МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЦ УФИЦ РАН

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЯ

Сборник тезисов
Международной конференции
(Уфа, 23 – 26 мая 2018 г.)

Уфа
РИЦ БашГУ
2018

УДК 51
ББК 22.1
К63

Сборник издан при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ),
проект № 18-01-20026

Комплексный анализ и геометрия: сборник тезисов
К63 Международной конференции (г. Уфа, 23 – 26 мая 2018 г.)
/ отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2018. – 46 с.
ISBN 978-5-7477-4637-4

В сборнике представлены тезисы докладов участников международной конференции «Комплексный анализ и геометрия».
Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7477-4637-4

BASHKIR STATE UNIVERSITY
INSTITUTE OF MATHEMATICS WITH COMPUTER CENTRE
of UFA FEDERAL RESEARCH CENTRE of RAS

INTERNATIONAL CONFERENCE
«COMPLEX ANALYSIS AND GEOMETRY»

BOOK OF ABSTRACTS

May 23 - 26, 2018

UFA – 2018

UDC 51
BBK 22.1

The Conference is sponsored
by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR)
Grant № 18-01-20026

International Conference «Complex Analysis and Geometry». Book of Abstracts.
Ufa, Russia: RITS BashSU, 2018. – 46 p.
ISBN

The book contains abstracts of the talks at International Conference «Complex Analysis and Geometry».

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-7477-4637-4

Содержание

Топологическая структура весовых композиционных операторов

Абанин А.В.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону; Южный математический институт, г. Владикавказ, Россия

Для единичного круга $\mathbb{D}$ через $H(\mathbb{D})$ обозначим пространство всех функций, аналитических в $\mathbb{D}$, а через $S(\mathbb{D})$ — подмножество $H(\mathbb{D})$, состоящее из тех функций φ, для которых $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Каждая функция $\varphi \in S(\mathbb{D})$ порождает на $H(\mathbb{D})$ композиционный оператор $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$. Пусть X — банахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$. Обозначим через $\mathcal{C}(X)$ пространство всех композиционных операторов $C_\varphi : X \to X$ с операторной нормой. В работе [1] изучалась задача об описании компонент связности и изолированных точек пространства $\mathcal{C}(H^2)$. В [2] и [3] она была систематически исследована для пространства $\mathcal{C}(H^\infty)$. В [4] была предпринята попытка обобщить результаты из [2] и [3] на весовые пространства Бергмана и и весовые композиционные операторы $C_{\varphi,\psi} = \psi \cdot C_\varphi$.

В докладе будут представлены новые результаты для обычных и весовых композиционных операторов в пространствах

$$H_v^\infty(\mathbb{D}) := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) :\ \|f\|_v := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}$$

и

$$H_v^0(\mathbb{D}) := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) :\ \lim_{|z| \uparrow 1} \frac{f(z)}{v(z)} = 0 \right\},$$

задаваемых радиальным весом v.

[1] Shapiro J.H., Sundberg C. Isolated amongst the composition operators // Pacific J. Math. 1990. Vol. 145. P. 117–152.

[2] MacCluer B., Ohno S., Zhao R. Topological structure of the space of composition operators on H^∞ // Integr. Equ. Oper. Theory. 2001. Vol. 40. P. 481–494.

[3] Hosokawa T., Izuchi K., Zheng D. Isolated points and essential components of composition operators on H^∞ // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 130, № 6. P. 1765–1773.

[4] Bonet J., Lindström M., Wolf E. Topological structure of the set of weighted composition operators on weighted Bergman spaces of infinite order// J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 2008. Vol. 84. P. 195–210.

Обратимые функции в алгебре Шварца

Абузярова Н.Ф.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{P}$ – *алгебра Шварца*, состоящая из всех целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси. Функция $\varphi \in \mathcal{P}$ *обратима*, если справедлива импликация:
$\Phi \in \mathcal{P}$, Φ/φ – целая функция $\Longrightarrow \Phi/\varphi \in \mathcal{P}$ (см. [1]).

Пусть $\lambda_k = k + l(k)$, $k = 1, 2, \dots$, $\lambda_k = k + l(|k|)$, $k = -1, -2, \dots$, где $l = l(t)$ вещественнозначная функция, $t > 0$. Если l – *ограниченная* функция, то $\varphi(z) := \lim\limits_{R\to\infty} \prod\limits_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$ – обратимая функция в $\mathcal{P}$ (см. [2]).

Теорема 1. *Если функция φ содержится и обратима в $\mathcal{P}$, то $|l(t)| = O(\ln^2 t), \quad t \to \infty$.*

Теорема 2. *Предположим, что функция l удовлетворяет необходимому условию из теоремы 1, дифференцируема на $(0; +\infty)$ и $|l'(t)| = O\left(\frac{l(t)}{t}\right), \quad t \to \infty$. Если*

$$|l'(t)| = O\left(\frac{\ln t}{t}\right), \tag{1}$$

то функция φ содержится и обратима в $\mathcal{P}$.

Теорема 3. *Если l – возрастающая вогнутая функция, удовлетворяющая необходимому условию из теоремы 1, то для того, чтобы функция φ принадлежала алгебре $\mathcal{P}$ и была обратимой там, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение (1).*

Отметим, что результат, аналогичный теореме 3, для функций типа синуса был получен в работе [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

[1] L. Ehrenpreis. Solution of some problems of division, IV.// Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.

[2] R.E.A.C. Paley, N. Wiener. Fourier transforms in the complex domain. New York. 1934.

[3] А.А. Юхименко. Об одном классе функций типа синуса.// Матем. заметки. 2008. Т. 83. Вып. 6. С. 941–954.

Конформно инвариантные интегральные неравенства и их обобщения

Авхадиев Ф.Г.
Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$—область, $n \geq 3$. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим множество гладких вещественнозначных функций, имеющих компактные носители в области Ω. Для функций $u \in C_0^1(\Omega)$ мы формируем и изучаем конформно инвариантные неравенства, родственные многомерным неравенствам типа Харди (см. [1]). Рассматриваются области гиперболического типа, в которых определен гиперболический радиус $R = R(x, \Omega)$ как положительное минимальное решение уравнения Лиувилля $R\Delta R = (n/2)|\nabla R|^2 - 2n$, обращающееся в нуль на границе области. Для единичного шара $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ гиперболический радиус определяется известной формулой $R(x, B) = 1 - |x|^2$. Нами доказаны несколько конформно инвариантных неравенств в пространственных областях. Приведем две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 3$, $1 \leq p < \infty$ и $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Тогда*

$$\int_B \frac{|\nabla u(x)|^p\, dx}{(1 - |x|^2)^{n-p}} \geq \frac{2^p(n-1)^p}{p^p} \int_B \frac{|u(x)|^p dx}{(1 - |x|^2)^n} \quad \forall u \in C_0^1(B).$$

Константа $2^p(n-1)^p/p^p$ является точной, т.е. наибольшей из возможных.

Теорема 1 была известна ранее лишь при $p = 2$ [2] и $n = 2$ [3].

Теорема 2. *Пусть $p \in [2, \infty)$, $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$—область гиперболического типа. Тогда*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{R^{n-p}(x, \Omega)} \geq \frac{2^p n^{p/2}(n-2)^{p/2}}{p^p} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^n(x, \Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00115).

[1] Balinsky A.A., Evans W.D., Lewis R.T, The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality, Universitext, Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer. 2015.

[2] Sullivan D., Related aspects of positivity in Riemannian geometry, J. Differential Geom. 25 (1987), 327–351.

[3] Авхадиев Ф.Г., Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения, Матем. сборник, 206:12 (2015), 3–28.

Асимптотические решения задачи конвективной диффузии внутри капли с учётом объёмной химической реакции

Ахметов Р.Г.

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия, г. Уфа

Рассматривается стационарная конвективная диффузия внутри капли при наличии объёмной химической реакции. Аналогичные и более сложные задачи исследовались во многих работах [1, 2]. Задачи такого рода возникают в химической технологии. В докладе предполагается дать обзор основных результатов автора по данной теме. Для задачи стационарной конвективной диффузии внутри сферической капли при наличии объемной химической реакции методом согласования [3] построено асимптотическое решение по малому параметру в окрестности границы. Малый параметр соответствует большим числам Пекле.

[1] Гупало Ю. П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука. 1985. 336 стр.

[2] Головин А.М., Животягин А.Ф. Влияние объёмной химической реакции на массообмен внутри капли при больших числах Пекле. // Вестник МГУ, сер. 1., мат. и мех., 1979, №4, Стр. 834-847.

[3] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989 . 336 стр.

Почти комплексные структуры на гиперповерхностях почти контактных многообразий

Банару М.Б.

Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Россия

Доказано, что почти комплексная структура индуцируется на гиперплоскости почти контактного многообразия. Результат детализируется для случая, когда почти контактная структура многообразия является контактной. Приводится краткий обзор новых результатов, полученных в данном направлении другими математиками (например, [1]).

Обсуждается связь полученного результата с известным фактом о существовании почти контактных структур на гиперповерхностях почти комплексных (в частности, почти эрмитовых) многообразий [2].

[1] Cho H. Distribution on almost contact manifolds // Acta Mathematica Scientia. 2017. 37B (2). P.695–701.

[2] Кириченко В.Ф., Банару М.Б. Почти контактные метрические структуры на гиперпо-верхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техники. Современная мате-матика и её приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 127. С.5–40.

H – калибр последовательности и множества

Брайчев Г.Г.
Московский педагогический государственный университет,
г. Москва, Россия

Пусть H — выпуклая функция. К. Киселман [1] определил H- калибр отрезка $[a, b]$ относительно функции $H(x)$ равенством

$$J_H(a;b) := \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\{ \frac{(1-\lambda)\,H(a)+\lambda H(b)}{H((1-\lambda)a+\lambda b)} \right\}.$$

В данном определении берется верхняя грань отношений ординат хорды, стягивающей точки графика функции $H(x)$, к ординатам самой функции в соответствующих точках. Укажем также, что характеристика, связанная с разностью ординат хорды и графика функции, рассматривалась при изучении весовых преобразований Фурье–Лапласа в работе [2].

Пусть $H(x)$ — выпуклая на $(a,\, b)$, $b \leqslant +\infty$, функция, а x_k — возрастающая последовательность точек, взятых на промежутке $(a,\, b)$. Назовем H-калибром последовательности x_k (относительно $H(x)$) величину

$$J_H(x_k) := J_H(x_k;x_{k+1}) := \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\{ \frac{(1-\lambda)\,H(x_k)+\lambda H(x_{k+1})}{H((1-\lambda)\,x_k+\lambda x_{k+1})} \right\},$$

а H-калибром множества $E \subset (a,\, b)$, такого что $\sup E = b$, — величину

$$J_H(E) = \inf\{J_H(x_k):\ x_k\in E,\ x_k \nearrow b\}.$$

Очевидно, что $J_H(x_k) \geqslant 1$ и $J_H(E) \geqslant 1$. Справедлив следующий результат, указывающий на влияние калибра множества, на котором достигается нижняя характеристика сравнительного роста выпуклых функций, на величину ее верхней характеристики.

Теорема. *Пусть* $\varphi(x)$ *и* $H(x)-$ *выпуклые функции на интервале* $(a,\, b)$, $b \leqslant +\infty$. *Пусть далее* $t = \varliminf\limits_{x\to b} \frac{\varphi(x)}{H(x)} = \lim\limits_{E\ni x\to b} \frac{\varphi(x)}{H(x)}$, $T = \varliminf\limits_{x\to b} \frac{\varphi(x)}{H(x)}$. *Тогда выполняется неравенство*

$$T \leqslant t\, J_H(E).$$

[1] Kiselman, Ch. O. Order and type as measure of growth for convex or entire functions // Proceedings of London Math. Soc. – 1983. – V. 66. – № 3. – P. 152–186.

[2] Напалков, В. В., Юлмухаметов, Р. С. Весовые преобразования Фурье-Лапласа аналитических функционалов в круге // Математический сборник. – 1992. – Т. 183. – № 11. – С. 139–144.

Двусторонняя оценка экстремальной функции в классе Карлемана

Гайсин А.М.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В [1] поставлена проблема: найти точные оценки сверху и снизу для экстремальной функции

$$J_M(x) = \sup\{|f(x)| : \sup_I |f^{(n)}(x)| \le M_n, \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \ge 0)\}$$

в регулярном классе Карлемана $C_I(M)$ на отрезке $I = [0,\ 1]$.

Пусть H — ассоциированный вес, $\psi = \ln\ln H$, $\theta = \theta(x)$ — функция, обратная к

$$x = \int\limits_0^\theta t\psi'(t)dt.$$

Данный интеграл существует тогда и только тогда, когда класс $C_I(M)$ не является квазианалитическим (см. [2]).

Теорема 1 [2]. Пусть $t|\psi'(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$. Если класс $C_I(M)$ неквазианалитический, то

$$H^{-1}(q\theta(x)) \le J_M(x) \le H^{-1}(Q\theta(x)) \quad (0 < q < Q). \tag{1}$$

В [2] утверждается, что эта теорема дает решение упомянутой проблемы из [1]. Автор отмечает, что оценки (1) ранее были получены А.Л. Вольбергом, но этот результат тогда не был опубликован.

Теорема 2. Если класс $C_I(M)$ неквазианалитический, то

$$N_0 H^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) \le J_M(x) \le H^{-1}(px), \quad p=\sup_{n\ge 1}\sqrt[n]{\frac{M_n}{M_{n-1}}}, \tag{2}$$

где N_0 — постоянная, зависящая только от $\{M_n\}$.

Легко показать, что $\ln H^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) = o(\ln H(Q\theta(x)))$ при $x\to 0$. Однако правая оценка в (1) справедлива для каждой функции $f\in C_I(M)$, $f^{(n)}(0)=0$ $(n\le 0)$, но с постоянной $Q=Q_f$, зависящей от f (см. в [2]). Оценка сверху для $J_M(x)$ в теореме 1 неверна.

Истинные оценки для $J_M(x)$ обеспечиваются неравенствами (2) из анонсируемой здесь теоремы 2.

[1] Dyn'kin E.M. On the growth of analytic function near its singularity set // Journal Soviet Math. 4 (1975).

[2] Dyn'kin E.M. The pceudoanalytic extension // Journal d'Analyse Math. 1993. V. 60. P. 45–70.

Равенство порядков ряда Дирихле в замкнутых полуполосах

Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Башкирский госуниверситет

г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, $D_0(\Lambda)$ — класс всех аналитических функций, представимых рядами Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s=\sigma+it),$$

сходящимися лишь в полуплоскости $\Pi_0=\{s=\sigma+it:\sigma<0\}$. Пусть L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ функций, $K=\left\{h\in L: h(0)=0, h(t)=o(t), t\to\infty,\ \frac{h(t)}{t}\downarrow,\ t\uparrow\infty\right\}$, $R=\{h\in K:\ \ h(x)\ln\frac{x}{h(x)}=o\left(\frac{x}{\ln x}\right),\quad x\to+\infty\}$.

R-плотностью последовательности Λ называется величина

$$G(R)=\inf_{h\in R}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)},$$

где $\omega(t) = [t,\ t + h(t))$ — полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек из Λ, попавших в полуинтервал $\omega(t)$.

Пусть $S_i = S(a_i, t_i) = \{s = \sigma + it : |t - t_i| \le a_i,\ \ \sigma < 0\}$ $(i = 1,\ 2)$ — полуполосы. В [1] доказано, что если последовательность Λ имеет конечную R-плотность $G(R)$, а каждая из полуполос S_1 и S_2 имеет ширину больше $2\pi G(R)$, то $\rho_1 = \rho_2$, какова бы ни была функция $F \in D_0(\Lambda)$. Здесь ρ_1 и ρ_2 — R-порядки функции F в S_1 и S_2 соответственно.

Теорема. Пусть $|\Lambda(t) - bt| \le C < \infty$, где $\Lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$. Если полуполосы S_1и S_2 имеют ширину не меньше $2\pi b$, то для любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ порядки ρ_1 и ρ_2 в S_1и S_2 равны.

В данной теореме $G(R) = b$. Если одна из полуполос имеет ширину меньше $2\pi b$, то теорема не верна.

[1] Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н. Порядок ряда Дирихле с нерегулярным распределением показателей в полуполосах // Алгебра и анализ (статья ожидает решения редколлегии).

Интерполяционные последовательности и минимальность системы экспонент на кривых

Гайсин Р.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть W — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций из класса сходимости, а Ω — подкласс W, состоящий из вогнутых функций.

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ попарно различных комплексных чисел λ_n будем называть *интерполяционной в смысле Павлова-Коревара-Диксона*, если найдется функция $\omega \in \Omega$, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \le 1$, существует целая функция f, обладающая свойствами (см. в [1], [2]):

$$1)\ f(\lambda_n) = b_n \quad (n \ge 1); \qquad 2)\ M_f(r) = \max_{|z| \le r} |f(z)| \le e^{\omega(r)}.$$

Впервые интерполяционные последовательности $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ рассматривал А.И. Павлов (1972). Я. Коревар и М. Диксон доказали, что так называемые последовательности А.И. Павлова и Т. Ковари являются интерполяционными [2]. Позже в [3] был доказан и критерий интерполяционности последовательности $\{p_n\}$ в смысле Павлова-Коревара-Диксона. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, критерий интерполяционности в классе W установлен в [4]. Как и в [3], доказательство этого результата основано на одной оценке Хёрмандера для решения $\overline{\partial}$-уравнения. Классическим методом Я. Коревар и М. Диксон доказали: *если* $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ — *последовательность А.И. Павлова, то последовательность* $\ldots, -p_n, \ldots, -p_2, -p_1, 0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ *является интерполяционной (см. [1]).*

Методом Б. Берндсона получается более общая

Теорема 1. *Последовательность* $M = \{\nu_n\}$, $\nu_n = \lambda_n$, $\nu_{-n} = -\lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *является интерполяционной тогда и только тогда, когда выполнены условия:* 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$; 2) $\int\limits_0^{|\nu_n|} \frac{\mu(t;\,\nu_n)}{t} dt \le w(|\nu_n|)$, *где* $\mu(t;\,\nu_n)$ — *число точек* $\nu_k \ne \nu_n$ *из отрезка* $\{h : |h - \nu_n| \le t\}$, *а* w — *некоторая функция из* W, *зависящая только от последовательности* M.

Теорема 2. *Если выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, то для любого* $\eta \in (0,1)$ *система экспонент* $\{e^{\eta\nu_n z}\}$ *не полна (и минимальна) в* $C(\gamma)$ *для любой спрямляемой кривой* γ.

При более жестких условиях (близких к критерию Б. Берндсона) неполнота системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ $(\lambda_n > 0)$ в $C(\gamma)$ доказана в [5].

[1] J. Korevaar, M. Dixon. Nonspanning sets of exponentials on curves // Acta Math. Acad. Scient. Hung. 1979. T. 33. P. 89–100.

[2] J. Korevaar, M. Dixon. Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40. № 2. P. 243–258.

[3] B. Berndtsson. A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40. № 4. P. 409–414.

[4] Р.А. Гайсин. Интерполяционная задача Павлова-Коревара-Диксона с мажорантой из класса сходимости // Уфимский матем. журнал. 2017. Т. 9. № 4. С. 22–35.

[5] А.М. Гайсин. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.

Формула для порядка ряда экспонент для области с гладкой границей

Гайсина Г.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — конечная выпуклая область, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D. В [1] показано, что любая функция f из $H(D)$, имеющая конечный порядок

$$\rho = \overline{\lim_{z \to \partial D}} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad d(z) = \inf_{\xi \in \partial D} |z - \xi|,$$

допускает разложение в ряд экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D \tag{1}$$

(λ_n — нули некоторой целой функции экспоненциального типа, для которой $\overline{D}$ — сопряженная диаграмма), причем ряд из модулей имеет тот же порядок. Однако в [1] не ставится вопрос о какой-нибудь формуле для вычисления порядка через коэффициенты, ибо нет единственности (сумма ряда может быть равна нулю, а его коэффициенты не все равны нулю).

Предположим, что $G \supset \overline{D}$, где G — область сходимости ряда (1). Класс всех таких функций вида (1) обозначим $H(G, \Lambda)$.

Теорема. Пусть область G имеет гладкую границу. Если $n = \text{o}(|\lambda_n|)$, $n \to \infty$, то порядок ρ любой функции $f \in H(G, \Lambda)$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{\rho}{\rho + 1} \le \beta \le \frac{\rho}{\rho + 1} + q_0, \tag{2}$$

где

$$\beta = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_n| e^{K(-\varphi_n)|\lambda_n|} \right]}{\ln |\lambda_n|}, \quad q_0 = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}}{\ln |\lambda_n|},$$

$\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$, $K(\varphi)$ — опорная функция области G, $Q(\lambda)$ — четное произведение Вейерштрасса с простыми нулями λ_n ($n \ge 1$).

Оценки (2) точны. Если $q_0 = 0$, то в условиях теоремы верна формула

$$\frac{\rho}{(\rho + 1)} = \beta.$$

[1] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. №6. С. 1308–1328.

Об одном функционально-дифференциальном операторе

Гильмутдинов Р.З.
УГНТУ, г. Уфа, Россия

Пусть $R > 0$, $H(D)$ – пространство функций, аналитических в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D. Пусть $a \in H(D) \cap C(\overline{D})$. Пусть $B_q : H(D) \to H(D)$ – оператор, действующий по правилу:

$$(B_q f)(z) = -f'(z) + a(z)f(qz),\ z \in D,$$

где $|q| = 1$.

Теорема. *Для любых $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ существует единственное решение $y \in H(D) \cap C(\overline{D})$ уравнения $B_q y = \lambda y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \alpha$. Функция y является целой функцией параметра λ.*

Weierstrass polynomials and the structure of finite-sheeted covering mappings onto compact groups

Gumerov R.N.
Kazan Federal University, Russia (Renat.Gumerov@kpfu.ru)

In the study of holomorphic mappings, for example, in connection with the Weierstrass Preparation Theorem, there naturally appear the covering mappings that are determined by the polynomials of one variable whose coefficients are complex-valued functions. Those polynomials are called *Weierstrass polynomials*, and the covering mappings associated with such polynomials are called *polynomial coverings*. Algebraic and topological properties of Weierstrass polynomials over Banach algebras of continuous functions and corresponding polynomial coverings have been studied by various authors (see [1] and the references therein).

Let G be a compact connected abelian group. A *Weierstrass polynomial* of degree n over G is a mapping $R : G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ of the form $R(g, z) = z^n + \sum_{j=1}^{n} f_j(g) z^{n-j}$, where $g \in G, z \in \mathbb{C}$, and the coefficients $f_1, \ldots, f_n$ are continuous functions from G into $\mathbb{C}$. The polynomial R is said to be *simple* if, for every $g \in G$, the polynomial $R(g,x)$ in the variable x with complex coefficients has no multiple roots. For a simple polynomial R, consider the topological space $X = \{(g,z) \in G \times \mathbb{C} : R(g,z) = 0\}$. The projection from X onto the first coordinate G is called the *polynomial covering* associated with R.

In the report we discuss some results from [2]— [4]. In particular,

Theorem. Let $p : X \to G$ be an n-sheeted covering mapping from a connected space X onto a compact abelian group G, where n is a prime. Then there exists a Weierstrass polynomial $R(g,z) = z^n - \chi(g)$ of degree n over G, where χ is a character of G, such that p is equivalent to the polynomial covering mapping associated with R.

[1] Hansen V.L. Braids and Coverings— Selected Topics, Cambridge Univ. Press. Cambridge(1989)(London Math.Soc.Stud.Texts; V.18).

[2] Gumerov R.N. On covering mapping on solenoids // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. V. 133. P. 2771–2778.

[3] Gumerov R.N. Weierstrass polynomials and coverings of compact groups // Sib. Mat. Zh. 2013. 54(2). P. 320–324 (in Russian)[Sib. Math. J. 2013. 54(2). P. 243–246 (in English)].

[4] Gumerov R.N. Characters and coverings of compact groups // Izv. VUZ. Mat. 2014. No 4. P. 11–17 (in Russian)[Russian Math. 2014. Vol. 58. No 4. P. 7–13 (in English)].

Голоморфные решения солитонных уравнений

Домрин А.В.

Мехмат МГУ, г.Москва, Россия

Опишем локальный (не требующий граничных условий) вариант метода обратной задачи теории рассеяния и его применение к вопросам аналитического продолжения решений солитонных уравнений. Пусть a есть комплексная диагональная $n \times n$-матрица, все диагональные элементы которой различны, $m \geqslant 2$ – целое. Рассмотрим уравнение

$$U_t - V_x + [U,V] = 0 \quad \text{или, эквивалентно,} \quad q_t = F[q] \tag{1}$$

на голоморфную внедиагональную $n \times n$-матричную функцию $q(x,t)$, где $U(x,t,z) := az + q(x,t)$, $V(x,t,z) := az^m + \sum_{j=1}^{m} R_j[q](x,t)z^{m-j}$, а выражения $R_j[q]$, являющиеся полиномами от q и производных q по x (как и

$F[q]$ в (1)), подобраны так, чтобы левая часть (1) не зависела от z. Все *солитонные уравнения параболического типа* записываются в виде (1). В частности, при $a = \mathrm{diag}(1/2, -1/2)$, $m = 3$, $q(x,t) = \text{off-diag}(1, u(x,t))$ получается уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$.

Каждому ростку $q_0(x)$ голоморфной внедиагональной $n\times n$-матричной функции в точке $x_0 \in \mathbb{C}$ сопоставим формальный ряд $Lq_0(z) := \mu(x_0, z) - I$, где $\mu(x,z) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x) z^{-k}$ есть единственное решение уравнения $\mu_x = (az + q_0(x))\mu - \mu az$ в классе формальных рядов указанного вида с внедиагональными голоморфными ростками $\mu_k(x)$ в точке x_0. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через Gev_α множество всех формальных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k z^{-k}$ с внедиагональными $n \times n$-матрицами φ_k такими, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\| A^k (k!)^{-\alpha} < \infty$ при некотором $A > 0$.

Теорема 1. *Отображение $q_0 \mapsto Lq_0$ есть биекция множества всех внедиагональных голоморфных ростков в точке x_0 на множество Gev_1. Если $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$ при некотором $\alpha < 1$, то росток $q_0(x)$ продолжается до глобально мероморфной функции на $\mathbb{C}$. Задача Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$ для уравнения (1) имеет локальное голоморфное решение $q(x,t)$ в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/\mathrm{m}}$.*

Отсюда вытекает, что любой росток голоморфного решения любого из уравнений КдФ, мКдФ, НУШ, Буссинеска, а также их иерархий, аналитически продолжается до глобально мероморфной функции от x и дается описание всех возможных оболочек мероморфности таких ростков. Для КдФ этот результат можно усилить.

Теорема 2. *Всякое локальное голоморфное решение $u(x,t)$ уравнения $u_t = au_{xxx} + buu_x$, где $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, имеет вид $u(x,t) = 12ab^{-1}\partial_x^2 \log \tau(x,t)$, где $\tau(x,t)$ – целая функция от x.*

Гипотеза. Порядок этой целой функции $\leqslant 3$ для всех решений.

О неклассических свертках

Иванова О.А.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

В докладе идет речь об умножении в алгебре аналитических функционалов, отличном от стандартной свертки, задаваемой обычными сдвигами. Произведения подобного рода (например, свертка и произведение Дюамеля) исследуются в монографии И. Димовского [3], в работах М.Т. Караева [4], [2]. Рассмотрим следующую конкретную ситуацию. Пусть $\mathcal{E}(\Omega)$ — пространство Фреше всех бесконечно дифференцируемых функций в интервале Ω вещественной прямой, содержащем начало; $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность отрезков в Ω, исчерпывающая Ω; $H_{K_n}(x) := \max\limits_{t\in K_n}(xt)$, $x \in \mathbb{R}$, — опорная функция K_n,

$n \in \mathbb{N}$. Сильное сопряженное к $\mathcal{E}(\Omega)$ посредством преобразования Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ топологически изоморфно (LB)-пространству E всех целых функций f таких, что найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, для которых $|f(z)| \leq C(1+|z|)^n e^{H_{K_n}(\operatorname{Im} z)}$, $z \in \mathbb{C}$. Одно из специфических свойств E состоит в том, что пространство $\mathbb{C}[z]$ всех многочленов содержится и замкнуто в нем, а значит, не плотно в E. Пусть T_z, $z \in \mathbb{C}$, — операторы сдвига для оператора Поммье $f \mapsto \frac{f(z)-f(0)}{z}$; $(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f)))$, $\varphi, \psi \in E'$, $f \in E$ [1]. С умножением $\otimes$ сопряженное E' к E является унитальной ассоциативной и коммутативной алгеброй. Отображение $\mathcal{F}' : E' \to \mathcal{E}(\Omega)$, сопряженное к $\mathcal{F}$, является изоморфизмом алгебр $(E', \otimes)$ и $(\mathcal{E}(\Omega), *)$. При этом $*$ — произведение Дюамеля: $(h * g)(t) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)$.

Теорема. Пусть $\varphi \in E'$. Оператор свертки $S_\varphi : E' \to E'$, $\psi \mapsto \varphi \otimes \psi$, является изоморфизмом E' с сильной топологией тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}'(\varphi)(0) \neq 0$.

[1] Иванова О.А., Мелихов С.Н. Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, В. 2. С. 114–137.

[2] Караев М.Т. Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил. 2018. Т. 52, В. 1. С. 3–12.

[3] Dimovski I. Convolutional Calculus. London: Kluwer, 1990.

[4] Karaev M.T. Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators // Methods Funct. Anal. Topology. 2005. V. 11, № 1. P. 48–59.

Представление рядами экспонент функций в нормированных подпространствах $A^\infty(D)$

Исаев К.П.

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются подпространства $A \subset A^\infty(D) = H(D) \bigcap C^\infty(\overline{D})$ для ограниченной выпуклой области D на плоскости на предмет представления функций $f \in A$ из этих подпространств рядами экспонент.

Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, и возрастающая последовательность $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел логарифмически выпукла. Будем рассматривать банахово пространство $H(D, \mathcal{M})$ аналитических в области D функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}} \left(\frac{1}{M_n} \sup_{z \in D} |f^{(n)}(z)| \right).$$

Путь $\mathcal{M}_s = (M_{n+s})_{n=0}^{\infty}$, $s \in \mathbb{N}$, — последовательности со сдвигом. Всюду далее будем считать, что последовательности удовлетворяют условию "неквазианалитичности"

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$ и ограниченной выпуклой области в комплексной плоскости D, содержащей начало координат, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \; z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M}_s)$.

Теорема 2. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$ и ограниченной выпуклой области в комплексной плоскости D, содержащей начало координат, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D)$, для которой $f^{(s)} \in H(D, \mathcal{M})$, представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \; z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M})$.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00095а).

О спектре аналитических возмущений оператора Дирака с комплексным потенциалом

Ишкин Х.К.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть L_0 – оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H := L^2\left((0,+\infty),\mathbb{C}^2\right)$ по формуле $L_0 y = l_0(y) := Jy' + Q_0(r)y$ с областью определения $D(L_0) = \Big\{y = (y_1, y_2)^t \in H:\ y_1, y_2 \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(0,+\infty),$ $l_0(y) \in H\}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad Q_0(r) = \begin{pmatrix} -\gamma/r + m & k/r \\ k/r & -\gamma/r - m \end{pmatrix}$, где $k > 1/2,\ m > 0,\ \gamma = |\gamma|e^{i\theta},\ |\theta| < \pi$. Известно (см., например, [1, §§ 4.6.6, 7.4.3]), что при $0 < \gamma \le \sqrt{k^2 - 1/4}$ оператор L_0 самосопряжен, $\sigma(L_0) = \{l_n\}_{n=0}^{\infty} \cup \sigma_0,\ \lambda_n = m\left(1 + \frac{\gamma^2}{(n+\alpha)^2}\right)^{-1/2},\ \alpha = \sqrt{k^2 - \gamma^2}\ (n = 0, 1, 2, \dots)$, $\sigma_0 = \sigma_{\mathrm{ac}}(L_0) = (-\infty, -m] \cup [m, +\infty)$.

Пусть $L = L_0 + V$, где V – оператор умножения на функцию $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,+\infty)$. В работе [2] найдена асимптотика дискретного спектра оператора L при $0 < \gamma \le \sqrt{k^2 - 1/4}$ и $V \in B := L^1\left((0,+\infty), (1+\sqrt{r})dr\right)$. Поставим вопрос: при каких условиях на возмущение V сохраняются те или иные свойства спектра L_0 при комплексных γ.

Положим $G = \overline{\Pi}_+ \setminus \left(D^{1/2} \cup \left(-D^{1/2}\right)\right)$, где $\Pi_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $D = \{z = x + iy:\ x > y^2 + k^2 - 1/4,\ y \in \mathbb{R}\}$, $\pm D^{1/2}$ – образ D при отображении $z \mapsto \pm\sqrt{z}$, где $\sqrt{z} > 0$ при $z > 0$. Всюду далее будем считать, что $\gamma \in G$.

Теорема. Справедливы утверждения:

1) Если $V \in L^1(0,+\infty)$, то оператор L замкнут, имеет нулевые дефектные числа, $\sigma(L) = \sigma_{\mathrm{ac}} \cup \sigma_{\mathrm{discr}}$, $\sigma_{\mathrm{ac}} = \sigma_0$, σ_{discr} ограничен;

2) Пусть $\theta = \arg\gamma$ и пусть функция V определена на $(0,+\infty)$, непрерывна, $V \in B$ и допускает аналитическое продолжение в угол $\{-\theta < \arg z < 0\}$ так, что V непрерывна в каждом секторе $\{-\theta \le \arg z \le 0, |z| \le R\}$ и $V(e^{-i\theta}\cdot) \in B$. Тогда для собственных чисел оператора L справедлива формула $\mu_k \sim m\left(1 - \frac{\gamma^2}{2(k+\alpha+\delta)^2}\right) + o\left(k^{-3}\right),\ k \to \infty$, где δ – постоянная, называемая квантовым дефектом.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

[1] Thaller B. The Dirac equation. Berlin–Heidelberg–GmbH: Springer-Verlag, 1992.

[2] Ишкин Х. К., Муртазин Х. Х. *О квантовом дефекте для оператора Дирака с неаналитическим потенциалом*// ТМФ. Т. 125. № 3. С. 444–452.

Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов

Кривошеева О.А., Кривошеев А.С.
БашГУ, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $n(r, \Lambda)$ — число $\lambda_k \in B(0, r)$ с учетом кратностей n_k,

$$n^0(\Lambda) = \lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, \Lambda) - n((1-\delta)r, \Lambda)}{\delta r}, \quad m(\Lambda) = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}.$$

Изучаются особые точки суммы ряда

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, n_k - 1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad a = \{a_{k,n}\}. \tag{1}$$

Пусть $D(\Lambda, a)$ — открытое ядро множества точек $z \in \mathbb{C}$, где сходится ряд (1), и его сумма $g_{\Lambda,a}$ является аналитической функцией. Пусть γ — дуга границы, соединяющая точки z_1 и z_2. Дугу γ будем называть R-дугой, если $|z_2 - z_1| = R$. Положим

$$S_\Lambda^0 = \underline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{S_\Lambda(\delta)}{\delta}, \quad S_\Lambda = \lim_{\delta \to 0} S_\Lambda(\delta), \quad S_\Lambda(\delta) = \underline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln |q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{|\lambda_k|},$$

$$q_\Lambda^k(z, \delta) = \prod_{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|), m \neq k} \left(\frac{z - \lambda_m}{3\delta|\lambda_m|} \right)^{n_m}.$$

Теорема 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $m(\Lambda) = 0$, и $S_\Lambda^0 = -\infty$. Тогда для каждого $R > 0$ существует a такая, что на некоторой R-дуге границы $\partial D(\Lambda, a)$ функция $g_{\Lambda,a}$ не имеет особых точек.

Теорема 2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $m(\Lambda) \neq 0$. Тогда для каждого $R > 0$ существует a такая, что на некоторой R-дуге границы $\partial D(\Lambda, a)$ функция $g_{\Lambda,a}$ не имеет особых точек.

В силу теорем 1,2 условия $S_\Lambda^0 > -\infty$, $m(\Lambda) = 0$ необходимы для наличия особых точек у всех $g_{\Lambda,a}$ на каждой R-дуге $\gamma \in \partial D(\Lambda, a)$. Эти условия являются и достаточными для одного из классов последовательностей.

Теорема 3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $\lambda_k/|\lambda_k| \to e^{-i\varphi}$, и $R \geq 0$. Эквивалентны утверждения:

1) Каждая $g_{\Lambda,a}$ на любой R-дуге $\gamma \in \partial D(\Lambda, a)$ имеет особую точку.

2) $S_\Lambda = 0$ и $n^0(\Lambda) \leq R/2\pi$.

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Неравенство типа А.А.Лигуна для весового пространства Бергмана

Лангаршоев М.Р.
Таджикский национальный университет, г.Душанбе, Таджикистан

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Известно [1], что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$, если

$$\|f\|^q_{B_{q,\gamma}} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^q d\sigma < \infty,\ 1 \le q \le \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ – неотрицательная измеримая весовая функция, $d\sigma$ – элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега. Введём обозначения:

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\},$$

где $\mathcal{P}_{n-1}$ — множество всех алгебраических комплексных полиномов $p_{n-1}(z)$ степени $\le n-1$; $\omega_m(f,t)$ — модуль гладкости функции $f \in B_{q,\gamma}$;

$$\mathcal{B}^{(r)}_{q,\gamma} = \{f(z) \in B_{q,\gamma} : \|z^r f^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty\};\ \alpha_{k,r} = k!\{(k-r)!\}^{-1}, k > r.$$

Рассмотрим экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h) = \sup_{\substack{f\in\mathcal{B}^{(r)}_{2,\gamma}\\ f^{(r)}\ne const}} \frac{2^{m/2}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \omega^p_m(z^r f^{(r)},t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

где $m,n \in \mathbb{N}$, $\ r \in \mathbb{Z}_+$, $\ 0 < p < \infty$, $\ \varphi(t) \ge 0$, $\ 0 < t \le h$, $\ 0 < h \le \pi/n$.

Теорема. *Пусть* $m,n \in \mathbb{N}$, $\ r \in \mathbb{Z}_+$, $\ 0 < h \le \pi/n$, $\ \varphi$ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\{b_{n,m,r,p}(\varphi;h)\}^{-1} \le \mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h) \le \{\inf_{k\ge n} b_{k,m,r,p}(\varphi;h)\}^{-1},$$

где

$$b_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \left(\alpha^p_{k,r}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

[1] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана. // ДАН России, 2007, т.412, № 4, с.466-469.

Задачи кратной интерполяции в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости

Малютин К.Г.

Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Рассматривается задача свободной интерполяции в пространстве функций $[\rho,\infty]^+$ конечного порядка в верхней полуплоскости.

Определение. Дивизор $D=\{a_n,q_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *интерполяционным дивизором* в пространстве $[\rho,\infty]^+$, если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k=1,2,\ldots,q_n$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям:

$$\sup_n \frac{1}{\log|a_n|+2}\sup_{1\le k\le q_n}\log^+\log^+\frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!}<\infty\,,$$

$$\limsup_{|a|_n\to\infty}\sup_{1\le k\le q_n}\log^+\log^+\frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!}\leqslant\rho\,,$$

где $\Lambda_n=\min\{1;\operatorname{Im}a_n\}$, существует функция $F\in[\rho,\infty]^+$, решающая интерполяционную задачу

$$F(a_n)^{(k-1)}=b_{n,k},\quad k=1,2,\ldots,q_n,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Дивизор D является интерполяционным дивизором в пространстве $[\rho,\infty]^+$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\ln|a_n|+2}\log^+\log^+\frac{q_n!}{|E^{(q_n)}(a_n)|(\Lambda_n)^{q_n}}<\infty,$$

$$\limsup_{|a_n|\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\log^+\log^+\frac{q_n!}{|E^{(q_n)}(a_n)|(\Lambda_n)^{q_n}}\leqslant\rho\,,$$

где $E(z)$ — каноническое произведение дивизора D.

Рассматриваемая задача относится к проблемам свободной интерполяции, которые впервые начал рассматривать А.Ф. Леонтьев [1].

[1] Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка. // Докл. АН СССР. Т. 5. 1948. С. 785–787.

Об оценках конформно отображающей функции в угловых областях

Махина Н.М.
Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского, г.Брянск, Россия

Широкий круг задач комплексного анлиза сводится к возможности использовать те или иные оценки конформно отображающей функции (см., например, [1], [2] и литературу там). Пусть $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, (C) — класс односвязных областей на $\mathbb{C}$, граница каждой из которых состоит из конечного числа гладких дуг (Γ_j), образующих между собой в точках стыка положительные внутренние углы $\dfrac{\pi}{\alpha_j}, \dfrac{1}{2}\le\alpha_j<+\infty, j=\overline{1,n}$ (см.[3]).

Теорема. Пусть $G\in(C)$, $\varphi(z)$ — функция Римана, отображающая U на G, $\varphi(0)=w_0$, $\varphi'(0)>0$, $w_0\in G$; $k\in Z_+$, $\zeta,w\in U$, α_j — из определения класса (C), $j=\overline{1,m}$, $m=m(G)$, c — некоторая положительная постоянная. Тогда для $1<p<+\infty$ справедливо:

$$\int\limits_U \frac{|\varphi'(z)|^{kp+\tau+2}(1-|z|)^{kp+\tau}\chi_\gamma^p(z)}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^{\eta+1}|1-\overline{w}z|^{\sigma}}dm_2(z)\le$$

$$\le\frac{c\,|\varphi'(\zeta)|^{kp+\tau+2}(1-|\zeta|)^{kp+\tau}\chi_\gamma(\zeta)\chi_\gamma^{\frac{p}{q}}(w)}{(1-|\zeta|)^{\eta+1-\frac{2}{p}}(1-|w|)^{\sigma-\frac{2}{q}}},$$

where $\chi_\gamma(\zeta)=(1-|\zeta|)^{-\frac{\gamma}{pq}}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $0<\dfrac{\gamma}{q}<\min\{(kp+\tau)\,p+1;\tilde{\lambda}_k\}$, $\tilde{\lambda}_k=\min\limits_{1\le j\le m}(\dfrac{1}{\alpha_j}-1)((kp+\tau)\,p+2)+(kp+\tau)\,p+2$, $\eta>\max\{(kp+\tau)\,p+1;\tilde{\tilde{\lambda}}_k\}$, $\tilde{\tilde{\lambda}}_k=\max\limits_{1\le j\le m}(\dfrac{1}{\alpha_j}-1)((kp+\tau)\,p+2)+(kp+\tau)\,p+1$; $\sigma>2-\dfrac{\gamma}{q^2}$.

[1] Махина Н.М. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 16-22.

[2] Махина Н.М. О сопряженных пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420-413.

[3] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М.: Наука, 1977.

Об алгебрах аналитических функционалов

Мелихов С.Н.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

Пусть E — весовое (LF)-пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций f таких, что существует $n \in \mathbb{N}$, для которого для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется постоянная C такая, что $|f(z)| \le Ce^{v_{n,k}(z)}$ для всех $z \in \mathbb{C}$. При этом $v_{n,k} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, удовлетворяющие стандартным техническим условиям, и $v_{n,k+1} \le v_{n,k} \le v_{n+1,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Далее $\mathcal{L}(E)$ — пространство линейных непрерывных операторов в E. Для некоторых $A \in \mathcal{L}(E)$ существует специальная система $\mathcal{T}$ *операторов сдвига* $T_z \in \mathcal{L}(E)$ *для* A, $z \in \mathbb{C}$, с помощью которых можно ввести умножение $\otimes$ в сопряженном E' к E: $(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f)))$, $\varphi, \psi \in E'$, $f \in E$. Например, если A — оператор дифференцирования, то T_z — обычные сдвиги. Идея введения операторов сдвига для линейного оператора в локально выпуклом пространстве восходит к Ж. Дельсарту [3], определившему их с помощью обобщения ряда Тейлора для дифференциальных операторов, в частности, для оператора Бесселя. В докладе рассматриваются различные случаи выбора тройки $(E, A, \mathcal{T})$ и реализации алгебры $(E', \otimes)$. Если $g_0 \in E$, $g_0(0) = 1$ и $D_0(f)(t) := \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}$ — оператор Поммье, то $T_z(f)(t) = \frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}$ [1]. (Это определение восходит к В.А. Ткаченко [2].) В этой ситуации умножение $\otimes$ можно реализовать, например, в пространстве $D'(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$. Положим $v_{n,k}(z) := n|\mathrm{Im}\, z| - k\log(1 + |z|)$. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : D(\mathbb{R}) \to E$ является топологическим изоморфизмом "на". Для сопряженного отображения $\mathcal{F}' : E' \to D'(\mathbb{R})$, для $u, v \in D'(\mathbb{R})$ произведение $u \odot v$ (обобщенное произведение Дюамеля) определяется равенством $u \odot v := \mathcal{F}'\left((\mathcal{F}')^{-1}(u) \otimes (\mathcal{F}')^{-1}(v)\right)$, $u, v \in D'(\mathbb{R})$. С умножением $\odot$ пространство $D'(\mathbb{R})$ является унитальной ассоциативной и коммутативной алгеброй.

[1] Иванова О.А., Мелихов С.Н. Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, В. 2. С. 114–137.

[2] Ткаченко В.А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Матем. заметки. 1979. Т. 2, В. 2. С. 271–282.

[3] Delsartes J. Sur une extensions de la formule de Taylor // J. de Math. Pures et Appl. 1938. V. 17, № 9. P. 213–231.

Интерполяция в области суммами рядов экспонент, показатели которых имеют одно направление сгущения

Мерзляков С.Г., Попенов С.В.
ИМВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ произвольная область, Λ некоторое бесконечное множество, причем существует $\exists \omega \in [0, 2\pi)$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty, \lambda\in\Lambda} \lambda/|\lambda| = s_\omega = \exp i\omega$. Найдено описание счетных дискретных в D множеств $\mathcal{M} = \{\mu_k\}$, $\mu_k \in D$, для которых разрешима проблема кратной интерполяции в $H(D)$: *для любого множества кратностей* $\{m_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, *и любых данных интерполяции* $b_k^j \in \mathbb{C}$, $\exists u \in \Sigma(\Lambda, D)$, $u^{(j)}(\mu_k) = b_k^j$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \cdots, m_k - 1$.

Здесь $\Sigma(\Lambda, D) = \{u \in H(D) : u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(\lambda_n z),\ \exists \lambda_n \in \Lambda\}$, ряды сходятся абсолютно для $z \in D$. Такие ряды сходятся равномерно на компактах в множестве $\Pi_\omega = \{\mathrm{Re}(s_\omega z) < h_D(\omega) = \sup\limits_{\xi\in D} \mathrm{Re}(s_\omega \xi)\}$. В зависимости от D и ω, либо $h_D(\omega) < +\infty$, и тогда Π_ω это опорная полуплоскость области D в направлении $s_{-\omega}$, либо $h_D(\omega) = +\infty$ и $\Pi_\omega = \mathbb{C}$. Так как $\Sigma(\Lambda, D) = \Sigma(\Lambda, \Pi_\omega)$, проблему интерполяции нужно изучать в $H(\Pi_\omega)$ для всех множеств узлов $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \Pi_\omega$. Если $\widetilde{\mathcal{M}} \cap D \neq \emptyset$ и проблема интерполяции разрешима в $H(\Pi_\omega)$, получаем разрешимость и в $H(D)$.

Теорема *Пусть* $h_D(\omega) = +\infty$, *интерполяция изучается в* $H(\mathbb{C})$.

1. Предположим, что $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию: на любой прямой* $l_\omega(d) = \{\mathrm{Re}(s_\omega z) = d\}$, $d \in \mathbb{R}$, *лежит не более одной точки из* $\mathcal{M}$. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Re}(s_\omega \mu_k) = +\infty$, *проблема кратной интерполяции разрешима в* $H(\mathbb{C})$.

2. Пусть $\exists z_0 \in \mathbb{C}$: *полуплоскость* $\{\mathrm{Re}(s_\omega \mu_k) \leqslant \mathrm{Re}(s_\omega z_0)\}$, *содержит бесконечное число точек из* $\mathcal{M}$. *Тогда проблема простой интерполяции* $u(\mu_k) = b_k$ *не разрешима в* $H(\mathbb{C})$.

В части 2 прямые $l_\omega(d)$ могут содержать любое множество точек μ_k, что дает необходимые условия интерполяции в большой общности. Ранее для случая, когда $\mathcal{M}$ лежит на двух лучах, в доказательстве необходимости нами использовалось дополнительное техническое условие.

Пусть $h_D(\omega) < +\infty$, проблема интерполяции изучается в $H(\Pi_\omega)$, тогда $\mathcal{M} \subset \Pi_\omega$, в части 2 соответствующей теоремы $z_0 \in \Pi_\omega$, а в части 1 условие разрешимости должно выглядеть так: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Re}(s_\omega \mu_k) = h_D(\omega)$.

Следствие Проблемы простой и кратной интерполяции эквивалентны.

Из теорем вытекает разрешимость проблемы Валле-Пуссена для общих операторов свертки с комплексными узлами (в частности, результаты В.В. Напалкова с А.Н. Нуятовым и К.Р. Зименс, где предполагалось, что все узлы из $\mathcal{M}$ лежат на вещественной оси или в некотором угле).

Аппроксимация полиномами в весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой

Мусин И.Х.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

В [1] рассматривался ряд задач теории аппроксимации и гармонического анализа в весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой. При этом в силу применявшихся методов на весовые функции накладывались довольно ограничительные условия. Цель данной работы – получить аппроксимацию полиномами в такого типа пространстве при меньших ограничениях на весовые функции.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

1). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{|x|} = +\infty$;

2). $\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) \geq \ln(1+|x|) - a_m,\ x \in \mathbb{R}$.

Пусть последовательность $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел с $M_0 = 1$, удовлетворяет условиям:

i_1). $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$;

i_2). существуют числа $H_1 > 0, H_2 > 1$ такие, что

$$M_{k+n} \leq H_1 H_2^{k+n} M_k M_n,\ \forall k,n \in \mathbb{Z}_+;$$

i_3). найдутся числа $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ такие, что

$$M_n \geq Q_1 Q_2^n n!,\ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

По $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}$ определим нормированные пространства

$$G(\varphi_m,\varepsilon) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : q_{\varphi_m,\varepsilon}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\varepsilon^k M_k e^{\varphi_m(x)}} < \infty\}.$$

Пусть $G(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{\varepsilon>0} G(\varphi_m,\varepsilon)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $G(\varphi)$ является линейным пространством. Наделим пространство $G(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $G(\varphi_m,\varepsilon)$.

Теорема. *Полиномы плотны в* $G(\varphi)$.

Замечание. При условии, что последовательность $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ является неквазианалитической, приближение полиномами в $G(\varphi)$ может быть показано при меньших ограничениях на семейство $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, а именно, достаточно потребовать, чтобы для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнялись условия:

1). $\varphi_m \in C(\mathbb{R})$;

2). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{|x|} = +\infty$;

3). $\lim\limits_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty$.

[1] Мусин И.Х. О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Математический сборник. 2000. Т. 191 (10). С. 57-86.

Структура траекторий одного квадратичного дифференциала на торе

Насыров С.Р.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Разложение Наттолла [1] n-листной компактной римановой поверхности S определяется некоторым абелевым дифференциалом, который имеет особенности логарифмического характера в точках, лежащих над бесконечностью. Это разложение разбивает поверхность S на n множеств (листов) и тесно связано с изучением сходимости диагональных аппроксимаций Паде–Эрмита. Границы листов, вдоль которых осуществляется их склейка, являются траекториями некоторого квадратичного дифференциала.

В [2] А. И. Аптекарев и Д. Н. Туляков исследовали разложение Наттолла на римановой поверхности функции $w = \sqrt[3]{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$, где a_k, $1 \le k \le 3$, — попарно различные точки комплексной плоскости. В случае, когда треугольник Δ с вершинами в точках a_k близок к правильному, в [2] описана дифференциально-топологическая структура траекторий соответствующего квадратичного дифференциала, разбивающих риманову поверхность на листы. Тем самым, частично дан ответ на вопрос, поставленный С. П. Суетиным.

В данной работе мы исследуем случай произвольного расположения точек a_k, $1 \le k \le 3$, на комплексной плоскости. Нами показано, что возможны четыре существенно различные структуры траекторий, соответствующие следующим случаям расположения точек: 1) точки a_k, $1 \le k \le 3$, лежат на одной прямой, 2) треугольник Δ является невырожденным равнобедренным с углом при основании, строго большим $\pi/3$;

3) треугольник Δ является правильным; 4) остальные случаи расположения точек, не подпадающие под случаи 1)–3).

В каждом из случаев описана структура траекторий, разбивающих поверхность на листы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект No 17-01-00282.

[1] Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42, No.4. P. 299–386.

[2] Аптекарев А.И., Туляков Д.Н. Абелев интеграл Наттолла на римановой поверхности кубического корня многочлена третьей степени // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80, № 6. С. 5–42.

Полиномы Эрмита, безотражательные потенциалы и суперсимметричная квантовая механика

Новокшенов В.Ю.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается класс безмонодромных операторов Шредингера с рациональными потенциалами, образованными обобщенными полиномами Эрмита. Эти полиномы, определяемые как вронскианы классических полиномов Эрмита, встречаются в различных задачах математической физики, теории случайных матриц и одномерной суперсимметричной квантовой механики. Указанные потенциалы квадратично растут на бесконечности и осциллируют на конечном интервале.

Выводятся явные условия несингулярности безмонодромных потенциалов и оцениваются размеры осциллирующих областей этих потенциалов в терминах распределения нулей обобщенных полиномов Эрмита в комплексной плоскости. Оказывается, что безмонодромные потенциалы порождаются с помощью одевания гармонического потенциала операторами из полиномиальной алгебры Гейзенберга. Кроме того, все обобщенные полиномы Эрмита получаются из периодического замыкания этой алгебры, что позволяет также получить все рациональные решения уравнения Пенлеве четвертого типа. Обсуждается структура дискретного спектра оператора Шредингера с такими рациональными потенциалами и устанавливается связь с условием безмонодромности.

Результаты изложены в статье [1].

[1] V. Novokshenov, Generalized Hermite polynomials and monodromy-free Schrödinger operators, arXiv: 1803.06819

Неустойчивость трубчатых экстремальных поверхностей

Полубоярова Н.М.

Волгоградский государственный университет, г.Волгоград, Россия

Пусть M – n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\mathcal{N}$; $\Phi,\ \Psi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ – C^2-гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определен функционал

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\mathcal{N}} \Psi(x)\, dx, \tag{1}$$

не зависящий от выбора нормали ξ. Поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$. Элементы матрицы G имеют вид $G_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle)$, где $D\Phi = \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_2}, \ldots, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_{n+1}}\right)$, δ_{ij} – символ Кронекера. Формула I вариации функционала (1) доказана в [1]. Далее будем полагать, что матрица G положительно определена, λ и Λ ее минимальное и максимальное по модулю собственные значения. $L_{min},\ L_{max}$ - минимальная и максимальная $(n-1)$-мерные меры сечения поверхности $\mathcal{M}$ плоскостями вида $\{x : x_{n+1} = const\}$.

Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ погруженная экстремальная для функционала (1) поверхность со средней кривизной $H \neq 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, вдоль которой выполнено $\left\langle \overline{\nabla}\Psi,\, \xi \right\rangle \leq 0$, а граница поверхности расположена в параллельных плоскостях α_1 и α_2, заданных уравнениями $x_{n+1} = a$ и $x_{n+1} = b$ соответственно. Если расстояние между этими плоскостями удовлетворяет неравенству

$$b - a > \frac{2\pi\Lambda L_{max}}{\sqrt{n}|H|\lambda L_{min}},$$

то поверхность $\mathcal{M}$ неустойчива.

Замечание. Аналогичная теорема для поверхностей постоянной средней кривизны доказана в работе В.А Клячина [2].

[1] Полубоярова Н.М. Уравнения экстремалей функционала потенциальной энергии // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. № 5(36). 2016. С. 60–72.

[2] Клячин В.А. О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – Т. 70. – № 4. – С. 77–90.

Об операторе Данкла

Рахимова А.И., Напалков В.В.
БашГУ, г.Уфа, Россия,
БашГУ, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Введем пространство целых функций на комплексной плоскости одной переменной $H(\mathbb{C})$, далее возьмем некоторую функцию $f(z)$ из этого пространства. Обобщенный оператор Данкла Λ такой, что его действие на функцию имеет вид [1], [2]:

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_n f(\gamma_n z),$$

где коэффициенты такие, что $c > 0, \quad \gamma_n = e^{\frac{2\pi i n}{m}}, n = (0; m-1)$.

Оператор Λ отображает пространство целых функций $H(\mathbb{C})$ в самого себя, значит, любой n-кратный оператор $\Lambda^n, n \in \mathbb{N}$ отображает $H(\mathbb{C})$ точно так же.

Действие n-кратного оператора Λ^n на функцию $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ определяется следующим образом:

$$\Lambda^n f(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k p(k) p(k-1) ... p(k-n+2) p(k-n+1) z^{k-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема. Обобщенный оператор Данкла Λ сопряжен к оператору умножения на переменную $\frac{p(k)}{k} z$:

$$\Lambda^* = \frac{p(k)}{k} z \cdot .$$

[1] Напалков В.В., Напалков В.В.(мл.) Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423. № 3. С. 300–302.

[2] Карамов И.И., Напалков В.В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 1. С. 59–68.

Версии теоремы Хана – Банаха и огибающие: приложения в теории функций

Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б.
Башкирский государственный университет, г. Уфа, РФ

Доклад об обобщении, развитии и усилении результатов из [1] в [2].

Пусть X — векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Вариант теоремы Хана – Банаха об огибающей: *функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ — сублинейная (соотв. выпуклая), если и только если f совпадает с точной верхней границей, т. е. огибающей, всех линейных (соотв. аффинных) функций на X, мажорируемых функцией f.* Ситуация резко усложняется, если $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Об этом говорят многочисленные опубликованные некорректные результаты с приложениями в теории оптимизации и в комплексном анализе вплоть до 2013 г. для таких *расширенных* со значениями в $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ сублинейных (соотв. выпуклых) функций. Мы рассматриваем эту тематику об огибающей в случае, когда X — проективный предел векторных решёток (Фреше), а огибающая рассматривается для функций $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ не только относительно пространств линейных или аффинных функций, а и относительно выпуклого конуса или, более общо́, выпуклого множества $H \subset \mathbb{R}^X$.

Полученные двойственные описания огибающей для расширенных функций относительно H применяются к ряду задач теории функций комплексных переменных, которые включают в себя

1) задачу о нетривиальности различных *весовых классов* W голоморфных функций в области $D \subset \mathbb{C}^n$, определяемых системой мажорант;

2) описание нулевых (под)множеств для весовых классов W;

3) задачу о возможности представления мероморфной функции в D в виде частного пары голоморфных функций из весового класса W;

4) задачу о существовании голоморфной функции-мультипликатора h, переводящей заданную голоморфную f в W в том смысле, что $fh \in W$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002) и при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00024а).

[1] Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I, II // Изв. РАН, сер. матем. 2001. Т. 65: № 4, С. 205–224; № 5. С. 167–190.

[2] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б. Порядковые версии Теоремы Хана – Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ. 40 стр. (направлен в печать 29 апреля 2018 г.).

О разрешимости неоднородной задачи Гильберта с двусторонним завихрением на бесконечности разного порядка

Хасанова Э.Н.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г.Казань, Россия

Рассматривается краевая задача Гильберта для полуплоскости с единственной точкой разрыва второго рода на бесконечности у коэффициентов краевого условия, которая приводит к двустороннему завихрению разного степенного порядка.

Условия задачи следующие: требуется определить аналитическую и ограниченную в верхней полуплоскости D функцию $\Phi(z)$ по заданному краевому условию:

$$a(t)\,\mathrm{Re}\,\Phi(t) - b(t)\,\mathrm{Im}\,\Phi(t) = c(t),\ t \in \partial D,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$– заданные на контуре L вещественнозначные функции точки t контура L, для которых выполнено условие $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$ во всех точках непрерывности коэффициентов краевого условия. Функция $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ представлена в виде:

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{cases} \nu^- t^{\rho^-} + \varphi(t),\ t < 0, & 0 \leq \rho^- < 1, \\ \nu^+ |t|^{\rho^+} + \varphi(t),\ t > 0, & 0 \leq \rho^+ < 1. \end{cases}$$

Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси, числа ρ^-, ρ^+, ν^- и ν^+ являются известными, также выполняется равенство $(\rho^-)^2 + (\rho^+)^2 \neq 0$, В окрестности бесконечности условие Гельдера записывается в виде следующего неравенства

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq K \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^\alpha,$$

где $K > 0$, а $0 < \alpha < 1$.

Задача Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним степенного порядка ρ, $0 < \rho < 1$, завихрением на бесконечности была поставлена и решена Р.Б. Салимовым и П.Л. Шабалиным ([1], с.111, с.148) Полная картина разрешимости получена в работах [2] в случае $0 < \rho < 1/2$, и [3] для $1/2 \leq \rho < 1$.В работе Хасановой Э.Н. рассмотрена однородная задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности (см.[4]).

В настоящей работе получено общее решение неоднородной задачи Гильберта для полуплоскости с единственной точкой разрыва второго рода на бесконечности, приводящей к двустороннему завихрению разного степенного порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 18-31-00060.

[1] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. — Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005.

[2] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше 1/2. — Уфимский математический журнал. – 2013. Т. 5. № 2. – С. 82-93.

[3] Salimov R., Shabalin P. Solvability of the Riemann–Hilbert boundary value problem with a two - side curling at infinity point of order less than 1. — Complex Variables and Elliptic Equations. 2014. T. 59. No 12. P. 1739-1757.

[4] Карабашева Э.Н. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности. — Известия КГАСУ. Казань.: Издательство КГАСУ, 2014. С. – 242–251.

Классы однолистных отображений обобщенной формулой Кристоффеля - Шварца

Шабалин П.Л.
КГАСУ, г.Казань, Россия

Рассмотрим семейство $M(\alpha_k, \alpha_{-k})$ полигональных областей D_z не обязательно однолистных. Про D_z известно, что ее граница L_z состоит из двух ломаных L_z^1 и L_z^2 с общей начальной точкой $A_0(0,0)$, имеющих бесконечное число прямолинейных звеньев. Вершины L_z^1 обозначим $A_1, A_2, \cdots$, пронумерованы последовательно от A_0, вершины L_z^2– точки $A_{-1}, A_{-2}, \cdots$. При обходе границы области от точки A_0 вдоль ломанной L_z^1, область D_z остается слева, а вдоль L_z^2– справа. Считаем заданными углы $\eta_0^1\pi$ и $\eta_0^2\pi$, образованные действительной осью и звеньями A_0, A_1 и

A_0, A_{-1} и внутренние по отношению к области D_z углы при вершинах A_k и A_{-k}, которые обозначим $\alpha_k\pi$ и $\alpha_{-k}\pi$, причем $0 < \alpha_k < 1$, $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1, \infty}$.

Приведем структурную формулу [1] конформного отображения

$$z(\zeta) = a_0 \int\limits_0^\zeta \frac{e^{i\eta_0^1\pi}}{\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}} \frac{\prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}}{\prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\kappa_k}} d\zeta$$

верхней полуплоскости E^+ плоскости $\zeta = \xi + i\nu$ на области из $M(\alpha_k, \alpha_{-k})$. Здесь $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $t_k > 0$, и $\{t_{-k}\}_{k=1}^\infty$, $t_{-k} < 0$, две произвольно выбранные последовательности точек вещественной оси, являющиеся прообразами вершин ломаной L_z, удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^\infty {t_k}^{-1} < \infty, \quad \sum_{k=1}^\infty |t_{-k}|^{-1} < \infty,$$

$$n_-^*(\xi) = \sum_{j=1}^k \kappa_{-j},\ -t_{-k} < \xi < -t_{-k-1},\ n_+^*(\xi) = \sum_{j=1}^k \kappa_j,\ t_k < \xi < t_{k+1},$$

где $\kappa_k = 1 - \alpha_k,\ \kappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1,\ k = \overline{1, \infty}, \quad \Delta > 0,\ \alpha > 0,$

$$n_+^*(\xi) = \Delta \ln^\alpha \xi + O(\ln^{-\alpha} \xi),\ n_-^*(\xi) = \Delta \ln^\alpha \xi + O(\ln^{-\alpha} \xi),$$

Теорема. Для того, чтобы в классе отображений $z(\zeta)$ верхней полуплоскости E^+ на области из $M(\alpha_k, \alpha_{-k})$ существовали однолистные необходимо и достаточно, что бы выполнялось неравенство $0 < \alpha \le 1$.

[1] Karabasheva E. N. Shabalin P. L. *Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains wiht infinite sets of vertices.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2015,Vol. 36, No. 2, p. 144-153.

Спектр и формула следа для ограниченных возмущений дискретных операторов

Фазуллин З.Ю.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H самосопряженный полуограниченный снизу оператор L_0 с дискретным спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < ...)$ и соответствующими ортогональными проекторами P_k на собственные подпространства, в предложении, что

$$\inf_{k\geq 1}\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)>0 \tag{1}$$

Если V симметрический L_0-компактный оператор, то по известной теореме Като-Реллиха оператор $L=L_0+V$ замкнут в области определения оператора L_0 и имеет дискретный спектр.

Пусть $r_n=\frac{1}{2}min\left(\lambda_{n+1}-\lambda_n;\lambda_n-\lambda_{n-1}\right)$ и существует последовательность d_n, такая, что

$$0<d_n\leq r_n,\quad \inf_{n\geq 2}d_n>0,\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{|z-\lambda_k|\leq d_n}\|R_{0n}(z)V\|=0, \tag{2}$$

где $R_{0n}(z)=R_0(z)-\left(\lambda_n-z\right)^{-1}P_n,\quad R_0(z)=\left(L_0-z\right)^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1) и (2). Тогда собственные числа μ оператора L, лежащие в интервале $(\lambda_n-r_n,\lambda_n+r_n)$ при $n>>1$ удовлетворяют оценке*

$$|\mu-\lambda_n|\leq C\,\|P_nV\|\,,\quad C>0$$

Пусть $\Gamma_n=\left\{z:|z|=\frac{(\lambda_{n+1}+\lambda_n)}{2}\right\}$, $\alpha_k=\sum\limits_{\lambda_m\neq\lambda_k}tr(P_kVP_mV)(\lambda_m-\lambda_k)^{-1}$, $\beta_n=-tr\left((2\pi i)^{-1}\oint\limits_{\Gamma_n}z(R_0(z)V)^3R(z)dz\right)$, $R(z)=(L-z)^{-1}$, $\mu_s^{(k)}$ – собственные числа оператора L, $s=\overline{1,\nu_k}$, ν_k – кратность собственного числа λ_k.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и при $n>>1$*

$$\sum_{\lambda_k\leq\lambda_n}\lambda_k\alpha_k=o(\lambda_n),\qquad \sum_{\lambda_k\leq\lambda_n}\sum_{\lambda_m\geq\lambda_{n+1}}trP_kVP_mV=o(\lambda_n),\quad \beta_n=o(1).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k-\mu_s^{(k)}\right)+tr(P_kV)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\lambda_n}\sum_{\lambda_k\leq\lambda_n}tr\left(P_kV^2-(P_kV)^2\right)$$

В качестве приложения теоремы 2 в докладе будут рассмотрены возмущения модельных двумерных операторов математической физики ([1]-[4]).

[1] З.Ю. Фазуллин, Х.Х. Муртазин. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора.// Матем. сборник. 2001. Т. 192. №2. С. 109-138.

[2] В.А. Садовничий, З.Ю. Фазуллин, А.И. Атнагулов. // Уфимск. матем. журн. 2016. Т. 8. №3 С. 22-40.

[3] Х.Х. Муртазин, З.Ю. Фазуллин. Спектр и формула следов двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле.// Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. №4. С. 549-563.

[4] Z. Fazullin, I. Nugaeva. On spectrum of perturbed two-dimensional harmonic oscillator in a strip. AIP Conference Proceedings. 2016. 1759.

Аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в плоскости

Федоровский К.Ю.

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

В докладе планируется обсудить задачи аппроксимации функций решениями однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами на компактах в комплексной плоскости в нормах пространств функций класса C^m, $m \geqslant 0$.

Для пары u, v функций от двух вещественных переменных x и y положим $f = u + iv$ и будем понимать f как функцию комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть A, B и C — вещественные $2 \times 2-$матрицы. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{L}$, определенный (на функциях $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) следующим образом:

$$\mathcal{L}f = \left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad u = \operatorname{Re} f, \quad \text{а} \quad v = \operatorname{Im} f.$$

Оператор $\mathcal{L}$ называется *эллиптическим*, если выражение $\det\left(A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2\right)$ с вещественными ξ и η обращается в ноль только при $\xi = \eta = 0$. Любой такой оператор может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = \begin{cases} \overline{\partial}\partial f + \tau\partial^2 f + \sigma\partial^2 \overline{f} + \tau\sigma\overline{\partial}\partial\overline{f} & \text{при } |\sigma| < 1, \\ \overline{\partial}^2 f + \tau\overline{\partial}\partial f + \sigma^{-1}\overline{\partial}\partial\overline{f} + \tau\sigma^{-1}\overline{\partial}^2\overline{f} & \text{при } |\sigma| > 1, \end{cases}$$

где $\tau \in [0,1)$ и $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\sigma \neq \pm 1$, — вещественные параметры, а $\overline{\partial}\colon f \mapsto (f'_x + i f'_y)/2$ — оператор Коши – Римана.

Пусть $m \geqslant 0$ — вещественное число. В докладе будет рассмотрена следующая задача: описать компакты $X \subset \mathbb{C}$ такие, что для любой функции $f \in BC_0^m(\mathbb{C})$, удовлетворяющей уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ на X°, существует последовательность функций $\{f_n\}$ класса $BC^m(\mathbb{C})$, такая, что $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f_n = 0$ в некоторой (своей для каждого n) окрестности X, и $\|f - f_n\|_{BC^m} \to 0$ при $n \to \infty$.

Вторая задача — это задача описания компактов X на которых всякая функция $f \in BC_0^m(\mathbb{C})$, с условием $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ на X° может быть приближена в норме пространства BC^m последовательностью многочленов из ядра оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$.

Автор поддержан Министерством образования и науки РФ (проект 1.517.2016/1.4), РФФИ (гранты 16-01-00674 и 16-01-00781) и фондом Саймонса (Simons-IUM fellowship).

Целые функции с заданными асимптотическими свойствами

Юлмухаметов Р.С., Исаев К.П.

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Далее всюду через $B(z,t)$ мы обозначаем открытый круг с центром в точке z радиуса t, символ $N(f)$ обозначает множество нулей аналитической функции f. Нами доказаны некоторые новые теоремы о существовании целых функций с заданными асимптотическими свойствами. В теории рядов экспонент такие целые функции являются основным инструментом. Отправным фактом для наших конструкций является следующая теорема из работы [1].

Теорема A. *Для любой субгармонической функции и на плоскости, имеющей конечный порядок роста, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| = O(\ln(|\lambda| + 1)),\ \lambda \notin E, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Для любого $\beta < 0$ исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $B(w_k, r_k)$ так, что $\sum_{|w_k| \geq R} r_k = O(R^\beta)$, $R \to \infty$.

В применениях приближаемая субгармоническая функция обычно имеет какие-то дополнительные свойства, что может дать возможность для уточнений асиптотики. С другой стороны, обычно требуется не просто оценка размеров исключительного множества, но в большей степени его конструкция. В следующей теореме аппроксимируется субгармоническая функция, удовлетворяющая условию Липшица.

Теорема 1. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторого $M > 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t)) \leq Mt, \ t \in (0;1),$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, $n \in \mathbb{N}$, такими, что при некотором $\delta \in (0;1)$ круги $B_\delta(\lambda_n) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются и выполняются соотношения

$$|\ln|f(\lambda)| - u(\lambda)| \leq A\ln(|\lambda|+1) + C, \ \lambda \notin \bigcup_n B_\delta(\lambda_n),$$

$$|\ln|f'(\lambda_n)| - u(\lambda_n)| \leq A\ln(|\lambda_n|+1) + C', \ n \in \mathbb{N},$$

при этом постоянная $A > 0$ не зависит от M и функции u, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функции u.

В применениях аппроксимационных теорем нередко возникает необходимость совмещенных приближений. В связи с этим нами получены следующие два результата.

Теорема 2. *Пусть u_j, $j = 1, 2, ..., k$, — субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный тип при порядке роста ρ, такие, что меры μ_j, ассоциированные с ними по Риссу, удовлетворяют условию*

$$\mu(B(z,t)) \leq a(|z|+1)^\alpha t, \ t \in (0; (|z|+1)^{-\alpha}).$$

Тогда существуют такие целые функции f_j, что все нули произведения $f = f_1 f_2 ... f_k$ простые, при некоторых $\delta > 0, \beta \geq 0$ круги $B_{\delta,\beta}(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-\beta})$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются и для $j = 1, 2, ..., k$ и некоторых постоянных $A, B > 0$ выполняются соотношения

$$\ln|f_j(\lambda)| \leq u_j(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\ln|f_j(\lambda)| \geq u_j(\lambda) - A\ln(|\lambda|+e), \ \lambda \notin \bigcup_{z \in N(f_j)} B_{\delta,\beta}(z),$$

$$\ln|f_j'(\lambda)| \geq u_j(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e), \ \lambda \in N(f_j).$$

Постоянные A, B зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функций u_j.

Теорема 3. *Пусть u_j — такие субгармонические функции на плоскости, что меры, ассоциированные с ними по Риссу μ_j, $j = 1, 2$, удовлетворяют условию $\mu_j(B(z,t)) \leq Mt, \ t \in (0;1)$, а мера μ_2, кроме того,* *удовлетворяет условию*

$$\int_1^\infty \frac{\mu_2(r)dr}{r^2} < \infty.$$

Тогда существуют целые функции f_j такие, что все нули произведения $f = f_1 f_2$ простые, при некотором $\delta > 0$ круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda| + 1)^{-1})$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются и для $j = 1, 2$ и некоторых постоянных $A, C, C' > 0$ выполняются соотношения

$$|\ln|f_j(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le A\ln(|\lambda| + 1) + C, \;\; \lambda \notin \bigcup_{z \in N(f_j)} B_\delta(z),$$

$$|\ln|f_j'(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le A\ln(|\lambda| + 1) + C', \;\; \lambda \in N(f_j),$$

при этом постоянная $A > 0$ не зависит от M и функций u_j, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функций u_j.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00095а).

[1] Юлмухаметов Р. С., “Аппроксимация субгармонических функций”, Analysis Mathematica, 11:3 (1985), 257–282.