

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ**

*X Международная школа-конференция  
для студентов, аспирантов и молодых ученых,  
посвященная 100-летию первого декана  
математического факультета БашГУ  
Зигандара Иргалеевича Биглова*

*(Уфа, 16- 20 октября 2018 г.)*

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ**

**ФИЗИКА. ХИМИЯ. МАТЕМАТИКА**

**Научные статьи**

**УФА  
РИЦ БашГУ  
2019**

УДК 51+53  
ББК 22.1+22.3  
Ф94

*Сборник издан при финансовой поддержке РФФИ  
(проект № 18-31-10035\_мол\_з)  
и за счет внебюджетных средств БашГУ*

***Редакционная коллегия:***

д-р физ.-мат. наук, профессор **Б.Н. Хабибуллин** (*отв. редактор*);  
канд. физ.-мат. наук, доцент **Л.А. Габдрахманова**;  
канд. физ.-мат. наук, доцент **Ф.К. Закирьянов**

**Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании:** X Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященная 100-летию первого декана математического факультета БашГУ Зигандара Иргалеевича Биглова (г. Уфа, 16-20 октября 2018 г.): сборник материалов. Физика. Химия. Математика /отв. ред. Б.Н. Хабибуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – 156 с. ISBN 978-5-7477-4910-8

В сборнике материалов помещены научные статьи участников X Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 100-летию первого декана математического факультета БашГУ Зигандара Иргалеевича Биглова «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Научные статьи воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51,53  
ББК 22.1+22.3

ISBN 978-5-7477-4910-8

© БашГУ, 2019

## ФИЗИКА

УДК 372.853

### **КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД В ПРЕПОДАВАНИИ КУРСОВ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

Абдуллин А.У., Акманова Г.Р.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

При внедрении компетентностного подхода в преподавании курсов общей физики возникают, по нашему мнению, по крайней мере, три серьезные проблемы.

Во-первых, по большому счету, компетенции есть категория, понятная преимущественно работодателям и характеризующая профессиональную деятельность выпускника, которая реализуется уже после окончания вуза на рабочем месте. Соотнести компетенции, прописанные во ФГОС, с конкретными элементами учебного плана оказывается далеко не просто. Особенно эта проблема актуальна для курсов, которые изучаются в первые год-два обучения. Например, компетенция «способность использовать базовые теоретические знания фундаментальных разделов общей и теоретической физики для решения профессиональных задач» формируется, очевидно, в течение всего срока обучения бакалавров. В какой степени она должна быть освоена при изучении первого из курсов общей физики – механики, изучаемой в первом семестре?

Более того, на наш взгляд, полностью уровень сформированности компетенции можно оценить только в ходе междисциплинарной и квалификационной аттестаций. Здесь, видимо, можно предложить лишь два варианта решения. Либо выстраивать «древо компетенций» в духе Хуторского А.В.([1]), интегрирующее на горизонтальном уровне компетенции отдельных дисциплин, либо в рамках конкретной дисциплины ограничиваться оцениванием уровня сформированности только отдельных элементов компетенции.

Например, в своей работе ([2]) Хуторской А.В. приводит разбиение школьной «коммуникативной компетенции» на три «общепредметные компетенции» – устный диалог, диалог в письменной форме и полилог (коллективная дискуссия). Каждую из них, в свою очередь, он предлагает развивать средствами математики, русского языка и информатики. Скажем, устный диалог только в рамках урока русского языка предполагает «задание вопросов собеседнику и конструирование ответов». Однако, уже для развития диалога в письменной форме применяется «использование древнегреческих апорий для объяснения математических парадоксов»

(математика), «самопрезентация в форме резюме» (русский язык) и «использование электронной почты для переписки» (информатика). А «полилог» можно представить как «групповой работой при выполнении математического проекта» (математика), «ролевой формой представления текста произведения» (русский язык), так и «работой с помощью чат-технологий в режиме реального времени» (информатика). И у нас не создалось впечатления, что здесь что-то «притянута за уши». С другой стороны, нельзя назвать такой подход и просто «межпредметными связями», которые долгое время культивировались в наших учебных планах и рабочих программах.

В рамках обучения курсам общей физики первым «товарищем» физических дисциплин выступает, конечно, математика. Однако, памятуя о компетенции ОПК-1 направления «Физика» «способность использовать в профессиональной деятельности базовые естественнонаучные знания ... (прежде всего, химии, биологии, экологии, наук о земле и человеке)», не стоит забывать и о химии, благо она изучается студентами-физиками еще на первом курсе. Наибольшую же ценность для взаимодействия на межпредметном уровне для первого курса представляют собой математический анализ и аналитическая геометрия. Это приводит к таким «казусам» (в глазах студентов), как предложение посчитать простенький интеграл или найти векторное произведение в тестах по механике.

Если в рамках конкретной дисциплины ограничиваться оцениванием уровня сформированности только отдельных элементов компетенции, то важно четко структурировать компетенцию, выделяя из нее ключевые составные части. Так, например, из той же компетенции ОПК-3 «способность использовать базовые теоретические знания фундаментальных разделов общей и теоретической физики для решения профессиональных задач» можно выделить такой важный составной элемент, как сформированность логических приемов мышления и умения создавать физические тексты с привлечением результатов решения профессиональных физических задач. (В категориях ЗУН (знания-умения-навыки) это может соответствовать следующей логической цепочке: знать – структуру логических приемов (анализа и синтеза), уметь – создавать физические тексты с изложением результатов решения профессиональных физических задач, владеть – логическими приемами мышления – анализа и синтеза.) Для определения уровня сформированности этого отдельного элемента уже не так трудно подобрать оценочные средства. Например, в рамках механики можно предложить такой несложный набор заданий порогового уровня.

1. Определите отношение между верхним и нижним понятиями в первой колонке и дополните вторую колонку так, чтобы получилось аналогичное отношение:



актуально для огромного поля направления «Филология», но, думается, для ФТИ этот подход имеет смысл использовать только для направления «Физика» из-за его универсальности.

Предполагается, что карты компетенций готовят методисты учебных управлений вузов и факультетов, а преподаватели должны на этот предложенный «скелет» нарастить свое «мясо». К сожалению, пока что эта схема работает не очень четко. И здесь явно просматриваются метания от «запорожской вольницы» сначала до «прокрустова ложа» теперь. Если год назад преподаватели выпрашивали у методистов вуза макет программ и пояснения к разработке, то теперь, напротив, «шаг влево – шаг вправо» от предложенной схемы считается «побегом» («не соответствует Положению о РПД»). Теперь под «мясом», которое следует нарастить, подразумевается почти исключительно фонд оценочных средств. А поскольку в рабочей программе должны быть четко прописаны критерии оценки, это приводит к его обеднению. Ну, действительно, зачем прописывать критерии для case-заданий, мозговых штурмов или эвристических лабораторных работ, когда все можно заменить тестами с клеточками. От греха... Поэтому разумная идея добиться большей объективности приведет просто к вымыванию всех более-менее неординарных и инновационных средств! «Благими пожеланиями...»

Наконец, в-третьих, по-прежнему дискуссионным остается вопрос об уровнях и этапах освоения компетенций. Методические разработки проекта TUNING («Tuning Educational Structures in Europe») рекомендуют выделять несколько уровней сформированности каждой компетенции - от начального (порогового) до наиболее продвинутого (глубокого). Думается, что знакомые всем преподавателям категории ЗУН (знания-умения-навыки) рассматривать как уровни освоения слишком упрощенно. Скорее, это только компоненты структуры компетенции (знаниевый, ценностный и деятельностный). Здесь авторы предложенной статьи в своих мнениях расходятся: если доцент Акманова Г.Р. ратует вслед за нашим УМУ за упрощение рабочих программ и сведение уровней освоения к категориям ЗУН (первый уровень – знания, второй уровень – умения, третий уровень – навыки), то доцент Абдуллин А.У. придерживается другого мнения. Упрощение структуры не упрощает применения, а примитивный инструментарий просто труднее использовать. В оправдание своей позиции хотелось бы сослаться на ту же работу [3]. В ней авторы справедливо заключают, что в различных компетенциях нагрузка на категории ЗУН неравномерная: где-то делается упор на знаниевую компоненту, где-то – на владения и навыки. Более того, как отмечают авторы, «вполне можно допустить, что в некоторых картах компетенций будут отсутствовать отдельные компоненты (владения, умения или знания)». По мнению

Абдуллина А.У., это вполне подтверждает, что категории ЗУН и уровни овладения компетенцией совершенно не взаимозаменяемы.

### **Литература**

1. Хуторской А. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированного образования. // Народное образование. 2003. №2. С.58-64.
2. Хуторской А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций. // Интернет-журнал «Эйдос». 2005. <http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm>
3. Е.Г. Елина, Е.Н. Ковтун, С.Е. Родионова. Компетенции и результаты обучения: логика представления в образовательных программах. // Высшее образование в России. 2015. №1. С.10-20.

© Абдуллин А.У., Акманова Г.Р., 2019 г.

## **МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА КАК ИНСТРУМЕНТ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА В ПРЕПОДАВАНИИ КУРСОВ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

Абдуллин А.У., Акманова Г.Р.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В ряде работ авторы анализировали опыт использования модульно-рейтинговой системы обучения (МРС) в преподавании курсов общей физики ([1-6]). В настоящей работе мы постараемся выяснить, чем она может быть полезна при внедрении компетентностного подхода.

Прежде всего, приходится смириться с принципиальной невозможностью проверки освоения самих компетенций в процессе промежуточной аттестации. В самом деле, компетенция вырабатывается в ходе освоения различных дисциплин, прохождения практик, выполнения НИР и иных элементов учебной работы. В целом овладение компетенциями можно в основных чертах проверить лишь «на выходе». Полностью же освоение выпускником компетенции проявится уже в его профессиональной деятельности. Поэтому промежуточная аттестация может предусматривать проверку освоения не собственно компетенций, но лишь соотнесенных с ними результатов обучения по конкретной дисциплине. К сожалению, некоторые ФГОСы до сих пор фактически оперируют понятиями «компетенция» и «результат обучения» как синонимичными, подразумевая, что компетенции – это ожидаемые и измеряемые результаты обучения.

В качестве «мостика» от компетенций к конкретным результатам обучения выступают «карты компетенций» – формулирование на основе компетенции конкретных и локальных результатов обучения для каждого учебного элемента. Здесь особую роль приобретают оценочные средства. Для объективной оценки традиционных средств как способов проверки в основном знаниевого компонента компетенции оказывается мало. Для определения уровня освоения деятельностных компонентов (умения-навыки) приходится применять более разнообразные и в чем-то даже инновационные средства: проекты, портфолио, case-study, мозговые штурмы, эвристические лабораторные работы и др. К сожалению, необходимость применения новых методик оценки вступает в противоречие с другой стороной компетентностного подхода – упора на усиление объективности промежуточного и итогового контроля. Скрупулезное описывание критериев оценки по нетрадиционным видам контроля требует и изрядного времени, и недюжинного терпения, и некоторой фантазии. Поэтому с усилением контроля за объективностью

критериев мы прогнозируем, к сожалению, обеднение используемого фонда оценочных средств (ФОС) и возвращения к традиционным контрольным работам и тестам.

Более серьезное противоречие между модульно-рейтинговой системой и компетентным подходом обнаруживается в несоответствии значения различных видов контроля. Бытует обоснованное мнение, что в целом овладение компетенциями можно в основных чертах проверить лишь «на выходе», причем желательно в междисциплинарной аттестации. То есть, с точки зрения компетентного подхода упор должен быть сделан если не на итоговую аттестацию выпускника, то хотя бы на итоговый контроль по дисциплине (курсовой экзамен). В наших же условиях модульно-рейтинговая система направлена на мотивирование студентов к обучению в семестре, и поэтому 70% процентов рейтинговых баллов распределяются между промежуточным и рубежным контролями.

Компромисс, на наш взгляд, может быть достигнут, если только мы смиримся с тем, что инструменты контроля модульно-рейтинговой системы позволяют, в лучшем случае, проверять уровень освоения только отдельных составных элементов компетенции.

Скажем, определить уровень освоения той же компетенции ОПК-3 направления «Физика» «способность использовать базовые теоретические знания фундаментальных разделов общей и теоретической физики для решения профессиональных задач» на коллоквиуме или тесте рубежного контроля по курсу механики (середина первого семестра обучения, 1 курс) вряд ли в принципе возможно. Зато проверить развитие каких-то отдельных элементов компетенции вполне возможно! («Не продается вдохновение, но можно рукопись продать...») Если задаться целью проверить сформированность «логических приемов мышления и умения создавать физические тексты с привлечением результатов решения профессиональных физических задач», то для этого отдельного элемента уже не так трудно подобрать оценочные средства порогового уровня. Заметим, что выделенный элемент компетенции включает в себя как знаниевую компоненту, так и деятельностные (знать – структуру логических приемов (анализа и синтеза), уметь – создавать физические тексты с изложением результатов решения профессиональных физических задач, владеть – логическими приемами мышления – анализа и синтеза).

Например, в рамках механики можно предложить такой несложный набор заданий порогового уровня.

1. Определите отношение между верхним и нижним понятиями в первой колонке и дополните вторую колонку так, чтобы получилось аналогичное отношение:

ускорение

мощность

- скорость ? (Аналогия)
2. Определите, какое из понятий является причиной, а какое – следствием:  
изменение угловой скорости тела – наличие момента внешней силы.  
(Анализ причинно-следственной связи.)
3. Из приведенных примеров уберите лишнее и объясните свой выбор:  
момент импульса, угловая скорость, момент силы, масса, момент инерции. (Обобщение.)
4. Из приведенных признаков понятия «момент инерции» выделите существенные: является мерой инертности тела при вращательном движении; зависит от формы и размеров тела; пропорционален квадрату радиуса окружности, по которой вращается тело; пропорционален массе тела; зависит от выбора оси вращения. (Анализ определения физического понятия.)

### Литература

1. Абдуллин А.У., Акманова Г.Р. Опыт использования модульно-рейтинговой системы обучения и оценки успеваемости студентов в курсах общей физики «Механика» и «Оптика». // Сборник трудов VII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Уфа, 2014. С. 13-18.
2. Абдуллин А.У., Акманова Г.Р. Перспективы совершенствования модульно-рейтинговой системы обучения и оценки успеваемости студентов в курсах общей физики. // Тезисы докладов VIII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Уфа, 2015. С.112.
3. Абдуллин А.У., Акманова Г.Р. Совершенствование модульно-рейтинговой системы обучения и оценки успеваемости студентов в курсах общей физики. // Материалы VIII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 2015. С.142-144.
4. Абдуллин А.У., Акманова Г.Р. Реализация модульно-рейтинговой системы обучения при изучении механики и оптики. // Сборник материалов III Всероссийской научно-методической конференции «Проблемы современного физического образования». Уфа, 2015. С.169-171.
5. Абдуллин А.У., Акманова Г.Р. Модульно-рейтинговая система обучения и оценки успеваемости студентов. Что весомее: текущий или рубежный контроль? // Сборник трудов IX Международной

школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 2016. С.56-59.

6. Абдуллин А.У., Акманова Г.Р. «Степени свободы» модульно-рейтинговой системы обучения и оценки успеваемости студентов. // Сборник материалов IV Всероссийской научно-методической конференции. Уфа, 2017. С.189-191.

© Абдуллин А.У., Акманова Г.Р., 2019 г.

## ИМПЕДАНС ПЛАЗМЫ ЛАМПЫ-ВСПЫШКИ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НАКАЧКЕ

Вальшин А.М., Нигаматова Л.Н.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Для диагностики и измерения характеристик плазмы необходимо определить значения полного разрядного тока, напряжения на разрядном промежутке (т. е. вольт-амперная характеристика разряда) размеры светящихся областей плазмы, а также среднюю проводимость и среднюю электрическую мощность в разряде. Значение импеданса плазмы существенно влияет на точность измерения этих параметров.

В работах [1-5] рассмотрены различные варианты импеданса плазмы. Значения импеданса плазмы, как правило, обозначены в виде чистого активного сопротивления, или как активного сопротивления и индуктивности, величина которой сравнима с индуктивностью проволоки, заменяющей по геометрическим размерам плазменный шнур.

Целью данной работы является экспериментальные измерения индуктивной составляющей импеданса плазмы лампы-вспышки твердотельного лазера.

Экспериментальная установка включает в себя 2 блока: Блок дежурной дуги (ВЧГ-1) и блок ВЧ накачки (ВЧГ-2).

В блоке высокочастотной дежурной дуги вырабатываются колебания с амплитудой 6 кВ, данной амплитуды напряжения достаточно для пробития промежутка между лампой. После того как произошел пробой зажигается тлеющий разряд. После зажигания дуги мы включаем второй генератор ВЧГ2 к лампе. Выход второго генератора через последовательный колебательный контур подключается к лампе, находящейся в режиме горения дежурной дуги. После этого мы настраиваем частоту второго генератора на максимум тока и определяем резонансную частоту. Резонансная частота оказалась равной 797 кГц. Далее мы отключаемся от лампы и включаем вместо лампы активное сопротивление 0,5 Ом. В этом случае резонансная частота оказалась равной 890 кГц.

Для расчетов используем известную формулу:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0C_0}}, \quad 1 = 4\pi f_0^2 L_0 C_0,$$

И определяем  $4\pi f_0^2 L_0 C_0 = 4\pi f_1^2 L_1 C_0$ , где:

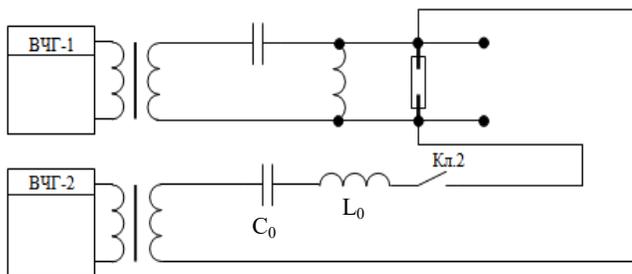


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки

$$L_1 = \left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2 L_0, \text{ при } L_1 = L_0 + L_{nl},$$

$$L_1 = 1,25, L_0 = L_0 + 0,25L_0, \quad L_{nl} = 0,25L_0.$$

Значения  $C_0$  и  $L_0$  выбираются из условий резонансной частоты на 890 кГц. В нашем случае  $L_0$  составляла 10 мкГн. Подставляя это значение в последнее уравнение получаем  $L_{nl} = 2,5 \text{ мкГн}$ .

Таким образом нам удалось измерить индуктивность плазмы при высокочастотной накачке.

Теперь оценим величину индуктивности, которую приводят в теоретических работах авторы, предполагая, что индуктивность плазмы оценивается как индуктивность провода, с размерами, совпадающими с размерами плазмы внутри импульсной лампы.

Индуктивность прямого провода имеет значение только на высоких частотах, поскольку отрезки такого провода используются для соединения как пассивных, так и активных компонентов и в качестве выводов.

Индуктивность прямого провода из немагнитного материала определяется по формуле:

$$L = 0,002l \left[ 2,3 \log \left( \frac{4l}{d} - 0,75 \right) \right], \quad (42)$$

где  $l$  и  $d$  длина и диаметр в сантиметрах соответственно, а  $L$  в мкГн. диаметра и длины провода.

В нашем случае размеры лампы  $l=6$  см,  $d=0,7$  см, расчетное значение индуктивности плазмы составляет  $\approx 42$  нГн, а измеренное значение индуктивности плазмы составило  $\approx 2,5$  мкГн.

Таким образом наш экспериментальный результат показывает, что

реальное значение индуктивности плазмы более чем в 40 раз превышает теоретические расчетные значения, на которые ссылаются во всех монографиях и работах посвящённых физическим исследованиям плазмы, что является не совсем корректным.

Нами обнаружено существенно большее значение индуктивности, превосходящей теоретические значения величины индуктивной составляющей почти на два порядка.

Результаты, полученные в этой работе, требуют дальнейших экспериментальных исследований и теоретических обоснований полученных результатов, что планируется выполнить авторами в ближайшее время.

### Литература

1. А.Г.Орешко. Доменная модель аномального сопротивления плазмы. Вопросы атомной науки и техники, серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения, 2000, №1, стр.13-16.
2. С.С. Ануфрик, А.П. Володенков, К.Ф. Зноско Зависимость сопротивления плазмы от времени в элктроразрядных эксимерных лазерах.<http://elib.bsu.by/handle/123456789/31723>
3. Импульсные источники света/ под общей редакцией И.С. Маршака, 2 изд. М.:Энергия,1978. 478с.
4. Н.Кролл, А. Трайвелпис. Основы физики плазмы. М.: Издательство «МИР» 1975, 525стр.
5. А.А. Рухадзе,А.Ф. Александров Физика сильноточных электроразрядных источников света Изд.2.М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.-184 стр.

© Вальшин А.М., Нигаматова Л.Н., 2019 г.

## ФАРАДЕЕВО ТЁМНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЗАЖИГАНИИ РАЗРЯДА ЛАМПЫ-ВСПЫШКИ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА

Вальшин А.М., Хусаинова Ю.А.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

*Экспериментально выявлена несимметричность в последовательности зажигания высокочастотного разряда цилиндрической лампы-вспышки лазера вблизи электродов разной конфигурации при повышении напряжения накачки. Впервые обнаружено «фарадеево тёмное пространство» в середине лампы при ярком рекомбинационном свечении плазмы приэлектродных участков. Протяжённость тёмного участка монотонно уменьшается при повышении амплитуды ВЧ накачки. Установлено, что замена среды охлаждения (воздух, трансформаторное масло, ацетон, этиловый спирт, глицерин и вода) сопровождается изменением порога зажигания разряда и не влияет на общие закономерности формирования тёмного пространства.*

Хорошо известно, что для поджига импульсных ламп в лазерах с оптической накачкой традиционно используется разряд вспомогательного конденсатора на импульсный трансформатор, с выхода которого импульс или серия импульсов поджигает лампу. Амплитуда поджигающих импульсов составляет десятки киловольт. Физика зажигания разряда на основе таунсендовского или стримерного механизмов зажигания достаточно подробно изложена в работах [1-6]. В них установлены критерии того или иного механизма формирования разряда. Однако влияние диэлектрических свойств охлаждающего агента на напряжение зажигания разряда не исследовалось.

Целью настоящей работы является экспериментальное изучение физики зажигания ВЧ разряда в серийно выпускаемых импульсных лампах лазеров при вариации охлаждающей среды и частоты накачки.

Ранее [8,9] нами было выявлено увеличение эффективного канала разряда в газоразрядных лампах низкого давления и гелий-неоновом лазере [10] при переходе от накачки частотой 50 Гц к высокочастотной (1-3 МГц) накачке в воздухе. На основе экспериментального задела и результатов опубликованных работ [1-7] была сформулирована идея о возможности влияния диэлектрических свойств охлаждающего агента на порог ВЧ зажигания серийных ламп накачки лазеров. Для проверки этой гипотезы был собран экспериментальный стенд и проведены систематические измерения величины порога зажигания серийной лампы-вспышки лазера.

Из пластмассовых пластин была изготовлена ванна  $150 \times 60 \times 50 \text{ мм}^3$ , в которую была вмонтирована серийная цилиндрическая лампа ДКРТВ 3000-1. Концы электродов лампы выступали из торцов ванны, а разрядный промежуток между электродами был внутри объема ванны. Охлаждение импульсной лампы осуществлялось либо воздухом, либо последовательным наполнением ванны хладагентом-жидкостью, которая отличалась диэлектрической проницаемостью. Мы изучали зависимость напряжения зажигания разряда в воздухе, воде, конденсаторном масле, спирте, ацетоне и глицерине. Выбор хладагента был обусловлен поиском максимального коэффициента снижения напряжения порога зажигания лампы при ВЧ накачке и корреляции этого снижения с диэлектрическими свойствами вещества агента.

Экспериментальная установка состояла из ВЧ генератора собственной разработки. При этом для получения высокого напряжения выход ВЧ генератора подключали к резонансному колебательному контуру, в цепь которого параллельно была включена лампа-вспышка. В случае зажигания импульсной лампы постоянным током высокое выходное переменное напряжение выпрямляли ВЧ диодным мостом и далее подавали на лампу. Амплитуду напряжения зажигания лампы измеряли киловольтметром. При этом точность измерения амплитуды составляла  $\pm 10\%$ .

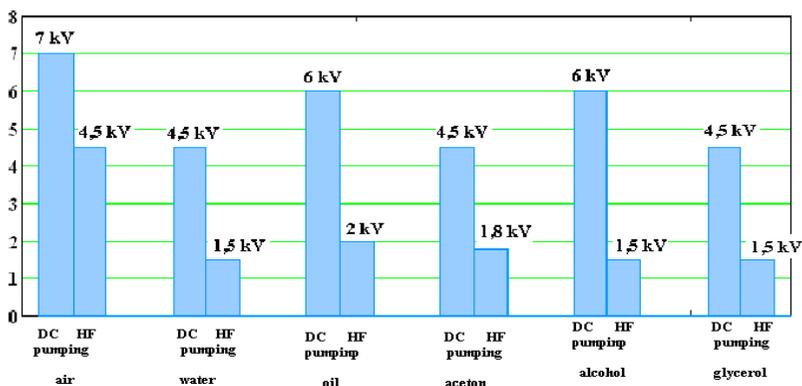


Рис. 1. Кратное снижение напряжения зажигания импульсной лампы для твердотельных лазеров при ВЧ накачке (HF) относительно накачки постоянным током (DC) для разных хладагентов. (lamp № 1,  $d=5 \text{ мм}$ ,  $l=40 \text{ мм}$ )

В качестве импульсной лампы использовали две серийно выпускаемые лампы, наполненные инертным газом Хе: лампа №1, AQL 4512, расстояние между электродами в лампе составляло  $L = 40 \text{ мм}$ ,

внутренний диаметр трубки  $d \sim 4$  mm; лампа №2 - ДКРТВ 3000-1,  $L = 62$  mm,  $d \sim 6$  mm.

В нашем случае замена воздуха на жидкие хладагенты разных веществ (трансформаторное масло, ацетон, этиловый спирт, глицерин и вода) показало устойчивое снижение порога зажигания лампы как при питании лампы постоянным током, так и при ВЧ накачке. На рис.1 приведены данные измерения напряжений зажигания лампы №1 при погружении в разные охлаждающие жидкости. Таким образом, при погружении разрядной лампы в жидкость наблюдается существенное снижение порога её зажигания при высокочастотной накачке.

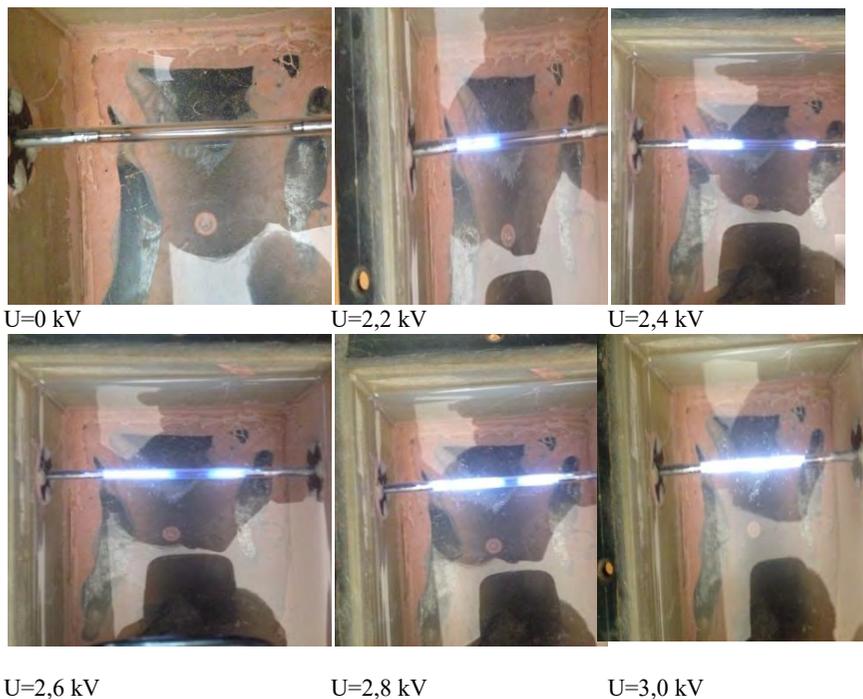


Рис. 2. Фотографии зажигания импульсной лампы №2 при плавном увеличении амплитуды высокочастотных колебаний вплоть до полного зажигания в воде.

Аналогичная закономерность развития разряда проявляется и в других жидкостях

На рис. 2 приведены фотографии момента зажигания лампы №2 при её охлаждении водой по мере повышения напряжения высокочастотной накачки (400 кГц) вплоть до полного зажигания. Из рисунка видно, что повышение напряжения сопровождается неоднородным развитием канала

зажигания разряда. При увеличении амплитуды ВЧ колебаний до 2.2 кВ в окрестности одного из электродов (левого) появляется достаточно яркое рекомбинационное свечение ионов. Здесь следует отметить, что электроды лампы имеют разную геометрическую форму. Один из них (левый, см.Рис.2) заканчивается заостренным цилиндром небольшого диаметра, а другой – полусферой большего диаметра. По мере увеличения ВЧ напряжения яркое свечение в первую очередь возникает на заостренном конце электрода (слева) и размер этого свечения вдоль лампы растёт. При этом большая часть лампы остаётся несветящейся. Затем свечение появляется и на шарообразном электроде (~2.4 кВ, рис.2), которое также локализовано в области электрода. При этом средняя часть лампы остаётся тёмной, которую в физике тлеющего разряда (glow discharge) называют «фарадеевым тёмным пространством» [11-13]. По характеру возникновения и развития видно, что эти свечения эволюционируют независимо друг от друга.

Таким образом, нам впервые удалось зарегистрировать специфическую особенность при формировании ВЧ разряда - сосуществование светящихся и тёмной областей («фарадеево тёмное пространство») в середине лампы. Заметим, что такая особенность отсутствовала в лампе при питании разряда постоянным током в нашем случае, но является характерным признаком тлеющих разрядов [11-13].

Наличие и эволюция тёмной области между светящимися приэлектродными участками трубки указывает на то, что кинетическая энергия электронов на начальной стадии увеличения амплитуды напряжения превышает потенциал ионизации газов только в области электродов при малых значениях амплитуды переменного поля (до ~2,2 кВ). При ВЧ накачки каждые полпериода переменного поля электроды являются анодом или катодом. За время пока электрод является анодом в его окрестности развивается разряд по сценарию светящегося положительного столба тлеющего разряда [11-13], который поддерживается через каждые последующие полпериода переменного поля. В целом физика ВЧ разряда с формированием «фарадеева тёмного пространства», обнаруженного нами впервые, насколько нам известно, требует детального изучения.

Таким образом, проведенные экспериментальные исследования процесса зажигания ВЧ разряда в стандартной лампе накачки лазера при её охлаждении в воздухе, воде, конденсаторном масле, спирте, ацетоне и глицерине показали кратное снижение напряжения зажигания по сравнению с питанием разряда постоянным током. Более того, нам впервые удалось зарегистрировать специфическую особенность при формировании ВЧ разряда - существование тёмной области («фарадеево

тёмное пространство») в середине лампы между ярко светящимися приэлектродными областями.

### Литература

1. Капцов Н.А. Электроника (Москва, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956)
2. Мик Д, Крэгс Д. Электрический пробой в газах (М.:ИЛ, 1960)
3. Петер Г. Электронные лавины и пробой в газах (М.:Мир, 1968)
4. Импульсные источники света/ под общей редакцией И.С. Маршака 2изд.М.:Энергия, 1978-478с.
5. Месяц Г.А., Королев Ю.Д. Физика импульсного пробоя газов -М.: Наука, 1991
6. Осипов В.В. Самостоятельный объемный разряд УФН, **170**, №3, стр.225-245, 2000
7. Смирнов Б.М. Моделирование газоразрядной лампы УФН, **179**, №6, стр.591-604, 2009
8. Valshin A.M., Pershin S.M., Mikheev G.M. Bulletin of the Lebedev Physics Institute, **44**(8), 228-231, 2017.
9. Вальшин А.М., Тавлыкаев Р.Ф., Михеев Г.М., Першин С.М. Управление параметрами газоразрядной плазмы низкого давления при высокочастотной накачке Инженерная физика, №3, стр.42-49, 2015.
10. Valshin A.M., Pershin S.M., Tavlykaev R.F., Mikheev G.M., Phys. of Wave Phenomena, **23**(3), 199-201, 2015.
11. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Интеллект, 2009. 734 с.
12. Кудрявцев А.А., Нисимов С.У., Прохорова Е.И., Слышов А.Г., Распределение параметров плазмы в прикатодных областях тлеющего разряда в азоте, ЖТФ, **82**(9), 8-11, 2012.
13. Кудрявцев А.А., Нисимов С.У., Прохорова Е.И., Слышов А.Г., Письма в ЖЭТФ, **37**(17) 104-110, 2011.

© Вальшин А.М., Хусаинова Ю.А., 2019 г.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ И ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ КОБАЛЬТЕ

Габдрахманова Л.А., Альмухаметов Р.Ф.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Из-за необычных физических свойств нанокристаллические (НК) материалы представляют большой научный и практический интерес [1,2]. В НК состоянии коэффициент диффузии повышается на несколько порядков, увеличиваются твердость и износостойкость, повышается химическая активность, наблюдается аномальное смещение температуры Кюри, намагниченности насыщения и других свойств [3-5]. Однако взаимосвязь структурных особенностей НК материалов и их физических свойств изучена недостаточно.

Выбор кобальта в качестве объекта исследования в данной работе обусловлен тем, что он является основным компонентом сплавов, используемых в устройствах магнитной записи. Кобальт широко применяется в качестве катализатора химических реакций, а также в качестве материала для термоэлектрических устройств. Изучению НК кобальта посвящено много отечественных и зарубежных работ [6-14]. Установлено, что в НК кобальте может реализоваться как ГПУ, так и ГЦК структура. От соотношения ГЦК и ГПУ фаз меняются физические свойства НК кобальта. Однако вопросы стабильности фаз НК кобальта изучены в литературе не достаточно. Имеющиеся в литературе результаты исследований часто носят противоречивый характер. Соотношение ГЦК и ГПУ фаз зависит от метода получения НК кобальта, степени деформации, размеров кристаллитов и ряда других факторов. Поэтому, вопросы стабильности ГЦК и ГПУ фаз в НК кобальте требуют более детального изучения.

В данной работе приведены результаты исследований фазовых и структурных превращений в НК кобальте, полученном интенсивной пластической деформацией (ИПД), при его отжиге.

## Образцы и методика исследований

Для получения НК структуры образцы пластически деформировали на наковальнях Бриджмена под давлением  $\sim 7$  ГПа при комнатной температуре поворотом бойка на 5 оборотов. Для получения образцов в разных структурных состояниях и для изучения структурных превращений пластически деформированные образцы отжигали при разных температурах в муфельной печи в потоке аргона. Для исследований использовали образцы в форме дисков с диаметром 10 мм и толщиной около 0,3 мм, полученные после пластической деформации. Рентгеновские исследования проводили на дифрактометре ДРОН-7 на

Со-излучении. Рентгенограммы снимали с плоской поверхности образца при комнатной температуре.

### Результаты исследований и их обсуждение

Согласно результатам наших рентгеноструктурных исследований НК кобальт, полученный ИПД кручением, при комнатной температуре сохраняет ГПУ структуру [15, 16, 17]. После отжига при температурах до  $T=450^{\circ}\text{C}$  НК кобальт также имеет ГПУ структуру. Но, после отжига при температурах выше температуры ГЦК-ГПУ перехода ( $\sim 450^{\circ}\text{C}$ ) и охлаждения ниже этой температуры в НК кобальте сохраняется высокотемпературная ГЦК структура. Следовательно, НК структура препятствует переходу высокотемпературной ГЦК модификации кобальта в низкотемпературную ГПУ модификацию при охлаждении. В цитируемых выше работах также наблюдали при комнатной температуре высокотемпературную ГЦК фазу в ультрамелкозернистом и НК кобальте. Однако влияние размеров кристаллитов и напряженного состояния решетки на стабильность фаз и на ГЦК-ГПУ фазовый переход в этих работах не изучалось. Мы полагаем, что задержка ГЦК-ГПУ фазового перехода в НК кобальте может быть обусловлена малыми размерами кристаллитов и напряженным состоянием кристаллической решетки. При пластической деформации размеры кристаллитов уменьшаются, в кристаллической решетке возникают сильные искажения. Искажения приводят к уменьшению плотности упаковки и к увеличению упругой энергии ГПУ решетки по сравнению с плотностью упаковки и энергией идеальной решетки. Относительный вклад искаженных областей в энергию кристалла растет с уменьшением размеров кристаллитов. В кобальте с размерами кристаллитов меньше критического, энергетически выгоднее сохранение ГЦК структуры с более плотной упаковкой [18]. При отжиге некоторые кристаллиты ГЦК фазы вырастают до критического размера и при охлаждении переходят в ГПУ структуру. Существование критического размера кристаллитов, ниже которого блокируется мартенситное превращение, обсуждалось также ранее в литературе [19].

Для подтверждения наших предположений о стабильности ГПУ и ГЦК фаз НК кобальта на рис. 1 приведена зависимость отношения параметров  $c/a$  от температуры отжига. Для неотожженного НК кобальта отношение  $c/a=1.621$ , что заметно меньше значения этого параметра для крупнокристаллического недеформированного кобальта  $(c/a)_{\text{КК}}=1.632$  и теоретического значения этого параметра  $(c/a)_{\text{T}}=1.633$ , соответствующего наиболее стабильному состоянию ГПУ структуры.

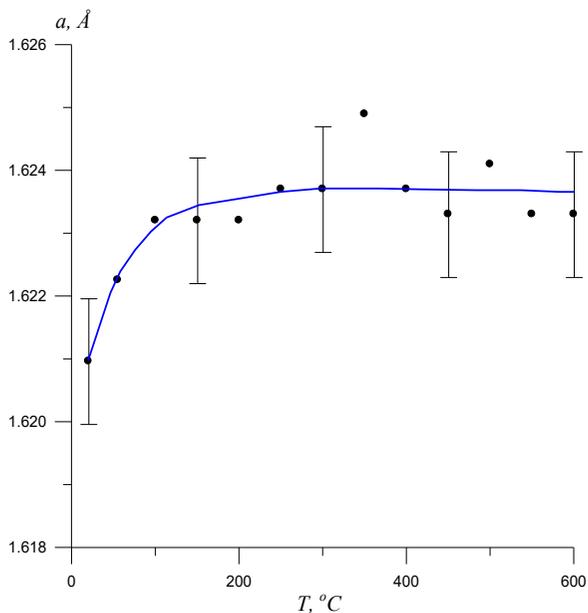


Рис. 1. Зависимость отношения параметров  $c/a$  НК кобальта от температуры отжига

Следовательно, ГПУ фаза НК кобальта, полученного ИПД кручением, менее стабильна, чем ГПУ-фаза крупнокристаллического недеформированного кобальта. С повышением температуры отжига для НК кобальта отношение параметров ( $c/a$ ) растет до значения ( $c/a$ )=1.6233. Следовательно, ГПУ-фаза НК кобальта с повышением температуры отжига становится более стабильной. Для идеальных ГПУ и ГЦК структур плотности упаковки одинаковы и энергии кристалла близки, а для НК кобальта, полученного ИПД кручением, плотность упаковки ниже, чем для идеальной ГПУ структуры. Поэтому в НК кобальте должна реализоваться наиболее плотноупакованная ГЦК структура с меньшей энергией кристалла. При отжиге НК кобальта плотность дефектов уменьшается, плотность упаковки стремится к плотности идеальной ГПУ структуры. Это приводит к снижению энергии ГПУ решетки и переходу ГЦК структуры в ГПУ структуру.

Для подтверждения полученных выше результатов и наших предположений нами проводились исследования размеров областей когерентного рассеяния (ОКР) и микронскажений решетки в зависимости от длительности и температуры отжига.

Известно, что вклад микродеформаций и размеров ОКР в уширение рентгеновских линий меняется в зависимости от угла дифракции  $\theta$ . В области малых углов  $\theta$  уширение рентгеновских линий определяется в основном размерами ОКР. В области больших углов  $\theta$  вклады микродеформаций и размеров ОКР в уширение линий сравнимы. Поэтому размеры ОКР мы определяли по формуле Шеррера

$$L = \frac{\lambda}{W \cos \theta} \quad (1)$$

с использованием линий, расположенных под малыми углами. Величину микродеформаций определяли по линиям под большими углами по формулам:

$$W = 4 \varepsilon \operatorname{tg} \theta \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\left( W - \frac{\lambda}{L \cos \theta} \right)}{4 \operatorname{tg} \theta} \quad (3)$$

без учета вклада размеров блоков и с учетом размеров блоков в уширение рентгеновских линий [20]. Здесь  $L$  - размер ОКР;  $\lambda$  - длина волны используемого рентгеновского излучения;  $\theta$  - дифракционный угол;  $W$  - физическое уширение дифракционной линии. Кроме этого средние размеры ОКР и микродеформации  $\varepsilon$  были также определены из зависимостей Вильямсона-Холла  $W \times \cos(\theta) = f(\sin(\theta))$  методом Ритвельда с помощью компьютерной программы.

На рис. 2 приведены размеры ОКР, определенные по формуле Шеррера для линии (002) ( $2\theta=52^\circ$ ) и из кривых Вильямсона-Холла, в зависимости от температуры отжига. Размеры ОКР, определенные двумя методами, близки, что свидетельствует о справедливости наших предположений. Из рис. 2 видно также, что размеры ОКР до температуры отжига  $T \sim 450^\circ\text{C}$  меняются незначительно и составляют примерно 250-500 Å. При температурах отжига выше  $450^\circ\text{C}$  наблюдается скачкообразный рост размеров ОКР. Таким образом, полученные результаты подтверждают наши предположения о том, что задержка перехода ГЦК-фазы пластически деформированного кобальта в ГПУ-фазу при охлаждении связана с малостью размеров ОКР. При отжиге некоторые кристаллиты вырастают до критического размера. Поэтому, образцы, отожженные при температурах выше  $450^\circ\text{C}$ , содержат смесь ГПУ-ГЦК фаз.

Согласно рис. 2 величина критического размера, которая достигается при температуре отжига  $T \sim 500^\circ\text{C}$ , составляет примерно  $L_{кр} \sim 1000 \text{ \AA}$ .

На рис. 3 приведена зависимость микродеформаций в кристаллитах, определенных разными методами, от температуры отжига. При расчетах  $\epsilon$  по формуле (3) использовали значения  $L$ , определенные по линии (100), и учитывали их зависимость от температуры отжига. Значения микродеформаций, определенные разными методами, отличаются только для температур отжига ниже  $300^\circ\text{C}$  – для области возврата. Величина микродеформаций, рассчитанная по формуле (2), имеет завышенные значения, так как при этом не учитывается вклад размеров блоков в уширение линий. Величина микродеформаций, определенная из кривых Вильямсона-Холла, имеет заниженные значения. Это связано с тем, что по данному методу мы находили средние размеры ОКР, которые могут быть меньше размеров ОКР, найденных по линии (112).

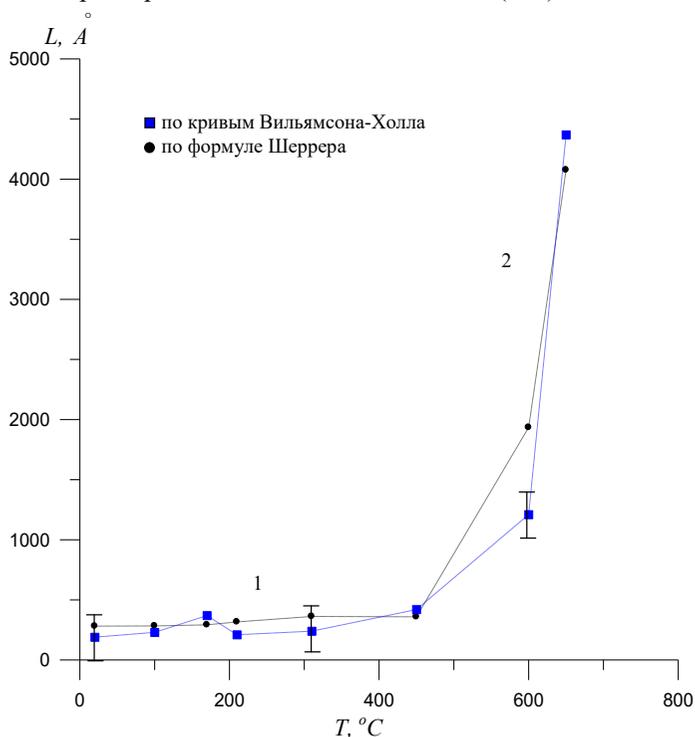


Рис. 2. Зависимость размеров ОКР НК кобальта от температуры отжига, определенная по линии (002),  $2\theta=52^\circ$

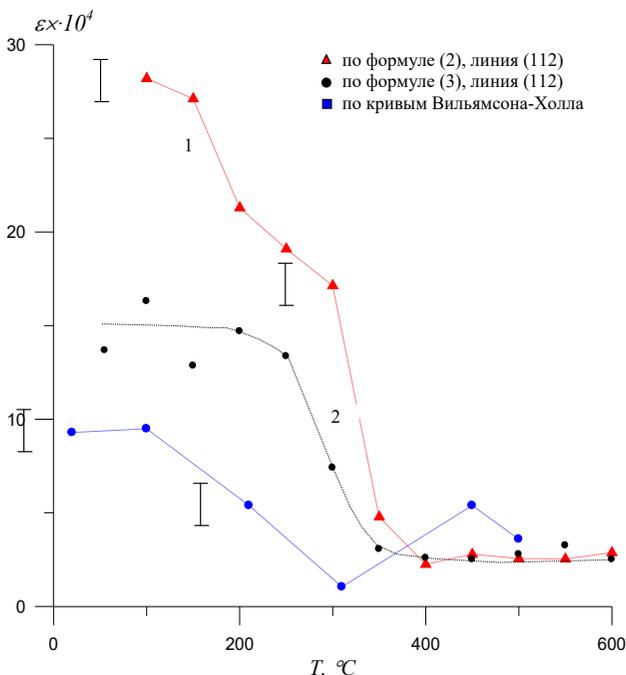


Рис. 3. Зависимость микродеформаций в НК кобальте, определенных разными методами, от температуры отжига

В области рекристаллизации размеры кристаллитов возрастают, их относительный вклад в уширение рентгеновских линий уменьшается. Поэтому в этой области температур в уширение рентгеновских линий основной вклад вносят микродеформации в образце, и применяемые методы дают близкие значения  $\varepsilon$ .

Кривая  $\varepsilon(T)$  хорошо коррелирует с зависимостью размеров ОКР от температуры отжига  $L(T)$ . С повышением температуры отжига величина микродеформаций уменьшается, что связано с аннигиляцией дефектов противоположного знака и с выходом их к границам. На зависимостях  $L(T)$  и  $\varepsilon(T)$  просматриваются две области. В области низких температур 1 размеры ОКР и микродеформации меняются относительно медленно с температурой отжига. Эту область мы связываем с процессом возврата. В области высоких температур 2 наблюдается резкое уменьшение микродеформаций  $\varepsilon$  и скачкообразный рост  $L$ . Мы полагаем, что область 2 соответствует процессу рекристаллизации.

Таким образом, согласно результатам нашим исследований задержка ГЦК-ГПУ фазового перехода в НК кобальте при его охлаждении обусловлена малыми размерами кристаллитов и сильными напряжениями в кристаллической решетке.

### Литература

1. Валиев, Р.З. Наноструктурные материалы, полученные интенсивной пластической деформацией / Р.З. Валиев, И.В. Александров. - М.: Логос, 2000. - 272 с.
2. Gleiter, H. Nanostructured materials: Basic concepts and microstructure / H. Gleiter // *Acta Mater.* - 2000. - V. 48. - P. 1-29.
3. Грабовецкая, Г.П. Сравнительные исследования зернограничной диффузии меди в субмикро- и крупнокристаллическом никеле / Г.П. Грабовецкая, И.В. Раточка, Ю.Р. Колобов, Л.Н. Пушкарева // *ФММ.* - 1997. - Т. 83. - № 3. - С. 112-116.
4. Хомская, И.В. Эволюция структуры при нагреве субмикроструктурной и нанокристаллической меди, полученной высокоскоростным деформированием / И.В. Хомская, В.И. Зельдович, А.Э. Хейфец, Н.Ю. Фролова, В.П. Дякина, В.А. Казанцев // *ФММ.* - 2011. - Т. 111. - № 4. - С. 383-390.
5. Korznikova, G.F. Structure peculiarities and magnetic properties of submicrocrystalline terbium / G.F. Korznikova, Kh.Ya. Mulyukov, I.Z. Sharipov, L.A. Syutina // *J. of Magnetism and Magnetic Materials.* - 1999. - V. 203. - P. 178-180.
6. Owen, E.A. Effect of Grain Size on the Crystal Structure of Cobalt / E.A. Owen, D.M. Jones // *Proc. Phys. Soc.* - 1954. - V. 67. - P. 456-466.
7. Kajiwara, S. A new crystal structure of pure cobalt formed in ultrafine particles / S. Kajiwara, S. Ohno, K. Honma, M. Uda // *Phil. Mag. Lett.* - 1987. - V. 55. - № 5. - P. 215-219.
8. Cardellina, F. Thermal and structural study of the h.c.p. to f.c.c. transformation in cobalt / F. Cardellina, G. Mazzone // *Phil. Mag. A.* - 1993. - V. 67. - № 6. - P. 1289-1300.
9. Huang, J.Y. Allotropic transformation of cobalt induced by ball milling / J.Y. Huang, Y.K. Wu, H.Q. Lu, K. Ye, // *Nanostr. Mater.* - 1995. - V. 6. - P. 723-726.
10. Karimpoor, Amir A. Mechanical properties of bulk nanocrystalline hexagonal cobalt electrodeposits: a thesis submitted in conformance with the requirements for the degree of master of applied science graduate department of materials science and engineering university of Toronto / Amir A. Karimpoor. - Canada, 2001. - 112 p.

11. Sort, J. Microstructural aspects of the h.c.p.-f.c.c. allotropic phase transformation induced in cobalt by ball milling / J. Sort, J. Nogues, S. Surinach, M.D. Baro // *Phil. Mag.* - 2003. - V. 83. - № 4. - P. 439-455.
12. Sort, J. Microstructural effects and large microhardness in cobalt processed by high pressure torsion consolidation of ball milled powders / J. Sort, A. Zhilyaev, M. Zielinska, J. Nogues, S. Surinach, J. Thibault, M.D. Baro // *Acta Mater.* - 2003. - V. 51. - № 20. - P. 6385-6393.
13. Mulyukov, Kh.Ya. Microstructure and Magnetic Properties of Submicron Grained Cobalt after Large Plastic Deformation and Their Variation during Annealing / Kh.Ya. Mulyukov, G.F. Korznikova, R.Z. Valiev // *Phys. Stat. Sol. (a)*. - 1991. - V. 125. - P. 609-614.
14. Mulyukov, Kh.Ya. The study of domain structure of submicron grained cobalt and its changes during heating / Kh.Ya. Mulyukov, G.F. Korznikova, M.B. Sagdatkireyeva, V.N. Timofeyev, R.Z. Valiev // *JMMM*. - 1992. - V. 110. - P. 73-79.
15. Альмухаметов, Р.Ф. Исследование структурных превращений в пластически деформированном кобальте / Р.Ф. Альмухаметов, Л.А. Габдрахманова // *ФТТ*. - 2013. - Том 55. - № 1. - С. 7-9.
16. Габдрахманова, Л.А. Металлы. Сплавы. Композиты (структура и свойства) / Л.А. Габдрахманова, К.М. Мукашев, А.Д. Мурадов. - Алматы: Казак университеты. - 2018. - 530 с.
17. Альмухаметов, Р.Ф. Исследование релаксационных процессов в нанокристаллическом кобальте, полученном методом интенсивной пластической деформации / Р.Ф. Альмухаметов, Л.А. Габдрахманова, И.З. Шарипов, Я.А. Абзгильдин // *ФТТ*. - 2014. - Том 56. - № 2. - С. 224-229.
18. Андриевский, Р.А. Наноструктурные материалы / Р.А. Андриевский, А.В. Рагуля. - М.: Изд-во центр «Академия», 2005. - 192 с.
19. Глезер, А.М. Мартенситное превращение в микрокристаллических сплавах железо-никель / А.М. Глезер, Е.Н. Блинова, В.А. Поздняков // *Известия академия наук. Серия физическая*. - 2002. - Т. 66. - № 9. - С. 1263-1275.
20. Уманский, Я.С. Рентгенография металлов и полупроводников / Я.С. Уманский. - М.: Изд-во «Металлургия», 1969. - 496 с.

© Габдрахманова Л.А., Альмухаметов Р.Ф., 2019 г.

## ЭФФЕКТ САНЬЯКА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ЙОХАНСЕНА-ПСАЛТИСА

Давлетшина Н.Ю., Камалова Д.Д.

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М. Акмуллы, г. Уфа, Россия

В работе исследовано влияние параметра искажения  $\epsilon_3$  вращающейся черной дыры Йохансена-Псалтиса [1] на эффект Саньяка в поле этого решения. В самом общем случае эффектом Саньяка называется разность времен прохождения замкнутого круга пучками света, движущимися в противоположных направлениях. Эффект Саньяка ранее был исследован в различных теориях гравитации, например, в ОТО [2-4], в теории  $f(R)$  – гравитации [5].

Рассмотрим керроподобную метрику для черных дыр, которая описывает стационарное осесимметричное и асимптотически плоское вакуумное пространство-время

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) [1 + h(r, \vartheta)] dt^2 + \frac{4aMr \sin^2 \vartheta}{\Sigma} [1 + h(r, \vartheta)] dt d\varphi \\
 & - \frac{\Sigma [1 + h(r, \vartheta)]}{\Delta + a^2 h(r, \vartheta) \sin^2 \vartheta} dr^2 - \Sigma d\vartheta^2 \\
 & - \left[ \sin^2 \vartheta \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \vartheta}{\Sigma} \right) + \frac{a^2 (\Sigma + 2Mr) \sin^4 \vartheta}{\Sigma} h(r, \vartheta) \right] d\varphi^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $M$  – масса,  $a$  – параметр вращения и

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta, \\
 \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2, \\
 h(r, \vartheta) &= \epsilon_3 \frac{M^3 r}{\Sigma^2},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\epsilon_3$  – параметр искажения метрики Керра. Компактный объект более вытянутый (сплюснутый), чем решение Керра с тем же угловым при  $\epsilon_3 > 0$  ( $\epsilon_3 < 0$ ); при  $\epsilon_3 = 0$  метрика сводится к решению Керра.

Далее найдем задержку времени в пространстве-времени Йохансена-Псалтиса для негеодезических круговых орбит. Для этого, мы будем следовать методу, разработанному Тартальей [2]. Пусть источник/приемник отправляет два противоположно направленных световых пучка, которые опишут замкнутую круговую траекторию вдоль

вращающейся черной дыры, описываемой метрикой (1), на экваториальной плоскости (т.е.  $\mathcal{G} = \pi/2$ ). Подходящие зеркала возвращают оба пучка света к источнику/приемнику после того, как они сделали один круг вокруг вращающейся центральной массы. Предположим далее, что источник / приемник вращается вокруг центральной массы с радиусом  $r = R = \text{const}$ . Тогда метрика (9) сводится к

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_3 M}{R}\right) dt^2 + \frac{4aM}{R} \left(1 + \frac{\varepsilon_3 M}{R}\right) dt d\varphi - \left\{R^2 + a^2 \left(1 + \frac{2M}{R}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_3 M}{R}\right)\right\} d\varphi^2. \quad (3)$$

Предполагая равномерное вращение, угол поворота  $\varphi_0$  источника/приемника равен

$$\varphi_0 = \omega_0 t. \quad (4)$$

Так как для угловой скорости  $\omega_0$  не требуется выполнение третьего закона Кеплера, то движение считается негеодезическим. Продифференцируем уравнение (4), получим  $d\varphi = d\varphi_0 = \omega_0 dt$ , и подставим в (3)

$$d\tau^2 = \left[ \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_3 M}{R}\right) + \frac{4aM\omega_0}{R} \left(1 + \frac{\varepsilon_3 M}{R}\right) \right] dt^2 - \left\{R^2 + a^2 \left(1 + \frac{2M}{R}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_3 M}{R}\right)\right\} \omega_0^2 dt^2. \quad (5)$$

Для того, чтобы пучки света двигались по одной и той же круговой траектории, необходимо чтобы  $d\tau = 0$ . Предполагая, что  $\Omega$  – угловая скорость движения света вдоль пути, мы имеем

$$(R - 2M)(R + \varepsilon_3 M) + 4aM(R + \varepsilon_3 M)\Omega - \left\{R^4 + a^2(R - 2M)(R + \varepsilon_3 M)\right\}\Omega^2 = 0. \quad (6)$$

Решив уравнение (6) найдем 2 корня, которые представляют угловую скорость  $\Omega_{\pm}$  для со- и противоположно направленного вращающегося движения света

$$\Omega_{\pm} = \frac{2aM(R + \varepsilon_3 M) \pm R\sqrt{(R + \varepsilon_3 M)\{R^2(R - 2M) + a^2(R + \varepsilon_3 M)\}}}{R^4 + a^2(R + 2M)(R + \varepsilon_3 M)}. \quad (7)$$

Тогда угол поворота  $\varphi_{\pm}$  для света

$$\varphi_{\pm} = \Omega_{\pm} t. \quad (8)$$

Объединим уравнения (4) и (8) таким образом, чтобы исключить  $t$  в итоговом

$$\varphi_{\pm} = \frac{\Omega_{\pm}}{\omega_0} \varphi_0. \quad (9)$$

Первое пересечение мировых линий двух пучков света с одним источником/приемником движущимся по орбите после испускания в момент времени  $t = 0$ , когда углы

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= \varphi_0 + 2\pi, \\ \varphi_- &= \varphi_0 - 2\pi, \end{aligned} \quad (10)$$

которое дает

$$\varphi_0 \pm 2\pi = \frac{\Omega_{\pm}}{\omega_0} \varphi_0. \quad (11)$$

Решая последнее уравнение относительно  $\varphi_0$ , получаем

$$\varphi_{0\pm} = \mp \frac{2\pi\omega_0}{\Omega_{\pm} - \omega_0}. \quad (12)$$

Подставляя (7) в (12) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{0\pm} &= \mp 2\pi\omega_0 / [\{2aM(R + \varepsilon_3 M) \\ &\pm R\sqrt{(R + \varepsilon_3 M)\{R^2(R - 2M) + a^2(R + \varepsilon_3 M)\}}\} / \\ &\{R^4 + a^2(R + 2M)(R + \varepsilon_3 M)\} - \omega_0]. \end{aligned} \quad (13)$$

Точная задержка времени сигналов на вращающемся источнике/приемнике, выведенная из уравнения (5) с использованием уравнения (4) и проинтегрировав между  $\varphi_{0-}$  и  $\varphi_{0+}$  из уравнения (13), получаем точную задержку времени

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \frac{4\pi}{R} [-2aM(R + \varepsilon_3 M) + \{R^4 + a^2(R + 2M)(R + \varepsilon_3 M)\}\omega_0] / \\ &[(R - 2M)(R + \varepsilon_3 M) + 4aM(R + \varepsilon_3 M)\omega_0 \\ &- \{R^4 + a^2(R + 2M)(R + \varepsilon_3 M)\}\omega_0^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение (15) является точной задержкой двух противоположно направленных пучков света вдоль замкнутой круговой орбиты и называется эффектом Саньяка. Такой эффект часто интерпретируется как гравитационный аналог эффекта Ааронова-Бома, хотя световые пучки действительно не движутся в гравитационном свободном пространстве.

Наилучшей ситуацией для гравитационного эффекта Ааронова-Бома является то, что световые пучки индуцируются движением вдоль плоского пространственного тора. Тем не менее, как показал Руггиеро [6], выражение (15) полностью совпадает с выражением гравито-электромагнитной интерпретацией Ааронова-Бома.

С другой стороны, рассмотрим статический источник/приемник, сохраняющий фиксированное положение в системе координат, определяемой удаленными неподвижными звездами ( $\omega_0 = 0$ ). Для него задержка времени также будет происходить при условии, что  $a \neq 0$ , заданное

$$\delta\tau = -\frac{8\pi a M(R + \varepsilon_3 M)}{R\sqrt{(R - 2M)(R + \varepsilon_3 M)}}. \quad (16)$$

Постньютоновское приближение первого порядка для статического наблюдателя, отправляющего пару световых пучков в противоположных направлениях по замкнутой треугольной схеме вместо круга, было разработано Козном и Машхоном для решения Керра. Поэтому важна не форма, а замкнутость орбиты.

Разложив уравнение (15) в ряд Тейлора по  $\omega_0 R$  и  $M/R$ , получим величину задержки света в постньютоновском приближении

$$\delta\tau = \delta\tau_s + 2\pi R M \omega_0 (2 - \varepsilon_3) - \frac{8\pi a M}{R},$$

где  $\delta\tau_s = 4\pi\omega_0 R^2$ . Первый член с правой стороны в настоящем уравнении  $2\delta\tau_1$  называется основной задержкой Саньяка, второй член  $2\delta\tau_2$  является поправкой массы к задержке, третий член  $2\delta\tau_3$  является вкладом от момента инерции.

Основным результатом работы является получение точного выражения для задержки времени двух противоположно направленных пучков света (эффект Саньяка) в поле вращающейся черной дыры Йохансена-Псалтиса на экваториальной плоскости для негеодезических круговых орбит. А также, показано, что в постньютоновском приближении параметр метрики Йохансена-Псалтиса  $\varepsilon_3$  влияет только на вклад массы к задержке времени.

### Литература

1. Johannsen, T., Psaltis, D. Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem // Phys. Rev. D, 2011, v. 83, pp. 124015.
2. Tartaglia, A. General relativistic corrections to the Sagnac effect // Phys. Rev. D, 1988, v. 58, pp. 064009.
3. Karimov, R.K., Izmailov, R.N., Garipova, G.M., Nandi, K.K. Sagnac delay in the Kerr-dS spacetime: Implications for Mach's principle // Eur. Phys. J. Plus, 2018, v. 44, pp. 133.
4. Kulbakova, A., Karimov, R.K., Izmailov, R.N., Nandi, K.K. Upper limit on NUT charge from the observed terrestrial Sagnac effect // Class. Quantum Grav., 2018, v. 35, pp. 115014.
5. Karimov, R. Kh., Izmailov, R. N., Potapov, A. A., Nandi, K. K. Terrestrial Sagnac delay constraining modified gravity models // Gen. Relativ. Gravit., 2018, v. 50, pp. 44.
6. Ruggiero, M.L., Gravitomagnetic gyroscope precession in Palatini  $f(R)$  gravity // Phys. Rev. D, 2009, v. 79, pp. 084001.

© Давлетшина Н.Ю., Камалова Д.Д., 2019 г.

## ТРАССЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НЕФТЕДОБЫВАЮЩЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Коновалова В.А.<sup>1</sup>, Жонин А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия,

<sup>2</sup>ООО «РН-УфаНИПИнефть»

В последнее время при контроле над разработкой нефтяных залежей добывающие компании все чаще применяют индикаторный (трассерный) метод. Трассерный метод основан на введении в контрольную нагнетательную скважину заданного объема меченой жидкости, которая оттесняется к контрольным добывающим скважинам вытесняющим агентом путем последующей (после закачки меченого вещества) непрерывной подачи воды в контрольную нагнетательную скважину. Одновременно из устья добывающих скважин начинают производить отбор проб. Отобранные пробы анализируются в лабораторных условиях для определения наличия трассера и его количественной оценки. По результатам анализа строятся кривые зависимости изменения концентрации трассера в пробах от времени, прошедшего с начала закачки трассера для каждой контрольной добывающей скважины.

Трассерные исследования позволяют определить:

- гидродинамическую связь между нагнетательной и добывающими скважинами;
- межпластовые перетоки;
- скорость фильтрации меченой жидкости по пласту;
- распределение фильтрационных потоков в пласте;
- проницаемость зон пласта, по которым фильтруется меченая жидкость;
- объем пласта, через который фильтруется меченая жидкость;
- вклад нагнетаемой воды в обводненность продукции конкретной добывающей скважины;
- непроизводительную закачку нагнетаемой в пласт воды;
- влияние мероприятий по выравниванию профиля приёмистости нагнетательных скважин на изменение фильтрационных потоков в пласте;
- эффективность различных методов повышения нефтеотдачи пласта путём проведения исследований до и после воздействия.

Технология проведения индикаторных исследований происходит в следующей последовательности. Первым этапом проводится выбор нагнетательных скважин для закачки трассеров и первоначальный выбор добывающих скважин (в зоне возможного реагирования). Далее производят фоновый отбор проб жидкости. На третьем этапе определяют

необходимое количество трассерных веществ для закачки в каждую конкретную нагнетательную скважину и осуществляют закачку меченой жидкости в пласт. На заключительном этапе производят отбор и анализ проб пластовой воды на содержание индикатора, а затем интерпретируют полученные данные.

При выборе индикаторов для проведения исследований учитываются специфика и условия работы.

Жидкость в пластах движется с небольшой скоростью по мельчайшим каналам, образованным системами пор или трещин, контактируя с огромной площадью поверхности породы. Горная порода имеет минералогический состав и часто содержит элементы, способствующие задержке индикатора. Давление и температура в глубоко залегающих нефтяных горизонтах высокие. Насыщены они разнообразными флюидами, причём пластовые воды обычно высокоминерализованные. Все это предъявляет к индикаторам определённые специфические требования. Вещество, используемое для изучения движения жидкости в нефтяном пласте, должно обладать следующими признаками:

1. Химические соединения вещества должны хорошо растворяться в прослеживаемой жидкости и не растворяться в других флюидах, насыщающих пласт.

2. Сохранять свои физико-химические свойства в пластовых условиях. Радиоактивные индикаторы, кроме того, должны обладать приемлемой продолжительностью распада, обеспечивающей выполнение всего комплекса работ в требуемом объекте.

3. Не должны содержаться в пластовых жидкостях.

4. Не должны нарушать своим присутствием естественного потока. Строго следовать вместе с гидродинамическим носителем.

5. С высокой точностью и быстротой фиксироваться в широком диапазоне изменения концентрации, начиная с незначительной. Регистрация должна производиться непрерывно и автоматически непосредственно в стволе или на устье скважины.

6. Не представлять опасности для персонала, проводящего исследования. Также безопасной должна быть и жидкость, извлекаемая из пласта. Не заражать местности и водоёмов, в которые сбрасываются промысловые сточные воды.

7. Иметь стоимость, обеспечивающую экономическую эффективность индикаторных исследований.

В качестве трассеров при проведении исследования применяются водорастворимые химические реагенты:

1. Флуоресцентные трассеры: флуоресцеин натрия, динатриевая соль эозина, эритрозин, родамин. Данный тип индикатора экологически и

санитарно-гигиенически безопасен; обладает многоцветностью, что позволяет проводить одновременный запуск 5-7 и более различных цветов в нагнетательные скважины; не сорбируются породой и оборудованием скважин; не искажают фильтрационного потока за счёт изменения его вязкости и плотности; легко и быстро определяются в полевых условиях на отечественной аппаратуре; на их концентрацию и определение не влияют физико-химические свойства гидродинамического носителя. Однако флуоресцентные индикаторы «замазываются» полярной органикой, так же частично растворимой в воде, что затрудняет их количественное определение.

2. Ионные трассеры: роданистый аммоний, натрий, карбамид, мочеви́на, нитрат натрия, аммония; тиокарбамид, динатрийфосфат. Трассеры такого типа хорошо растворяются в пластовой и нагнетаемой воде (амины), не имеют аналогов в природе, биологически неактивны (экологически чисты), химически не взаимодействуют с нефтью, устойчивы в пластовых условиях, позволяют создать гамму индикаторов со сходными физико-химическими свойствами и единым методом регистрации; легко определяются количественно на спектрометре электронно-парамагнитного резонанса.

3. Органические трассеры: спирты (изопропанол, бутанол), изомеры фторбензойной кислоты, а также стабильные радикалы (2,2,6,6-тетраметил-4-оксиперидин-1-оксил) и амины нитроксильных радикалов. Данные трассеры растворяются как в нефти, так и в воде. Проблема заключается в их количественном определении, которое нужно проводить достаточно дорогостоящими хроматографическими методами.

4. Трассеры на основе квантовых точек: нанокристаллы, состоящие из сотен атомов и имеющие размером в 2-10 нм, полученные при помощи коллоидного синтеза и покрытые слоем адсорбированных поверхностно-активных молекул. Основной материал – халькогениды кадмия. Квантовые точки флуоресцируют в разных областях электромагнитного спектра, в зависимости от своего размера, они обладают способностью поглощать энергию в широком диапазоне спектра, они могут испускать узкий спектр световых волн, который может регистрироваться методами проточной цитометрии. Точки имеют интенсивность флуоресценции в 10-20 раз выше по сравнению с органическими красителями, более химически устойчивы, чем природные флуорфоры из-за своего химического состава, по сравнению с органическими красителями способны выдерживать воздействие кислот и высоких температур.

6. Трассеры, основанные на диффузном обмене.

Длительный путь прослеживания трассера часто наблюдается при испытаниях на импульсные инъекции, проводимые в сломанных геологических средах. Такое поведение объясняется диффузионным

обменом индикатором между подвижными жидкостями, проходящими через каналы в трещинах и относительно застойной жидкостью между каналами жидкости, по стенкам разрушения или внутри объемной матрицы.

8. Радиоактивные трассеры. Физическое или химическое состояние трассера определяется изученными ранее процессами. Трассер должен действовать сходным способом, как физически, так и химически, как и изучаемый материал. Также, если изучаемый материал – это летучее вещество при температуре прохождения процесса, трассер должен. Другие особенности трассера, которые должны учитываться, связаны с радиоактивностью. Трассер должен обладать такими радиоактивными свойствами, которые могут быть легко обнаружены и минимизируют радиологическую опасность для операторов, населения и окружающей среды.

#### Исследование 1

Объект исследования: Аргентина, Бассейн Neuquen, Vaca Muerta форм., Nambuena блок. Титоновское (валанжиновское) морское образование богатое органическими силикатакрилатами известняковыми аржиллитами.

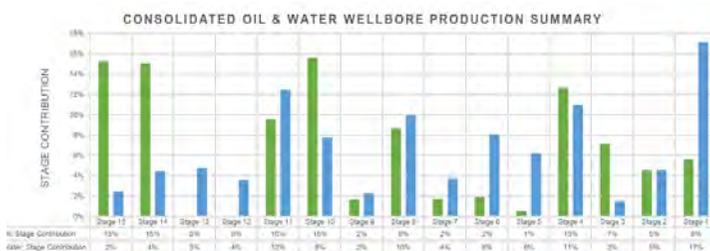
Технологии МГРП: Slick Water Frac (маловязкая жидкость), линейный и сшитый гель.

Цели исследования:

- идентификация продуктивности зон горизонтального ствола с трещинами ГРП;
- выделение границ зон, обусловленных геологическими причинами.

В каждую стадию закачивается 1 трассер на нефтяной основе; 1 трассер на водной основе; 1 контрольный трассер на водной основе. Всего использовалось 15 видов химических трассеров на масляной основе и 16 видов химических трассеров на водной основе. Исследование проводилось в течении 55 дней. На анализ было взято 48 водных и 46 нефтяных проб.

Также рассматривалось поведение скважин при изменении давления (при изменении размеров штуцера) для оценки коэффициента продуктивности по зонам.



Исходя из графика выделено 4 региона:

1. Конечный регион (стадии 10-15) показывают хороший уровень нефтеотдачи, низкий уровень притока воды. Это говорит о высокой очистке данных пяти стадий и наиболее эффективной стимуляции.

2. Средний регион (стадии 9-5) с низким уровнем восстановления нефтяного трассера показывает низкий уровень нефтеотдачи.

3. Начальный регион (стадии 4-1) показывают значительный уровень производительности, подтверждая тем самым, что все расширение ствола скважины является продуктивным и способствует потоку (без препятствий).

Вывод: идентифицирован приток в ГС с МГРП. Выделены границы зон с различной продуктивностью, что согласуется с данными ГИС и геологией.

## Исследование 2

Объект исследования: California , Monterey форм. , Antelope shale , McKittrick мр. Миоценовое отложение, состоящее из трех фаз кремнезема: диатомит, опал КТ, кварц. У первой стадии нефтеотдача выше чем у двух последних.

Технологии МГРП: 4 скважины в разработке. Скважина 1 состоит из 11 стадий, скважина 2 из 12 стадий, скважина 3,4 из 7 стадий. Скважины 1 и 2 содержат гибкую трубопроводную гидратную систему ГРП, которая позволила разложить разломы на конкретные наборы перфораторов. Скважины 3,4 используют комплексный метод plug-and-perf, имеют более длинный интервал на каждом этапе, что создает большее перекрытие отдельных зон.

Цели исследований:

- исследование профиля притока в ГС с МГРП;
- сравнение профиля притока с PLT;

повышение нефтеотдачи за счет нормализации профиля притока в ГС с МГРП. Чтобы компенсировать изменения длины стадии на каждом этапе, что создавало большее перекрытие зон, что затрудняло сравнение производственного вклада из каждой зоны, перфорированные кадры,

пересекающие каждый слой, использовались для установления отношения (для каждой зоны) для создания средств нормализации.

Вывод: вследствие использования перфорированных кадров для установления отношения (для каждой зоны) созданы средства нормализации. Получена нормализованная кумулятивная нефтеотдача каждой зоны в каждой скважине. Выявлен объем зонального вклада каждой скважины в общую нефтеотдачу, идентифицированы поведение каждой зоны.

### Исследование 3:

Объект исследования: Кентуки, Пайк, скважина Berea Sanstone.

Технологии МГРП: 12 стадий прошли пенопластовую обработку, каждая стадия обработана 34 мг карбида бора, радиоактивным трассером Iridium-192 для целей прямого сопоставления, маркировано 19,3 тонн пропанта (только окончательный этап), среднее давление обработки составляет 19,3 тонны на 6,4 см<sup>2</sup>. Фракция пропанта - 20/40.

Цели исследований:

- предоставление альтернативы радиоактивным трассерам в качестве карбида бора;
- изучение процессор ГРП за счет экологических химических трассеров.

Технология основывается на использовании частиц карбида бора, добавленных к суспензии ГРП в качестве трассера. СВ<sub>4</sub> представляет собой керамическое соединение с 75% -ным содержанием бора. Поскольку бор является поглотителем нейтронов, обнаружение постобработки осуществляется с помощью нейтронного устройства, использующего герметичный источник Am-241 бериллия, который обнаруживает скорость нисходящего нейтрона и гамма-счетчика, а также фиксирует гамма-валидацию путем выделения энергии по меченым интервалам.

Вывод: карбид бора можно использовать для отслеживания материала, что исключает проблемы, связанные с использованием радиоактивных материалов. Стоимость СВ<sub>4</sub> меньше чем стоимость радиоактивных изотопов, что составляет экономическую выгоду.

### Исследование 4:

Объект исследования: Лесное мр. (Предкавказье), Западно-Варьеганское мр. и Северо-Хохряковское мр. (Западная Сибирь), Белокаменное мр. (Поволжье).

Цели исследования:

- определение момента прихода основного фронта вытесняющей жидкости по отдельным наблюдательным скважинам;
- выявление гидродинамических связей;

- определение истинных скоростей и направлений движения нагнетаемой воды и пластовых флюидов на исследованных направлениях;
- получение сведений о внедрении в продуктивную часть пласта законтурных вод;
- определение степени влияния отдельных нагнетательных скважин на обводнение.

Использовали мелкодисперсные флуоресцентные трассеры, обладающие свойствами: чувствительность определений для них выше, чем у радиоизотопов, что позволяет проводить исследования при разбавлении  $10^{12} - 10^{13}$  раз. Они экологически и санитарно-гигиенически безопасны. Они многоцветны, что позволяет проводить одновременный запуск 5-7 и более различных цветов в нагнетательные скважины, в одной пробе можно определить трассеры всех цветов, запущенных в нагнетательные скважины.

Вывод: индикаторные исследования показали, что в результате активного воздействия на пласт происходит возрастание анизотропии геофильтрационных свойств коллектора. В связи с этим в техногенных системах разрабатываемых нефтяных месторождений формируется ламинарно-турбулентный тип движения флюидов. Трассерные исследования помогли выявить ряд техногенных аномалий.

#### Исследование 5

Объект исследования: Поле X, Черное море, Румыния (примерно в 75 км к северо-востоку от Констанцы).

Технология МГРП: глубина от 1900 до 2100 м, одводная вертикальная глубина (ТВДСС) с толщиной вверх до 190 м. Целевой резервуар - верхний мел, с трещинами и микроразрушениями, частично заполненными сланцами. Пористость составляет от 2 до 35,3%, при этом в среднем 15,9%. Проницаемость варьируется от 0,01 до 70 мД (исключение), в среднем 0,26 мД.

Цели исследований:

- применению химических индикаторов для завершения диагностики и оптимизации, в частности, для многоступенчатых операций по разрыву в море.

Обработка ГРП на скважине W1 прослеживается с помощью химического трассера (для жидкостей для заканчивания воды) (CFT), трассеры для жидкой фазы углеводородов, (OFT) и трассеры для газовой фазы углеводородов (GFT), тогда как на скважине W2 отслеживается только с помощью CFT и OFT.

Трассирующие вещества вводят в жидкость для заканчивания через насос, который контролируется для поддержания желаемого концентрации или количества индикатора. Как только скважина будет

введена в производство,,образцы из всех прослеженных фаз попадают в соответствии с разработанным графиком. Образцы затем анализируются в лаборатории, и результаты представлены в аналитическом отчете.

Вывод: трассерная технология позволяет сравнить относительный вклад прослеживаемой жидкости с одного от этапа к следующему, сравнивая не только вклад между этапами, но и трехфазных этапов (жидкий углеводород, газообразный углеводород и вода).

#### Исследование 6

Объект исследования: Колорадо, Денвер, Wattenberg месторождение, Niobara формация, Codell формация. 11 горизонтальных скважин .

Цели исследования:

- применению химических индикаторов для исследования процессов ГРП;
- оптимизация расходов на производство;
- анализ гидравлической связи;
- анализ размеров интервалов между скважинами;
- узнать были ли скважины, в формациях Ниобрара и Коделл, гидравлически связаны.

Процесс ГРП может привести к созданию временного пути гидравлической связи на очень длинных расстояниях (> 1000 футов), которые могут контролироваться с использованием технологии химических индикаторов. В районе Wattenberg северо-восточнее Денвера, штат Колорадо, 11 горизонтальных скважин были стимулированы с использованием технологии гидравлического разрыва. Из 11 скважин семь были завершены в формации Niobara, а четыре были завершены в песчанике Codell.

Всего было представлено 14 химических трассеров (CFT), пять из них были продублированы для отслеживания каждой скважины в секции (CFT 1000, 1100, 1200, 1300 и 1600). В проекте также учтена большая структура грабена, которая делит пополам раздел исследования. Схема проекта исследования трассировщика с сейсмическим наложением. является вершиной карты структуры глубины Niobara, с яркими цветами, указывающими неглубокую глубину и прохладные цвета, указывающие на более глубокую структуру.

Вывод: Используя результаты дробного производства, полученные в результате исследования химических индикаторов, гидравлические трещины были откалиброваны в соответствии с дробным производством с каждого интервала. Согласно моделированию гидравлического разлома, проведенному для этой секции исследования, гидравлические трещины, инициированные в формации Niobara C, могут проникать в формацию Codell, что может способствовать обмену данными между двумя формациями (переломы 1-го типа)

### **Заключение**

Трассерный метод нашёл широкое применение во многих нефтедобывающих компаниях при исследовании нефтяных пластов. Интерпретация полученных результатов с помощью этого метода данных позволяет сформировать наиболее полное представление о распределении фильтрационных потоков в пласте и его строении. На основании интерпретированных данных делается выбор метода повышения нефтеотдачи пласта.

С помощью трассеров можно проводить длительный анализ процессов гидродинамического разрыва пласта, анализ пласта на техногенные изменения, отслеживать перемещение флюидов, идентифицировать трещины формаций и их взаимодействие.

Химические трассеры могут представлять из себя экологическую, экономическую и технологическую альтернативу радиоактивным трассерам.

### **Литература**

1. «Advanced Reservoir Characterization in Vaca Muerta using Chemical Tracer Technology» -Panichelli P., 2017.
2. «Многоцветные флуоресцентные трассеры для исследования гидродинамических процессов в нефтяных пластах» - Трунов Н.М., 2014
3. «Advanced Reservoir Characterization in Antelope Shale Using Chemical Tracer Technology» - Lal, M. K., 2017
4. «Post-Treatment Horizontal Hydraulic Fracture Modeling with Integrated Chemical Tracer Analysis, a Case Study» - Dang A. , 2016
5. «Estimation of hydraulic fracture volume utilizing partitioning chemical tracer in shale gas formation» - Tian W., 2016.
6. «Post-Treatment Horizontal Hydraulic Fracture Modeling with Integrated Chemical Tracer Analysis, a Case Study» - Dang A. , 2016
7. «New Tracers Identify Hydraulic Fracturing Fluids and Accidental Releases from Oil and Gas Operations» - Warner N., 2014.
8. «Использование данных индикаторных исследований при создании постоянно действующей геолого-технологической модели» - Антонов О. Г., 2013.
9. «Использования нового вида трассера для исследования техногенных изменений природных водонапорных систем нефтяных месторождений» - Тарасов М. Г., 2016.
10. «Многоцветные флуоресцентные трассеры для исследования гидродинамических процессов в нефтяных пластах» - Трунов Н.М., 2014.

11. «Long-Term Post-Frac Performance Analysis Based on Flowback Analysis Using Chemical Frac-Tracers» - Munoz A., 2009.
12. «Tracer transport in fractured crystalline rock: Evidence of nondiffusive breakthrough tailing» - Becker M., 2000.
13. «Advanced Reservoir Characterization in Antelope Shale Using Chemical Tracer Technology» - Lal, M. K., 2017.

© Коновалова В.А., Жонин А.В., 2019 г.

УДК 621.391.63

## ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛЬНО-ОПТИЧЕСКОГО РАЗВЕТВИТЕЛЯ

Лопатюк А.В.<sup>1</sup>, Грачева А.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

<sup>2</sup>Уфимский государственный авиационно - технический университет  
г. Уфа, Россия

В настоящее время актуальной задачей является минимизация компонентов ВОЛС с целью их размещения на оптических интегральных схемах, что позволяет расширять функциональные возможности оборудования.

В данной работе рассматривается многоканальный интегрально-оптический разветвитель 1x8 каналов размером 3x3 мкм. Показатель преломления подложки – 3,385, пленки – 3,59, покрытия – 1. Толщина волноводного слоя – 1,5 мкм.

Принцип работы данного разветвителя основан на том, что между двумя параллельными волноводами имеет место взаимный обмен световой энергией, если между ними существует слабая связь, возникающая тогда, когда профили волноводных мод в соседних каналах перекрываются.

Если не два, а большее число каналов связаны между собой, то свет не перекачивается из одного канала в другой и обратно, а растекается по всем имеющимся каналам. При неограниченном числе связанных каналов распределение амплитуды светового поля имеет вид функции Бесселя.

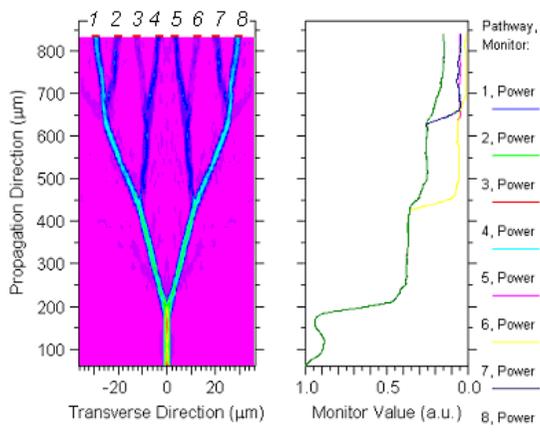
Если весь свет введен в центральный канал, то амплитуда поля в n-м канале определяется выражением:

$$E_n(z) = (-i)^n J_n(2Kz) \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha z\right),$$

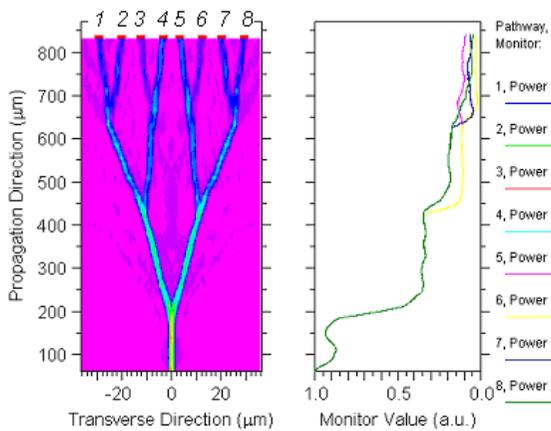
где  $\alpha$  - коэффициент потерь,  $J_n$  - функции Бесселя первого рода. [1]

На рисунке 1 показано как распространяется излучение в разветвителе на длинах волн 1310 и 1550 нм и как распределяется мощность между его выходными каналами.

Как видно из рисунка 1, происходит образование пар каналов: 1-й и 8-й, 2-й и 7-й, 3-й и 6-й, 4-й и 5-й, мощность излучения в каждой паре каналов распределяется равномерно. В первой точке разветвления мощность делится практически поровну, а последующие разветвления делят мощность неравномерно в зависимости от угла между плечами разветвителя и длины плеч. Это позволяет применять данный разветвитель как делитель оптической мощности в заданном соотношении.

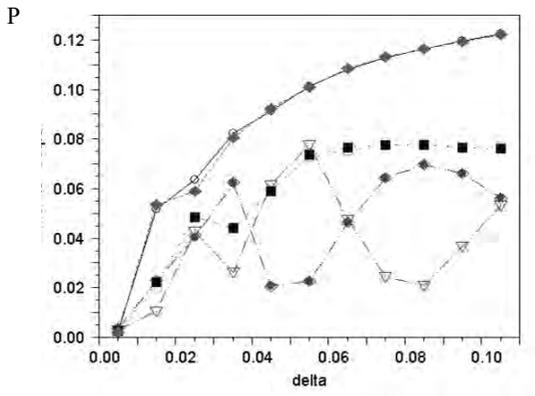


а) длина волны 1310 нм

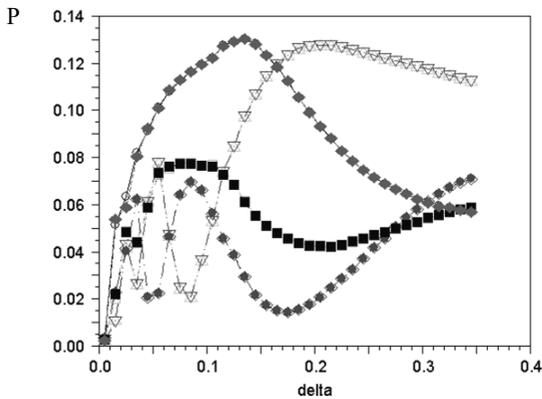


б) длина волны 1550 нм

Рис. 1. Распространение излучения в разветвителе 1x8 каналов и распределение мощности по каналам



a)



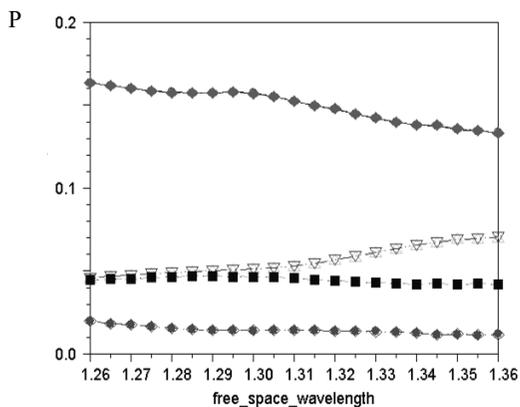
б)



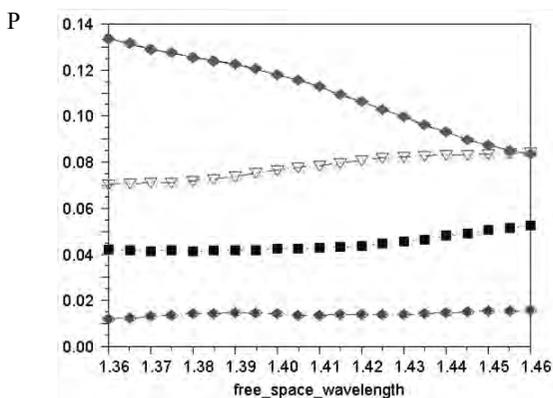
- выходная мощность излучения в 4 и 5 каналах
- выходная мощность излучения в 1 и 8 каналах
- выходная мощность излучения во 2 и 7 каналах
- выходная мощность излучения в 3 и 6 каналах

Рис. 2. График зависимости мощности в выходных каналах ответвителя от относительной разницы показателей преломления пленки и подложки (длина

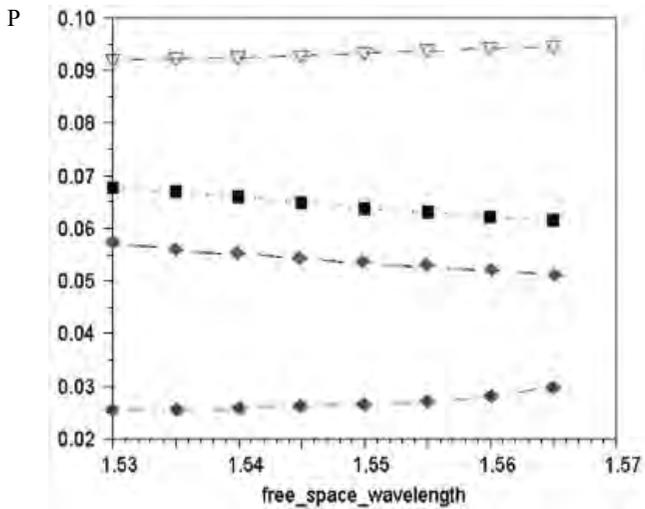
Представляет интерес изменение мощности излучения в выходных каналах разветвителя в зависимости от относительной разницы показателей преломления пленки и подложки (рисунок 2). Рисунок а)  $\Delta$  – от 0,01 до 0,1 мкм, б) – это наиболее используемый диапазон изменения  $\Delta$  от 0,005 до 0,1. Из графиков видно, что мощность осциллирует между парами каналов 4,5 и 3,6. Из этого следует, что ответвитель может работать как переключатель каналов в диапазоне изменений  $\Delta$  0,005...0,1, что может быть достигнуто при напылении электродов на подложку и волноводы для достижения электрооптического эффекта.



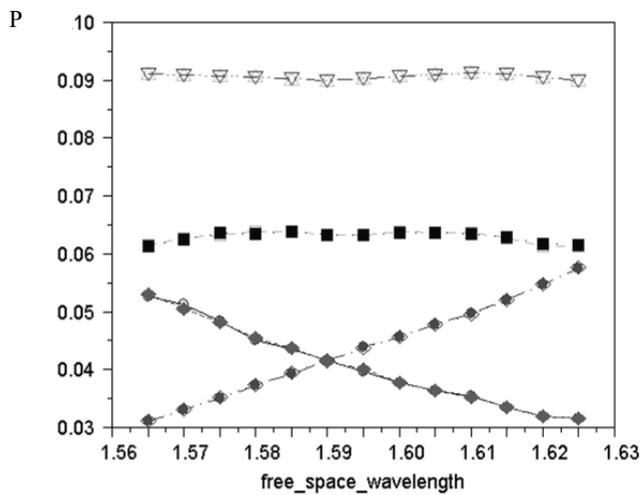
а) О-диапазон 1,26-1,36 мкм



б) Е-диапазон 1,36-1,46 мкм



в) С-диапазон 1,53-1,565 мкм



г) L-диапазон 1,565-1,626 мкм.

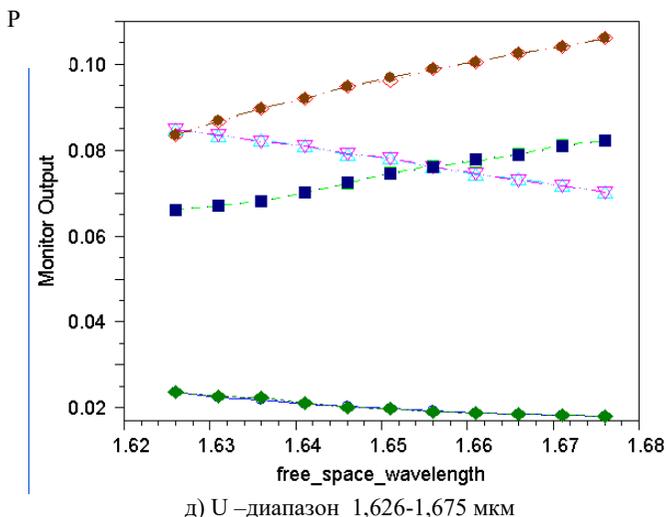


Рис. 3. Графики зависимости мощности в выходных каналах ответвителя от длины волны (О-диапазон 1,26-1,36 мкм, Е-диапазон 1,36-1,46 мкм, С-диапазон 1,53-1,565 мкм , L-диапазон 1,565-1,626 мкм и U –диапазон 1,626-1,675 мкм)

На рисунке 3 показано изменение мощности в выходных каналах разветвителя в зависимости от выбранного диапазона длин волн. Рассмотрен весь диапазон применяемый для работы волоконно-оптических систем.

Можно добиться необходимого уровня мощности в определенной паре каналов практически во всем диапазоне.

Работа разветвителя отличается стабильностью в О- и С-диапазонах. В С-диапазоне его можно применять как WDM-мультиплексор/демультиплексор, а в L-диапазоне как переключатель между 3-м, 6-м и 1-м, 8-м парами каналов. В S-, L- и U-диапазонах данный разветвитель может работать как переключатель между двумя парами каналов. В E-диапазоне длины волн ограничиваются значениями 1,41 мкм, так как наблюдается падение мощности в 1-м и 8-м каналах.

На рисунке 4 показано изменение мощности излучения выходных каналах разветвителя в зависимости от показателя преломления покрытия.

При изменении показателя преломления покрытия от 1 до 2,5 мощность изменяется незначительно, при увеличении показателя преломления от 2,5 до 3 происходит увеличение мощности в 1,8 каналах,

спад мощности в 3, 6 каналах. Дальнейшее увеличение показателя преломления приводит к резкому падению значений практически до нуля.

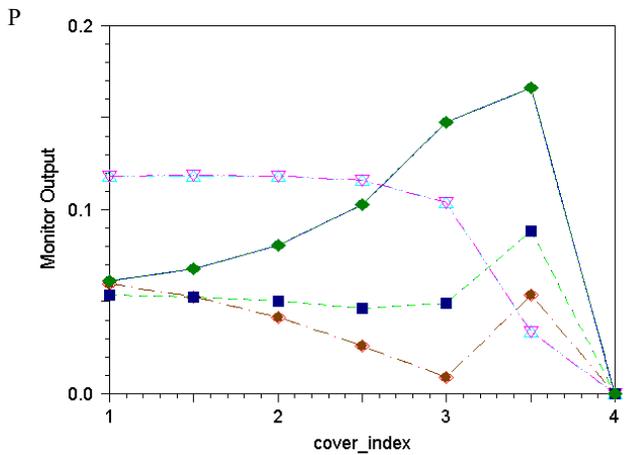


Рис. 4. График зависимости мощности в выходных каналах разветвителя от показателя преломления покрытия

Применение оптических интегральных схем позволяет создавать полностью оптические сети (AON), в которых коммутация информационных потоков производится путем переключения каналов без фотоэлектрического преобразования. [2]

Дальнейший рост оптических сетей и совершенствование технологий производства оптических разветвителей должны еще больше увеличить их роль в телекоммуникационной отрасли.

### Литература

1. Интегральная оптика, под ред. Т. Тамира, - М.:Мир, 1978.
2. А.С. Семенов, В.Л. Смирнов, А.В, Шмалько, Интегральная оптика для систем передачи и обработки информации. – М.:Радио и связь, 1990.

© Лопатюк А.В., Грачева А.М., 2019 г.

## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ МЕТОДОМ ВАНГА-ЛАНДАУ

Магомедов М.А.<sup>1,2</sup>, Исаева М.М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт физики ДНЦ РАН, г. Махачкала, Россия

<sup>2</sup> Отдел математики и информатики ДНЦ РАН, г. Махачкала, Россия

В данной работе нами проведены высокоточные исследования двумерной модели Поттса на гексагональной решетке с числом состояний  $q = 3$  с учетом взаимодействия как первых, так и вторых ближайших соседей. Величина и знак обменного взаимодействия между первыми соседями  $J_1$  и вторыми соседями  $J_2$  играют основополагающую роль в характере поведения модели. Нами проведены исследования при различных соотношениях  $J_1$  и  $J_2$  для выяснения степени их влияния на термодинамические свойства системы

Гамильтониан модели может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \text{Cos} \theta_{i,j} - J_2 \sum_{\langle i,k \rangle} \text{Cos} \theta_{i,k}, \quad (1)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – параметры обменных взаимодействий для ближайших и вторых ближайших соседей соответственно.  $\theta_{i,j}$ ,  $\theta_{i,k}$  – углы между взаимодействующими спинами  $S_i - S_j$  и  $S_i - S_k$  соответственно. Значение обменного взаимодействия фиксировалось равным  $J_1 = 1$  или  $J_1 = -1$ , а значение  $J_2$  менялось в широком диапазоне значений.

Для исследования модели нами использован алгоритм Ванга-Ландау метода Монте-Карло [1]. Алгоритм Ванга-Ландау основан на том, что совершая случайное блуждание в пространстве энергий с вероятностями, обратно пропорциональными плотности состояний  $g(E)$ , мы получаем равномерное распределение по энергиям. Подобрав вероятности перехода такими, что посещение всех энергетических состояний стало бы равномерным, можно получить изначально неизвестную плотность состояний  $g(E)$ , зная которую можно вычислить значения различных термодинамических параметров при любой температуре. В работе нами рассчитаны плотности состояний для модели Поттса на гексагональной решетке при различных соотношениях обменных взаимодействий, определены магнитные упорядоченные структуры основного состояния и построена фазовая диаграмма.

### Литература

1. Landau D.P., Tsai S.-H., Exler M. A new approach to Monte Carlo simulations in statistical physics: Wang-Landau sampling, Am. J. Phys., 2004. V. 72(10): p. 1294-1302.

© Магомедов М.А., Исаева М.М., 2019 г.

## О ПОЛОЖЕНИИ ЗВЕЗД, ИОНИЗУЮЩИХ ТУМАННОСТИ, НА ИНФРАКРАСНЫХ ДИАГРАММАХ

Плотникова А.Н., Соболев А.М.  
УрФУ, г. Екатеринбург, Россия

Молодые звездные объекты – звезды на ранних этапах эволюции, переходный этап от газопылевого облака к звездам главной последовательности. Это только что образовавшиеся молодые объекты, начавшие ионизировать вокруг себя вещество, образуя в следствие этого процесса туманности.

Молодые звезды обычно классифицируют по критерию, основанному на наклоне распределения энергии в спектре и введённому Ч. Лада в 1987 году. Он предложил делить объекты на три класса (I, II и III) в соответствии со значением спектрального индекса  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{d \log(\lambda F_\lambda)}{d \log \lambda}$$

Здесь  $\lambda$  обозначает длину волны,  $F_\lambda$  — плотность потока излучения.

I классу объектов свойственно наличие большого количество околосредного вещества, это только что образовавшиеся молодые звезды. Также им характерно присутствие межзвездного вещества, так как образование звёзд происходит в газопылевом облаке.

II и III класс находятся на следующей ступени эволюции. Околосредного вещества у этих объектов становится меньше, так как излучение звезды разгоняет окружающую материю. Межзвездное вещество на данном этапе не испытывает сильных изменений по сравнению со звездами I класса.

Значение  $\alpha$  вычисляется в интервале длин волн 2,2–20 мкм (область ближнего и среднего инфракрасного излучения). Область, в которой излучают сами молодые звезды, а также ионизированное вещество, содержащееся в их окружении.

Поэтому для изучения данного типа объектов нами выбраны данные из каталога точечных источников всего неба WISE. Данный каталог составлен по наблюдениям одноименного космического телескопа WISE.

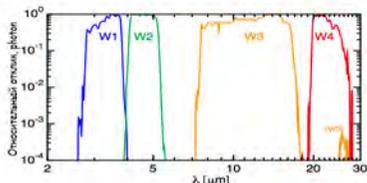
Главной задачей WISE является полный обзор неба в четырёх ИК-диапазонах в поисках таких объектов как: ультраяркие инфракрасные галактики, коричневые карлики, астероиды и кометы, сближающиеся с Землёй. Отличия и особенности источников в различных областях излучения дают возможность их дифференциации и дальнейшего исследования. Данный космический телескоп производил обзор всего неба в четырех длинах волн для которых характерно:

полоса W1 — 3,4 мкм — теплового изучения звёзд и галактик;

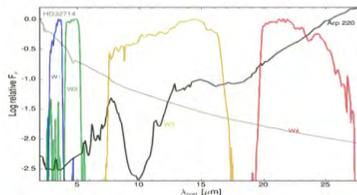
полоса W2 — 4,6 мкм — обнаруживает инфракрасное излучение дозвёздных объектов, например, таких как коричневые карлики;

полоса W3 — 12 мкм — обнаруживает тепловое излучение от астероидов;

полоса W4 — 22 мкм — изучения области образование звёзд (материал с температурами 70-100 Кельвинов: пыль в области звездообразования).



*Рис. 1. Средневзвешенные относительные спектральные функции отклика после нормирования до максимального значения единицы в логарифмическом масштабе*



*Рис. 2. Пример распределения излучения звезды (серая кривая) и активного ядра галактики (черная кривая) на длинах волн, в которых проводилось наблюдение спутника WISE*

Длины волн, наблюдаемые выбранным нами спутником, соответствуют диапазону, свойственному для изучения молодых звездных объектов (2,2–20 мкм.). Еще одним плюсом спутника WISE является тот факт, что им был сделан обзор всего неба, а значит мы сможем получить возможность изучать молодые звездные объекты из областей, не попавших в программы наблюдения других инфракрасных спутников.

Применимо к нашим объектам, на первых полосах W1 и W2 преимущественно излучение самой молодой звезды, а на более длинноволновых W3 и W4 большой вклад дает излучение окружающего вещества. Следовательно, по смещению положения звезды на двухцветной диаграмме в длинноволновую область можно судить о вкладе в фотометрические показатели околозвездного и межзвездного вещества. А по положению самой звезды можно судить о том, к какому типу она относится.

Для исследования нами выбраны объекты, представленные в работе В.С. Аведисовой и Г.И. Кондратенко . Целью этой работы было определение фотометрического расстояния до диффузных туманностей по звездам возбуждения этих туманностей, как уже известных в литературе, так и выявленных по фотометрическим и спектральным каталогам, имеющимся в Центре астрономических данных

астрономического совета АН СССР. Эти звезды являются молодыми звездными объектами II и III классов. Звезды, уже начавшие разгонять околозвездное вещество. Об этом свидетельствует наличие излучения от этих источников в оптическом диапазоне. Наличие большого объема околозвездного вещества, окружающего звезду, будет влиять на интенсивность проходящего сквозь окружающее вещество излучения, иными словами, околозвездное вещество будет поглощать излучение звезды с разной степенью в зависимости от длин волны источника. Поглощение тем сильнее, чем меньше длина волны излучения. Следовательно, звезда, излучающая в оптическом диапазоне, уже смогла избавиться от части околозвездного вещества.

### Основные этапы исследования

Целью данной работы является определить положение сгущения(ий) молодых звездных объектов на инфракрасных диаграммах (W1-W2, W2-W3) и изучить влияние вещества, окружающего звезду, на ее положение и смещение относительно основного(ых) сгущения(ий).

Для достижения поставленной задачи из работы В.С. Аведисовой и Г.И. Кондратенко был взят список источников, ионизирующих туманности. Далее на основе данных каталога точечных источников инфракрасных обзоров всего неба WISE были построены диаграммы, по осям которых отложены показатели цвета:

$$W_i - W_j$$

где  $W_i$  – звездная величина звезды при наблюдении ее в соответствующей полосе спутника WISE.

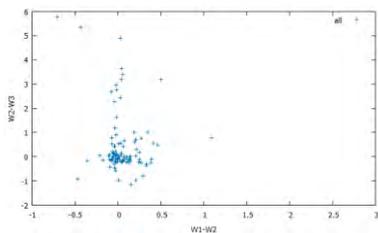


Рис. 3. Двухцветная диаграмма, построенная на основе данных о всех исследуемых источниках

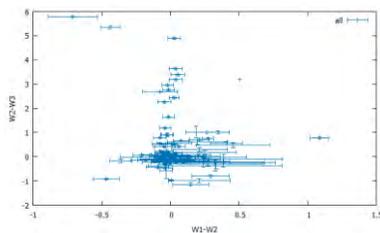


Рис. 4. Двухцветная диаграмма, построенная на основе данных о всех исследуемых источниках с погрешностями

А также были рассчитаны погрешности и нанесены на диаграмму (рис. 4), что позволило нам проверить точность полученной картины и

дало возможность продолжать дальнейшее исследование распределения звезд.

На полученной диаграмме (рис. 5) мы видим сгущение объектов (локус) в определенной области диаграммы. А также вертикальную линейную тенденцию к смещению для некоторого числа звезд.

Далее мы раскрасили полученную диаграмму в соответствии с показателем цвета W3-W4 (рис. 6), чтобы посмотреть на изменение излучения источников в более длинноволновой области. А также для того, чтобы сравнить смещение по показателю цвета W2-W3 со смещением по показателю цвета W3-W4.

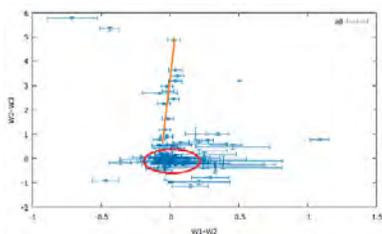


Рис. 5. Двухцветная диаграмма, построенная на основе данных о всех исследуемых источниках с погрешностями. Красным овалом обозначено сгущение. Оранжевая прямая выделяет вертикальную тенденцию к смещению

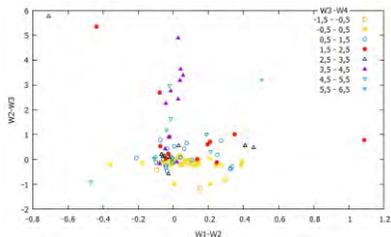
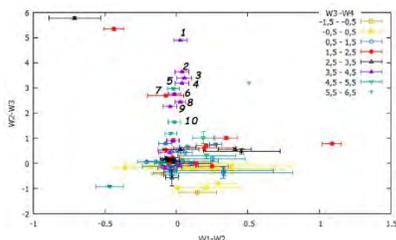


Рис. 6. Двухцветная диаграмма, раскрашенная в соответствии с показателем цвета W3-W4. Здесь объекты разбиты на 8 групп, каждой из которых соответствует определенный диапазон показателя цвета W3-W4

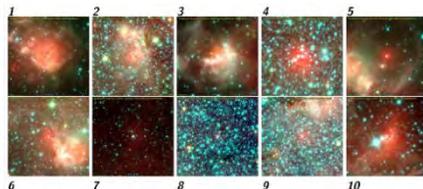
По данным наблюдениям нами было высказано предположение о том, что основное место сгущения объектов является областью, характерной для молодых звездных объектов. Другими словами, звезда, попавшая в данный локус на диаграмме может претендовать на принадлежность к молодым звездным объектам. А вертикальное смещение вызвано наличием вокруг выбранных нами молодых звездных объектов I и II классов межзвездного вещества. Так как смещение направлено в более длинноволновую область (звездная величина W2 больше звездной величины W3, из этого следует, что излучение в полосе W2 слабее, чем в W3 (звездная величина является обратной физической величиной)). Также это подтверждает раскраска по третьему показателю цвета W3-W4. Звезды, имеющие больший третий показатель цвета расположены преимущественно над центром сгущения.

Это предположение было проверено нами с помощью снимков со спутников. Мы взяли трехцветное изображение каждой звезды с

космического телескопа WISE и проанализировали снимки с точки зрения наличия излучения того или иного типа объектов (молодая звезда, околозвездное вещество, межзвездное вещество).



*Рис. 7. Двухцветная диаграмма, построенная на основе данных о всех исследуемых источниках. Раскрашена в соответствии с показателем цвета W3-W4 с погрешностями. Здесь пронумерованы звезды, составляющие вертикальное линейное отклонение*



*Рис. 8. Снимки звезд вертикальной тенденции с космического телескопа WISE. Синий цвет соответствует излучению на длине волны W1 – 3,4 мкм, зеленый – W2 – 4,6 мкм, красный – W3 – 12 мкм. Разрешение изображений около 20' x 20'*

По данным снимкам можно удостовериться, что с уменьшением порядкового номера изображения (с увеличением показателя цвета W2 – W3) излучение на длине волны 12 мкм областей, имеющих отношение к межзвездному веществу, увеличивается. Околозвездное вещество на данных снимках не разрешается, его положение совпадает с областью излучения самой звезды. Межзвездное вещество находится в радиусе  $\approx 1/10$  представленных изображений (на снимке 5 оно явно выделяется относительно других источников излучения (раскрашено красным цветом)).

Также нами были проверены источники на диаграмме, не попавшие в две выделенные нами группы.

Из изображений видно, что эти звезды относятся к аномальным объектам. На 1 и 5 снимке источники находятся в области «пересветки» снимка, иными словами данная область изображения непригодна для проведения фотометрии, так как в данной области пространства на луче зрения находится объект, обладающий высокой, по сравнению с окружающими объектами, интенсивностью излучения. На 4 и 6 звезды выглядят как визуально двойные, т. е. изображение одного объекта на снимке наслаивается на изображение второго. На 2 и 3 звезда соседствует с ярким по сравнению с ней самой объектом, который искажает ее

фотометрические показатели. Из этого можно сделать вывод, что подобные объекты мы имеет право исключить из нашего исследования в следствие несоответствия качеству требуемых данных. Представленные случаи являются нестандартными и требуют дополнительного исследования и использования дополнительных методов анализа.

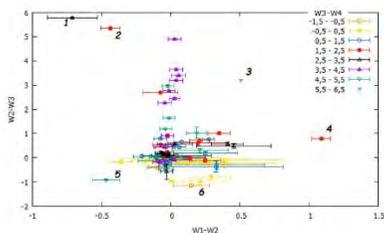


Рис. 9. Двухцветная диаграмма на основе данных о всех исследуемых источниках. Раскрашена в соответствии с показателем цвета  $W3-W4$  с погрешностями. Здесь пронумерованы звезды, имеющие аномальное отклонение.

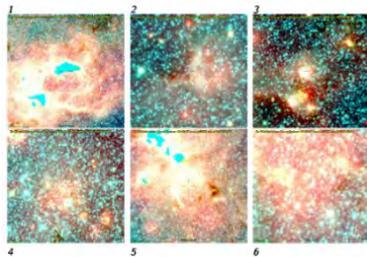


Рис. 10. Снимки звезд (WISE), имеющих аномальное отклонение. Синий цвет соответствует излучению на длине волны  $W1 - 3,4$  мкм, зеленый –  $W2 - 4,6$  мкм, красный –  $W3 - 12$  мкм. Разрешение изображений около  $45' \times 45'$

На следующем этапе мы проверили по снимкам с космического телескопа WISE все оставшиеся звезды, представленные на диаграмме, на предмет наличия какого-либо окружающего звезду вещества или иных объектов, способных повлиять на фотометрические показатели. На них не было выявлено наличия яркого межзвездного вещества.

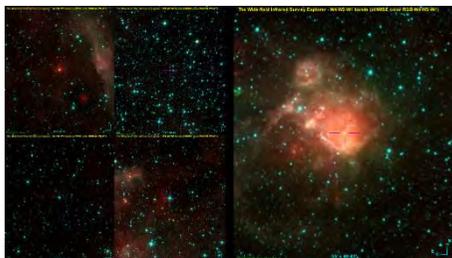


Рис. 11. Слева представлены случайные снимки звезд основного сгущения. Справа для сравнения представлен снимок звезды, принадлежащей вертикальной тенденции. Разрешение изображения около  $35' \times 40'$

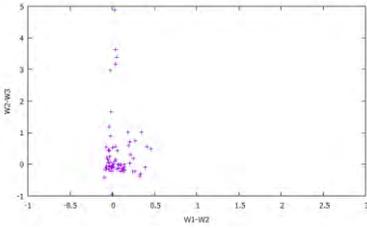


Рис. 12. Двухцветная диаграмма без звезд, относящихся к исключениям

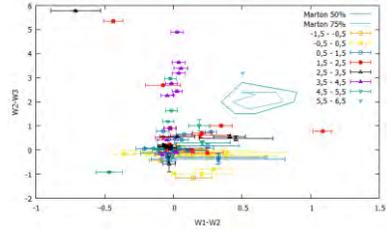


Рис. 13. Сравнительная двухцветная диаграмма

Исключив визуально двойные и другие звезды, находящиеся в пространственной ситуации, искажающей фотометрические данные, мы получили диаграмму (рис. 12), на которой четко видно основное сгущение молодых звезд и вертикальная линейная тенденция.

На заключительном этапе нами было проведено сравнение полученных результатов с данными, представленными в статье G. Marton с соавторами о молодых звездных объектах I класса, имеющих по сравнению со II и III классами, большое количество околозвездного вещества.

На диаграмме видно, что отклонение молодых звездных объектов I класса отличается от выявленной нами тенденции для II и III классов, это объясняется тем, что в искажение фотометрии этих молодых звезд добавляет свой вклад околозвездное вещество, которое излучает на более коротких длинах волн, чем межзвездное, что дает возможность влиять на яркость звезды на длине волны  $W2 - 4,6$  мкм. За счет чего звезда сдвигается по диаграмме не только вверх, но еще и вправо.

### Заключение

Нами было проведено исследование положения звезд, ионизирующих туманности, на двухцветных диаграммах на основе данных из каталога точечных источников всего неба WISE. Было определено место концентрации молодых звезд. Также было определено влияние околозвездного и межзвездного вещества на фотометрические показатели источников и соответственно на положение звезд на диаграмме. Межзвездное вещество смещает звезду на двухцветной диаграмме вверх, т. е. к излучению звезды на длинах волн около  $W3 - 12$  мкм добавляется излучение межзвездного вещества. Данный вид смещения характерен для молодых звездных объектов всех трех классов. Околозвездное вещество начинает излучать на длинах волн около  $W2 - 4,6$  мкм, что искажает фотометрию молодых звездных объектов I класса (т. к. только им

свойственно наличие околозвездного вещества), что смещает их положение на диаграмме вправо.

На основе этих результатов можно судить о типе и окружающем веществе других объектов. По их положению на двухцветной диаграмме можно определить какой вклад в фотометрию дает околозвездное и межзвездное вещество, а, следовательно, и к какому классу можно отнести звезду.

### **Обозначения и сокращения**

Околозвездное вещество – вещество, находящееся в непосредственной близости к звезде и имеющее возможность стать ее частью вследствие аккреции.

Межзвездное вещество – вещество также расположенное достаточно близко к молодой звезде, но уже не имеющее возможности гравитационного падения на нее.

Wide-Field Infrared Survey Explorer, или WISE - инфракрасный космический телескоп НАСА.

© Плотникова А.Н., Соболев А.М., 2019 г.

**ВЛИЯНИЕ АЦЕТОНА И ЭТИЛОВОГО СПИРТА НА  
ПРОВОДИМОСТЬ ПЛЕНОК  
ПОЛИДИФЕНИЛЕНФТАЛИДА (ПДФ)**

Рахматова Л.И., Юсупов А.Р.

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М.Акумлы, г. Уфа, Россия

**Введение**

В работе [1] впервые было проведено обобщение большого объема экспериментальных и теоретических результатов, полученных на органических материалах. В частности указана идентичность в электронных свойствах, связанная с наличием групп ловушек приписываемых кислороду. Существенное влияние кислородосодержащих соединений на свойства органических материалов в основном связывают с наличием данной группы ловушек [2]. Так, например, роль кислородной ловушки на свойства электролюминесценции в пленках ПДФ обсуждается в работе [3]. Экспериментально [3] была получена энергия, соответствующая группе ловушек, возникающих при наличии кислорода. Возникает вопрос, как меняются электропроводящие свойства тонких пленок полимерного диэлектрика в атмосфере кислородосодержащих соединений? Для решения данной задачи в работе было изучено влияния ацетона и этилового спирта на электропроводящие свойства пленок ПДФ.

**Объекты и методы исследования**

В качестве объекта исследования в работе был выбран ПДФ, известный своей устойчивостью к агрессивной среде. Для изучения влияния паров ацетона и спирта использовалась методика CELIV (Charge Extraction by Linearly Increasing Voltage:) [4]. Методика измерения указана на рисунке 1. На образец подается линейно увеличивающееся напряжение (рис.1.а) и регистрируется переходный ток (рис.1.б). Кривая переходного тока состоит из двух составляющих: 1) емкостной ток ( $j_0$ ) определяемый геометрией экспериментального образца; 2) ток экстракции  $dj$  создаваемый вытягиваемыми носителями заряда.

В работе были использованы экспериментальные образцы сэндвич структуры следующего вида  $Sb$ -ПДФ- $SiO_2$ - $Si$ - $Sb$  и контрольный образец  $Sb$ - $SiO_2$ - $Si$ - $Sb$ . Выбор сурьмы обусловлен её устойчивостью к окислению по сравнению с  $Al$ . Кроме того работы выхода  $Al$  и  $Sb$  наиболее близки по значению. Измерения проводились в объеме эксикатора, в который последовательно вводилась микропорция органических веществ.

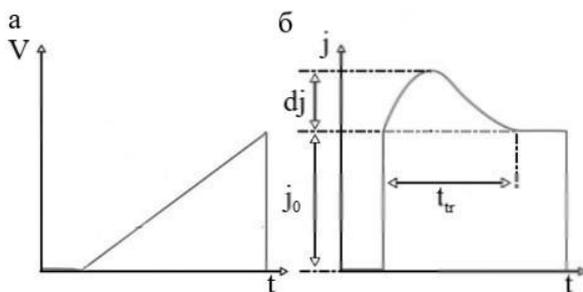


Рис. 1. Методика CELIV:V –приложенное напряжение,  $j$ - переходный ток

### Полученные результаты

На рисунке 2 представлены кривые переходного тока, полученные на экспериментальных образцах. Из рисунка видно, что форма кривых переходного тока существенно зависит от структуры исследуемого образца. В частности, в случае структуры  $Sb-SiO_2-Si-Sb$  наблюдается ярко выраженный максимум (рис.2.а). Однако, при изменении концентрации ацетона в измерительной камере, изменения на кривых переходного тока наблюдаются только на образцах с пленкой ПДФ (рис.2.б).

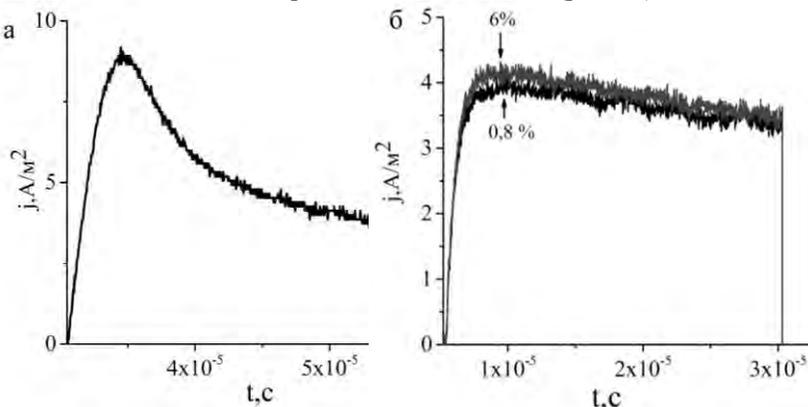


Рис. 2. Кривые переходного тока в структурах  $Sb-SiO_2-Si-Sb$  и  $Sb/Si/ПДФ/Sb$  при наличии паров ацетона

Анализ подвижности носителей заряда по кривым переходного тока показал, что величина подвижности не меняется и составляет  $\sim 10^{-5}$   $cm^2/Vs$ , что хорошо согласуется с ранее полученными результатами [5]. Поэтому, для определения влияния органических растворителей на свойства пленок ПДФ были построены зависимости максимального тока

экстракции от концентрации вещества в атмосфере измерительной камеры. На рисунке 3 представлены полученные результаты в атмосфере ацетона и этилового спирта. Влияние ацетона на ток экстракции не значительно и приводит к изменению в пределах  $0,2 \text{ A/m}^2$ , в то же время этиловый спирт оказывает существенное воздействие в пределах  $1,5 \text{ A/m}^2$ . Наблюдается (рис.3) разный характер изменения зависимости тока экстракции от концентрации вещества. Так для этилового спирта зависимость нелинейна в отличие от ацетона.

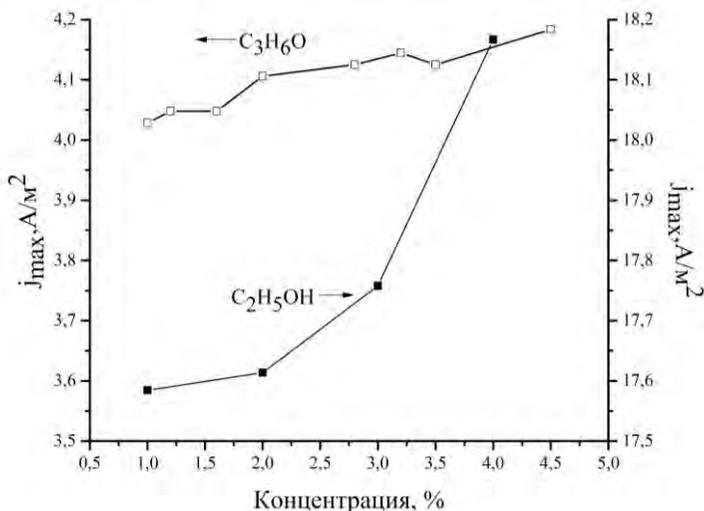


Рис. 3. График зависимости максимального тока экстракции от концентрации ацетона и этанола

### Заключение

Воздействие паров органических растворителей на пленки ПДФ дает практически аналогичные результаты: возрастание объемной доли ацетона и этилового спирта приводит к увеличению максимального тока экстракции. Однако, в работе было установлено ток экстракции при одних и тех же концентрациях исследуемых веществ изменяется поразному: чувствительность экспериментального образца на пары этилового спирта значительно выше, чем в среде с ацетоном. По-видимому, основной вклад в величину максимального тока экстракции оказывает гидроксильная группа (ОН) этанола [6]. Известно, что группа С-О-С фталидного фрагмента молекулы ПДФ при взаимодействии с группой ОН образует комплекс с переносом заряда. Этот комплекс образуется вследствие того, что при попадании на полимерную пленку молекулы этилового спирта происходит захват группы ОН, так как

группа С—О—С обладает сильно выраженными акцепторными свойствами.

Таким образом, было установлено влияние паров ацетона и этанола на электропроводность пленок полидифениленфталата, исследованных методом CELIV, что позволяет использовать данную методику для изучения свойств полимерного диэлектрика при внешнем воздействии.

### Литература

1. Nicolai T, Kuik M. G, Wetzelaer A. H. Unification of trap-limited electron transport in semiconducting polymers /Nature materials №882 Vol 11 (2012).
2. Vitoratos E., Sakkopoulos S., Paliatsas N. Differentiation of the Aging Process of PEDOT:PSS Films under Inert Helium and Ambient Atmosphere for Two Different Rates of Thermal Treatment /Open Journal of Organic Polymer Materials, 2, 7 (2012)
3. Накаряков, А.С, Лачинов, А.Н, Пономарев, А.Ф. Оценка энергетического распределения ловушечных состояний в полимерных пленках / Физика и техника полупроводников .– 2011. – №12 – С. 2397-2402.
4. Jucka G, Arlauskas K, Vilinas M. Extraction Current Transients: New Method of Study of Charge Transport in Microcrystalline Silicon/Physical Review Letters, 84, 4946 (2000).
5. Тамеев А.Р, Рахмеев Р.Г., Никитенко В.Р. Влияние избыточного давления на дрейфовую подвижность носителей заряда в пленках полидифениленфталата/Физика и техника полупроводников .– 2011. – №1 – С. 182-186.
6. Карпова, С.С. Исследование влияния кислотно-основных свойств поверхности оксидов ZnO, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ZnFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> на их газочувствительность по отношению к парам этанола/С.С. Карпова, В.А Мошников, А.И. Максимов, С.В. Мякин, Н.Е. Казанцева/Физика и техника полупроводников. – 2013. – №8 – С.1022-1026.

© Рахматова Л.И., Юсупов А.Р., 2019 г.

УДК 537.622:537.326

## **ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ КВАЗИДВУМЕРНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ, НА ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛИМЕРНОЙ ПЛЕНКИ**

Рахматуллина Э.Р., Лачинов А.Н.

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

### **I. Введение**

Со времени открытия электролюминесценции в органических материалах в 1990 году количество работ в этой области постоянно увеличивается. Это связано широким применением органических светоизлучающих диодов (OLED-ов) как элементов экранов и осветительных приборов. В последние годы активно используются многослойные структуры с большим количеством границ раздела.

Впервые необычные свойства границы раздела двух органических материалов были обнаружены в 2008 году. [1, 423] Авторами было предложено объяснение этих явлений на основе гипотезы о формировании на границе раздела двумерного электронного газа.

Немного позже на границе раздела двух пленок полидифениленфталата (ПДФ) была обнаружена аномально высокая проводимость. [2] Совокупность полученных в ходе исследования данных, таких как наличие четкой границы между полимерными пленками, металлический тип проводимости и наличие полевого эффекта дали основание предположить наличие квазидвумерного электронного газа на интерфейсе полимерных диэлектриков. Однако остается не выясненным вопрос о влиянии границы раздела на структуру с биполярной инжекцией заряда при транспорте в направлении квантового ограничения.

В связи с этим, целью настоящей работы являлось исследование влияния положения границы раздела двух полимерных диэлектриков относительно электродов на проводимость структуры ITO-полимер-Al.

### **II. Объекты и методы исследования**

Объектом исследования был выбран полимер класса полиариленифталатов – полидифениленфталат (ПДФ). Свойства данного полимера описаны в работе. [3]

Химическая структура мономерного звена полимера показана на рис. 1а. (а).

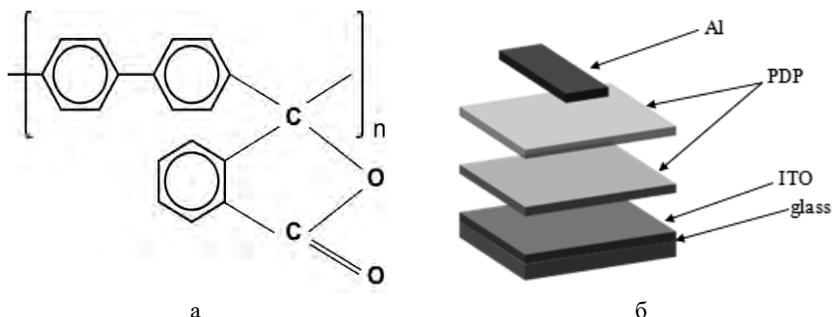


Рис. 1. а. Химическая структура ПДФ, б. Структура экспериментального образца

Образцы для измерений представляли собой многослойную структуру, в которой роль инжектора дырок играл слой из смеси окислов индия и олова (ИТО), нанесенный на поверхность стеклянной пластины, полимерная пленка содержащая границу раздела вида полимер-полимер и металлический электрод из алюминия, игравший роль инжектора электронов. Структура образцов схематично представлена на рис. 1 (б). Полимерные пленки отливались из раствора в циклогексаноне методом центрифугирования. Для удаления остатков растворителя пленку сначала сушили при комнатной температуре 30 min, далее при температуре 150 - 200°C в вакууме в течение 60 min. Алюминиевый электрод осаждался методом термодиффузионного напыления в вакууме.

В работе были использованы следующие структуры ИТО-PDP(0.5%)-PDP(5%)-Al (образец №1); ИТО-PDP(0.7%)-PDP(5%)-Al (образец №2); ИТО-PDP(1.5%)-PDP(3%)-Al (образец №3); ИТО-PDP(3%)-PDP(1,5%)-Al (образец №4); ИТО-PDP(5%)-PDP(0,7%)-Al (образец №5); ИТО-PDP(5%)-PDP(0,5%)-Al (образец №6).

Блок-схема измерительной установки для регистрации вольт-амперных характеристик при комнатной температуре представлена на рис. 2.

Толщина и однородность полимерных пленок контролировалась с помощью атомно-силового микроскопа СММ-2000Г. Толщины полимерных пленок подбирались таким образом, чтобы граница раздела полимер/полимер последовательно перемещалась от одного электрода к другому. Толщина полимерных пленок регулировалась концентрацией раствора полимера. Эксперимент был выстроен таким образом, что граница раздела «сдвигалась» в направлении от ИТО к Al. Для повышения достоверности полученных результатов измерения для каждого типа образцов проводились от 3 до 5 раз.

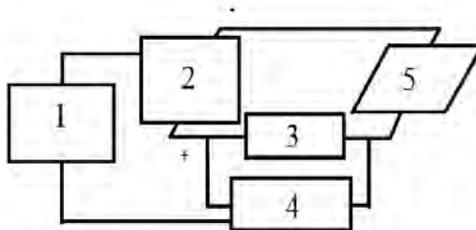


Рис. 2. Блок-схема измерения вольт-амперных характеристик: 1 – Персональный компьютер, 2 – источник постоянного напряжения GW INSTЕК, 3 – эталонное сопротивление (100 кОм), 4 – мультиметр AGILENT 34401A, 5 – экспериментальный образец(ITO-PDP-PDP-Al)

### III. Результаты измерений

На рис. 3 показаны ВАХ соответствующие различным положениям границы раздела полимер-полимер. ВАХ образца №1 схожа с ВАХ монослойного образца, и также имеет нелинейную форму (рис.4, образец №1). По мере отдаления границы раздела от ITO, вольт-амперные характеристики приобретают линейный характер (рис.4, образцы №2, 3, 4). При расположении границы раздела ПДФ-ПДФ вблизи Al (рис.4, образец №5), ВАХ также имеют нелинейный характер.

На рис. 4 изображен график зависимости максимальных токов при 20 В в зависимости от расположения границы раздела полимер/полимер в структуре ITO-полимер-Al. Для структуры №1 это значение составляет  $I \approx 2 \cdot 10^{-10}$  А, для №2 максимальный ток возрастает  $I \approx 4,6 \cdot 10^{-6}$  А, для №3  $I \approx 3 \cdot 10^{-4}$  А, для №4  $I \approx 5 \cdot 10^{-4}$  А, для №5  $I \approx 2,8 \cdot 10^{-4}$  А, для №6  $I \approx 1,5 \cdot 10^{-9}$ .

### IV. Обсуждение результатов

Таким образом, полученные результаты говорят о том, что максимальные токи в образцах протекают при большем удалении границы раздела от Al. Когда граница раздела расположена практически по середине образца, наблюдается максимальный ток. Далее при приближении границы к ITO показатели токов падают. Полученные данные говорят о том, что расположение границы раздела полимер/полимер влияет на протекание тока в образце и, соответственно, на условия рекомбинации.

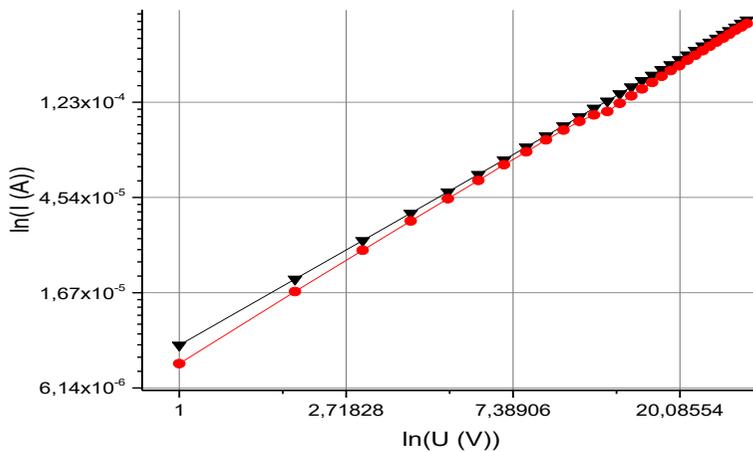
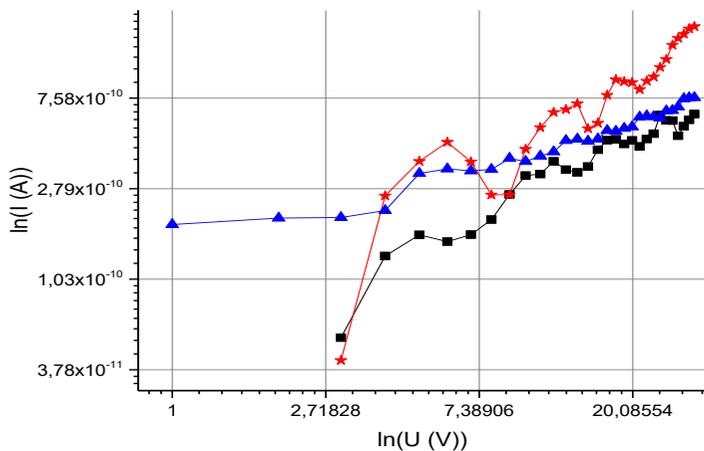


Рис. 3. Вольт-амперные характеристики в логарифмических координатах структур с различным положением границы раздела полимер-полимер: —■— образец №1, —★— образец №2, —▼— образец №3, —●— образец №4, —▲— образец №5

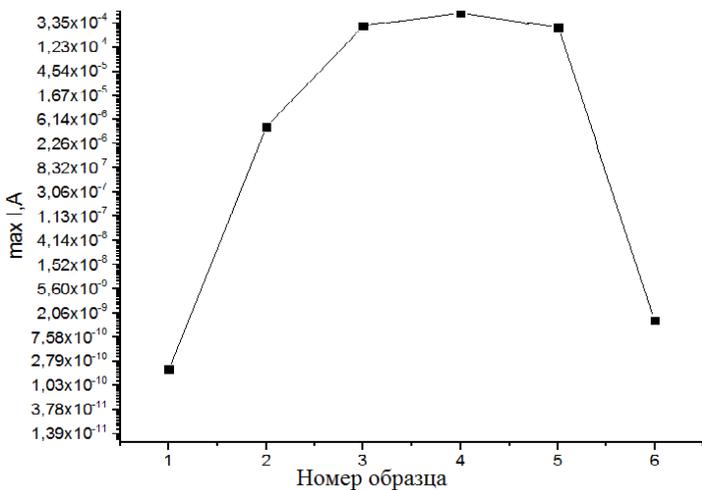


Рис. 4. Зависимость максимальных токов от положения границы раздела полимер/полимер

*Выражаем благодарность за помощь в проведении экспериментов Амину Киану и Сергею Лежневу.*

### Литература

1. A.Ohtomo and H.Y.Hwang, Nature 427 (2004)
2. Р.М.Гадиев, А.Н.Лачинов, В.М.Корнилов, Р.Б.Салихов, Р.Г.Рахмеев, А.Р.Юсупов. Письма в ЖЭТФ, том 90, вып.11, с.821-825, 2009г.
3. С.Н. Салазкин. Высокомолекулярные соединения, серия Б, Т. 46, № 7, С. 1244 (2004).

© Рахматуллина Э.Р., Лачинов А.Н.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛА МОРСА В МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКЕ

Сафина Л. Р.<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Башкирский государственный университет, г. Уфа,<sup>2</sup>Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа.

Соединение полиморфов углерода с металлическими наночастицами, образующее гибридную систему «графен-наночастица» приводит к возникновению в системе ряда дополнительных уникальных физико-химических свойств. Углеродные наноматериалы/наноккомпозиты с включениями металлических частиц предлагается использовать для будущих высокопроизводительных электронных устройств, транзисторов, солнечных элементов и т. п. Одним из эффективных методов исследования структуры и свойств таких наноматериалов является моделирование. Метод молекулярной динамики (МД) считается одним из эффективных способов компьютерного моделирования физических процессов и явлений на атомарном уровне. С целью описания и исследования наноструктур методом МД необходимо задавать потенциалы межатомного взаимодействия для всех частиц. Одним из простых и при этом эффективных потенциалов межатомного взаимодействия является потенциал Морса. Он широко используется в моделировании различных материалов и соединений. В настоящей работе этот потенциал применялся для исследования систем углерод-никель.

Потенциал Морса записывается в следующей форме:

$$U^{\text{Ni-C}}(r) = D_e [(1 - e^{-\beta(r-R_e)})^2 - 1], \quad (1)$$

где  $r$  - расстояния между атомами,  $D_e$  - энергия разрыва связи,  $R_e$  - равновесная длина связи,  $\beta$  характеризует ширину потенциальной ямы (жесткость связи). Для описания взаимодействия атомов Ni-C использовались параметры  $D_e = 0.433$  eV,  $\beta = 3.244$  1/Å и  $R_e = 2.316$  Å, полученными методом *ab-initio* и предложенными в работе [1]. Для взаимодействия углерод-углерод используется межатомный потенциал AIREBO [2], который был разработан для изучения углеродных систем с различными типами ковалентных связей и используется в рамках программного пакета молекулярно-динамического моделирования LAMMPS. Этот потенциал был широко использован в моделировании механических свойств графена и графеновых нанолент [3,4], дискретных бризеров [5] и др.

Известно, что свойства наночастиц могут кардинально отличаться от свойств кристаллов того же элементного состава, но имеющих макроскопические размеры. Для определения зависимости температуры плавления наночастиц никеля от их размера, были изучены три типа

нанокластеров ( $\text{Ni}_{34}$ ,  $\text{Ni}_{382}$  и  $\text{Ni}_{1192}$ ). Были получены следующие температуры плавления:  $\text{Ni}_{34}$  (размер  $7.5 \text{ \AA}$ )  $T_{\text{пл}} = 1360 \text{ K}$ , для сравнения, точка плавления наночастицы  $\text{Ni}$  с размером  $6 \text{ \AA}$  оценивается как  $1173 \text{ K}$  [6];  $\text{Ni}_{382}$  и  $\text{Ni}_{1192}$  (размер  $20 \text{ \AA}$  и  $26 \text{ \AA}$ )  $T_{\text{пл}} \approx 2000 \text{ K}$ , что близко к температуре плавления объемного  $\text{Ni}$ . На основании этого далее будет рассматриваться наночастица  $\text{Ni}_{34}$ .

Далее рассматривалось взаимодействие наночастицы никеля с листом графена при температуре, превышающей температуру плавления наночастицы. При плавлении наночастицы никеля, происходит равномерное перераспределение атомов никеля по поверхности графена. Более того, возникает поверхностное натяжение и, как следствие, происходит изгиб графена, о котором ранее упоминалось [1].

Нанокластер  $\text{Ni}_{34}$  помещался в центр углеродной нанотрубки (УНТ) для того, чтобы исследовать его подвижность. В качестве исходных УНТ рассматривались УНТ кресло (11,11) диаметром  $15 \text{ \AA}$  и (21,21) диаметром  $30 \text{ \AA}$ . Пример исходной структуры показан на рис. 1а в проекции на плоскость  $xu$  и на рис. 1в в перспективе.

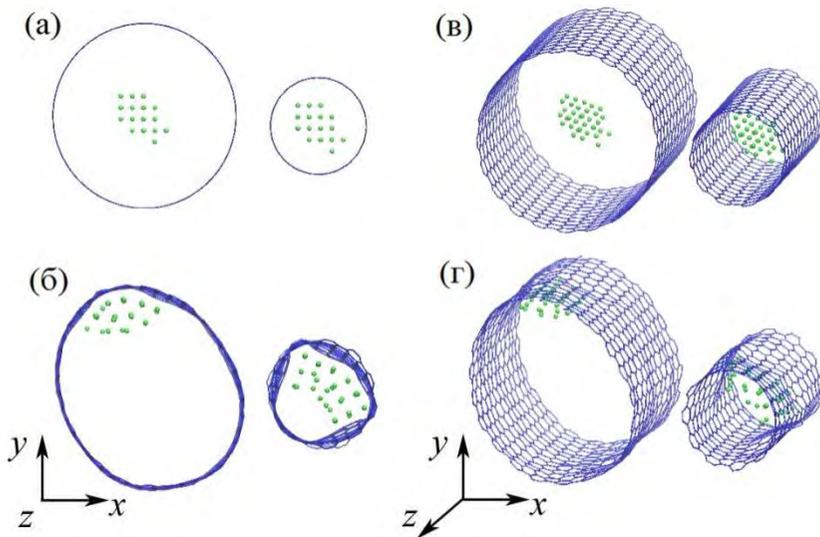


Рис. 1. (а,в) Исходная структура и (б,г) структура после релаксации в проекции на плоскость  $xu$  (а,б) и в перспективе (в, г)

В случае нанотрубки диаметром  $15 \text{ \AA}$  наночастица практически полностью вписывается в свободное пространство, при этом большая часть атомов  $\text{Ni}$  притягиваются к стенке УНТ, деформируя стенки УНТ.

Это свидетельствует об очень сильном взаимодействии между атомами никеля и углерода, поскольку нанотрубки имеют довольно жесткий каркас и не могут быть легко деформированы в отличие от листа графена.

В случае нанотрубки диаметром 30 Å происходит активное передвижение наночастицы внутри оболочки таким образом, чтобы достичь соединения со стенкой УНТ. В этом случае также наблюдается деформирование стенок нанотрубки, таким образом, чтобы подстроиться под форму наночастички. Следует отметить, что исходная форма наночастицы (область, вырезанная из ГЦК кристалла Ni) изменяется в обоих случаях, поскольку столь малое количество атомов никеля уже не могут поддерживать дальний кристаллический порядок.

Далее рассматривался лист графена с закрепленными краями в процессе релаксации (итоговая структура показана на рис. 2). Края графена были закреплены с помощью периодических граничных условий, то есть реализовался численный эксперимент, где наночастица Ni лежит на бесконечном листе графена. Такой вариант граничных условий был выбран поскольку это имитирует графен как оболочку (или как часть стенки огромной УНТ). В результате наблюдается поведение, аналогично предыдущему случаю: наночастица прикрепляется к листу графена. Чем дальше расположить частицу от листа, тем дольше она будет двигаться по направлению к нему, однако даже на расстоянии 10 Å силы взаимодействия между листом графена и частицей достаточно сильны. Лист графена изгибается в результате взаимодействия с частицей, как и оболочка нанотрубки.

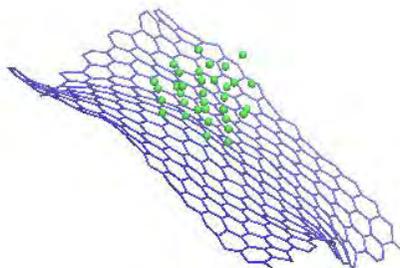


Рис. 2. Лист графена, с закрепленной на нем наночастицей Ni

В ходе проведенного моделирования было выявлено следующее:

- 1) Потенциал Морса с аккуратно подобранными параметрами может быть использован для изучения систем никель-графен;

2) Рассмотренные полиморфы углерода интенсивно контактируют с металлической наночастицей, а именно: происходит ее притяжение к поверхности графена или стенке нанотрубки;

3) Взаимодействие с наночастицей Ni приводит к деформации оболочки углеродной нанотрубки и листа графена.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для исследования объемных углеродных структур, содержащих наночастицы металла в порах.

*Авторы благодарят грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - докторов наук.*

### **Литература**

1. Katin, K.P., Prudkovskiy, V.S., Maslov, M.M. Molecular dynamics simulation of nickel-coated graphene bending // Micro and Nano Letters, 2018, v. 13, p. 160
2. Stuart, S.J., Tutein, A.B., Harrison, J.A.: A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions // J. Chem. Phys, 2000, v. 112(14), pp. 6472-6486.
3. Yang, X., Wu, S., Xu, J., Cao, B., To, A.C. Spurious heat conduction behavior of finite-size graphene nanoribbon under extreme uniaxial strain caused by the AIREBO potential. // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2018, v. 96, pp. 46-53.
4. Baimova J. A., Z.K. Liu : Folding and crumpling of graphene under biaxial compression. Letters on Materials, 2014, v. 4(2(14)), pp. 96-99
5. Murzaev, R.T., Bachurin, D.V., Korznikova, E.A., Dmitriev, S.V. Localized vibrational modes in diamond // Physics Letters, 2017, v. A 381(11), pp. 1003-1008.
6. Fukuhara, S., Shimojo, F., Shibuta, Y. Conformation and catalytic activity of nickel carbon cluster for ethanol dissociation in carbonnanotube synthesis: Ab initio molecular dynamics simulation // Chemical Physics Letters, 2017, v. 679, pp. 164-171.

© Сафина Л.Р., 2019 г.

# УСТОЙЧИВОСТЬ К ФАЗОВОМУ РАССЛОЕНИЮ СИСТЕМ ТИПА $La_{2-x}Sr_xCuO_4$

Шадрин А.В., Панов Ю.Д.

Уральский Федеральный Университет имени Б.Н.Ельцина  
г. Екатеринбург, Россия

## 1. Введение

Исследование устойчивости термодинамических систем при наблюдаемом фазовом расслоении является интересной задачей. Неоднородные состояния системы сложны для изучения, однако они включают в себе самые разнообразные свойства, например, сложные фазовые переходы, критические индексы, термодинамические показатели и т.д. Решение данной задачи позволяет хорошо описать поведение системы, выделить интересующие в конкретном случае параметры.

Конкретно в данной работе рассматривается спин-псевдоспиновая модель, введенная для описания конкурирующих зарядового и магнитного порядков в классе высокотемпературных сверхпроводников, а именно в купратах. Рассматривается разбавленный изинговский антиферромагнетик с фиксированным значением полного заряда немагнитных примесей. Для описания вводится псевдоспиновый формализм  $S = 1$  [1,2], которым описывается зарядовый триплет  $(0 \pm 1)$  в плоскостях  $CuO_2$  высокотемпературных сверхпроводников типа  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ . Возможные значения заряда на центрах ( $Cu O_4^{7-}$ ,  $Cu O_4^{6-}$ ,  $Cu O_4^{5-}$ ), номинально соответствующие  $Cu^{1+} - Cu^{2+} - Cu^{3+}$ , сопоставляются с тремя возможными проекциями псевдоспина  $S = 1$ . Проекция  $S = 0$  соответствует 2 магнитных состояния, обладающие обычным спином  $s = 1/2$ . Гамильтониан системы зависит от псевдоспинового взаимодействия внутри узла и между узлами, а именно от параметров отталкивания зарядов  $\Delta$  и  $V$ , а так же от обменного взаимодействия спинов  $J$ . Одним из интереснейших следствий является образование фазового расслоения "антиферромагнетик - зарядовая капля", при сильном спиновом обмене в сравнении с межузельным отталкиванием ( $J/V \gg 1$ ) [3].

Для решения задачи о моделировании системы используется алгоритм CUDA (Compute Unified Device Architecture) для видеокарт NVIDIA, где реализуются состояния решетки в соответствии с алгоритмом Метрополиса в классическом методе Монте-Карло при плавном понижении температуры вплоть до основного состояния. Метод позволяет получить термодинамические характеристики, необходимые для исследования системы.

## 2. Модель

Мы предлагаем модель [3], описывающую конкуренцию зарядового и магнитного порядков в плоскостях  $CuO_2$  высокотемпературных сверхпроводников типа  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$  (см. рис.1). 3 значения валентности  $Cu$  образуют зарядовый триплет  $Cu^{1+} - Cu^{2+} - Cu^{3+}$ , который мы сопоставляем с возможными проекциями псевдоспина  $S = 1$ . Состоянию  $S = 0$  соответствуют 2 магнитных состояния, описываемых спином  $s = 1/2$ . Гамильтониан системы описывается соотношением:

$$\hat{H} = \Delta \sum_i \widehat{S}_{iz}^2 + V \sum_{\langle ij \rangle} \widehat{S}_{iz} \widehat{S}_{jz} + J \sum_{\langle ij \rangle} \widehat{S}_{iz} \widehat{S}_{jz} (1 - \widehat{S}_{iz})(1 - \widehat{S}_{jz}),$$

где под знаком  $\langle ij \rangle$  подразумевается суммирование по ближайшим соседям. Первое слагаемое отвечает за кулоновское взаимодействие на одном узле, второе - за кулоновское отталкивание на соседних узлах, третье - за изинговское обменное взаимодействие так же на соседних узлах. Из формулы видно, что между узлами присутствует либо зарядовое взаимодействие, либо спин-спиновое (что полностью отвечает представлению о том, что проекция псевдоспина  $S = 0$  соответствует двум магнитным состояниям).

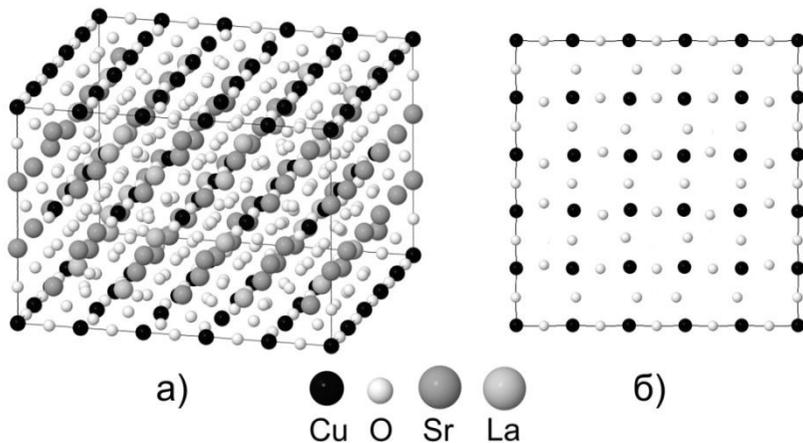


Рис. 1. а) Кристаллическая структура соединения  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ;  
б) Структура плоскости  $CuO_2$

Фазовые диаграммы основного состояния были исследованы в приближении среднего поля. Предсказанный результат антиферромагнитного упорядочения в основном состоянии в пределе сильного обмена сопоставлялся с результатами компьютерного

моделирования. Последнее показало, что наблюдаются 2 фазовых перехода при параметрах системы  $\Delta = 0.3, V = 0.1, J = 1, n < 0.5$  при понижении температуры: сначала происходит переход из неупорядоченного состояния (НУ) в антиферромагнетик (АФМ) с вкраплением маленьких зарядовых областей, затем эти области сливаются в одну большую зарядовую каплю, расположенную в антиферромагнитном окружении.

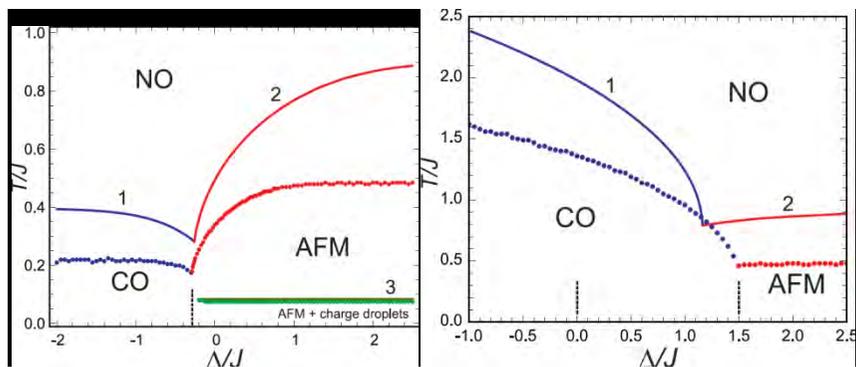


Рис. 2. Сплошными линиями представлен расчет в приближении среднего поля (ПСП), точками – результаты компьютерного моделирования. Слева – фазовая диаграмма  $T - \Delta$  для параметров  $n = 0.1, J = 1, V = 0.1$ . Наблюдается образование зарядовой капли при понижении температуры при параметре  $\Delta > -0.2$ . Справа – фазовая диаграмма  $T - \Delta$  для параметров  $n = 0.1, J = 1, V = 1$ . Образование зарядовой капли не наблюдается

Так же, с помощью численного эксперимента, была построена фазовая диаграмма  $T - n\phi$  (см. рис.2, слева), показывающая, какие конфигурации наблюдаются при изменении температуры и концентрации заряда. Интересующая нас область выделена пунктирными линиями. Именно здесь наблюдается зарядовая капля, параметры которой нас интересуют. Остальные участки диаграммы в данной работе рассматриваться не будут, однако они не менее интересны в рамках исследования сверхпроводящих систем как основа для дальнейших физических предсказаний.

При параметрах слабого обменного взаимодействия зарядовая капля не образуется (см. рис.2, справа). Это объясняется тем, что при  $J/V \approx 1$  становится энергетически невыгодным для зарядов собираться в одну большую каплю. Это состояние соответствует большой энергии отталкивания, и чем ближе будут находиться заряды, тем сильнее они отталкиваются. Соответственно, заряды будут избегать возникновения

капли, тогда как при параметрах  $J/V \gg 1$  сильное обменное взаимодействие вынудит их собраться в одной области. Именно поэтому мы рассматриваем такие параметры задачи.

### 3. Химический потенциал и сжимаемость

В данной задаче вводятся такие термодинамические величины как химический потенциал и сжимаемость. Сущность этих характеристик системы следует из способа их определения, а именно: химический потенциал определяется как первая производная свободной энергии  $F$  по концентрации  $n$ , а сжимаемость – как вторая производная  $F$  по  $n$ . По первой производной мы можем говорить об экстремумах свободной энергии, но главной задачей является исследование устойчивости системы, поэтому необходимо знать минимумы этой функции, а, следовательно, необходимо знать знак второй производной. Устойчивыми к изменению концентрации заряда системы состояниями мы будем называть такие состояния, сжимаемость которых меньше нуля ( $(\partial^2 F / \partial n^2)_T < 0$ ).

Свободная энергия системы находится из термодинамического соотношения:  $F = E - TS$ . Алгоритм компьютерного моделирования системы позволяет рассчитывать такие термодинамические характеристики как внутреннюю энергию  $E$  и теплоемкость  $C$ , но не энтропию  $S$ . Энтропию можно найти с помощью интегрирования по формуле:  $S = \int_0^T \frac{C(T')}{T'} dT'$ . Для нахождения необходимых производных и интегралов используются численные методы. В данной работе использовалась схема трёхточечного дифференцирования и метод левых прямоугольников для интегрирования. Более точные схемы и методы не приводят к значительным улучшениям результатов расчетов.

### 4. Результаты

Результатом данной работы являются зависимости химического потенциала и сжимаемости от температуры. Химический потенциал  $\mu = (\partial F / \partial n)_T$  представлен на рис.3. Так же, в приближении среднего поля была получена зависимость химического потенциала от параметров  $n, \hat{a} = 1/T, \hat{\phi}, \hat{A}, J, V$  [4]:

$$\mu = Vn - \hat{A} + \frac{1}{\hat{a}} \ln \left( \frac{1 + n}{-n \cosh \hat{a} J \hat{\phi} + \sqrt{(1 - n^2) e^{-2\hat{a} \hat{A}} + n^2 \cosh^2 \hat{a} J \hat{\phi}}} \right),$$

где  $\hat{\phi}$  описывает магнитное состояние системы.

Заметим, что линия, отвечающая численному эксперименту, наглядно демонстрирует 2 фазовых перехода. Первому переходу соответствует плавное изменение параметра  $\hat{\phi}$  от 0 (неупорядоченное состояние) до 1

(антиферромагнитный порядок). Наглядно представить себе это изменение можно, если на рис.3 при понижении температуры до фазового перехода начать плавно изгибать линию вверх (что соответствует увеличению  $\phi$ ), а после фазового перехода сопоставить её с линией антиферромагнитного упорядочения. Резкий скачок значения  $\mu$  при  $T/J = 0.45$  соответствует флуктуациям, возникающим при фазовом переходе, что приводит к неточному результату, полученному с помощью алгоритма Метрополиса.

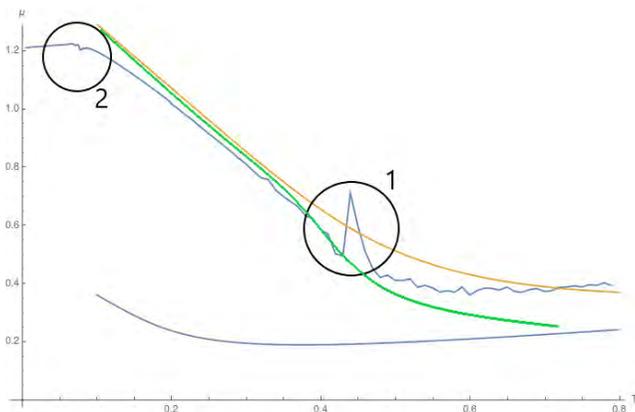


Рис. 3 Зависимость химического потенциала от температуры. Параметры системы:  $\tilde{A} = 0.5$ ,  $V = 0.1$ ,  $J = 1$ ,  $N = 64 \times 64$ . Выделены области: 1 - отвечает фазовому переходу из неупорядоченной системы в антиферромагнетик; 2 - отвечает фазовому переходу "антиферромагнетик - антиферромагнетик+зарядовая капля". Синяя ломаная линия соответствует  $\mu$  из численного эксперимента, желтая плавная линия -  $\mu$  в приближении среднего поля (ПСП) для антиферромагнитного упорядочения, синяя плавная линия -  $\mu$  в ПСП для неупорядоченного состояния.

Второму же переходу соответствует отклонение значения от чистого антиферромагнитного упорядочения. В теории среднего поля было предсказано значение химического потенциала в основном состоянии  $\mu = (\tilde{A} + J)/\text{sgn}(n) + n(4V - J)$  [4]. Подставляя наши параметры в выражение, получим значение  $\mu = 1.44$ . Но кривая численного эксперимента изгибается и выходит на значение вблизи 1.2. Это соответствует образованию зарядовой капли и последующей её стабилизации.

На рис.4 представлена зависимость сжимаемости от температуры и наглядно визуализированы состояния решетки при

$T/J = 0.66; 0.36; 0.074; 0.03$ . Наблюдается, что до первого фазового перехода реализуется устойчивое ( $\partial^2 F/\partial n^2 > 0$ ) неупорядоченное состояние. После него вторая производная меняет знак, что говорит о неустойчивости фазы. В действительности, наблюдаемое антиферромагнитное упорядочение "разбавляется" вкраплениями зарядов, которые нарушают равновесие системы, хаотично двигаясь по решетке.

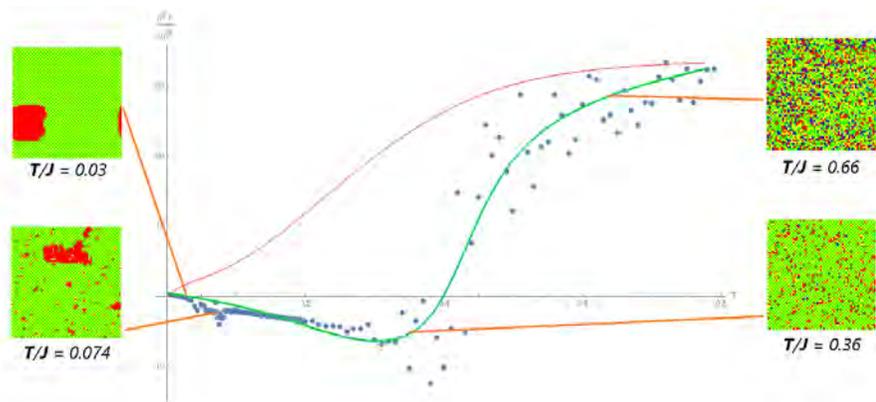


Рис. 4. Зависимость сжимаемости от температуры. Параметры системы:  $\tilde{A} = 0.5$ ,  $V = 0.1$ ,  $J = 1$ ,  $N = 64 \times 64$ . Синими точками отмечены данные численного эксперимента. Зелёная кривая соответствует приближительной аппроксимационной кривой. Красная кривая соответствует аппроксимационной кривой при увеличении количества шагов обработки системы в компьютерном моделировании

При приближении ко второму фазовому переходу вторая производная начинает немного возрастать, но остается отрицательной. Заряды, двигавшиеся хаотично, начинают образовывать небольшие кластеры, которые при  $T/J \approx 0.075$  образуют каплю. Это большое образование еще не включает в себя все заряды, поэтому всё еще является нестабильным. Только при  $T/J = 0.03$  все заряды соберутся в 1 каплю, и в этой точке  $\partial^2 F/\partial n^2 = 0$ , и дальше только немного увеличивается.

Затем, численный эксперимент был повторен с увеличением количества шагов на температурную точку. Целью ставилось сгладить зависимости химического потенциала и сжимаемости, однако был получен неожиданный результат. Флуктуации значений не только не уменьшились, но и увеличились, а так же качественно изменилась кривая зависимости сжимаемости. На рис.4 изображена красная кривая, отвечающая данному изменению. Отрицательная область, отвечающая

логично описанному неустойчивому состоянию, не восстанавливается при более «точном» расчете. Единственный восстановленный результат – выход зависимости на 0 при приближении  $T/J$  к 0, что соответствует образованию в основном состоянии зарядовой капли.

## 5. Выводы

В данной работе мы изучали условия устойчивости антиферромагнитной фазы разбавленной заряженными немагнитными примесями в двумерной спин-псевдоспиновой модели на квадратной решетке  $64 \times 64$ . Модель используется для описания конкуренции зарядовой и магнитной подсистем в плоскостях ВТСП купратов. Исследования были проведены с использованием классического Монте-Карло. Были получены зависимости химического потенциала  $\mu$  и сжимаемости  $(\partial^2 F / \partial n^2)_T$  от температуры.

Зависимость химического потенциала от температуры качественно согласуется с полученным выражением в приближении среднего поля для антиферромагнитного упорядочения до момента образования зарядовой капли. Это указывает на фазовый переход, который наблюдается в виде сгущения зарядов в одном месте решетки.

Зависимость сжимаемости от температуры позволяет качественно определить, в какой момент капля становится устойчивой. Однако в нашей работе возникают качественные расхождения кривой при разной точности расчета. Мы делаем вывод о том, что алгоритм Метрополиса, использованный при компьютерном моделировании системы, недостаточно точно описывает поведение системы в области фазового перехода, и может выдавать разные результаты для различной точности расчета.

Найденные в результате численного моделирования методом Монте-Карло термодинамические характеристики показывают качественную неполноту метода среднего поля. Метод, использованный в данной работе, позволяет точнее определить условия фазовых переходов, убедиться в их соответствии теоретическим представлениям об устойчивости.

## Литература

1. S. Moskvina, Phys.Rev. B **84**, 075116 (2011).
2. S. Moskvina, J. Phys.: Conf. Ser. **592**, 012076 (2015)
3. Yu. D. Panov, A. S. Moskvina, A. A. Chikov, and K. S. Budrin, J. Low Temp. Phys. **187**, 646 (2017)
4. Yu. D. Panov, A. S. Moskvina, A. A. Chikov, and I. L. Avvakumov, J. Supercond. Nov. Magn. **29**, 1077 (2016)

## ХИМИЯ

УДК 541.14:547.551.2

### **СИНЕРГИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В РЕАКЦИИ ИНИЦИИРОВАННОГО ОКИСЛЕНИЯ ЭТИЛБЕНЗОЛА ДОБАВКАМИ НИТРОКСИЛЬНОГО РАДИКАЛА И $\alpha$ -НАФТИЛАМИНА**

Гарифуллина Г.Г., Куракбаева Л.Д., Насретдинова Р.Н.  
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

На примере модельной реакции инициированного окисления этилбензола изучены антирадикальные свойства 3-х нитроксильных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина. Антирадикальная активность исследованных веществ количественно охарактеризована эффективной константой скорости ингибирования  $fk_{in}$

Ключевые слова: ингибиторы жидкофазного окисления, константа скорости реакции, синергизм.

#### **Введение**

Ингибиторы окисления (антиоксиданты) широко используются для стабилизации пластмасс и синтетических волокон, каучуков и смазочных материалов, углеводородного топлива, растворителей, полупродуктов органического синтеза и пищевых продуктов[1]. Уникальные химические свойства нитроксильных радикалов отражаются в их способности стабилизировать органические соединения как на уровне живых организмов, так и в реальных технологических процессах. Нитроксильные радикалы обладают противоопухолевой активностью и способны улучшать химиотерапевтические свойства применяемых в клинике цитостатиков[2].

Нами испытаны 3 нитроксильных радикала и  $\alpha$ -нафтиламин с использованием классических методов исследования реакций жидкофазного окисления органических соединений: манометрического метода по поглощению кислорода.

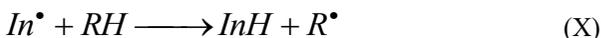
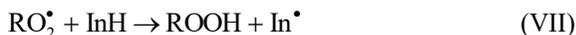
#### **Методика эксперимента**

Антирадикальные свойства нитроксильных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина изучали на модельной реакции инициированного радикально-цепного окисления этилбензола в кинетическом режиме при 348 К. В качестве инициатора окислительного процесса использовали азодиизобутиронитрил (АИБН). Инициированное окисление этилбензола в стандартных условиях эксперимента протекает в кинетическом режиме по радикально-цепному механизму с квадратичным обрывом цепи по

реакции (VI) и включает общий для большинства органических соединений ряд элементарных стадий<sup>1</sup> [3-5]:



В присутствии ингибитора обрыв цепи на радикалах  $RO_2^{\bullet}$  протекает по реакциям:



где I – инициатор, RH – субстрат окисления, InH – ингибитор, Pr – молекулярный продукт,  $R^{\bullet}$  и  $RO_2^{\bullet}$  – алкильные и пероксильные радикалы этилбензола соответственно.

В качестве количественной характеристики антирадикальной активности использовали эффективную константу ингибирования  $f k_{in}$ , где  $f$  – емкость ингибитора, показывающая число радикальных интермедиатов, погибающих на одной молекуле ингибитора в актах обрыва цепи,  $k_{in}$  – константа скорости обрыва цепи окисления на ингибиторе [7]. Эффективную константу скорости ингибирования определяли путем измерения влияния добавок исследованный соединений на скорость окисления модельного субстрата. Измерительным инструментом служила универсальная манометрическая дифференциальная установка (УМД), устройство которой подробно описано в монографии[6].

### Результаты и обсуждение

Исследовано влияние 3-х нитроксильных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина на окисление этилбензола:

---

<sup>1</sup> Принята традиционная для механизма окисления нумерация элементарных стадий.

2,2,5,5-тетраметил-3-оксо-4-фенил-3-имидазолин-1-оксил (АО1), 4-карбомоил-2,2,5,5-тетраметил-3-имидазолин-1-оксил (АО2), 2,2,5,5-тетраметил-4-циано-3-имидазолин-1-оксил (АО3),  $\alpha$ -нафтиламин (АО4).

В отсутствие ингибирующих добавок кинетическая кривая поглощения кислорода имеет линейный вид, порядок реакции по кислороду нулевой, что является подтверждением наличия кинетического режима окисления модельного субстрата [3].

Введение в реакцию смесь исследуемых веществ приводит к снижению начальной скорости окисления модельного субстрата вследствие обрыва цепи на молекулах аминов по реакции (7)  $[RO_2^\bullet + InH \rightarrow In^\bullet + ROOH]$ .

Установлено, что добавки нитрокислородных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина АО (1-4) снижают начальную скорость окисления этилбензола, что служит очевидным доказательством их антиокислительного действия. Наглядной моделью служат типичные кинетические кривые поглощения кислорода при окислении этилбензола, приведённые на рис. 1, 2, 3, 4, в отсутствие и при наличии исследуемых производных нитрокислородных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина.

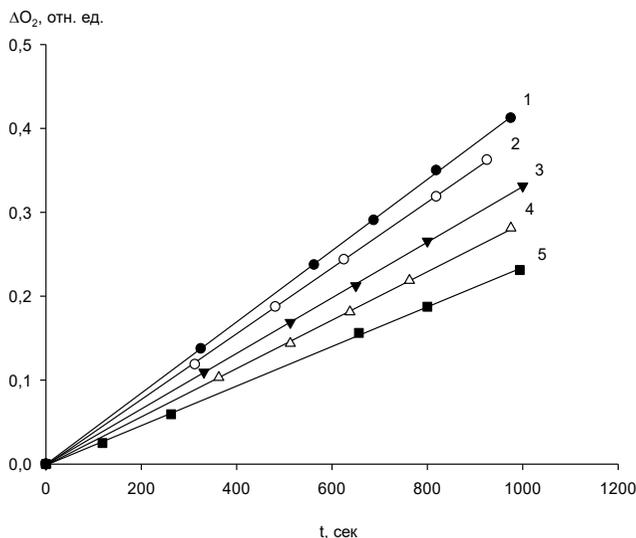


Рис. 1. Кинетическая кривая поглощения кислорода этилбензолом в отсутствие (1) и в присутствии АО1:

2 –  $0,125 \cdot 10^{-3}$  моль/л, 3 –  $0,375 \cdot 10^{-3}$  моль/л, 4 –  $0,625 \cdot 10^{-3}$  моль/л,

5 –  $0,875 \cdot 10^{-3}$  моль/л

$V_i = 2,9 \cdot 10^{-7}$  моль/л·с,  $T = 348$  К

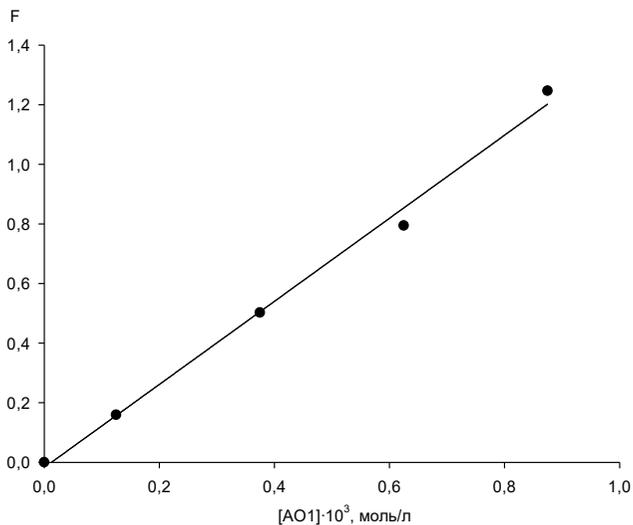


Рис. 2. Зависимость функции F от концентрации [AO1]

С использованием программы MNK вычислены величины начальных скоростей окисления модельного субстрата при различных концентрациях добавленных нитроксильных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина. Показано, что с повышением концентрации исследуемых веществ наблюдается закономерное снижение скорости поглощения кислорода.

Начальная скорость поглощения кислорода в зависимости от концентрации добавленного антиоксиданта АО1 представлена в таблице 1.

В присутствии добавок нитроксильных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина реакция протекает в радикально-цепном режиме. При сохранении цепного режима окисления справедливо следующее соотношение [1]:

$$F = \frac{V_0^0}{V_0} - \frac{V_0}{V_0^0} = f k_{in} [AO] / \sqrt{2k_6 V_i}, \quad (\text{уравнение 1})$$

где [AO] - концентрация ингибитора, моль/л;  $V_0^0$  и  $V_0$  - начальные скорости поглощения кислорода в отсутствие и при наличии антиоксиданта, моль/л·с;  $V_i$  - скорость инициирования окислительного процесса, моль/л·с;  $f$  - радикалоёмкость антиоксиданта;  $k_{in}$  и  $2k_6$  - константы скорости гибели цепи окисления на антиоксиданте и квадратичного обрыва цепи на пероксильных радикалах субстрата соответственно; величина  $2k_6$  для этилбензола равна  $4 \cdot 10^7$  л/моль·с [6].

Таблица 1.

Начальные скорости окисления этилбензола в присутствии разных концентраций АО1; T=348K

$[AO1] \cdot 10^4$ , моль/л	$V_{O_2} \cdot 10^6$ , моль/л·с	F, отн. ед.
0,00	5,01	0
1,25	4,63	0,12
3,75	3,91	0,37
6,25	3,40	0,62
8,75	2,78	0,87

Экспериментальные данные удовлетворительно спрямляются в координатах уравнения 1 с высоким коэффициентом корреляции. С учетом литературных данных для константы  $2k_6$  вычислены эффективные константы скорости ингибирования  $f \cdot k_{In}$ , величина которых представлены в табл. 2.

Таблица 2

Эффективные константы скорости ингибирования  $f \cdot k_{In}$   
для исследованных веществ

Вещество	$f \cdot k_{In} \cdot 10^4$ , л/моль·с
АО1	$1,10 \pm 0,11$
АО2	$0,44 \pm 0,07$
АО3	$0,51 \pm 0,08$
АО4	$1,02 \pm 0,10$

Практический интерес представляет возможность удлинения срока действия ингибиторов – нитроксильных радикалов за счет их синергетического эффекта при их совместном использовании [8-11]. Для выявления вклада каждого из соединений на суммарную эффективность их антиокислительного действия нами было изучено ингибирующее действие 2-х систем на основе смеси нитроксильных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина на модельной реакции иницированного окисления этилбензола. Мольная доля каждого из компонентов варьировалось в интервале 0-100%. Суммарная концентрация антиоксидантов во всех опытах составляла  $1 \cdot 10^{-4}$  моль/л. Для системы на основе АО3 и АО4 с мольной долей АО3 в 50% в 1,3 раза превосходит эффект суммарного воздействия индивидуальных компонентов (рис. 3). Это свидетельствует о синергетическом взаимодействии двух веществ.

На основе литературных данных представлена возможная схема совместного действия двух ингибиторов: синергизм ингибиторов может быть обусловлен различными механизмами тормозящего действия: т.е. один ингибитор, именно  $\alpha$ -нафтиламин обрывает цепи по реакции с пероксильными радикалами; другой - нитроксильный радикал – активный акцептор алкильных радикалов [8-10].

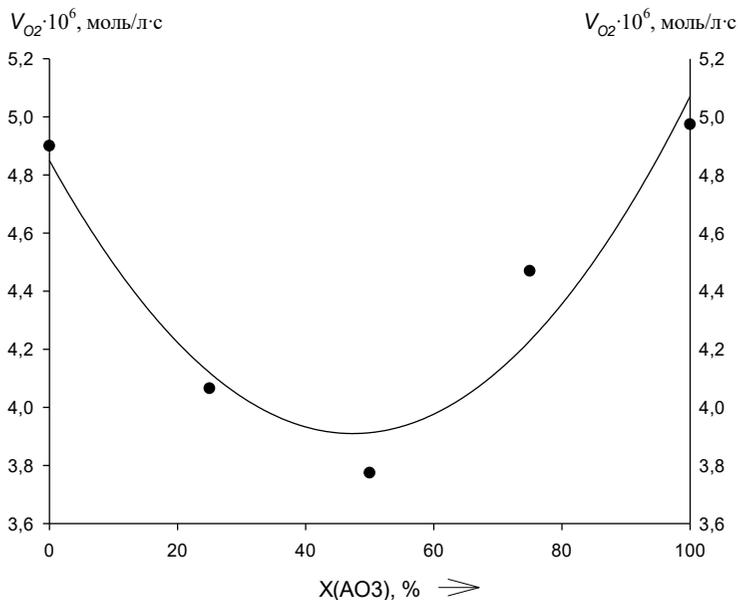


Рис. 3. Зависимость начальной скорости окисления этилбензола от мольной доли содержания АОЗ в ингибирующей композиции;

$$V_i = 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ моль/л} \cdot \text{с}, T = 348 \text{ K}$$

## ВЫВОДЫ

1. Для 3-х нитроксильных радикалов и  $\alpha$ -нафтиламина определены количественные параметры ингибирования: эффективные константы скорости ингибирования  $f \cdot k_{In}$ , (величина  $f \cdot k_{In}$  находится в интервале  $(0,44-1,1) \cdot 10^4$  л/моль·с).
2. Для ингибирующей композиции 2,2,5,5-тетраметил-4-циано-3-имидазолин-1-оксил (АОЗ) +  $\alpha$ -нафтиламин (АО4), наблюдается эффект

синергизма – усиление эффекта торможения в 1,3 раза при их совместном введении для реакции окисления этилбензола.

### Литература

1. Денисов Е.Т., Азатян В.В., Ингибирование цепных реакций. Черноголовка: 266 с., 1997.
2. Плисс Е., Сень В., Тихонов И., Нитроксильные радикалы в химических и биохимических процессах, LAP LAMBERT Academic Publishing Saarbrücken 2013
3. Денисов, Е.Т. Механизм жидкофазного окисления кислородосодержащих соединений / Е.Т. Денисов, Н.И. Мицкевич, В.Е. Агабеков. – Минск: Наука и техника, 1975. – 335 с.
4. Денисов, Е.Т. Константы скорости гомолитических жидкофазных реакций / Е.Т. Денисов. – М.: Наука, 1971. – 712 с.
5. Денисов Е.Т., Азатян В.В. Ингибирование цепных реакций - Черноголовка: ИФХЧ РАН, 1997. 268 с.
6. Эмануэль Н.М., Гал Д.Р. Окисление этилбензола. М.: Наука, 1984. 186с.
7. Эмануэль Н.М. Механизм синергетического действия смесей ингибиторов в процессах окисления / Н.М. Эмануэль, З.К. Майзус, Г.В. Карпухина и др. // Тез. докл. междунар. симп. По методам оценки стабилизаторов и синергетических смесей. – Москва, 1973. – С. 1-18.
8. Карпухина Г.В. Классификация синтетических смесей антиоксидантов и механизмов синергизма / Г.В. Карпухина, Н.М. Эмануэль // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276. – №5. – С. 1163-1167.
9. Эмануэль Н.М. Механизм синергетического действия смесей ингибиторов в процессах окисления / Н.М. Эмануэль, З.К. Майзус, Г.В. Карпухина и др. // Тез. докл. междунар. симп. По методам оценки стабилизаторов и синергетических смесей. – Москва, 1973. – С. 1-18.
10. Эмануэль Н.М. Механизм действия антиоксидантов. Современные представления / Н.М. Эмануэль // Нефтехимия. – 1982. – Т. 22. – №4. – С. 435-447.
11. Denisov E.T. Oxidation and antioxidant in organic chemistry and biology / E.T. Denisov, I.B. Afanasev. – Boca Raton: Taylor and Francis, 2005. – 982 P.

© Гарифуллина Г.Г., Куракбаева Л.Д., Насретдинова Р.Н., 2019 г.

УДК 159.9

## **АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО ХИМИИ**

**В РЕСПУБЛИКЕ БАШКОРТОСТАН ЗА 2018 ГОД**

Гарифуллина Г.Г., Насретдинова Р.Н.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В Республике Башкортостан во всех этапах проведения ЕГЭ-2018 по химии участвовали 3748 человек, из которых 3 545 - выпускники республиканских общеобразовательных организаций (школ, гимназий, лицеев) текущего года; 167 – выпускника прошлых лет и выпускники учреждений профессионального образования, и 1 выпускник, не завершивший среднее (полное) образование. Средний балл, показанный первыми, равен 55,2 баллам, вторыми – 34,2 баллам, в среднем – 54,4 баллам. В прошлом году средний балл по республике был равен 56,6 баллов. Всего 535 выпускников школ, к сожалению, не смогли преодолеть минимальный порог в 36 баллов, что составляет 14,3% (в 2017 году – 12,7%). Процент «высокобалльных» работ (более 80 баллов) равен 5,4%. Шесть выпускников республики получили по химии 100 максимальных тестовых баллов.

В контрольно-измерительных материалах по химии в 2018 г. по сравнению с 2017 г. были приняты следующие изменения.

1. В части 1 работы изменен формат шести заданий базового уровня сложности с кратким ответом.

2. В части 2 добавлены два задания (30 и 31) в новой редакции, каждое из которых оценивается 2-мя первичными баллами.

3. Общее число заданий составляет 35 вместо 34 заданий в 2017г.

4. Задание под номером 35 на установление молекулярной формулы оценивается 3-мя первичными баллами (в 2017 году – 4 балла).

5. За правильное выполнение всех 35 заданий можно было получить 60 первичных баллов, что равно 100 тестовым баллам.

Анализ выполнения заданий показывает, что по заданиям первой части низкий процент выполнения наблюдается по следующим заданиям: задания 7- 10, 16- 19, 21, 25 и 26. Из заданий на развернутый ответ самый низкий процент выполнения (в 9%) имеет 35 задание. Далее по сложности выполнения идут задания: 32 (выполнено по республике на все максимальные 4 первичных балла на 11,5%, 34 ((выполнено по республике на все максимальные 4 первичных балла на 11,7%, 33 выполнено по республике на максимальные 5 первичных балла на 18,9%),

Следует отметить, что особую трудность вызывает у выпускников решение расчетных задач. В 2017 году расчетные задачи включали

«изюминку – элемент» - часть вещества разложилось. В качестве примера предлагаем следующую задачу. «При нагревании нитрата серебра часть вещества разложилось. При этом образовался твердый остаток массой 88г. К этому остатку добавили 200г 20%ного раствора соляной кислоты. При этом образовался раствор массой 205,3г с массовой долей кислоты 15,93%. Определить объем смеси газов, выделившихся в реакции разложения нитрата серебра». Выпускники без жалости разложили весь образец исходного нитрата серебра, по этой простой причине твердый остаток у них представляет собой только серебро, в то время как в твердом остатке находится еще часть не разложившегося нитрата серебра. На данный алгоритм были предложены задачи по термическому разложению карбонатов, гидрокарбонатов, нитратов металлов. Задача на термическое разложение карбоната бария: «При нагревании карбоната бария часть вещества разложилось, при этом выделилось 4,48л газа. К образовавшемуся твердому остатку последовательно добавили 100мл воды и 200г 20%ного раствора сульфата натрия. Вычислить массовую долю гидроксида натрия в полученном растворе». По этой задаче масса твердого остатка складывается из массы образовавшегося оксида бария и неразложившегося карбоната бария.

В 2018 году расчетные задачи в вариантах КИМов по химии были предложены на тему «Электролиз водных растворов солей». Проблемы у выпускников возникли уже на стадии оформления уравнения реакции электролиза водных растворов солей. Интересная часть этих задач заключается еще в том, что электролиз водных растворов был проведен на разложение только определенной части исходной соли. Расчет глубины электролиза выпускники должны были вычислить по данным продуктов процесса электролиза. Множество ошибок наблюдается на стадии расчетов массы растворенного вещества и массы полученного раствора после проведения химических реакций. По-видимому, у выпускников нет четкого понимания данных понятий в каждом конкретном случае решения расчетной задачи.

В последние годы задание 32 оформляется в виде описания мысленного эксперимента. Предлагаем методические рекомендации для подготовки выпускников к заданию 32. *Важный момент! Тип реакции, продукты реакции определяются свойствами исходных реагентов!* На первом этапе необходимо по названиям реагентов написать химические формулы. В дальнейшем с использованием подсказок необходимо выбрать тип реакции и написать химические формулы всех продуктов реакции. Основная трудность задания 32 заключается в том, что *продукты первой реакции являются исходным веществом для второй реакции, продукты второй реакции являются исходным веществом для третьей стадии процесса* и т.д. Для предотвращения названных ошибок

необходимо использовать подсказки в задании: цвета растворов, запах газов, цвета осадков, фазовое состояние продуктов реакции. Важно помнить качественные реакции на катионы, анионы, тривиальные названия химических веществ. В качестве примера предлагаем следующие реакции:

- $\text{Fe} + 6\text{H}_2\text{SO}_4(\text{конц}) = \text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3 + 3\text{SO}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$
- Восст-ль! Окисл-ль! ОВР!
- $\text{Fe} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{FeSO}_4 + \text{H}_2$
- Восст-ль! Окисл-ль! ОВР!
- $\text{FeSO}_4 + 2\text{NaOH} = \text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{Na}_2\text{SO}_4$
- Электролит! Электролит! Обменная реакция!
- $\text{Fe} + 2\text{HCl} = \text{FeCl}_2 + \text{H}_2$
- Восст-ль. Окисл-ль. ОВР!
- $2\text{Fe} + 3\text{Cl}_2 = 2\text{FeCl}_3$
- Восст. Окисл-ль ОВР!

Для первых двух реакций тип реакции - только ОВР, так как есть окислитель, есть восстановитель. Для данных двух реакций исходные вещества совершенно одинаковы, отличие только в концентрации серной кислоты, что и определяет природу образующихся продуктов. В концентрированной серной кислоте окислителем является сера в высшей степени окисления, в отличие от разбавленной серной кислоты, где окислителем являются протоны кислоты. Типичные ошибки участников ЕГЭ по химии по этому заданию:

1) Несколько выпускников написали, что железо пассивируется концентрированной серной кислотой, нет реакции. Причина – упустили в задании слово « в горячей кислоте»!

2) Ошибки в продукте окисления железа, а именно получили соль железа в степени окисления +2. Не учли подсказку об образовании бурого осадка в результате последующей реакции.

3) Ошибка в продукте восстановления: много работ, где участники ЕГЭ написали продуктом восстановления молекулу водорода! Но в составе концентрированной серной кислоты окислителем является сера в высшей степени окисления, поэтому продуктом ее восстановления является оксид серы.

Для третьей реакции реализуется обменный процесс, так как исходные вещества электролиты, выполняется условие протекания обменной реакции – образование осадка гидроксида железа (II). Для последних двух систем – только окислительно- восстановительный процесс. По реакции железа с молекулой хлора образуется хлорид железа (III), в отличие от продукта реакции железа с соляной кислотой, в результате которой образуется хлорид железа (II). Причина кроется в силе окислителя: молекула хлора как сильный окислитель отнимает от

восстановителя железа все три электрона, протоны от соляной кислоты , как слабый окислитель - только два электрона.

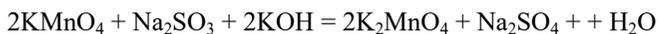
В новой редакции были предложены два задания В качестве примера предлагаем следующий вариант

Для выполнения заданий 30, 31 используйте следующий перечень веществ: перманганат калия, гидрокарбонат калия, сульфит натрия, хлорид серебра(I), гидроксид калия. Допустимо использование водных растворов веществ.

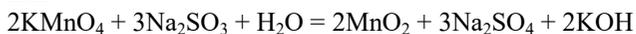
30. Из предложенного перечня веществ выберите вещества, между которыми возможна окислительно-восстановительная реакция. В ответе запишите уравнение только одной реакции. Составьте электронный баланс, укажите окислитель и восстановитель.

31. Из предложенного перечня веществ выберите вещества, между которыми возможна реакция ионного обмена. Запишите молекулярное, полное и сокращенное ионные уравнения только одной реакции.

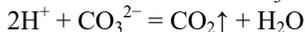
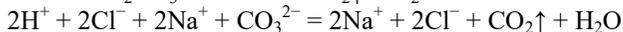
В ответе на 30 задание нужно было записать одну из двух возможных вариантов ответа:



или



На 31 задание ответ следующий:



Известны демоверсии КИМов по химии для ЕГЭ в 2019 году. Какие есть изменения? Принципиальных изменений по сравнению с КИМами 2018 года нет. В первой части число заданий составляет 29, за эти задания, число заданий на развернутый ответ - 6. В сумме 60 первичных баллов. Минимальный порог по химии в 2019 г установлен в 36 тестовых (14 первичных) баллов.

В заключение статьи предлагаем полезные ссылки:

- Сайт ФИПИ [www.fipi.ru](http://www.fipi.ru);
- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2019 года;
- Открытый банк заданий ЕГЭ;
- Учебно-методические материалы для председателей и членов региональной предметной комиссии по проверке заданий с развернутым ответом экзаменационных работ;
- Аналитические отчеты о результатах экзамена, методические рекомендации по выполнению заданий 30-35.

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ОБРАТИМОСТИ ПО ЭРЕНПРАЙСУ

Абузярова Н. Ф<sup>1</sup>, Бурханова Э. Р. (Уфа, БГУ)

### Введение

Пусть  $\mathcal{P}$  – алгебра Шварца, состоящая из всех целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси:

$$\varphi \in \mathcal{P} \iff \varphi \in H(\mathbb{C}), \exists C > 0 : |\varphi(z)| \leq C(1+|z|)^C e^{C|\operatorname{Im} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Функция  $\varphi \in \mathcal{P}$  медленно убывает, если  $\exists a > 0$ , такое, что  $\forall x \in \mathbb{R} \exists x' \in \mathbb{R} : |x - x'| \leq \ln(1 + |x|), |\varphi_0(x')| \geq (a + |x'|)^{-a}$ .

**Теорема деления.** (Л. Эренпрайс, [1, Теорема 2.2]) *Медленное убывание функции  $\varphi \in \mathcal{P}$  эквивалентно ее обратимости по Эренпрайсу в  $\mathcal{P}$ , то есть справедливости импликации:*

$$\Phi \in \mathcal{P}, \quad \Phi/\varphi \in H(\mathbb{C}) \implies \Phi/\varphi \in \mathcal{P}.$$

Известно, что условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m_j}{|\operatorname{Im} a_j| + \ln |\operatorname{Re} a_j|} < \infty \quad (1)$$

является необходимым для обратимости по Эренпрайсу функции  $\varphi \in \mathcal{P}$  с нулевым множеством  $\{(a_j; m_j)\}$ , где  $m_j$  – кратность нуля  $a_j \in \mathbb{C}$  ([1, предложение 6.1]).

Нами получено более сильное, чем (1), необходимое условие для случая, когда все нули рассматриваемой функции вещественны.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

## Необходимое условие обратимости по Эренпрайсу

Пусть  $\mathcal{M} = \{\mu_k\}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , – вещественная последовательность такая, что

$$\cdots \leq \mu_{-2} \leq \mu_{-1} < 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots,$$

$$\psi(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\mu_k| \leq R} \left(1 - \frac{z}{\mu_k}\right) \quad (2)$$

– целая функция экспоненциального типа 1. Обозначим через  $m(z, t)$  число точек  $\mu_k$  в круге  $|w - z| \leq t$ .

**Теорема 1.** *Если определенная формулой (2) функция  $\psi \in \mathcal{P}$  и обратима по Эренпрайсу, то*

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{m(x, 1)}{\ln |x|} < \infty.$$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение теоремы не верно. Это означает, что найдется последовательность

$$x_j, \quad |x_j| \rightarrow +\infty$$

(для определенности будем считать  $x_j > 0$ ), удовлетворяющая соотношениям

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{m(x_j, 1)}{\ln |x_j|} = \infty, \quad (3)$$

$$x_{j+1}/x_j \geq 3, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$M_0 := \sum_j \frac{m(x_j, 1)}{x_j} < \infty. \quad (5)$$

Выполнение последнего условия возможно в силу хорошо известного свойства нулевого множества функции из класса Картрайт (см. например, [2]), частью которого является алгебра Шварца  $\mathcal{P}$ .

Положим  $m_j = m(x_j, 1)$ ,

$$\psi_j(z) = \psi(z)(z - x_j)^{m_j} \prod_{k: |\mu_k - x_j| \leq 1} (z - \mu_k)^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что  $\psi_j$  – целые функции экспоненциального типа 1 и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_j(x)| \leq C_0 2^{m_j}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где  $C_0 = \sup_{y \in \mathbb{R}} |\psi(y)|$ . Согласно хорошо известной теореме Бернштейна (см., например, [3, гл. 11]), имеем также оценки

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_j^{(n)}(x)| \leq C_0 2^{m_j}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Дальнейшее изложение представляет собой модификацию рассуждений Л.Эренпрайса, примененных им при доказательстве предложения 6.1 в работе [1].

Используя разложение функции  $\psi_j$  в ряд Тэйлора в окрестности точки  $x_j$  и оценки (6), выводим, что

$$|\psi_j(x)| \leq C_0 2^{m_j} (m_j!)^{-1} |z - x_j|^{m_j} e^{|z - x_j|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, будет выполняться неравенство

$$|\psi_j(x)| \leq |x_j|^{-l} \cdot 2^{-m_j}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющих условию

$$\ln C_0 + m_j + |x - x_j| + m_j \ln |x - x_j| - \ln(m_j!) \leq -l \ln x_j - m_j \ln 2.$$

Применим формулу Стирлинга. Видим, что последнее соотношение будет выполняться, если

$$|x - x_j| + m_j \ln |x - x_j| - m_j \ln m_j \leq -l \ln x_j - C_1 m_j, \quad (8)$$

где  $C_1$  – абсолютная постоянная.

В силу предположения (3), для каждого натурального  $l$  найдется номер  $j_l$  такой, что

$$-l \ln x_j \leq -m_j, \quad j = j_l, j_l + 1, \dots$$

Выберем и фиксируем  $b \in (0; 1)$ , удовлетворяющее условию

$$b < e^{-C_1 - 2}.$$

Из вышеизложенного следует, что оценки (7) будут иметь место при  $j \geq j_l$  для всех  $x \in \mathbb{R}$  таких, что  $|x - x_j| \leq bm_j$ . Из этого факта и легко проверяемых соотношений

$$|\psi(z)| \leq 2^{m_j} |\psi_j(z)|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

следует, что

$$|\psi(x)| \leq |x_j|^{-l}, \quad \text{если} \quad |x - x_j| \leq bm_j, \quad j \geq j_l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Последние оценки противоречат выполнению цитированного выше аналитического критерия обратимости Л. Эренпрайса для функции  $\psi$ , что и доказывает теорему.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division, IV. // Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.
- [2] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
- [3] *Boas R. P., Jr.* Entire functions. Acad. Press. Publ. Inc. New-York, 1954. 276 pp.

УДК: 517.537

УСЛОВИЯ СОВМЕСТИМОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ  
ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ С КОМПЛЕКСНОЙ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

Егорова А. Е. (Уфа, БашГУ)

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — выпуклая область,  $H(D)$  — пространство функций, аналитических в  $D$ , с топологией равномерной сходимости на компактах, и  $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$  — последовательность комплексных чисел  $\lambda_k$  и их кратностей  $n_k$  такая, что система  $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$ ,  $k \geq 1$ ,  $n = 0, \dots, n_k - 1$ , не полна в  $H(D)$ . Без ограничения общности будем считать, что точки  $\lambda_k$  упорядочены по возрастанию модулей. Через  $W(\Lambda, D)$  обозначим замыкание в  $H(D)$  линейной оболочки системы  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Тогда  $W(\Lambda, D)$  — нетривиальное замкнутое подпространство в  $H(D)$  инвариантное относительно оператора дифференцирования ( $\Lambda$  — его кратный спектр, а  $\mathcal{E}(\Lambda)$  — совокупность собственных и присоединенных функций в  $W(\Lambda, D)$ ). По построению  $\mathcal{E}(\Lambda)$  полна в  $W(\Lambda, D)$ . В этом случае  $W(\Lambda, D)$  допускает спектральный синтез.

Каждая функция  $g \in W(\Lambda, D)$  есть предел последовательности линейных комбинаций элементов  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Возникает задача представления  $g$  в виде ряда по элементам системы  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Первым данным результатом фундаментальный принцип Эйлера, согласно которому каждое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является линейной комбинацией элементарных решений из  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Исходя из этого задача представления функций из  $W(\Lambda, D)$  рядом

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z). \quad (1)$$

есть проблема фундаментального принципа в инвариантном подпространстве. Известно [4], что решения проблемы фундаменталь-

ного принципа (и двойственной к ней задачи интерполяции) для произвольной выпуклой области  $D \subset \mathbb{C}$  при одном ограничении:  $n_k/|\lambda_k| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ . В случае ограниченной области это ограничение можно снять. Так, в работе[2] получен критерий фундаментального принципа для  $W(\Lambda, D)$  в ограниченной выпуклой области  $D$ . Он состоит из двух условий: точки  $\Lambda$  должны быть в некотором смысле «отделены» друг от друга (более точно,  $S_\Lambda = 0$ , где  $S_\Lambda$  — специальным образом построенный индекс конденсации), а также  $\Lambda$  должна быть частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа и регулярного роста, сопряжённая диаграмма которой совпадает с замыканием  $D$ .

В случае, если  $S_\Lambda \neq 0$ , иногда удается получить представление элементов  $W(\Lambda, D)$  в виде ряда (1) «со скобками»:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z) \right).$$

Так возникла задача о базисе в инвариантном подпространстве, которая формулируется следующим образом: при каких условиях можно осуществить разбиение  $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$  последовательности  $\Lambda$  на группы  $U_m$  и выбрать внутри этих групп фиксированные линейные комбинации  $e_{m,j}, j = \overline{1, N_m}$ , элементов  $\mathcal{E}(\Lambda)$  так, что семейство экспоненциальных многочленов  $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}\}_{m,j=1}^{\infty, N_m}$  становится базисом в  $W(\Lambda, D)$ ? Если указанный базис существует, то возникает еще целый ряд вопросов. Как осуществить разбиение  $U$  и можно ли описать все подходящие разбиения. Как составлять линейные комбинации внутри группы и можно ли описать все подходящие комбинации. Насколько малым можно сделать диаметр групп  $U_m$ . Как описать пространство коэффициентов рядов по системе  $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ . Статья[3] содержит исторический обзор исследований по проблеме базиса, а также критерий его существования в подпространстве  $W(\Lambda, D)$ , построенного по разбиению  $U$  на «относительно малые» группы  $U_m$ .

Этот критерий состоит из одного условия: совместимость последовательности  $\Lambda$  с областью  $D$ . Следовательно, для решения проблем фундаментального принципа и базиса в инвариантном подпространстве необходимо найти условия совместимости  $\Lambda$  и  $D$ . Именно этому посвящена данная работа. Критерий совместимости  $\Lambda$  с ограниченной выпуклой областью  $D$  формулируется исключительно в терминах геометрических характеристик  $\Lambda$  и  $D$ .

Введём необходимые понятия и обозначения.

Символом  $n(r, \Lambda)$  обозначим число точек  $\lambda_k$  с учетом кратностей, попавших в открытый круг  $B(0, r)$ . Пусть  $\bar{n}(\Lambda)$ ,  $\underline{n}(\Lambda)$  и  $n^0(\Lambda)$  обозначают соответственно верхнюю, нижнюю и максимальную плотность последовательности  $\Lambda$ , т.е.

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}, \quad \underline{n}(\Lambda) = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r},$$

$$n^0(\Lambda) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda) - n((1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

Последовательность  $\Lambda$  имеет плотность  $n(\Lambda)$ , если  $\bar{n}(\Lambda) = \underline{n}(\Lambda) = n(\Lambda)$ . Легко видеть, что в этом случае  $n^0(\Lambda) = n(\Lambda)$ .

Символом  $n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)$  обозначим число точек  $\lambda_k$  с учетом их кратностей, попавших в сектор  $\{\lambda = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t \in (0, r)\}$ .

Говорят, что последовательность  $\Lambda$  имеет угловую плотность, если для всех  $\varphi_1, \varphi_2$  за исключением, быть может, не более чем счётного множества значений  $\varphi_1, \varphi_2$  существует предел

$$n(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)}{r},$$

при  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ .

Положим

$$n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda) - n(\varphi_1, \varphi_2, (1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

Последовательность  $\tilde{\Lambda} = \{\mu_m, s_m\}_{m=1}^{\infty}$  является пополнением  $\Lambda$ , если существуют натуральные числа  $m(k)$ :  $\mu_{m(k)} = \lambda_k$  и  $n_k \leq s_{m(k)}$ ,  $k \geq 1$ .

Множество  $\Lambda$  называется правильно распределенным, если оно имеет угловую плотность и выполнено условие Линделёфа, т.е. существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Пусть  $K$  — выпуклый компакт и  $z_1, z_2$  — точки его границы  $\partial K$ . Через  $s(z_1, z_2, K)$  обозначим ориентированную длину дуги  $\partial K$ , соединяющей  $z_1$  и  $z_2$ . Причем за положительное направление примем обход по часовой стрелки. Для  $\varphi \in \mathbb{R}$  пересечение  $\Gamma(\varphi)$  опорной прямой  $l(\varphi) = \{z : \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = H_K(e^{i\varphi})\}$  и границы  $\partial K$  является либо точкой  $z(\varphi)$  либо отрезком. Множество  $\varphi(K)$  направлений  $\varphi$ , для которых  $\Gamma(\varphi)$  — отрезок, не более чем счетное. Положим

$$S_K(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{z_1 \in \Gamma(\varphi_1), z_2 \in \Gamma(\varphi_2)} s(z_1, z_2, K).$$

Если  $\varphi_1, \varphi_2 \notin \varphi(K)$ , то  $S_K(\varphi_1, \varphi_2) = s(z(\varphi_1), z(\varphi_2), K)$ .

**Основная Теорема.** Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$  и  $K$  — выпуклый компакт. Тогда эквивалентны утверждения

1. существует  $\gamma > 0$  такое, что для всех  $\varphi_1, \varphi_2 \notin \varphi(K)$  с условием  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$  выполнено неравенство  $n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) \leq S_K(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi$ ;
2. существует пополнение  $\tilde{\Lambda}$  последовательности  $\Lambda$ , которое является правильно распределенным множеством, причём

$$n^0(\varphi_1, \varphi_2, \tilde{\Lambda}) = S_K(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi$$

Пусть дана последовательность  $\Lambda$  и  $D$  — ограниченная выпуклая область. Последовательность  $\Lambda$  совместима с  $D$ , если  $h_f = H_{\bar{D}} = H_D$ , т.е., если она является частью нулевого множества целой функции  $f$  экспоненциального типа и регулярного роста, сопряженная диаграмма которой является замыканием  $\bar{D}$

области  $D$ . Известно, что, если  $K = \bar{D}$  и  $\tilde{\Lambda}$  — правильно распределенное пополнение  $\Lambda$ , удовлетворяющее

$$n(\varphi_1, \varphi_2, \tilde{\Lambda}) = S_K(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi,$$

то его каноническая функция  $f$  имеет индикатор  $h_f$ , совпадающий с  $H_{\bar{D}}$ . Отсюда следует, что утверждение 2) теоремы эквивалентно совместимости  $\Lambda$  с областью  $D$ . Таким образом, верно

**Следствие 1.** *Следующие утверждения равносильны:*

1. *существует  $\gamma > 0$  такое, что для всех  $\varphi_1, \varphi_2 \notin \varphi(K)$  с условием  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$  выполнено неравенство  $n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) \leq S_{\bar{D}}(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi$ .*
2.  *$\Lambda$  совместима с  $D$ .*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кривошеева О. А., Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве // Функци. анализ и его прил. 2012. Т. 46. № 4. С. 14–30.
- [2] *Кривошеева О. А.* Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости // Функци. анализ и его прил. 2012. Т. 46 № 12. С. 14–30.
- [3] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 12. С. 49–104.
- [4] *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 2. С. 71–136.
- [5] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

UDC 517.958:539.3(5):531.3-324

A MATHEMATICAL MODELING OF ARTERIAL  
BIFURCATION

Zavorokhin G. L. (St.Petersburg, PDMI RAS)

A simple approximate method of calculation of the pressure drop matrix is proposed. The entries of this matrix are included in the modified transmission conditions, which were introduced earlier in [1, 2], and which give better approximation of 3D flow by 1D flow near a bifurcation of an artery in comparison with the classical Kirchhoff conditions. The present modeling deals with the aperture problem and also takes into account the heuristic Murrey's cubic law.

### Introduction

Our goal is to propose a simple approximate method of calculation *the pressure drop matrix*  $Q$  [3]. This is achieved by using classical shape optimization techniques.

The pressure drop matrix was introduced in [3, 4] as an integral characteristic of a junction of several pipes with absolutely rigid walls. It appears that the elements of this matrix are included in the modified Kirchhoff transmission conditions, which describe more adequately the total pressure loss at the bifurcation point of the flow passed through the corresponding junction of the pipes, see [1, 2, 5].

In the paper [2] was developed a one-dimensional model of a Stokes' flow at a junction of thin (of order  $O(h)$ ) vessels with rigid walls for fixed flows of the fluid at the inlet cross-sections and fixed peripheral pressure at the outlet cross-sections. With the help of the pressure drop matrix  $Q$  apart the Neumann conditions (given flux) and the Dirichlet conditions (given pressure) at the external vertices, the one-dimensional Reynolds equations on the edges of the graph

are supplied with transmission conditions at the internal vertices containing a small parameter  $h$  and passing as  $h \rightarrow +0$  into the classical Kirchhoff transmission conditions. It has been established that the pre-limit transmission conditions ensure an exponentially small relative error  $O(e^{-\frac{\rho}{h}})$ ,  $\rho > 0$ , in the calculation of the solution to the three-dimensional problem, but the limit Kirchhoff conditions only give polynomially small relative error  $O(h)$  for the pressure and  $O(h^3)$  for the velocity vector.

This report refers to some basics for implementation in computer modeling. The introduced matrix  $Q$  of pressure drops depends on the shape of a junction region and possibly on its elastic properties. To find such dependence for real vessels it is possible only in solving inverse problems based on data obtained by the MRI method. Nevertheless, we propose an elementary procedure of finding these coefficients in the case of a three-dimensional Stokes system (cf. [1] in the case of a two-dimensional Stokes system). We also analyze the influence of certain formations near the bifurcation node and close to it on the matrix  $Q$ . Solving *the aperture problem* we get the leading term of the asymptotics for this matrix.

## Asymptotics of the pressure drop matrix

### 1. Aperture problem

Consider a domain  $\Omega$  including a wall with a small circular aperture  $\sigma$  of the radius  $\varepsilon > 0$  and center  $x^0$  inside it (see Fig. 1, a). Let us stretch the coordinates with respect to the center of the aperture  $\sigma$ :

$$x \mapsto \xi = \varepsilon^{-1}(x - x^0). \quad (1)$$

In the stretched coordinates (1) we arrive at *the aperture problem*, namely, we consider the homogeneous Stokes system in the domain  $\Xi = \mathbb{R}_+^3 \cup \sigma \cup \mathbb{R}_-^3$ :

$$-\nu \Delta_\xi U(\xi) + \nabla_\xi P(\xi) = 0, \quad -\operatorname{div}_\xi U(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad (2)$$

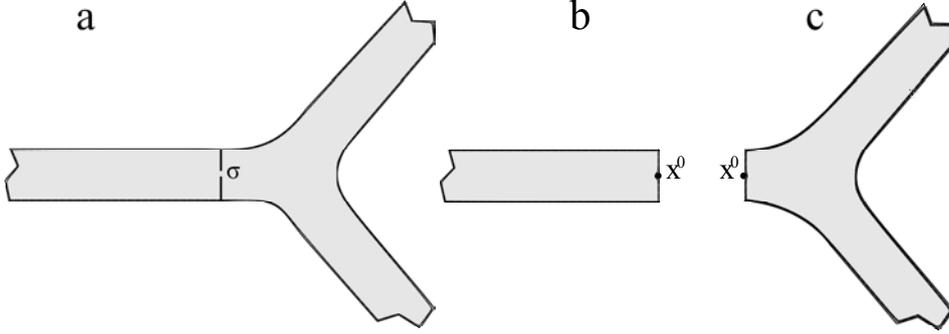


Figure 1: Domain  $\Omega$  with a screen.

$$U(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi. \quad (3)$$

Roughly speaking,  $\Xi$  consists of two disjoint half-spaces  $\mathbb{R}_{\pm}^3 = \{\xi = (\eta, \zeta) : \pm\zeta > 0\}$  separated by a wall and connected by a hole (aperture)  $\sigma = \{\xi : \zeta = 0, |\eta| < 1\}$  through this wall. In what follows, we apply the method of matched asymptotic expansions.

As usual, it is required to find all solutions to the aperture problem for the homogeneous Stokes system in  $\Xi$ , which may grow at infinity no faster than linear functions.

One of such solutions is obvious, that is, the constant pressure

$$\mathcal{P}^0(\xi) = 1, \quad \mathcal{V}^0(\xi) = 0.$$

This problem has two more solutions which are called the Quette flows  $(V^k, P^k)$ ,  $k = 1, 2$ , where

$$V^1(\xi) = (\zeta, 0, 0), \quad V^2(\xi) = (0, \zeta, 0), \quad P^1 = P^2 = 0.$$

By prescribing the pressure drop at infinity between the half-spaces  $\mathbb{R}_{\pm}^3$  we also obtain the solutions with the unit flux of fluid through the aperture  $\int_{S_{\pm}^2} \Phi_{\rho}^0(\theta) dS_{\theta} = 1$ . Here,  $\rho = |\xi|$ ,  $\theta = \xi/\rho$ , and  $dS_{\omega}$  is the spherical area element. These solutions admit the representations as  $\rho \rightarrow +\infty$ ,

$$U^0 = \pm \rho^{-2} \Phi^0(\theta) + \dots, \quad P^0 = \mp P_0^0 \rho^{-3} + \dots, \quad \pm\zeta > 0,$$

and

$$U^k(\xi) = \pm V^k + \sum_{j=1}^2 c_j^\pm \rho^{-2} \Phi^j(\theta) + \dots, \quad P^k(\xi) = 0 + \dots, \quad \pm \zeta > 0.$$

Substituting the solutions  $(U^0, P^0)$  and  $(\mathcal{V}^0, \mathcal{P}^0)$  into the Green formula on the set  $\Xi \cap B_R^3$  and then by taking the limit as  $R \rightarrow +\infty$  we obtain

$$2P_0^0 = \nu \|\nabla_\xi U^0; L^2(\xi)\|^2 > 0.$$

Now we will construct the asymptotic expansion for the solution of (2), (3) as  $\varepsilon \rightarrow +0$ . For  $\varepsilon = 0$  the domain  $\Omega$  splits into  $\Omega^0$  and  $\Omega \setminus \Omega^0$  (see Fig. 1, b and c). The asymptotic representation of the solution in  $\Omega^0$  is the following

$$v^0(x) = \mathbf{v}^0(y^0) + \dots, \quad p^0(x) = \mathbf{p}^0(z^0) + \dots, \quad \text{as } z^0 \rightarrow -\infty,$$

and as  $r \rightarrow +0$

$$v^0(x) = -r^{-2} \Phi^0(\theta) + \hat{z} \nabla_y \hat{v}^0(x^0) + \dots, \quad p^0(x) = -r^{-3} \Psi^0(\theta) + \hat{p}^0(x^0) + \dots,$$

where  $(\mathbf{v}^0, \mathbf{p}^0)$  is the Poiseuille flow in the cylinder  $\Omega^0$ , and  $\hat{z} = z - z^0$ .

In the domain  $\Omega \setminus \Omega^0$  we get as  $z^\tau \rightarrow +\infty$ ,  $\tau = \pm$ ,

$$v^\pm(x) = \delta_{\tau, \pm} \mathbf{v}^\tau(y^\tau) + \dots, \quad p^\pm(x) = \delta_{\tau, \pm} \mathbf{p}^\tau(z^\tau) + C_\tau + C_0 + \dots$$

and as  $r \rightarrow +0$

$$v^\pm(x) = r^{-2} \Phi^0(\theta) + \hat{z} \nabla_y \hat{v}^\pm(x^0) + \dots, \quad p^\pm(x) = r^{-3} \Psi^0(\theta) + \hat{p}^\pm(x^0) + C_0 + \dots,$$

where  $\delta_{\tau, \pm}$  is the Kronecker symbol,  $(\mathbf{v}^\tau, \mathbf{p}^\tau)$  is the Poiseuille flow in the cylinder  $\Omega^\tau$ , and  $C_\pm$  are fixed constants,  $C_0$  is an arbitrary constant.

Let us turn to the procedure of matching inner and outer expansions for  $(v^0, p^0)$  with  $(v^\pm, p^\pm)$ . As an *inner expansion*, due to the presence of singularities of order  $O(r^{-3})$  in  $(v^\alpha, p^\alpha)$  we start with the term

$$\varepsilon^{-2}(U^0(\xi); \varepsilon^{-1}(P^0(\xi) + P_0^0)).$$

Comparing the expansions at  $r \rightarrow +0$  and  $\rho \rightarrow +\infty$  we find  $C_0 = 2\varepsilon^{-3}P_0^0$ . Hence, we get the asymptotics of the pressure drop matrix

$$Q = 2\varepsilon^{-3}P_0^0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{-2}).$$

## 2. Elementary procedure for finding the pressure drop matrix. Murrey's law

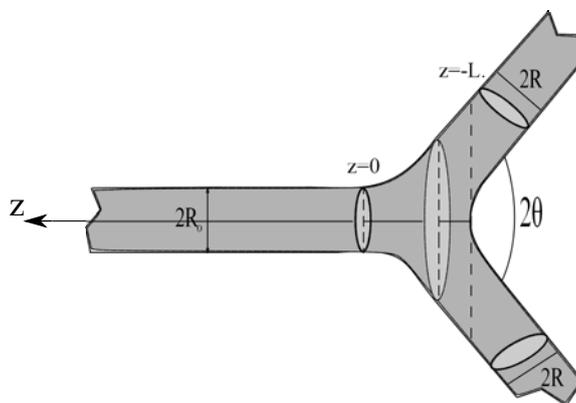


Figure 2: Symmetric bifurcation of a three-dimensional channel.

Consider an infinite three-dimensional symmetric channel  $\Upsilon$  with a bifurcation, which is depicted in Fig.3, where its geometric parameters are shown. The walls are assumed to be rigid and the angle  $\theta$  is small. The vertical dot-and-dash divide  $\Upsilon$  into four parts: three semi-infinite cylinders  $\Omega^\pm$  and  $\Omega^0$  and a middle part  $\Omega^\bullet$ , which is located between points  $z = 0$  and  $z = -L_\bullet$  in the figure. The length and width of the middle section  $\Omega^\bullet$  are evaluated as follows:

$$\begin{aligned} L_\bullet &= (\sin \theta)^{-1}(2R - R_0 \cos \theta) \approx (\sin \theta)^{-1}(2R - R_0), \quad R = R_\pm, \\ 2a_\bullet(z) &= 2(R_0 - z \sin \theta). \end{aligned} \tag{4}$$

We assume that the cross-section of the middle part  $\Omega^\bullet$  is an ellipse whose semi-axes are connected by the relation

$$b_\bullet(z) = (1 + \beta z)a_\bullet(z), \quad z \in [-L, 0], \quad \text{with } \beta = L_\bullet^{-1}(2 + \sqrt{2})^{-1}.$$

Let us find approximate formulas for solutions (see [4])

$$\begin{aligned} (V^\pm, P^\pm) &= -\chi_0(\mathcal{V}^0, \mathcal{P}^0) + \chi_\pm(\mathcal{V}^\pm, \mathcal{P}^\pm) \\ &+ \chi_\pm Q_{\pm\pm}(0, 1) + \chi_\mp Q_{\pm\mp}(0, 1) + (\tilde{v}_\pm, \tilde{p}_\pm), \end{aligned}$$

of problem in the three-dimensional junction:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u(x) + \nabla p(x) &= F(x), \quad -\operatorname{div} u(x) = G(x), \quad x \in \Upsilon, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Upsilon. \end{aligned}$$

Its symmetry with respect to the horizontal axis allows us to consider only one of the solutions, for example,  $(V, P) = (V^+, P^+)$ . Owing to the large parameter  $(\sin\theta)^{-1}$ , we can use a three-dimensional Reynolds–Poiseuille ansatz, ignoring the boundary layer effect, which brings an error of order  $O(1)$ , small with respect to  $O((\sin\theta)^{-1})$ . Thus, we seek the one-dimensional distribution of the pressure in the form

$$\begin{aligned} P(x) &\approx P^0(z) = A_0^{-1}z && \text{for } z \in (0, +\infty), \\ P(x) &\approx P^+(z) = A^{-1}z + Q_{++} && \text{for } z \in (-\infty, -L_\bullet), \\ P(x) &\approx P^-(z) = Q_{+-} && \text{for } z \in (-\infty, -L_\bullet), \\ P(x) &\approx P^\bullet(z) && \text{for } z \in (-L_\bullet, 0). \end{aligned} \quad (5)$$

In the three-dimensional case, the coefficients are found by the formulas

$$A_\bullet(z) = \frac{\pi a_\bullet^4(z)(1 + \beta z)^3}{4\nu(1 + (1 + \beta z)^2)}, \quad A_0 = \frac{\pi R_0^4}{8\nu}, \quad A = \frac{\pi R^4}{8\nu}, \quad (6)$$

(see, for example, [6] for calculation of an explicit formula in case of ellipse of the coefficient  $A_\alpha$ , which is proportional to *the torsion rigidity of a section*), and the Reynolds equation on  $(-L_\bullet, 0)$  takes the form

$$-\partial_z(A_\bullet(z)\partial_z P^\bullet(z)) = 0. \quad (7)$$

Formulas (5), together with the Kirchhoff conditions at  $z = 0$  and  $z = -L_\bullet$ , show that

$$P^\bullet(0) = 0, \quad A_\bullet(0)\partial_z P^\bullet(0) = 1, \quad A_\bullet(-L_\bullet)\partial_z P^\bullet(-L_\bullet) = 1,$$

and, hence,

$$\begin{aligned} P^\bullet(z) &= - \int_z^0 \frac{d\zeta}{A_\bullet(\zeta)} = - \frac{4\nu}{\pi} \int_z^0 \frac{d\zeta(1 + (1 + \beta\zeta)^2)}{(R_0 - \zeta \sin \theta)^4(1 + \beta\zeta)^3} \\ &= - \frac{4\nu}{\pi \sin \theta} (F_1(R, R_0) + F_2(z, R, R_0)), \end{aligned} \quad (8)$$

where the functions  $F_1$  and  $F_2$  have a complicated but closed-form expressions. Since  $a_\bullet(0) = R_0$ ,  $a_\bullet(-L_\bullet) \approx 2R$  and  $A_\bullet(0) = A_0$ ,  $A_\bullet(-L_\bullet) \approx 3^{-1}2^{9/2}A$ , using (8) and (5) together with the continuity of the pressure at the point  $z = -L_\bullet$ , we find the quantities

$$\begin{aligned} Q_{+-} &\approx P^\bullet(-L_\bullet) \approx - \frac{4\nu}{\pi \sin \theta} (F_1(R, R_0) + f_2(R, R_0)) < 0, \\ Q_{++} &\approx P^\bullet(-L_\bullet) + A^{-1}L_\bullet \approx - \frac{4\nu}{\pi \sin \theta} G(R, R_0) > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Here, the functions  $f_2$  and  $G$  also have closed-form expressions and do not depend on small parameter  $\sin \theta$ . The entries  $Q_{+-} < 0$  and  $Q_{++} > 0$  have definite signs if the radii of the vessels satisfy the Murray's law

$$R_0^3 = R_+^3 + R_-^3. \quad (10)$$

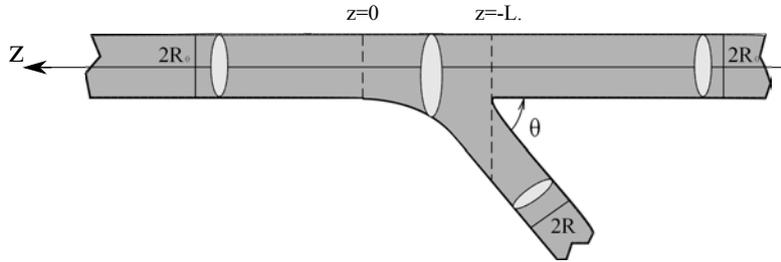


Figure 3: Asymmetric bifurcation of a three-dimensional channel.

A three-dimensional channel  $\Upsilon$  with branching is depicted in Fig. 3, where all geometric parameters can be found. We accept the notation and assumptions from the symmetric bifurcation. Formulas (4) are replaced by

$$L_{\bullet} \approx (\sin \theta)^{-1} 2R, \quad 2R_{\bullet}(z) = 2R_0 - z \sin \theta. \quad (11)$$

Here we assume that the cross-section of the middle part  $\Omega^{\bullet}$  is a disc of radius  $R_{\bullet}(z)$ ,  $z \in [-L_{\bullet}, 0]$ . Since there is no symmetry now, we must construct both solutions  $(V_{\pm}, P_{\pm})$ . We start with  $(V, P) = (V^+, P^+)$  the flux of which goes to the left channel  $\Omega^+$  of width  $2R_0$ , and similarly to (5) we obtain

$$\begin{aligned} P(x) &\approx P^0(z) = A_0^{-1}z && \text{for } z \in (0, +\infty), \\ P(x) &\approx P^+(z) = A_0^{-1}z + Q_{++} && \text{for } z \in (-\infty, -L_{\bullet}), \\ P(x) &\approx P^-(z) = Q_{+-} && \text{for } z \in (-\infty, -L_{\bullet}), \\ P(x) &\approx P^{\bullet}(z) && \text{for } z \in (-L_{\bullet}, 0). \end{aligned} \quad (12)$$

We have relations

$$A_{\bullet}(-L_{\bullet}) = \frac{\pi R_{\bullet}^4(z)}{8\nu}, \quad A_0 = \frac{\pi R_0^4}{8\nu}, \quad A = \frac{\pi R^4}{8\nu}. \quad (13)$$

The equation (7) is valid, and the Kirchhoff conditions show that

$$\begin{aligned} P^{\bullet}(z) &= - \int_z^0 \frac{d\zeta}{A_{\bullet}(\zeta)} = - \frac{8\nu}{3\pi \sin \theta} R^{-3}(\zeta) \Big|_{\zeta=z}^0 \\ &= \frac{8\nu}{3\pi \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 - \frac{z \sin \theta}{2})^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

and

$$\begin{aligned} Q_{+-} &\approx \frac{8\nu}{3\pi \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) < 0, \\ Q_{++} &\approx \frac{8\nu}{3\pi \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^3} - \frac{1}{R_0^3} + \frac{6R}{R_0^4} \right) > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

For the solution  $(V, P) = (V^-, P^-)$  the flux of which goes to the lower (see Fig. 3) channel of width  $2R$ , two middle relations in (12) must be changed according to

$$\begin{aligned} P(x) &\approx P^-(z) = A^{-1}z + Q_{--} && \text{for } z \in (-\infty, -L_\bullet), \\ P(x) &\approx P^+(z) = Q_{-+} && \text{for } z \in (-\infty, -L_\bullet). \end{aligned} \quad (16)$$

The final formulas for the entries of the matrix of pressure drops look as follows:

$$\begin{aligned} Q_{-+} &\approx \frac{8\nu}{3\pi \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) < 0, \\ Q_{--} &\approx \frac{8\nu}{3\pi \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^3} - \frac{1}{R_0^3} + \frac{6}{R^3} \right) > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

**Remark 1.** A possibility to obtain approximate formulas (9) and (15), (17) the pressure drop matrix is provided by the fact that for small  $\theta$ , the junction elongates and has length  $O((\sin \theta)^{-1})$  (see expressions (4) and (11) for  $L_\bullet$ ). At the same time, the limit passage  $\theta \rightarrow +0$  fails, i.e., one can use these results only for "not very small" angles  $\theta$ .

Entries (9) and (15), (17) of the matrix of pressure drops are inversely proportional to the cube of the radii in accordance with the Murrey's distributional law (10).

**Acknowledgements.** The author was supported by Linköping University, and by RFBR grant 16-31-60112.

#### References

- [1] Kozlov, V. A., Nazarov, S. A., Transmission conditions in a one-dimensional model of bifurcating arteries with elastic walls // J Math Sci, 224:1, 2017, 94–118.
- [2] Kozlov, V. A., Nazarov, S. A., One-dimensional model of flow in a junction of thin channels, including arterial trees // Sbornik: Mathematics, 208:8, 2017, 1138–1186.

- [3] *Nazarov, S. A., Pileckas, K.*, Asymptotic conditions at infinity for the Stokes and Navier-Stokes problems in domains with cylindrical outlets to infinity // *Quaderny di matematica*, 4, 1999, 141–243.
- [4] *Kozlov, V. A., Nazarov, S. A., Zavorokhin, G. L.*, Pressure drop matrix of a bifurcation of an artery with defects // *Preprints POMI*, 06/2018, 1–30.
- [5] *Berntsson, F., Karlsson, M., Kozlov, V. A., Nazarov, S. A.*, A modification to the Kirchhoff conditions at a bifurcation and loss coefficients // *LiU electronic press, MAI, LiTH-MAT-R-2018/05-SE*, 2018, 1–10.
- [6] *Polya, G., Szegö, G.*, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* // *Annals of Mathematics Studies*, no. 27, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА МАГНЕТСОПРОТИВЛЕНИЯ  
АНИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОБРАЗЦА  
С МАЛЫМИ КОНТАКТАМИ

Крутова Ю. А. (Челябинск, ЧелГУ),  
Ершов А. А. (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)

Введение

Для расчёта магнетосопротивления (см., напр., [1]) образца прямоугольной формы мы будем использовать математическую модель, приведённую в работе Н.Н. Полякова [2]. В ней были проведены эксперименты по измерению электрического сопротивления монокристалла арсенида кадмия  $\text{CdAs}_2$  по следующей схеме.

Образец прямоугольной формы вырезан параллельно кристаллографическим плоскостям. По торцам образца расположены контакты 1 и 2, через которые пропускается ток  $I_{12}$ . Кроме того, весь образец помещен в магнитное поле с индукцией  $B_z$ , которое направлено перпендикулярно плоскости образца. При постоянном токе  $I_{12}$  и в установившемся режиме для моделирования электрического потенциала  $\varphi(x, y)$  Н.Н. Поляковым использовалось решение следующей краевой задачи для эллиптического уравнения с кривой производной на границе.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < d, \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0, a} = \begin{cases} -\frac{I_{12}}{\sigma_x 2 \varepsilon d}, & y \in \left( \frac{b}{2} - \varepsilon, \frac{b}{2} + \varepsilon \right), \\ 0, & y \in \left( 0, \frac{b}{2} - \varepsilon \right) \cup \left( \frac{b}{2} + \varepsilon, b \right), \end{cases} \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \gamma_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{y=0, b} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $\gamma_x = \sigma_x R_z B_z$ ,  $\gamma_y = \sigma_y R_z B_z$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  — компоненты тензора электропроводимости;  $a$ ,  $b$ ,  $d$  — длина, ширина и толщина образца;  $2\varepsilon$  — ширина токовых контактов;  $R_z$  — компонента тензора Холла при условии, что вектор плотности тока лежит в плоскости  $xOy$  и поперечное магнитное поле напряжённости  $B_z$  направлено вдоль оси  $Oz$ .

Решение данной краевой задачи рассматривается в классе функций, бесконечно дифференцируемых внутри области и непрерывных вплоть до границы области. В работе Н.Н. Полякова [2] указано, что нахождение решения комплексным методом Фурье довольно громоздко (и в то же время явный вид решения не приведён), поэтому мы приведём другой, более простой способ.

Целью нашей работы является нахождение асимптотики электрического сопротивления прямоугольного образца в магнитном поле при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### § 1. Решение краевой задачи

Решим краевую задачу (1) с помощью стандартного (вещественного) метода Фурье.

Обозначим через  $\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$ . Тогда  $\gamma_y = \gamma^2 \gamma_x$ .

Будем вначале искать решение в виде произведения  $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$ . Подставим его в уравнение

$$X''Y + \gamma^2 XY'' = 0$$

и разделим переменные

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{\gamma^2 Y} = \lambda.$$

Здесь  $\lambda$  — некоторая неопределённая пока постоянная.

Теперь подставим  $\varphi = X(x)Y(y)$  в граничные условия (1):

$$X(x)Y'(0) - \gamma_x X'(x)Y(0) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$X'(x) = \mu X(x),$$

где  $\mu = \frac{Y'(0)}{\gamma_x Y(0)}$  — некоторая постоянная.

Таким образом, одновременно выполняется

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X'(x) = \mu X(x) \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} X''(x) = \frac{\lambda}{\mu} X'(x), \\ X''(x) = \mu X'(x). \end{cases}$$

Отсюда,

$$\lambda = \mu^2.$$

Аналогичными действиями получим следующую задачу Штурма-Лиувилля для  $Y(y)$ :

$$\begin{cases} Y''(y) = -\frac{\mu^2}{\gamma^2} Y(y), & y \in (0, b), \\ Y'(0) = \gamma_x \mu Y(0), \\ Y'(b) = \gamma_x \mu Y(b). \end{cases} \quad (2)$$

Ненулевыми решениями задачи (2) являются

$$Y_n(y) = \cos\left(\frac{\pi n}{b} y + A\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где  $A = -\operatorname{arctg}(\gamma_x \gamma)$ .

Соответственно, функции  $X_n(x) = e^{\gamma \frac{\pi n}{b} x}$  при  $n \in \mathbb{Z}$ .

Общее решение задачи (1) можно искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi = & B_0 + A_0(x + \gamma_x y) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ e^{\gamma \frac{\pi n}{b} x} \cos\left(\frac{\pi n}{b} y + A\right) + B_n e^{-\gamma \frac{\pi n}{b} x} \cos\left(\frac{\pi n}{b} y - A\right) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\gamma_y = \gamma^2 \gamma_x$ ,  $\sin A = -\gamma_x \gamma \cos A$ , то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = A_0(1 + \gamma_x \gamma_y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma \frac{\pi n}{b} \left[ (1 + \gamma_x \gamma_y) e^{\gamma \frac{\pi n}{b} x} + B_n (1 - \gamma_x \gamma_y) e^{-\gamma \frac{\pi n}{b} x} \right] \cos \left( \frac{\pi n}{b} y \right) \cos A.$$

Для того чтобы выполнялось равенство

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=a},$$

положим  $B_n = \frac{1 + \gamma_x \gamma_y}{1 - \gamma_x \gamma_y} e^{\gamma \frac{\pi n}{b} a}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = \\ &= A_0(1 + \gamma_x \gamma_y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma \frac{\pi n}{b} \frac{1 + \gamma_x \gamma_y}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}} \left( 1 + e^{\gamma \frac{\pi n}{b} a} \right) \cos \left( \frac{\pi n}{b} y \right), \end{aligned}$$

учитывая, что  $\cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}}$ .

Обозначим  $C_0 = A_0(1 + \gamma_x \gamma_y)$ ,  $C_n = A_n \gamma \frac{\pi n}{b} \frac{1 + \gamma_x \gamma_y}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}} \left( 1 + e^{\gamma \frac{\pi n}{b} a} \right)$ . Тогда на отрезке  $y \in [0, b]$  будем иметь равенство

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left( \frac{\pi n}{b} y \right) = \begin{cases} -\frac{I_{12}}{\sigma_x 2 \varepsilon d}, & y \in \left( \frac{b}{2} - \varepsilon, \frac{b}{2} + \varepsilon \right), \\ 0, & y \in \left[ 0, \frac{b}{2} - \varepsilon \right) \cup \left( \frac{b}{2} + \varepsilon, b \right]. \end{cases}$$

Отсюда,

$$C_0 = -\frac{I_{12}}{\sigma_x b d}, \quad C_n = -\frac{I_{12}}{\sigma_x 2 \varepsilon d} \cdot \frac{4}{\pi n} \cos \left( \frac{\pi n}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi n}{b} \varepsilon \right).$$

Поскольку  $\cos(\pi m) = (-1)^m$  при  $m \in \mathbb{Z}$ , то

$$C_{2m} = -\frac{I_{12}}{\sigma_x \varepsilon d} \cdot \frac{(-1)^m}{\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right), \quad C_{2m-1} = 0.$$

Таким образом,

$$A_0 = -\frac{I_{12}}{\sigma_x b d} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_x \gamma_y}, \quad A_{2m-1} = 0,$$

$$A_{2m} = -\frac{I_{12}}{\sigma_x \varepsilon d} \cdot \frac{(-1)^m b}{2\gamma \pi^2 m^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}}{1 + \gamma_x \gamma_y} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)}{1 + e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} a}}.$$

И окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & B_0 - \frac{I_{12}}{\sigma_x b d} \cdot \frac{x + \gamma_x y}{1 + \gamma_x \gamma_y} - \frac{I_{12}}{\sigma_x \varepsilon d} \frac{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}}{1 + \gamma_x \gamma_y} \times \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m b}{2\gamma \pi^2 m^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)}{1 + e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} a}} \left[ e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} x} \cos\left(\frac{2\pi m}{b} y + A\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \gamma_x \gamma_y}{1 - \gamma_x \gamma_y} e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} (a-x)} \cos\left(\frac{2\pi m}{b} y - A\right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A = -\operatorname{arctg}(\gamma_x \gamma_y)$ ,  $B_0$  — произвольная аддитивная постоянная.

## § 2. Вычисление асимптотики магнетосопротивления

Используя решение (3), вычислим величину выделяемой мощности по формуле

$$\begin{aligned} W = & d \cdot \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \sigma_x + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \sigma_y \right) dy dx = \frac{a I_{12}^2}{\sigma_x b d} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_x \gamma_y} + \\ & + \frac{2 I_{12}^2}{d \pi \sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \left( \frac{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}{1 - \gamma_x^2 \gamma_y^2} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)}{m \cdot \left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)^2} \operatorname{th}\left(\gamma \frac{\pi m}{b} a\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) легко получить выражение для электрического сопротивления  $R$  прямоугольной пластины в магнитном поле, так как  $R = W/I_{12}^2$ .

Заметим, что ряд (4) имеет сложную зависимость от малого параметра  $\varepsilon$ : при стремлении  $\varepsilon$  к нулю он расходится как гармонический. Однако, в работе [3] уже была получена асимптотика суммы следующего ряда при  $\mu \rightarrow 0$ :

$$S(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\mu n) \operatorname{th} \lambda n}{(\mu n)^2 n} = \ln \frac{e^{3/2}}{2\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda n}}{n \operatorname{ch}(\lambda n)} + \\ + \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-\lambda n}}{\operatorname{ch}(\lambda n)} \right) \mu^2 + \left( \frac{1}{2700} - \frac{2}{45} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 e^{-\lambda n}}{\operatorname{ch}(\lambda n)} \right) \mu^4 + O(\mu^6).$$

Таким образом,

$$R = \frac{a}{\sigma_x b d} \frac{1}{1 + \gamma_x \gamma_y} + \\ + \frac{2}{d\pi \sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \left( \frac{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}{1 - \gamma_x^2 \gamma_y^2} \right)^2 \left( \ln \frac{e^{3/2} b}{4\pi \varepsilon} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi a}{b} \gamma m}}{m \operatorname{ch} \left( \frac{\pi a}{b} \gamma m \right)} \right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{b^2}\right).$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-31-00018 мол\_а).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Киреев П. С.* Физика полупроводников. Изд. 2, доп. 1975.
- [2] *Поляков Н. Н.* Об измерении коэффициент Холла электропроводимости анизотропных проводников // Заводская лаборатория. 1991. Т. 57. № 3. С. 20–22.
- [3] *Ершов А. А.* К задаче об измерении электропроводности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 6. С. 1004–1007.

УДК

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Мурясов Р. Р. (Уфа, БГУ)

### Введение

**Определение 1.** Функция  $f: D \rightarrow E$ , где  $D, E$  — некоторые вещественные числовые множества, называется выпуклой, если  $\forall x_1, x_2 \in D$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

, где  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Существуют различные преобразования, сохраняющие выпуклость функций.

Например:

1) Пусть  $f: D \rightarrow E$ ,  $g: D \rightarrow E$ , где  $D, E$  — некоторые вещественные числовые множества,  $f, g$  — выпуклые функции. Тогда функция  $f + g$  является выпуклой.

2) Пусть  $c > 0$ ,  $f: D \rightarrow E$  — выпуклая функция, тогда  $cf$  — выпуклая функция.

Для различных классов выпуклых функций также существуют преобразования, сохраняющие свойства этих классов, в том числе выпуклость.

Например:

1) Пусть  $f, g: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  — положительные возрастающие выпуклые функции, тогда их произведение  $fg$  также является положительной возрастающей выпуклой функцией.

2) Пусть  $f, g: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  — положительные возрастающие выпуклые функции, тогда их суперпозиция  $f \circ g$  также является положительной возрастающей выпуклой функцией.

В данной работе рассматриваются условия, при которых интегральное среднее данных функций сохраняет их свойства.

**Задача 1.** Пусть  $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  — возрастающая функция,  $g : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  — возрастающая функция,  $f$  и  $g$  1 раз непрерывно дифференцируемы,  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ . Найти дополнительные условия на функцию  $g$  при выполнении которых функция

$$h(x) = \frac{\int_0^x f(t)g'(t)dt}{g(x)}$$

является возрастающей  $\forall x \in (0; +\infty)$ .

Докажем, что  $h$  является возрастающей  $\forall x \in (0; +\infty)$  для всех функций  $g$ , удовлетворяющих условию задачи.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f(x)g'(x)g(x) - g'(x) \int_0^x f(t)g'(t)dt}{g^2(x)} = \\ &= \frac{g'(x)}{g^2(x)} (f(x)g(x) - \int_0^x f(t)g'(t)dt) = \\ &= \frac{g'(x)}{g^2(x)} \int_0^x g(t)f'(t)dt \end{aligned}$$

По условию задачи  $f$  и  $g$  — положительные возрастающие функции  $\Rightarrow f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ ,  $f' \geq 0$  и  $g' \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$ . Отсюда следует, что  $\int_0^x g(t)f'(t)dt \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$  и соответственно  $h'(x) \geq 0 \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow h(x)$  возрастает на  $(0; +\infty)$ .

**Задача 2.** Пусть  $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ ,  $g : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  — дважды непрерывно дифференцируемые возрастающие функции, при этом  $f$  — выпуклая функция. Найти условия на  $g$  при которых функция

$$h(x) = \frac{\int_0^x f(t)g'(t)dt}{g(x)}$$

является выпуклой  $\forall x \in (0; +\infty)$ .

$$\begin{aligned}
h''(x) &= (h'(x))' = \left( \frac{g'(x) \int_0^x g(t) f'(t) dt}{g^2(x)} \right)' = \\
&= \frac{(g''(x)g(x) - 2g'^2(x)) \int_0^x g(t) f'(t) dt + f'(x)g'(x)g^2(x)}{g^3(x)}
\end{aligned}$$

Для выпуклости  $h(x)$  необходимо и достаточно  $h''(x) \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$  т.е

$$\frac{(g''(x)g(x) - 2g'^2(x)) \int_0^x g(t) f'(t) dt + f'(x)g'(x)g^2(x)}{g^3(x)} \geq 0$$

По условию задачи  $g$  - положительная функция  $\Rightarrow g^3(x) > 0$  на  $(0; +\infty) \Rightarrow$  для выпуклости функции  $h$  на  $(0; +\infty)$  необходимо и достаточно

$$(g''(x)g(x) - 2g'^2(x)) \int_0^x g(t) f'(t) dt + f'(x)g'(x)g^2(x) \geq 0$$

По условию задачи  $f$  и  $g$  - возрастающие функции  $\Rightarrow$

$$f'(x)g'(x)g^2(x) \geq 0$$

$\Rightarrow$  для выпуклости  $h$  достаточно

$$(g''(x)g(x) - 2g'^2(x)) \int_0^x g(t) f'(t) dt \geq 0$$

$\int_0^x g(t) f'(t) dt \geq 0$ , так как  $g \geq 0$  и  $f' \geq 0$ . Отсюда получаем, что для выпуклости  $h$  достаточно

$$g''(x)g(x) - 2g'^2(x) \geq 0$$

*Замечание 1.*  $\forall$  функция  $g$ , удовлетворяющая условию задачи и соотношению  $g''(x)g(x) - 2g'^2(x) \geq 0$  является выпуклой.

Доказательство:  $g''(x)g(x) - 2g'^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow g''(x)g(x) \geq 2g'^2(x)$   
По условию задачи  $g \geq 0 \Rightarrow g'' \geq 0 \Rightarrow g$  - выпуклая функция.

**Лемма 1.** Пусть функция  $\varphi : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  положительна, возрастает и выпукла на  $[0; +\infty)$  и  $\varphi(0) = 0$ , тогда функция  $\frac{\varphi(x)}{x}$  возрастает на  $(0; +\infty)$ .

Доказательство: Пусть  $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$  и  $x_2 > x_1$ . Проведём хорды из  $(0; 0)$  в  $(x_1; \varphi(x_1))$  и  $(x_2; \varphi(x_2))$ . По определению выпуклой функции

$$\varphi((1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(x_2)$$

где  $0 \leq \lambda \leq 1$ . С учётом  $\varphi(0) = 0$  получаем

$$\varphi(\lambda x_2) \leq \lambda\varphi(x_2)$$

Подставляя  $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$  получаем

$$\varphi(x_1) \leq \frac{x_1}{x_2}\varphi(x_2) \Leftrightarrow \frac{\varphi(x_1)}{x_1} \leq \frac{\varphi(x_2)}{x_2}$$

То есть  $\frac{\varphi(x)}{x}$  является возрастающей по определению, что и требовалось доказать.

**Следствие 1.**  $\forall \varphi(x)$ , удовлетворяющей условию Леммы 1

$$\varphi'(x) \cdot x \geq \varphi(x)$$

на  $(0; +\infty)$ .

Доказательство: по Лемме 1 функция  $\frac{\varphi(x)}{x}$  возрастает на  $(0; +\infty) \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)' \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$ .

$$\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)' = \frac{\varphi'(x) \cdot x - \varphi(x)}{x^2} \geq 0$$

Отсюда получаем  $\varphi'(x) \cdot x - \varphi(x) \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** Пусть  $f, g$  — функции, удовлетворяющие условию задачи 2, кроме того  $g$  — выпуклая функция. Тогда  $\forall x \in (0; +\infty)$

$$\int_0^x f(t)g'(t)dt \leq \frac{f(x)g'(x)x}{2}$$

Доказательство:  $(\int_0^x f(t)g'(t)dt)' = f(x)g'(x)$

$$\left(\frac{f(x)g'(x)x}{2}\right)' = \frac{f'(x)g'(x)x + f(x)g'(x) + f(x)g''(x)x}{2}$$

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^x f(t)g'(t)dt\right)' - \left(\frac{f(x)g'(x)x}{2}\right)' = \\ & = f(x)g'(x) - \frac{f'(x)g'(x)x + f(x)g'(x) + f(x)g''(x)x}{2} = \\ & = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g'(x)x - f(x)g''(x)x}{2} = \\ & = \frac{g'(x)(f(x) - f'(x)x) - f(x)g''(x)}{2} \end{aligned}$$

Функция  $f$  удовлетворяет условию задачи 2  $\Rightarrow f$  удовлетворяет условию леммы 1  $\Rightarrow f(x) - f'(x)x \leq 0 \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$  в силу того, что по условию  $f(x) \geq 0, g'(x) \geq 0, g''(x) \geq 0 \forall x \in [0; +\infty)$  получаем

$$\left(\int_0^x f(t)g'(t)dt\right)' - \left(\frac{f(x)g'(x)x}{2}\right)' \leq 0$$

$\forall x \in [0; +\infty)$ .

Обозначив  $u(x) = \int_0^x f(t)g'(t)dt, v(x) = \frac{f(x)g'(x)x}{2}$  получаем

$$u'(x) - v'(x) \leq 0$$

$\forall x \in [0; +\infty)$ . Отсюда получаем  $\int_0^x (u'(t) - v'(t))dt \leq 0 \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow \int_0^x u'(t)dt \leq \int_0^x v'(t)dt$   $u(x) = \int_0^x f(t)g'(t)dt,$   $v(x) = \frac{f(x)g'(x)x}{2} \Rightarrow u(0) = 0, v(0) = 0 \Rightarrow u(x) = \int_0^x u'(t)dt,$

$v(x) = \int_0^x v'(t)dt$  Тогда  $u(x) \leq v(x) \forall x \in (0; +\infty)$ . Переходя к исходным обозначениям получаем

$$\int_0^x f(t)g'(t)dt \leq \frac{f(x)g'(x)x}{2}$$

что и требовалось доказать.

Назовём функцию  $\varphi(x) : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  почти выпуклой, если  $\forall x \in [0; +\infty)$

$$\varphi'(x) \cdot x - \varphi(x) \geq 0$$

В силу следствия из леммы 1 любая положительная возрастающая выпуклая функция является почти выпуклой.

**Теорема 1.** Пусть  $f, g$  — функции, удовлетворяющие условию задачи 2, кроме того  $g$  — выпуклая функция. Тогда если  $\forall x \in (0; +\infty)$

$$\int_0^x g(t)f'(t)dt \geq \int_0^x f(t)g'(t)dt$$

то

$$h(x) = \frac{\int_0^x f(t)g'(t)dt}{g(x)}$$

является почти выпуклой на  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Доказательство: } \left(\frac{h(x)}{x}\right)' = \left(\frac{\int_0^x f dg}{xg}\right)' = \frac{fg'gx - (g+g'x)\int_0^x f dg}{x^2g^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow fg'gx - (g + g'x) \int_0^x f dg \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f dg \leq \frac{fg'gx}{g + g'x}$$

$g$  удовлетворяет условию леммы 1  $\Rightarrow$  по следствию из леммы 1  $g'x \geq g \Rightarrow 2g \leq g + g'x \leq 2g'x \Rightarrow \frac{fg'gx}{2g'x} \leq \frac{fg'gx}{g+g'x} \leq \frac{fg'gx}{2g} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{fg}{2} \leq \frac{fg'gx}{g+g'x} \leq \frac{fg'x}{2} \Rightarrow$  для того чтобы  $h$  была почти выпуклой необходимо  $\int_0^x f dg \leq \frac{fg'x}{2}$ . В силу леммы 2 это необходимое условие выполняется для всех  $f, g$  из условия теоремы.  $\frac{fg}{2} \leq \frac{fg'gx}{g+g'x} \leq \frac{fg'x}{2} \Rightarrow$  для того чтобы  $h$  была почти выпуклой достаточно  $\int_0^x f dg \leq \frac{fg}{2}$ . По формуле интегрирования по частям получаем  $\int_0^x f dg + \int_0^x g df = f(x)g(x) - f(0)g(0) = fg$

Отсюда получаем, что если  $\int_0^x g df \geq \int_0^x f dg$  то

$$\int_0^x f dg \leq fg - \int_0^x f dg \Rightarrow$$

$$\int_0^x f dg \leq \frac{fg}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h$  является почти выпуклой на  $(0; +\infty)$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Пусть  $f, g$ —функции, удовлетворяющие условию задачи 2, кроме того  $g$ —выпуклая функция. Тогда для выпуклости функции

$$h = \frac{\int_0^x f dg}{g}$$

на  $(0; +\infty)$  достаточно  $f'g - 2fg' \geq 0$

Доказательство:  $h$ —выпуклая функция  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (g''g - 2g'^2) \int_0^x g df + f'g'g^2 \geq 0$$

В случае когда  $g''g - 2g'^2 \geq 0$  функция  $h$ —выпуклая.

Если  $g''g - 2g'^2 < 0$ , то  $(g''g - 2g'^2) \int_0^x g df + f'g'g^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'g'g^2 \geq (2g'^2 - g''g) \int_0^x g df$$

$f, g$ —положительные возрастающие выпуклые функции по условию  $\Rightarrow f \geq 0, g \geq 0, f' \geq 0, g' \geq 0$  на  $(0; +\infty) \Rightarrow \int_0^x f dg \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^x gdf \leq fg$ , так как  $\int_0^x gdf + \int_0^x fdg = fg \Rightarrow \int_0^x gdf \leq fg \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  для выпуклости  $h$  достаточно

$$\begin{aligned} f'g'g^2 &\geq (2g'^2 - g''g)fg \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'g'g^2 - 2fgg'^2 + fg^2g'' &\geq 0 \end{aligned}$$

С учётом выпуклости  $g$   $fg^2g'' \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$  поэтому для выпуклости  $h$  достаточно

$$\begin{aligned} f'g'g^2 - 2fgg'^2 &\geq 0 \Leftrightarrow gg'(f'g - 2fg') \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'g - 2fg' &\geq 0 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** Пусть  $f, g$ —функции, удовлетворяющие условию задачи 2, кроме того  $g$ —выпуклая функция. Тогда для выпуклости функции

$$h = \frac{\int_0^x fdg}{g}$$

на  $(0; +\infty)$  достаточно  $f''g' - g''f' \geq 0 \forall x \in [0; +\infty)$ , т.е.

$$\left(\frac{f'}{g'}\right)' \geq 0$$

$\forall x \geq 0$ .

Доказательство:  $h$ —выпуклая функция  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (g''g - 2g'^2) \int_0^x gdf + f'g'g^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'g'g^2 &\geq (2g'^2 - g''g) \int_0^x gdf \end{aligned}$$

$g$ —выпуклая функция  $\Rightarrow g''g \geq 0 \Rightarrow$  для выпуклости  $h$  достаточно  $f'g'g^2 \geq 2g'^2 \int_0^x gdf \Leftrightarrow \int_0^x gdf \leq \frac{f'g'g^2}{2g'^2} = \frac{f'g^2}{2g'}$ . Для этого достаточно

$$\left(\int_0^x gdf\right)' \leq \left(\frac{f'g^2}{2g'}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow gf' \leq \frac{(f''g^2 + 2f'g'g)2g' - 2g''f'g^2}{4g'^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{4f'gg'^2 - 2f''g^2g' - 4f'g'^2g + 2g''f'g^2}{4g'^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2g''f'g^2 - 2f''g'g^2}{4g'^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2g^2(f''g' - g''f')}{4g'^2} \geq 0 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$  для этого достаточно  $\frac{f''g' - g''f'}{g'^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f'}{g'}\right)' \geq 0$ , что и требовалось доказать.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Т.1.–12-е изд. Издательство Лань. 2018.–608с.
- [2] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Т.2.–11-е изд. Издательство Лань. 2017.–800с.
- [3] *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть I.–Изд. 8-е. испр.– М.: МЦНМО, 2017.–564с.
- [4] *Виноградов О. Л.* Математический анализ: учебник.–СПб.: БХВ-Петербург, 2017.–752с.

УДК 532.22

## ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА СУШКИ ЯЧМЕНЯ

Павленко В. А. (Уфа, БГАУ, БГУ)

### Введение

Необходимо исследовать процесс сушки ячменя, а именно изучить как меняются влагосодержание, температура и давление с течением времени. Другими словами вывести уравнения зависимости влагосодержания, температуры и давления от времени. В общем случае такие уравнения были выведены Лыковым, (см. [1]) и имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = k_{11}\Delta T + k_{12}\Delta U + k_{13}\Delta P \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} = k_{21}\Delta T + k_{22}\Delta U + k_{23}\Delta P \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = k_{31}\Delta T + k_{32}\Delta U + k_{33}\Delta P \end{cases} \quad (1)$$

Как может показаться на первый взгляд, поставленная выше задача является тривиальной: просто решить уравнения и получить желаемые закономерности. Однако найти коэффициенты  $k_{ij}$  для ячменя в справочной литературе или в интернете не представляется возможным. Измерить их в лабораторных условиях весьма трудоёмко. Поэтому поставленная выше задача тривиальной не является.

В связи с этим Каримов Х.Т. провёл эксперимент в ходе которого сушился ячмень и в течение каждой секунды сушки измерялось влагосодержание, температура и давление. Следует отметить, что было проведено несколько опытов: в первом опыте давление не изменялось на протяжении всего времени сушки. В остальных опытах в определённый момент выкачивался воздух и

давление понижалось, затем, по истечении определённого времени воздух вкачивался обратно и давление восстанавливалось до атмосферного. Павленко В.А. обработал полученную числовую информацию и получил следующие закономерности.

## § 1. Закономерности

### Первый опыт

В течение первых 655 секунд зерно подвергалось ИК-нагреву, причём в течение первых 43 секунд ИК-нагрев был менее интенсивным, а затем — более.

ИК-нагрев до 43 секунды:

$$T = (0,021\tau + 292,979)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев с 43 секунды до 600 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев с 600 секунды до 655 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7}P)(\tau - 600)$$

Нагрелось. Температура постоянна. С 655 секунды до 1200 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7}P)(\tau - 600)$$

Продувка. С 1200 секунды до 1800 секунды:

$$T = (422,51 - 0,072\tau)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - 600(0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0) - A(e^{-B\tau * 10^{-4}} - e^{-0.12B}),$$

где

$$A = 5.7445 * 10^{-9} * P_0^2 - 0.0011636 * P_0 + 87.6$$

$$B = 1.0105 * 10^{-9} P_0^2 - 2.535 * 10^{-4} P_0 + 17.3$$

В этих уравнениях и далее  $0 \leq x \leq 0,05$ . Так как расстояние между инфракрасными стенками 0,1м. Поэтому при  $x = 0$  сушка будет более интенсивной, а при  $x = 0,05$  менее интенсивной. Здесь  $P_0$  — давление, до которого мы понижаем. В первом опыте  $P = 101308$ , во втором  $P = 81308$ , в третьем  $P = 61308$ , в четвертом  $P = 50000$ , в пятом  $P = 41308$ .

### Второй опыт

ИК-нагрев до 43 секунды:

$$T = (0,021\tau + 292,979)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев с 43 секунды до 600 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев, номьвыкачиваем воздух, темсамымпонижаем давление с атмосферного до 81308Па: 600 секунды до 655 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P)(\tau - 600)$$

$$P = 101308e^{-0,004(\tau-600)}$$

Продолжается нагрев. Давление снова постоянно и равно 81308Пас 655 секунды до 1141 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

Нагрелось. Температура постоянна. С 1141 секунды до 1190 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

Температура постоянна. Давление повышаем до первоначального. С 1190 секунды до 1200 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

$$P = 81308 + 2000(\tau - 1190)$$

Продувка. С 1200 секунды до 1800 секунды:

$$T = (422,51 - 0,072\tau)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - 600(0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0) - A(e^{-B\tau * 10^{-4}} - e^{-0,12B})$$

### Третий опыт

ИК-нагрев до 43 секунды:

$$T = (0,021\tau + 292,979)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев с 43 секунды до 600 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев, номвыкачиваемвоздух, темсамым понижаемдавление с атмосферного до 61308Па с 600 секунды до 655 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

$$P = 101308e^{-0,009(\tau-600)}$$

Продолжается нагрев. Давление снова постоянно и равно 61308Па с 655 секунды до 1141 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

Нагрелось. Температура постоянна. С 1141 секунды до 1190 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

Температура постоянна. Давление повышаем до первоначального. С 1190 секунды до 1200 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

$$P = 61308 + 4000(\tau - 1190)$$

Продувка. С 1200 секунды до 1800 секунды:

$$T = (422,51 - 0,072\tau)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - 600(0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0) - A(e^{-B\tau * 10^{-4}} - e^{-0,12B})$$

#### **Четвёртый опыт**

ИК-нагрев до 43 секунды:

$$T = (0,021\tau + 292,979)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев с 43 секунды до 600 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0 \tau}{24500}$$

ИК-нагрев, но мы выкачиваем воздух, тем самым понижаем давление с атмосферного до 50000Па с 600 секунды до 655 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

$$P = 101308e^{-0,0128(\tau-600)}$$

Продолжается нагрев. Давление снова постоянно и равно 81308Па с 655 секунды до 1141 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

Нагрелось. Температура постоянна. С 1141 секунды до 1190 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

Температура постоянна. Давление повышаем до первоначального. С 1190 секунды до 1200 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0)(\tau - 600)$$

$$P = 50000 + 5130,8(\tau - 1190)$$

Продувка. С 1200 секунды до 1800 секунды:

$$T = (422,51 - 0,072\tau)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - 600(0,0115 - 1,081 * 10^{-7} P_0) - A(e^{-B\tau * 10^{-4}} - e^{-0,12B})$$

**Пятый опыт**

ИК-нагрев до 43 секунды:

$$T = (0,021\tau + 292,979)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев с 43 секунды до 600 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = U_0 - \frac{U_0\tau}{24500}$$

ИК-нагрев, но мы выкачиваем воздух, тем самым понижаем давление с атмосферного до 41308Па с 600 секунды до 655 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7}P_0)(\tau - 600)$$

$$P = 101308e^{-0,0163(\tau-600)}$$

Продолжается нагрев. Давление снова постоянно и равно 41308Па с 655 секунды до 1141 секунды:

$$T = (0,069\tau + 290,915)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7}P_0)(\tau - 600)$$

Нагрелось. Температура постоянна. С 1141 секунды до 1190 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7}P_0)(\tau - 600)$$

Температура постоянна. Давление повышаем до первоначального. С 1190 секунды до 1200 секунды:

$$T = 336,11e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755 * U_0 - (0,0115 - 1,081 * 10^{-7}P_0)(\tau - 600)$$

$$P = 41308 + 6000(\tau - 1190)$$

Продувка. С 1200 секунды до 1800 секунды:

$$T = (422,51 - 0,072\tau)e^{-0,578x}$$

$$U = 0,9755*U_0 - 600(0,0115 - 1,081*10^{-7}P_0) - A(e^{-B\tau*10^{-4}} - e^{-0,12B})$$

Подставим полученные выражения в (1), получим:

До 43 секунды:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{0,063}{0,021\tau + 292,979} \Delta T \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{U_0 e^{0,578x}}{8185(0,021\tau + 292,979)} \Delta T \end{cases}$$

С 43 до 600 секунды:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{0,21}{0,069\tau + 290,915} \Delta T \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{U_0 e^{0,578x}}{8185(0,069\tau + 290,915)} \Delta T \end{cases}$$

С 600 до 655 секунды:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{0,21}{0,069\tau + 290,915} \Delta T \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{(3,236*10^{-7}P_0 - 0,0344)e^{0,578x}}{0,069\tau + 290,915} \Delta T \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{303241\mu e^{\mu(\tau - 600) + 0,578x}}{0,069\tau + 290,915} \Delta T \end{cases}$$

Здесь  $\mu = \frac{\ln P_0 - \ln 101308}{55}$ .

С 655 до 1141 секунды:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{0,21}{0,069\tau + 290,915} \Delta T \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{(3,236*10^{-7}P_0 - 0,0344)e^{0,578x}}{0,069\tau + 290,915} \Delta T \end{cases}$$

С 1141 до 1190 секунды:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = (9,6 * 10^{-10}P_0 - 10^{-4})e^{0,578x} \Delta T$$

С 1190 до 1200 секунды:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = (9,6 * 10^{-10}P_0 - 10^{-4})e^{0,578x} \Delta T \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = 8,9 * 10^{-3}(10130,8 - 0,1P_0)e^{0,578x} \Delta T \end{cases}$$

С 1200 до 1800 секунды:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{0,216}{0,072\tau - 422,51} \Delta T \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{3 \cdot 10^{-4} A \cdot B \cdot e^{0,578x - B \cdot \tau \cdot 10^{-4}}}{0,072\tau - 422,51} \Delta T \end{cases}$$

## Выводы

В начале, до 43 секунды нагрев менее интенсивный, потом более интенсивный до 1141 секунды, потом температура устанавливается постоянной, но процесс сушки продолжается. Это происходит до 1200 секунды, затем, во время продувки, температура понижается. Более подробно: на рисунке 1 показана зависимость температуры нагрева зерна в слое от времени при ИК-нагреве. Чем глубже, тем меньше температура. На рисунке 2 представлена зависимость температуры от времени с 43 до 1141 секунды. Здесь нагрев идёт более интенсивный. Также, чем глубже, тем меньше температура. Далее на рисунке 3 представлена зависимость температуры от времени с 1141 до 1200 секунды. Здесь нагрев закончился. Температура в слое стала постоянной. На рисунке 4 представлена зависимость температуры от времени с 1200 до 1800 секунды. Здесь идёт продувка. Температура в слоях понижается. На рисунке 5 представлена зависимость влагосодержания от времени до 600 секунды. На рисунке 6 представлена зависимость влагосодержания от времени с 600 до 1200 секунды. Влагосъём становится более интенсивным. На рисунке 7 представлена зависимость влагосодержания от времени с 1200 до 1800 секунды. Влагосъём становится ещё более интенсивным. На рисунке 8 представлена зависимость давления от времени при выкачивании воздуха. На рисунке 8 представлена зависимость давления от времени при закачивании воздуха.

Влагосодержание всё время уменьшается, сначала менее интенсивно до 43 секунды, затем более интенсивно. Очень много влаги снимается во время продувки. Также существенную роль играет

до какого давления мы выкачиваем воздух. Показано, что больше всего влаги снимается при выкачке до давления 40кПа.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лыков А. В.* Теория сушки. // М., "Энергия 1968.

УДК 536.2:517.9

## НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЭВОЛЮЦИОННЫМ УРАВНЕНИЯМ

Фатыхова А. И. (Уфа, БашГУ)

### Введение

Одной из важнейших задач в теории уравнений в частных производных является построение точного решения краевых задач. Известно, что для решения этой проблемы используется групповой анализ дифференциальных уравнений, например, в работе [1], а также преобразования, упрощающие поиск решения задачи, например, касательные и нелокальные преобразования. В данной работе рассматриваются нелокальные преобразования вида

$$dy = a(x, u)dx + b(x, u, u_x)dt, \quad a(x, u) = \varphi(y, v). \quad (1)$$

Особенно интересны эволюционные уравнения, которые линеаризуются при помощи вышесказанных преобразований. Полное описание таких уравнения приведено в работе [2].

В данной статье показано приложение нелокальных преобразований к классической задаче Стефана для нелинейного уравнения теплопроводности.

### § 1. Классическая задача Стефана

Задача Стефана для нелинейного уравнения теплопроводности имеет вид:

$$u_t = -2uu_{xx} + u_x^2, \quad -\infty < x < x(t), t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x \leq 0, \quad (3)$$

$$u(x(t), t) = \psi(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -u_x(x(t), t) + f(t), \quad t > 0, \quad x(0) = 0. \quad (5)$$

И рассмотрим преобразование типа (1), имеющее вид:

$$dx = v(y, t)dy + v_y(y, t)dt, \quad u(x, y) = -\frac{v^2(y, t)}{2}. \quad (6)$$

С помощью преобразования (6) уравнение (2) можно свести к линейному уравнению теплопроводности  $v_t = v_{yy}$ . Покажем это.

Из (6) следует, что функция  $y = y(x, t)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{v(y, t)}, \quad \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -\frac{v_y(y, t)}{v(y, t)}. \quad (7)$$

Дифференцируя второе равенство (6) по  $t$  и по  $x$  и учитывая (7), получим соотношения:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial v(y(x, t), t)}{\partial y} \right)^2 - v(y(x, t), t) \frac{\partial v(y(x, t), t)}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial v(y(x, t), t)}{\partial y}. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) и учитывая (7), получим

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{v(y(x, t), t)} \frac{\partial^2 v(y(x, t), t)}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Подставляя (8), (9), (10) в (2), будем иметь

$$v_t = v_{yy}. \quad (11)$$

Таким образом, показано, что преобразование (6) переводит уравнение (2) в уравнение теплопроводности.

Найдем теперь краевую задачу для уравнения (11), решение которой даст решение задачи (2)–(5).

Из (6) следует, что, если известно решение уравнения теплопроводности, функцию  $x = x(y, t)$  можно определить так:

$$x(y, t) = \int_L v(s, \tau) ds + v_y(s, \tau) d\tau, \quad (12)$$

где  $L$  – некоторая кривая, соединяющая точки  $O(0, 0)$  и  $M(y, t)$ . Интеграл (12) не зависит от пути интегрирования, и в качестве  $L$  можно взять ломаную  $[0, y] \cup 0 \cup y \cup [0, t]$ . Тогда (12) примет вид:

$$x(y, t) = \int_0^y v(s, 0)ds + \int_0^t v_y(y, \tau)d\tau, \quad (12')$$

откуда вытекает, что для определения  $x(y, t)$  необходимо задать функцию  $v(y, 0)$ :

$$v(y, 0) = g(y). \quad (13)$$

Пусть преобразование (6) переводит кривую  $y = h(t)$  в кривую  $x = x(t)$  (кривая  $y = h(t)$  будет определена далее). Тогда кривая  $x = x(t)$ , согласно (12), определяется так:

$$x(t) = \int_0^t (v(h(\tau), \tau)h'(\tau) + v_y(h(\tau), \tau))d\tau. \quad (14)$$

Положим

$$v(h(t), t) = p(t). \quad (15)$$

(14) с учетом (15) примет вид:

$$x(t) = \int_0^t (p(\tau)h'(\tau) + v_y(h(\tau), \tau))d\tau. \quad (16)$$

Таким образом, для функции  $v(y, t)$ , согласно (11), (13) и (15), получили краевую задачу.

Теперь определим функции  $h(t)$ ,  $g(y)$  и  $p(t)$ , чтобы определить решение задачи (2)–(5) через формулы (12), (16).

Из условия (4) и формул (6), (15) следует, что

$$p(t) = (-2\psi(t))^{\frac{1}{2}}, \psi(t) < 0. \quad (17)$$

Из равенств (16), (9) вытекает, что для выполнения условия (5) должно выполняться равенство

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)(-2\psi(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau. \quad (18)$$

Полагая  $t = 0$  во втором равенстве (6) и в (12'), имеем:

$$u(x(y, 0), 0) = -\frac{1}{2}v^2(y, 0), \quad (19)$$

$$x(y, 0) = \int_0^y g(s)ds. \quad (20)$$

Перепишем условие (3) с учетом (13), (19), (20):

$$\Phi \left( \int_0^y g(s)ds \right) = -\frac{1}{2}g^2(y). \quad (21)$$

То есть если функция  $g(y)$  - решение уравнения (21) и выполняется, что  $\Phi(x) < 0$ , то условие (3) будет выполнено.

Выясним условие, при котором функция  $x(y, t)$ , определяемая по формуле (12), отображает полуось  $-\infty < y \leq 0$  в полуось  $-\infty < x \leq 0$ . Это будет выполнено, если, согласно (20),

$$\int_0^{-\infty} g(s)ds = -\infty. \quad (22)$$

Из (21) путем несложных преобразований получаем, что функция  $\Phi(x)$  удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^0 (-2\Phi(z))^{-\frac{1}{2}} dz = \infty. \quad (23)$$

При выполнении условия (23) будет выполняться равенство (22).

Таким образом, если функции  $\Phi(x), \psi(x) \in C^1(-\infty, 0]$ ,  $f(t) \in C(t \geq 0)$  и выполняются условия (17), (18), (21), (23), решение исходной задачи (2)–(5) будет вычисляться по формулам (6), (12), (14), где функция  $v(y, t)$  является решением следующей краевой задачи

$$v_t = v_{yy}, -\infty < y < h(t), t > 0, \quad (24)$$

$$v(y, 0) = g(y), -\infty < y \leq 0, \quad (25)$$

$$v(h(t), t) = p(t), t \geq 0. \quad (26)$$

Рассмотрим схему построения решения задачи (24)–(26), где  $h(t), g(y)$  и  $p(t)$  — заданные функции, причем  $h(0) = 0$ . Рассмотрим сдвиг  $x = y - h(t)$ , и тогда получим:

$$v(y, t) = v(x + h(t), t) = w(x, t). \quad (27)$$

Задача (24)–(26) с учетом (27) перейдет в задачу вида:

$$w_t = w_{xx} + h'(t)w_x, -\infty < x < 0, \quad (28)$$

$$w(x, 0) = g(x), -\infty < x \leq 0, \quad (29)$$

$$w(0, t) = p(t), t \geq 0. \quad (30)$$

Рассмотрим уравнение (28) в предположении  $x \in (-\infty, +\infty)$ :

$$w_t = w_{xx} + h'(t)w_x, -\infty < x < +\infty, t > 0. \quad (31)$$

Применим преобразование Фурье к его решению:

$$\tilde{w}(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} w(x, t) dx. \quad (32)$$

Предположим, что  $w(x, t)$  вместе со своими производными по  $x$  обращается в нуль на бесконечности, тогда можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{w}(s, t)}{\partial t} = -s^2 \tilde{w}(s, t) - ish'(t) \tilde{w}(s, t). \quad (33)$$

Положим  $w(x, 0) = G(x)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , где  $G(x)$  — продолжение  $g(x)$  на всю числовую ось:

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & -\infty < x \leq 0, \\ a(x), & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

где  $a(x)$  — некоторая заданная функция. Тогда решение уравнения (33) имеет вид:

$$\tilde{w}(s, t) = \tilde{G}(s)e^{-s^2t - ish(t)}. \quad (34)$$

Применяя к (34) обратное преобразование Фурье, получим

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-h(t)-x)^2}{4t}} G(s) ds. \quad (35)$$

Функция, определенная по формуле (35), удовлетворяет условиям (28) и (29). Для выполнения (30) должно выполняться соотношение:

$$p(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-h(t))^2}{4t}} G(s) ds. \quad (36)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [2] *Свинолулов С. И.* Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями. // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 263-264.
- [3] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. Изд. 21-е. М.: Наука, 1974. 654 с.
- [4] *Ильин А. М.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2009. 192 с.

УДК 517

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДВУХ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ ШЕСТИМЕРНЫЕ  
АЛГЕБРЫ ЛИ С ТРЕХМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРОЙ

Фокиева Н. О. (Уфа, БашГУ)

Введение

Обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

допускающее  $n$  операторов

$$X_i = \xi_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 1, \dots, n,$$

образующих  $n$ -мерную разрешимую алгебру Ли операторов, может быть проинтегрировано в квадратурах ([1],[2]).

В [3] предложен метод построения интегралов для систем двух ОДУ второго порядка, допускающих четырехмерные алгебры Ли. Метод заключается в использовании инвариантного представления систем и оператора инвариантного дифференцирования. Возникает вопрос о применимости данного алгоритма к системам более высоких порядков.

Для исследования этого вопроса необходимо построить реализации алгебры Ли более высоких порядков в пространстве дифференциальных операторов, получить системы ОДУ, допускающие эти алгебры и применить предложенный алгоритм.

Проинтегрируем систему двух ОДУ третьего порядка вида

$$\begin{cases} y''' = f(x, y, z, y', z', y'', z''), \\ z''' = g(x, y, z, y', z', y'', z''), \end{cases} \quad (1)$$

допускающих конкретные шестимерные алгебры Ли.

## Реализация алгебр Ли в пространстве дифференцируемых операторов

Общий вид базисных операторов трех переменных шестимерной алгебры Ли

$$X_i = \xi_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \theta_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2)$$

Найдем вещественно неподобные шестимерные алгебры Ли и инвариантные относительно них системы уравнений.

Для каждой неизоморфной алгебры Ли, определяемой структурными константами

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad i, j, k = 1, \dots, 6,$$

с помощью невырожденной замены переменных

$$t = t(x, y, z), \quad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z),$$

находится наиболее простая реализация неподобных алгебр Ли шестого порядка в пространстве трех переменных.

### Системы ОДУ, допускающие алгебры Ли операторов

Пусть система уравнений (1) допускает алгебру Ли. Выпишем продолженные до производных третьего порядка включительно операторы

$$\tilde{X}_i = \xi_i \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i^1 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_i^2 \frac{\partial}{\partial z} + \theta_i^1 \frac{\partial}{\partial y'} + \theta_i^2 \frac{\partial}{\partial z'} + \theta_i^{11} \frac{\partial}{\partial y''} + \theta_i^{22} \frac{\partial}{\partial z''} + \theta_i^{111} \frac{\partial}{\partial y'''} + \theta_i^{222} \frac{\partial}{\partial z'''}, \quad \text{где}$$

$$\theta_i^1 = D(\eta_i^1) - y' D(\xi_i), \quad \theta_i^{11} = D(\theta_i^1) - y'' D(\xi_i), \quad \theta_i^{111} = D(\theta_i^{11}) - y''' D(\xi_i),$$

$$\theta_i^2 = D(\eta_i^2) - z' D(\xi_i), \quad \theta_i^{22} = D(\theta_i^2) - z'' D(\xi_i), \quad \theta_i^{222} = D(\theta_i^{22}) - z''' D(\xi_i),$$

где  $D$  – оператор полного дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + z'' \frac{\partial}{\partial z'} + \dots$$

Подействуем продолженными операторами на каждое уравнение системы, получаем систему из двенадцати уравнений вида:

$$\begin{cases} X_i \left( y''' - f(x, y, z, y', z', y'', z'') \Big|_{y'''=f, z'''=g} \right) = 0; \\ X_i \left( y''' - g(x, y, z, y', z', y'', z'') \Big|_{y'''=f, z'''=g} \right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решив полученные определяющие уравнения, находим вид функций  $f$  и  $g$ . Инвариантное представление системы (3) можно получить, найдя инварианты алгебры  $L_6$  с операторами (2).

Решаем систему  $X_{i,k}(I_k) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , где  $X_{i,k}$  — продолжение оператора  $X_i$  на производные  $k$ -го порядка,  $I_k$  — функция от независимой переменной  $t$ , зависимых переменных  $x, y$  и их производных до  $k$ -го порядка.

### Интегрирование систем ОДУ, допускающих алгебры Ли операторов

Для случая ОДУ оператор инвариантного дифференцирования имеет вид  $\lambda(t, \vec{x}, \vec{x}', \dots)D_t$ , где  $D_t$  — оператор полного дифференцирования,  $\vec{x}$  — вектор зависимых переменных,  $\vec{x}'$  — вектор первых производных.

В [1] показано, что оператор  $\lambda D_t$ , который коммутирует с  $X_{i,k}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  алгебры Ли группы  $G$ , т.е.  $[X_{i,k}, \lambda D_t] = 0$ , является оператором инвариантного дифференцирования.

Функцию  $\lambda$  можно найти из уравнений

$$X_{i,k}(\lambda) - \lambda D_t(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (4)$$

где  $k$  — требуемый порядок производных. В качестве  $\lambda$  можно взять любое частное решение системы уравнений. Рассмотрим, систему, допускающую алгебру Ли  $L_6$  с некоторыми базисными операторами. Инвариантное представление системы имеет вид

$$I_{3,1} = F(I), \quad I_{3,2} = G(I), \quad (5)$$

где  $I$  – дифференциальный инвариант.

Применение оператора инвариантного дифференцирования к дифференциальному инварианту второго порядка дает равенство:

$$\lambda D_t(I) = \omega(I, I_{3,1}, I_{3,2})$$

Учитывая (5), получим  $\lambda D_t(I)|_{(1,5)} = \psi(I)$ ,

$$\frac{dI}{\psi(I)} = \frac{dt}{\lambda} \quad (6)$$

Левая часть интегрируема в квадратурах при любой замене переменных. Если правая часть (6) также интегрируема, то можно понизить порядок системы. К получившимся уравнениям снова можно применить описанную процедуру.

### Разрешимая алгебра $g_{6,5}$

Построим реализацию шестимерной алгебры Ли  $g_{6,5}$  с коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_6] = X_1, [X_2, X_6] = X_1 + X_2, [X_3, X_6] = X_2 + X_3,$$

$$[X_4, X_6] = X_3 + X_4, [X_5, X_6] = X_4 + X_5, [X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

на основе реализации трехмерной алгебры в трехмерном пространстве, представленной в [4].

К операторам  $L_3$

$$L_{3,1} : X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$L_{3,2} : X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = z \frac{\partial}{\partial x} + p(z) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$L_{3,3} : X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$L_{3,4} : X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = z \frac{\partial}{\partial x}$$

добавим операторы, которые в общем случае имеют вид

$$X_i = \xi_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \theta_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (7)$$

Рассмотрим, алгебру Ли с подалгеброй  $L_{3,3}$ , базис которой составляют операторы  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ .

$[X_i, X_5] = 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , то получим  $X_5 = \xi_5(y) \frac{\partial}{\partial x} + \theta_5(y) \frac{\partial}{\partial z} = 0$ .

Аналогично для  $X_4$ . Для  $X_6$  известны все соотношения, то  $X_6 = (x + y + \xi_6(y)) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + (z + \theta_6(y)) \frac{\partial}{\partial z}$ .

Сделаем замену  $\bar{x} = x + \alpha(y)$ ,  $\bar{y} = y$ ,  $\bar{z} = z + \beta(z)$ .

Для алгебры  $L_6$  с подалгеброй  $L_{3,2}$  базис состоит из операторов

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = z \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-2z} \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_4 &= \left(-\frac{2}{3}z\sqrt{-2z}\right) \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y}, X_5 = \left(\frac{x^2}{6}\right) \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{3}z\sqrt{-2z}\right) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_6 &= (x + y) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{-2z} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для алгебры  $L_6$  с подалгеброй  $L_{3,3}$  базис состоит из операторов

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, X_4 = -\frac{y^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_5 &= -\frac{5y^4}{24} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, X_6 = (x + yz) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для алгебры  $L_6$  с подалгеброй  $L_{3,4}$  базис состоит из операторов

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = z \frac{\partial}{\partial x}, X_4 = \left(-\frac{y^3}{3} + yz\right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_5 &= \left(-\frac{5y^4}{24} + \frac{y^2z}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x}, X_6 = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Больше реализаций  $L_6$  в трехмерном пространстве нет.

Для алгебры  $g_{6,5}$  с базисом (9) получена система

$$\begin{cases} f = \frac{1}{2} \frac{1}{y_x e^y} ((4y_x^4 z_x e^y + F(\gamma) y_x^5 y^2 - 6y_x^2 y_{xx} z_x e^y y + \\ + 2G(\gamma) y_x^5 + 6y_x^3 z_{xx} e^y y + 6y_{xx}^2 e^y), \\ g = \frac{1}{2} \frac{1}{y_x e^y} (4y_x^3 z_x^2 e^y + z_x F(\gamma) y_x^4 y^2 - 6y_x y_{xx} z_x^2 e^y y + 2z_x G(\gamma) y_x^4 + \\ + 6z_x y_x^2 z_{xx} e^y y + 2F(\gamma) y_x^4 + 6y_{xx} z_{xx} e^y). \end{cases} \quad (11)$$

где  $\gamma = \left(\frac{(y^2 y_x z_{xx} - y^2 y_{xx} z_x + 4y y_x^2 z_x - 2y_{xx}) e^y}{y_x^3}\right)$ .

Система (11) в инвариантах запишется как

$$I_{3,1} = F_1(I_2), I_{3,2} = F_2(I_2), \quad (12)$$

$$I_2 = \frac{(y^2 y_x z_{xx} - y^2 y_{xx} z_x + 4y y_x^2 z_x - 2y_{xx}) e^y}{y_x^3}, \quad I_{3,1} = \frac{(y_x^2 z''' - 3y_x y_{xx} z_{xx} - y_x y''' z_x + 3y_{xx}^2 z_x) e^y}{y_x^5},$$

$$I_{3,2} = -\frac{(e^y (4y_x^4 z_x + 6y y_x^3 z_{xx} + (y^2 z''' - 6y y_{xx} z_x) y_x^2))}{2y_x^5} + \frac{((-3y_{xx} z_{xx} - y''' z_x) y^2 - 2y''') y_x - 3y_{xx}^2 (y^2 z_x + 2)}{2y_x^5}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования  $\frac{1}{y} D_x$ .

Применение оператора инвариантного дифференцирования к дифференциальному инварианту второго порядка дает равенство:

$$\lambda D_x(I_2)|_{(12)} = \psi_1(I_2).$$

Значит,  $\frac{dI_2}{\psi_1(I_2)} = \frac{dx}{\lambda} \Rightarrow I_2 = \psi(y, C_1)$ .

Система сводится к следующей

$$\begin{cases} I_2 = \psi(y, C_1), \\ I_{3,1} = \nu(y, C_1) \end{cases} \quad (13)$$

Допускает операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = -\frac{y^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_5 = -\frac{5y^4}{24} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Продолжаем

$$\lambda = \frac{y^4}{y'^2 z''' - 3y' y'' z'' - y' z' y''' + 3z' y''^2} \Rightarrow \lambda D_x(y)|_{(13)} = \frac{1}{\nu(y, C_1)}$$

Значит,

$$\nu(y, C_1) dy = \frac{y'^2 z''' - 3y' y'' z'' - y' z' y''' + 3z' y''^2}{y'^4} dx.$$

Итак, система свелась к виду

$$\begin{cases} I_2 = \psi(y, C_1), \\ \frac{y' z'' - z' y''}{y'^3} = \nu_2(y, C_1, C_2) \end{cases} \quad (14)$$

Эта система допускает операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = -\frac{y^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}.$$

Свели систему ОДУ третьего порядка к системе двух ОДУ второго порядка, допускающих четыре оператора.

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{4yz'}{y'} - \frac{2y''}{y'^3} = \mu(y, C_1, C_2), \\ \frac{y' z'' - z' y''}{y'^3} = \nu(y, C_1, C_2) \end{cases} \quad (15)$$

Оператор инвариантного дифференцирования, построенный на операторах  $X_1, X_2, X_3$  и  $X_4$ , имеет вид

$$\frac{y'^3}{y'z'' - z'y''} D_x \Rightarrow \lambda D_x(y)|_{(15)} = \frac{1}{\nu(y, C_1, C_2)}$$

Дополним решением этого уравнения систему, получим

$$\begin{cases} \frac{4yz'}{y'} - \frac{2y''}{y'^3} = \mu(y, C_1, C_2), \\ \frac{y'z'' - z'y''}{y'^3} = \nu(y, C_1, C_2), \\ \frac{z'}{y'} = H_1(y, C_1, C_2, C_3) \end{cases} \quad (16)$$

Эта система допускает операторы  $X_1, X_3, X_4$ .

Оператор инвариантного дифференцирования:

$$\frac{y'^2}{2y^2(y'z'' - z'y'') + 4yy'z' - 2y''},$$

то

$$\lambda D_x y = \frac{y'^3}{2(y'z'' - z'y'')y^2 + 4yy'z' - 2y''} = \frac{1}{2y^2\nu + \mu}.$$

Система сведется к

$$\begin{cases} \frac{z'}{y'} = H_1(y, C_1, C_2, C_3), \\ \frac{2(y^2z' + 1)}{y'} = H_2(y, C_1, C_2, C_4). \end{cases} \quad (17)$$

Значит, получим решение исходной системы

$$\begin{cases} y = W_1(x, \widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \widehat{C}_3), \\ z = W_2(x, \widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \widehat{C}_3, \widehat{C}_4, \widehat{C}_5, \widehat{C}_6). \end{cases} \quad (18)$$

Получившиеся результаты можно сформулировать в виде теорем:

**Теорема 1.** Алгебра  $g_{6,5}$  в пространстве трех переменных невырожденной заменой переменных может быть сведена к одному из следующих типов (8), (9), (10).

**Теорема 2.** Система двух ОДУ третьего порядка, допускающая разрешимую алгебру  $g_{6,5}$  может быть проинтегрирована в квадратурах.

**Теорема 3.** Система двух ОДУ третьего порядка, допускающая неразрешимую алгебру  $sl(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{Z}g_1$ , не может быть проинтегрирована в квадратурах, но можно понизить ее порядок с шести до трех.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, Физматлит, 1978. – 399 с.

[2] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. – М.: Знание, 1991. – 48 с.

[3] Gainetdinova, A.A., Gazizov, R.K. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras. – Proc. R. Soc. A. – Vol.473, no. 2197. – 2017.

[4] Khabirov S.V. Classification of three dimensional Lie algebras in  $R^3$  and their differential invariants. – Lobachevskii Journal of Mathematics Vol.1, no. 2. 2010 Pp. 152 156.

УДК 517.9

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ  
ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ФИЛЬТРАЦИИ

Чунарёва М. П. (Уфа, УГАТУ)

**Введение**

Задача моделирования аномальных процессов, протекающих в сложных структурах, описывается дробно-дифференциальными уравнениями. Однако допускаемая такими уравнениями группа точечных преобразований, почти всегда, оказывается меньше группы аналогичного уравнения с производными целого порядка. Одним из возможных подходов к нахождению дополнительных симметрий является переход к их приближенным аналогам.

Метод нелинейной самосопряженности развитый в работах Н. Х. Ибрагимова [3, 4], обобщает известную теорему Нётер и дает возможность построения законов сохранения для уравнений, не обладающих лагранжианом.

Данная работа посвящена построению приближенных законов сохранения на основе принципа нелинейной самосопряженности для нелинейного приближенного уравнения субдиффузии, а также построению примера его решения.

Рассматривается дробно-дифференциальное уравнение субдиффузии

$$D_t^\alpha u = (k(u)u_x)_x, \quad u = u(x, t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (1)$$

где  $D_t^\alpha u$  — левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля [1] порядка  $\alpha \in (0, 1)$  по переменной  $t$ .

В работе [2], путем разложения дробной производной в ряд по

малому параметру, выделенному из порядка дробного дифференцирования, при  $\alpha = 1 - \varepsilon$ , из уравнения (1) было получено приближенное уравнение субдиффузии

$$F \equiv u_t + \varepsilon \left[ u_t(\ln t + \gamma - 1) + \frac{u}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!} D_t^{n+1} u \right] - k_0'(u)u_x^2 - k_0(u)u_{xx} - \varepsilon \left[ k_1(u)u_{xx} + k_1'(u)u_x^2 \right] \approx 0, \quad (2)$$

где  $k_0 = e^u$ ,  $k_1(u) = e^u(A_0 + A_1u + A_2u^2)$ ,  $A_0, A_1, A_2 = const$ . Также в работе [2] было показано, что именно при  $k_0 = e^u$  группа операторов расширяется дополнительными симметриями, чего не наблюдается в исходном уравнении (1).

Представим уравнение (2) в виде  $F = F_0 + \varepsilon F_1$ . Введем новую независимую переменную  $v(x, t) = v_0(x, t) + \varepsilon v_1(x, t)$  и запишем формальный лагранжиан  $L = vF = v_0F_0 + \varepsilon(v_1F_0 + v_0F_1)$ .

Уравнение, приближенно сопряженное к (2), определяется как  $F^* = \frac{\delta L}{\delta u}$ , где  $\frac{\delta}{\delta u}$  — вариационная производная [3].

Запишем условие самосопряженности [3] для уравнения (2):

$$\begin{cases} F_0^* = \lambda_0 F_0, \\ F_1^* = \lambda_0 F_1 + \lambda_1 F_0. \end{cases} \quad (3)$$

Решая первое уравнение, примем  $v_0 = \varphi(x, t, u)$ :

$$-\varphi_t - \varphi_u u_t - e^u(\varphi_{xx} + 2\varphi_{xu}u_x + \varphi_{uu}u_x^2 + \varphi_u u_{xx}) = \lambda_0(u_t - e^u u_{xx} - e^u u_x^2).$$

Расцепим уравнение по производным функции  $u$ :

$$\begin{cases} u_t : -\varphi_u = \lambda_0, \\ u_x : -\varphi_{xu} = 0, \\ u_x^2 : \varphi_{uu} = \lambda_0, \\ u_{xx} : \varphi_u = \lambda_0, \\ 1 : \varphi_t + e^u \varphi_{xx} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем  $\varphi_u = 0$  и  $\lambda_0 = 0$ , тогда  $\varphi = C_1x + C_2$ .  
 Проделаем все тоже самое для второго уравнения. Примем  $v_1 = \psi(x, t, u)$ :

$$\begin{aligned} & -\psi_t - \psi_u u_t - e^u(\psi_{xx} + 2\psi_{xu}u_x + \psi_{uu}u_x^2 + \psi_u u_{xx}) - \\ & - 2A_2 e^u u_x^2 (C_1x + C_2) + e^u u_{xx} (2A_2u + A_1)(C_1x + C_2) + \\ & + 2e^u u_x C_1 (2A_2u + A_1) = \lambda_1 (u_t - e^u u_{xx} - e^u u_x^2). \end{aligned}$$

Расщепим уравнение по производным функции  $u$ :

$$\begin{cases} u_t : -\psi_u = \lambda_1, \\ u_x : -\psi_{xu} + C_1(2A_2u + A_1) = 0, \\ u_x^2 : \psi_{uu} + 2A_2(C_1x + C_2) = \lambda_1, \\ u_{xx} : -\psi_u + (C_1x + C_2)(2A_2u + A_1) = -\lambda_1, \\ 1 : \psi_t + e^u \psi_{xx} = 0. \end{cases}$$

Решением системы при  $A_1 = A_2 = 0$  является функция  $\psi = B_1x + B_2$ , тогда  $\psi_u = 0$  и  $\lambda_1 = 0$ .

**Утверждение.** Приближенное уравнение субдиффузии (2), является нелинейно самосопряженным при  $A_1 = A_2 = 0$  и найденной замене  $v = C_1x + C_1 + \varepsilon(B_1x + B_2)$ .

Приняв  $A_0 = 1$ , уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} F \equiv u_t - e^u u_x^2 - e^u u_{xx} + \varepsilon \left[ u_t (\ln t + \gamma - 1) + \frac{u}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!} D_t^{n+1} u - \right. \\ \left. - e^u u_x^2 - e^u u_{xx} \right] \approx 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Адаптируем формулы для нахождения компонент сохраняющихся векторов [3] под уравнение (4)

$$C^x = W \left[ \frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \left( \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) \right] + D_x(W) \left[ \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right],$$

$$C^t = W \left[ \frac{\partial L}{\partial u_t} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k D_t^k \left( \frac{\partial L}{\partial u_t^{(k+1)}} \right) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} D_t^n(W) \left[ \frac{\partial L}{\partial u_t^{(n+1)}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k D_t^k \left( \frac{\partial L}{\partial u_t^{(n+k+1)}} \right) \right].$$

Рассмотрим известные симметрии [2] для уравнения (2):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + (1 - \varepsilon)x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = 2\varepsilon t \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_6 = (1 - \varepsilon(\ln t - 2))t \frac{\partial}{\partial t} - (1 - \varepsilon \ln t) \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon t \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial u}.$$

*Законы сохранения для оператора  $X_1$ :*

$$C_1^x = -e^u u_x - \varepsilon e^u u_x, \quad C_1^t = u + \varepsilon \left[ u(\ln t + \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!n} D_t^n u \right].$$

$$C_2^x = e^u u_x^2 + e^u u_{xx} + \varepsilon [e^u u_x^2 + e^u u_{xx}],$$

$$C_2^t = -u_x - \varepsilon \left[ u_x(\ln t + \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!n} D_t^n u_x \right].$$

$$C_3^x = -\varepsilon e^u u_x, \quad C_3^t = \varepsilon u.$$

$$C_4^x = \varepsilon u_t, \quad C_4^t = -\varepsilon u_x.$$

*Законы сохранения для оператора  $X_2$ :*

$$C_1^x = -x e^u u_x + e^u + \varepsilon [-x e^u u_x + e^u],$$

$$C_1^t = x u + \varepsilon \left[ x u(\ln t + \gamma) + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!n} D_t^n u \right].$$

$$C_2^x = -e^u u_x - 2\varepsilon e^u u_x, \quad C_2^t = u + \varepsilon \left[ u(\ln t + \gamma + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!n} D_t^n u \right].$$

$$C_3^x = \varepsilon[-xe^u u_x + e^u], \quad C_3^t = \varepsilon x u.$$

$$C_4^x = -\varepsilon e^u u_x, \quad C_4^t = \varepsilon u.$$

Законы сохранения для оператора  $X_3$ :

$$C_1^x = \varepsilon[xe^u u_x u_t + xe^u u_{xt} - e^u u_t], \quad C_1^t = -\varepsilon x u_t.$$

$$C_2^x = \varepsilon[e^u u_x u_t + e^u u_{xt}], \quad C_2^t = -\varepsilon u_t.$$

Законы сохранения для оператора  $X_6$ :

$$C_1^x = -\varepsilon x e^u u_x + \varepsilon e^u, \quad C_1^t = \varepsilon x u.$$

$$C_2^x = -\varepsilon e^u u_x, \quad C_2^t = \varepsilon u.$$

$$C_3^x = 0, \quad C_3^t = 0.$$

$$C_4^x = 0, \quad C_4^t = 0.$$

Воспользуемся компонентами  $C_1^x$  и  $C_1^t$  сохраняющегося вектора для оператора  $X_1$ , чтобы найти приближенное частное решение уравнения (2).

Закон сохранения имеет стандартный вид

$$D_x(C^x) + D_t(C^t) = 0,$$

заменяем его более сильными условиями [3]

$$D_x(C^x) = 0, \quad D_t(C^t) = 0. \quad (5)$$

Подставим компоненты сохраняющегося вектора в первое и второе уравнения условия (5) соответственно, принимая  $u = u^0(x, t) + \varepsilon u^1(x, t)$ .

Получаем переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} u_t^0 = 0, \\ u_t^1 + \frac{u^0}{t} = 0, \\ (u_x^0)^2 + u_{xx}^0 = 0, \\ u_{xx}^1 + 2u_x^0 u_x^1 = 0. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$u_0 = C_1, \quad u_1 = C_1 \ln t + C_2 x + C_3.$$

Таким образом уравнение (2) имеет следующее приближенное частное решение

$$u = C_1 - \varepsilon[C_1 \ln t + C_2 x + C_3].$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6 на 2017–2019 гг. по теме «Математическое и компьютерное моделирование процессов фильтрации в неоднородных коллекторах нефтегазовых месторождений на основе дробно-дифференциального подхода».*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – С. 689.
- [2] Лукащук С.Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. наука. – 2016. – Т.20, №4. – С. 603 – 619.
- [3] Ибрагимов Н.Х., Авдонина Е.Д. Нелинейная самосопряженность, законы сохранения и построение решений уравнений в частных производных с помощью законов сохранения // Успехи мат. наук. – 2013. – Т.68, №5. – С. 111 – 146.
- [4] Ibragimov N.H. Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws, Archives of ALGA. – 2010-2011. – Vol.7/8. – P.1–99.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА

<b>Абдуллин А.У., Акманова Г.Р.</b> КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД В ПРЕПОДАВАНИИ КУРСОВ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ	3
<b>Абдуллин А.У., Акманова Г.Р.</b> МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА КАК ИНСТРУМЕНТ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА В ПРЕПОДАВАНИИ КУРСОВ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ	8
<b>Вальшин А.М., Нигаматова Л.Н.</b> ИМПЕДАНС ПЛАЗМЫ ЛАМПЫ-ВСПЫШКИ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НАКАЧКЕ	12
<b>Вальшин А.М., Хусаинова Ю.А.</b> ФАРАДЕЕВО ТЁМНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЗАЖИГАНИИ РАЗРЯДА ЛАМПЫ-ВСПЫШКИ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА	15
<b>Габдрахманова Л.А., Альмухаметов Р.Ф.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ И ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ КОБАЛЬТЕ	20
<b>Давлетшина Н.Ю., Камалова Д.Д.</b> ЭФФЕКТ САНЬЯКА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ЙОХАНСЕНА- ПСАЛТИСА	28
<b>Коновалова В.А., Жонин А.В.</b> ТРАССЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НЕФТЕДОБЫВАЮЩЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ	33
<b>Лопатюк А.В., Грачева А.М.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛЬНО- ОПТИЧЕСКОГО РАЗВЕТВИТЕЛЯ	43
<b>Магомедов М.А., Исаева М.М.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ МЕТОДОМ ВАНГА-ЛАНДАУ	50
<b>Плотникова А.Н., Соболев А.М.</b> О ПОЛОЖЕНИИ ЗВЕЗД, ИОНИЗУЮЩИХ ТУМАННОСТИ, НА ИНФРАКРАСНЫХ ДИАГРАММАХ	51
<b>Рахматова Л.И., Юсупов А.Р.</b> ВЛИЯНИЕ АЦЕТОНА И ЭТИЛОВОГО СПИРТА НА ПРОВОДИМОСТЬ ПЛЕНОК ПОЛИДИФЕНИЛЕНФТАЛИДА (ПДФ)	59
<b>Рахматуллина Э.Р., Лачинов А.Н.</b> ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ КВАЗИДВУМЕРНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ, НА ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛИМЕРНОЙ ПЛЕНКИ	63

<b>Сафина Л. Р.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛА МОРСА В МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКЕ	68
<b>Шадрин А.В., Панов Ю.Д.</b> УСТОЙЧИВОСТЬ К ФАЗОВОМУ РАССЛОЕНИЮ СИСТЕМ ТИПА $La_{2-x}Sr_xCuO_4$	72

### ХИМИЯ

<b>Гарифуллина Г.Г., Куракбаева Л.Д., Насретдинова Р.Н.</b> СИНЕРГИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В РЕАКЦИИ ИНИЦИИРОВАННОГО ОКИСЛЕНИЯ ЭТИЛБЕНЗОЛА ДОБАВКАМИ НИТРОКСИЛЬНОГО РАДИКАЛА И $\alpha$ -НАФТИЛАМИНА	79
<b>Гарифуллина Г.Г., Насретдинова Р.Н.</b> АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО ХИМИИ В РЕСПУБЛИКЕ БАШКОРТОСТАН ЗА 2018 ГОД	86

### МАТЕМАТИКА

<b>Абузярова Н.Ф., Бурханова Э.Р.</b> ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ОБРАТИМОСТИ ПО ЭРЕНПРАЙСУ	90
<b>Егорова А.Е.</b> УСЛОВИЯ СОВМЕСТИМОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ С КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ	94
<b>Zavorokhin G.L.</b> A MATHEMATICAL MODELING OF ARTERIAL BIFURCATION	99
<b>Кругова Ю.А., Ершов А.А.</b> АСИМПТОТИКА МАГНЕТОСОПРОТИВЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОБРАЗЦА С МАЛЫМИ КОНТАКТАМИ	109
<b>Мурясов Р.Р.</b> ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ	116
<b>Павленко В.А.</b> ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА СУШКИ ЯЧМЕНЯ	124
<b>Фатыхова А.И.</b> НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЭВОЛЮЦИОННЫМ УРАВНЕНИЯМ	134
<b>Фокеева Н.О.</b> ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ ШЕСТИМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ С ТРЁХМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРОЙ	140
<b>Чунарёва М.П.</b> ПРИБЛИЖЁННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ	148

*Научное издание*

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ**

*X Международная школа-конференция  
для студентов, аспирантов и молодых ученых,  
посвященная 100-летию первого декана  
математического факультета БашГУ  
Зигандара Иргалеевича Биглова  
(Уфа, 16- 20 октября 2018 г.)*

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ**

**ФИЗИКА. ХИМИЯ. МАТЕМАТИКА.**

**Научные статьи**

*Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать 15.01.2019 г. Формат 60x84/16.  
Усл. печ. л. 11,7. Уч.-изд. л. 20,2.  
Тираж 100. Изд. № 50. Заказ 176.

*Редакционно-издательский центр  
Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке  
Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*