

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

VII МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

Уфа, 12–16 октября 2014 г.

СБОРНИК ТРУДОВ. ТОМ I. МАТЕМАТИКА

Научные статьи

Уфа
РИЦ БашГУ
2014

УДК 51+ 54
ББК 22.1+24
М11

Сборник издан при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-31-10131-мол_г) и за счет внебюджетных средств БашГУ.

Редакционная коллегия:
д-р физ.-мат. наук, проф. Б. Н. Хабибуллин (отв. редактор);
канд. физ.-мат. наук, асс. Ф. Б. Хабибуллин

М11 VI Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 12–16 октября 2014 г.): Сборник трудов. Том 1. Математика. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. — 136 стр.

В сборнике трудов помещены научные статьи участников VII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» 2013 г. Научные статьи воспроизводятся с предоставленных авторами оригиналами.

УДК 51+54
ББК 22.1+24

@БашГУ, 2014

УДК 368

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТРАХОВАНИИ ЖИЗНИ И ЗДОРОВЬЯ

Арсланова Р. Р. (Уфа, БашГУ)

Введение

Жизнь человека в обществе связана с риском потерять здоровье, жизнь и имущество, по причине изменения рыночных условий могут не оправдаться расчеты прибыли. Причем время и масштабы подобных событий заранее не могут быть оценены. Они определяются широким набором случайных факторов.

Наличие непредвиденных обстоятельств, сопровождающих хозяйственную и бытовую деятельность человека, определяет необходимость в мерах предупреждения или возмещения потерь, возникающих в результате случайных событий. Разработка, внедрение в практику и повседневное применение системы подобных мер становятся частью человеческого быта и культуры.

Страхование - это такой вид необходимой общественно полезной деятельности, при которой граждане и организации заранее страхуют себя от неблагоприятных последствий в сфере их материальных и личных нематериальных благ путем внесения денежных взносов в особый фонд специализированной организации (страховщика), оказывающей страховые услуги, а эта организация при наступлении указанных последствий выплачивает за счет средств этого фонда страхователю или иному лицу обусловленную сумму.

Страхование жизни помимо того, что защищает граждан и их, близких в тяжелых жизненных ситуациях, но и является инструментом накопления и сбережения денежных средств в условиях инфляции.

§ 1. Термины и понятия страхования.

Страхование представляет собой систему (способ) защиты материальных (имущественных) интересов субъектов страхового рынка (физических и юридических лиц), угроза которым существует всегда, но не носит обязательного характера.

Страхование — система защиты материальных интересов. То, что материальные интересы требуют защиты, связано с вероятностью угрозы их существованию. Для каждого отдельного владельца она (угроза) невелика, но в целом по закону больших чисел достаточно реальна. Отсюда объективная необходимость страхования материальных рисков, в связи с чем возникает понятие — страховой продукт, который всегда должен присутствовать на финансовом рынке. Каждый страховой продукт соотносится с конкретным объектом страхования (что страхуется), определяет причины страхования (страховой риск), его стоимость (страховую сумму), цену (страховой тариф), условия денежных платежей (расчетов по страхованию) в предвидении тех событий, от которых производится страхование. Свидетельством (сертификатом) страхового продукта служит документ, называемый страховой полис. Полис подтверждает факт заключенного договора страхования (купли-продажи страхового продукта), который всегда предметен, адресован участникам страхования, содержит основные количественные параметры сделки, является юридическим документом.

Специфика страхового продукта в том, что страховой взнос всегда меньше страховой суммы. Такое соотношение обеспечивает рыночную привлекательность страховых продуктов и соответствующий спрос на них. Но на первый взгляд невыгодное соотношение для продавца не означает его потери, так как число полисов (следовательно, и покупателей) обычно больше, чем страховых случаев.

Уровень страхового тарифа должен быть достаточно низок,

чтобы обеспечить сбыт страхового продукта, но и достаточно высок, чтобы покрывать расходы страховщика и обеспечить ему прибыль.

Противоречие между неравномерностью наступления страховых событий и необходимостью расчета средней величины страхового тарифа решается путем дифференциации цен страхового продукта по категориям его покупателей, с учетом их индивидуальных рисков.

Необходимость продать страховой продукт вынуждает страховщика к совершенствованию страховых продуктов, снижению цен на них. Необходимость же получать прибыль, напротив, требует повышения цен. Отсюда, страховой рынок регулируется спросом и предложением на страховые продукты.

§ 2. Актуарные расчеты страховых тарифов.

Страхование жизни – подотрасль личного страхования, включающая в себя совокупность видов страхования, по условиям которых страховщик выплачивает застрахованному лицу или его правопреемнику определенную денежную сумму при достижении застрахованного до определенного возраста, события или даты, либо в случае его смерти.

Актуарные расчеты в страховании – это расчет тарифных ставок в страховании жизни. Они производятся на основе методологии актуарной оценки рисков и вероятностей наступления страховых случаев. Основными факторами, влияющими на методику расчета тарифных ставок по страхованию жизни, являются следующие:

- Объектом договора страхования является трудоспособность клиента, его здоровье и сама жизнь.
- Договоры страхования жизни заключаются, как правило, на длительный срок.

Основными задачами актуарных расчетов являются:

- Исследование и группировка рисков в рамках страховой совокупности.

- Определение вероятности наступления страхового случая, определение частоты и степени тяжести последствий причинения ущерба в отдельных рисковых группах и в целом по страховой совокупности.

- Математическое обоснование необходимых расходов на ведение дел страховщиком и прогнозирование тенденций их развития.

- Математическое обоснование необходимых резервных фондов страховщика, предложение конкретных методов и источников формирования этих фондов.

Решение этих задач позволяет определить тарифные ставки и размер участия каждого страхователя в создании страхового фонда.

Определение расходов, необходимых на страхование конкретного объекта, называется страховой (актуарной) калькуляцией.

§ 3. Тарифная ставка.

Тарифная ставка (страховой тариф) – это цена страхового риска и других расходов по ведению страхового дела. Определяется с помощью актуарных расчетов. Совокупность тарифных ставок называется тарифом.

Расчет тарифных ставок по видам страхования жизни имеет определенные особенности, связанные с объектом страхования. Объектом является имущественный интерес, связанный с дожитием граждан до определенного срока или возраста, со смертью или иными случаями в жизни гражданина. Для расчета тарифных ставок применяются специально составленные таблицы смертности.

Тарифные ставки бывают:

- единовременные;
- годовые.

Единовременная ставка предполагает уплату страховых взносов в начале срока страхования. Годовая ставка предполагает постепенное погашение финансовых обязательств страхователя перед страховщиком.

Тарифная ставка, по которой заключается договор страхования, называется брутто-ставкой.

Брутто-ставка = нетто-ставка + нагрузка.

Нетто-ставка выражает цену страхового риска: пожара, землетрясения, взрыва и так далее. В основе построения нетто-ставки лежит вероятность наступления страхового случая.

Нагрузка покрывает расходы страховщика по организации и проведению страхового дела.

Вероятностью события А – $P(A)$ – называется отношение числа благоприятных для него случаев М к общему числу всех равновозможных случаев N:

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Например, возьмем 100 застрахованных объектов. Статистика показывает, что ежегодно 3 из них подвергаются страховому случаю. Вероятность того, что с любым из этих 100 объектов произойдет реализация риска, равна 0,03.

Как определить нетто-ставку? Если бы каждый из этих объектов был застрахован на 200 руб., то ежегодные выплаты составили бы $0,03 * 100 * 200 = 600$ руб. Каждый страхователь должен заплатить 600 руб./100 чел. = 6 руб. – нетто-ставка по данному виду страхования в рамках данной страховой совокупности или 3 руб. со 100 руб. страховой суммы.

Однако на практике нетто-ставка корректируется на коэффициент, определяемый отношением средней выплаты к средней страховой сумме на один договор:

$$T_n = P(A) * K * 100$$

где T_n – тарифная нетто-ставка; А – страховой случай; Р(А) – вероятность страхового случая; К – коэффициент отношения средней выплаты к средней страховой сумме на один договор.

Представим формулу в развернутом виде:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{K_b}{K_d}; K = \frac{C_b}{C_c}; T_n = \frac{K_b * C_b}{K_d * C_c}$$

где K_b – количество выплат за год; K_d – количество заключенных договоров в данном году; C_b – средняя выплата за один договор; C_c – средняя страховая сумма на один договор.

Или

$$T_n = \frac{B}{C}$$

где В – общая сумма выплат страхового возмещения; С – общая страховая сумма застрахованных объектов.

Эта формула есть показатель убыточности со 100 руб. страховой суммы.

Брутто-ставка со 100 руб. страховой суммы определяется прибавлением нагрузки к нетто-ставке:

$$T_b = T_n + F_{abs}$$

где F_{abc} – нагрузка.

Расходы на ведение дела обычно рассчитываются на 100 руб. страховой суммы (аналогично нетто-ставке). Остальные надбавки устанавливаются в процентах к брутто-ставке.

Поэтому на практике брутто-ставка рассчитывается по формуле:

$$T_B = \frac{T_n + F_a}{1 - F_{pr}}$$

где T_B – брутто-ставка; F_a – статьи нагрузки, указываемые в тарифе в натуральном исчислении (постоянныe расходы на ведение дела); F_{pr} – доля статей нагрузки, закладываемых в процентах к брутто-ставке (переменные расходы на ведение дела).

§ 4. Показатели страховой статистики.

Страховая статистика представляет собой систематизированное изучение и обобщение массовых и типичных страховых операций на основе выработанных статистической наукой методов обработки обобщенных натуральных и стоимостных показателей, характеризующих страховое дело.

Страховую статистику (применительно к имущественному страхованию) можно свести к анализу следующих показателей:

- число объектов страхования – n ;
- число страховых случаев – e ;
- число пострадавших объектов в результате страховых случаев – m ;
- сумма собранных страховых платежей - $\sum p$;
- сумма выплаченного страхового вознаграждения – $\sum g$;
- общая страховая сумма (для всех объектов страхования) – $\sum S_n$;
- страховая сумма, приходящаяся на поврежденные объекты - $\sum S_m$.

Расчетные показатели страховой статистики:

Частота страховых случаев $\frac{e}{n}$.

Опустошительность страхового случая (коэффициент кумуляции риска) $\frac{m}{e}$. Показывает, сколько поврежденных объектов приходится на один страховой случай.

Коэффициент убыточности (степень ущербности) $\frac{\sum g}{\sum S_m}$.

Средняя страховая сумма на один объект (договор страхования) $\frac{\sum S_n}{n}$.

Средняя страховая сумма на один пострадавший объект $\frac{\sum S_m}{m}$.

Тяжесть риска – отношение средних сумм $\frac{\sum S_m}{m} \div \frac{\sum S_n}{n}$.

Убыточность страховой суммы (вероятность ущерба) $\frac{\sum g}{\sum S_n}$.

Норма убыточности $\frac{\sum g}{\sum p} * 100$.

Частота ущерба $\frac{m}{n}$.

$$\text{Тяжесть ущерба } g = \frac{\sum g}{\sum S_m} * \left(\frac{\sum S_m}{m} \div \frac{\sum S_n}{n} \right)$$

Заключение.

Необходимость страхования жизни диктуют тенденции развития общества - чем оно более развито, тем меньше берет на себя обязательств по обеспечению необходимых условий существования, создавая гибкую социальную инфраструктуру и предоставляя своим гражданам возможность самостоятельно выбирать те пути, которые наиболее им удобны.

Таким образом, страхование жизни - это вид личного страхования, в соответствии с которым страховщик за плату в виде страховой премии обязуется при наступлении страхового случая, наступление которого произойдет обязательно и который не обусловлен причинением вреда имущественным интересам страхователя (застрахованного лица), предоставить страхователю (застрахованному лицу) дополнительный доход в виде оговоренной страховой суммы.

Страхование жизни, как утверждают специалисты, медленно, но верно становится частью нашей жизни. Все большее число россиян понимают, что это единственная и эффективная защита себя и членов своей семьи от неожиданностей, на которые так щедра наша жизнь. К сожалению, далеко не все наши граждане отчтливо представляют себе, что такое страхование жизни. Поэтому и приобретают страховой полис лишь тогда, когда это просто необходимо: для заграничного путешествия или в случае оформления кредита.

А ведь страхование жизни - не только способ материальной поддержки самого себя на случай непредвиденных событий, а еще и прекрасный способ приумножить собственные доходы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ахвледиани Ю. Т., Шахова В. В Страхование. М.: Юнити,

2008.

- [2] Гвозденко А. А. Основы страхования. М.: Финансы и статистика, 2007.
- [3] Корчевская Л. И, Турбина К. Е. Основы страховой деятельности, 2007.
- [4] Саркисов С. Э. Личное страхование. М.: Финансы и статистика, 2008.
- [5] Сахирова Н. П Страхование. Учебное пособие. М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2007. С. 744.
- [6] Сплетухов Ю. А., Дюжинов В. Ф. Страхование: Учебное пособие - М.:ИНФРА - М, 2006.
- [7] Щербаков В. А., Костяева Е. В. Страхование: Учебное пособие - М.:ИНФРА - М, 2006.

УДК 378

РАЗРАБОТКА ТРЕБОВАНИЙ К ИНФОРМАЦИОННОЙ
СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ САЙТОМ ДЛЯ
ONLINE-ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ.

Асадуллина Д. И. (Уфа, БашГУ)

С развитием Интернета у общества появляется все больше возможностей для удаленной учебы. С помощью Интернета можно легко найти практически любой научный материал, книгу, статью или дискуссию на нужную тему. В ряде учебных заведений уже существует интерактивная форма обучения по Интернету, позволяющая получить настоящий диплом об образовании.

Главное преимущество виртуального источника информации состоит в возможности обучения людям с ограниченными возможностями или нуждающихся в этом людей. С помощью специальных дисков с учебными материалами школьник может подтянуть проблемную дисциплину, не прибегая к дорогостоящим занятиям с репетитором. Поисковая система моментально выдаст множество ссылок на любой интересующий вас запрос, избавив от необходимости рыться в учебнике в поиске нужной главы. Несомненно, Интернет делает процесс обучения проще, а поиск информации легче и удобнее. Но всегда ли такой подход во благо?

Многие преподаватели склонны считать Интернет злом, а не помощником в учебе - из-за вечной проблемы плагиата и списывания. Как показывает статистика опроса, проведенного в Сети по инициативе Национального Узла Интернет-безопасности, около 80% пользователей Интернета сдавали скаченные рефераты как свои, треть из них делает это регулярно, а 50% опрошенных прибегают к плагиату, только если тема реферата слишком трудна или неинтересна. В любом случае, половина сданных рефератов являются переделанной копией чужой работы. По данным социального исследования ГУ-ВШЭ, чаще всего скачивают рефераты,

эссе и курсовые студенты четвертых курсов ВУЗов – 52%. Реже первокурсники - их 47%. Покупают готовые работы от трех до семи процентов студентов – видимо, та прослойка этого традиционно бедного сословия, что имеет в карманах лишние деньги.

Из этой статистики логичен вопрос: разве подобное отношение к учебе способствует повышению качества образования? Конечно, нет. Правда, винить в этом Интернет было бы ошибочным. Дело в том, что упрощение процесса обучения будет по-настоящему полезно лишь тем, кто действительно хочет получить знания и стремится к ним, но не имеет возможности приходить, например, на пары. Те же, кто не заинтересован в этом, не стал бы усердно работать и при отсутствии Интернета. Таким образом, в зависимости от личных желаний человека и формируется роль Сети в его обучении.

А так как большинство людей с ограниченными возможностями или просто нуждающиеся люди не могут приходить на пары, а обучение их на дому является затратным для государства, то такое образование редко практикуется в высших учебных заведениях. Целью моего исследования является разработка требований к сайту для обучающего онлайн-ресурса.

Основная проблема выявленная мной при исследовании уже существующих систем заключалась в том, что преподаватели переживали, что ученик будет списывать. Но развитие технологий, развитие камер, wi-fi- все это позволяет нам создать ресурс, который предоставлял бы нам возможность полного контроля за образованием каждого из студентов. Например, если установить планшет в аудиторию, где идет лекция по какому-либо предмету и создать онлайн-конференцию через видео связь и подвести колонки так, чтобы любой ученик имел возможность задать вопрос лектору, или же во время контрольных работ попросить решать контрольную включив камеру, мы смогли бы обеспечить контроль. Так же эта система должна иметь возможность хранить какие-

то уже готовые примеры и задачи, контрольные, послав которые, преподаватель мог бы сам проверить ответы или же система сама могла бы это сделать. Тем более, когда Болонская система образования базируется на баллах и модулях, и имеет чёткую структуру и алгоритмизацию начисления этих баллов можно запрограммировать даже начисление части баллов за посещение и решенные примеры.

Мною были проведены исследования уже по существующим популярным интернет-ресурсам и проведена оценка возможности их использования для онлайн-обучения.

Цели	Задачи	Вконтакте	Инстаграм	Youtube
Преподавание	Наглядные пособия и демонстрационные материалы	+	+	+
	Электронная библиотека (медиатека)	-	+	+
	Виртуальные экскурсии	-	+	+
	Обучающие игры	+	+	+
	Презентации	-	+	+
	Практикумы и мастер-классы	-	-	-
Проверка знаний	Методическая копилка	+	-	-
	Тестирование	+	-	-
	Задачи	+	+	-
	Творческие задания	+	+	+

Цели	Задачи	Вконтакте	Инстаграм	Youtube
Проектная деятельность	Научные и творческие проекты	+	+	+
Личные данные	Портфолио ученика	+	+	+
	Портфолио учителя	+	+	+
Информация и мониторинг	Документы	+	-	-
	Расписание, изменения в расписании	+	+	-
	Анонсы мероприятий	+	-	+
	Новости учебного заведения	+	+	+
	Ответы на вопросы	+	+	-
	Анкетирование	+	-	-
Внеурочная деятельность	Коммуникация субъектов образовательного процесса	+	+	+
	Новости и аналитика образования	+	-	-
	Полезно-развлекательный контент	+	+	+
Работа с родителями	Электронная приемная	+	-	-
	Ответы на вопросы	+	+	+

Хоть и большинство ресурсов позволяют использовать свои возможности для обучения, они все не предоставляют некую об-

щую базу знаний. И не могут обеспечить обратную связь, а те ресурсы, которые предоставляют обратную связь, не могут обеспечить хранение уже проведенных лекций, и не автоматизируют систему контроля за успеваемостью каждого ученика.

Вторая проблема, которая была обнаружена мною в моем проекте, это проблема нарушения прав человека. Ведь моя система будет осуществлять видео слежку за учеником во время лекций. Эту проблему можно решить попросив ученика подписать документы с согласием на это.

Система дистанционного обучения, теперь уже не является проблемой получения полноценного образования практически по любому предмету дистанционно. Онлайн-обучение имеет ряд преимуществ – обучение в индивидуальном темпе, свобода и гибкость, доступность, социальное равноправие. В сети появляется все больше сервисов, помогающих получать новые знания. Но эти сервисы не гарантируют качество образования. На сегодня есть проблема с некачественными тренингами, книгами, вебинарами, конференциями, на которых нескончаемым дождём льётся вода. Я и сама редко, но метко попадаю на подобные мероприятия. Когда это бесплатно, жаль потраченного времени. Когда за деньги – боль удваивается. И очень мало онлайн курсов на уровне Университет-Студент. Вот то направление в котором будет двигаться образование. И вот в каком направлении нужно изучать психологию и методологию преподавания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *информация о статистиках опроса*
<http://saferunet.org/expert/article/589/>

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ

Атнагулов А. И. (Уфа, БГАУ)

Введение. Предварительные сведения.

В настоящей работе рассматривается оператор Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере S^2 в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2(S^2)$:

$$L_0 f = -\Delta_{\varphi,\theta} f = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ — сферические координаты.

Хорошо известно (см. [1]), что спектр оператора L_0 состоит из собственных значений $\lambda_k = k(k + 1)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, причем каждое λ_k имеет кратность $\mu_k = 2k + 1$. Собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_k , есть сферические функции $Y_{\ell k}$.

Согласно формуле сложения сферических функций ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ резольвенты $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ оператора H_0 (Лапласа-Бельтрами) в $L^2(S^2)$ равно

$$R_0(\omega, \omega_0, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)P_n(\cos \alpha)}{n(n+1) - \lambda}, \quad (1)$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра, нормированный условием $P_n(1) = 1$.

Целью настоящей работы является получение другого представления ядра $R(\omega, \omega_0, \lambda)$ резольвенты оператора L_0 , удобной для получения асимптотики резольвенты и приведенной резольвенты оператора L_0 .

**§ 1. Представление ядра $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ резольвенты
оператора Лапласа-Бельтрами.**

Хорошо известно (см., например, [2], с.66-71), что последовательность

$$f_n(\alpha) = \sqrt{n + 1/2} \sqrt{\sin \alpha} P_n(\cos \alpha), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

образует ортонормированный базис собственных функций обыкновенного дифференциального оператора M в $L^2[0, \pi]$, порожденного дифференциальным выражением

$$-\frac{d^2y}{d\alpha^2} - \frac{y}{4 \sin^2 \alpha}$$

и нулевыми граничными условиями в точках $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, причем $f_n(\alpha)$ есть собственная функция оператора M , соответствующая собственному числу $\mu_n = (n + 1/2)^2$.

Так что, согласно (2), ядро $G(\alpha, \alpha_0, z)$ интегрального оператора $G(z) = (M - z)^{-1}$ представляется в виде

$$\begin{aligned} G(\alpha, \alpha_0, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\alpha) f_n(\alpha_0)}{\mu_n - z} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1/2) \sqrt{\sin \alpha} \sqrt{\sin \alpha_0} P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \alpha_0)}{(n + 1/2)^2 - z} \end{aligned} \quad (3)$$

Положим

$$\Gamma(\alpha, \alpha_0, z) = \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha \sin \alpha_0}} G(\alpha, \alpha_0, z) \quad (4)$$

Тогда из (1.1.3) следует, что

$$\Gamma(\alpha, 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1/2) P_n(\cos \alpha)}{(n + 1/2)^2 - z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n + 1) P_n(\cos \alpha)}{n(n + 1) - (z - 1/4)} \quad (5)$$

Сравнивая (1) и (5) между собой, мы видим, что если подставить в $\Gamma(\alpha, \alpha_0, z)$ значения $\alpha_0 = 0$ и $z = \lambda + \frac{1}{4}$, то получившаяся величина будет совпадать с $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$. Учитывая всё вышесказанное, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. Для всех $\omega, \omega_0 \in S^2$ и $\lambda \notin \{n(n+1)\}_{n=0}^\infty$ ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ представляется в виде

$$R_0(\omega, \omega_0, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \Gamma(\alpha, 0, \lambda + 1/4) \quad (6)$$

Таким образом, из равенств (4)-(6) видно, что ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ может быть представлено посредством решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{1}{4\sin^2 \alpha} u + zu = 0 \quad (7)$$

на интервале $(0, \pi)$.

Вначале заметим, что на промежутке $(0, \pi/2]$ справедливо равенство

$$\frac{1}{4\sin^2 \alpha} = \frac{1}{4\alpha^2} + q(\alpha), \quad (8)$$

где $q(\alpha) \in C^2[0, \pi/2]$. Из (2)-(8) вытекает, что линейно независимые решения уравнения (7) можно построить с помощью решений уравнения

$$\nu'' + \frac{1}{4\alpha^2} \nu + z\nu = 0 \quad (9)$$

В качестве линейно независимых решений "невозмущенного" уравнения (9) возьмем функции (см., например, [1])

$$u_1^0(\alpha, z) = \sqrt{\alpha} J_0(\sqrt{z}\alpha), \quad u_2^0(\alpha, z) = \sqrt{\alpha} Y_0(\sqrt{z}\alpha), \quad (10)$$

где J_0 и Y_0 — соответственно, функции Бесселя первого и второго рода, $|\arg| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число. Хорошо известно (см. [1]), что вронскиан

$$W(u_1^0, u_2^0) = u_1^0(\alpha, z)u_2^{0'}(\alpha, z) - u_1^{0'}(\alpha, z)u_2^0(\alpha, z) \equiv 1 \quad (11)$$

Теперь в качестве линейно независимых решений уравнения (7) на промежутке $(0, \pi/2]$ рассмотрим решения неоднородных волнерровых уравнений

$$u_k(\alpha, z) = u_k^0(\alpha, z) + \int_0^\alpha g(\alpha, t, z)q(t)u_k(t, z)dt, \quad (12)$$

где

$$g(\alpha, t, z) = u_1^0(\alpha, z)u_2^0(t, z) - u_1^0(t, z)u_2^0(\alpha, z) \quad (13)$$

Лемма 2. *Существует постоянная $c_0 > 0$, не зависящая от z и α , такая, что для всех $\alpha \geq 0$, $z > 0$, $k = 1, 2$ верно неравенство:*

$$|u_k^0(\alpha, z)| \leq c_0 z^{-1/4} \quad (14)$$

Доказательство. Используем оценку из ([2], стр.) Для $z \geq 0$ верно $|\sqrt{t}J_0(t)| \leq const$. Применим её к нашему конкретному случаю. Тут в роли аргумента t выступает величина $\sqrt{z}\alpha$, стало быть,

$$|\sqrt{\sqrt{z}\alpha}J_0(\sqrt{z}\alpha)| < const$$

Деля обе части выражения на $\sqrt{\alpha}z^{-1/4}$, получим $|J_0(\sqrt{z}\alpha)| < \frac{c}{\sqrt{\alpha}}z^{-1/4}$. Тогда для $u_1(\alpha, z) = \sqrt{\alpha}J_0(\sqrt{z}\alpha)$ в силу неравенств для функций Бесселя (см. [2]) верно $|u_1^0(\alpha, z)| \leq \sqrt{\alpha}J_0(\sqrt{z}\alpha) \leq \sqrt{\alpha}\frac{c}{\sqrt{\alpha}}z^{-1/4}$.

Аналогично и $|u_1^0(\alpha, z)| \leq cz^{-1/4}$, таким образом, получаем утверждение леммы. \square

Лемма 3. *Существует постоянная $c_1 > 0$, не зависящая от z и α , такая, что для всех $\alpha \in [0, \pi/2]$, $z > 0$, $k = 1, 2$ верно:*

$$u_k(\alpha, z) = u_k^0(\alpha, z) + \omega_k(\alpha, z), \quad (15)$$

$$|\omega_k(\alpha, z)| \leq c_1 z^{-3/4} \alpha \quad (16)$$

Доказательство. Равенство (15) следует из (12), где

$$\omega_k(\alpha, z) = u_1^0(\alpha, z) \int_0^\alpha u_2^0(t, z) q(t) u_k(t, z) dt - u_2^0(\alpha, z) \int_0^\alpha u_1^0(t, z) q(t) u_k(t, z) dt \quad (17)$$

Так как, согласно (14), при $z > 0$

$$|g(\alpha, t, z)| \leq c_0^2 z^{-1/2}, \quad (18)$$

то в уравнении (1.1.12) норма интегрального оператора оценивается сверху числом $2c_0^2 z^{-1/2} \int_0^{\pi/2} q(t) dt$. Тогда для $\sup_{z>0} z^{1/4} \|u_k(z)\| < \infty$ имеем оценку

$$\|u_k(z)\| = \max_{0 \leq \alpha \leq \pi/2} |u_k(\alpha, z)| \leq c_0 z^{-1/4} + c_0^2 z^{-1/2} \int_0^{\pi/2} q(t) dt \|u_k(z)\| \quad (19)$$

Теперь оценка (16) следует из (17)-(19). Лемма 3 доказана. \square

Построенные нами на отрезке $[0, \pi/2]$ с помощью интегральных уравнений (12) решения $u_k(\alpha, z)$ уравнения (7) допускают продолжения на промежуток $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Очевидно, функции

$$\nu_k(\alpha, z) = u_k(\pi - \alpha, z) \quad (k = 1, 2), \quad \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \quad (20)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (7) на этом промежутке. Тогда продолжения $u_k(\alpha, z)$ выражаются, как линейные комбинации $\nu_k(\alpha, z)$ при $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$:

$$u_k(\alpha, z) = a_{k1}(z) u_1(\pi - \alpha, z) + a_{k2}(z) u_2(\pi - \alpha, z), \quad (21)$$

где $a_{ki}(z)$ — постоянные, зависящие только от z .

При $\alpha = \pi/2$ должны выполняться соотношения:

$$u_k(\pi/2, z) = a_{k1}(z) u_1(\pi/2, z) + a_{k2}(z) u_2(\pi/2, z)$$

$$u'_k(\pi/2, z) = a_{k1}(z)u'_1(\pi/2, z) + a_{k2}(z)u'_2(\pi/2, z), \quad (22)$$

Очевидно, из соотношений (11)-(12) непосредственно следует, что

$$W(u_1, u_2) = W(u_1^0, u_2^0) = 1 \quad (23)$$

Решая системы (22) и учитывая (23), приходим к следующим утверждениям

Лемма 4. *Решения уравнений (7), построенные на отрезке $[0, \pi/2]$ как решения вольтерровых уравнений (12), продолжаются на промежуток $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ по формулам (21), где*

$$a_{11}(z) = u_1(\pi/2, z)u'_2(\pi/2, z) + u'_1(\pi/2, z)u_2(\pi/2, z) \quad (24)$$

$$a_{12}(z) = -2u_1(\pi/2, z)u'_1(\pi/2, z) \quad (25)$$

$$a_{22}(z) = -a_{11}(z) \quad (26)$$

$$a_{21}(z) = -2u_2(\pi/2, z)u'_2(\pi/2, z) \quad (27)$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат данного параграфа. Имеет место следующая

Основная Теорема. *Для всех вещественных $\lambda, \lambda \notin \{n(n+1)\}_{n=0}^\infty$ ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ представляется в виде*

$$R_0(\omega, \omega_0, \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin \alpha}} [u_2(\alpha, \lambda + 1/4) - A(\lambda + 1/4)u_1(\alpha, \lambda + 1/4)], \quad (28)$$

где

$$A(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{u'_2(\pi/2, z)}{u'_1(\pi/2, z)} + \frac{u_2(\pi/2, z)}{u_1(\pi/2, z)} \right] \quad (29)$$

Доказательство. Пусть ядро $D(\alpha, t, z)$ равно:

$$D(\alpha, t, z) = \begin{cases} u_2(\alpha, z)u_1(t, z), & t \leq \alpha \leq \pi \\ u_2(t, z)u_1(\alpha, z), & \alpha \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (30)$$

Непосредственно используя (7) и (23), находим, что функция $\nu(\alpha, z) = \int_0^\pi D(\alpha, t, z)h(t)dt$, где $h(t) \in L^2[0, \pi]$ является решением дифференциального уравнения

$$-\nu''(\alpha, z) - \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \nu(\alpha, z) - z\nu(\alpha, z) = h(\alpha)$$

Тогда функция

$$u(\alpha, z) = \int_0^\pi G(\alpha, t, z)h(t)dt, \quad (31)$$

где $G(\alpha, t, z)$ есть ядро $G(z)$ (см.(1.1.28)), представляется в виде

$$u(\alpha, z) = \int_0^\pi D(\alpha, t, z)h(t)dt + cu_1(\alpha, z), \quad (32)$$

где учтено, что $u_1(\alpha, z)$ должно удовлетворять условию существования конечного предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(\alpha, z)}{\sqrt{\pi - \alpha}} \quad (33)$$

При $\alpha < \pi$, $\alpha \sim \pi$ правую часть формулы (30) можно представить в виде

$$u(\alpha, z) = u_2(\alpha, z) \int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt + cu_1(\alpha, z) + W(\alpha, z), \quad (34)$$

где $W(\alpha, z) = u_1(\alpha, z) \int_0^\pi u_2(t, z)h(t)dt - u_2(\alpha, z) \int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt$,

причем легко показать, что $W(\alpha, z)$ удовлетворяет оценке

$$|W(\alpha, z)| \leq a_1(\pi - \alpha)(1 + |\ln(\pi - \alpha)|),$$

где $a_1 > 0$ — постоянная.

Так что $W(\alpha, z)$ удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow \pi-0} \frac{W(\alpha, z)}{\sqrt{\pi-\alpha}} = 0$.

Отсюда следует, что сумма первых двух слагаемых правой части (33) должна удовлетворять условию. Согласно (1.1.21), эту сумму легко представить в виде

$$\begin{aligned} & c[a_{11}(z)u_1(\pi - \alpha, z) + a_{12}(z)u_2(\pi - \alpha, z)] + \\ & + \int_0^\pi u_2(t, z)h(t)dt[a_{21}(z)u_1(\pi - \alpha, z) + a_{22}(z)u_2(\pi - \alpha, z)] = \\ & = [ca_{11}(z) + a_{21}(z) \int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt]u_1(\pi - \alpha, z) + \\ & + [ca_{12}(z) + a_{22}(z) \int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt]u_2(\pi - \alpha, z) \end{aligned}$$

Так как по построению $u_1(\pi - \alpha, z)$ удовлетворяет условию (33), а предел $\frac{u_2(\pi - \alpha, z)}{\sqrt{\pi - \alpha}}$ при $\alpha \rightarrow \pi - 0$ равен бесконечности (из-за наличия логарифмической особенности), то коэффициент при $u_2(\pi - \alpha, z)$ должен обращаться в нуль:

$$ca_{12}(z) + a_{22}(z) \int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt = 0 \quad (35)$$

Итак, из (1.1.30), (1.1.31) и (1.1.35) следует, что

$$G(\alpha, t, z) = D(\alpha, t, z) - \frac{a_{22}(z)}{a_{12}(z)}u_1(\alpha, z)u_1(t, z), \quad (36)$$

где, согласно (1.1.24)-(1.1.25)

$$A(z) = -\frac{a_{22}(z)}{a_{12}(z)} = \frac{1}{2} \left[\frac{u'_2(\pi/2, z)}{u'_1(\pi/2, z)} + \frac{u_2(\pi/2, z)}{u_1(\pi/2, z)} \right]$$

Отсюда, используя (4), (6) и условие

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{u_1(\alpha, z)}{\sqrt{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{u_1^0(\alpha, z)}{\sqrt{\alpha}} = 1,$$

получим формулу (28). Основная теорема доказана. \square

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики
- [2] *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения, 1963

УДК 517.984:517.928.8

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ С
МАЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Давлетов Д. Б. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы)
Файзулина К. И. (Уфа, БГУ)

Постановка задачи и формулировка результата

Пусть Ω, ω – ограниченные связные области в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, содержащие начало координат, $\partial\omega, \partial\Omega \in C^\infty$, $|S_n|$ – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n , $c(\omega) > 0$ – гармоническая емкость ω , $a_{ij}, a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\alpha_1|\xi| \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha_2|\xi|$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\forall x \in \Omega, \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\omega_\varepsilon = \{x : x\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

В работе рассматривается следующая краевая задача Дирихле на собственные значения:

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + a(x)u_\varepsilon &= \lambda_\varepsilon u_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть λ_0 – двукратное собственное значение краевой задачи:*

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + a(x)u_0 &= \lambda_0 u_0, \quad x \in \Omega, \\ u_0 &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

$\psi_0^{(1)}$ и $\psi_0^{(2)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции такие, что $\psi_0^{(1)}(0) \neq 0$, $\psi_0^{(2)}(0) = 0$. Тогда существуют два простых собственных значения $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2)}$ краевой

задачи (1), сходящиеся к λ_0 , и они имеют следующие асимптотики соответственно:

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon}^{(1)} &:= \lambda_0 + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{i+n-2,0}^{(1)} + \\ &d(n) \varepsilon^{2(n-2)} \ln \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=(n-2)p}^{\infty} \varepsilon^i \ln^p \varepsilon \lambda_{i+2(n-2),p+1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon}^{(2)} &:= \lambda_0 + \varepsilon^n \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{i+n,0}^{(2)} + \\ &d(n) \varepsilon^{2(n-2)+2} \ln \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=(n-2)p}^{\infty} \varepsilon^i \ln^p \varepsilon \lambda_{i+2(n-2)+2,p+1}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lambda_{n-2,0}^{(1)} = (n-2)c(\omega) |S_n| \left| \psi_0^{(1)}(0) \right|^2 > 0,$$

$$\lambda_{n,0}^{(2)} = |S_n| \nabla \psi_0^{(2)}(0) C_2(\omega) \nabla \psi_0^{(2)}(0) > 0,$$

где $C_2(\omega)$ – положительно определенная $(n \times n)$ -матрица, зависящая только от геометрии области ω , а $d(n) = 0$ при нечетных n и $d(n) = 1$ при четных n .

§ 2. Построение полных формальных асимптотических разложений

Начнем построение асимптотических разложений со следующих асимптотических рядов:

$$\psi_0^{(s)}(x) + \varepsilon \psi_0^{(s^*)}(x) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i+1}^{(s)} \varepsilon^i,$$

где $s^* = 2$, если $s = 1$ и, наоборот, $s^* = 1$, если $s = 2$, а $\alpha_{i+1}^{(s)}$ – пока произвольные постоянные. Следуя методу согласования

асимптотических разложений [1], последовательно получаем сначала асимптотики $v_{p,0}^{(s)}$ и главные члены внутренних разложений:

$$v_{0,0}^{(1)} \sim \psi_0^{(1)}(0), \quad v_{q,0}^{(1)}(\xi) \sim P_q^{(1)}(\xi) + \alpha_1^{(1)} P_q^{(2)}(\xi), \quad q \geq 1,$$

$$v_{1,0}^{(2)}(\xi) \sim \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial \xi_m}(0) \xi_m + \alpha_1^{(2)} \psi_0^{(1)}(0),$$

$$v_{k,0}^{(2)}(\xi) \sim P_k^{(2)}(\xi) + \alpha_1^{(2)} P_k^{(1)}(\xi), \quad k \geq 2,$$

$$v_{0,0}^{(1)}(\xi) = \psi_0^{(1)}(0) z_0(\xi),$$

$$v_{1,0}^{(2)}(\xi) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial \xi_m}(0) z_m(\xi) + \alpha_1^{(2)} \psi_0^{(1)}(0) z_0(\xi),$$

где функции $z_0, z_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega})$ удовлетворяют краевым задачам:

$$\Delta z_k = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \quad z_k = 0, \quad x \in \partial\omega$$

и имеют следующие дифференцируемые асимптотики на бесконечности:

$$z_0 = 1 - \tilde{z}_0, \quad z_m = \xi_m - \tilde{z}_m,$$

где \tilde{z}_k – гармонические функции в $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$ и $\tilde{z}_k = 1$ на $\partial\omega$ с дифференцируемыми асимптотиками на бесконечности:

$$\tilde{z}_k = c_{k,0} \rho^{-n+2} + \sum_{p=1}^n c_{k,p} \xi_p \rho^{-n} + \sum_{i=2}^{\infty} Z_i^{(k)}(\xi) \rho^{-2i-n+2}, \quad k = 0, \dots, n,$$

$c_{0,0} = c(\omega)$ – гармоническая емкость области ω , $c_{k,p}$ – постоянные, $\rho = |\xi|$, а $Z_i^{(k)}(\xi)$ – однородные полиномы степени i . Затем получаем структуры внутренних асимптотических разложений:

$$\psi_{\varepsilon,odd}^{in,1}(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_{i,0}^{(1)}(\xi), \quad \psi_{\varepsilon,odd}^{in,2}(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_{i,0}^{(2)}(\xi). \quad (4)$$

Потом предполагаемые структуры внешних асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon, odd}^{ex,1}(x, \varepsilon) &= \psi_0^{(1)}(x) + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \psi_{i+n-2,0}^{(1)}(x) + \\ &\quad \varepsilon \psi_0^{(2)}(x) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i+1}^{(1)} \varepsilon^i, \\ \psi_{\varepsilon, odd}^{ex,2}(x, \varepsilon) &= \psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \psi_{i+n-1,0}^{(1)}(x) + \\ &\quad \varepsilon \psi_0^{(1)}(x) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i+1}^{(2)} \varepsilon^i, \end{aligned} \tag{5}$$

и ожидаемые структуры (2), (3) асимптотических разложений собственных значений.

Подставляя ряды (2), (3), (5) в (1), получаем заведомо выполняющиеся краевые задачи

$$H\psi_0^{(s)} = \lambda_0 \psi_0^{(s)}, \quad x \in \Omega, \quad \psi_0^{(s)} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

и следующие краевые задачи для остальных коэффициентов внешних разложений (5):

$$\begin{aligned} (H - \lambda_0) \psi_{n-2,0}^{(s)} &= \lambda_{n-2,0}^{(s)} \psi_0^{(s)}, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}, \\ \psi_{n-2,0}^{(s)} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H - \lambda_0) \psi_{n-2+i,0}^{(s)} &= \lambda_{n-2+i,0}^{(s)} \psi_0^{(s)} + \\ &\quad \psi_0^{(s*)} \sum_{p=1}^i \alpha_p^{(s)} \lambda_{i+n-2-p,0}^{(s)}, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}, \\ \psi_{n-2+i,0}^{(s)} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 1 \leq i \leq n-3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(H - \lambda_0) \psi_{i+n-2,0}^{(s)} &= \lambda_{i+n-2,0}^{(s)} \psi_0^{(s)} + \sum_{k=0}^{i-n+2} \lambda_{n-2+k,0}^{(s)} \psi_{i-k,0}^{(s)} \\
&\quad + \psi_0^{(s*)} \sum_{p=1}^i \alpha_p^{(s)} \lambda_{i+n-2-p,0}^{(s)}, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}, \\
\psi_{i+n-2,0}^{(s)} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad i \geq n-2,
\end{aligned}$$

где

$$\psi_{n-2,0}^{(2)}(x) = \lambda_{n-2,0}^{(2)} = \lambda_{n-1,0}^{(2)} = 0.$$

Подставляя ряды (2), (3), (4) в (1), получаем для коэффициентов внутренних разложений (4) следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi v_{0,0}^{(2)} &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \quad v_{0,0}^{(2)} = 0, \quad \xi \in \partial\omega, \\
\Delta_\xi v_{1,0}^{(s)} &= (Q_{1,2}(\xi, D_\xi) + Q_{0,1}(\xi, D_\xi)) v_{0,0}^{(2)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \\
v_{1,0}^{(s)} &= 0, \quad \xi \in \partial\omega, \\
\Delta v_{2,0}^{(s)} &= (Q_{2,2}(\xi, D) + Q_{1,1}(\xi, D) + Q_{0,0}(\xi, D)) v_{0,0}^{(2)} + \\
&\quad (Q_{1,2}(\xi, D) + Q_{0,1}(\xi, D)) v_{1,0}^{(s)} - \lambda_0 v_{0,0}^{(2)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \\
v_{2,0}^{(s)} &= 0, \quad \xi \in \partial\omega, \\
\Delta v_{k,0}^{(s)} &= \sum_{i=2}^k (Q_{i,2}(\xi, D) + Q_{i-1,1}(\xi, D) + Q_{i-2,0}(\xi, D)) v_{k-i,0}^{(s)} + \\
&\quad (Q_{1,2}(\xi, D) + Q_{0,1}(\xi, D)) v_{k-1,0}^{(s)} - \\
&\quad \sum_{j=0}^{k-3} v_{j,0}^{(s)} \lambda_{k-2-j,0}^{(s)} - \lambda_0 v_{k-2,0}^{(s)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \\
v_{k,0}^{(s)} &= 0, \quad \xi \in \partial\omega, \quad k \geq 3,
\end{aligned}$$

где

$$v_{0,0}^{(2)}(\xi) = \lambda_{n-2,0}^{(2)} = \lambda_{n-1,0}^{(2)} = 0.$$

Коэффициенты асимптотических разложений собственных значений и внешних разложений собственных функций будем строить в виде

$$\begin{aligned}\lambda_{n-2+i,0}^{(s)} &= \sum_{t=0}^i \Lambda_{n-2+i,0}^{(t,s)}, \quad i \geq 0, \\ \psi_{n-2+i,0}^{(s)}(x) &= \sum_{t=0}^i \Psi_{n-2+i,0}^{(t,s)}(x), \quad i \geq 0, \\ \alpha_i^{(s)} &= \sum_{t=0}^i \alpha_i^{(t,s)}, \quad i \geq 0,\end{aligned}$$

и обозначим через $\Phi_{\varepsilon,odd,N}^{ex,s}(x, \varepsilon)$ ряды вида (5), где $\psi_{n-2+i,0}^{(s)}(x)$ и $\alpha_i^{(s)}$ заменены на

$$\begin{aligned}\Phi_{n-2+i,0}^{(N,s)}(x) &= \sum_{t=0}^{\min\{i,N\}} \Psi_{n-2+i,0}^{(t,s)}(x), \\ \Theta_i^{(N,s)} &= \sum_{t=0}^{\min\{i,N\}} \alpha_i^{(t,s)},\end{aligned}$$

соответственно. Дальнейшее согласование рядов $\psi_{\varepsilon,odd}^{in,s}(x, \varepsilon)$ и $\psi_{\varepsilon,odd}^{ex,s}(x, \varepsilon)$ из (4) и (5) и обоснование асимптотик (2), (3) проводится аналогично работе [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00445-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач, М.: Наука, 1989
- [2] Бикметов А. Р., Гадылъшин Р. Р. Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n -мерной области, Уфимский математический журнал, 4 № 2, 2012, С. 28–64

УДК 519.712.7

СЕТИ ШТЕЙНЕРА В МАНХЭТТЕНСКОЙ МЕТРИКЕ

Ефимов А. А. (Москва, МГУ)

Настоящая работа посвящена знаменитой проблеме Якоба Штейнера, которая заключается в следующем.

Проблема Я.Штейнера: Пусть M – фиксированное конечное множество точек плоскости. Описать все минимальные сети (сети наименьшей длины), затягивающие множество M .

Мы будем рассматривать случай, когда на плоскости задана манхэттенская метрика, и соответственно все точки имеют целочисленные координаты. Через $L(M)$ обозначим мощность множества M .

Пусть $L(M) = 2$. $M = \{a_1, a_2\}$, где $a_1 = \{x_1, y_1\}$, $a_2 = \{x_2, y_2\}$. Без ограничения общности считаем, что $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Ясно, что минимальный путь $\gamma \in F := \{\gamma : \text{длина } \gamma = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\}$, путь проходит по границам клеток (см. рис. 4).

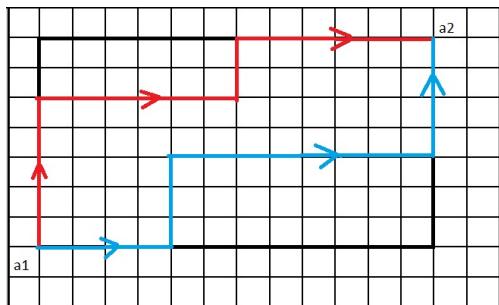


Рис. 1:

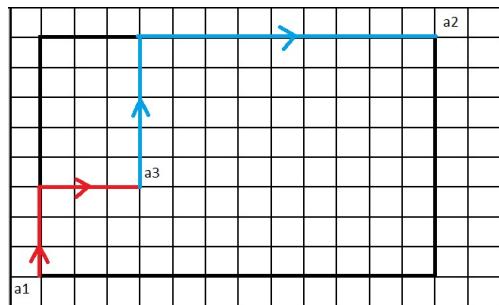


Рис. 2:

Пусть $L(M) = 3$. $M = \{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_1 = \{x_1, y_1\}$, $a_2 = \{x_2, y_2\}$, $a_3 = \{x_3, y_3\}$. Без ограничения общности считаем, что $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Рассмотрим 2 случая.

1 случай: точка a_3 попала в прямоугольник, "образованный" точками a_1 и a_2 , (более формально, $x_1 \leq x_3 \leq x_2$, $y_1 \leq y_3 \leq y_2$). Тогда ясно, что минимальная сеть, затягивающая множество M

— это одна из сетей, соединяющая a_1 и a_2 и проходящая через a_3 (поскольку наша сеть должна соединять в частности точки a_1 и a_2 , и значит ее длина оценивается снизу длиной минимальной сети, соединяющей a_1 и a_2 , а в нашем случае достигается равенство, значит наша сеть минимальна) (см. рис. 2).

2 случай: точка a_3 не попала в прямоугольник, "образованный" точками a_1 и a_2 . Тогда рассмотрим точку $T = \{\text{среднее}\{x_1, x_2, x_3\}, \text{среднее}\{y_1, y_2, y_3\}\}$. Заметим, что точку T можно получить геометрически, найдя пересечение трех прямоугольников, "образованных" точками a_1, a_2, a_3 (см. рис. 3). Итак, соединим точки a_1, a_2, a_3 с точкой T . Тогда полученная сеть будет минимальной. Через $\rho(a_1, a_2)$ обозначим расстояние между точками a_1, a_2 . Тогда заметим, что $\rho(a_1, a_2) \leq \rho(a_1, T) + \rho(T, a_2)$ — неравенство треугольника. Аналогично, $\rho(a_1, a_3) \leq \rho(a_1, T) + \rho(T, a_3)$ и $\rho(a_2, a_3) \leq \rho(a_2, T) + \rho(T, a_3)$. Сложим все неравенства и разделим на 2. Получим ($\text{const} = \rho(a_1, a_2) + \rho(a_1, a_3) + \rho(a_2, a_3))/2 \leq \rho(a_1, T) + \rho(a_2, T) + \rho(a_3, T)$). Поскольку в нашем случае достигается равенство, то получаем, что наша сеть минимальна.

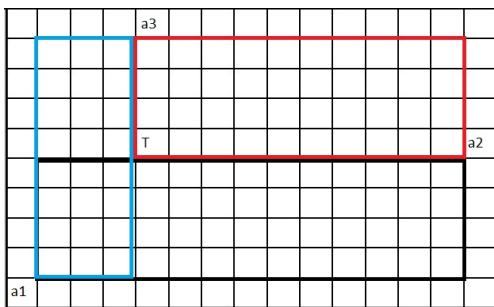


Рис. 3:

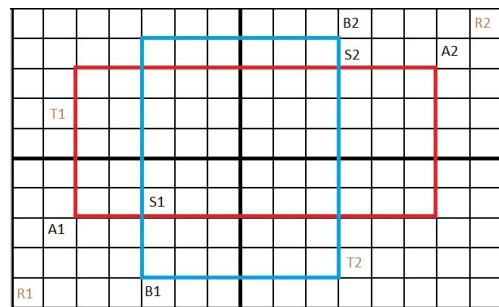


Рис. 4:

Замечание: В доказательстве второго случая мы полагали, что наши три точки соединены какой-то одной вершиной со степенью инцидентности, равной 3. Сразу оговоримся, что мы не будем рассматривать точки Штейнера, с степенью инцидентности, равной 2 (поскольку мы можем просто удалить эту точку, и соединить ребром вершины, которые она соединяла и длина при этом

не изменится). Итак, пусть у нас есть три вершины A, B, C . Тогда рассмотрим пути, соединяющие AB и AC . Их общее начало обозначим через AT (возможно, что T совпало с A). Тогда TB и TC не пересекаются (иначе имеем цикл). Ясно, что тогда TA, TB и TC есть сеть Штейнера, и отношение инцидентности равно 3 (или же T совпало с A , и тогда у нас есть только отрезки AB и AC).

Заметим несколько полезных свойств минимальных сетей. Пусть Γ — минимальное дерево Штейнера (вершинами дерева могут быть как исходные вершины множества M , так и дополнительные вершины, называемые точками Штейнера).

Свойство лунки: Пусть AB — произвольное ребро из Γ . Лункой $L(A, B)$ назовем множество всех точек плоскости, лежащих в прямоугольнике, "образованных" вершинами A и B . Более формально, если $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $X = \{x_1, x_2\}$, то $L(A, B) := \{X \in \mathbb{Z}^2 : (a_1 - x_1)(b_1 - x_1) \leq 0, (a_2 - x_2)(b_2 - x_2) \leq 0\}$.

Утверждение 1.1: Если AB — ребро из Γ , то все вершины дерева Γ лежат вне $L(A, B)$.



От противного. Пусть $\exists S \in L(A, B)$. Тогда рассмотрим сеть, получающуюся из нашей удалением ребра AB и проведением ребер SA и SB . Т.к. $S \in L(A, B) \Rightarrow \rho(A, B) = \rho(A, S) + \rho(S, B)$, а значит длина новой сети не изменилась, но при этом из точки A в точку S мы можем попасть как по пути из старой сети, так и по ребру SA , то в новой сети есть цикл, а значит оно не минимально — противоречие. ■

Замечание: Если в доказательстве утверждения 1.1 оказалось, что старый путь из S в A содержал ребро AB , то рассмотрим путь из B в S , он уже не содержит AB .

Утверждение 1.2: Пусть T — произвольная точка Штейнера из Γ . Тогда степень инцидентности точки T равна 3 или 4.



Заметим, что если AB — ребро из Γ , то множество вершин из Γ , которые соединяются ребром с A или B , лежит в множестве $F(A, B) := \{X \in \mathbb{Z}^2 : X \leq A \text{ или } B \leq X \text{ покоординатно}\}$, (без ограничения общности считаем, что $A \leq B$). Это верно потому как иначе, если бы существовала точка S не лежащая в F , то мы можем улучшить нашу сеть, удалив AB и построив сеть, соединяющую S, A, B . Тогда мы получим противоречие с минимальностью Γ .

Итак, рассмотрим $T = \{t_1, t_2\}$ и лучи, выходящие из точки T , и параллельные осям координат. Заметим, что на одном луче не может находиться более одной точки, инцидентной T . Тогда, если все точки лежат на лучах, то их не более 4. Пусть есть точка S , не лежащая ни на каком луче из T . Тогда в силу доказанного выше, остальные точки, инцидентные T , могут находиться лишь в одной четверти, противоположной (т.е. не соседней) той, где лежит S (в той же четверти, что и S они лежать не могут). Тогда, если остальные точки лежат на лучах, то всего точек не более 3. Если же есть точка C , лежащая внутри луча, то в силу выше доказанного, остальные точки должны лежать в противоположной четверти, к той, в которой лежит C , т.е. там, где лежит S . А значит тогда точек не более 2. Утверждение доказано. ■

Замечание: Если степень инцидентности точки T равна 4, то инцидентные ей вершины лежат на лучах, выходящих из T и параллельных осям координат.

Свойство клина: Пусть U — внутренность угла равного 90° , параллельного осям координат.

Утверждение 1.3: Если U не содержит граничных точек из Γ , то он не содержит и точек Штейнера из Γ .



Без ограничения общности, считаем, что U — первая четверть, вершина угла есть точка $\{u_1, u_2\}$. Пусть $\exists T$ — точка Штейнера, лежащая в U . Тогда, согласно замечанию, степень инцидентно-

сти точки T может быть равна только 3 (иначе справа от нее должна лежать инцидентная ей точка — противоречие условию). Значит, если наша точка Штейнера соединяет три точки A , B и C , то $T = \{\text{среднее}\{a_1, b_1, c_1\}, \text{среднее}\{a_2, b_2, c_2\}\}$. А т.к. у любой из этих точек либо абсцисса меньше u_1 , либо ордината меньше u_2 , без ограничения общности считаем, что $a_1, b_1 < u_1$. Тогда $t_1 = \text{среднее}\{a_1, b_1, c_1\} < u_1$, но $t_1 > u_1$, получили противоречие.

■

Свойство двойного клина: Пусть $R = R_1 \cup R_2$ — вертикальный угол, стороны которого параллельны осям координат, величина равна 90° , и X — его вершина.

Утверждение 1.4: Если все граничные вершины минимального дерева Штейнера Γ лежат в вертикальном угле R , то в R содержатся все точки Штейнера из Γ . Более того,

- а) если вершина X угла R не содержится в множестве граничных точек дерева Γ , то самое большое одно ребро из Γ имеет одну концевую точку в R_1 , а другую в R_2 , т.е. не в R может лежать не более одного ребра из Γ ;
- б) если вершина X угла R содержится в множестве граничных точек дерева Γ , то дерево Γ целиком содержится в R .

▲

Рассмотрим дополнение к R . Это будет угол $P = P_1 \cup P_2$, стороны которого параллельны осям координат, а величина равна 90° . Тогда применив утверждение 1.3 к углам P_1 и P_2 , получим требуемое.

Теперь докажем пункт а). Пусть нашлись точки $A_1, B_1 \in R_1, A_2, B_2 \in R_2 : A_1A_2, B_1B_2 \in \Gamma$. Рассмотрим прямоугольники T_1 и T_2 , "образованные" вершинами A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. Заметим, что их пересечение непусто, т.к. $X \in T_1, X \in T_2$, значит, пусть они пересекаются в точках $S_1 \in R_1$ и $S_2 \in R_2$. Тогда рассмотрим другую сеть. Уберем ребра A_1A_2, B_1B_2 и проведем ребра $A_1S_1, B_1S_1, S_1S_2, S_2A_2, S_2B_2$ (см. рис. 4). Заметим,

что длина полученной сети будет меньше исходной на S_1S_2 . Получили противоречие с минимальностью. (Заметим, что если точка $B_1 \in T_1$, то считаем $S_1 = B_1$, аналогично, $A_1 \in T_2$, то $S_1 = A_1$; если $A_2 \in T_2$, то $S_2 = A_2$, если $B_2 \in T_1$, то $S_2 = B_2$)

Пункт б). Опять же, Пусть нашлись точки $A_1 \in R_1, A_2 \in R_2 : A_1A_2 \in \Gamma, X \in \Gamma$. Но тогда $X \in L(A_1, A_2)$ — противоречие. ■

Заметим, что т.к. степень инцидентности точки Штейнера равна 3 или 4, и мы знаем, что ее координаты не выходят из множества абсцисс и ординат граничных точек. Тогда, если у нас дано N точек, то число возможных позиций точек Штейнера оценивается N^2 . Покажем, что их число значительно меньше.

Лемма: Существует конфигурация минимального дерева Штейнера, такая, что любая точка Штейнера инцидентна не более чем 2 точкам Штейнера.



1 случай: Степень инцидентности точки Штейнера равна 4. Пусть T инцидентна 4 точкам Штейнера. Тогда возможны 4 подслучаи (см. рис. 5, рис. 6, рис. 7, рис. 8).

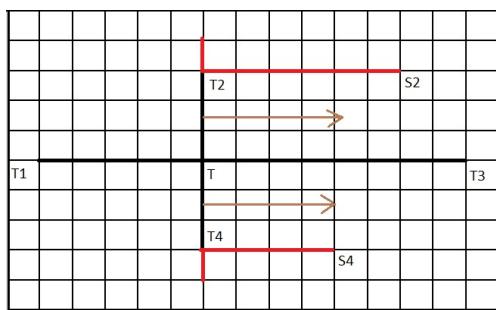


Рис. 5:

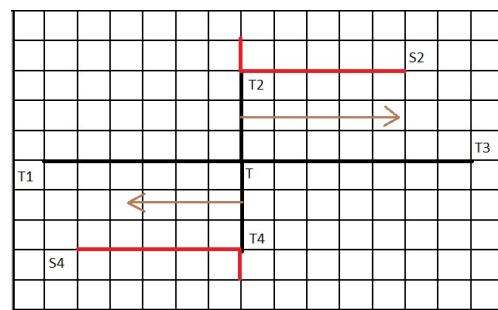


Рис. 6:

а) У нас имеются два "однонаправленных отростка" T_2S_2 и T_4S_4 ; точки T_2, T_4 инцидентности 3 (см. рис. 5). Тогда начнем сдвигать нашу сеть до того момента, пока либо T не перейдет в S_3 (тогда мы просто убрали точку Штейнера), либо T_2 перейдет в S_2 (убираем T_2), либо T_4 перейдет в S_4 (убираем T_4). Если точка S_2 (S_4) — граничная, то все хорошо, проводим аналогичное рассуж-

дение для точек T_1 и T_3 (двигаем с разбором случаев), если же S_2 (S_4) — точка Штейнера, то индуктивно повторяем рассуждение (число точек Штейнера уменьшилось на 1, а их конечно).

b) У нас имеются два "разнонаправленных отростка" T_2S_2 и T_4S_4 ; точки T_2, T_4 инцидентности 3 (см. рис. 6). Заменяем точку T на T' и T'' . Одну точку двигаем влево (пока T' не перейдет в T_1 , или T_4 в S_4), а вторую вправо (пока T'' не перейдет в T_3 , или T_2 в S_2). В итоге мы добавим одну точку Штейнера и уберем две точки.

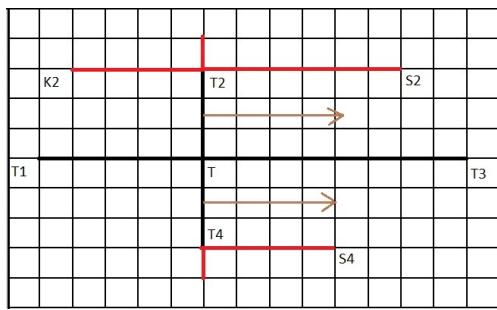


Рис. 7:

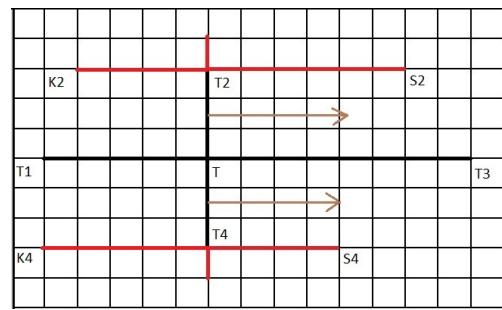


Рис. 8:

c) У нас имеются два "однонаправленных отростка" T_2S_2 и T_4S_4 ; точка T_2 инцидентности 4, T_4 инцидентности 3 (см. рис. 7). Точку T_2 заменяем на две точки T'_2 и T''_2 . Точку T'_2 оставляем на месте, T''_2 сдвигаем вправо. Тогда число точек Штейнера не увеличивается, но число точек, степени инцидентности 4 уменьшится хотя бы на 1 (собственно, благодаря этому мы можем обещать, что индуктивный алгоритм закончится).

d) У нас имеются две точки T_2, T_4 инцидентности 4. Точку T_2 заменяем на две точки T'_2 и T''_2 , S_2 заменяем на две точки S'_2 и S''_2 . T'_2 и S'_2 оставляем на месте, а T''_2 и S''_2 сдвигаем, например, вправо. Тогда число точек Штейнера инцидентности 4 уменьшиться на 2.

Таким образом, каждый раз у нас либо уменьшается число точек Штейнера инцидентности 4, либо просто число точек Штейнера.

2 случай: Степень инцидентности точки Штейнера равна 3.

Тогда возможны 4 подслучаи (см. рис. 9, рис. 10, рис. 11, рис. 12).

Все случаи разбираются аналогично 1 случаю. ■

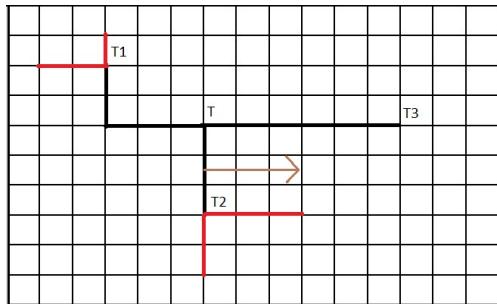


Рис. 9:

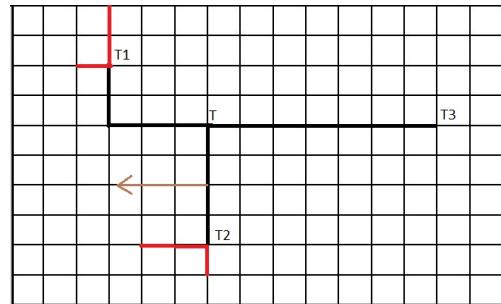


Рис. 10:

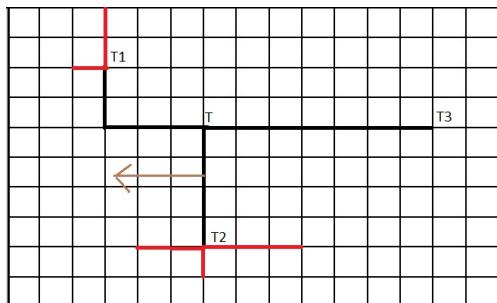


Рис. 11:

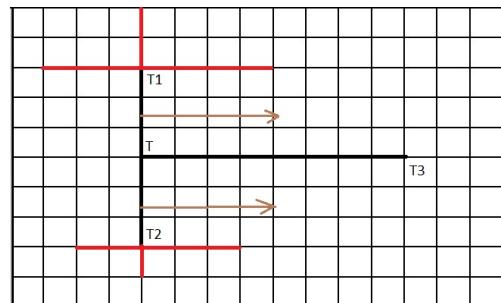


Рис. 12:

Утверждение 3.1: Существует конфигурация минимального дерева Штейнера для N граничных точек, где число точек Штейнера $\leq N - 2$.



Рассмотрим конфигурацию, полученную из предыдущей леммы. Рассмотрим граф, состоящий только из точек Штейнера и связей между ними. Согласно лемме, это множество линейных цепочек. Заметим, что каждая такая цепочка из N элементов может соединяться минимум с $1*(N-2) + 2*2 = N+2$ граничными точками. Также несложно увидеть, что две разные цепочки могут иметь лишь одну общую граничную точку (иначе цикл). Причем, если в одной цепочке N точек, а в другой M , то они должны соединяться минимум с $(N+2)+(M+2)-1 = N+M+3$ граничны-

ми точками. Также осталось заметить, что, любая цепочка может иметь лишь две общие граничные точки с какими-то другими двумя цепочками, причем, в силу того, что наш граф — дерево, эти связи выстраиваются в новые линейные цепочки, что, собственно, завершает доказательство. ■

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Gilbert E. N. and Pollak H. O.* Steiner Minimal Trees //SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 16, No. 1 (Jan., 1968), pp. 1–29.
- [2] *Hwang F. K.* On Steiner Minimal Trees with Rectilinear Distance// SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 30, No. 1 (Jan., 1976), pp. 104–114.
- [3] *Ivanov A. O., Tuzhilin A.A.* Minimal networks : the Steiner problem and its generalizations// 1994 by CRC Press, Inc.

УДК 517.984

АСИМПТОТИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ершов А. А. (Челябинск, ЧелГУ),
Гадыльшин Р. Р. (Уфа, БашГПУ)

В [1, §1, с.17, §4, с.28] приведён главный член асимптотики электрического сопротивления образца произвольной формы:

$$R = \frac{1}{2\varepsilon\sigma} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1)$$

где ε — радиус малых круглых контактов на уплощённой части границы, σ — удельная проводимость материала. В настоящей работе вычисляется следующий член асимптотики сопротивления, причем, рассматривается случай контактов произвольной формы.

Пусть Ω — связная ограниченная область в \mathbb{R}^3 , $\partial\Omega \in C^\infty$, которая имеет два плоских участка. С ними связем декартовы системы координат: O_+x и O_-y . Пусть оси O_+x_3 и O_-y_3 направлены по внутренним нормалям области Ω в окрестности этих участков границы, γ_\pm — замыкания ограниченных односвязных областей на плоскостях $x_3 = 0$ и $y_3 = 0$ соответственно, $\partial\gamma_\pm \in C^\infty$. Пусть $\gamma_\pm^\varepsilon := \{z : \varepsilon^{-1}z \in \gamma_\pm\}$. В работе получена следующая формула:

$$R = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}}{2\pi\sigma C_{\gamma_+} C_{\gamma_-}} - \frac{1}{2\pi\sigma} \left(G_+(O_-) + G_-(O_+) \right) + O(\varepsilon). \quad (2)$$

Здесь и всюду далее, $C_{\gamma_\pm} > 0$ — ёмкости дисков γ_\pm , $G_\pm(x) = r_\pm^{-1} + g_\pm(x)$, где $r_+ = |x|$, $r_- = |y|$, а функции $g_\pm(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta g_\pm = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial g_\pm}{\partial \mathbf{n}} = -2\pi - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_\pm} \right), & x \in \partial\Omega \setminus O_\pm, \\ g_\pm(O_\pm) = 0. \end{cases}$$

В частном случае круговых контактов γ_\pm^ε радиуса ε известно (см., например, [2, гл.1, §4]), что $C_{\gamma_\pm} = \frac{2}{\pi}$. Поэтому для этого

частного случая в силу (2) получаем, что

$$R = \frac{1}{2\sigma\varepsilon} - \frac{1}{2\pi\sigma} \left(G_+(O_-) + G_-(O_+) \right) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, найден следующий член асимптотической формулы (1).

§ 1. Сведение к краевой задаче

По закону Ома сопротивление $R = \frac{\Delta U}{I}$, где ΔU — разность потенциалов на контактах, I — сила тока, проходящего через проводник. Зная электрический потенциал $u(x, \varepsilon)$ в каждой точке проводника Ω , мы можем вычислить разность потенциалов $\Delta U = |u(O_+) - u(O_-)|$ и силу тока как модуль поверхностного интеграла по любому сечению H проводника

$$I = \left| \sigma \iint_H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_H} dS \right|, \quad (3)$$

где \mathbf{n}_H — нормаль к поверхности сечения H , а $\sigma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_H}$ — плотность силы тока, проходящего через сечение H .

Электрический потенциал $u(x, \varepsilon)$ моделируется с помощью решения следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega \setminus \{\gamma_+^\varepsilon \cup \gamma_-^\varepsilon\}, \\ u = U_\pm, & x \in \gamma_\pm^\varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

где U_+ , U_- — потенциалы на контактных поверхностях, \mathbf{n} — внешняя нормаль. Из ([3]) и теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений (см., например, [4, гл. IV, §2, п. 3]) следует существование и единственность решения задачи (6) в классе функций из $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{\partial\gamma_+^\varepsilon \cup \partial\gamma_-^\varepsilon\}) \cap C(\bar{\Omega})$. Поскольку искомое сопротивление проводника не зависит от напряжения, то для удобства положим $U_+ = 1$, $U_- = -1$.

§ 2. Построение асимптотики

Обозначим $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\rho = |\xi|$. Будем говорить, что точка $\xi \in \mathbb{R}_+^3$, если $\xi_3 > 0$, и что $\xi \in \overline{\mathbb{R}_+^3}$, если $\xi_3 \geq 0$. Пусть γ — замыкание некоторой односвязной ограниченной области из \mathbb{R}^2 , C_γ — ёмкость диска γ . Из ([5], леммы 3) следует существование решения $E(\gamma, \xi) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3} \setminus \partial\gamma) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta E = 0, & \xi \in \mathbb{R}_+^3, \\ E = 1, & \xi \in \gamma, \\ \frac{\partial E}{\partial \xi_3} = 0, & \xi \in \{\xi : \xi_3 = 0, \xi \notin \gamma\}, \\ E \rightarrow 0, & \rho = |\xi| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

и которое имеет асимптотику

$$E(\gamma, \xi) = C_\gamma \rho^{-1} + O(\rho^{-2}), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

Будем искать асимптотику решения задачи (6) в виде

$$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots \text{ при } r_\pm \geq M\varepsilon^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (5)$$

$$u(x, \varepsilon) = v_0^+ \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon v_1^+ \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \dots \text{ при } r_+ \leq M\varepsilon^\alpha, \quad (6)$$

$$u(x(y), \varepsilon) = v_0^- \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon v_1^- \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) + \dots \text{ при } r_- \leq M\varepsilon^\alpha, \quad (7)$$

Подставив разложение (5) в (6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega \setminus \{O_+ \cup O_-\}, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Обозначим $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ в окрестности O_+ , $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ в окрестности O_- , $\rho = |\xi|$. Подставив (6), (7) в (6) и перейдя к переменныи ξ , получаем

$$\begin{cases} \Delta v_k^\pm = 0, & \xi \in \mathbb{R}_+^3, \\ v_k^\pm = \delta_{0k}, & \xi \in \gamma_\pm, \\ \frac{\partial v_k^\pm}{\partial \xi_3} = 0, & \xi \in \{\xi : \xi_3 = 0, \xi \notin \gamma_\pm\}, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Возьмём в качестве главного члена асимптотики

$$u_0(x) \equiv \mathcal{A}_0, \quad (10)$$

где \mathcal{A}_0 — пока произвольная постоянная. Поэтому согласно методу согласования асимптотических разложений в окрестностях γ_{\pm} решение следует искать в виде:

$$v_0^{\pm}(\xi) = \mathcal{A}_0 + o(1), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из определения $E(\xi)$ вытекает, что функции

$$v_0^{\pm}(\xi) = \mathcal{A}_0(1 - E(\gamma_{\pm}, \xi)) \pm E(\gamma_{\pm}, \xi)$$

являются решениями краевых задач (9) и имеют асимптотики

$$v_0^{\pm}(\xi) = \mathcal{A}_0 \pm \frac{\mathcal{B}_0^{\pm}}{\rho} + \frac{X_1^{\pm}(\xi)}{\rho^3} + \dots, \quad \mathcal{B}_0^{\pm} = (1 \mp \mathcal{A}_0)C_{\gamma_{\pm}}, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (12)$$

которые уточняют асимптотики (11). Здесь $X_1^{\pm}(\xi)$ — однородные полиномы первой степени. Переписывая асимптотики (12) в переменных x и y , получаем, что $v_0^{\pm}(\xi) = \mathcal{A}_0 \pm \varepsilon \mathcal{B}_0^{\pm} r_{\pm}^{-1} + \dots$.

Отсюда следует, что

$$u_1(x) = \pm \frac{\mathcal{B}_0^{\pm}}{r_{\pm}} + O(1), \quad r_{\pm} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Если $\mathcal{B}_0^- = \mathcal{B}_0^+$, то, во-первых,

$$\mathcal{A}_0 = \frac{C_{\gamma_+} - C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}}, \quad \mathcal{B}_0^- = \mathcal{B}_0^+ = \mathcal{B}_0 = \frac{2C_{\gamma_+}C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}}, \quad (14)$$

а, во-вторых, существует решение задачи (5) с асимптотикой (13):

$$u_1(x) = \mathcal{B}_0 \left(G_+(x) - G_-(x) \right) + \mathcal{A}_1, \quad (15)$$

где постоянная \mathcal{A}_1 ещё не определена. Перепишем сумму $u_0(x) + \varepsilon u_1(x)$ в переменных ξ в окрестностях O_+ и O_- :

$$u_0(\varepsilon\xi) + \varepsilon u_1(\varepsilon\xi) = \mathcal{A}_0 \pm \frac{\mathcal{B}_0}{\rho} + \varepsilon \left(\mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_{\mp}(O_{\pm}) \right) + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда получаем асимптотики на бесконечности для $v_1^\pm(\xi)$:

$$v_1^\pm(\xi) \rightarrow \mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Из определения $E(\xi)$ вытекает, что функции

$$v_1^\pm(\xi) = (\mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm))(1 - E(\gamma_\pm, \xi))$$

являются решениями краевых задач (9) и имеют асимптотики

$$\begin{aligned} v_1^\pm(\xi) &= \mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm) \pm \frac{\mathcal{B}_1^\pm}{\rho} + \dots, \quad \rho \rightarrow \infty, \\ \mathcal{B}_1^\pm &= C_{\gamma_\pm} (\mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm) \mp \mathcal{A}_1), \end{aligned} \quad (17)$$

которые уточняют асимптотики (16). Перепишем сумму $v_0^+(\xi) + \varepsilon v_1^+(\xi)$ в переменных x , а сумму $v_0^-(\xi) + \varepsilon v_1^-(\xi)$ в переменных y и выделим еще не согласованные члены:

$$\begin{aligned} v_0^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \dots + \varepsilon^2 \left(\frac{X_1^+(x)}{r_+^3} + \frac{\mathcal{B}_1^+}{r_+} \right) + \dots, \\ v_0^-\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1^-\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) &= \dots + \varepsilon^2 \left(\frac{X_1^-(y)}{r_-^3} - \frac{\mathcal{B}_1^-}{r_-} \right) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует асимптотика

$$u_2(x) = \frac{X_1^\pm}{r_\pm^3} \pm \frac{\mathcal{B}_1^\pm}{r_\pm} + \dots, \quad r_\pm \rightarrow 0. \quad (18)$$

Если $\mathcal{B}_1^+ = \mathcal{B}_1^-$, то, во-первых, в силу (14) и (17) получаем, что

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2C_{\gamma_+}C_{\gamma_-}}{(C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-})^2} \left(C_{\gamma_+}G_-(O_+) - C_{\gamma_-}G_+(O_-) \right),$$

$$\mathcal{B}_1^+ = \mathcal{B}_1^- = \mathcal{B}_1 = 2 \left(\frac{C_{\gamma_+}C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}} \right)^2 \left(G_+(O_-) + G_-(O_+) \right), \quad (19)$$

во-вторых, существует решение u_2 задачи (8) с асимптотикой (18).

Таким образом, мы построили разложения (5), (6) и (7). Их обоснование следует из принципа максимума ([5, лемма 4]). Подставляя (6), (10), (15) и (18) в выражение (3) получим, что

$$\begin{aligned} I &= \sigma \left| \left(\varepsilon \mathcal{B}_0 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_1 \right) \iint_H \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_H} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) dS \right| + O(\varepsilon^3) = \\ &= \varepsilon \cdot 2\pi\sigma \mathcal{B}_0 + \varepsilon^2 \cdot 2\pi\sigma \mathcal{B}_1 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Итак,

$$R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\pi\sigma\mathcal{B}_0} - \frac{\mathcal{B}_1}{\pi\sigma\mathcal{B}_0^2} + O(\varepsilon).$$

Учитывая (14) и (19), мы получили формулу (2).

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ (14-31-50424-мол_нр) и "Фондом поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса". Второй автор поддержан грантом РФФИ (14-01-00322).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Холм P. Электрические контакты. М.: Иностранная литература, 1961.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика (в 10 т). Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005.
- [3] Zagemba S. Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace // Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, Classe des sciences mathématiques et naturelles, série A. 1910. P. 313–344.
- [4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
- [5] Ершов А.А. О смешанной задаче для гармонической функции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 7. С. 1094–1106.

УДК 517.929.7:517.929.8

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С
БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМ И ДЕЛЬТООБРАЗНЫМ
ПОТЕНЦИАЛАМИ

Гадыльшин Т. Р. (Уфа, УГАТУ)

§ 1. Формулировка основного утверждения

Рассматривается следующая краевая:

$$\begin{aligned} L_{\mu,\varepsilon} u_{\mu,\varepsilon} &:= -\frac{d^2 u_{\mu,\varepsilon}}{dx^2} + \left(q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) + \varepsilon^{-1} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) u_{\mu,\varepsilon} \\ &= f\left(x, \frac{x}{\mu}\right), \quad x \in (a, b), \quad u_{\mu,\varepsilon}(a) = u_{\mu,\varepsilon}(b) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q(x, \xi), f(x, \xi)$ — 1-периодические по ξ функции из $C([a, b] \times (-\infty, \infty))$, $a < 0 < b$, $Q(\xi) \in C_0(-\infty, \infty)$, $0 < \mu, \varepsilon \ll 1$, причем, $q(x, \xi) > 0$, $Q(\xi) \geq 0$.

Обозначим $[g](x) = \int_0^1 g(x, \xi) d\xi$, $\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi) d\xi$.

Основным результатом работы является доказательство следующего утверждения, для доказательства которого использована комбинация метода согласования асимптотических разложений [1] и метода усреднения (см., например, [2]).

Теорема 2. *Существует единственное решение краевой задачи (1) и для него справедливо равенство*

$$\|u_{\mu,\varepsilon} - U\|_{C[a,b]} = O(\mu + \varepsilon). \tag{2}$$

где $U(x)$ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 U}{dx^2} + [q](x)U &= [f](x), \quad x \in (a, 0) \cup (0, b), \\ U(a) = U(b) &= 0, \quad U'(+0) - U'(-0) = \langle Q \rangle U(0). \end{aligned} \tag{3}$$

§ 2. Построение приближения решения

Пусть $U_{\mu,0}(x)$ и $y_{\mu,\mp}(x)$ решения краевых задач:

$$\begin{aligned} L^\mu U_{\mu,0} &:= -\frac{d^2 U_{\mu,0}}{dx^2} + q \left(x, \frac{x}{\mu} \right) U_{\mu,0} = f \left(x, \frac{x}{\mu} \right), \quad x \in (a, b), \\ U_{\mu,0}(a) &= U_{\mu,0}(b) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} L^\mu y_{\mu,-} &= 0, \quad x \in (a, 0), \quad y_{\mu,-}(a) = 0, \quad y_{\mu,-}(0) = 1, \\ L^\mu y_{\mu,+} &= 0, \quad x \in (0, b), \quad y_{\mu,+}(b) = 0, \quad y_{\mu,+}(0) = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $0 < q < \kappa$, то

$$\|U_{\mu,0}\|_{C^2[a,b]} + \|y_{\mu,-}\|_{C^2[a,0]} + \|y_{\mu,+}\|_{C^2[0,b]} = O(1). \quad (6)$$

Так как носитель функции $Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ лежит в окрестности нуля порядка ε , то $L_{\mu,\varepsilon} = L^\mu$ вне этой окрестности. Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, вне окрестности нуля *внешнее* асимптотическое приближение решения краевой задачи (1) будем искать в виде

$$U_\mu(x) = U_{\mu,0}(x) + A_\mu \begin{cases} y_{\mu,-}(x), & x \in [a, 0] \\ y_{\mu,+}(x), & x \in (0, b] \end{cases}, \quad (7)$$

где A_μ — пока произвольная постоянная. Тогда

$$U_\mu(0) = U_{\mu,0}(0) + A_\mu, \quad U'_\mu(\mp 0) = U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,\mp}(0), \quad (8)$$

а в силу краевых задач (4) и (5) имеем:

$$L^\mu U_\mu = f, \quad x \in (a, 0) \cup (0, b), \quad U_\mu(a) = U_\mu(b) = 0, \quad (9)$$

$$U_\mu \in C[a, b] \cap C^2[a, 0] \cap C^2[0, b]. \quad (10)$$

Здесь и всюду далее в записи (10) не предполагается совпадение пределов слева и справа в нуле производной функции $U_\mu(x)$. Но, с другой стороны, из (10) в силу уравнения из (4) следует, что

$$U''_\mu(+0) = q(0, 0)U_\mu(0) - f(0, 0) = U''_\mu(-0). \quad (11)$$

Разлагая функцию $U_\mu(x)$ в ряд Тейлора в нуле:

$$U_\mu(x) = U_\mu(0) + \begin{cases} U'_\mu(-0)x + O(x^2), & x < 0 \\ U'_\mu(+0)x + O(x^2), & x > 0 \end{cases}$$

и переходя в к *внутренней* переменной $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, получаем

$$U_\mu(x) = U_\mu(0) + \begin{cases} \varepsilon U'_\mu(-0)\xi + O(\varepsilon^2\xi^2), & \xi < 0 \\ \varepsilon U'_\mu(+0)\xi + O(\varepsilon^2\xi^2), & \xi > 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Из равенств (12) и метода согласования асимптотических разложений следует, что в окрестности нуля приближение следует искать в виде

$$V_\mu(\xi, \varepsilon) = v_{0,\mu}(\xi) + \varepsilon v_{1,\mu}(\xi), \quad (13)$$

требуя от $v_{j,\mu}(\xi)$ следующего поведения на бесконечности:

$$v_{0,\mu}(\xi) = U_\mu(0) + o(1), \quad \xi \rightarrow \mp\infty, \quad (14)$$

$$v_{1,\mu}(\xi) = U'_\mu(\mp 0)\xi + o(|\xi|), \quad \xi \rightarrow \mp\infty. \quad (15)$$

Так как $\frac{d^2}{dx^2} = \varepsilon^{-2} \frac{d^2}{d\xi^2}$, то в силу (13) имеем:

$$\begin{aligned} L_{\mu,\varepsilon} V_\mu \left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon \right) &= -\varepsilon^{-2} \frac{d^2 v_{0,\mu}}{d\xi^2} \left(\frac{x}{\mu} \right) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \left(Q \left(\frac{x}{\mu} \right) v_{0,\mu} \left(\frac{x}{\mu} \right) - \frac{d^2 v_{1,\mu}}{d\xi^2} \left(\frac{x}{\mu} \right) \right) + \\ &\quad + q \left(x, \frac{x}{\mu} \right) v_{0,\mu} \left(\frac{x}{\mu} \right) + \varepsilon q \left(x, \frac{x}{\mu} \right) v_{1,\mu} \left(\frac{x}{\mu} \right) \\ &\quad + Q \left(\frac{x}{\mu} \right) v_{1,\mu} \left(\frac{x}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при отрицательных степенях ε , получаем уравнения на $v_{1,\mu}$:

$$v''_{0,\mu}(\xi) = 0, \quad (16)$$

$$v''_{1,\mu}(\xi) = Q(\xi)v_{0,\mu}(\xi). \quad (17)$$

Следовательно, если функции $v_{j,\mu}(\xi)$ являются решениями уравнений (16) и (17), то справедливо равенство

$$\begin{aligned} L_{\mu,\varepsilon} V_\mu \left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = & q \left(x, \frac{x}{\mu} \right) v_{0,\mu} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v_{1,\mu} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\ & + \varepsilon q \left(x, \frac{x}{\mu} \right) v_{1,\mu} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + Q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что функция

$$v_{0,\mu}(\xi) \equiv U_\mu(0) \quad (19)$$

является решением уравнения (16) с асимптотикой (14).

Подставляя (19) в правую часть (17), получаем, что функция

$$v_{1,\mu}(\xi) = U_\mu(0) \int_{-\infty}^{\xi} Q(\tau) \int_{\tau}^{\xi} dt d\tau + c_\mu \xi \quad (20)$$

является решением уравнения (17) для любых c_μ и

$$v_{1,\mu}(\xi) = \begin{cases} c_\mu \xi, & \xi \rightarrow -\infty, \\ (c_\mu + U_\mu(0) \langle Q \rangle) \xi + C_\mu, & \xi \rightarrow +\infty \end{cases}, \quad (21)$$

где

$$C_\mu = -U_\mu(0) \int_{-\infty}^{\infty} \tau Q(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Приравнивая в (21) и (15) коэффициенты при $\xi \rightarrow \mp\infty$, с учетом (8) получаем систему уравнений для c_μ и A_μ :

$$c_\mu = U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,-}(0) = U'_\mu(-0), \quad (23)$$

$$c_\mu + (U_{\mu,0}(0) + A_\mu) \langle Q \rangle = U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,+}(0) = U'_\mu(+0). \quad (24)$$

Отсюда находим c_μ и

$$A_\mu = \frac{U_{\mu,0}(0) \langle Q \rangle}{y'_{\mu,+}(0) - y'_{\mu,-}(0) - \langle Q \rangle}. \quad (25)$$

Таким образом, выбрав A_μ и c_μ в соответствии с (25) и (23), во-первых, окончательно определили $U_\mu(x)$ и $v_{i,\mu}(\xi)$ из (7), (19) и (20), а во-вторых, добились равенств (14) и (15).

Более того, так как $Q(\xi) \in C_0(-\infty, \infty)$, то из (20), (21), (23) и (24) вытекает, что

$$v_{1,\mu}(\xi) \equiv \begin{cases} U'_\mu(-0)\xi & \text{при } \xi \text{ левее } \text{supp } Q(\xi) \\ U'_\mu(+0)\xi + C_\mu & \text{при } \xi \text{ правее } \text{supp } Q(\xi) \end{cases}. \quad (26)$$

Пусть $U_0(x)$, $y_\pm(x)$ — решения краевых задач

$$\begin{aligned} -\frac{d^2U_0}{dx^2} + [q](x)U_0 &= [f](x), \quad x \in (a, b), \quad U_0(a) = U_0(b) = 0, \\ -\frac{d^2y_-}{dx^2} + [q](x)y_- &= 0, \quad x \in (a, 0), \quad y_-(a) = 0, \quad y_-(0) = 1, \\ -\frac{d^2y_+}{dx^2} + [q](x)y_+ &= 0, \quad x \in (0, b), \quad y_+(b) = 0, \quad y_+(0) = 1. \end{aligned}$$

Из метода усреднения (см., например, [2]) вытекает, что

$$\|U_{\mu,0} - U_0\|_{C^1[a,b]} + \|y_{\mu,-} - y_-\|_{C^1[a,0]} + \|y_{\mu,+} - y_+\|_{C^1[0,b]} = O(\mu). \quad (27)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} W_{\mu,\varepsilon}(x) &= U_\mu(x) + V_\mu\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) - \left(U_\mu(0) + \begin{cases} U'_\mu(-0)x, & x \leq 0, \\ U'_\mu(+0)x, & x > 0 \end{cases} \right) \\ &\quad - \varepsilon^2 \tilde{v}_{2,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\tilde{v}_{2,\mu}(\xi) = \xi \int_{-\infty}^{\xi} v_{1,\mu}(\tau)Q(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\xi} \tau v_{1,\mu}(\tau)Q(\tau)d\tau. \quad (29)$$

Из определения $W_{\mu,\varepsilon}$ и равенств (13), (19), (20) и (29) в силу (10) и (11) получаем, что

$$W_{\mu,\varepsilon}(x) \in C^2[a, b],$$

а из (1), (28), (9), (18) и (29) в силу (20), (23), (26), (22), (7), (27) и (6) следует, что

$$\|L_{\mu,\varepsilon}(u_{\mu,\varepsilon} - W_{\mu,\varepsilon})\|_{C[a,b]} = O(\varepsilon)$$

$$(u_{\mu,\varepsilon}(a) - W_{\mu,\varepsilon}(a)) = O(\varepsilon), \quad (u_{\mu,\varepsilon}(b) - W_{\mu,\varepsilon}(b)) = O(\varepsilon).$$

А так как $\left(q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) + \varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) > 0$, то, получаем, что

$$\|u_{\mu,\varepsilon} - W_{\mu,\varepsilon}\|_{C[a,b]} = O(\varepsilon). \quad (30)$$

Положим

$$U(x) := U_0(x) + A \begin{cases} y_-(x), & x \in [a, 0] \\ y_+(x), & x \in (0, b] \end{cases}, \quad (31)$$

где

$$A = \frac{U_0(0) \langle Q \rangle}{y'_+(0) - y'_-(0) - \langle Q \rangle}, \quad (32)$$

Из определения следует, что функция $U(x)$ является решением краевой задачи (3). С другой стороны,

$$\|W_{\mu,\varepsilon} - U\|_{C[a,b]} = O(\varepsilon)$$

в силу (31), (32), (7), (25) и (27), определения (28) и равенств (20), (23), (26), (22), (29), и (27). Отсюда и из (30) вытекает равенство (2).

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [2] Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009.

УДК 534.113

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ И ПЛОТНОСТИ
КОРРОЗИОННОГО УЧАСТКА СТЕРЖНЯ ПО
СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Ахтямов А. М., Галеева Д. Р. (Уфа, БашГУ)

Введение

Несмотря на изоляционное покрытие, большинство подземных трубопроводов подвержено постепенному коррозионному разрушению под влиянием окружающей среды. Поэтому есть необходимость не только в эффективной противокоррозионной защите труб, но и в своевременной проверке труб на наличие коррозии и степень износа. В работах [1–2] рассматривались задачи идентификации повреждений (трещин) в трубах по собственным частотам колебаний. В отличие от них в настоящей работе представлен метод определения по собственным частотам колебаний трубы длины и плотности коррозионного участка. Решены задачи двух видов: прямая и обратная. Прямая задача заключается в поиске собственных частот продольных колебаний неоднородного стержня. В обратной задаче необходимо определить длину и плотность коррозионного участка стержня по двум собственным частотам продольных колебаний.

1. Постановка и решение прямой задачи

Рассматривается полый стержень длины L . Один конец стержня ($x = 0$) свободен, другой ($x = L$) – жестко закреплен. Известно, что коррозионный участок начинается с координаты x_c , длина участка равна l , диаметр участка равен диаметру трубы (см. рис.1).

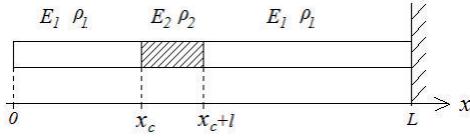


Рис. 1: Рис.1. Неоднородный стержень с коррозионным участком.

По свободному концу производится удар вдоль оси x , от которого в стержне возникают продольные колебания. Необходимо найти собственные частоты продольных колебаний стержня $w_k, k = 1, 2, \dots$. Модули упругости участков E_1, E_2 и плотности ρ_1, ρ_2 считаются известными.

Так как стержень неоднороден, уравнение продольных колебаний имеет вид [3, с.160]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где u_1, u_2, u_3 – продольные смещения точек стержня от положения равновесия в сечении x , c_1, c_2 – скорости распространения волн.

Границные условия и условия сопряжения принимают вид:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ u_3(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_1(x_c, t) = u_2(x_c, t), \\ E_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=x_c} = E_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=x_c}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_2(x_c + l, t) = u_3(x_c + l, t), \\ E_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=x_c+l} = E_3 \left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{x=x_c+l}, \end{cases} \quad (4)$$

Решая задачу (1) – (4), получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & E_2 c_1 \sin\left(\frac{w_k(L-l-x_c)}{c_1}\right) [E_1 c_2 \sin\left(\frac{w_k x_c}{c_1}\right) \cos\left(\frac{w_k l}{c_2}\right) + E_2 c_1 \cos\left(\frac{w_k x_c}{c_1}\right) \sin\left(\frac{w_k l}{c_2}\right)] + \\ & + E_1 c_2 \cos\left(\frac{w_k(L-l-x_c)}{c_1}\right) [E_1 c_2 \sin\left(\frac{w_k x_c}{c_1}\right) \sin\left(\frac{w_k l}{c_2}\right) - E_2 c_1 \cos\left(\frac{w_k x_c}{c_1}\right) \cos\left(\frac{w_k l}{c_2}\right)] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Если известны следующие величины: $x_c, l, E_1, E_2, \rho_1, \rho_2$, то найти собственные частоты $w_k, k = 1, 2, \dots$ можно из уравнения (5). Уравнение трансцендентное, решений будет бесконечно много. В дальнейшем (см. Пример 1) мы вычислим первые три частоты для представленного образца стержня.

2. Постановка и решение обратной задачи

Обратная задача заключается в поиске длины l и плотности ρ_2 участка, подвергшегося коррозионному разрушению по зафиксированным данным собственных частот $w_k, k = 1, 2, \dots$ продольных колебаний стержня. Начало коррозионного участка известно – x_c . Известны также средние модули упругости всех участков E_1, E_2 , и плотность участков, не подверженных коррозии – ρ_1 . Чтобы найти среднюю плотность коррозионного участка, необходимо определить, с какой скоростью на нем распространяется волна.

Постановка обратной задачи аналогична постановке задачи (1) – (4). Искомые параметры l, c_2 находятся из решения системы двух нелинейных характеристических уравнений по двум известным собственным частотам колебаний w_1, w_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2 c_1 \sin\left(\frac{w_1(L-l-x_c)}{c_1}\right) [E_1 c_2 \sin\left(\frac{w_1 x_c}{c_1}\right) \cos\left(\frac{w_1 l}{c_2}\right) + E_2 c_1 \cos\left(\frac{w_1 x_c}{c_1}\right) \sin\left(\frac{w_1 l}{c_2}\right)] + \\ + E_1 c_2 \cos\left(\frac{w_1(L-l-x_c)}{c_1}\right) [E_1 c_2 \sin\left(\frac{w_1 x_c}{c_1}\right) \sin\left(\frac{w_1 l}{c_2}\right) - E_2 c_1 \cos\left(\frac{w_1 x_c}{c_1}\right) \cos\left(\frac{w_1 l}{c_2}\right)] = 0, \\ E_2 c_1 \sin\left(\frac{w_2(L-l-x_c)}{c_1}\right) [E_1 c_2 \sin\left(\frac{w_2 x_c}{c_1}\right) \cos\left(\frac{w_2 l}{c_2}\right) + E_2 c_1 \cos\left(\frac{w_2 x_c}{c_1}\right) \sin\left(\frac{w_2 l}{c_2}\right)] + \\ + E_1 c_2 \cos\left(\frac{w_2(L-l-x_c)}{c_1}\right) [E_1 c_2 \sin\left(\frac{w_2 x_c}{c_1}\right) \sin\left(\frac{w_2 l}{c_2}\right) - E_2 c_1 \cos\left(\frac{w_2 x_c}{c_1}\right) \cos\left(\frac{w_2 l}{c_2}\right)] = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

По c_2 определяется плотность коррозионного участка:

$$\rho_2 = \frac{E_2}{c_2^2} \quad (7)$$

3. Примеры

Пример 1. Решение прямой задачи

Рассмотрим цилиндрическую полую железную трубу длиной $L = 3$ м. Труба сделана из железа: $\rho_1 = 7.87 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_1 = 21 \cdot 10^{10}$ Па, отсюда $c_1 = 5166$ м/сек. Участок, подвергшийся коррозии, начинается с координаты $x_c = 0.75$ м, плотность участка равна $\rho_2 \approx 6,6 \cdot 10^3$ кг/м³, а модуль упругости участка $E_2 = 15,8 \cdot 10^{10}$ Па, $c_2 = 4900$ м/с.

Для различных значений $l \in [0, 2]$ численно решая уравнение (5), можно определить собственные частоты $w_k, k = 1, 2, \dots$. На рис.2 представлены графики зависимости частот от длины коррозионного участка.

Из рисунка видно, что первая частота колебаний стержня $w_1(x)$ уменьшается с увеличением координаты l . Вторая и третья частоты изменяются волнообразно. Можно заключить, что частоты продольных колебаний зависят не только от свойств материалов, из которых сделаны части стержня, но и от соотношения длин этих частей.

Пример 2. Решение обратной задачи

Рассмотрим обратную задачу для образца из предыдущего примера. Зная две собственные частоты колебаний w_1, w_2 , найдем из системы (6) длину коррозионного участка l и скорость распространения волны c_2 . На представленной ниже таблице показаны вычисленные значения l, c_2 , для трех различных значений l, w_1, w_2 , а также плотность участка ρ_2 , рассчитанная по формуле (7).

Из таблицы 1 видно, что искомые параметры восстанавливаются однозначно с хорошей точностью по первым двум собственным

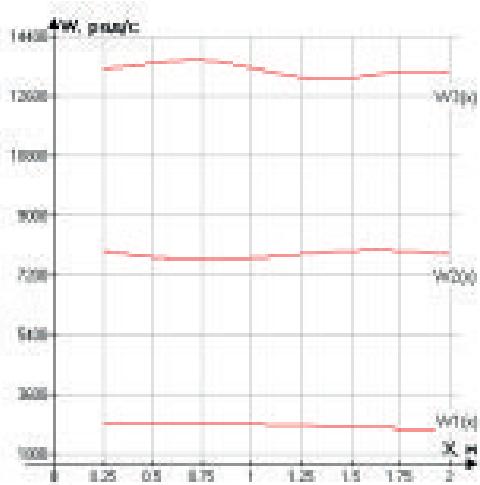


Рис. 2: Рис.1. Неоднородный стержень с коррозионным участком.

частотам продольных колебаний стержня.

Таблица 1:

$l, \text{м}$	$w_i, \text{рад/с}$	Вычисленные l'	Скорость c_2	Плотность ρ_2
0,5	2723,500 7739,333	0,500000291	4900,003733	6580,591
0,75	2713,088 7667,065	0,7497900015	4899,911245	6580,830
1	2689,394 7708,275	0,9999998639	4899,999586	6580,594

Аналогичным образом, можно определить не только l, c_2, ρ_2 , но также и модуль упругости коррозионного участка E_2 , если он неизвестен. Для этого необходимо «поймать» три частоты продольных колебаний w_1, w_2, w_3 и решить систему из трех характеристических уравнений. В таблице 2 показаны вычисленные значения l, E_2, c_2, ρ_2 по трем известным частотам.

Таблица 2:

$l, \text{м}$	$w_i, \text{рад/с}$	$l', \text{м}$	$E_2 * 10^{10}, \text{Па}$	$c_2, \text{м/с}$	$\rho_2, \text{кг/м}^3$
1	2689,394 7708,275 13447,384	0,999998	15,800013	4900,003733	6580,591

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ахтямов А. М., Галеева Д. Р. Исследование прямой и обратной задачи о колебаниях неоднородного стержня, состоящего из двух различных участков // Контроль. Диагностика. 2014. №4. С.58-63.
- [2] Ахтямов А. М., Сатыев Э. И. Определение местоположения и объема полости в упругом стержне по двум собственным частотам его колебаний // Дефектоскопия. 2012. №5. С.78-83.
- [3] Г. Пейн Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979. 542с

УДК 517.95

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО
ПОРЯДКОВ ДЛЯ ОДНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ.

Гайсина Р. Н. (Уфа, БашГУ)

Введение

В работе рассматривается система уравнений вида :

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x, t, u, v, u_x, v_x), \\ v_t &= -v_{xx} + \varphi(x, t, u, v, u_x, v_x). \end{aligned} \quad (1)$$

Частные случаи системы дифференциальных уравнений (1) рассматривались в статьях [1] - [3], в которых были получены условия, которым должна удовлетворять правая часть системы уравнений указанного вида, обладающей богатым набором законов сохранения.

В настоящей работе определены системы уравнений (1), которые обладают законами сохранения нулевого и первого порядков.

Также в работе рассмотрены частные случаи системы уравнений (1). Например, нелинейное уравнение Шредингера:

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} + f(|u|^2)u, \\ -i\bar{u}_t &= \bar{u}_{xx} + f(|u|^2)\bar{u}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $|u|^2 = u\bar{u}$ и $f \neq 0$.

§1. Законы сохранения нулевого порядка

В этом параграфе рассматривается система уравнений (1), которая обладает законом сохранения нулевого порядка:

$$D_t A(x, t, u, v) = D_x B(x, t, u, v, u_x, v_x). \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Система уравнений (1), которая имеет закон сохранения нулевого порядка (3), точечными преобразованиями приводится к системе вида:

$$\begin{aligned} u_t &= D_x[u_x + a(x, t, u, v)v_x + b(x, t, u, v)], \\ v_t &= -v_{xx} + \varphi(x, t, u, v, u_x, v_x). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Запишем закон сохранения нулевого порядка (3) в виде:

$$A_t + A_u u_t + A_v v_t = B_x + B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx}.$$

Перепишем последнее с учетом системы уравнений (1), а именно, заменим производные u_t и v_t :

$$A_t + A_u(u_{xx} + f) + A_v(-v_{xx} + \varphi) = B_x + B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx}$$

Приравнивая при независимых переменных u_{xx} и v_{xx} получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_u &= B_{u_x}, \\ -A_t &= B_{v_x}, \\ A_t + A_u + A_v \varphi &= B_x + B_u u_x + B_v v_x. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим случаи:

1. 1. $A_v = 0, A_u \neq 0,$
2. 2. $A_u = 0, A_v \neq 0,$
3. 3. $A_u \cdot A_v \neq 0.$

Пусть выполнен случай 1, то есть $A_v = 0$, а $A_u \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений системы (5), имеем: $B = A_u(x, t, u)u_x + b(x, t, u, v).$

Далее функцию B запишем в следующем виде: $B = A_u(x, t, u)u_x + A_x - A_x + b(x, t, u, v)$ или $B = D_x A + E$, где $E = b - A_x$.

Сделаем точечную замену:

$$A(x, t, u) = U, \quad v = v. \quad (6)$$

Тогда система уравнений (1) согласно (3) примет вид:

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} + D_x E, \\ v_t &= -v_{xx} + \Phi(x, t, U, v, U_x, v_x), \end{aligned} \quad (7)$$

где $E = E(x, t, U, v)$.

Отметим, что система (7) имеет закон сохранения нулевого порядка (3), имеющий вид: $D_t U = D_x(U_x + E)$.

Рассмотрим второй случай, когда $A_u = 0$, а $A_v \neq 0$.

Если $A_u = 0$, то из (5) следует, что B имеет вид: $B = -A_v(x, t, v)v_x + b(x, t, u, v)$.

Функцию B запишем в виде: $B = -A_v(x, t, v)v_x + A_x - A_x + b(x, t, u, v)$ или $B = -D_x A + E$, где $E = b - A_x$

и тогда точечная замена вида:

$$A(x, t, v) = V, \quad u = u \quad (8)$$

исходную систему уравнений (1) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + F(x, t, u, V, u_x, V_x), \\ V_t &= -V_{xx} + D_x E, \end{aligned} \quad (9)$$

где $E = E(x, t, u, V)$.

При этом закон сохранения нулевого порядка (3) имеет вид: $D_t V = -D_x(V_x + E)$.

Рассмотрим последний случай, когда $A_u \cdot A_v \neq 0$, тогда из первых двух уравнений системы (5) следует, что: $B = {}_u u_x - {}_v v_x + b_1(x, t, u, v)$.

Теперь закон сохранения нулевого порядка (3) перепишем следующим образом:

$$D_t A = D_x(A_u u_x - A_v v_x + b_1) = D_x(A_u u_x + A_v v_x + A_x - 2A_v v_x - A_x + b_1) = D_x(D_x A - 2A_v v_x - A_x + b_1).$$

Далее сделаем точечную замену:

$$A(x, t, u, v) = U, \quad v = v. \quad (10)$$

Тогда последнее примет вид: $U_t = D_x[U_x + a(x, t, U, v)v_x + b(x, t, U, v)]$,

где $-2A_v = a$, $b = b_1 - A_x$.

Таким образом, полагая $U = u$ исходную систему уравнений (1) запишем в виде:

$$\begin{aligned} u_t &= D_x[u_x + a(x, t, u, v)v_x + b(x, t, u, v)], \\ v_t &= -v_{xx} + \varphi(x, t, u, v, u_x, v_x). \end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений (7) является частным случаем системы уравнений (11), если положить $a = 0$. Далее, если в уравнениях (9) сделать замену $t \rightarrow -t$, $u \leftrightarrow v$, то получим систему (7).

Итак, система (1), имеющая закон сохранения нулевого порядка, точечными преобразованиями приводится к системе (11). Теорема доказана.

§2. Законы сохранения первого порядка

В этом параграфе рассматривается система уравнений вида (11). В системе уравнений (11) сделаем замену:

$$p = u_x + a(x, t, u, v)v_x + b(x, t, u, v),$$

тогда она запишется в виде:

$$\begin{aligned} u_t &= p_x, \\ v_t &= -v_{xx} + \varphi(x, t, u, v, p, v_x). \end{aligned} \quad (12)$$

Далее перейдем от переменных $x, t, u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}$ к переменным $x, t, u, v, p, v_x, p_x, v_t$.

Тогда закон сохранения первого порядка можно представить в следующем виде:

$$D_t A(x, t, u, v, p, v_x) = D_x B(x, t, u, v, p, v_x, p_x, v_t). \quad (13)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Система уравнений (12) имеет закон сохранения первого порядка (13), если справедливы следующие соотношения:

$$B(x, t, u, v, p, v_x, p_x, v_t) = A_p p_x + v_t(aA_p + A_{v_x}) + K(x, t, u, v, p, v_x), \quad (14)$$

$$A_t + A_p[a_t v_x + b_t] = K_x + (p - av_x - b)K_u + v_x K_v + \varphi K_{v_x}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_v + A_p[a_v v_x + b_v] &= a_x A_p + a A_{px} + A_{v_x x} + (p - av_x - b)(a_u A_p + a A_{pu} + A_{v_x u}) \\ &+ v_x(a_v A_p + a A_{pv} + A_{v_x v}) + \varphi(a A_{pv_x} + A_{v_x v_x}) - K_{v_x}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$A_u + A_p[a_u v_x + b_u] = A_{px} + A_{pu}(p - av_x - b) + v_x A_{pv} + K_p + \varphi A_{pv_x}, \quad (17)$$

$$a A_{pp} + A_{v_x p} - A_{pv_x} = 0, \quad (18)$$

$$A_{pp} = 0, \quad (19)$$

$$-a A_{pv_x} - A_{v_x v_x} = 0. \quad (20)$$

Проведем анализ уравнений (15) - (20).

Из трех последних уравнений получаем, что A имеет вид:

$$\begin{aligned} A(x, t, u, v, p, v_x) &= \gamma(x, t, u, v)v_x p + \delta(x, t, u, v)p \\ &- \frac{1}{2}a\gamma(x, t, u, v)v_x^2 + \beta(x, t, u, v)v_x + \varepsilon(x, t, u, v). \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь перепишем уравнения (15) - (17):

$$K_x + (p - av_x - b)K_u + v_x K_v + \varphi K_{v_x} - A_t - A_p[a_t v_x + b_t] = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} K_{v_x} &= -A_v - A_p[a_v v_x + b_v] + a_x A_p + a A_{px} + A_{v_x x} + (p - av_x - b)(a_u A_p \\ &+ a A_{pu} + A_{v_x u}) + v_x(a_v A_p + a A_{pv} + A_{v_x v}), \end{aligned} \quad (23)$$

$$K_p = A_u + A_p[a_u v_x + b_u] - A_{px} - A_{pu}(p - av_x - b) - v_x A_{pv} - \varphi A_{pv_x}. \quad (24)$$

Условие совместности:

$$K_{v_x p} = K_{pv_x} \quad (25)$$

согласно (21), (23) и (24) примет вид:

$$2(p - av_x - b)\gamma_u + 2v_x\gamma_v - \gamma(a_u v_x + b_u) + \varphi_{v_x}\gamma + 2\gamma_x = 0. \quad (26)$$

Рассмотрим случай, когда функция γ , определяющая функцию A по формуле (21), равна нулю. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\gamma = 0$ и $B_{v_x} \neq 0$. Тогда система уравнений (12) имеет закон сохранения первого порядка (13), где A , B и φ вычисляются по формулам:

$$A(x, t, u, v, p, v_x) = \delta(x, t, u, v)p + \beta(x, t, u, v)v_x + \varepsilon(x, t, u, v), \quad (27)$$

$$B(x, t, u, v, p, v_x, p_x, v_t) = \delta p_x + v_t(a\delta + \beta) + K(x, t, u, v, p, v_x), \quad (28)$$

$$\varphi = \frac{1}{K_{v_x}}[K_x + (p - av_x - b)K_u + v_x K_v - (\delta_t p + \beta_t v_x + \varepsilon_t) - \delta(a_t v_x + b_t)]. \quad (29)$$

Здесь

$$K(x, t, u, v, p, v_x) = F(x, t, u, v) + \frac{a}{2}J_1(x, t, u, v)v_x^2 - J_1(x, t, u, v)v_x p + J_2(x, t, u, v)p - J_3(x, t, u, v)v_x, \quad (30)$$

$$J_1(x, t, u, v) = \delta_v - (a\delta + \beta)'_u, \quad (31)$$

$$J_2(x, t, u, v) = (\varepsilon + \delta b)'_u - \delta_x, \quad (32)$$

$$J_3(x, t, u, v) = (\varepsilon + \delta b)'_v - bJ_1 - a_x\delta - a\delta_x - \beta_x, \quad (33)$$

$$F(x, t, u, v) = r(x, t, u, v). \quad (34)$$

Лемма 3. Пусть $\gamma = 0$ и $B_{v_x} = 0$. Тогда система уравнений (12) имеет закон сохранения первого порядка (13), где A и B вычисляются по формулам:

$$A(x, t, u, v, p, v_x) = \delta(x, t, u, v)p + \beta(x, t, u, v)v_x + \varepsilon(x, t, u, v), \quad (35)$$

$$B(x, t, u, v, p, p_x, v_t) = \delta p_x + v_t(a\delta + \beta) + K(x, t, u, v, p), \quad (36)$$

а φ произвольная функция.

При $\frac{\partial J_2}{\partial x} = 0$ функции a и b произвольные функции, а функции $\delta, \beta, \varepsilon$ и K определены по формулам:

$$\delta = \Phi_u, \beta = -a\Phi_u + \Phi_v, \varepsilon = -b\Phi_u + \Phi_x + E_x, K = \Phi_t + H(x, t) + pJ_2(t), \quad (37)$$

а при $\frac{\partial J_2}{\partial x} \neq 0$, эти функции определены по формулам:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{H_v}{\frac{\partial J_2}{\partial x}}, \\ b &= \frac{1}{\frac{\partial J_2}{\partial x}} \left[\frac{\partial J_2}{\partial x} u - H_x \right], \\ \delta &= \Phi_u, \beta = -a\Phi_u + \Phi_v, \varepsilon = -b\Phi_u + \Phi_x + E_x, \\ K &= \Phi_t + H(x, t) + pJ_2(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь $\Phi = \Phi(x, t, u, v)$ произвольная функция.

И наконец, рассмотрим случай, когда $\gamma \neq 0$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\gamma \neq 0$, тогда система уравнений (12) имеет закон сохранения первого порядка, где функции A , B и φ имеют вид:

$$\begin{aligned} A(x, t, u, v, p, v_x) &= \gamma(x, t, u, v)v_x p + \delta(x, t, u, v)p - \frac{1}{2}a\gamma(x, t, u, v)v_x^2 \\ &\quad + \beta(x, t, u, v)v_x + \varepsilon(x, t, u, v). \end{aligned} \quad (39)$$

$$B(x, t, u, v, p, v_x, p_x, v_t) = A_p p_x + v_t(aA_p + A_{v_x}) + K(x, t, u, v, p, v_x), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, t, u, v, u_x, v_x) &= \frac{v_x^2}{2}(a_u + 2a\frac{\gamma_u}{\gamma} - 2\frac{\gamma_v}{\gamma}) + v_x(b_u - 2\frac{\gamma_u}{\gamma}(p - b) - 2\frac{\gamma_x}{\gamma}) \\ &\quad + \Psi(x, t, u, v, p). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь

$$\Psi(x, t, u, v, p) = \frac{1}{\gamma}(D - h_p), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} K(x, t, u, v, p, v_x) &= \frac{1}{6}v_x^3(a_v\gamma - a\gamma_v) + \gamma_u v_x p^2 - ap\gamma_u \frac{v_x^2}{2} + H \frac{v_x^2}{2} + Rp v_x \\ &\quad + Q v_x + h(x, t, u, v, p), \end{aligned} \quad (43)$$

$$H = -\gamma b_v - aa_u\delta - a^2\delta_u - a\beta_u + a\delta_v, \quad (44)$$

$$R = -\delta_v + (a\delta)'_u + \beta_u - b\gamma_u + \gamma_x, \quad (45)$$

$$Q = -\varepsilon_v - \delta b_v - b(a\delta)'_u - b\beta_u + (a\delta)'_x + \beta_x, \quad (46)$$

$$D = \varepsilon_u + (b\delta)'_u - \delta_x. \quad (47)$$

При этом выполнены следующие соотношения:

$$-\frac{a}{6}r'_u + \frac{1}{6}r'_v + \frac{s}{4}r = 0, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{6}r'_u + \frac{a}{2}p(a\gamma_u)'_u - \frac{a}{2}H_u - \frac{b}{6}r'_u - \frac{p}{2}(a\gamma_u)'_v + \frac{1}{2}H_v + \frac{1}{2}S(H - a\gamma_u p) + \frac{1}{2}\chi r \\ - \frac{\gamma_u}{\gamma}pr + \frac{1}{6}r'_x = 0, \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{p^2}{2}(a\gamma_u)'_u + \frac{1}{2}pH_u - a(\gamma_u p^2 + Rp + Q)'_u - \frac{b}{2}(-a\gamma_u p + H)'_u + (\gamma_u p^2 \\ + Rp + Q)'_v + \frac{1}{2}S(\gamma_u p^2 + Rp + Q) + \chi(-a\gamma_u p + H) - 2\frac{\gamma_u}{\gamma}p(-a\gamma_u p + H) \\ + \frac{1}{2\gamma}(D - h_p)r + \frac{1}{2}(-a\gamma_u p + H)'_x + \frac{1}{2}(a\gamma)'_t - a_t\gamma = 0, \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\gamma_u p^2 + Rp + Q)'_u - ah_u - b(\gamma_u p^2 + Rp + Q)'_u + h_v + \chi(\gamma_u p^2 + Rp + Q) \\ - 2\frac{\gamma_u}{\gamma}p(\gamma_u p^2 + Rp + Q) + (D - h_p)\frac{1}{\gamma}(-a\gamma_u p + H) + (\gamma_u p^2 + Rp + Q)'_x \\ - \gamma_t p - \beta_t - \gamma b_t - \delta a_t = 0, \quad (51) \end{aligned}$$

$$ph_u - bh_u + \frac{1}{\gamma}(D - h_p)(\gamma_u p^2 + Rp + Q) + h_x - \delta_t p - \varepsilon_t - \delta b_t = 0, \quad (52)$$

где

$$r = a_v\gamma - a\gamma_v, S = a_u + 2a\frac{\gamma_u}{\gamma} - 2\frac{\gamma_v}{\gamma}, \chi = b_u + 2\frac{\gamma_u}{\gamma}b - 2\frac{\gamma_x}{\gamma}. \quad (53)$$

§3. Уравнение Шредингера

В этом параграфе рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера. Покажем, что оно является частным случаем общей системы (1).

$$\begin{aligned} iu_t = u_{xx} + f(|u|^2)u, \\ -i\bar{u}_t = \bar{u}_{xx} + f(|u|^2)\bar{u}, \end{aligned} \quad (54)$$

где $|u|^2 = u\bar{u}$ и $f \neq 0$.

Сделаем замену: $\tau = -it$ и тогда система (54) запишется в виде:

$$\begin{aligned} u_\tau = u_{xx} + f(|u|^2)u, \\ -\bar{u}_\tau = \bar{u}_{xx} + f(|u|^2)\bar{u}. \end{aligned}$$

Положим $\tau = t$ и $\bar{u} = v$, тогда система (54) примет вид:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(uv)u, \\ v_t &= -v_{xx} - f(uv)v. \end{aligned} \quad (55)$$

Используя теорему 1 нетрудно показать, что система уравнений (54) имеет закон сохранения нулевого порядка вида:

$$D_t(uv) = D_x(vu_x - uv_x) \quad (56)$$

В равенстве (56) сделаем замену: $uv = U$, тогда оно запишется в виде:

$$U_t = D_x(D_x(uv) - 2uv_x) = D_x(U_x - 2\frac{U}{v}v_x).$$

Если положим $U \rightarrow u$, тогда наша система (54) запишется в виде:

$$\begin{aligned} u_t &= D_x(u_x - 2\frac{u}{v}v_x), \\ v_t &= -v_{xx} - f(u)v. \end{aligned} \quad (57)$$

В системе уравнений (57) сделаем замену:

$$p = u_x - 2\frac{u}{v}v_x. \quad (58)$$

С учетом (58) система уравнений (57) перепишется в виде:

$$\begin{aligned} u_t &= p_x, \\ v_t &= -v_{xx} - f(u)v. \end{aligned} \quad (59)$$

Перейдем от переменных $u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}$ к переменным u, v, p, v_x, p_x, v_t .

Тогда наш закон сохранения первого порядка можно представить в следующем виде:

$$D_t A(u, v, p, v_x) = D_x B(u, v, p, v_x, p_x, v_t). \quad (60)$$

Согласно лемме 1(см. §2) система уравнений (57) имеет закон сохранения первого порядка, где функции A и B определяются в виде:

$$\begin{aligned} A(u, v, p, v_x) &= \frac{v_x p}{v} + \frac{u v_x^2}{v^2} - \int f(u)du, \\ B(u, v, p, v_x, p_x, v_t) &= v_t \frac{p}{v} + v_x \frac{p_x}{v}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старым переменным исходной системы уравнений Шредингера (55), имеем следующие законы сохранения нулевого порядка:

$$D_t(uv) = D_x(vu_x - uv_x) ,$$

и первого порядка:

$$D_t(u_x v_x - \int f(uv) d(uv)) = D_x(v_t u_x - u_t v_x) .$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Михайлов А. В., Шабат А. Б.* Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u) \cdot u_{xx} + F(u, u_x)$. I - ТМФ. 1985. Т.62, № 2. С. 163-185.
- [2] *Михайлов А. В. и Шабат А. Б.* Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$. II - ТМФ. 1986. Т. 66, № 1. С. 47-65.
- [3] *Михайлов А. В. и Ямилов Р. И.* О полном списке интегрируемых систем уравнений вида: $iu_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x)$, $-iv_t = v_{xx} + g(u, v, u_x, v_x)$. - Препринт. Уфа: БФАН СССР. 1985. С. 28.

УДК 159

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В
КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ.

Хакимова А. Р. (Уфа, БГУ)

Введение

Рассматривается система дискретных уравнений вида:

$$\begin{cases} u_{n,m+1} - u_{n+1,m} + u_{n+1,m+1}((u_{n,m+1} - u_{n+1,m})v_{n+1,m} + \varepsilon) = 0 \\ v_{n+1,m} - v_{n,m+1} + v_{n,m}((v_{n+1,m} - v_{n,m+1})u_{n,m+1} + \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где искомые функции зависят от двух целочисленных аргументов n, m . Эта система является условием совместности пары линейных уравнений вида

$$\begin{cases} y(n+1, m) = f(n, m)y(n, m) \\ y(n, m+1) = g(n, m)y(n, m) \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} f(n, m) &= \begin{pmatrix} \lambda + u_{n,m}v_{n,m} & v_{n,m} \\ u_{n,m} & 1 \end{pmatrix}, \\ g(n, m) &= \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon + u_{n-1,m+1}v_{n,m} & v_{n,m} \\ u_{n-1,m+1} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а $y(n, m)$ матричная функция. Следовательно, мы получаем два уравнения на одну неизвестную функцию. В общем случае, такая система не имеет решений. В нашем случае система имеет решение, если она является условием коммутирования $[L, M] = 0$, двух дискретных операторов $L = D_n^{-1}f$ и $M = D_m^{-1}g$, где D_n, D_m операторы сдвига аргумента: $D_n y(n, m) = y(n+1, m)$, $D_m y(n, m) = y(n, m+1)$, иными словами выполняется следующее условие: $D_m(f)g = D_n(g)f$.

В работе при помощи метода обратной задачи рассеяния [1] построено частное решение системы (1):

$$\begin{cases} u_{n,m} = \frac{(\eta-\mu)pq}{\eta(\mu^n(\mu+\varepsilon)^m)q - \eta^n(\eta+\varepsilon)^mp} \\ v_{n,m} = \frac{(\eta-\mu)\eta\eta^n(\eta+\varepsilon)^m\mu^n(\mu+\varepsilon)^m}{pq(\eta\mu^n(\mu+\varepsilon)^m)q - \mu\eta^n(\eta+\varepsilon)^mp} \end{cases}, \quad (2)$$

где p, q, μ, η константы.

§ 1. Общий метод построения явных решений.

Метод обратной задачи рассеяния является мощным средством исследования интегрируемых нелинейных уравнений математической физики. Он позволяет эффективно находить частные решения, а также асимптотику решения задачи Коши на больших временах для широкого класса начальных условий. На умеренных временах каких-либо аналитических приближений решения задачи с произвольными начальными условиями найти не удается, но здесь метод обратной задачи рассеяния предоставляет хорошие возможности для численного анализа.

В обратной задаче рассеяния требуется восстановить коэффициенты

$u = u_n, v = v_n$ уравнения

$$y_{n+1} = f_n y_n, \quad f_n = \begin{pmatrix} \lambda + u_n v_n & v_n \\ u_n & 1 \end{pmatrix}$$

по известной матрице рассеяния $S(\lambda)$ и собственным векторам h_0 и d_0 соответствующим простым нулям μ и η функций $S_{11}(\lambda)$ и $S_{22}(\lambda)$ расположенным в области $|\lambda| > 1$ и $|\lambda| < 1$, соответственно. Алгоритмически удобно разделить решение обратной задачи на два этапа: сначала построим некий модельный потенциал, не имеющий дискретного спектра, а затем совершим преобразование потенциала, вводящее собственные значения.

Возьмем простой случай, когда $\tilde{S}(\lambda) = \tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Искомый модельный потенциал соответствует следующей матрице рассеяния

$$\tilde{S}(\lambda) = \alpha S(\lambda) \beta, \text{ где } w(\lambda) = (\lambda - \mu)/(\lambda - \eta), x = \sqrt{\mu/\eta}, \quad (3)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & xw^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} w(\lambda) & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Выразим $S(\lambda)$ в (3) и получим:

$$S(\lambda) = \alpha^{-1} \tilde{S}(\lambda) \beta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\eta} & 0 \\ 0 & \frac{\eta(\lambda-\mu)}{\mu(\lambda-\eta)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим

$$f_n(\lambda) = \varphi(n+1, \lambda) Z \varphi^{-1}(n, \lambda) = \psi(n+1, \lambda) Z \psi^{-1}(n, \lambda), \quad (4)$$

где функции $\varphi(n, \lambda)$ и $\psi(n, \lambda)$ аналитичны в областях $|\lambda| < 1$ и $|\lambda| > 1$, соответственно.

Из аналитических свойств сомножителей и теоремы Лиувилля следует, что $f_n(\lambda)$ - полином первой степени по λ . Положим

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \varphi = A(n) + C(n)\lambda + \dots, \lambda \rightarrow 0, \\ \psi = D(n) + B(n)\lambda^{-1} + \dots, \lambda \rightarrow \infty, \end{array} \right) \\ \text{то } & \left(\begin{array}{l} \varphi^{-1} = A^{-1}(n) + A^{-1}(n)C(n)A^{-1}(n)\lambda + \dots, \\ \psi^{-1} = D(n) + D^{-1}(n)B(n)D^{-1}(n)\lambda^{-1} + \dots \end{array} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим (5) в $f_n(\lambda) = \varphi(n+1, \lambda) Z \varphi^{-1}(n, \lambda)$:

$[A(n+1) + C(n+1)\lambda + \dots] \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [A^{-1}(n) + A^{-1}(n)C(n)A^{-1}(n)\lambda + \dots]$, выпишем коэффициенты при одинаковых степенях λ :

$$\begin{aligned} \lambda : & A(n+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}(n) + A(n+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}(n) C(n) A^{-1}(n) \\ & + C(n+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^0 : A(n+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}(n) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(n+1) & a_{12}(n+1) \\ a_{21}(n+1) & a_{22}(n+1)(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\det A(n)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det A(n)} \begin{pmatrix} -a_{21}a_{12}(n+1) & a_{11}a_{12}(n+1) \\ -a_{21}a_{22}(n+1) & a_{11}a_{22}(n+1) \end{pmatrix} \quad (6)
\end{aligned}$$

Поскольку определитель произведения равен произведению определителей из

$A(n+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}(n)$, получаем, что

$$\frac{1}{\det A(n)} \begin{vmatrix} -a_{21}a_{12}(n+1) & a_{11}a_{12}(n+1) \\ -a_{21}a_{22}(n+1) & a_{11}a_{22}(n+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Так как, $\frac{1}{\det A(n)} \neq 0$, то $a_{21}a_{12}(n+1) \times a_{11}a_{22}(n+1) = a_{11}a_{12}(n+1) \times a_{21}a_{22}(n+1)$.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22}(n+1)}{\det A(n)} = 1, \\ -\frac{a_{21}a_{22}(n+1)}{\det A(n)} = u, \\ \frac{a_{11}a_{12}(n+1)}{\det A(n)} = v, \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \\ v = \frac{a_{12}(n+1)}{a_{22}(n+1)}, \\ uv = -\frac{a_{21}a_{12}(n+1)}{\det A(n)}. \end{pmatrix} \quad (7)$$

С другой стороны, $f_n(\lambda) = \psi(n+1, \lambda) Z \psi^{-1}(n, \lambda)$

$$\begin{aligned}
& [D(n+1) + B(n+1)\lambda^{-1} + \dots] \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [D^{-1}(n) \\
& + D^{-1}(n)B(n)D^{-1}(n)\lambda^{-1} + \dots],
\end{aligned}$$

выпишем коэффициенты при одинаковых степенях λ :

$$\begin{aligned}
& \lambda : D(n+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^{-1}(n) \\
& \lambda^0 : D(n+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D^{-1}(n) \\
& + D(n+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^{-1}(n)B(n)D^{-1}(n) \\
& + B(n+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^{-1}(n) \quad (8)
\end{aligned}$$

Из (4) следует, что (6)=(8) и если найти элементы матрицы (6), то узнаем и вид (8) и наоборот. Для этого решим задачу Римана $\varphi(n, \lambda)r(n, \lambda) = \psi(n, \lambda)$, где $r(n, \lambda) = z^n r(\lambda)z^{-n}$ с условиями

$$\begin{pmatrix} \psi(n, \eta)d(n, m) = 0 \\ \varphi(n, \mu)h(n, m) = 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} d(n, m) = Z^{n+N_0}\Lambda^{m+M_0}d(0) \\ h(n, m) = Z^{n+N_0}\Lambda^{m+M_0}h(0) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$Z = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}, d(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Используя соотношения (см. [2])

$$r(\lambda) = \frac{1}{S_{22}} \begin{pmatrix} 1 & -S_{12} \\ S_{21} & \det(S(\lambda)) \end{pmatrix}$$

, получим

$$\tilde{r}(\lambda) = \frac{w(\lambda)}{x} X r(\lambda) X, \text{ где } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Найдём связь между φ и $\tilde{\varphi}$, ψ и $\tilde{\psi}$. Подставив $r = \varphi^{-1}\psi$, $\tilde{r} = \tilde{\varphi}^{-1}\tilde{\psi}$ в (8) и умножая слева на φ , а справа на $\tilde{\psi}^{-1}$, получим

$$x(\lambda - \eta)\varphi X^{-1}\tilde{\varphi}^{-1} = (\lambda - \mu)\psi X\tilde{\psi}^{-1} = (\lambda - \mu)F(\lambda). \quad (12)$$

Из последнего равенства следует, что функция $(\lambda - \mu)F(\lambda)$ аналитична всюду на комплексной плоскости за исключением точки $\lambda = \infty$, где она имеет полюс первого порядка. Следовательно по теореме Лиувилля $(\lambda - \mu)F(\lambda) = (W + \lambda)Q$. Тогда из (11) получаются следующие формулы связи:

$$\varphi(n, \lambda) = \frac{(W + \lambda)Q}{x(\lambda - \eta)} \tilde{\varphi}X \text{ и } \psi(n, \lambda) = \frac{(W + \lambda)Q}{(\lambda - \mu)} \tilde{\psi}X^{-1}.$$

где

$$(W + \lambda)Q = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \lambda.$$

Элементы матриц W и Q определим из (11), в котором положим

$$\varphi = A(n) + C(n)\lambda + \dots \text{ и } \psi = D(n) + B(n)\lambda + \dots$$

Подставляя полученную формулу в (13) и пользуясь условиями (9) и (10) найдём $\varphi(n, \lambda)$ и $\psi(n, \lambda)$.

Зная $\varphi(n, \lambda)$ и $\psi(n, \lambda)$ можно найти потенциалы u и v определенные в (7).

§ 2. Явные частные решения.

В нашем случае для дискретной системы (1) были найдены частные решения (2). Более подробно изложено в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питалевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.:Наука, 1980.
- [2] Хабибуллин И. Т., Шагалов А. Г., Численная реализация метода обратной задачи рассеяния.// Теоретическая и математическая физика. Физика. Том 83, №3, июнь, 1990г.
- [3] Mikhalkov A. V. From automorphic Lie algebras to discrete integrable systems, in Programme on Discrete Integrable Systems // (Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, 2009).
- [4] Хакимова А. Р. Магистерская диссертация на тему "Законы сохранения и частные решения одного уравнения в конечных разностях".2014 г.
- [5] Абловиц М., Сегур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., Мир, 1987, 479 с.

УДК 681.5.015

АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА СВЯЗНОСТИ СКВАЖИН

Хашпер Б. Л. (Уфа, БашГУ)

§ 1. Введение.

При разработке нефтяных месторождений для эффективной добычи нефти необходимо поддерживать пластовое давление за-качкой в пласт воды [1]. Воздействие на пласт осуществляется через систему нагнетательных скважин, при этом вода в пласте распределяется неравномерно, что может снизить эффективность заводнения. Поэтому актуальной задачей является анализ взаимодействия нагнетательных и добывающих скважин, что предлагается сделать на основе математического моделирования рассматриваемого процесса.

§ 2. Постановка задачи.

Рассмотрим систему скважин, состоящую из m нагнетательных скважин и r добывающих. Пусть известны замеры дебитов скважин. Нужно количественно оценить степень воздействия нагнетательных скважин на добывающие.

Математически данная задача сводится к задаче идентификации – построения математической модели системы и восстановления ее параметров по данным наблюдений за ее поведением [2].

В качестве модели можно взять систему дифференциальных уравнений n -го порядка, описывающую линейную динамическую систему в пространстве состояний [3]:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t) + DU(t), \end{cases} \quad (1)$$

где входные сигналы модели – дебиты нагнетательных скважин, выходные – дебиты добывающих скважин:

$$U(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_m(t) \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_m(t) \end{bmatrix},$$

где $U_i(t)$ – дебит i -ой нагнетательной скважины в момент времени t , $i = 1, 2, \dots, m$, $Y_j(t)$ – дебит j -ой добывающей скважины в момент времени t , $j = 1, 2, \dots, r$, $X(t)$ – вектор состояния системы.

Т.о., получаем следующую задачу параметрической идентификации. Даны замеры входного сигнала U в моменты времени t , замеры выходного сигнала Y в моменты времени t . Нужно подобрать значения параметров системы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ так, чтобы $\|Y - \hat{Y}\| \rightarrow \min$, где \hat{Y} – расчетные значения выходного сигнала системы (1), при подстановке в систему вместо матриц A, B, C, D матриц $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$.

§ 3. Решение задачи методом обобщенного настраиваемого объекта измерения (ОНОИ)

Рассмотрим решение поставленной задачи методом ОНОИ. Преимущество этого метода заключается в том, что ошибка является линейной функцией настраиваемых параметров. Рассмотрим алгоритм решения задачи идентификации системы методом ОНОИ для $r = 1$ [4].

Пусть начальные условия системы нулевые (ненулевые). Введем замену $s = d/dt$ – оператор дифференцирования. Выразим $X(t)$ из первого уравнения системы (1) и подставим полученное выражение во второе уравнение системы (1). Получим выражение для $Y(t)$:

$$Y(t) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(t)(+C((sI - A)^{-1}AX_0 + X_0)). \quad (2)$$

Систему (2) можно привести к виду:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \frac{b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} U_i(t) \\ \left(+ \frac{c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} 1(t) \right), \quad (3)$$

где $1(t)$ - единичный входной сигнал.

Преобразуем (3):

$$(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(t) = \sum_{i=1}^m (b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + \\ + b_{(n-1)i})U_i(t)(+(c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s)1(t)). \quad (4)$$

Разделим обе части уравнения (4) на полином n -ой степени $P(s)$ с корнями $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n$.

Получится следующая система уравнений:

$$\left(\frac{\alpha_1}{s + \gamma_1} + \frac{\alpha_2}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + \gamma_n} \right) Y(t) + Y(t) = \\ = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\beta_{0i}}{s + \gamma_1} + \frac{\beta_{1i}}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\beta_{(n-1)i}}{s + \gamma_n} \right) U_i(t) + \\ + \left(\frac{\zeta_0}{s + \gamma_1} + \left(\frac{\zeta_1}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\zeta_{n-1}}{s + \gamma_n} \right) s 1(t) \right). \quad (5)$$

Введем замены:

$$g_i(t) = \frac{Y(t)}{s + \gamma_j}, f_{ji}(t) = \frac{U_i(t)}{s + \gamma_j}, \left(w_j(t) = \frac{s}{s + \gamma_j} 1(t) \right), \\ j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Тогда систему (5) можно переписать в виде:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{(j-1)i} f_{ji}(t) \left(+ \sum_{i=1}^n \zeta_{i-1} w_i(t) \right) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(t). \quad (7)$$

Из системы уравнений (7) методом наименьших квадратов находим $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $B = \begin{bmatrix} \beta_{01}\beta_{11}\dots\beta_{(n-1)1} \\ \beta_{02}\beta_{12}\dots\beta_{(n-1)2} \\ \dots\dots\dots \\ \beta_{0m}\beta_{1m}\dots\beta_{(n-1)m} \end{bmatrix}$, ($Z = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}]$). Зная $A, B, (Z)$, находим коэффициенты системы (3) a_1, a_2, \dots, a_n , $b_{01}, b_{11}, \dots, b_{(n-1)1}, b_{02}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)2}, \dots, b_{0m}, b_{1m}, \dots, b_{(n-1)m}$, $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$.

Если начальные условия нулевые, можно получить наблюдаемое каноническое представление матриц модели в пространстве состояний A, B, C, D по формулам [3]:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 010\dots00 \\ 001\dots00 \\ 000\dots00 \\ \dots\dots\dots \\ 000\dots01 \\ -a_n - a_{n-1} - a_{n-2} \dots - a_2 - a_1 \end{bmatrix}, \\ C &= [10\dots0], \\ D &= 0, \\ B &= \begin{bmatrix} \beta_{1,1}\beta_{1,2}\dots\beta_{1,m} \\ \beta_{2,1}\beta_{2,2}\dots\beta_{2,m} \\ \dots\dots\dots \\ \beta_{n,1}\beta_{n,2}\dots\beta_{n,m} \end{bmatrix}, \\ \beta_{1,l} &= b_{0l}, \beta_{i,l} = b_{(i-1)l} - \sum_{j=1}^{(i-1)} (i-1)\beta_{j,l}a_{i-j}, \\ l &= 1, 2, \dots, m, i = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

Если начальные условия ненулевые, уравнения (3) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} U_i(t) + \\ &\quad + \frac{q_0s^{n-1} + q_1s^{n-2} + \dots + q_{n-1}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} 1(t) + k1(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) методом неопределенных коэффициентов находим q_0, q_1, \dots, q_{n-1} и k .

Для первых $(m+1)$ слагаемых уравнений системы (9) получаем наблюдаемое каноническое представление матриц A, B, C, D_1 по формулам [3]:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 010\dots00 \\ 001\dots00 \\ 000\dots00 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 000\dots01 \\ -a_n - a_{n-1} - a_{n-2} \dots - a_2 - a_1 \end{bmatrix}, \\ C &= [10\dots0], \\ D_1 &= 0, \\ B &= \begin{bmatrix} \beta_{1,1}\beta_{1,2}\dots\beta_{1,(m+1)} \\ \beta_{2,1}\beta_{2,2}\dots\beta_{2,(m+1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n,1}\beta_{n,2}\dots\beta_{n,(m+1)} \end{bmatrix}, \\ \beta_{1,l} &= b_{0l}, \beta_{i,l} = b_{(i-1)l} - \sum_{j=1}^{i-1} (i-1)\beta_{j,l}a_{i-j}, \beta_{1,(m+1)} = q_0, \\ \beta_{i,(m+1)} &= q_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,(m+1)}a_{i-j}, l = 1, 2, \dots, m, i = 2, 3, \dots, n. \quad (10) \end{aligned}$$

Обозначим B_1 матрицу B без последнего столбца, B_2 – последний столбец матрицы B . Тогда систему (1) можно представить

в виде: $\begin{cases} \dot{X}^{**}(t) = AX^{**}(t) + B_1U(t), \\ Y(t) = CX^{**}(t) + D_1U(t), \\ X_0 = A^{-1}B_21(t), \end{cases}$ где $X^{**}(t) = X(t) + X_0$,

матрицы A, B_1, B_2, C, D_1 рассчитываются по формулам (10).

Рассмотрим алгоритм ОНОИ для многомерной системы ($r \neq 1$).

Для каждого выхода модели y_j найдем $A_j, B_j, C_j, D_j, X_{0j}$ ($j = 1, 2, \dots, r$).

$$\begin{cases} \dot{X}_j(t) = A_j X_j(t) + B_j U(t), \\ y_j(t) = C_j X_j(t) + D_j U(t), \\ X_j(t_0) = X_{0j}. \end{cases}$$

Для векторного выхода модели \hat{Y}_j получаем уравнение:

$$\hat{Y}_j(t) = C_{Fj} X_j(t) + D_{Fj} U(t). \quad (11)$$

В уравнении (11) C_{Fj} и D_{Fj} неизвестны.

Введем замены $A_{Fj} = [C_{Fj} D_{Fj}]$, $W_j(t) = [X_j(t) U(t)]$ и подставим в уравнение (11). Получим следующее уравнение.

$$\hat{Y}_j(t) = A_{Fj} W_j(t). \quad (12)$$

Матрицу A_{Fj} находим по формуле:

$$A_{Fj} = W_j^{-1}(t) \hat{Y}_j(t). \quad (13)$$

Т.о., получаем r вариантов параметров системы с r выходами:

$$\begin{cases} \dot{X}_j(t) = A_j X_j(t) + B_j U(t), \\ \hat{Y}_j(t) = C_{Fj} X_j(t) + D_{Fj} U(t), \\ X_j(t_0) = X_{0j}. \end{cases}$$

Из r вариантов выбираем лучшую модель по следующему критерию:

$$Err \rightarrow \min, \text{ где } Err = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{2}}, N - \text{число замеров.} \quad (14)$$

§ 4. Повышение качества идентификации посредством Bootstrap-анализа

Существующие методы идентификации позволяют получить одну модель. Часто при наличии шумов происходит смещение в оценке параметров системы. Для улучшения качества идентификации можно провести bootstrap-анализ. Bootstrap-анализ позволяет получить множество моделей и показывает, насколько они

устойчивы к изменениям в выборке. При составлении обобщенной модели применим bootstrap-анализ. Для каждой модели случайно выберем уравнения из системы уравнений (7). Решим полученные системы уравнений методом наименьших квадратов и для каждой получим свои модели. В результате применения bootstrap-метода получим не одну модель, а множество моделей (рис.1).

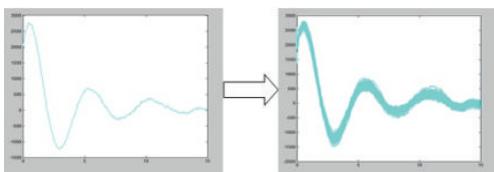


Рис. 1:

На рисунке 1 на левом графике представлена базовая модель, полученная с использованием всех уравнений системы уравнений (7), на правом графике – ансамбль моделей, полученных решением систем уравнений, состоящих из случайно выбранных уравнений системы (7). Из ансамбля моделей, полученных bootstrap-методом, выбирается лучшая по критерию (14).

§ 5. Результаты вычислительного эксперимента

Метод обобщенного настраиваемого объекта измерения (ОНОИ) реализован в среде программирования Matlab [5] и протестирован на примере динамической системы 4-го порядка с 4 входами и 3 выходами, 1500 замеров. Также для сравнения результатов была проведена идентификация этой же системы методом предсказания ошибки Pem («prediction error method»), в котором параметры модели ищутся градиентным методом, и методом, основанном на анализе подпространств N4sid («subspace method of identification») [2]. В среде Matlab эти алгоритмы реализованы функциями pem и n4sid соответственно. Идентификация проводилась при нулевых начальных условиях, при ненулевых начальных условиях, без

учета шума и с учетом шума в каналах измерения и управления. Дисперсия шума составляет 0,2 дисперсии сигнала. Для каждого алгоритма рассчитана ошибка идентификации. Результаты идентификации системы (1) приведены на рисунках 2-15.

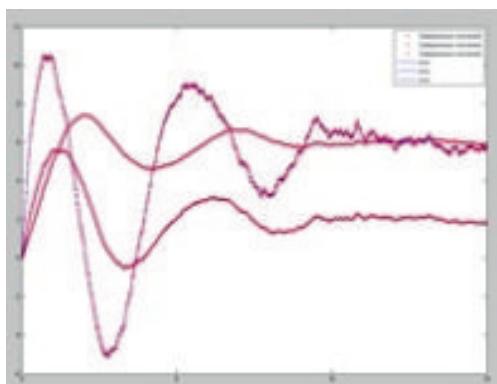


Рис. 2:

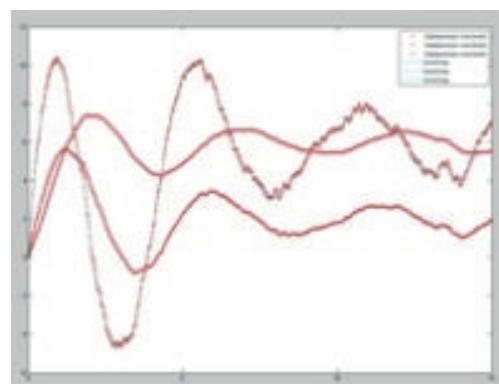


Рис. 3:

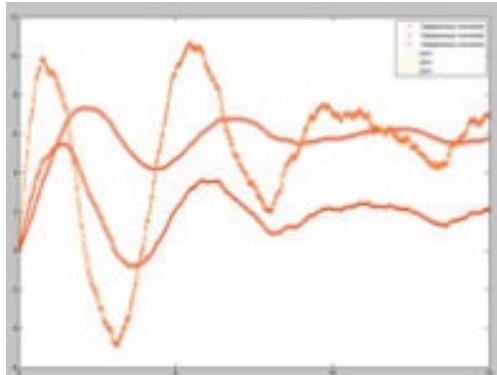


Рис. 4:

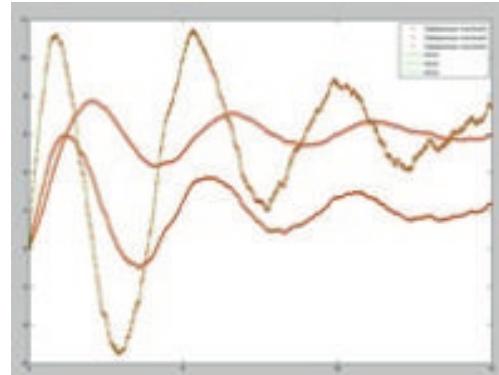


Рис. 5:

Рис. 2-5. Результаты идентификации системы методами ОНОИ, ОНОИ с применением bootstrap-анализа, Рем и N4sid при нулевых начальных условиях без учета шума

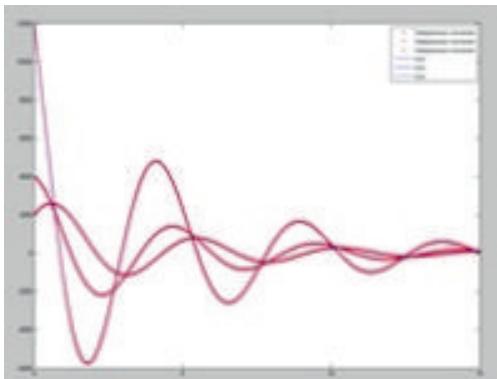


Рис. 6:

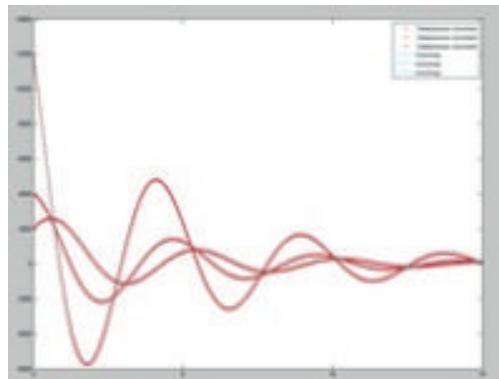


Рис. 7:

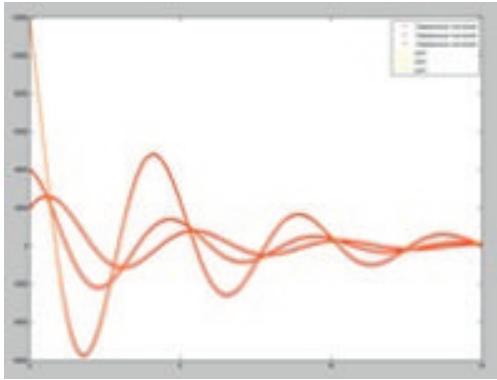


Рис. 8:

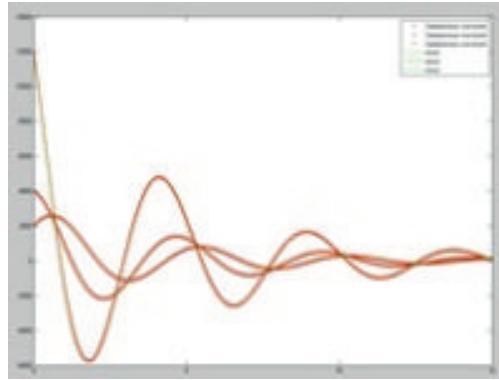


Рис. 9:

Рис. 6-9. Результаты идентификации системы методами ОНОИ, ОНОИ с применением bootstrap-анализа, Pem и N4sid при ненулевых начальных условиях без учета шума

Рис. 10-11. Результаты идентификации системы при нулевых и ненулевых начальных условиях с учетом шума

Рис. 12-15. Критерий качества идентификации при нулевых начальных условиях с учетом шумов, при нулевых начальных условиях без учета шумов, при ненулевых начальных условиях без

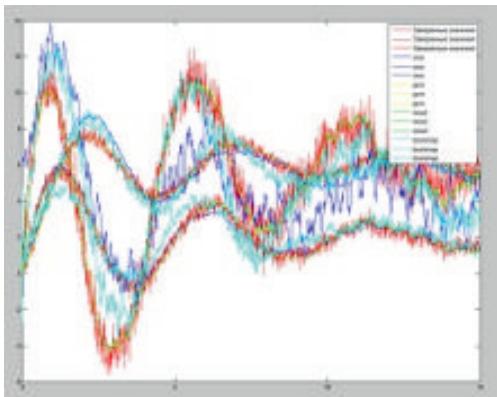


Рис. 10:

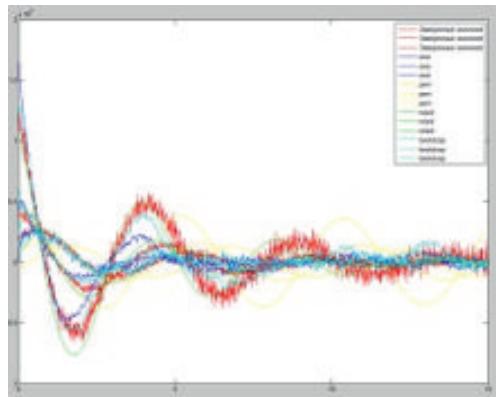


Рис. 11:

учета шумов, при ненулевых начальных условиях с учетом шумов

Из рисунков 2-15 видно, что при наличии шумов в каналах измерения и управления алгоритм ОНОИ с применением bootstrap-метода превосходит алгоритмы Рем и N4sid по качеству модели.

§ 6. Заключение

Т.о., в ходе работы рассмотрена задача идентификации параметров многомерной динамической системы. Исследованы существующие методы идентификации. В среде программирования Matlab реализован алгоритм ОНОИ и протестирован на примере идентификации параметров многомерной динамической системы. Проведенное исследование показало, что метод ОНОИ с применением bootstrap-анализа с учетом шумов при ненулевых начальных условиях превосходит методы Рем и N4sid по качеству идентификации. В дальнейшем планируется на основе метода ОНОИ разработать алгоритм, позволяющий идентифицировать нестационарные динамические системы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Косарев В. Е. Контроль за разработкой нефтяных и газовых

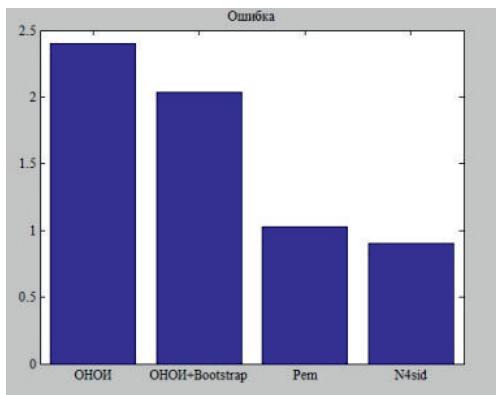


Рис. 12:

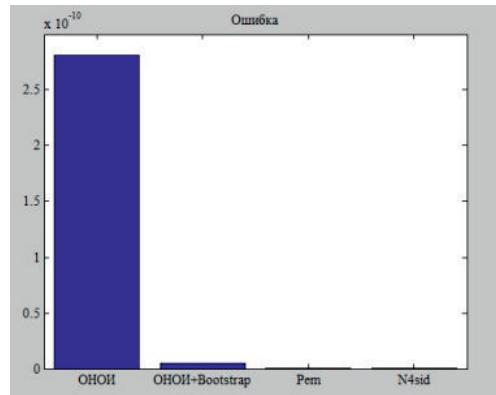


Рис. 13:

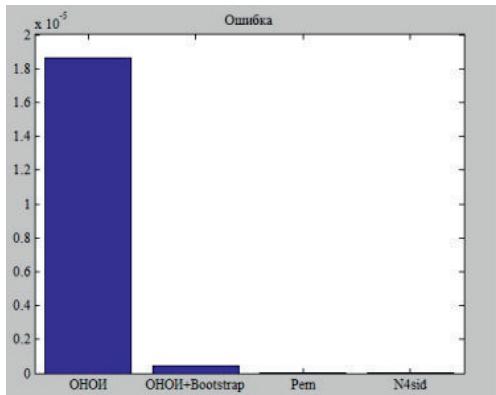


Рис. 14:

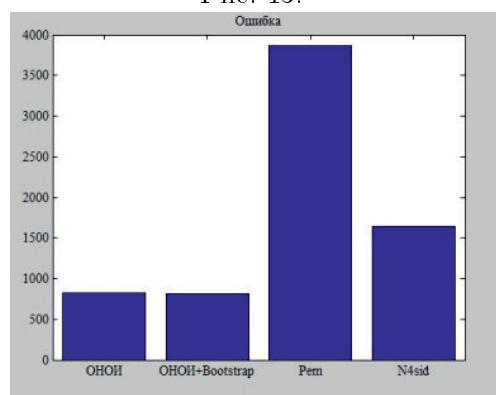


Рис. 15:

месторождений. – Казань: Казанский государственный университет, 2009. – 145 с.

- [2] *Льюинг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
- [3] *Андреевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab. – СПб.: Наука, 2000. – 475 с.
- [4] *Надеждин О. В., Заминова А. Р.* Анализ связности динамики нагнетательных и добывающих скважин // Управление большими системами. – М.: ИПУ РАН, 2009. – № 25.– С. 35–47.
- [5] *Дьяконов В. П., Круглов В. В.* MATLAB. Анализ, иденти-

фикация и моделирование систем. – СПб.: Питер, 2001. – 448 с.

УДК 517.929.8:517.984

ЗАДАЧА СТЕКЛОВА В ПОЛУЦИЛИНДРЕ С МАЛЫМ
ОТВЕРСТИЕМ

Кожевников Д. В. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы)
Хуснуллин И. Х. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы)

Введение

Пусть Σ — $n-1$ -мерная ограниченная область с гладкой границей, $\Pi := \Sigma \times (a, +\infty)$, $a < 0$, $\{0\} \in \Pi$, ω — ограниченная, связная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей, $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Обозначим $\Pi_\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$, $\Sigma_a = \Sigma \times \{a\}$.

В работе рассматривается краевая задача с условием Стеклова на Σ_a :

$$\begin{aligned} \Delta\psi_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Pi_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon &= 0, \quad x \in \partial\Pi_\varepsilon \setminus \Sigma_a, \quad -\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_n} = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in \Sigma_a. \end{aligned} \tag{1}$$

§ 1. Предварительные сведения и формулировка результатов

Пусть $\tilde{z}_q(x)$, $q = \overline{0, n}$ — убывающие на бесконечности гармонические в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}$ функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\tilde{z}_0(x) = 1, \quad \tilde{z}_m(x) = x_m, \quad m = \overline{1, n} \quad \text{на } \partial\omega.$$

Хорошо известно, что эти функции имеют асимптотики

$$\tilde{z}_q(x) = c_{q,0}r^{-n+2} + \sum_{p=1}^n c_{q,p}x_p r^{-n} + O(r^{-n}), \quad |x| = r \rightarrow \infty.$$

Постоянная $c_{0,0} = c(\omega) > 0$ называется гармонической емкостью. Через $C(\omega)$ обозначим симметричную положительную $n \times n$ -матрицу с компонентами $c_{m,q}$.

Для простых собственных значений задачи (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть λ_0 – простое собственное значение краевой задачи*

$$\begin{aligned}\Delta\psi_0 &= 0, \quad x \in \Pi, \\ \psi_0 &= 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \Sigma_a, \quad -\frac{\partial\psi_0}{\partial x_n} = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Sigma_a,\end{aligned}$$

ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Sigma_a)$ собственная функция. Тогда единственное и, к тому же, простое собственное значение λ_ε краевой задачи (1), сходящееся к λ_0 , имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{i+n-2},$$

где

$$\lambda_{n-2} = c(\omega) |S_n| (n-2)\psi_0^2(0), \quad (2)$$

а $|S_n|$ – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n .

Если $\psi_0(0) = 0$, то $\lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} = 0$ и

$$\lambda_n = |S_n| \nabla\psi_0(0) C(\omega) \nabla\psi_0(0). \quad (3)$$

§ 2. Построение главных членов разложения

Вне окрестности отверстия приближение $U(x, \varepsilon)$ (*внешнее разложение*) функции ψ_ε естественно искать в виде $U(x, \varepsilon) \approx \psi_0(x)$. В окрестности же ω_ε приближение $V(x, \varepsilon)$ (*внутреннее разложение*) функции ψ_ε также естественно искать в виде разложения по функциям, зависящим от переменной $\xi = x\varepsilon^{-1}$.

Ряд Тейлора функции ψ_0 в нуле имеет вид:

$$U(x, \varepsilon) \approx \psi_0(x) = \psi_0(0) + \sum_{m=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)x_m + O(x^2), \quad |x| = r \rightarrow 0.$$

Переписывая в переменных $\xi = x\varepsilon^{-1}$, получаем:

$$U(x, \varepsilon) \approx \psi_0(x) = \psi_0(0) + \varepsilon \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \xi_m + O(\varepsilon^2 \rho^2), \quad |\xi| \varepsilon = r \rightarrow 0.$$

Следуя методу согласования асимптотических разложений [1],[2],[3], получаем, что внутреннее разложение следует искать в виде

$$V(\xi, \varepsilon) = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + \dots, \quad (4)$$

где

$$v_0(\xi) \sim \psi_0(0), \quad v_1(\xi) \sim \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \xi_m, \quad \rho = |\xi| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (1), переходя к переменной ξ , получаем краевые задачи для v_k :

$$\varepsilon^{k-2} : \quad \Delta_\xi v_k = 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \quad v_k = 0 \quad \xi \in \partial\omega, \quad (6)$$

где Δ_ξ — оператор Лапласа по переменной ξ .

В силу определения \tilde{z}_j функции

$$v_0(\xi) = \psi_0(0)(1 - \tilde{z}_0(\xi)), \quad (7)$$

$$v_1(\xi) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)(\xi_m - \tilde{z}_m(\xi)) \quad (8)$$

являются решениями краевых задач (6) с асимптотиками

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= \psi_0(0) + c(\omega)\psi_0(0)\rho^{-n+2} + O(\rho^{-n+1}), \quad \rho \rightarrow \infty, \\ v_1(\xi) &= \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)\xi_m + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}\rho^{-n+2} \\ &\quad + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \sum_{p=1}^n c_{m,p}\xi_p\rho^{-n} + O(\rho^{-n}), \quad \rho \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

которые уточняют асимптотики (5).

Переписывая (7) и (8) в переменных $x = \varepsilon\xi$, получаем

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= \psi_0(0) + \varepsilon^{n-2}c(\omega)\psi_0(0)r^{-n+2} + O(\varepsilon^{n-1}r^{-n+1}) \\ v_1(\xi) &= \varepsilon^{-1} \sum_{m=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)x_m + \varepsilon^{n-2} \sum_{m=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}r^{-n+2} \\ &\quad + \varepsilon^{n-1} \sum_{m=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0) \sum_{p=1}^n c_{m,p}x_p r^{-n} + O(\varepsilon^n r^{-n}) \end{aligned} \quad (9)$$

при $\varepsilon^{-1}r \rightarrow \infty$.

Следуя методу согласования асимптотических разложений и учитывая равенства (9), внешнее разложение будем искать в виде

$$U(x, \varepsilon) = \psi_0(x) + \varepsilon^{n-2}\psi_{n-2}(x) + \varepsilon^{n-1}\psi_{n-1}(x) + \varepsilon^n\psi_n(x) + \dots, \quad (10)$$

где

$$\psi_{n-2}(x) \sim c(\omega)\psi_0(0)r^{-n+2}, \quad (11)$$

$$\psi_{n-1}(x) \sim \psi_0(0) \sum_{m=1}^n c_{0,m}x_m r^{-n} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}r^{-n+2}, \quad (12)$$

$$\psi_n(x) \sim \sum_{m=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0) \sum_{p=1}^n c_{m,p}x_p r^{-n} \quad (13)$$

при $r \rightarrow 0$.

По аналогии с (10) собственное значение ищем в виде

$$\lambda_\varepsilon(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{n-2}\lambda_{n-2} + \varepsilon^{n-1}\lambda_{n-1} + \varepsilon^n\lambda_n + \dots \quad (14)$$

Подставляя (10) и (14) в краевую задачу (1), получаем краевые задачи для коэффициентов внешнего разложения (10):

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{n-2} &= 0, \quad x \in \Pi \setminus \{0\}, \\ \psi_{n-2} &= 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma_a}, \\ -\frac{\partial\psi_{n-2}}{\partial x_n} &= \lambda_0\psi_{n-2} + \lambda_{n-2}\psi_0, \quad x \in \Sigma_a, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_i &= 0, & x \in \Pi \setminus \{0\}, \\
\psi_i &= 0, & x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma_a}, \\
-\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n} &= \lambda_0\psi_i + \sum_{k=n-2}^i \lambda_k\psi_{i-k}, & x \in \Sigma_a, \quad i \geq n-1.
\end{aligned} \tag{16}$$

Показано, что существуют функции $E_j(x)$, имеющие асимптотики

$$\begin{aligned}
E_0(x) &= r^{-n+2} + O(r^{-n+3}), & r \rightarrow 0 \\
E_m(x) &= x_m r^{-n} + O(r^{-n+2}), & r \rightarrow 0, \quad m = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{17}$$

и являющиеся решениями краевых задач

$$\begin{aligned}
\Delta E_j &= 0, & x \in \Pi \setminus \{0\}, \\
E_j &= 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma_a}, & -\frac{\partial E_j}{\partial x_n} = \lambda_0 E_j + \mu_j \psi_0, \quad x \in \Sigma_a
\end{aligned} \tag{18}$$

при

$$\mu_0 = |S_n|(n-2)\psi_0(0), \quad \mu_m = |S_n| \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0), \quad m = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Тогда в силу (17), (18) и (19) функция

$$\psi_{n-2}(x) = c(\omega)\psi_0(0)E_0(x),$$

является решением краевой задачи (15) с асимптотикой (11) при λ_{n-2} , определяемом равенством (2).

Заметим, если $\psi_0(0) = 0$, то $\lambda_{n-2} = 0$ в силу (2). Поэтому для $\psi_{n-1}(x)$ краевая задача (16) и асимптотика в нуле (12) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_{n-1} &= 0, & x \in \Pi \setminus \{0\}, \\
\psi_{n-1} &= 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma_a}, & -\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} = \lambda_0\psi_{n-1} + \lambda_{n-1}\psi_0, \quad x \in \Sigma_a, \\
\psi_{n-1}(x) &\sim \sum_{m=1}^n \frac{\partial\psi_0}{\partial x_m}(0)c_{m,0}r^{-n+2}.
\end{aligned}$$

В силу (17), (18) и (19) функция

$$\psi_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) c_{m,0} E_m(x),$$

является решением этой краевой задачи при $\lambda_{n-1} = 0$.

Следовательно, если $\psi_0(0) = 0$, то $\lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} = 0$ и краевая задача (16) для $\psi_n(x)$ примет вид

$$\begin{aligned} \Delta \psi_n &= 0, \quad x \in \Pi \setminus \{0\}, \\ \psi_n &= 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma_a}, \quad -\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} = \lambda_0 \psi_n + \lambda_n \psi_0, \quad x \in \Sigma_a. \end{aligned}$$

В силу (17), (18) и (19) функция

$$\psi_n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}(0) \sum_{p=1}^n c_{m,p} E_m(x)$$

является решением этой краевой задачи с асимптотикой (13) при λ_n , определяемом равенством (3).

Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 12-01-00445). Работа второго автора выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач, М.: Наука, 1989
- [2] Гадылшин Р. Р. Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа, Современная математика и ее приложения, том 5, 2003, С. 3–32
- [3] Бикметов А. Р., Гадылшин Р. Р. Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n -мерной области, Уфимский математический журнал, 4 № 2, 2012, С. 28–64

УДК 534.112

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА РАММА.

**Кумушбаева Э.Э., Кумушбав Р.Р., Ахтямов А.М.(Уфа,
БашГУ)**

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$-y'' = \lambda y, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(1) = 0, \quad (3)$$

где $x \in [0, 1]$, $y = y(x, \lambda)$.

Общим решением уравнения (1) является

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{C_2 \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \quad (4)$$

Подставляя краевые условия (2) – (3) задачи в уравнение (4), получаем:

$$C_1 = 0, \quad C_2 \cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Тогда, если $C_2 \neq 0$, то

$$\cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Решением данного тригонометрического уравнения является

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2, k \in Z.$$

В нашем случае, $\sqrt{\lambda_k} = 0$ не является решением задачи (1) – (3), для любого k . Рассмотрим это же уравнение только с другими краевыми условиями.

$$-y'' = \lambda y, \quad (5)$$

$$y(0) = 0, \quad (6)$$

$$y'(1) + y(1)(k - m\lambda) = 0, \quad (7)$$

Пусть $y_1 = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ и $y_2 = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}$ – линейно независимые решения уравнения (5). Выпишем характеристический определитель задачи (5) – (7).

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ (-\sqrt{\lambda}) \sin \sqrt{\lambda} + (k - m\lambda) \cos \sqrt{\lambda} & \cos \sqrt{\lambda} + (k - m\lambda) \frac{\sin \lambda}{\lambda} \end{vmatrix} = \\ &= \cos \sqrt{\lambda} + (k - m\lambda) \frac{\sin \lambda}{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнения (8) получаем $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} = \frac{m\lambda - k}{\lambda}$. Решения данного уравнения обозначим через λ_k^* . Тогда пусть λ_k решение $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$.

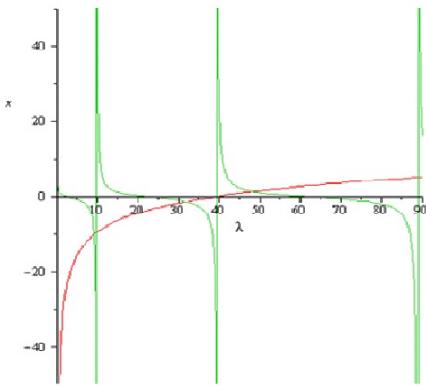


Рис. 1:

Из графика, видно, что если точки пересечения $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$ и $\frac{m\lambda - k}{\sqrt{\lambda}}$ расположены ниже оси $O\lambda$, то их абсциссы находятся правее нулей $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$, а если точки препесечения $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$ и $\frac{m\lambda - k}{\sqrt{\lambda}}$ расположены выше оси $O\lambda$, то абсциссы точек пересечения $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$ расположены левее. Из этого следует, доказанная Ramm-ом теорема:

Теорема 1. Обозначим через λ_n – корни $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$, λ_n^* – собственные значения, тогда

$$\begin{array}{ll} \text{если } \lambda_n^* < \frac{k}{m}, & \lambda_n^* > \lambda_n; \\ \text{если } \lambda_n^* > \frac{k}{m}, & \lambda_n^* < \lambda_n. \end{array}$$

Обобщим теорему Рамма на случай, когда множитель при $y(1)$ в краевом условии (7) является не линейной функцией $k - m\lambda$, а полиномом $f(\lambda)$.

Рассмотрим следующую обратную задачу

$$-y'' = \lambda y, \quad (9)$$

$$y(0) = 0, \quad (10)$$

$$y'(1) + f(\lambda)y(1) = 0, \quad (11)$$

где $x \in [0, 1]$, $y = y(x, \lambda)$.

Пусть $f(\lambda)$ полином следующего вида: $f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + \dots + f_n\lambda^n$, который имеет только вещественные корни, принадлежащие отрезку $(0, +\infty)$.

Линейно независимым решением уравнения (9) является

$$y_1 = \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad y_2 = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Составив характеристический определитель для задачи (9) – (11) получаем $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_k} = -\frac{f(\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k}}$, для любого $k \in Z$. Корни $f(\lambda)$ обозначим через z_i , $i = 1, \dots, n$, где z_i положительные нули функции не являющимися точками экстремума.

Теорема 2. Пусть все нули $f(\lambda)$ являются положительными и не являются точками экстремума и не совпадают с λ_k (нули $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$). Обозначим эти нули z_k ; в каждом интервале $((\pi k)^2, [\pi(k+1)]^2)$ график функции $\frac{-f(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ пересекает ветвь функции $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$ только в одной точке и существует такая точка.

Интервал $((\pi k)^2, [\pi(k+1)]^2)$ назовем четным, если k -четное число, и нечетным, если k -нечетное число. Тогда:

1. Если $f(+0) > 0$, то в нечетном интервале $\lambda_k^* > \lambda_k$, а в четном интервале $\lambda_k^* < \lambda_k$.
2. Если $f(-0) < 0$, то в нечетном интервале $\lambda_k^* < \lambda_k$, а в четном интервале $\lambda_k^* > \lambda_k$.
3. Если $f(+0) = 0$, тогда
 - a) Либо $f(\lambda) > 0$;
 - b) Либо $f(\lambda) < 0$;
 - c) Либо $f(\lambda) = 0$.

Если $f(\lambda) > 0$, то $f(+0) > 0$; если $f(\lambda) < 0$, то $f(-0) < 0$; если $f(\lambda) = 0$, то получаем, что $f(\lambda) \equiv 0$, для любого $\lambda \in (0, \infty)$, случай следующей задачи:

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Из этого условия следует, что $\lambda_k^* = \lambda_k$.

Пример 1.

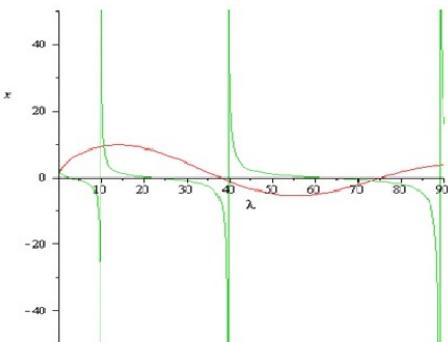


Рис. 2:

На (Рис.2) изображен график функции $x = \frac{40 \sin(\frac{\lambda}{3})}{\sqrt{\lambda}}$ и $x = \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$. Как видно по рисунку, все нули $x = \frac{40 \sin(\frac{\lambda}{3})}{\sqrt{\lambda}}$ являются положительными, не являются точками экстремума, не совпадают с нулями $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$, пересекают ветвь функции $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$ только в

одной точке и такая точка существует.

Пример 2.

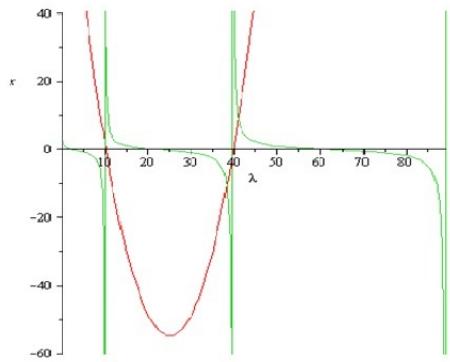


Рис. 3:

На (Рис.3) изображен график функции $x = \left(\frac{-\lambda}{2} + 12.5\right)^2 - 55$ и $x = \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$. Из рисунка видно, что все нули являются положительными, не являются точками экстремума, не совпадают с нулями $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$, пересекают ветвь функции $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$ только в одной точке.

Пример 3.

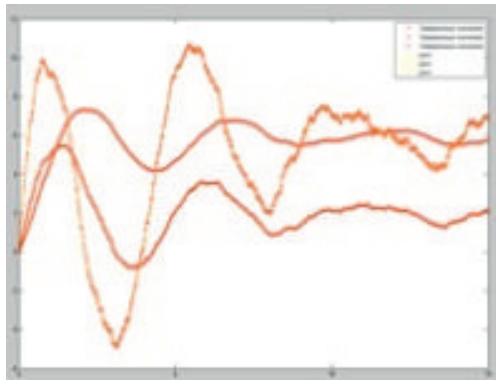


Рис. 4:

На (Рис.4) изображен график функции $x = \frac{35 \cos(\frac{\lambda}{7})}{\sqrt{\lambda}}$ и $x = \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$. В данном случае, теорема Рамма не выполняется, т.к. из теоремы следует, что график функции $x = \frac{35 \cos(\frac{\lambda}{7})}{\sqrt{\lambda}}$ должен пересекать ветвь

функции $x = \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}$ только в одной точке.

Полученный результат может быть применен к задаче акустической диагностики об определении параметров закрепления сложной механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ахтямов А. М., Садовничий В. А., Султанаев Я. Т. Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий // Доклады Академии наук. 1999. Т. 367, № 6, 739-741.
- [2] Ахтямов А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8, 1127- 1128.
- [3] Gladwell G. M. L. Inverse Problems in Vibration. 2nd ed. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.)

УДК 81:002

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗА СТВОЛА ПЕРА НА ЦИФРОВОМ ИЗОБРАЖЕНИИ

Мицуков Д. С. (Уфа, БашГУ)

Введение

Мы часто сталкиваемся с задачей распознавания образов. С развитием вычислительной техники эта задача становится реальной и на данный момент распознавание образов применяется во многих областях.

Задача распознавания образов нетривиальна и в каждом отдельном случае она может носить абсолютно разный характер.

Поговорим о том, что же такое распознавание образов в широком смысле.

При решении каких-либо задач, касающихся математического моделирования, используется следующий алгоритм: математическая модель, алгоритм решения, расчёт. Математическую модель построить не всегда просто, а иногда эта задача оказывается попросту неразрешимой. Сложность вычислений, расчётов при создании математической модели очень часто делают процесс решения громоздким. Однако, существуют методы решения подобных задач, основанные на другом базовом представлении. Зачастую не требуется строить всё математическую модель, а достаточно ограничиться только какими-то основными, интересующими нас, фрагментами. Таким образом, отбрасываются лишние расчёты, экономится время и ресурсы. Это приводит к задаче распознавания какого-то отдельного интересующего нас образа, а не к задаче создания всей математической модели и её анализа.

Например, в станциях метро, в аэропортах и других местах скопления большого количества людей применяется распознавание каждого человека в отдельности, а так же его лица, например,

для сравнения входного изображения с изображением преступника или других лиц, которые находятся в розыске. Это существенно повышает безопасность.

На дорогах общего пользования уже стоят камеры, следящие за скоростным режимом мимо проезжающих автомобилей. При превышении скорости камера фотографирует автомобиль и далее происходит распознавание его государственного номера. Но сейчас и сами автомобили оборудованы распознаванием дорожных знаков, предупреждающих водителя о вводимых ограничениях. Можно привести ещё очень много примеров применения распознавания образов в современной жизни.

§ 1. Постановка задачи

Постановка задачи довольно проста: нужно найти координаты ствола пера на изображении и выдать результат в виде последовательности (массива) точек, описывающих траекторию ствола.

Для того, чтобы иметь полное представление о поставленной задаче, разумеется, нужно понять некоторую информацию, касающуюся пера птицы. Об этом сейчас и пойдёт речь.

Перья - накожное роговое образование, которое присутствует только у птиц.

Перья отличают птиц от всех других живых существ на нашей планете. Перья происходят от чешуек. Ими покрыты рептилии. Оперения для птиц крайне важно, так как они необходимы для сохранения тепла, для полёта и прочее. Перья у разных птиц могут очень сильно отличаться как цветом, так и формой. Задача сводится к нахождению стержня и очина пера.

§ 2. Вводимые ограничения

Любая задача распознавания предполагает собой какие-то ограничения, которые должны соблюдаться, чтобы получить пра-

вильный, желаемый результат. В данном конкретном случае ограничения буду следующими:

Перо на цифровом изображении помещается полностью с некоторыми отступами от краёв изображения.

Перо должно располагаться строго слева направо. То есть на изображении слева должен располагаться очин (начало пера), а справа конец стержня (собственно, сам конец пера).

Как следствие – перо должно быть расположено строго горизонтально, относительно самого изображения.

На изображении не должно быть никаких других предметов, кроме самого пера (которое на изображении единственное).

Фон, на котором находится перо, имеет относительно однородный цвет и не имеет сильных цветовых перепадов.

§ 3. Методы распознавания

Отдельного метода распознавания образа в каждом прикладном случае не существует, и способ решения поставленной задачи определяется лишь фантазией. Итак, у нас есть изображение, на котором присутствует перо, учитывая все вышеизложенные ограничения.

С чего начать распознавание? Таким вопросом задаётся любой человек, решающий подобные задачи. Как правило, распознавание образа начинается с понимания отличительных черт, которыми наделен искомый образ. Эти отличительные черты должны присутствовать на каждом изображении. Именно они будут отправной точкой в нахождении желаемого результата.

На каждом изображении будет присутствовать перо, учитывая вводимые ограничения. Т.е. мы можем точно сказать, что есть начало пера – очин и есть конец пера – конец стержня. Мы можем быть уверены, что очин будет расположен горизонтально, как и само перо. Следовательно, стержень так же будет расположен горизонтально. Нужно учесть тот факт, что перья птиц существен-

но отличаются друг от друга и стержень пера имеет свойство изгибаться. Рассмотрим возможные пределы изогнутости стержня пера.

§ 4. Пределы кривизны пера

Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости – кривизна. Мы вполне можем рассматривать стержень пера как кривую.

Случай, когда стержень пера абсолютно прямой рассматривать не стоит, так как на практике таких случаев фактически нет. Стержень может полностью определять прямую, но при детальном рассмотрении всё равно окажется, что стержень имеет какую-то кривизну. Так или иначе, программа способна распознать стержень пера и с полностью прямым строением.

Итак, первый рассматриваемый случай наиболее простой – имеется лишь одна дуга. Это наиболее распространенный случай, который чаще всего встречается на практике.

Второй случай реже встречается – имеется две дуги на кривой. В таком случае распознавание принимает более сложный характер, хотя алгоритм решения как для первого случая, так и для второго одинаковый.

Возникает вопрос – а может ли кривая, описывающая стержень, иметь три дуги. Учитывая строение пера, на этот вопрос ответ можно дать отрицательный.

Таким образом, мы рассмотрели возможную кривизну стержня пера.

§ 5. Сложности распознавания

Цветовая гамма оперения птиц не ограничивается в каких-то пределах, поэтому перо птицы может иметь абсолютно любой цвет. Сложность нахождения стержня пера заключается в том,

что цвет стержня пера и цвет опахала могут совпадать, что, кстати говоря, чаще всего и встречается на практике. Таким образом, рассчитывать на контраст стержня и опахала не стоит.

Не стоит упускать тот факт, что опахало пера может не иметь точной границы. Опахало может быть слегка растрепанным к краям пера, что приводит к определённым сложностям.

Конец пера и конец стержня, вообще говоря, не всегда совпадают. Это объясняется спецификой строения опахала, которое может выступать чуть дальше, чем стержень.

§ 6. Алгоритм

Мы подошли к самой главной части распознавания образов – алгоритму. Перья имеют разные функции, разную окраску, разную форму и тому подобное. Это говорит о том, что задача распознавания образа ствала пера носит нетривиальный характер.

Создание алгоритма, который бы работал с любыми перьями, учитывая вводимые ограничения, подразумевает собой, что ошибки могут проявляться. Что ж, преступим к алгоритму программы. На вход программы подаётся цифровое изображение в формате *bmp*. В результате работы программы получается массив, который содержит в себе координаты точек, описывающих расположение ствала пера на изображении.

Входное изображение является цветным. Для наиболее правильного распознавания требуется перевести исходное изображение в полутонаовое. Именно так сделано в программе. Полученное полутонаовое изображение будет анализироваться для поиска стержня пера.

Поиск стержня пера весьма трудоемкий процесс ввиду нетривиальности входных изображений. Существует много методов распознавания образов, но ввиду всей той же проблемы неоднородности входных данных, имеет смысл разработать отдельный метод.

Поэтому для поиска ствола пера используются только индивидуально созданные методы.

Итак, имеется перо. Отправной точкой в поиске являются три важнейшие точки: координата начала очина, координата конца очина, координата конца пера. Имея эти три координаты, мы имеем возможность найти стержень пера.

Как было отмечено ранее, на практике не встречается случаев, когда ствол пера абсолютно прямой. Дополнительные расчёты приводят к выводу о том, что он имеет определённую кривизну.

Идея поиска ствола пера проста. Для начала нужно провести кривую через три точки: координату начала очина, координату конца очина, координату конца пера. Тут мы сталкиваемся с интерполяционным многочленом Лагранжа. Рассмотрим его определение и структуру.

Интерполяционный многочлен Лагранжа — многочлен минимальной степени, принимающий данные значения в данном наборе точек.

Способ вычисления таких многочленов:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

где базисные полиномы определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$l_i(x)$ обладают следующими свойствами:

- являются многочленами степени n
- $l_i(x_i) = 1$
- $l_i(x_j) = 0, j \neq i$

Суть в задаче построения гладкой кривой, т.к. ствол пера не имеет резких перепадов, острых изменений своей траектории и прочего.

Итак, мы построили кривую, проходящую через три точки. Правильность найденного очина вызывать сомнений не должна. Однако, теперь у нас есть сомнения в правильности найденного стержня пера. И сомнения оправданы, т.к. кривизна стержня

нетривиальна. Поэтому нам требуется скорректировать траекторию части кривой, определяющую стержень пера.

На этой части кривой отмечаются три точки, координаты которых выбираются как треть от всей длины кривой, определяющую стержень пера. Наша задача сместить координаты этих точек по оси OY так, чтобы они лежали на стержне пера.

Чтобы их смещать, нужно знать пределы смещения по оси OY. Этими пределами являются точки контура пера. То есть для каждой точки будут соответствовать две граничные точки: верхняя граничная и нижняя граничная точки, находящиеся на контуре пера. Их поиск довольно простой: нужно в цикле смещаться от края изображения к исходной точке до тех пор, пока не будет сильного контраста, который говорит о том, что достигнут контур пера. Аналогичным образом определяются остальные контурные точки.

Теперь, имея границы, мы можем смещаться по нашей виртуальной прямой от верхней границы к нижней и искать потенциальные точки.

Потенциальными точками называются те точки исходной прямой, относительно которых можно сделать предположение, что они лежат на кривой, определяющей стержень пера. Проще говоря, это предполагаемые искомые точки, в которые будут смещены координаты исходных точек.

Определить, является ли точка потенциальной можно следующим образом: смещаешься от верхней крайней точки к нижней, сравнивать цвет каждого пикселя с последующим. Если они довольно сильно контрастируют, то текущий пиксель можно отнести к потенциальному. Таким образом мы получили набор потенциальных точек (пикселов).

Возникает вопрос о том, как же отобрать одну единственную точку из множества потенциальных.

Метод отбора основан на аналогии того, как течёт вода. Ес-

ли пролить воды на какую-либо рифленую поверхность, то вода сначала будет заполнять маленькие каналы этой поверхности. Перенесём этот пример на распознавание образа стержня пера.

От каждой потенциальной точки мы пытаемся провести кривую в направлении конца пера (направо). Суть построения кривой очень простая: сравниваем строго правый пиксель от текущего. Если они не сильно отличаются, то сравниваемый пиксель считается принадлежащим кривой, которую мы строим. Аналогичным образом поступаем с правым верхним и правым нижним пикселями. Далее от каждого пикселя, которые прошли проверку снова пытаемся продолжить нашу кривую. Так мы поступаем до тех пор, пока не сможем найти пиксель, слабо отличающийся от текущего. Построив кривую, мы запоминаем её длину. Аналогичным образом пытаемся провести кривые от всех потенциальных точек. Искомой потенциальной точкой будет та точка, от которой мы смогли провести кривую максимальной длины, т.е. это говорит о том, что эта кривая пролегает как раз на стержне пера.

Остаётся лишь сместить исходные точки в истинные потенциальные точки, которые нашли ранее.

Последним шагом в определении ствола пера является построение Интерполяционного многочлена Лагранжа уже не по трём точкам, а по шести точкам. Построенная кривая будет описывать ствол пера.

Заключение

Подведём итог. Задача распознавание образа ствола пера несёт нетривиальный характер. Описанный алгоритм не всегда выдаёт желаемый результат ввиду существенных различий исходных данных. В целом алгоритм довольно простой.

Положительной стороной алгоритма является то, что не требуется находить всего контура пера, а нужно всего лишь шесть точек, лежащих на контуре. Т.е. мы можем не тратить время на

трудоемкий поиск всех точек контура. Это даёт дополнительное время на то, чтобы точнее определить шесть граничных точек при том, что программа и с учётом этого будет работать быстрее, чем, если бы мы определяли весь контур пера.

Другой положительной стороной является то, что шанс получить неверный результат ниже, чем у программы, анализирующей всю внутреннюю область пера, которая так же была написана, но, увы, не нашла своего применения ввиду частых ложных решений. Это достигается благодаря потенциальным точкам, т.к. их не так много, чтобы ошибиться.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ричард Прам, Алан Баш* «Динозавры или птицы: кто оперился первым?» «В мире науки» № 7 за 2003г
- [2] *Ильинцев В. Д., Карташев Н. Н., Шилов И. А.* Общая орнитология. — Москва: Высшая школа, 1982. — 464 с.
- [3] *Карташев Н. Н.* Систематика птиц. — М., Высшая школа. 1974. 368 с.
- [4] *Дементьев Г. П.* Птицы, М. — Л., 1940 (Руководство по зоологии, т. 6)

УДК 515.14

ФОРМУЛЫ ЛЕФШЕЦА ДЛЯ ПОТОКОВ С
НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ НА РАССЛОЕННЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ

Павленко В. А. (Уфа, БГАУ)

Введение

Пусть X - гладкое многообразие, X^0 - гладкое подмногообразие многообразия X коразмерности 1. В работе [1] рассматривались интегральные операторы

$$A : C_0^\infty(X \setminus X^0) \rightarrow C^\infty(X \setminus X^0). \quad (1)$$

с ядром

$$k_A \in C^\infty(X \times X \setminus (\{X^0 \times X\} \cup \{X \times X^0\})). \quad (2)$$

Также в работе [1] был рассмотрен специальный класс функций, которые являлись гладкими на $X \setminus X^0$, а при подходе к X^0 допускали асимптотическое разложение определённого вида. Такие функции назывались конормальными. В работах было показано, что интегральные операторы (1) продолжаются до операторов на конормальных функциях. Также было показано, что интегральные операторы (1) образуют алгебру. Операторы из этой алгебры, вообще говоря, не являются ядерными. Однако, при определённых условиях можно ввести функционал регуляризованного следа, который совпадает с функционалом следа на ядерных операторах. Регуляризованный след оператора определяется как регуляризованный интеграл по следующей формуле:

$$\text{r-Tr } A = \int_X^r k_A \Big|_{\Delta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\substack{X \\ r(p) > \varepsilon}} k_A(p) dp + 2 \ln \varepsilon \int_{X^0} k_A \Big|_{X^0} dp \right),$$

где $r(p) = \varrho(p, X^0)$. Другими словами, $r(p)$ является геодезическим расстоянием от точки p до подмногообразия X^0 .

§ 1. Задание потока на расслоенном многообразии и ассоциированных с ним операторов

Пусть компактное многообразие X является тотальным пространством расслоения $\pi : X \rightarrow S^1$ над окружностью. По определению расслоения, для любой точки $\alpha \in S^1$ существует окрестность $U(\alpha)$, такая что $\pi^{-1}(U) \cong F \times U$. Пусть на X задан поток $T_t : X \rightarrow X$, сохраняющий расслоение π . Гладкое векторное поле, порождённое данным потоком, представляется в виде:

$$V(y) = v_0(y) + a(y) \frac{\partial}{\partial y},$$

где $v_0(y)$ — векторное поле, касающееся слоёв расслоения π . Предположим, что поток имеет конечное число неподвижных точек $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, которые являются невырожденными, что означает, что для любого $j = 1, \dots, k$ справедливо $a(\alpha_j) = 0$, при этом $a'(\alpha_j) \neq 0$. Случай, когда поток не имеет неподвижных точек, был рассмотрен моим научным руководителем Ю.А. Кордюковым и его коллегой Х.Л. Альваресом. Пусть $K : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ — сглаживающий оператор, определяемый по формуле:

$$Ku(x_1^0, y) = \int_F k(x_1^0, x_2^0, y) u(x_2^0, y) dx_2^0,$$

где $x_1^0 \in F$, $x_2^0 \in F$, $y \in U$. Для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ определим линейно ограниченный оператор $T_f : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ по формуле:

$$T_f u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) T_t^* u(x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) u \circ T_t(x) dt,$$

где $x \in X$.

§ 1. Основные характеристики потока

Оказывается, для оператора $T_f \circ K$ существует регуляризованный след, который равен

$$\text{r-Tr}(T_f \circ K) = f(0) \int_X^r \frac{k(x^0, x^0, y)}{a(y)} dx^0 dy,$$

где $x \in F$, $y \in U$.

Рассмотрим слоение \mathcal{F} , задаваемое слоями расслоения π . Числом Лефшеца потока T_t называется число:

$$L(T) = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \text{Tr}(T_t^* : \overline{H}^s(\mathcal{F}) \rightarrow \overline{H}^s(\mathcal{F})),$$

где $\overline{H}^s(\mathcal{F})$ — послойные когомологии де Рама. В данном случае число Лефшеца не определено, так как не определён след оператора T_t^* . Однако, мы можем определить некоторый аналог числа Лефшеца, который назовём регуляризованным числом Лефшеца и определим его как обобщённую функцию:

$$\langle L(T), f \rangle = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \text{r-Tr}(T_f \circ P_{\mathcal{H}(\mathcal{F})}),$$

где $P_{\mathcal{H}(\mathcal{F})}$ — проектор на гармонические формы. В данном случае

$$\langle L(T), f \rangle = f(0) \chi(\mathcal{F}) \int_{S^1}^r \frac{dy}{|a(y)|},$$

где $\chi(\mathcal{F})$ — Эйлерова характеристика слоя F , то есть

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \dim H^s(F).$$

§ 1. Обобщение формулы Маккина-Зингера

Обозначим через \mathcal{A} множество функций $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, которые продолжаются до целых функций на всей комплексной плоскости, и для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ множество функций $x \mapsto \psi(x + iy)$, где $y \in K$ ограничено в пространстве Шварца $S(\mathbb{R})$. Из множества \mathcal{A} выберем чётную функцию $\psi : x \mapsto \psi(x^2)$.

Определим оператор $C_{t,\psi,f}^s = \Omega^u(\mathcal{F}) \rightarrow \Omega^u(\mathcal{F})$ по формуле:

$$C_{t,\psi,f}^s = T_f \circ \psi(t\Delta_{\mathcal{F}}^s)^2,$$

где $\Delta_{\mathcal{F}}^s$ — послойный оператор Лапласса, действующий на s -формах.

Регуляризованным суперследом оператора $C_{t,\psi,f}^s$ называется число, которое определяется по формуле:

$$\text{r-Tr}^s C_{t,\psi,f} = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \text{r-Tr} C_{t,\psi,f}^s$$

Основная Теорема. Регуляризованный суперслед не зависит от $t > 0$.

Литература

- [1] Павленко В. А. Интегральные операторы специального вида и их свойства // Сборник трудов Международной школы-конференции "Фундаментальная математика и её приложения в естествознании"-Т. 1, Уфа. 2012, стр. 131 - 135.

УДК 517.929.8:517.984

О ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПРИ
СИНГУЛЯРНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ
ЛАПЛАСИАНА В КРУГЕ

Репьевский С. В. (Челябинск, ЧелГУ)
Гадыльшин Р. Р. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы)

Введение

Пусть Ω — круг единичного радиуса с центром в начале координат, $\Gamma := \partial\Omega$, x_0 — точка с декартовыми координатами $(1, 0)$, (r, φ) — полярные координаты. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma : \varepsilon a < \varphi < \varepsilon b\}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$.

В работе методом согласования асимптотических разложений [1], [2], [3] получены асимптотические разложения по малому параметру ε некоторых собственных значений λ^ε краевой задачи

$$-\Delta\psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon\psi^\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \psi^\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1)$$

сходящихся к двукратным собственным значениям следующей краевой задачи:

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

§ 1. Предварительные сведения и формулировка результатов

Из [4] следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственные значения краевой задачи (1) сходятся к собственным значениям краевой задачи (2) с учетом совокупной кратности.

В свою очередь, хорошо известно, что задача (2) имеет либо простые собственные значения, совпадающие с квадратами нулей

производной функции Бесселя нулевого порядка $\mathcal{J}_0(z)$, либо двукратные собственные значения, совпадающие с квадратами нулей производной функции Бесселя m -ого порядка $\mathcal{J}_m(z)$, $m \geq 1$. С учетом равенства

$$\int_0^1 \mathcal{J}_\nu^2(\alpha r) r dr = \frac{\alpha [\mathcal{J}'_\nu(\alpha)]^2 - \alpha \mathcal{J}_\nu(\alpha) \mathcal{J}''_\nu(\alpha) - \mathcal{J}_\nu(\alpha) \mathcal{J}'_\nu(\alpha)}{2\alpha},$$

(см., например, [5, §4]) ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, соответствующие двукратному собственному значению задачи (2), имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left[\left(1 - \frac{m^2}{\lambda_0} \right) \mathcal{J}_m \left(\sqrt{\lambda_0} \right) \right]^{-1} \mathcal{J}_m \left(\sqrt{\lambda_0} r \right) \cos m\varphi, \\ \psi_0^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left[\left(1 - \frac{m^2}{\lambda_0} \right) \mathcal{J}_m \left(\sqrt{\lambda_0} \right) \right]^{-1} \mathcal{J}_m \left(\sqrt{\lambda_0} r \right) \sin m\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Из [4], также, известно, что в случае двукратного собственного значения краевой задачи (2), для сходящихся к λ_0 собственных значений краевой задачи (1) возможны следующие случаи: либо это два простых собственных значения, либо это одно двукратное собственное значение. Причем, в случае когда к λ_0 сходятся два простых собственных значения $\lambda^{\varepsilon,(1)}$ и $\lambda^{\varepsilon,(2)}$ краевой задачи (1), нельзя утверждать, что соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции $\psi^{\varepsilon,(1)}$, $\psi^{\varepsilon,(2)}$ имеют предел. В [1] было показано, что из любой последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_m} \rightarrow 0$ такую, что на ней имеет место сходимость $\psi^{\varepsilon,(n)} \rightarrow \psi_0^{(n)}$ в $L_2(\Omega)$. Однако, эти пределы, вообще говоря, могут меняться в зависимости от выбора подпоследовательности $\varepsilon_{k_m} \rightarrow 0$. Другими словами была доказана сходимость проектора P_ε , соответствующего паре $\lambda^{\varepsilon,(1)}, \lambda^{\varepsilon,(2)}$, к проектору P_0 , соответствующему λ_0 , по норме в $L_2(\Omega)$.

Следующее утверждение даёт ответ об асимптотике одного из

собственных значений краевой задачи (1), сходящегося к двукратному собственному значению краевой задачи (2).

Теорема 4. *Пусть λ_0 – двукратное собственное значение предельной краевой задачи (2), являющееся квадратом нуля производной функции Бесселя J_m .*

Тогда существует собственное значение λ^ε краевой задачи (1) сходящееся к двукратному собственному значению λ_0 краевой задачи (2) которое имеет асимптотику

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[i/2]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \lambda_{i+2,k},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \lambda_{2,0} &= m^2 \left(1 - \frac{m^2}{\lambda_0}\right)^{-2} \frac{(a-b)^2}{8}, \\ \lambda_{2k+2,k} &= -m^2 \left(1 - \frac{m^2}{\lambda_0}\right)^{-2} \left(-\frac{(a-b)^2}{8}\right)^{k+1} \left(\frac{\lambda_0}{2} + 4\right)^k. \end{aligned} \quad (4)$$

§ 2. Построение главного члена разложения

Будем строить асимптотику собственного значения задачи (1), соответствующего собственной функции $\psi_0^{(2)}(x)$ задачи (2). Собственная функция $\psi_0^{(2)}(x)$ не удовлетворяет граничным условиям. По методу согласования асимптотических разложений в окрестности γ^ε следует перейти к построению внутреннего разложения. Для этого нужно разложить функцию $\psi_0^{(2)}(x)$ в ряд в окрестности точки x_0 . Более того, раскладывать нужно не саму функцию $\psi_0^{(2)}(x)$, а сумму $\psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon \kappa \psi_0^{(1)}(x)$, где константа κ будет определена позднее. Обозначим $\Phi_1 = \psi_0^{(1)}(x_0)$, $\Phi_2 = \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial \varphi}(x_0)$. Тогда при $x \rightarrow x_0$ имеем:

$$\psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon \kappa \psi_0^{(1)}(x) = \Phi_2 y_1 + \varepsilon \kappa \Phi_1 + O(|y|^2), |y| \rightarrow 0.$$

где $y := (\varphi, 1 - r)$. Переписываем в переменных $\xi = y\varepsilon^{-1}$:

$$\psi_0^{(2)}(\varepsilon\xi) + \varepsilon\kappa\psi_0^{(1)}(\varepsilon\xi) = \Phi_2\varepsilon\xi_1 + \varepsilon\kappa\Phi_1 + O(\varepsilon^2|\xi|^2).$$

Следовательно, в соответствии с методом согласования асимптотических разложений, внутреннее разложение следует искать в виде

$$V(\xi, \varepsilon) = \varepsilon V_1(\xi) + \dots, \quad (5)$$

где

$$V_1(\xi) \sim \Phi_2\xi_1 + \kappa\Phi_1, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Подставляя (5) в исходную краевую задачу (1) и переходя к переменной ξ , получаем краевую задачу для $V_1(\xi)$:

$$\Delta V_1 = 0, \xi_2 > 0, \quad V_1 = 0, \xi \in \gamma, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \xi_2} = 0, \xi \in \Gamma, \quad (7)$$

где $\gamma := \{\xi | \xi_2 = 0, \xi_1 \in (a, b)\}$, $\Gamma := \{\xi_2 = 0\} \setminus \gamma$.

Для задачи (7) существует модельное решение

$$\Upsilon(\xi) = \operatorname{Re}\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

где $z := \xi_1 + i\xi_2$, i — мнимая единица, имеющее асимптотику

$$\Upsilon(\xi) = \xi_1 - \frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)^2}{8} \frac{\xi_1}{|\xi|^2} + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Тогда можно подобрать константу κ так, чтобы

$$V_1(\xi) = \Phi_2 \cdot \Upsilon(\xi)$$

являлось решением задачи (7) и имело асимптотику

$$V_1(\xi) = \Phi_2\xi_1 - \Phi_2 \frac{a+b}{2} - \Phi_2 \frac{(b-a)^2}{8} \frac{\xi_1}{|\xi|^2} + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

которая уточняет асимптотику (6). А именно, κ следует выбрать равным

$$\kappa = -\frac{(a+b)\Phi_2}{2\Phi_1}.$$

Переписывая $\varepsilon V_1(\xi)$ в переменных $y = \varepsilon \xi$, получаем:

$$\varepsilon V_1(\xi) = \Phi_2 y_2 - \varepsilon \Phi_2 \frac{a+b}{2} - \varepsilon^2 \Phi_2 \frac{(b-a)^2}{8} \frac{y_1}{|y|^2} + O(\varepsilon^3 |y|^{-2}).$$

В соответствии с (5) и методом согласования асимптотических разложений, собственную функцию краевой задачи (1) вне окрестности γ_ε , следует искать в виде

$$\psi^\varepsilon(x) = \psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon^2 \psi_{2,0}(x) + \dots, \quad (8)$$

$$\psi_{2,0}(x(y)) \sim -\Phi_2 \frac{(b-a)^2}{8} \frac{y_1}{|y|^2}, \quad y \rightarrow 0. \quad (9)$$

По аналогии с (9) собственное значение ищем в виде

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_{2,0} + \dots \quad (10)$$

Подставляя (9) и (11) в (1), получаем краевую задачу для $\psi_{2,0}$:

$$(\Delta + \lambda_0) \psi_{2,0} = \lambda_{2,0} \psi_0^{(2)}, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi_{2,0}}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \{x_0\}. \quad (11)$$

Показано, что существуют функции $E_0(x)$ и $E_1(x)$, имеющие асимптотики

$$E_0(x(y)) = \ln |y| + O(1), \quad E_1(x(y)) = \frac{y_1}{|y|^2} + O(1), \quad |y| \rightarrow 0,$$

и являющиеся решениями краевых задач

$$(\Delta + \lambda_0) E_0 = \pi \Phi_1 \psi_0^{(1)}, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial E_0}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \{x_0\},$$

$$(\Delta + \lambda_0) E_1 = -\pi \widetilde{\Phi}_2 \psi_0^{(1)} - \pi \Phi_2 \psi_0^{(2)}, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial E_0}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \{x_0\},$$

где $\widetilde{\Phi}_2 = \frac{\partial \psi_0^{(1)}}{\partial \varphi}(x_0)$. Тогда, положив

$$\psi_{2,0}(x) = -\Phi_2 \frac{(b-a)^2}{8} \left(E_1(x) + \frac{\widetilde{\Phi}_2}{\Phi_1} E_0(x) \right),$$

получим решение задачи (11) имеющее асимптотику (9) при

$$\lambda_{2,0} = \pi \Phi_2^2 \frac{(b-a)^2}{8}. \quad (12)$$

Так как

$$\Phi_2 = m \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(1 - \frac{m^2}{\lambda_0}\right)^{-1}$$

в силу (3), то из (12) вытекает равенство (4).

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00259-а). Второй автор частично поддержан РФФИ (проект № 12-01-00445-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [2] Гадылшин Р. Р. Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа. // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 3–32.
- [3] Бикметов А. Р., Гадылшин Р.Р. Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n -мерной области. // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 2. С. 28–64.
- [4] Гадылшин Р. Р. Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий. // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, БНЦ УрО АН СССР. 1988. С. 4–16.
- [5] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

УДК 519.8

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ В
МИЛЛИОННОМ ГОРОДЕ**

**А.Ф. Шайхнурова¹, Г. Р. Карамутдинова¹, И. М.
Губайдуллин^{1,2}БГУ¹, Институт нефтехимии и катализа²,
г. Уфа, Россия**

Транспортные потоки городов являются одним из важных факторов, который влияет на социально-экономическое развитие страны. Совершенствование транспортной сети повышает качество жизни горожан, увеличивает рост занятости, укрепляет бюджет города, развивает бизнес и привлекает инвестиции.

На сегодняшний день в России состояние дорожно-транспортной системы оставляет желать лучшего. Число транспорта в городах неизбежно увеличивается. Это приводит к возникновению пробок, затруднительному передвижению, ухудшению условий для нормального развития города.

Для определения потоков и загрузки элементов сети пользуются математическими моделями. Основной проблемой в большинстве данных моделей является необходимость информации о передвигающихся по городу индивидуумах. Это информация представляется в виде матрицы корреспонденций.

Матрица корреспонденций является важнейшей информацией, характеризующей распределение транспортных потоков по улично-дорожной сети, и широко используется в транспортном планировании и проектировании организации дорожного движения. Элементы матрицы определяют объем потока между каждой парой «точек». «Точки» – это условные зоны, которые получаются путем деления города на сегменты.

Целью работы является моделирование транспортных потоков с использованием матрицы корреспонденций для транспортной сети миллионного города.

В настоящее время разработано много моделей, позволяющих учесть особенности формирования транспортных потоков. В данной работе рассматривается энтропийная модель, позволяющая рассчитать матрицу корреспонденций.

Примером может служить модель:

$$\min_{T_{ij}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M T_{ij} c_{ij} + \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \ln T_{ij} \right) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j, \quad \forall i = \overline{1, N} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^M T_{ij} = Q_i, \quad \forall j = \overline{1, M} \quad (3)$$

$$T_{ij} \geq 0, \quad \forall i = \overline{1, N}, \forall j = \overline{1, M} \quad (4)$$

Здесь T_{ij} – корреспонденция из зоны i в зону j ,

β – средневзвешенная стоимость проезда,

c_{ij} – стоимость проезда единицы потока из зоны i в зону j ,

Q_i – количество поездок из зоны i ,

D_j – количество поездок в зоне j .

Условие (2) означает, что суммарный поток (сумма числа поездок), который выехал из всех зон $i = 1, \dots, N$ в зону j должен быть равен потоку, который прибыл в зону j . Условие (3) означает, что суммарный поток, который выехал обратно из всех зон $j = 1, \dots, M$ в зону i должен совпадать с числом прибывших в зону i . Суммарное количество выехавших должно быть равно суммарному количеству прибывших, то есть должно выполняться условие

$$\sum_i^N Q_i = \sum_j^M D_j.$$

Потоки не должны быть отрицательными.

Формулу (1) можно преобразовать к следующему виду (по нему рассчитывается матрица корреспонденций):

$$\max_{T_{ij}} \sum_i^N \sum_j^M T_{ij} \ln \frac{T_{ij}^0}{T_{ij}} \quad (5)$$

$$T_{ij}^0 = \exp^{-\frac{c_{ij}}{\beta}} \quad (6)$$

где T_{ij}^0 – это распределение корреспонденции, которое образуется в системе при отсутствии ограничений.

Для расчета матрицы корреспонденций энтропийным методом необходимо определить матрицу отправления, матрицу прибытия, матрицу затрат.

Для этого нужно знать условные зоны (сегменты), из которых люди поедут (на работу, учебу), и условные зоны, в которые они будут приезжать (работа, учебные заведения, организация).

Территория города делится на условные зоны с определенным шагом. Для этого используется электронная карта города. Каждый получившийся сегмент города будет являться и «точкой» отправления и «точкой» прибытия. Следовательно, матрица отправления и матрица прибытия будут иметь одинаковую размерность.

Сегменты, где никто не живет и не работает, будут равны нулю.

Для определения матрицы отправления необходимо при помощи карты города подсчитать «вручную» в каждой зоне число жилых домов разной этажности.

Количество жилых домов разной этажности, находящиеся в сегменте $(i; j)$, умножается на соответствующее число проживающих людей в доме данной этажности и затем суммируется.

Полученное при помощи такого метода количество жителей сравнивается с известным количеством постоянного проживающего населения города для оценки погрешности расчетов.

На территории города, кроме жителей города, работают (учатся) люди с близлежащих поселков (сел, деревень). Поэтому учитывается поток из сельских населенных пунктов.

Для нахождения матрицы прибытия определяются места притяжения населения и их емкость: медицинские учреждения, учебные заведения, предприятия и другие.

В качестве матрицы затрат на передвижение из зоны i в зону j берутся временные затраты.

Матрица временных затрат вычисляется по следующей формуле:

$$V_{ij} = d_{ij} * s_{ij} \quad (7)$$

где s_{ij} – скорость передвижения индивидуума в транспортной сети из условной зоны i в зону j , d_{ij} – расстояние от сегмента i до сегмента j .

Таким образом, зная матрицы отправления Q , прибытия D и временных затрат, можно построить матрицу корреспонденций с помощью энтропийной модели. А на основе матрицы корреспонденций можно:

- составить наиболее точное расписание движения общественного транспорта;
- определить загрузки элементов улично-дорожной сети;
- оценить количество перевозимых пассажиров по типам пассажиров, по видам транспорта, маршрутам и направлениям;
- оценить интенсивность пассажиропотоков между различными пунктами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алиев А. С. /и др./ Моделирование транспортных потоков в крупном городе с применением к Московской агломерации // Автоматика и Телемеханика. – 2005. – №11. – С. 113 - 125.

- [2] *Васильева Е. В., Игудин Р.В., Лившиц В.Н.* Оптимизация планирования и управления транспортными системами. – М: Транспорт, 1987.
- [3] *Васильева Е. В., Левит Б. Ю., Лившиц В. Н.* Нелинейные транспортные задачи на сетях. – М: Финансы и статистика, 1981.
- [4] *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М: Наука, 1978.

УДК 517.929.8:517.984

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА В КРУГЕ СО СМЕНОЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Шишкина Е. А. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы)

Репьевский С. В. (Челябинск, ЧелГУ)

Гадыльшин Р. Р. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы)

Введение

Пусть Ω – круг единичного радиуса с центром в начале координат, $\Gamma := \partial\Omega$, x_0 – точка с декартовыми координатами $(1, 0)$, (r, φ) – полярные координаты. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma : \varepsilon a < \varphi < \varepsilon b\}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$.

В работе методом согласования асимптотических разложений [1], [2], [3] получены асимптотические разложения по малому параметру ε собственных значений λ^ε следующей краевой задачи:

$$-\Delta\psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon\psi^\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \psi^\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon. \quad (1)$$

§ 1. Предварительные сведения и формулировка результатов

Из [4] следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственные значения краевой задачи (1) сходятся к собственным значениям краевой задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_0 = 0, \quad x \in \Gamma \quad (2)$$

с учетом совокупной кратности.

В свою очередь, хорошо известно, что задача (2) имеет либо простые собственные значения, совпадающие с квадратами нулей

функции Бесселя нулевого порядка $\mathcal{J}_0(z)$, либо двукратные собственные значения, совпадающие с квадратами нулей функции Бесселя m -го порядка $\mathcal{J}_m(z)$, $m \geq 1$. С учетом равенства

$$\int_0^1 \mathcal{J}_\nu^2(\alpha r) r dr = \frac{\alpha [\mathcal{J}'_\nu(\alpha)]^2 - \alpha \mathcal{J}_\nu(\alpha) \mathcal{J}''_\nu(\alpha) - \mathcal{J}_\nu(\alpha) \mathcal{J}'_\nu(\alpha)}{2\alpha},$$

(см., например, [5, §4]), нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция задачи (2), соответствующая простому собственному значению λ_0 , имеет вид

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\mathcal{J}'_0(\sqrt{\lambda_0}) \right)^{-1} \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0}r), \quad (3)$$

а ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, соответствующие двукратному собственному значению λ_0 , имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\mathcal{J}'_m(\sqrt{\lambda_0}) \right)^{-1} \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_0}r) \cos m\varphi, \\ \psi_0^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\mathcal{J}'_m(\sqrt{\lambda_0}) \right)^{-1} \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_0}r) \sin m\varphi. \end{aligned}$$

Для простых собственных значений задачи (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Собственное значение λ^ε краевой задачи (1), сходящееся к простому собственному значению λ_0 краевой задачи (2), имеет асимптотику*

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \lambda_{i+2,k},$$

$\varepsilon \partial e$

$$\begin{aligned} \lambda_{2,0} &= -\frac{\lambda_0(b-a)^2}{8}, \\ \lambda_{2+2k,k} &= \frac{(-\lambda_0)^{k+1} (b-a)^{2(k+1)}}{2^{4k+3}}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Из [4] известно, что если простое собственное значение λ^ε краевой задачи (1) сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к простому собственному значению λ_0 краевой задачи (2), то и соответствующая λ^ε собственная функция ψ^ε сходится к ψ_0 в пространстве $L_2(\Omega)$. В случае же двукратного собственного значения краевой задачи (2), для сходящихся к λ_0 собственных значений краевой задачи (1) возможны следующие ситуации: либо это два простых собственных значения, либо это одно двукратное собственное значение. Причем, даже в случае когда к λ_0 сходятся два простых собственных значения $\lambda^{\varepsilon,(1)}$ и $\lambda^{\varepsilon,(2)}$ краевой задачи (1), нельзя утверждать, что соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции $\psi^{\varepsilon,(1)}$, $\psi^{\varepsilon,(2)}$ имеют предел. В [1] было показано, что из любой последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_m} \rightarrow 0$ такую, что на ней имеет место сходимость $\psi^{\varepsilon,(n)} \rightarrow \psi_0^{(n)}$ в $L_2(\Omega)$, где $\psi_0^{(n)}$ – ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции краевой задачи (2), соответствующие λ_0 . Однако, эти пределы, вообще говоря, могут меняться в зависимости от выбора подпоследовательности $\varepsilon_{k_m} \rightarrow 0$. Другими словами была доказана сходимость проектора P_ε , соответствующего паре $\lambda^{\varepsilon,(1)}$, $\lambda^{\varepsilon,(2)}$, к проектору P_0 , соответствующему λ_0 , по норме в $L_2(\Omega)$.

Следующее утверждение даёт однозначный ответ о кратности собственных значений краевой задачи (1).

Теорема 6. Пусть λ_0 – двукратное собственное значение предельной краевой задачи (2), являющееся квадратом нуля функции \mathcal{J}_m .

Тогда собственные значения $\lambda^{\varepsilon,(1)}$, $\lambda^{\varepsilon,(2)}$ возмущенной краевой задачи (1), сходящиеся к λ_0 , являются простыми и имеют

асимптотики

$$\begin{aligned}\lambda^{\varepsilon,(1)} &= \lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \lambda_{i+2,k}^{(1)}, \\ \lambda^{\varepsilon,(2)} &= \lambda_0 + \varepsilon^4 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{4}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \lambda_{i+4,k}^{(2)}\end{aligned}$$

$\varepsilon \partial e$

$$\begin{aligned}\lambda_{2,0}^{(1)} &= -\frac{\lambda_0(b-a)^2}{8}, \\ \lambda_{2+2k,k}^{(1)} &= \frac{(-\lambda_0)^{k+1} (b-a)^{2(k+1)}}{2^{4k+3}}, \quad k \geq 1, \\ \lambda_{4,0}^{(2)} &= -\frac{m^2}{64} \lambda_0 (b-a)^2 (5a^2 + 6ab + 5b^2), \\ \lambda_{4+2k,k}^{(2)} &= -\frac{m^2}{4} \lambda_0 \left(\frac{(b-a)^2 (5a^2 + 6ab + 5b^2)}{16} \right)^{k+1} \left(\frac{\lambda_0}{8} - \frac{\lambda_0^2}{16} \right)^k\end{aligned}$$

при $k \geq 1$.

Соответствующие собственные функции $\psi^{\varepsilon,(1)}, \psi^{\varepsilon,(2)}$ сходятся к $\psi_0^{(1)}, \psi_0^{(2)}$ в $L_2(\Omega)$.

§ 2. Построение первых членов асимптотик

Так $\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \neq 0$ на $\gamma_\varepsilon \ni x_0$, то в соответствии с методом согласования асимптотических разложений в окрестности γ_ε вводится *внутреннее* разложение V следующим образом.

Обозначим $\Phi = -\frac{\partial \psi_0}{\partial r}(x_0)$. Тогда при $x \rightarrow x_0$ имеем:

$$\psi_0(x) = \Phi y_2 + O(|y|^2), \quad y := (\varphi, 1-r) \rightarrow 0.$$

Переписывая правую часть этого равенства в переменных $\xi = y\varepsilon^{-1}$, получаем:

$$\psi_0(\varepsilon \xi) = \varepsilon \Phi \xi_2 + O(\varepsilon^2 |\xi|^2).$$

Следовательно, внутреннее разложение имеет вид

$$V(\xi, \varepsilon) = \varepsilon V_1(\xi) + \dots, \quad (5)$$

$$V_1(\xi) \sim \Phi \xi_2, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Подставляя (5) в исходную краевую задачу (1) и переходя к переменной ξ , получаем краевую задачу для V_1 :

$$\Delta V_1 = 0, \xi_2 > 0, \quad V_1 = 0, \xi \in \Gamma, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \xi_2} = 0, \xi \in \gamma, \quad (7)$$

где $\gamma := \{\xi : \xi_2 = 0, \xi_1 \in (a, b)\}$, $\Gamma := \{\xi_2 = 0\} \setminus \gamma$.

Пусть $z := \xi_1 + i\xi_2$, где i — мнимая единица. Тогда функция

$$V_1(\xi) = \Phi \cdot \text{Im} \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

является решением краевой задачи (7) и имеет асимптотику

$$V_1(\xi) = \Phi \xi_2 + \Phi \frac{(b-a)^2}{8} \frac{\xi_2}{|\xi|^2} + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

которая уточняет асимптотику (6).

Переписывая $\varepsilon V_1(\xi)$ в переменных $y = \varepsilon \xi$, получаем:

$$\varepsilon V_1(\xi) = \Phi y_2 + \varepsilon^2 \Phi \frac{(b-a)^2}{8} \frac{y_2}{|y|^2} + O(\varepsilon^3 |y|^{-2}). \quad (8)$$

В соответствии с (5), (8) и методом согласования асимптотических разложений собственную функцию краевой задачи (1) вне окрестности γ_ε , следует искать в виде

$$\psi^\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \varepsilon^2 \psi_{2,0}(x) + \dots, \quad (9)$$

$$\psi_{2,0}(x(y)) \sim \Phi \frac{(b-a)^2}{8} \frac{y_2}{|y|^2}, \quad y \rightarrow 0. \quad (10)$$

По аналогии с (9) собственное значение λ^ε ищем в виде

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_{2,0} + \dots \quad (11)$$

Подставляя (9) и (11) в (1), получаем краевую задачу для $\psi_{2,0}$:

$$(\Delta + \lambda_0)\psi_{2,0} = \lambda_{2,0}\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_{2,0} = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \{x_0\}.$$

Из условия разрешимости краевой задачи (9), (10) получаем, что

$$\lambda_{2,0} = -\pi\Phi^2 \frac{(b-a)^2}{8} \quad (12)$$

Так как

$$\Phi = -\frac{\partial\psi_0}{\partial r}(x_0) = -\sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}}$$

в силу (3), то из (12) вытекает равенство (4).

Работа первого и третьего авторов выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00445-а). Второй автор частично поддержан РФФИ (проект № 12-01-00259-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [2] Гадылшин Р. Р. Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа. // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 3–32.
- [3] Бикметов А. Р., Гадылшин Р.Р. Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n -мерной области. // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 2. С. 28–64.
- [4] Гадылшин Р. Р. Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий. // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, БНЦ УрО АН СССР. 1988. С. 4–16.
- [5] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

УДК 517.9

ЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Воронова Ю. Г. (Уфа, УГАТУ)

Введение

Рассматривается система уравнений вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U + a \frac{\partial}{\partial x} U + b \frac{\partial}{\partial y} U + cU = 0, \quad (1)$$

где a , b и c —постоянные матрицы второго порядка, U —столбец неизвестных $(U^1(x, y), U^2(x, y))^T$.

Получен общий вид обобщенных инвариантов Лапласа для линейных систем (1). Описаны системы уравнений (1), для которых обобщенные инварианты Лапласа есть нулевые матрицы и для них построено общее решение. Также проведена классификация систем уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами, у которых инвариант H_1 имеет ранг 2, а обобщенный инвариант Лапласа $X_2 = 0$.

§ 1. Классификация систем уравнений второго порядка

Мы предполагаем, что для системы уравнений (1) выполнены условия существования и единственности обобщенных инвариантов Лапласа [1]–[3]. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть инварианты Лапласа H_1, H_2, \dots, H_k уравнения (1)–невырожденные матрицы, а $\text{Rang } H_{k+1} = 1$. Тогда обобщенный инвариант порядка n вычисляется по формуле*

$$X_n = (\alpha, \beta)^{n-k-1} X_{k+1}, \quad n = k+1, k+2, \dots \quad (2)$$

здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $H_{k+1} = \alpha^T \cdot \beta$.

Зная решение системы уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U_k + a_k \frac{\partial}{\partial x} U_k + b \frac{\partial}{\partial y} U_k + c_k U_k = 0,$$

полученной из (1) преобразованиями Лапласа, согласно формулам

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\right) U_i &= U_{i+1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) U_{i+1} = H_{i+1} U_i, \\ U_0 &= U, \quad a_0 = a, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

мы можем построить и решение системы (1). Поэтому будем предполагать, что у исходной системы уравнений (1) главный инвариант H_1 – вырожденная матрица. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 2. *Пусть для системы уравнений (1) главный инвариант H_1 есть вырожденная матрица и $X_n = 0$. Тогда матрицы a , b и c имеют вид:*

$$a = \lambda E + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} (\beta_1 \ \beta_2), \quad b = \mu E + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (q_1 \ q_2),$$

$$c = \lambda \mu E + \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (q_1 \ q_2) + \mu \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} (\beta_1 \ \beta_2) + ((q, p) - 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (\beta_1 \ \beta_2),$$

где λ , μ – произвольные постоянные и выполнены условия:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0, \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0. \end{cases}$$

При этом $X_2 = 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и обобщенный инвариант Лапласа $Y_m = 0$. Тогда либо при условии $(p, q) = 1$ имеем $K_1 = 0$, либо при $(p, q) \neq 1$ имеем $Y_2 = K_2 K_1 = 0$.*

§ 2. Построение общего решения систем уравнений второго порядка

В этом пункте рассматриваются системы уравнений (1), для которых $\text{Rang } H_1 = 1$, а так же обобщенные инварианты Лапласа $X_2 = 0$ и $K_1 = 0$. Для таких систем уравнений можно построить общее решение. Систему (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) U = 0.$$

Обозначим $\left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) U = V$, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) V = 0$$

или

$$\begin{cases} V_y^1 + \lambda V^1 + p_1(\beta_1 V^1 + \beta_2 V^2) = 0, \\ V_y^2 + \lambda V^2 + p_2(\beta_1 V^1 + \beta_2 V^2) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$. Обозначим $\beta_1 V^1 + \beta_2 V^2 = S$. Теперь умножим первое уравнение системы (3) на β_1 , второе уравнение на β_2 и сложим вместе. Получаем уравнение:

$$S_y + \lambda S + (p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2) S = 0.$$

Следовательно,

$$S = c(x) \exp(-(\lambda + p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2)y).$$

Тогда второе уравнение системы (3) запишется в виде:

$$V_y^2 + \lambda V^2 + p_2 c(x) \exp(-(\lambda + p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2)y) = 0.$$

Решая последнее уравнение методом вариации произвольной постоянной, находим V^2 :

$$V^2 = f(x) \exp(-\lambda y) + c(x) \frac{p_2}{p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2} \exp(-(\lambda + p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2)y)$$

и, следовательно, V^1 вычисляется по формуле:

$$V^1 = c(x) \exp(-(\lambda + p_1\beta_1 + p_2\beta_2)y) \frac{p_1}{p_1\beta_1 + p_2\beta_2} - \frac{\beta_2}{\beta_1} f(x) \exp(-\lambda y).$$

Теперь рассмотрим систему уравнений $\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)U = V$. Для построения решения запишем ее в следующем виде

$$\begin{cases} U_x^1 + \mu U^1 + \alpha_1(q_1 U^1 + q_2 U^2) = V^1, \\ U_x^2 + \mu U^2 + \alpha_2(q_1 U^1 + q_2 U^2) = V^2. \end{cases} \quad (4)$$

Полагая $R = q_1 U^1 + q_2 U^2$, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} + \mu R + (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)R &= \frac{\beta_1 q_2 - \beta_2 q_1}{\beta_1} f(x) \exp(-\lambda y) + \\ &+ \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} c(x) \exp(-(\lambda + p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2)y). \end{aligned}$$

Решение последнего уравнения определяется по формуле:

$$\begin{aligned} R &= \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} e^{-(\lambda + p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2)y - (\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} \times \\ &\times \int c(x) e^{(\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} dx + \kappa(y) e^{-(\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} + \\ &+ \frac{\beta_1 q_2 - \beta_2 q_1}{\beta_1} e^{-\lambda y - (\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} \int f(x) e^{(\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} dx. \end{aligned}$$

Теперь, нетрудно показать, что U^2 имеет следующий вид

$$\begin{aligned} U^2 &= z(y) e^{-\mu x} + e^{-\mu x} \int (V^2 - \alpha_2 R) e^{\mu x} dx = \frac{1}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} \times \\ &\times e^{-(\lambda + p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2)y - \mu x} \left[p_2 \int c(x) e^{\mu x} dx - \alpha_2 (q_1 p_1 + q_2 p_2) \times \right. \\ &\times \left. \int \left(e^{-(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} \int c(t) e^{(\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)t} dt \right) dx \right] + \\ &+ e^{-\lambda y - \mu x} \left[\int f(x) e^{\mu x} dx - \left(q_2 \alpha_2 - \frac{\beta_2 q_1 \alpha_2}{\beta_1} \right) \times \right. \\ &\times \left. \int \left(e^{-(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} \int f(t) e^{(\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)t} dt \right) dx \right] + \\ &+ \frac{\alpha_2}{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2} \kappa(y) e^{-(\mu + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)x} + z(y) e^{-\mu x}, \end{aligned}$$

а U^1 :

$$U^1 = \frac{1}{q_1}R - \frac{q_2}{q_1}e^{-\mu x} \int (V^2 - \alpha_2 R)e^{\mu x} dx - \frac{q_2}{q_1}z(y)e^{-\mu x},$$

где $c(x)$, $f(x)$, $z(y)$, $\kappa(y)$ —произвольные функции.

§ 3. Системы уравнений третьего порядка с инвариантами ранга два

Рассматривается система уравнений вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U + a \frac{\partial}{\partial x} U + b \frac{\partial}{\partial y} U + c U = 0, \quad (5)$$

где a , b и c —постоянные матрицы третьего порядка, U —столбец неизвестных $(U^1(x, y), U^2(x, y), U^3(x, y))^T$.

С помощью замены $U = TV$, где T —постоянная невырожденная матрица, система уравнений (5) приводится к следующей системе

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V + A \frac{\partial}{\partial x} V + B \frac{\partial}{\partial y} V + C V = 0, \quad (6)$$

здесь $A = T^{-1}aT$, $B = T^{-1}bT$, $C = T^{-1}cT$.

Пусть матрица $H_1 = T^{-1}h_1T$ имеет ранг 2. Выберем матрицу T так, чтобы H_1 принимала жорданову форму, то есть возможны 4 случая:

$$H_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0, \quad (7)$$

или

$$H_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0, \quad H_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0,$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. Пусть для системы уравнений (6) главный инвариант H_1 вычисляется по формуле (7), а обобщенный инвариант $X_2 = 0$. Тогда матрицы A , B и C определяются следующим образом:

$$A = \lambda E + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{11} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \mu E + \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{11} & q_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \lambda\mu E + \lambda \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{11} & q_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{11} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{11} & q_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{11} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где

$$q_{21}p_{21} = \lambda_1 + q_{12}p_{12}, \quad \lambda_2 = -\lambda_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гурьева А.М., Жибер А.В. Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды. // ТМФ. 2004. Т. 138. № 3. С. 401–421.
- [2] Жибер А.В., Соколов В.В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
- [3] Жибер А.В., Соколов В. В., Старцев С.Я. Нелинейные гиперболические системы уравнений лиувиллевского типа. // Москва, МГУ. Международная конференция "Тихонов и современная математика". Тезисы докладов секции функциональный анализ и дифференциальные уравнения. 2006. С. 305–306.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

**VI Международная школа-конференция для студентов,
аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная
математика и ее приложения в естествознании»**

г. Уфа, 12–16 октября 2014 г.

Сборник трудов

Том 1. Математика

Редактор А. Ф. Файзуллина
Корректор А. И. Николаева

*Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать ??????. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. ?????. Уч.-изд. л. ????.

Тираж 50 экз. Изд. № ?. Заказ ??.

Редакционно-издательский центр

*Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на многостраничном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*