} = -dV/da$, где $V(a) = (a^2/2)(1-\ln a^2)$, $\theta = mt_R - \xi/v$, $t_R$ – время регистрации рассеяной частицы. Поэтому второе слагаемое в (2) описывает малые колебания угла отклонения во времени. Такие колебания могут приводить, например, к периодическим вариациям потока нейтрино при прохождении через области с осциллирующей темной материей.

[1] V.A. Koutvitsky and E.M. Maslov, Phys. Rev. D **104**, 124046 (2021).

## Одна интегральная формула для коэффициентов Фурье разности субгармонических функций на кольце

**Меньшикова Э.Б.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Функция $U \not\equiv -\infty$ на множестве из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется *$\delta$-субгармонической,* если для некоторой окрестности этого множества функция $U$ представляется в виде разности $U = u - v$, где функции $u \not\equiv -\infty$ и $v \not\equiv -\infty$ субгармонические на этой окрестности [1, п. 3.1].

Метод рядов Фурье для целых, мероморфных и $\delta$-субгармонических функций — один из классических и мощных методов исследования [2, гл. 13]. Здесь затрагиваются связи полученных в [3] интегральных формул с этим методом. *Коэффициенты Фурье $\delta$-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$* на окружности $\bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = r\bigr\}$ определяются как числа

$$c_k(r, U) := \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Следующий результат устанавливает взаимосвязь между коэффициентами Фурье $\delta$-субгармонической функции и её распределением зарядов Рисса $\mathit{\Delta}_U := \frac{1}{2\pi}\triangle u - \frac{1}{2\pi}\triangle v$, где $\triangle$ — оператор Лапласа. Формула новая даже в случае, когда $U = \ln|f|$, где $f$ — мероморфная функция на $\mathbb{C}$.

**Теорема** ( [3, теорема 3]) Пусть $0 < r < R < +\infty$, а $U \not\equiv \pm\infty$ — $\delta$-субгармоническая функция на кольце $\bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| r^2/R \le |z| \le R\bigr\}$. Тогда при каждом натуральном $k = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$\frac{2}{R^k}\Bigl(c_k(R, U) + c_k(r/R^2, U)\Bigr) - \Bigl(1 + \frac{r^{2k}}{R^{2k}}\Bigr)\frac{2}{r^k}c_k(r, U)$$
$$= \frac{1}{k}\int_{r<|z|<R}\Bigl(\frac{1}{z^k} - \frac{\bar{z}^k}{R^{2k}}\Bigr)\,\mathrm{d}\mathit{\Delta}_U(z) + \frac{1}{k}\int_{r^2/R<|z|\le r}\Bigl(\frac{\bar{z}^k}{r^{2k}} - \frac{r^{2k}}{R^{2k}z^k}\Bigr)\,\mathrm{d}\mathit{\Delta}_U(z).$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90007 «Аспиранты».

[1] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П. *К распределению нулевых множеств голоморфных функций* // Функц. анализ и его прил., **52**:1 (2018), 26–42.

[2] Rubel L.A. (with Colliander J.E.) *Entire and Meromorphic Functions*, New York–Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 1996.

[3] Меньшикова Э.Б. *Интегральные формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций* // Известия вузов. Математика. 17 стр. (принято к печати).

## Математическое моделирование процессов самоорганизации полос локализованной деформации в упруго-пластичных металлических материалах

**Муратов Р.В., Кудряшов Н.А., Рябов П.Н.**
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
г. Москва, Россия

В работе рассматриваются процессы самоорганизации полос локализованной деформации в обедненном уране и алюминии при сдвиговых нагрузках [1]. Сформулирована математическая модель процесса, которая имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \times \vec{v} - \sigma) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}(\rho E \vec{v} - \sigma \vec{v}) = 0. \tag{3}$$

Систему (1) - (3) замыкает закон Гука, закон пластической текучести и уравнение состояния [1]. Анализ процессов, описываемых моделью (1)-(3), строится на базе метода конечных объемов [1].

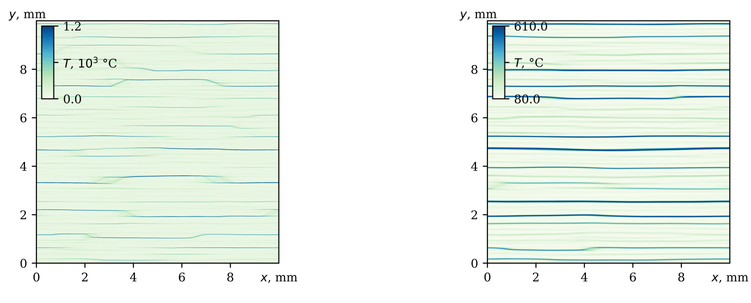



Рис. 1: Температура для обедненного урана (слева) и алюминия (справа)

Исследовано влияние параметров модели на локализационные процессы. Рассмотрена эволюция теплофизических характеристик материалов с течением времени (пример на Рис. 1).

Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 21-71-00102).

[1] Kudryashov N.A., Muratov R.V., Ryabov P.N. A finite volume method for numerical simulations of adiabatic shear bands formation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 101, 2021, 105858

## О двух классах бесконечно дифференцируемых функций

**Мусин И.Х.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – семейство раздельно радиальных выпуклых функций $h_\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с $h_\nu(0) = 0$ таких, что для каждого $\nu \in \mathbb{N}$:

1) сужение $h_\nu$ на $[0,\infty)^n$ не убывает по каждой переменной;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

3) для любого $M > 0$ найдётся постоянная $A_{\nu,M} > 0$ такая, что

$$h_\nu(x) \le \sum_{1\le j\le n: x_j\ne 0} x_j \ln \frac{x_j}{M} + A_{\nu,M},\ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,\infty)^n;$$

4) существуют постоянные $a_\nu$ и $\gamma_\nu$ такие, что

$$h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x) \ge a_\nu \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j - \gamma_\nu,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,\infty)^n;$$

5) $h_{\nu+1}(x+y) \le h_\nu(x) + h_\nu(y) + l_\nu,\ x, y \in [0,\infty)^n$.

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$G_m(h_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,h_\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n,\\ |\alpha|\le m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} < \infty\}.$$

Пусть $G(h_\nu) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m(h_\nu)$. Наделим $G(h_\nu)$ топологией, определяемой семейством норм $\|\cdot\|_{m,h_\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Пусть $G(\mathcal{H}) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} G(h_\nu)$. Снабдим $G(\mathcal{H})$ топологией индуктивного предела пространств $G(h_\nu)$.

Преобразование Юнга-Фенхеля $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая как $g^*(x) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - g(y))$.

Пусть $\mathcal{M} = \{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – семейство раздельно радиальных выпуклых функций $M_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

$j_1$) сужение $M_\nu$ на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной;

$j_2$) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{M_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

$j_3$) $\lim\limits_{x\to\infty} (M_\nu(x) - M_{\nu+1}(x)) = +\infty$.

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ определим пространство

$$GS_m(M_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : q_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ |\alpha|\le m}} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{-M_\nu(x)}} < \infty\}.$$

Пусть $GS(M_\nu) = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}_+} GS_m(M_\nu)$. Наделим $GS(M_\nu)$ топологией, определяемой семейством норм $q_{m,\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Пусть $GS(\mathcal{M}) = \bigcup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} GS(M_\nu)$. Снабдим $GS(\mathcal{M})$ топологией индуктивного предела пространств $GS(M_\nu)$.

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ определим функцию $\varphi_\nu$ on $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi_\nu(x) = h_\nu^*(\ln^+|x_1|, \ldots, \ln^+|x_n|),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\Phi^* = \{\varphi_\nu^*\}_{\nu=1}^{\infty}$.

**Теорема**. Пусть для любого $\nu \in \mathbb{N}$ раздельно радиальные выпуклые функции $\theta_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таковы, что:

1) сужение $\theta_\nu$ на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной;

2) существуют постоянные $b_\nu > 0$ такие, что

$$\theta_\nu(x) - b_\nu \le \varphi_\nu(x) \le \theta_{\nu+1}(x) + b_\nu,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $G(\mathcal{H}) = GS(\Phi^*)$.

## Построение аналогов уравнений Шредингера, соответствующей Гамильтоновой системе $H^{3+2}$

**Павленко В.А.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

За последнее время вышло большое количество работ, которые посвящены обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), допускающие применение метода изомонодромной деформации (ИДМ). Пока что известен конечный список совместных пар гамильтоновых систем ОДУ (эти ОДУ допускают ИДМ)

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{p_j} \quad (k = 1, 2) \quad (j = 1, 2) \qquad (1)$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждое из которых есть условие совместности двух линейных систем ОДУ вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \tag{2}$$

$$V'_\eta = AV, \tag{3}$$

где квадратные матрицы $L_{s_k}$ и $A$ одинаковой размерности рациональны по переменной $\eta$. Соответствующие решения ОДУ, являющихся условием совместности таких пар, называются изомонодромными. Некоторые такие пары гамильтоновых систем ОДУ приведены в статье Х. Кимуры [1].

Данная работа посвящена построению совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{3+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ гамильтоновой системы $H^{3+2}$ из статьи [1].

Построенные решения являются явными в терминах решений линейной системы ОДУ, которая выписана в статье [2].

Следует отметить, что некоторые решения соответсвующих аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых другими гамильтонианами уже построены. Некоторые из них построены автором совместно с Сулеймановым Б.И.


[1] *H. Kimura.* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure. Annali di Matematica pura et applicata IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.

[2] *H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai.* Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations. arXiv:1209.3836 (2012).


## Иерархия Хирота-Ота и её Трёхмерные Редукции


**Павлов М.В.**

Физический Институт РАН, г. Москва, Россия


Хорошо известно, что простейшими редукциями иерархии Кадомцева-Петвиашвили являются иерархии Веселова-Новикова и модифицированного Веселова-Новикова. В этом докладе будет рассмотрены:

векторные редукции иерархии Кадомцева-Петвиашвили, а именно: векторные иерархии Веселова-Новикова и модифицированного Веселова-Новикова;

векторные редукции иерархии Хироты-Ота, обобщающие векторные иерархии Веселова-Новикова и модифицированного Веселова-Новикова.

## Анализ каналов распада при диссоциативном захвате электронов молекулами 5,6-метилендиокси-1-инданона

**Поглазов К.Ю., Галеев Р.В.**
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа

Ранее было показано, что переход полимерных пленок, содержащих в себе элементы фталида, в высокопроводящее состояние связан с тенденцией мономерного соединения к раскрытию пятичленного цикла с разрывом связи C-O через переходное состояние, лежащее в области энергии 0.65 эВ. Дальнейшее изучение изомеров фталида показало, что такой процесс является уникальным. Так, например, молекулы бензофуран-3(2H)-она и бензофуран-2(3H)-она не образовывали долгоживущих отрицательных молекулярных ионов (ОМИ) [1]. Производные кумарина, имеющие в своем составе шестичленный цикл, в которых прогнозировалось образование ОМИ по схожему механизму либо их не образовывали, либо для этого требовалась более сложная перегруппировка при гораздо меньших энергиях [2].

В спектре его диссоциативного захвата электронов наблюдались долгоживущие ОМИ, но как показали квантовохимические расчеты, данные структуры не связаны с самим веществом и возможной изомеризацией и перегруппировками в нем, а скорее всего являются результатом захвата электрона примесями, имеющими большое сечение для данного процесса. Выявить пространственную структуру данной примеси с помощью имеющегося оборудования и электронно-вычислительных мощностей, на данном этапе, не представляется возможным.

Два самых интенсивных и в то же время равноценных распада в данном веществе связаны с отрывами нейтральных фрагментов $CH$ и $CH_2$. Резонанс на кривых эффективного выхода электронов (КЭВ) для $[M-CH]^-$ является достаточно широким и по всей видимости, состоящим из нескольких стоящих рядом резонансов. Нахождение пиков на КЭВ фрагментов $[M-CH]^-$ и $[M-CH_2]^-$ в близи тепловых энергий, говорит о том, что само вещество является нестабильным при диссоциации по данному каналу распада.

[1] Сафронов А.М. и др. // Математическая физика и компьютерное моделирование, Том 24, № 4, 2021, с. 67-78.

[2] Таюпов М.М. и др. // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2020. Том 23. № 3, стр. 45-59.

# Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка

**Поляков Д.М.**
Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

Рассмотрим самосопряженный оператор четвертого порядка $H$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ и имеющий вид

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y'(0) = y'''(0) + p(0)y'(0) = y(1) = y''(1) = 0,$$

где коэффициенты $p$ и $q$ являются вещественными периодическими (периода 1) функциями из пространства $L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Область определения этого оператора имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(H) = \{y \in L^2(0,1) : y', y'', y''' + py' \in L^1(0,1), y^{(4)} + (py')' \\ + qy \in L^2(0,1), \quad y'(0) = y'''(0) + p(0)y'(0) = y(1) = y''(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Основные результаты работы связаны с асимптотикой собственных значений дифференциального оператора $H$ как в случае коэффициентов $p$, $q \in L^1(\mathbb{T})$, так и при различных предположениях гладкости коэффициентов $p$ и $q$.

Введем коэффициенты Фурье для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$:

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad \widehat{f}_n = \int_0^1 f(x)e^{-i\pi(2n+1)x}\,dx,$$
$$\widehat{f}_{cn} = \int_0^1 f(x)\cos\pi(2n+1)x\,dx.$$

Имеет место следующий результат.

**Теорема**. Пусть $p$, $q \in L^1(\mathbb{T})$ и число $n \in \mathbb{N}$ выбрано достаточно большим. Тогда собственные значения $\lambda_n$ являются вещественными, простыми и удовлетворяют следующей асимптотике

$$\lambda_n = \big(\frac{\pi}{2} + \pi n\big)^4 + \big(\frac{\pi}{2} + \pi n\big)^2(\widehat{p}_{cn} - p_0) + \mathcal{O}(n)$$

при $n \to +\infty$. Если дополнительно предположить, что $p'''$, $q' \in L^1(\mathbb{T})$, то

$$\lambda_n = \big(\frac{\pi}{2} + \pi n\big)^4 + \big(\frac{\pi}{2} + \pi n\big)^2\big(\widehat{p}_{cn} - p_0\big) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 + \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-2})$$

при $n \to +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-160.2022.1.1)

## Новые приближённые формулы для элементарных функций и некоторые их применения

**Рассадин А.Э.**
Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород, Россия

Поиск эффективных аппроксимаций для функций одной переменной является типичной проблемой приближённого анализа [1, 2].

В представленном докладе с помощью метода, развитого в работе [3], получены следующие приближённые формулы для обратных тригонометрических и гиперболических функций:

$$\arcsin x \approx \frac{4\,x}{\sqrt{9-x^2}+\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$$\arctan x \approx \frac{4\,x}{1+\sqrt{9+8\,x^2}}\,,$$

$$arsh\, x \approx \frac{4\,x}{\sqrt{9+x^2}+\sqrt{1+x^2}}\,,$$

$$arth\, x \approx \frac{4\,x}{1+\sqrt{9-8\,x^2}}\,.$$

В докладе и численно, и аналитически исследованы границы применимости этих формул, а также полученные результаты распространены на функции от линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве.

[1] Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: ГИТТЛ, 1956.

[2] Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.

[3] Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Об оценке решений эволюционных уравнений с одномерным фазовым пространством // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник тезисов Международной научной конференции (оз. Банное, 15-19 марта 2021 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Аэтерна, 2021. – 83 с. С. 11.

# Полнота системы экспонент с последовательностью комплексных показателей, отделённой от мнимой оси

**Салимова А.Е.**
БашГУ, УГНТУ, г.Уфа, Россия

Последовательность $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\}_{k=1,2,\dots}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ порождает *логарифмическую субмеру,* определённую как

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R) := \max\left\{ \sum_{\substack{r<|\mathsf{z}_k|\leq R\\ \operatorname{Re}\mathsf{z}_k>0}} \operatorname{Re}\frac{1}{\mathsf{z}_k}, \sum_{\substack{r<|\mathsf{z}_k|\leq R\\ \operatorname{Re}\mathsf{z}_k<0}} \operatorname{Re}\Bigl(-\frac{1}{\mathsf{z}_k}\Bigr) \right\}, \quad 0<r<R<+\infty.$$

$\operatorname{Exp}^{\mathsf{Z}} := \bigl\{ z \mapsto z^p e^{\mathsf{z}z} \bigm| z \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq p \leq n_{\mathsf{Z}}(\mathsf{z}) - 1 \bigr\}$, где $n_{\mathsf{Z}}(\mathsf{z})$ — число точек в $\mathsf{Z}$, равных $\mathsf{z}$, — *экспоненциальная система с показателями* $\mathsf{Z}$. *Ширина* $K \subset \mathbb{C}$ *в направлении* 0 равна $\sup\limits_{z_1,z_2\in K} \bigl(\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2\bigr)$. *Пространство* $\operatorname{Hol}(K)$ *локально аналитических функций на компакте* $K \subset \mathbb{C}$ наделяется естественной *топологией индуктивного предела.*

**Теорема** ( [1, следствие 1.5]). *Пусть* $b \in [0,+\infty)$, *а* $\mathsf{Z}$ *удовлетворяет условию* $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\operatorname{Re}\mathsf{z}_k|}{|\mathsf{z}_k|} > 0$. *Эквивалентны два утверждения:*

I. *Система* $\operatorname{Exp}^{\mathsf{Z}}$ *полна в каждом пространстве* $\operatorname{Hol}(K)$, *когда* $K$ *— выпуклый компакт ширины не более чем* $2\pi b$ *в направлении* 0.

II. *Справедливо соотношение*

$$\inf_d \sup_{1\leq r<R<+\infty} \Bigl( l_{\mathsf{Z}}(r,R) - \bigl(b + d(R)\bigr) \ln\frac{R}{r} \Bigr) = +\infty,$$

*где точная нижняя грань* $\inf\limits_d$ *в левой части берётся по всех функциям* $d\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, *для которых* $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90074–Аспиранты.

[1] Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. *Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой* // Матем. заметки, **108**:4 (2020), 588–600; Math. Notes, **108**:4 (2020), 579–589.

**Basicity of the system of cosines with linear phases in grand-Sobolev spaces**

**Valid F. Salmanov**[1], **Togrul R. Muradov**[2], **S.A. Nurieva**[3]
[1]Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan,
[2]Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan, [3]Azerbaijan Tourism and Management University, Baku, Azerbaijan

Let $1 < p < \infty$. A space $L^{p)}(a,b)$ of measurable functions satisfying the condition

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left( \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b |f|^{p-\varepsilon} dt \right)^{1/(p-\varepsilon)} < \infty, \tag{1}$$

in the interval $(a,b) \subset R$ is called a grand-Lebesgue space.

Denote by $W^1_{p)}(a,b)$ the space of functions which belong to $L^{p)}(a,b)$ together with their derivatives equipped with the norm

$$\|f\|_{W_{p)}} = \|f\|_{p)} + \|f^{'}\|_{p)}. \tag{2}$$

We will call this space a grand-Sobolev space:

$$W^1_{p)}(a,b) = \{f|f, f^{'} \in L^{p)}(a,b), \|f\|_{p)} + \|f^{'}\|_{p)} < \infty\}.$$

It is easy to prove that this is a Banach space. As is known, $L^{p)}(a,b)$ is not separable. Therefore, $W^1_{p)}(a,b)$ is also not a separable space. Denote by $\tilde{M}W^1_{p)}(a,b)$ the set of all functions which satisfy the condition $\|f(\cdot+\delta) - f(\delta)\|_{p)} \to 0$ as $\delta \to 0$ and belong to $W^1_{p)}(a,b)$.

It is clear that the set $\tilde{M}W^1_{p)}(a,b)$ is a manifold in $W^1_{p)}(a,b)$. Denote by $MW^1_{p)}(a,b)$ the closure of $\tilde{M}W^1_{p)}(a,b)$ with respect to the norm (2).

**Theorem.** *Let* $2Re\alpha + \frac{1}{p} \notin Z, 1 < p < \infty$. *Then the system*

$$1 \cup \{\cos(n-\alpha)t\}_{n\geq 1}$$

*forms a basis for the space* $MW^1_{p)}(0,\pi), 1 < p < \infty$ , *if and only if* $[Re\alpha + \frac{1}{2p}] = 0$.

## Описание динамики нелинейных волн уравнения Клейна Гордона в модели с примесями

**Самсонов К.Ю.[1], Фахретдинов М. И.[2], Екомасов Е.Г.[1,2]**
[1]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия
[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Одним из простых модельных уравнений, используемые для изучения нелинейных волновых процессов в теоретической и математической физике, является уравнение Клейна-Гордона (УКГ). Одними из наиболее изученных примеров такого класса уравнений являются уравнения синус- Гордона и модель фи4 [1, 2]. При использовании УКГ на реальных физических моделях, возникает необходимость его модификации путем добавления дополнительных слагаемых и функций. Они могут описывать наличие внешней силы, неоднородность параметров среды и др. Модифицированное УКГ не имеет точных аналитических решений, но существует ряд широко применяемых аналитических методов (например, метод коллективных координат). В данной работе, на примере уравнения синус-Гордона и модели фи4 с примесями, исследована динамика кинков. Рассмотрены случаи как точечных, так и протяженных примесей. Найдены возможные типы локализованных на примесях волн, как функции от параметров системы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90048.

[1] Cuevas-Maraver J. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics/ J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, F. Williams (Eds.) // Springer. - 2014. - V. 10. - P. 263;

[2] Kevrekidis P. G., Cuevas-Maraver J. A Dynamical Perspective on the $\phi^4$ model : Past, Present and Future/ P. G. Kevrekidis, J. Cuevas-Maraver // Springer. - 2019. - V. 26. - P. 311.

## Резонансный захват электронов молекулами 2-хлор-9,10-бис(фенилэтинил)антрацена

**А.М. Сафронов[1], М.М. Таюпов[1], А.В.Кухто[2]**
[1]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа
[2]Белорусский государственный университет, Минск

С помощью метода масс-спектрометрии отрицательных ионов резонансного захвата электронов были исследованы молекулы 2-хлор-9,10-бис(фенилэтинил)антрацена (2-Chloro-BPEA). Вещество было синтезировано в Белорусском государственном университете, степень очистки

99.8%. Оно испарялось в ячейку столкновений при температуре ячейки 150 °C. Молекулы достигали теплового равновесия путем многократных столкновений со стенками ячейки.

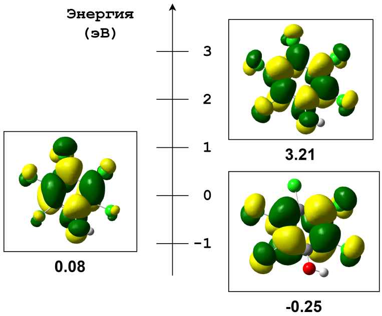



Рис. 1: Кривая эффективного выхода $M^-$ для 2-Chloro-BPEA, сигнал нейтральной компоненты и зависимость среднего времени жизни от энергии электронов

В спектре диссоциативного захвата электронов молекулами 2-Chloro-BPEA наблюдались долгоживущие отрицательные ионы. Их образование происходило при двух резонансах-$0,2$ эВ и $0,6$ эВ. Согласно квантово-химическим расчётам методами теории функционала плотности (DFT) с помощью гибридного функционала B3LYP в базисе 6-31G(d), молекула 2-Chloro-BPEA имеет 17 вакантных МО $\pi$-типа, которые охватывают диапазон энергий до $6,5$ эВ.

Работа выполнена в рамках гранта в форме субсидий в области науки из бюджета Республики Башкортостан для государственной поддержки молодых ученых – аспирантов и кандидатов наук (НОЦ-ГМУ-2021).

## Представление Лакса, рациональные первые интегралы и линеаризуемость для одного семейства дифференциальных уравнений второго порядка

**Синельщиков Д.И.**
НИУ ВШЭ, г. Москва, Россия

В докладе обсуждаются условия существования представления Лакса [1, 2] для уравнения

$$y_{xx} + a_3(x,y)y_x^3 + a_2(x,y)y_x^2 + a_1(x,y)y_x + a_0(x,y) = 0, \qquad (1)$$

где $a_i$, $i = 0,1,2,3$ достаточно гладкие функции. Показано что представление Лакса с определенной $L$-матрицей с нулевым следом существует тогда и только тогда, когда семейство уравнений (1) приводится к

$$w_{\xi\xi} + \omega^2 w = 0, \tag{2}$$

с помощью следующего класса нелокальных преобразований [3]

$$w = F(x, y), \quad d\xi = (G_1(x, y) y_x + G_2(x, y))\, dx. \tag{3}$$

Кроме того, показано, что линеаризуемые уравнения из семейста (1) допускают рациональный квадратичный первый интеграл. Для ряда частных случаев найдены необходимые и достаточные условия линеаризуемости и, следовательно, существования представления Лакса и квадратичного первого интеграла. Обсуждаются различные примеры линеаризуемых уравнений из (1), в частности, примеры, имеющие физически и математические приложения.

[1] A. Goriely, Integrability and nonintegrability of dynamical systems, World Scientiffic, 2001.

[2] D.I. Sinelshchikov, I.Y. Gaiur, N.A. Kudryashov, Lax representation and quadratic first integrals for a family of non-autonomous second-order differential equations, J. Math. Anal. Appl. 480 (2019) 123375.

[3] W. Nakpim, S.V. Meleshko, Linearization of Second-Order Ordinary Differential Equations by Generalized Sundman Transformations, Symmetry, Integr. Geom. Methods Appl. 6 (2010) 1–11.

## Бифуркации в асимптотически гамильтоновых системах с осциллирующими возмущениями

**Султанов О.А.**
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия;
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Россия

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H_0(x, y) + F(x, y, S(t), t), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H_0(x, y) + G(x, y, S(t), t),$$

где $H_0(x, y)$, $F(x, y, S, t)$, $G(x, y, S, t)$ — гладкие $2\pi$-периодические функции по $S$, определённые для всех $\mathbf{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $S \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Предполагается, что $H_0(x, y) = |\mathbf{z}|^2/2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3)$ при $\mathbf{z} \to 0$, а $F(x, y, S, t) \to 0$ и $G(x, y, S, t) \to 0$ при $t \to \infty$ и любых фиксированных значениях $(x, y, S)$,

$S'(t) \to \text{const}$ при $t \to \infty$. В работе исследуется влияние затухающих возмущений $F(x, y, S(t), t)$ и $G(x, y, S(t), t)$ на глобальное поведение решений вблизи равновесия предельной системы. В частности, описываются возможные асимптотические режимы для решений возмущённой системы на далеких временах. Показывается, что в зависимости от коэффициентов и структуры возмущений, в системе может иметь место режим фазового захвата или синхронизации, при котором величина фазовой расстройки стабилизируется, или режим фазового дрейфа, при котором фазовый сдвиг неограниченно растет со временем. В обоих режимах равновесие может остаться устойчивым в возмущённой системе, стать асимптотически устойчивым или неустойчивым. При потере устойчивости траектории возмущённой системы, стартующие вблизи равновесия, могут иметь неограниченно растущую амплитуду на бесконечности.

[1] O.A. Sultanov, *Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems under oscillatory perturbations*, Discrete Contin. Dyn. Syst, 41 (2021), 5943–5978.

## Задача интегральной геометрии для семейства сфер в $R^n$

**Сысоев С.Е.**

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

В евклидовом пространстве $R^n$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ обозначим $x^2 = \langle x, x\rangle$, $|x| = \sqrt{x^2}$, $B = \{x \in R^n : |x| < 1\}$. Для $a \in R^n$, $|a| > 1$, рассмотрим сферу $S(a) = \{x \in R^n : (x-a)^2 = a^2-1\}$ с центром в точке $a$ и радиусом $\sqrt{a^2-1}$. Получается семейство сфер, ортогональных $S^{n-1}$. Для функции $f \in C_0^\infty(B)$ определим сферическое преобразование Радона

$$Mf(a) = \int_{S(a)} f(x)dS,$$

где $dS$ — евклидов элемент площади поверхности сферы $S(a)$. Рассмотрим задачу восстановления функции $f$ по данным $Mf(a)$.

В [1] решена задача обращения сферического преобразования Радона, заданного на множестве всех сфер с центрами на гиперплоскости $\{x \in R^n : x_n = 0\}$, путем сведения к решению эквивалентной задачи для классического преобразования Радона. Аналогичным образом получим решение рассматриваемой здесь задачи. Для $\xi \in S^{n-1}$, $p \in R$, обозначим

$$M_Bf(\xi, p) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} Mf\left(\frac{\xi}{p}\right), \qquad 0 < |p| < 1.$$

**Теорема**. Для $f \in C_0^\infty(B)$ имеют место следующие формулы обращения сферического преобразования Радона:

$$f(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}(1-x^2)}{2\pi^{n-1}(1+x^2)^n} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}} M_B f\left(\xi, \frac{2\langle \xi, x\rangle}{1+x^2}\right) d\xi, \quad n = 2k+1,$$

$$f(x) = \frac{(-1)^{(n-2)/2}(1-x^2)}{2\pi^{n-1}(1+x^2)^n} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} H \frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}} M_B f\left(\xi, \frac{2\langle \xi, x\rangle}{1+x^2}\right) d\xi, \quad n = 2k,$$

где $H$ — преобразование Гильберта.

Если $1 < |a| < A$, то приходится восстанавливать функцию $f$ по неполным данным о ее сферическом преобразовании Радона $Mf(a)$.В [2] доказана единственность решения подобной задачи.


[1] A.Denisjuk, Fract. Calc. and Appl. Anal., 2 (1999), No 1, p. 31–46.

[2] С.Е.Сысоев, Успехи мат. наук, 52 (1997), No 4, с. 213–214.


## Образование потенциально опасных для жизнедеятельности пчел фрагментов при диссоциативном захвате электронов пестицидами


**Таюпов М.М., Маркова А.В., Сафронов А.М.**

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа


Пентахлорофенол (ПХФ)- одно из токсичных фенольных соединений, которое используется в основном в составе фунгицидов и пестицидов. Несмотря на полный его запрет в одних странах и строгое ограничение использования в других, он применяется, главным образом, в средствах защиты древесины на целлюлозно-бумажных предприятиях. Широкое распространение таких производств в XX в. привело к значительному загрязнению окружающей среды ПХФ во всем мире [1]. Есть достаточно оснований полагать, что именно пестициды такого класса являются причиной гибели большого количества пчелосемей по всему миру, в том числе и в Республике Башкортостан [2].

Как показали исследования методом масс-спектрометрии отрицательных ионов резонансного захвата электронов, в диапазоне энергий существующих во внутриклеточной среде электронов ($0-4$ эВ), при диссоциативном захвате образуется достаточно большое количество токсичных и потенциально токсичных фрагментов. Самые интенсивные из них, это осколки, имеющие нейтральный заряд- $Cl_2$ (боевой отравляющий газ), $HCl$ (вызывает ожоги внутренних органов), $CHClO$ (хлорформалин, используется дезинфекции). Все эти вещества потенциально опасные для жизнедеятельности живых организмов и их образование может быть причиной невозвратимых отрицательных последствий внутри клеток.

Работа выполнена в рамках гранта в форме субсидий в области науки из бюджета Республики Башкортостан для государственной поддержки молодых ученых – аспирантов и кандидатов наук (НОЦ-ГМУ-2021).

[1] Zheng W. et al. Global trends and diversity in pentachlorophenol levels in the environment and in humans: a meta-analysis //Environmental science & technology. – 2011. – Т. 45. – №. 11. – С. 4668-4675.

[2] Anderson J. F., Wojtas M. A. Honey bees (Hymenoptera: Apidae) contaminated with pesticides and polychlorinated biphenyls //Journal of Economic Entomology. – 1986. – Т. 79. – №. 5. – С. 1200-1205.

## Особенности формирования и роста нематохостерических ЖК-капель в изотропном окружении.

**Тимиров Ю.И.**[a], **Хазимуллин М.В.**[a], **Хайдарова Н.М.**[a,b], **Мухаметзянова А.А.**[b]

[a]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

[b]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В последнее время активно изучаются ЖК-капли в изотропных жидкостях, что вызвано возможностью управления топологической структурой капель изменением граничных условий при помощи поверхностно-активных или фоточувствительных материалов. В данной работе мы изучаем способ получения системы цилиндрических капель и их структуру в смеси ЖК и низкомолекулярного углеводорода, образующейся при фазовом переходе жидкий кристалл – изотропная жидкость.

В работе показано, что добавление о-ксилола в смесь нематического и холестерического жидкого кристалла позволяет получить устойчивую систему цилиндрических капель при определенной температуре в области фазового перехода (рис. 1). Обнаружено, что о-ксилол изменяет смачиваемость полимерной поверхности жидкокристаллической фазой. Это приводит к изменению формы мениска и, как следствие, ориентационной структуры капель. Полученные результаты обеспечивают основу для дальнейших экспериментальных исследований ориентационный структуры и топологических дефектов в цилиндрических слоях нематических и нематохолестерических жидких кристаллов.

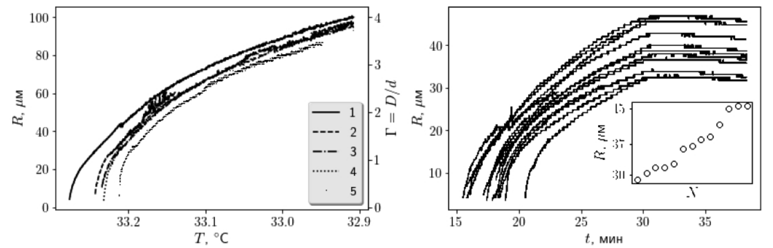



Рис. 1: Радиус капель и соотношение размеров $\Gamma = 2R/d$ при линейном изменении температуры в ячейке (слева) и зависимость радиусов капель от времени при стабилизации температуры (в момент времени $t = 30$ мин) (справа). На вставке – радиусы капель после стабилизации температуры ячейки ($N$ – номер капли).

## Влияние аза-замещения полициклических ароматических углеводородов на образование долгоживущих молекулярных отрицательных ионов


**Р.Ф. Туктаров[1], М.В. Муфтахов[1], Р.В. Хатымов[1,2]**

[1]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

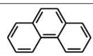
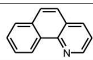
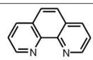
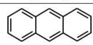
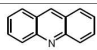
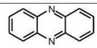
[2]Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, г.Москва, Россия


Благодаря широкому спектру привлекательных электронных и геометрических структурных параметров, высокой химической, термической и фото-стабильности полициклические ароматические углеводороды (ПАУ) находят широкое применение в различных областях науки и техники. Замена в молекулах ПАУ CH-групп на (иминный) атом =N- существенно модифицирует их зарядотранспортные свойства вплоть до преобразования типа проводимости с дырочной на электронную [1].

В настоящей работе методом масс-спектрометрии резонансного захвата электронов исследована способность изолированных молекул некоторых аза- и диаза-производных антрацена и фенантрена присоединять и удерживать добавочный низкоэнергетический электрон.

Как и для ранее изученного [2, 3] исходного фенантрена, для его аза-производного 7,8-бензохинолина долгоживущие молекулярные отрицательные ионы (МОИ) не зарегистрированы. Такая картина бывает характерна для молекул с отрицательным или незначительным адиабатическим электронным сродством ($EA_a$). МОИ с $\tau_a = 40$ мкс, минимально возможным для регистрации на масс-спектрометре МИ-1201В, проявляются при тепловой энергии электронов ($E_e \sim 0$ эВ) для 1,10-фенантролина, в структуре которого имеется уже два атома азота. Увеличение времени жизни МОИ при повышении степени аза-замещения наблюдается и в ряду антрацен–акридин–феназин, причем МОИ начинают проявляться и в нетепловой области $0 < E_e < 2.5$ эВ. Таким образом, можно заключить, что аза-замещение приводит к возрастанию $EA_a$, что подтверждается литературными экспериментальными данными, а также результатами выполненных квантовохимических расчетов (см. Табл.). Как и для других ПАУ [4], единственным каналом диссоциативного распада МОИ аза-ПАУ является отщепление атома водорода с образованием ионов $[M-H]^-$ при сравнительно высоких $E_e > 5$ эВ.

Таблица Время жизни молекулярных отрицательных ионов фенантрена, антрацена и их аза- и диаза-производных в сопоставлении с адиабатическим электронным сродством молекул.

| **Соединение** | **Структура соединения** | **Время жизни МОИ $\tau_a$ при $E_e$~0 эВ, мкс** | **Адиабатическое электронное сродство $EA_a$, эВ** | |
|---|---|---|---|---|
| | | | **Эксперимент [лит. данные]** | **Кв.-хим. расчет** B3LYP/6-311G(d,p)** |
| фенантрен |  | <40 [3]* | 0.12 [5]<br>0.31 ± 0.02 [6] | 0.006 (0.174) |
| 7,8-бензохинолин |  | <40* | – | 0.254 (0.417) |
| 1,10-фенантролин |  | 40 | – | 0.371 (0.528) |
| антрацен |  | 41 [3] | 0.53 ± 0.02 [7]<br>0.68 ± 0.02 [6] | 0.589 (0.727) |
| акридин |  | 700 | 0.87 [8] | 0.918 (1.041) |
| феназин |  | 8000 | 1.27 [8] | 1.332 (1.436) |

* Долгоживущие МОИ не обнаружены
** Расчеты проводились указанным методом функционала плотности по разности полных энергий нейтральной молекулы и аниона ($\Delta_{SCF}$), в т.ч. с учетом энергии нулевых колебаний (ZPE, в скобках)


[1] Stolar M., Baumgartner T. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2013. V. 15. P. 9007 DOI: 10.1039/C3CP51379C

[2] Khatymov R.V., Muftakhov M.V., Shchukin P.V. // Rapid Commun. Mass Spectrom. 2017. V. 31. P. 1729 DOI: 10.1002/rcm.7945

[3] Khatymov R.V., Tuktarov R.F., Muftakhov M.V. // JETP Letters. 2011. V. 93. P. 437 DOI: 10.1134/s002136401108011x

[4] Muftakhov M.V., Khatymov R.V., Tuktarov R.F. // Technical Physics. 2018. V. 63. P. 1854 DOI: 10.1134/S10 63784218120125

[5] Lee S.H., Kim N., Ha D.G., Song J.K. // RSC Adv. 2013. V. 3. P. 17143 DOI: 10.1039/c3ra43498b

[6] Chen E.S., Chen E.C.M. // Rapid Commun. Mass Spectrom. 2017. V. 32. P. 230 DOI: 10.1002/rcm.8021

[7] Ando N., Mitsui M., Nakajima A. // J. Chem. Phys. 2007. V. 127. P. 234305 DOI: 10.1063/1.2805185

[8] Dillow G.W., Kebarle P. // Canadian Journal of Chemistry. 1989. V. 67. P. 1628 DOI: 10.1139/v89-249

## Квазилинейные уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля

**Туров М.М.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $D_t^\beta$ – дробная производная Римана — Лиувилля, $\mathcal{Z}$ – банахово пространство, $Z$ – открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $F : Z \to \mathcal{Z}$, рассмотрим квазилинейное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) +$$

$$+ F(t, D_t^{\alpha-m} z(t), D_t^{\alpha-m+1} z(t), \dots, D_t^{\alpha-1} z(t)), \tag{1}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l := \lceil \alpha_l \rceil$, $m := \lceil \alpha \rceil$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0$, операторы $A_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s$, $s = 1, 2, \dots, r$, являются линейными и ограниченными в $\mathcal{Z}$. Пусть $\underline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha_l - m_l < \alpha - m\}, \underline{m} = \lceil \underline{\alpha} \rceil$, $\overline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha_l - m_l > \alpha - m\}, \overline{m} = \lceil \overline{\alpha} \rceil$. Целочисленную характеристику $m^* := \max\{\underline{m} - 1, \overline{m}\}$ назовём дефектом задачи типа Коши для уравнения (1) [1]. Решением неполной задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \ k = m^*, m^*+1, \dots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1) на $(t_0, t_1]$ назовём такую функцию $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $J_t^{m_l-\alpha_l} z \in C^{m_l}((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, и $J_t^{\beta_s} z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, и для всех $t \in (t_0, t_1]$ верно равенство (1), выполняется $(t, D_t^{\alpha-m} z(t), D_t^{\alpha-m+1} z(t), \dots, D_t^{\alpha-1} z(t)) \in Z$ и условия (2).

**Теорема.** Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leq m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\ldots,n$, $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_r\geq 0$, $A_j\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\ldots,m-1$, $B_l\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\ldots,n$, $C_s\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\ldots,r$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=m^*,m^*+1,\ldots,m-1$, $Z$ – открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $(t_0,0,0,\ldots,0,z_{m^*},z_{m^*+1},\ldots,z_{m-1})\in Z$, отображение $F\in C(Z;\mathcal{Z})$ является локально липшицевым по $(x_0,x_1,\ldots,x_{m-1})\in\mathcal{Z}^m$. Тогда существует такое $t_1>t_0$, что задача (1), (2) имеет единственное решение на $(t_0,t_1]$.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

[1] Fedorov, V.E.; Turov, M.M. The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann–Liouville derivatives. *Siberian Mathematical Journal* **2021**, *62*, 925–942.

## Управление структурообразованием в жидких кристаллах модификацией поверхности.

**Хайдарова Н.М.**[a,b]**, Тимиров Ю.И.**[a]**, Хазимуллин М.В.**[a]**, Мухаметзянова А.А.**[b]

[a]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

[b]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В данной работе изучаются поверхностные свойства плёнок ПАВ [3-(триметоксисилил)-пропил]-октадецилдиметил аммоний хлорида (DMOAP) с контролируемой плотностью упаковки молекул на подложках с проводящим покрытием (ITO-glass) для приготовления гомеотропных жидкокристаллических (ЖК) ячеек.

Монослои DMOAP с различной плотностью упаковки молекул (“газовая”, “жидкая” и “кристаллическая” фазы) создавались методом Ленгмюра-Блоджетта. Для сравнения проанализированы свойства стандартных гомеотропных ЖК-ячеек: (i) с ориентирующими мультислоями DMOAP (толщиной $\sim 30$ нм), полученные методом погружения и (ii) с ориентирующим полимерным покрытием JALS-204 (также толщиной $\sim 30$ нм).

Методом определения контактных углов обнаружено, что плотность упаковки молекул DMOAP заметным образом влияет на величину поверхностного натяжения монослоя. Проведенная оценка поверхностной энергии сцепления $W$ методом измерения критических напряжений перехода Фредерикса, показала, что $W$ также возрастает с увеличчением плотности упаковки, достигая значений $\sim 10^{-3}$ Дж/м$^2$, характерных для

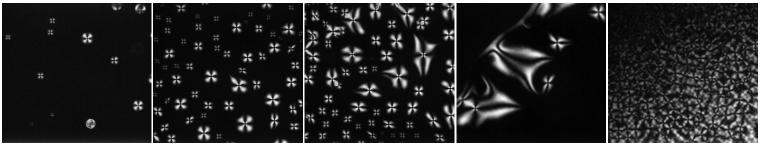


Рис. 1: Изменение ориентирующих свойств монослоев DMOAP с различной плотностью упаковки: слева направо - “газовая”, “жидкая” и “кристаллическая” фазы, мультислой из 5% водного р/ра DMOAP и полимерного ориентанта JALS-204. Поляризаторы скрещены. Увеличение x100.

полимерного ориентанта. Полученные выше результаты также подтверждаются и качественным анализом оптических текстур (рис. 1), образующихся при модификации поверхности: наблюдается формирование ЖК-капель в образцах с частичной смачиваемостью (“газовая” фаза) и переход к полному смачиванию при максимальных концентрациях.

## О гомологическом уравнении в задаче аппроксимации центрального многообразия

**Фазлытдинов М.Ф.**
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается динамическая система, описываемая уравнением

$$x' = F(x)\,, \quad x \in R^N, \tag{1}$$

где $F(x) \in C^m$, $m \geqslant 2$.

Пусть система (1) имеет негиперболическую точку равновесия $x = 0$, т.е. $F(0) = 0$ и матрица Якоби $A = F'_x(0)$ имеет одно или несколько чисто мнимых собственных значений. А именно, пусть спектр $\sigma$ матрицы $A$ состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где $\sigma_0$ содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а $\sigma^0$ – остальные собственные значения. Обозначим через $E_0$, $E^0$ – корневые подпространства матрицы $A$, отвечающие, соответственно, частям $\sigma_0$, $\sigma^0$ ее спектра.

В указанных предположениях у системы (1) в окрестности точки равновесия $x = 0$ возникает центральное многообразие. Центральное многообразие является важным объектом в задачах качественного исследования динамики системы (1). Центральное многообразие, как правило, не могут быть точно рассчитаны. Поэтому актуальной является задача разработки ее аппроксимации, которая приводит к необходимости решения так называемых гомологических уравнений [1]. Приведем соответствующее понятие.

Обозначим через $F_p$ множество однородных порядка $p$ вектор–полиномов, определенных в подпространстве $E_0$ и принимающих значения в подпространстве $E^0$. Рассмотрим уравнение

$$L\psi(u) \stackrel{def}{=} \psi'(u)Au - A\psi(u) = v(u)\,, \tag{2}$$

где $\psi(u) \in F_p$ – неизвестная функция, $v(u) \in F_p$ – заданная функция. Уравнение (2) называется гомологическим уравнением. В работе получены спектральные свойства оператора $L$ и утверждение о разрешимости уравнения (2).

[1] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

## Линейное неоднородное уравнение с распределенной производной Римана — Лиувилля

**Федоров В.Е., Абдрахманова А.А.**
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия;
Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $D_t^{\beta}$ — производная Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, т. е. линейный замкнутый оператор с плотной в $\mathcal{Z}$ областью определения $D_A$, $-\infty < b \leq 0 \leq m-1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega \in L_1(b,c)$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{gathered} \int\limits_{m-1-k}^{c} \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+k} z(0) d\alpha = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ \int\limits_{b}^{c} \omega(\alpha) D_t^{\alpha} z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \ \ t \in (0, T). \end{gathered} \tag{1}$$

Отметим, что при $\alpha < 0$ $D_t^{\alpha} z(t) := J_t^{-\alpha} z(t)$.

Пусть $S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta\}$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ таков, что

$$\exists \theta_0 \in (\pi/2, \pi], a_0 \geq 0 \ \forall \lambda \in S_{\theta_0,a_0} \ W(\lambda) \in \rho(A);$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \theta \in (\pi/2, \theta_0) \ a > a_0 \ \exists K(\theta, a, \varepsilon) > 0 \ \forall \lambda \in S_{\theta,a}$$
$$\|(W(\lambda)I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq K(\theta, a, \varepsilon)|\lambda|^{1-m}|\lambda - a|^{m-c-1+\varepsilon}.$$

В таком случае будем говорить, что $A \in \mathcal{A}^R_{c,\varepsilon}(\theta_0, a_0)$. Определим семейства операторов

$$Z_k(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \lambda^{m-1-k} \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad t > 0,$$

где $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$, $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

**Теорема** [1]. Пусть $-\infty < b \le 0 \le m - 1 < c \le m \in \mathbb{N}$, $\omega \in L_1(b, c)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, $A \in \mathcal{A}^R_{c,\varepsilon}(\theta_0, a_0)$, $g \in C([0, T]; D_A)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда функция $z(t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k + \int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s) g(s) ds$ является единственным решением задачи (1).

Работа поддержана грантом РФФИ и Вьетнамской академии науки и технологии, проект № 21-51-54003.

[1] Fedorov V.E., Du W.-S., Kostic M., Abdrakhmanova A.A. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann — Liouville derivatives // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 5. ID 681.

## Задача Коши для уравнения с дискретно распределенной дробной производной Герасимова — Капуто

**Филин Н.В. Фёдоров В.Е.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в $\mathcal{Z}$, действующих в пространство $\mathcal{Z}$. Обозначим $S_{\theta,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \ne a\}$ при $\theta \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \left( \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|}.$$

В таком случае мы будем говорить что оператор $A$ принадлежит классу $\mathcal{A}_{\{\omega_k\}}(\theta_0, a_0)$.

**Теорема** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, $m - 1 < \alpha_n \le m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_{\{\omega_k\}}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, $g \in C([0, T]; D_A) \cap C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$. Тогда существует единственное решение задачи Коши $z^{(k)}(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения с дискретно распределенной дробной производной

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t) + g(t), \quad t \in (0, T].$$

Здесь $D^\beta$ — дробная производная Герасимова — Капуто.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

[1] Федоров В.Е., Филин Н.В. Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 264–280.

## Ограничение снизу субгармонической функции логарифмом модуля целой

**Хабибуллин Б.Н.**

БашГУ, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Через $\overline{D}_z(t)$ обозначаем замкнутый круг радиуса $t \ge 0$ с центром $z$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для числа $d \in (0, 2]$, функции $r \colon \mathbb{C} \to (0, +\infty)$ и *гамма-функции* $\Gamma$ внешнюю меру

$$\mathfrak{m}_d^t \colon S \underset{S \subset \mathbb{C}}{\longmapsto} \inf \left\{ \sum_k \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)} t_k^d \;\middle|\; S \subset \bigcup_k \overline{D}_{z_k}(t_k),\, z_k \in \mathbb{C},\, t_k \le r(z_k) \right\}$$

называем *$d$-мерным обхватом Хаусдорфа переменного радиуса $r$.*

**Теорема** (развитие [1], [2], [3]). *Пусть $u \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция на $\mathbb{C}$ конечного порядка, т.е. удовлетворяет условию*

$$\limsup_{z \to \infty} \frac{\ln \max\{1, u(z)\}}{\ln |z|} < +\infty,$$

*а для функция* $r\colon \mathbb{C} \to (0,+\infty)$ *имеем* $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} \dfrac{\ln r(z)}{\ln(2+|z|)} > -\infty$. *Тогда для каждого* $d \in (0,2]$ *существует ненулевая целая функция* $f$, *для которой* $\ln|f(z)| \le u(z)$ *при всех* $z \in \mathbb{C}\setminus E$, *где для исключительного множества* $E \subset \mathbb{C}$ *выполнено условие* $\mathfrak{m}_d^r(E\cap S) \le \sup\limits_{z\in S} r(z)$ *для любого* $S \subset \mathbb{C}$.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

[1] Хабибуллин Б.Н., Байгускаров Т.Ю. *Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции* // Матем. заметки, **99**:4 (2016), 588–602; Math. Notes, **99**:4 (2016), 576–589.

[2] Байгускаров Т.Ю., Хабибуллин Б.Н., Хасанова А.В. *Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции.* II.*Комплексная плоскость* // Матем. заметки, **101**:4 (2017), 483–502; Math. Notes, **101**:4 (2017), 590–607.

[3] Khabibullin B. N. *The Logarithm of the Modulus of an Entire Function as a Minorant for a Subharmonic Function outside a Small Exceptional Set* // Azerbaijan Journal of Mathematics, **11**:2 (2021), 48–59.

## Обратная спектральная задача для возмущенного гармонического осциллятора на полуоси

**Ханмамедов А.Х., Мурадов М.Ф.**
Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

За последние несколько лет появилось много работ, посвященных различным вопросам спектрального анализа возмущенного гармонического осциллятора (см. [1-3] и имеющиеся там ссылки).

Рассмотрим в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$ самосопряженный оператор $L$, который можно получить замыканием симметричного оператора, определяемого дифференциальным выражением $l(q)\,y = -y'' + x^2y + q(x)\,y, 0 < x < \infty$ и краевым условием $y(0) = 0$ на дважды непрерывно дифференцируемых финитных функциях. Будем считать, что вещественный потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию $\int_0^\infty x^5\,|q(x)|\,dx < \infty$. При выполнении последнего условия оператор $L$ имеет чисто дискретный спектр, состоящий (см. [1]) из простых собственных значений $\lambda_n, n = 0,1,...$, где $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Пусть $f(x,\lambda_n)$- собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_n$ и $\alpha_n = \sqrt{\int_0^\infty |f(x,\lambda_n)|^2 dx}$ - нормировочный коэффициент. В настоящей работе методом операторов преобразования исследуется обратная спектральная задача для оператора $L$, т.е. задача восстановления потенциала возмущения $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n > 0\}_{n=0}^{\infty}$. Найдены необходимое и достаточное условия для однозначной разрешимости обратной задачи. Указана эффективная процедура восстановления потенциала $q(x)$ по спектральным данным.


[1] H.P. McKean, E. Trubowitz, "The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator", *Comm. Math. Phys.,* **82**(1982), 471-495.

[2] B.M. Levitan, "Sturm-Liouville operators on the whole line, with the same discrete spectrum", *Mathematics of the USSR-Sbornik* **60**:1 (1988), 77-106.

[3] D.Chelkak, E.Korotyaev, "The inverse problem for perturbed harmonic oscillator on the half-line with Dirichlet boundary condition", *Ann. Henri Poincare,* **8**:6(2007), 1115–1150.


## Омбилическая особенность решений системы квазилинейных уравнений газовой динамики


**Шавлуков А.М.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия


Рассмотрена типичная (с точки зрения математической теории катастроф) омбилическая особенность решения системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha(\rho) = \rho^{-1}p_\rho$, $p$ – уравнение состояния газа. Функция $\alpha(\rho)$ считает бесконечно дифференцируемой.

Система переписывается в терминах инвариантов Римана и переводится в систему квазилинейных уравнений.

В окрестности точки потери гладкости решение описывается каноническим уравнением сечения гиперболической омбилики. Возмущение ростка катастрофы при этом отличается от описанного в [1]. Выдвигается гипотеза о неточности представленной в [1] классификации особенностей инвариантов Римана. Дано описание равномерных и полных асимптотик решений. Предложены примеры: одноатомный газ и случай Бехерта-Станюковича.

Исследование выполнено совместно с Б.И. Сулеймановым.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/

[1] А. Х. Рахимов, “Особенности римановых инвариантов”, Функц. анализ и его прил., 27:1 (1993), 46–59; Funct. Anal. Appl., 27:1 (1993), 39–50

## Касательное отображение к отображению модулей в задаче об аналитической классификации одного класса ростков полугиперболических отображений.

**Шайхуллина П.А.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Рассматривается задача об аналитической классификации ростков голоморфных полугиперболических отображений на плоскости. Формальная классификация таких ростков известна [1] и содержит три числовых инварианта. Аналитическая классификация помимо числовых инвариантов включает так называемые «функциональные модули». Построение этих модулей в явном виде не представляется возможным, поэтому построим хотя бы «касательное» отображение к отображению модулей.

Рассмотрим простейший случай: два формальных инварианта равны нулю, третий инвариант — вещественное положительное число. Росток отображения $F_\lambda(x,y) = \left(\frac{x}{1-x}, e^\lambda y\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ именно такой. Обозначим через $\mathbf{F}_\lambda$ класс ростков, формально эквивалентных ростку $F_\lambda$, голоморфное центральное многообразие которых существует и совпадает с прямой $\{y=0\}$. Обозначим через $\mathbf{M}_\lambda$ некоторое функциональное пространство, каждый элемент которого может быть реализован в качестве модуля аналитической классификации ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$. Из теоремы об аналитической классификации ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$ [1] следует, что «отображение модулей» $m : \mathbf{F}_\lambda \to \mathbf{M}_\lambda$ является сюрьективным (при этом для аналитической эквивалентности ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$ необходимо и достаточно совпадения их функциональных модулей).

Положим $F_\varepsilon = F_\lambda + \varepsilon\Phi$. Тогда (см. [1]) $m_{F_\varepsilon} = m_{F_\lambda} + \varepsilon\Psi_{j,j+1} + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, $j \in \mathbb{Z}_4$. Обозначим через $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ «касательное» отображение $\overrightarrow{\mathcal{T}} : \Phi \to$

$\Psi_{j,j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_4$. Обозначим через $\mathcal{B}[f](x)$ значение преобразования Бореля функции $f$ в точке $x$. Обозначим через $t$ и $\tau$ первые интегралы отображения $F_\lambda$: $t = e^{-2\pi i/x}$, $\tau = ye^{\lambda/x}$.

**Теорема**. Пусть $\Phi(x,y) = \Big(-(1-1/x)^{-2}\, p^1(-1/x,y), e^\lambda y p^2(-1/x,y)\Big)$, где $p^s(-1/x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^s(-1/x)y^m$, $s = 1,2$; $\Psi_{j,j+1} = \{q^1_{j,j+1}, q^2_{j,j+1}\}$, $j \in \mathbb{Z}_4$. Тогда:
$q^s_{0,1} = 2\pi i \sum\limits_{m\geq 0, n\geq 1} \mathcal{B}[P^s_m](\lambda m + 2\pi i n)\tau^m t^{-n}$; $q^s_{1,2} = 2\pi i \sum\limits_{m\geq 0} \mathcal{B}[P^s_m](\lambda m)\tau^m$;
$q^s_{2,3} = 2\pi i \sum\limits_{m\geq 0, n\geq 1} \mathcal{B}[P^s_m](\lambda m - 2\pi i n)\tau^m t^n$; $q^s_{3,0} = 0$, $s = 1,2$.

[1] Шайхуллина П.А. Аналитическая классификация типичных ростков полугиперболических отображений. Дисс. на соиск. степ. канд. ф.-м. наук. Челябинск, 2019.

## Исследование процесса структурообразования в сегнетоэлектрических жидких кристаллах во внешних магнитном и электрическом полях

**Шапошников Н.С.**
Башкирский государственный педагогический университет
им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

В [1] исследовалась возможность появления неустойчивостей в распределении поля директора в образце сегетоэлектрика под воздействием внешних полей. Работа [2] посвящена исследованию периодических искажений в смектических жидких кристаллов. Цель предлагаемой работы – получение критических значений магнитного и электрического полей, при которых такого рода искажения возможны в сегнетоэлектрических жидких кристаллах.

Искажение смектических слоев сегнетоэлектрического жидкого кристалла определяется из условия минимума функционала

$$F = \int_V f(x,y,z,u(x,z))\, dV + S,$$

где $f(x,y,z,u(x,z))$ – плотность упругой энергии в объеме образца сегнетоэлектрика и $u(x,z) = u_0 \sin(kx)\sin(\pi z/d)$ - функция искажения смектических слоев.

Получены значения волнового числа $k_x$ и соотношение связывающее критические значения магнитного $H_c$ и электрического $E_c$ полей:

$$k_x^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\mu_0\Delta\chi H_c^2 + \epsilon_a\epsilon_0 E_c^2\cos^2\alpha\right)\cos 2\theta}{A_{12}},$$

$$\left(\mu_0 \Delta\chi H_c^2 + \epsilon_a \epsilon_0 E_c^2 \cos^2\alpha\right)^2 = \frac{4\pi^2 B_0 A_{12}}{d^2 \cos^2 2\theta},$$

при которых возможно возникновение периодических искажений смектических слоев в сегнетоэлектрике, результаты согласуются с [2].


[1] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г., Мигранова Д.Н. Приложение теории катастроф к описанию нестабильностей в сегнетоэлектрических жидких кристаллах в магнитном поле // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 20 (2020), № 3, с. 34-40. DOI: 10.18083/LCAppl.2020.3.34

[2] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Периодические искажения слоев смектического жидкого кристалла в магнитном и электрическом полях // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 19 (2019), №1, с. 79-86. DOI: 10.18083/LCAppl.2019.1.79


## Исследование процесса релаксации поля директора в тонких слоях нематических жидких кристаллов


**Шапошников Н.С., Зиннуров М.И.**

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия


Несмотря на то, что нематики являются хорошо изученными жидкими кристаллами, остается ряд вопросов, которые представляют особый интерес – проблема структурообразования в нематиках, этому вопросу посвящена, к примеру, статья [1], и динамическое описание деформаций, вызванных внешним полем в нематическом образце (например, [2]). В представленной работе исследуется релаксация деформации, вызванной внешним электрическим полем, когда искажающее поле выключается. Рассмотрение задачи о релаксации искажений имеет важное значение для понимания динамики процессов, происходящих в различного рода электрооптических устройствах.

В работе исследовались малые деформации поля директора тонкого слоя нематического жидкого кристалла (НЖК), помещенного между двумя твердыми подложками при наличии внешнего постоянного электрического поля $E$. На основе анализа свободной энергии тонкого слоя НЖК были выведены уравнения, связывающие материальные параметры нематика с видом возникающей деформации. При этом учитывались процессы релаксации этой деформации при выключении искажающего поля. Получено выражение, описывающее распределение поля директора в одномерной ячейке. Предложенная модель допускает возникновение периодической структуры директора вдоль оси z. Полученные данные согласуются с результатами, изложенными в [1–3].

[1] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Построение функционала, описывающего макроструктуры в тонком слое нематического жидкого кристалла // Вестник Челябинского государственного университета. «Физика». 2010. Вып. 7. №12 (193). С.41-46.

[2] Еникеев Ю.А., Мигранов Н.Г. Математическое моделирование малых деформаций поля директора нематика в двумерных ячейках под действием электрических полей // Вестник УГАТУ. Том 15 (2011). №5 (45), с.73-77.

[3] Еникеев Ю.А., Мигранов Н.Г. Релаксационные механизмы пространственно-периодических структур в гомеотропном нематике // Жидк. крист. и их практич. использ. 2011. №2 (36), с. 66-74.

## О формальных нормальных формах вырожденных бинарных уравнений

**Черепанова Е.А.**

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Бинарное дифференциальное уравнение (BDE — binary differential equation [1]) — это неявное дифференциальное уравнение вида

$$ap^2 + 2bp + c = 0, \tag{1}$$

где $p = \frac{dy}{dx}$, а функции $a = a(x, y),\ b = b(x, y),\ c = c(x, y)$ определены в окрестности точки $(0, 0)$.

Задача о классификации BDE рассматривалась, например, в [1]. Наибольшие проблемы при этом возникали при одновременном обращении в нуль всех трёх коэффициентов уравнения (1):

$$a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0. \tag{2}$$

**Теорема**. Типичное BDE (1), (2) формальными заменами координат приводится к нормальной форме

$$a)\ (\beta y + \gamma(x))p^2 + x + y = 0,\ p = \frac{dy}{dx},\ \gamma(0) = 0 \tag{3}$$

или к одной из нормальных форм

$$b)\ yp^2 + 2(b_2 y + x\delta(x)) \pm y = 0,\ p = \frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

**Замечание**. Формальная нормальная форма (4) предложена в [1], однако доказательство утверждения о возможности такой формальной нормализации в [1] отсутствует. Формальная нормальная форма (3) представляется более удобной для дальнейшего исследования, по сравнению с формальной нормальной формой (4). Однако приводимость к формальной нормальной форме (3) доказана лишь в комплексном случае.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 21-51-54003).

[1] J.W. Bruce, F. Tari. On binary differential equations, Nonlinearity, No. 8(2), 255-271, 1995.

## Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в нерадиальных пространствах Фока

**Юлмухаметов Р.С., Исаев К.П.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривалась задача о существовании безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространствах Фока

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\, dm(z) < \infty \right\},$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега, $\varphi(z)$ — некоторая субгармоническая функция. Вопрос активно изучался многими авторами и для случая, когда весовая функция $\varphi$ радиальная, получены достаточные условия, близкие к необходимым (см., например, [1], [2]). Нами рассматривались пространств Фока с нерадиальной весовой функцией. Пусть $\mu$ — ассоциированная мера весовой функции $\varphi$, $\mu(z,t)$ — $\mu$-мера круга с центром в точке $z$ радиуса $t$. Доказано, что если для некоторой константы $\beta \in (0; \frac{1}{2})$ выполняются условия

$$\sup_z \int\limits_0^{\beta|z|} \frac{\mu(z,t)\, dt}{t} < \infty, \qquad \sup(\mu(0,2t) - \mu(0,t)) < \infty,$$

то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ безусловный базис из воспроизводящих ядер существует тогда и только тогда, когда такой базис существует в пространстве $\mathcal{F}_v$ с радиальной весовой функцией

$$v(z) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(ze^{i\theta})\, d\theta, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No 21-11-00168).

[1] Baranov A., Belov Yu., Borichev A., "Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces", Studia Mathematica, **236** (2017), №2, 127–142.

[2] Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах", Изв. РАН. Сер. мат., **86** (2022), №1, 160–179.

## Признаки устойчивости точек равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

**Юмагулов М.Г., Худойбердиев Д.**
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия;
Самаркандский государственный университет, Узбекистан

Рассматривается зависящее от малого параметра $\varepsilon$ нелинейное дифференциальное уравнение

$$x'''' + a[1+\varepsilon\varphi(t)]x'' + b[1+\varepsilon\psi(t)]x = \varepsilon f(x,t,\varepsilon)\,, \qquad (1)$$

в котором:

– коэффициенты $a$ и $b$ удовлетворяют условиям $a > 0\,,\ \ b > 0\,,\ \ d = a^2 - 4b > 0\,;$

– функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются $T$-периодическими;

– функция $f(x,t,\varepsilon)$ является гладкой по совокупности переменных и $T$-периодической по $t$, при этом $f(0,t,\varepsilon) \equiv 0$.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) является линейным и все корни его характеристического уравнения $\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$ являются чисто мнимыми вида $\pm i\omega_1\,,\quad \pm i\omega_2$. Уравнение (1) имеет нулевое решение $x = 0$. Изучается устойчивость этого решения при малых $|\varepsilon|$.

Для решения поставленной задачи осуществляется переход к равносильной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы вида

$$\frac{dy}{dt} = J\nabla H(y,t,\varepsilon)\,, \quad y \in R^4\,, \qquad (2)$$

где $H(y,t,\varepsilon)$ – соответствующая функция Гамильтона,

$$\nabla H(y,t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} H'_{y_3} \\ H'_{y_4} \\ H'_{y_1} \\ H'_{y_2} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При $\varepsilon = 0$ система (2) является линейной, харатеристические показатели которой являются чисто мнимыми. Здесь (в зависимости от значений коэффициентов $a, b$) возможны различные резонансы. В докладе обсуждаются признаки устойчивости решения $y = 0$ системы (2) при малых $|\varepsilon|$ как в резонансных, так и нерезонансных случаях. При этом используются результаты из [1].

[1] Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Белова А. С. Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем // Уфимск. матем. журн., 13:3 (2021), 178–195.

**Научное издание**

# КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

***Сборник материалов***
***Международной научной конференции***
***(оз. Банное, 14 – 18 марта 2022 г.)***

В авторской редакции
Издательство не несет ответственности за опубликованные материалы.
Все материалы отображают персональную позицию авторов.
Мнение Издательства может не совпадать с мнением авторов

Подписано в печать 05.03.2022 г. Формат 60x84/16.
Печать: цифровая. Гарнитура: Times New Roman
Усл. печ. л. 4,88. Тираж 500. Заказ 1563

АЭТЕРНА
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

**Отпечатано в редакционно-издательском отделе**
**НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»**
**450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120**
**https://aeterna-ufa.ru**
**info@aeterna-ufa.ru**
**+7 (347) 266 60 68**