

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВПО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

VI МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ  
ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

Уфа, 9–13 октября 2013 г.

СБОРНИК ТРУДОВ. ТОМ I. МАТЕМАТИКА

Научные статьи

Уфа  
РИЦ БашГУ  
2013

УДК 51+ 54  
ББК 22.1+24  
М11

Сборник издан при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-06832-мол\_г) и за счет внебюджетных средств БашГУ.

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук, проф. Б. Н. Хабибуллин (отв. редактор);  
канд. физ.-мат. наук, асс. Ф. Б. Хабибуллин

М11 VI Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 9–13 октября 2013 г.): Сборник трудов. Том 1. Математика. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. — 124 стр.

В сборнике трудов помещены научные статьи участников VI Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» 2013 г. Научные статьи воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51+54  
ББК 22.1+24

©БашГУ, 2013

УДК 519.688

## АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

**Аралбаева А. Р. (Стерлитамак, СФ БашГУ)**

В химической теории для оценки эффективности проведения реакции используют скорость реакции. Скорость реакции по некоторому компоненту выражается изменением количества этого компонента в единицу времени.[1]

Если химическая реакция протекает в  $m$  стадий, в которых участвует  $n$  веществ  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , то схема реакций имеет вид:

$$b_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \cdot A_k \rightarrow \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \cdot A_k, \quad i = 1 \dots m, \quad (1)$$

где  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}$  – стехиометрические коэффициенты. Если  $C_k$  – концентрация вещества  $A_k$  ( $k = 1 \dots n$ ), то закон изменения во времени функций  $C_1(t) \dots C_n(t)$  записывают в виде дифференциальных уравнений:

$$\frac{dC_k}{dt} = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \cdot \omega_i, \quad \gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik}, \quad k = 1 \dots n. \quad (2)$$

Здесь  $\omega_i$  – скорость  $i$ -й реакции, определяемая по закону действующих масс:

$$\omega_i = k_i \prod_{k=1}^n C_k^{\alpha_{ik}}, \quad i = 1 \dots m, \quad (3)$$

где  $k_i$  – константа скорости реакции. Зависимость константы скорости реакции от температуры определяется по уравнению Аррениуса:

$$k = k_0 \cdot e^{-\frac{E}{RT}}, \quad (4)$$

где  $k_0$  - предэкспоненциальный множитель, имеющий сложную физическую природу,  $E$  – энергия активации (та минимальная энергия, при которой элементарный акт реакции становится возможным),  $T$  – температура протекания реакции,  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Уравнения (2)-(4) образуют систему уравнений кинетической модели схемы реакций (1). Решая систему дифференциальных уравнений с использованием численных методов, например Рунге-Кутта 4 порядка, получаем массив данных большой размерности.

Для работы со статистическими данными используются статистические методы, один из них – множественный регрессионный анализ – статистический метод исследования влияния нескольких независимых переменных на зависимую переменную. [2]

Отбор факторов, включаемых в регрессию, является одним из важнейших этапов практического использования методов регрессии. Существуют разные подходы к отбору факторов на основе показателей корреляции – отсев факторов из полного его набора (метод исключения), дополнительное введение фактора и исключение ранее введенного фактора. Ввиду специфики химической теории более приемлемо использование метода исключения. Для выбора исключаемого фактора используется корреляционный анализ – метод обработки статистических данных, с помощью которого измеряется теснота связи между двумя или более переменными.

Коэффициенты интеркорреляции  $r_{C_1C_2}$  (т.е. корреляции между объясняющими переменными  $C_1$  и  $C_2$ ) позволяют исключать из модели дублирующие факторы.

$$r_{C_1C_2} = \frac{\sum(C_{1i} - \bar{C}_1)(C_{2i} - \bar{C}_2)}{\sqrt{(C_{1i} - \bar{C}_1)^2(C_{2i} - \bar{C}_2)^2}} \quad (5)$$

Считается, что две переменные явно коллинеарны, т.е. находятся в явной линейной зависимости, если коэффициент Пирсона

(5) больше 0,7. [3]

Построение регрессионного уравнения начинается с отбора факторов и выбора вида уравнения регрессии: линейный, степенной, экспоненциальный, гиперболический. Все виды путем преобразований сводятся к линейному типу:  $Y = a_0 + a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_2 + \dots + a_n \cdot C_n$ , где для нахождения вида уравнения коэффициенты вычисляются по формуле:  $A^T = (C \cdot C^T)^{-1} C \cdot Y^T$ .

Тесноту линейной корреляционной связи между одной случайной величиной и некоторым множеством случайных величин характеризует множественный коэффициент корреляции. [4]

Квадрат множественного коэффициента корреляции между зависимой переменной и объясняющими переменными является коэффициентом детерминации и рассчитывается по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2} \quad (6)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия регрессии, а  $\sigma_Y^2$  – дисперсия результирующего признака.

Показатель детерминации фиксирует долю объяснённой вариации результирующего признака за счет рассматриваемых в регрессии факторов.

В представляемой программе реализованы функции подсчета коэффициента корреляции, коэффициентов регрессии, детерминации и аппроксимации, нахождение корреляционной матрицы, транспортирование матрицы, умножение матриц, нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

Применяя регрессионные методы и корреляционный анализ по созданному алгоритму (рис.1) можно построить модель механизма реакций, выявляющий тесноту связи веществ.

Результирующими веществами упрощенного механизма является объединение веществ из всех подмножеств каждого целевого вещества. Остальные вещества на данный момент являются избыточными по отношению к целевым веществам, и могут быть без-

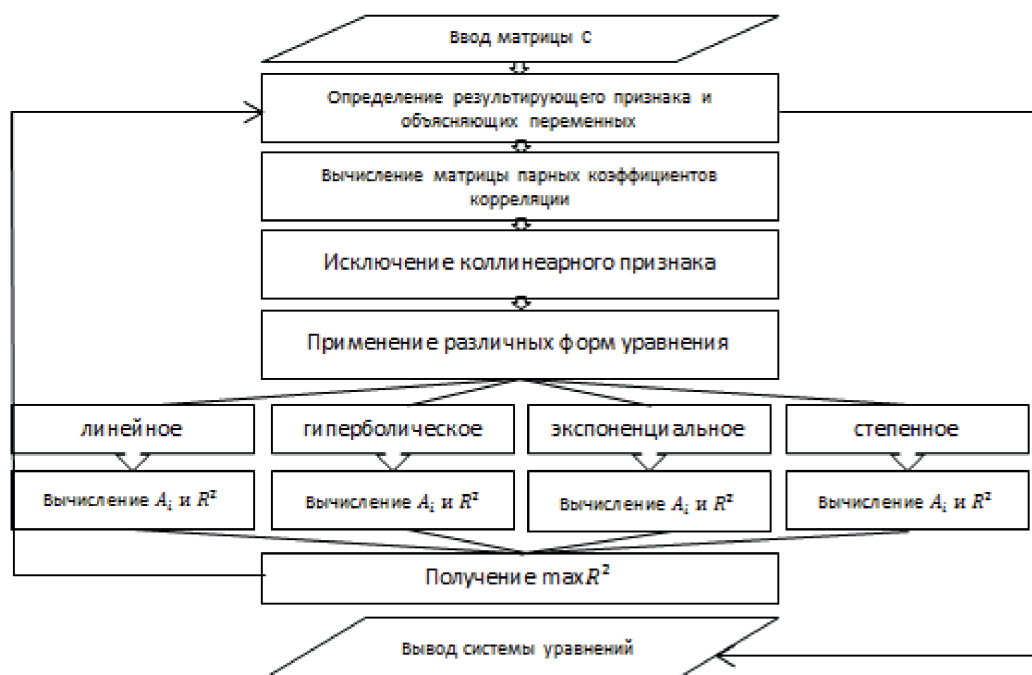


Рис. 1: Упрощенная блок-схема программы.

опасно удалены из списка продуктов химической реакции. Следовательно, все стадии, в которых потребляются избыточные вещества, могут быть удалены.

### **Погрешность расчетов по созданному алгоритму на примере реакции получения фталевого ангидрида**

Фталевый ангидрид является одним из важнейших видов сырья для производства пластификаторов, лакокрасочных материалов, красителей, лекарственных веществ, инсектицидов, ускорителей вулканизации каучука, присадок к смазочным маслам, добавок к реактивным топливам и др.

Химическая реакция получения фталевого ангидрида имеет

ВИД:



где  $A_1$  – исходное вещество – нафталин,  $A_2$  – нафтохинон,  $A_3$  – целевой продукт – фталевый ангидрид,  $A_4$  – углекислый газ,  $A_5$  – малеиновый ангидрид.

Система дифференциальных уравнений, описывающая кинетику реакции, имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dC_1}{dt} &= -k_1C_1 - k_3C_1 - k_4C_1 \\
 \frac{dC_2}{dt} &= k_1C_1 - k_2C_2 - k_5C_2 \\
 \frac{dC_3}{dt} &= k_3C_1 + k_5C_2 - k_6C_3 \\
 \frac{dC_4}{dt} &= k_2C_2 + k_4C_1 \\
 \frac{dC_5}{dt} &= k_6C_3
 \end{aligned} \right.
 \tag{8}$$

где  $C_i$  – концентрация  $i$ -го вещества ( $i = 1 \dots 5$ ) (мольная доля),  $k_i$  – константа скорости  $i$ -й реакции, принимается в соответствии с литературными данными:

$$k_i = e^{k_{i0} - \frac{B_i}{T}}.$$

Начальные концентрации веществ были приняты  $C_1(0) = 1$ ,  $C_i(0) = 0$ , ( $i = 2 \dots 5$ ), температура  $T = 800$ .

Решив СДУ (8), получена таблица изменения концентраций веществ во времени. Далее происходит экспорт массива данных в необходимый csv файл.

Используя полученный csv файл, в созданной по алгоритму программе, получили систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = -3.2 \cdot C_2^{7.11} \cdot C_3^{-2.324} \cdot C_5^{-4.94} \\ C_2 = 1.1 - 1.1 \cdot C_1 - 1.5 \cdot C_3 - 1.5 \cdot C_5 \\ C_3 = 0.7 - 0.7 \cdot C_1 - 0.7 \cdot C_2 - C_5 \\ C_4 = -0.1 + 0.1 \cdot C_1 + 0.5 \cdot C_2 + 0.5 \cdot C_5 \\ C_5 = 0.2 - 0.2 \cdot C_1 - C_2 + 2.1 \cdot C_4 \end{cases} \quad (9)$$

Сравнивая исходные значения концентраций с полученной формулой, получим среднюю ошибку аппроксимации равную 8.

Таким образом, созданный алгоритм, используя методы регрессионного анализа, исследует химическую реакцию, выявляя закономерности с достаточно малой погрешностью.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Царева З. М., Орлова Е. И. Теоретические основы химической технологии. Киев: 1986.
- [2] Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Множественная регрессия. М.: Диалектика, 2007.
- [3] Елисеева И. И. Учебник Эконометрика. М.: Финансы и статистика, 2007.
- [4] Крамер Г. Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд. М.: 1975.
- [5] Xia A. G., Michelangeli D. V., Makar P. A. Mechanism reduction for the formation of secondary organic aerosol for integration into a 3-dimensional regional air quality model:  $\alpha$ -pinene oxidation system // Atmospheric Chemistry and Physics, 9, 4341-4362, 2009.



УДК 514.747

## СИСТЕМЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВЕСОВ И ЭНТРОПИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

Байгускаров Т. Ю. (Уфа, БашГУ)<sup>1</sup>

### ВВЕДЕНИЕ

В данной работе результаты Хабибуллина Б.Н. [1] для систем весов, полученные для ограниченных областей на  $\mathbb{C}$ , с помощью *сферического расстояния*, обобщаются для неограниченных областей в  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Работа является прямым продолжением предыдущей публикации автора [2], в этой части введем базовые понятия, использовавшиеся в [1] и [2].

Пусть  $z = x + iy$ ,  $w = p + iq$  – комплексные числа, а  $S(z)$  и  $S(w)$  – их изображения на сфере Римана. Сферическим расстоянием  $\text{sp}(z, w)$  будем называть функцию, равную обыкновенному расстоянию в  $\mathbb{R}^3$  между  $S(z)$  и  $S(w)$

*Кругом в понятии сферического расстояния* (далее в этом тексте будет подразумеваться именно такое определение) с центром в точке  $z$  и радиусом  $d$  называется множество

$$D_{\text{sp}}(z, d) = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{sp}(z, w) < d\}$$

Через  $H(\Omega)$  обозначаем линейное пространство над полем  $\mathbb{C}$  всех голоморфных в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  функций  $f$ . Рассматриваются следующие классы из  $H(\Omega)$ .

Пусть  $p$  – функция, принимающая значения из расширенной вещественной оси  $[-\infty, +\infty]$ . Линейное пространство над  $\mathbb{C}$  всех функций  $f \in H(\Omega)$ , удовлетворяющих неравенству  $|f(z)| \leq C_f \exp p(z)$  для всех  $z \in \Omega$ , где  $C_f \geq 0$  – постоянная, обозначаем через  $H_p(\Omega)$ .

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00030

Через  $SH(\Omega)$  обозначаем конус всех субгармонических функций в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , включая в него и функцию  $u \equiv -\infty$  на  $\Omega$ ;  $SH^+(\Omega)$  — подконус всех положительных функций из  $SH(\Omega)$ .

Пусть  $\mathcal{P}$  — семейство функций из  $SH(\Omega)$ , не содержащее функцию  $\equiv -\infty$ , которое далее называем *системой весов на  $\Omega$* , а функции из  $\mathcal{P}$  — *весовыми*, или *весами*. Если система весов  $\mathcal{P}$  обладает свойством

(H $\uparrow$ ) для любых  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$  найдутся функция  $p \in \mathcal{P}$  и постоянная  $C$ , при которых  $\max\{p_1(z), p_2(z)\} \leq p(z) + C$  для всех  $z \in \Omega$ ,

то класс  $H_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega) \stackrel{def}{=} \bigcup_{p \in \mathcal{P}} H_p(\Omega)$  образует линейное пространство над  $\mathbb{C}$ . В частности, если  $\mathcal{P} = \{p\}$  — одна функция, то условие (H $\uparrow$ ) выполнено и  $H_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega) = H_p(\Omega)$ . Если  $p \in SH^+(\Omega)$ , то для системы весов  $\mathcal{P} = \{cp: c \in \mathbb{R}, 0 \leq c < 1\}$  выполнено условие (H $\uparrow$ ) и линейное пространство  $H_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega)$  обозначаем как  $H_p^1(\Omega)$ .

Если система весов  $\mathcal{P}$  обладает свойством

(A $\uparrow$ ) для любых  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$  найдутся функция  $p \in \mathcal{P}$  и постоянная  $C$ , при которых  $p_1(z) + p_2(z) \leq p(z) + C$  для всех  $z \in \Omega$ ,

то класс  $H_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega)$  обозначаем как  $A_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega)$ . Если вместе с (A $\uparrow$ ) одновременно выполнено (H $\uparrow$ ), то  $A_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega)$  — алгебра. Если  $p \in SH(\Omega)$  и система весов  $\mathcal{P}$  имеет вид

$$\{cp: c \in \mathbb{R}, 0 < c < +\infty\}, \quad (1)$$

то условие (A $\uparrow$ ) выполнено и класс  $A_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega)$  обозначаем как  $A_p^{\infty}(\Omega)$ . В частности, когда  $\mathcal{P} \subset SH^+(\Omega)$  и выполнено условие (A $\uparrow$ ), то имеет место и условие (H $\uparrow$ ), т. е. в таком случае  $A_{\mathcal{P}}^{\uparrow}(\Omega)$  — алгебра. Если  $p \in SH^+(\Omega)$  и система весов  $\mathcal{P}$  имеет вид (1), то условия (H $\uparrow$ ) и (A $\uparrow$ ) выполнены и  $A_p^{\infty}(\Omega)$  — алгебра.

## § 1. ЭНТРОПИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ И СЕМЕЙСТВА ПОДМНОЖЕСТВ

Мы пропускаем доказательства теорем, т.к. они содержатся в [2].

**Определение 1.** *Энтропией линейной связности непустого подмножества  $S$  в области  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$  в смысле сферического расстояния называем величину*

$$\ell_{\text{sp}}(S; D) = \sup_{z, w \in S} \inf_{l(z, w) \subset D} \frac{|l(z, w)|_{\text{sp}}}{\text{sp}_D(l(z, w), \partial D)},$$

где  $\inf_{l(z, w) \subset D}$  берется по всем спрямляемым дугам  $l(z, w) \subset D$ , соединяющим  $z$  с  $w$ .

**Теорема 1.** *Если  $\ell_{\text{sp}}(S; D) < l < +\infty$ , то для любой пары точек  $z, w \in S$  найдется конечная последовательность кругов  $D_{\text{sp}}(\zeta_k, d)$ ,  $k = 0, \dots, n+1$ , содержащихся в  $D$ , для которых одновременно выполнены два условия:*

- 1)  $z = \zeta_0$ ,  $w = \zeta_{n+1}$  и  $\text{sp}(\zeta_{k-1}, \zeta_k) \leq d/2$  при всех  $k = 1, \dots, n+1$ ;
- 2) имеет место оценка  $n \leq 2l$ .

**Теорема 2.** *Пусть  $D$  — область в  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $S \subset D$ . Тогда*

- 1)  $\ell_{\text{sp}}(S; D) = \ell_{\text{sp}}(\overline{S} \cap D; D)$ ;
- 2) если  $S \subset S' \subset D$ , то  $\ell_{\text{sp}}(S; D) \leq \ell_{\text{sp}}(S'; D)$ ;
- 3) если  $\Omega$  — область в  $\widehat{\mathbb{C}}$  и  $D \subset \Omega$ , то  $\ell_{\text{sp}}(S; D) \geq \ell_{\text{sp}}(S; \Omega)$ ;
- 4)  $S \in D$  тогда и только тогда, когда  $\ell_{\text{sp}}(S; D) < +\infty$ .

**Определение 2.** Назовем отрезком  $[z, w]_{\text{sp}}$  в смысле сферического расстояния кратчайшую (в смысле сферического расстояния) дугу, соединяющую  $z$  и  $w$ .

**Лемма 1.** Оценка длины отрезка  $[z, w]_{\text{sp}}$  в зависимости от  $\text{sp}(z, w)$ :

$$[z, w]_{\text{sp}} < 2 \text{sp}(z, w).$$

**Теорема 3.** Пусть  $S$  — подмножество области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  и

$$\ell_{\text{sp}}(S; \Omega) < l < +\infty.$$

Тогда

$$1) \ b_{\Omega}(S) = \sup\{d_{\Omega}(z) : z \in S\} \leq (\ell_{\text{sp}}(S; \Omega) + 1)d_{\Omega}(S);$$

2) для любой пары  $z, w \in S$  найдется соединяющая  $z$  с  $w$  спрямляемая дуга  $\tilde{l}(z, w) \subset \Omega$ , для которой выполнены неравенства

$$\frac{1}{2(l+1)} d_{\Omega}(S) \leq d_{\Omega}(\tilde{l}(z, w)) \leq (l+1)d_{\Omega}(S),$$

$$|\tilde{l}(z, w)| \leq (l+1)^2 d_{\Omega}(S);$$

3) существует квадратуемая в смысле сферического расстояния подобласть  $D \Subset \Omega$ , включающая в себя подмножество  $S$ , для которой одновременно справедливы оценки

$$\ell_{\text{sp}}(S, D) \leq 6(l+1)^3, \ell_{\text{sp}}(D, \Omega) \leq 14(l+1)^3.$$

## § 2. ЭНТРОПИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ И СИСТЕМЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВЕСОВ

**Теорема 4.** Пусть система  $\mathcal{P}$  положительных субгармонических функций в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , т. е. система положительных весов на  $\Omega$ , обладает свойством  $(A^{\uparrow})$  из введения и выполнено условие

(D<sub>0</sub>) существует число  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , при котором для любой функции  $p \in \mathcal{P}$  найдутся функция  $p_1 \in \mathcal{P}$  и постоянная  $C_1$ , для которых

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(z + \varepsilon d_\Omega(z) e^{i\theta}) d\theta \leq p_1(z) + C_1, \quad z \in \Omega. \quad (2)$$

Тогда для каждой функции  $p \in \mathcal{P}$  при любом положительном числе  $l$  найдутся функция  $\tilde{p} \in \mathcal{P}$  и постоянная  $\tilde{C}$ , с которыми для каждого подмножества  $S \subset \Omega$  с энтропией линейной связности  $\ell_{\text{sp}}(S; \Omega) < l$  справедлива оценка

$$\sup_{z \in S} p(z) \leq \inf_{z \in S} \tilde{p}(z) + \tilde{C}. \quad (3)$$

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения потребуется некоторая более детальная количественная модификация теоремы 1.

**Лемма 2.** Пусть задано число  $\varepsilon > 0$  и  $\ell_{\text{sp}}(S; \Omega) < l < +\infty$ . Тогда для любой пары точек  $z, w \in S$  найдется конечная последовательность кругов  $D_{\text{sp}}(\zeta_k, d)$ ,  $k = 0, \dots, n+1$ , компактно вложенных в  $\Omega$ , радиуса

$$d = \min\left\{\varepsilon, 1/(4(l+1))\right\} d_\Omega(S), \quad (4)$$

для которой выполнено условие

(D1)  $z = \zeta_0$ ,  $w = \zeta_{n+1}$  и  $|\zeta_{k-1} - \zeta_k| \leq d/2$  при всех  $k = 1, \dots, n+1$  теоремы 1 и при этом

$$n \leq 2(l+1)^2 \max\{1/\varepsilon, 4(l+1)\}. \quad (5)$$

*Доказательство леммы 2.* По 2 пункту теоремы 3 найдется спрямляемая дуга  $\tilde{l}(z, w) \subset \Omega$ , для которой в обозначении (4) выполнены неравенства

$$d_\Omega(\tilde{l}(z, w)) \geq \frac{1}{2(l+1)} d_\Omega(S) \geq 2d, \quad (6d)$$

$$|\tilde{l}(z, w)| \leq (l+1)^2 d_\Omega(S); \quad (6l)$$

Как и при доказательстве теоремы 1, двигаясь по дуге  $\tilde{l}(z, w)$  от начальной точки  $z$  к конечной точке  $w$ , разобьем эту дугу последовательно точками

$$\zeta_0 = z, \zeta_1, \dots, \zeta_{n+1} = w, \quad \zeta_k \in \tilde{l}(z, w) \subset \Omega, \quad (7)$$

на поддуги  $\tilde{l}(\zeta_{k-1}, \zeta_k)$  с длинами, удовлетворяющими соотношениям

$$|\tilde{l}(\zeta_{k-1}, \zeta_k)| = \frac{d}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad |\tilde{l}(\zeta_n, \zeta_{n+1})| \leq \frac{d}{2}, \quad (8)$$

т. е. имеет место (D1). Из (6d) следует неравенство  $d \leq \frac{1}{2} \text{dist}(\tilde{l}(z, w), \partial\Omega)$ , откуда по построению (7) последовательности точек  $\{\zeta_k\}$  каждый круг  $D(\zeta_k, d)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$ , предкомпактен в области  $\Omega$ . Кроме того, из (8) следует, что  $nd/2 = |\cup_{k=1}^n \tilde{l}(\zeta_{k-1}, \zeta_k)| \leq |\tilde{l}(z, w)|$ , откуда получаем оценку

$$n \leq 2 \frac{|\tilde{l}(z, w)|}{d} \stackrel{(6l)}{\leq} 2 \frac{(l+1)^2 d_\Omega(S)}{d} \stackrel{(4)}{=} \frac{2(l+1)^2}{\min\{\varepsilon, 1/(4(l+1))\}}. \quad \circ$$

□

Теперь приступим к доказательству предложения 4.

Пусть  $p = p_0 \in \mathcal{P}$ . По условию (D<sub>0</sub>) можно рекуррентно подобрать последовательность *положительных* субгармонических функций  $\{p_k\} \subset \mathcal{P}$  и *положительных* чисел  $C_k$  так, что выполнены неравенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k(z + \varepsilon d_\Omega(z) e^{i\theta}) d\theta \leq p_{k+1}(z) + C_{k+1}, \quad z \in \Omega, \quad (9)$$

при  $k = 0, 1, \dots$ . По неравенству о среднем по окружности для субгармонических функций неравенства (9) содержат в себе и более слабые неравенства

$$p_k(z) \leq p_{k+1}(z) + C_{k+1}, \quad z \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Пусть  $z, w \in S$ ,  $\ell_{\text{sp}}(S; \Omega) < l$ , и по лемме 2 выбрана последовательность кругов  $D_{\text{sp}}(\zeta_k, d) \Subset \Omega$ , центры которых  $\zeta_k$  удовлетворяют условию (D1), радиус  $d$  определен равенством (4), а ограничение на их количество задается неравенством (5). Положим  $H_k = \mathcal{H}_{D_{\text{sp}}(\zeta_{k+1}, d)}^{p_k}$ , где в правой части стоит гармоническое продолжение субгармонической функции  $p_k$  внутрь круга  $D_{\text{sp}}(\zeta_{k+1}, d)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . В силу положительности веса  $p_k$  его гармоническое продолжение  $H_k$  также положительно в круге  $D_{\text{sp}}(\zeta_{k+1}, d)$  и, учитывая условие  $|\zeta_k - \zeta_{k+1}| \leq d/2$  из (D1), по неравенству Харнака [9, теорема 1.3.1] для положительных гармонических в  $D_{\text{sp}}(\zeta_{k+1}, d)$  функций  $H_k$  получаем

$$p_k(\zeta_k) \leq H_k(\zeta_k) \leq \frac{d + d/2}{d - d/2} H_k(\zeta_{k+1}) = 3 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k(\zeta_{k+1} + de^{i\theta}) d\theta$$

при всех  $k = 0, 1, \dots, n$ . Отсюда, согласно выбору радиуса  $d$  в (4),

$$p_k(\zeta_k) \stackrel{(4)}{\leq} 3 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k(\zeta_{k+1} + \varepsilon d \Omega(\zeta_{k+1}) e^{i\theta}) d\theta \stackrel{(9)}{\leq} 3(p_{k+1}(\zeta_{k+1}) + C_{k+1})$$

при каждом  $k = 0, \dots, n$ . Последовательное применение  $k + 1$  раз последней оценки, начиная с  $k = 0$ , дает оценку

$$\begin{aligned} p(z) = p_0(\zeta_0) &\leq 3^{n+1} p_{n+1}(\zeta_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} 3^k C_k = \\ &= 3^{n+1} p_{n+1}(w) + \sum_{k=1}^{n+1} 3^k C_k. \end{aligned} \tag{11}$$

Положим  $N = \lceil 2(l + 1)^2 \max\{1/\varepsilon, 4(l + 1)\} \rceil$  — целая часть правой части неравенства (5), т. е.  $n \leq N$ . Из (11), применяя в случае  $n < N$  последовательно  $N - n$  раз, начиная с  $k = n + 1$ ,

неравенства (10), получаем

$$\begin{aligned} p(z) &\leq 3^{n+1} \left( p_{N+1}(w) + \sum_{k=n+2}^{N+1} C_k \right) + \sum_{k=1}^{n+1} 3^k C_k \leq \\ &\leq 3^{N+1} p_{N+1}(w) + \sum_{k=1}^{N+1} 3^k C_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Из условия (9) на построение функций  $\{p_k\}$  и чисел  $\{C_k\}$  и согласно выбору числа  $N$  видно, что выбор функции  $p_{N+1} \in \mathcal{P}$  и постоянной  $C' = \sum_{k=1}^{N+1} 3^k C_k$  в (12) при фиксированной функции  $p$  обусловлен исключительно значениями чисел  $\varepsilon$  и  $l$  и не зависит ни от выбора подмножества  $S \subset \Omega$ , когда  $\ell_{\text{sp}}(S; \Omega) < l$ , ни от выбора пары точек  $z, w \in S$ . Следовательно, (12) влечет за собой оценку

$$\sup_{z \in S} p(z) \leq \inf_{w \in S} 3^{N+1} p_{N+1}(w) + C' \quad (13)$$

для любого  $S \subset \Omega$ , удовлетворяющего условию  $\ell_{\text{sp}}(S; \Omega) < l$ . Наконец, применение условия  $(A^\dagger)$  не более, чем  $3^{N+1} - 1$  раз, позволяет по функции  $p_{N+1}$  найти функцию  $\tilde{p} \in \mathcal{P}$  и постоянную  $C''$ , с которыми справедливо неравенство

$$3^{N+1} p_{N+1}(w) = \underbrace{p_{N+1}(w) + \cdots + p_{N+1}(w)}_{3^{N+1} \text{ раз}} \stackrel{(A^\dagger)}{\leq} \tilde{p}(w) + C'', \quad (14)$$

$$w \in \Omega.$$

Выбор функции  $\tilde{p}$  и числа  $C''$  определяется исключительно функцией  $p_{N+1}$  и значением номера  $N$ , т. е. в конечном итоге также только функцией  $p$  и значениями чисел  $\varepsilon$  и  $l$ . Неравенства (13)–(14) при  $\tilde{C} = C' + C''$  дают (3).  $\square$



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Хабибуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций и энтропия линейной связности. // "Алгебра и анализ". 2008. Т. 20. № 1. С. 162-204; Т. 20. № 1. С. 205-250.
- [2] *Байгускаров Т. Ю.* Сферическое расстояние и энтропия линейной связности. // Уфа: РИЦ БашГУ, Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании/ Материалы международной конференции. , 2011.
- [3] *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. // М.: Наука, 1984.
- [4] *Чередникова Л. Ю., Хабибуллин Б. Н.* Устойчивость последовательностей неединственности для весовых алгебр голоморфных в круге функций // Сборник статей "Научная конференция по научно-техническим программам Минобразования РФ". Ч. 1. Уфа. БашГУ. 2000. С. 25–28.
- [5] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М: Наука, 1985.
- [6] *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
- [7] *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1986.
- [8] *Ransford T. J.* Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

УДК 517.95

О КРИТИЧЕСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ  
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ЗНАКА

Бобков В. Е. (Уфа, ИМВЦ УНЦ РАН)

Введение

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с  $C^1$ -границей  $\partial\Omega$  рассматривается система эллиптических уравнений

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + \alpha f(x) |u|^{\alpha-2} |v|^\beta u, & x \in \Omega, \\ -\Delta_q v = \mu |v|^{q-2} v + \beta f(x) |u|^\alpha |v|^{\beta-2} v, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

где функция  $f \in L^\infty(\Omega)$  может быть знакопеременной;  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  - спектральные параметры;  $p > 1, q > 1$  и

$$\alpha, \beta > 0, \quad \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} > 1, \quad \frac{\alpha}{p^*} + \frac{\beta}{q^*} < 1. \quad (2)$$

Система (1) допускает вариационную форму с соответствующим функционалом действия

$$E_{\lambda,\mu}(u, v) = \frac{1}{p} P_\lambda(u) + \frac{1}{q} Q_\mu(v) - F(u, v), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} P_\lambda(u) &:= \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx, \\ Q_\mu(v) &:= \int_\Omega |\nabla v|^q dx - \mu \int_\Omega |v|^q dx, \\ F(u, v) &:= \int_\Omega f(x) |u|^\alpha |v|^\beta dx. \end{aligned}$$

Известно, что точка  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$  является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда она является критической точкой функционала (3), т.е.

$$D_u E_{\lambda,\mu}(u_0, v_0) = 0, \quad D_v E_{\lambda,\mu}(u_0, v_0) = 0.$$

Будем говорить, что решение  $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$  задачи (1) является *основным состоянием*, если

$$E_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) \leq E_{\lambda,\mu}(u, v),$$

для всех решений  $(u, v)$  задачи (1).

Основной целью данной работы является нахождение максимальной спектральной области, в которой задача (1) имеет решения типа основных состояний; а также описание асимптотик *ветви* основных состояний, т.е. функции

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu) := E_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}).$$

Для этого развивается подход, предложенный в работе [1].

## § 1. Основные результаты

Введем следующее семейство минимизационных задач, параметризованное  $r > 0$ :

$$\sigma^*(r) = \inf_{u,v} \left[ \max \left\{ \frac{1}{r\lambda_1} \frac{\int |\nabla u|^p dx}{\int |u|^p dx}, \frac{1}{\mu_1} \frac{\int |\nabla v|^q dx}{\int |v|^q dx} \right\} : F(u, v) \geq 0 \right].$$

В [1] доказано, что при  $r = 1$  данная минимизационная задача имеет решение. Данный результат прямо обобщается на случай произвольного  $r > 0$ . При этом  $\sigma^*(r) \in [1, +\infty)$ .

**Лемма 1.** *Функция  $\sigma^*(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  непрерывна.*

Рассмотрим следующую кривую на спектральной плоскости  $(\lambda, \mu)$ , заданную параметрически:

$$\lambda^*(r) := \lambda_1 r \sigma^*(r); \quad \mu^*(r) := \mu_1 \sigma^*(r), \quad r > 0.$$

**Следствие 1.**  $\lambda^*(r), \mu^*(r) \in C(\mathbb{R}^+)$ .

Будем обозначать  $(\lambda_1, \varphi_1)$  и  $(\mu_1, \psi_1)$  - первые собственные пары операторов  $-\Delta_p$  и  $-\Delta_q$  с нулевыми граничными условиями в  $\Omega$ , соответственно. Также введем следующие множества

$$\Omega^+ := \{x \in \Omega : f(x) > 0\}, \quad \Omega^0 := \{x \in \Omega : f(x) = 0\},$$

В следующих двух леммах описывается поведение спектральной кривой  $(\lambda^*(r), \mu^*(r))$ ,  $r > 0$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\Omega_+ \neq \emptyset$  или  $\Omega_0 \neq \emptyset$ , при этом  $F(\varphi_1, \psi_1) < 0$ . Тогда существуют такие  $r_0, r_1 > 0$ , что (см. Рис.1)

- 1)  $\lambda^*(r) = \lambda_1$ ,  $\mu^*(r) = \mu_1/r$  для всех  $r \in (0, r_0)$ ;
- 2)  $\lambda^*(r) = \lambda_1 r$ ,  $\mu^*(r) = \mu_1$  для всех  $r > r_1$ .

**Лемма 3.** Предположим что  $f(x) < 0$  на  $\Omega$ . Тогда  $\sigma^*(r) > 1$  для всех  $r \in \mathbb{R}^+$ . При этом (см. Рис.2)

- 1)  $\lambda^*(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$ , и  $\mu^*(r) > \mu_1$  для всех  $r > 0$ ;
- 2)  $\lambda^*(r) > \lambda_1$  для всех  $r > 0$ , и  $\mu^*(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow 0$ .

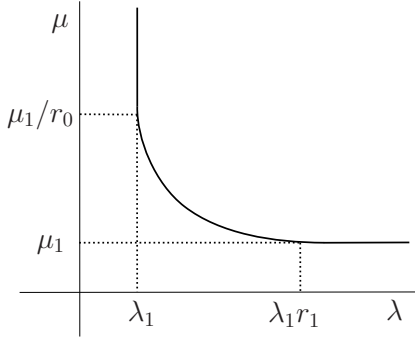


Рис. 1:

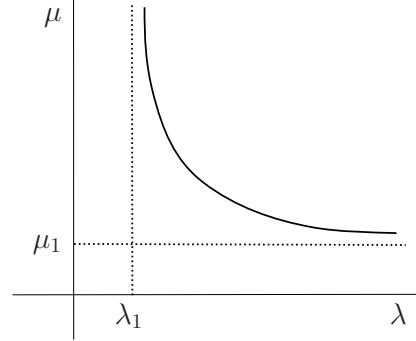


Рис. 2:

Введем следующие множества (см. Рис. 3, 4):

$$\Sigma_1 := \{\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^2 : \lambda < \lambda_1, \mu < \mu_1\},$$

$$\Sigma^* := \{\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 < \lambda < \lambda^*(r), \mu_1 < \mu < \mu^*(r), r > 0\}.$$

В следующей лемме доказывається существование основных состояний задачи (1) в областях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma^*$ .

**Лемма 4.** Предположим что условия (2) выполнены,  $p, q > 1$  и  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Тогда

- 1) если  $\Omega^+ \neq \emptyset$ , то (1) имеет решение  $(u_{\bar{\lambda}}, v_{\bar{\lambda}})$  для всех  $\bar{\lambda} \in \Sigma_1$ , такое что  $E_{\bar{\lambda}}(u_{\bar{\lambda}}, v_{\bar{\lambda}}) > 0$  и  $u_{\bar{\lambda}}, v_{\bar{\lambda}} > 0$  в  $\Omega$ ;

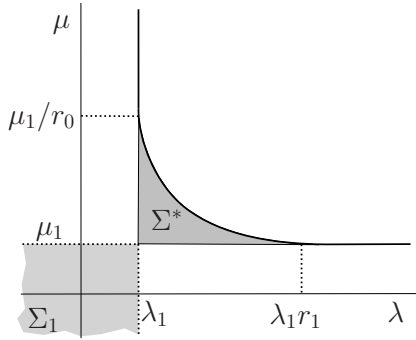


Рис. 3:

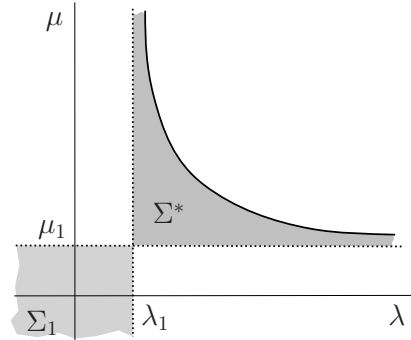


Рис. 4:

2) если  $F(\varphi_1, \psi_1) < 0$ , то (1) имеет решение  $(u_{\bar{\lambda}}, v_{\bar{\lambda}})$  для всех  $\bar{\lambda} \in \Sigma^*$ , такое что  $E_{\bar{\lambda}}(u_{\bar{\lambda}}, v_{\bar{\lambda}}) < 0$  и  $u_{\bar{\lambda}}, v_{\bar{\lambda}} > 0$  в  $\Omega$ .

*Доказательство.* Доказывается прямым обобщением Теоремы 2.2, [1] стр. 4.  $\square$

В последней лемме мы получаем асимптотики ветви основных состояний на критической кривой

**Лемма 5.** Пусть условия (2) выполнены,  $p, q \in (1, +\infty)$  и  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Тогда если  $F(\varphi_1, \psi_1) < 0$ , то

- $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$  является непрерывной функцией от  $(\lambda, \mu)$  на  $\Sigma^*$ ;
- $\mathcal{E}(\lambda, \mu) \rightarrow 0$  при  $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda_1, \mu_0)$  для всех  $\mu_0 \in (\mu_1, \mu^*(r))$ ,  $r > 0$ ;
- $\mathcal{E}(\lambda, \mu) \rightarrow 0$  при  $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda_0, \mu_1)$  для всех  $\lambda_0 \in (\lambda_1, \lambda^*(r))$ ,  $r > 0$ .
- Если, дополнительно,  $f(x) \leq 0$ ,  $p, q \geq 2$  и  $\max\{p, q\} > 2$ , то  $\mathcal{E}(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$  при  $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda^*(r), \mu^*(r))$ ,  $r > 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bobkov V., Il'yasov Y. Asymptotic behaviour of branches for ground states of elliptic systems // Electronic Journal of Differential Equations. 2013. Vol. 2013, No. 212. pp. 1-21.

УДК 517.984

ВОЗМУЩЕНИЕ УЗКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ ОПЕРАТОРОВ,  
АССОЦИИРОВАННЫХ С СИММЕТРИЧНЫМИ  
ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ

Гадыльшин Т. Р. (Уфа, УГАТУ)

## Введение

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0[u, v] &:= (ku', v')_{L_2(a,b)} + (qu, v)_{L_2(a,b)}, \\ \mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}[u, v] &:= \mathfrak{h}_0[u, v] + \mu^{-1} (Q_\varepsilon u, v)_{L_2(a,b)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k(x), q(x) \geq \kappa > 0$  — локально интегрируемые функции на  $(a, b)$  (причем, не предполагается, что  $(a, b)$  — только конечный интервал),  $Q_\varepsilon(x) = Q\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $Q(x)$  — функция из  $L_\infty(-\infty, \infty)$  с ограниченным носителем,  $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$ .

Полуторалинейные ограниченные снизу симметричные формы  $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$  рассматриваются на множествах  $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_0)$  и  $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon})$  всех функций из  $L_2(a, b)$ , для которых их значения определены. Поэтому эти формы замкнуты. А так как множество  $C_0^\infty(a, b)$  плотно в  $L_2(a, b)$  и, очевидно,  $C_0^\infty(a, b) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{h}_0)$ ,  $C_0^\infty(a, b) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon})$ , то и области определения  $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_0)$  и  $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon})$  форм  $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$  плотны в  $L_2(a, b)$ .

Обозначим через  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$  самосопряженные и ограниченные снизу операторы, ассоциированные с плотно определенными в  $L_2(a, b)$ , симметричными замкнутыми формами  $\mathfrak{h}_0$  и  $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ , соответственно ([1, глава VI, теорема 2.6]).

В случае, когда  $k, q, Q$  — достаточно гладкие функции, операторы  $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$  представляют собой расширения по Фридрихсу (см., например, [1, глава VI, § 2]) дифференциальных операторов

$$H_0 u := -(ku')' + qu, \quad H_{\mu,\varepsilon} u := H_0 u + \mu^{-1} Q_\varepsilon u,$$

рассматриваемых на достаточно гладких функциях из  $L_2(a, b)$ , производные которых равны нулю на концах интервала, если  $(a, b) \neq (-\infty, \infty)$ .

### § 1. Формулировка основного результата

Целью работы является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 5.** Пусть

$$\varepsilon\mu^{-1} = o(1). \quad (2)$$

Тогда  $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon} \rightarrow \mathcal{H}_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в обобщенном смысле.

Из этой теоремы и [1, Глава IV, теорема 3.16], в частности, вытекает

**Теорема 6.** Если имеет место равенство (2), а  $\lambda_0$  — простое собственное значение оператора  $\mathcal{H}_0$ , то к нему сходится единственное  $u$ , к тому же, простое собственное значение  $\lambda_{\mu,\varepsilon}$  оператора  $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ , а для соответствующих нормированных в  $L_2(a, b)$  собственных функций  $u_{\mu,\varepsilon}$ ,  $u_0$  имеет место сходимость  $u_{\mu,\varepsilon} \rightarrow u_0$  в  $L_2(a, b)$ .

Хорошо известно (см., например, [2]), что когда  $(a, b)$  — конечный интервал, а  $k, q, Q$  — достаточно гладкие функции, например, если  $k, q \in C^\infty[a, b]$ ,  $Q \in C^\infty(-\infty, \infty)$ , то собственные значения операторов  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$  являются простыми. Для этого случая в [3] было показано, что собственное значение краевой задачи

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi_{\mu,\varepsilon} = \lambda_{\mu,\varepsilon}\psi_{\mu,\varepsilon}, \quad x \in (a, b), \quad \psi_{\mu,\varepsilon}(a) = \psi_{\mu,\varepsilon}(b) = 0,$$

при  $\varepsilon\mu^{-1} = o(\varepsilon^\delta)$ ,  $\delta \in (0, 1)$ , сходится к собственному значению краевой задачи

$$H_0\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in (a, b), \quad \psi_0(a) = \psi_0(b) = 0.$$

Однако при доказательстве этого результата существенно использовалась компактность вложения  $W_2^1$  в  $L_2$  для ограниченных областей.

В [4] были рассмотрены операторы  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ , в частном случае, когда  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ , а  $k \equiv 1$ . В этой работе, во-первых, было показано, что условие теоремы 5 о простоте собственных значений этих операторов выполняется, а во-вторых, была доказана и справедливость утверждения этой теоремы в рассмотренном частном случае. Однако доказательство этих результатов опиралось на тот факт, что в рассмотренном случае дифференциальные операторы  $H_0$  и  $H_{\mu,\varepsilon}$  были определены в обычном (классическом) смысле.

## § 2. Доказательство теоремы 5

Через  $W_2^1(I)$  будем обозначать множество функций квадратично интегрируемых на интервале  $I$  вместе со своими производными. В случае  $I \neq (-\infty, \infty)$  обозначим через  $W_2^1(I)$  подмножество функций из  $W_2^1(I)$  равных нулю на концах интервала  $I$ .

Прежде, чем приступить непосредственно к доказательству теоремы, докажем справедливость следующего утверждения.

**Лемма 3.** *Для любой функции  $u \in W_2^1(a, b)$  и для любого  $\gamma > 0$  справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_2(x_0-\varepsilon\gamma, x_0+\varepsilon\gamma)}^2 \leq C_1\varepsilon \|u\|_{W_2^1(a,b)}^2. \quad (3)$$

*Доказательство.* Пусть  $a_i, b_i$  — конечные числа, такие что  $a < a_2 < a_1 < x_0 < b_1 < b_2 < b$ . Обозначим через  $u_1$  сужение функции  $u$  на интервал  $(a_1, b_1)$ . Очевидно,  $u_1 \in W_2^1(a_1, b_1)$ . Известно (см., например, [5, Глава III, § 4, теорема 1], что существует линейный ограниченный оператор  $\mathcal{P} : W_2^1(a_1, b_1) \rightarrow W_2^1(a_2, b_2)$ , такой, что для функции  $u_2 := \mathcal{P}u_1$  справедливо равенство  $u_2 = u_1$  при  $x \in (a_1, b_1)$ . В [3] было доказано, что для любой функции  $u_2 \in W_2^1(a_2, b_2)$  и для любого  $\gamma > 0$  справедливо неравенство

$$\|u_2\|_{L_2(x_0-\varepsilon\gamma, x_0+\varepsilon\gamma)}^2 \leq C_2\varepsilon \|u_2\|_{W_2^1(a_2,b_2)}^2.$$



Из этой оценки и определения  $u_i$  вытекает искомая оценка (3):

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(x_0-\varepsilon\gamma, x_0+\varepsilon\gamma)}^2 &= \|u_2\|_{L_2(x_0-\varepsilon\gamma, x_0+\varepsilon\gamma)}^2 \leq C_2\varepsilon \|u_2\|_{W_2^1(a_2, b_2)}^2 \leq \\ &\leq C_1\varepsilon \|u_1\|_{W_2^1(a_1, b_1)}^2 \leq C_1\varepsilon \|u\|_{W_2^1(a, b)}^2. \end{aligned}$$

□

*Доказательство теоремы 5.* Обозначим  $\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}[u] = \mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}[u, u]$ ,  $\mathfrak{h}_0[u] = \mathfrak{h}_0[u, u]$ . Из определения  $\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}[u]$ ,  $\mathfrak{h}_0[u]$  следует, что  $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}) = \mathcal{D}(\mathfrak{h}_0) \subset W_2^1(a, b)$  и

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon} - \mathfrak{h}_0)[u]| &= \mu^{-1} \left| \int_a^b Q\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) |u|^2(x) dx \right|, \quad (4) \\ \|u\|_{W_2^1(a, b)}^2 &\leq \varkappa^{-1} \mathfrak{h}_0[u], \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{h}_0). \end{aligned}$$

Из последней оценки и неравенства (3) следует, что

$$\|u\|_{L_2(x_0-\varepsilon\gamma, x_0+\varepsilon\gamma)}^2 \leq C_3\varepsilon \mathfrak{h}_0[u], \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{h}_0). \quad (5)$$

Так как функция  $Q(x)$  имеет конечный носитель, то существует  $\gamma > 0$  такое, что  $\text{supp } Q\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) \subset [x_0 - \varepsilon\gamma, x_0 + \varepsilon\gamma] \subset (a, b)$ . А так как, к тому же,  $Q(x) \in L_\infty(-\infty, \infty)$ , то из (4) и (5) следует, что

$$|(\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon} - \mathfrak{h}_0)[u]| \leq C_4\varepsilon\mu^{-1} \mathfrak{h}_0[u].$$

Так как полуторалинейные ограниченные снизу формы  $\mathfrak{h}_0$  и  $\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}$  плотно определены в  $L_2(a, b)$ , симметричны и замкнуты, а  $\varepsilon\mu^{-1} \rightarrow 0$  силу (2), то из последней оценки и [1, Глава VI, теорема 3.6] следует справедливость утверждения доказываемой теоремы. □

## § 1. Заключительные замечания

Пусть, например,  $(a, b) = (a, \infty)$ . При  $\alpha \geq 0$  обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0^{(3)}[u, v] &:= \mathfrak{h}_0[u, v] + \alpha u(a) \overline{v(a)}, \\ \mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}^{(3)}[u, v] &:= \mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}[u, v] + \alpha u(a) \overline{v(a)}, \end{aligned}$$

а через  $\mathfrak{h}_0^{(1)}[u, v]$ ,  $\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}^{(1)}[u, v]$  обозначим формы, определяемые равенствами (1), но областью определения которых является подмножество функций из  $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_0)$ , обращающихся в нуль на конце  $a$ .

Легко видеть, что для операторов  $\mathcal{H}_0^{(i)}$  и  $\mathcal{H}_{\mu, \varepsilon}^{(i)}$ , ассоциированных с формами  $\mathfrak{h}_0^{(i)}$  и  $\mathfrak{h}_{\mu, \varepsilon}^{(i)}$ , соответственно, справедливы утверждения теоремы 5, а следовательно, и теоремы 6.

В случае, когда  $k$ ,  $q$ ,  $Q$  — достаточно гладкие функции, операторы  $\mathcal{H}_0^{(i)}$ ,  $\mathcal{H}_{\mu, \varepsilon}^{(i)}$  являются расширениями по Фридрихсу дифференциальных операторов  $H_0$ ,  $H_{\mu, \varepsilon}$  на  $(a, \infty)$  с граничным условием

$$\begin{aligned} u(a) &= 0, & i &= 1, \\ u'(a) - \alpha u(a) &= 0, & i &\neq 1. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (12-01-00445).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [2] *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.
- [3] *Хуснуллин И.Х.* Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 4. С. 679–698.
- [4] *Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х.* Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 3. № 3. С. 55–66.
- [5] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

УДК 532.529.5.532.59

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСТЕЧЕНИЯ  
ГАЗОНАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ЕМКОСТИ  
КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА.

Галеева Г. Я., Мирхайдаров А. Ф. (Уфа, БашГУ)

Рассмотрим задачу об опорожнении емкости, имеющую конечный объем, через щель. Будем полагать, что давление в основном объеме в достаточном удалении от щели однородное (условие гомобаричности), а процесс истечения - квазиустановившийся. И, тем самым, динамические процессы в основном локализованы в области течения, примыкающей к щели. Примем, что распределение параметров в этой области - как при стационарном течении. Запишем уравнение сохранения массы для газожидкостной смеси, находящейся в объеме  $V$  [2]:

$$V \frac{d\rho_{(i)}}{dt} = -S\rho_{(e)}w_{(e)} \quad (1)$$

Здесь  $\rho_{(i)}$  - средняя плотность смеси в емкости,  $\rho_{(e)}$ ,  $w_{(e)}$  - значения плотности и скорости истечения на срезе щели, имеющей площадь поперечного сечения  $S$ . В силу принятых допущений давление в объеме и на выходном сечении и скорость связаны интегралом Бернулли[1,2]

$$\frac{w_{(e)}^2}{2} + \int_{p_{(i)}}^{p_{(e)}} \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (2)$$

Здесь возможны два режима истечения. Во-первых, истечение в режиме газодинамического запираения, когда скорость истечения  $w_{(e)}$  равна местной скорости звука. При этом величина давления  $p_c$  на выходном срезе щели больше чем внешнее давление  $p_a$  и оно находится из уравнения

$$C^2(p_c) = w^2(p_c) \quad (3)$$

где  $w(p_c)$  находится на основе интеграла Бернулли (2).

В случае вскипающей жидкости пусть в начальный момент времени ( $t = 0$ ), при котором происходит разгерметизация емкости, температура и давление равны  $T_0$  и  $p_0$  ( $p_0 = p_s(T_0)$ ). Тогда на основе уравнений (2) и (3) с учетом уравнения состояния [1,3]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_l} + \frac{c_l(T_0 - T_s(p))T_s'(p)}{T_s(p)}, \quad \left( T_s'(p) = \frac{dT_s(p)}{dp} \right)$$

и выражения для скорости звука [1,3]

$$C^{-2} = \frac{d\rho}{dp} = \rho^2 c_l \frac{T_0 T_s'^2(p) - (T_0 - T_s(p)) T_s(p) T_s''(p)}{T_s^2(p)}$$

можем получить уравнение для определения  $p_c$  в начальный момент времени

$$\frac{C^2(p_c)}{2} = \frac{p_c - p_0}{p_l^0} + c_l T_0 \ln \frac{T_0}{T_s(p_c)} - c_l (T_0 - T_s(p_c)) \quad (4)$$

В том случае, когда  $p_c > p_a$  опорожнение будет происходить в два этапа. Для первого этапа (до достижения  $p_c$  значения  $p_c = p_a$ ) закон изменения давления в емкости определяется из системы уравнений

$$\frac{V}{C^2(p_{(i)})} \frac{dp_{(i)}}{dt} = -S\rho(p_c)C(p_c), \quad \frac{C^2(p_c)}{2} = \int_{p_c}^{p_{(i)}} \frac{dp}{\rho}, \quad (5)$$

следующих из (1) – (3). Для удобства численной реализации второе уравнение можно представить в виде дифференциального уравнения

$$\left( \frac{1}{2} \frac{dC^2(p_c)}{dp_c} + \frac{1}{\rho(p_c)} \right) \frac{dp_c}{dt} = \frac{1}{\rho(p_{(i)})} \frac{dp_{(i)}}{dt} \quad (6)$$

Тогда первое уравнение из (5) и уравнение (6) представляют собой замкнутую систему для определения  $p_{(i)}$  и  $p_c$ . После достижения

давления  $p_c$  значения  $p_a$  ( $p_c = p_a$ ) расчет ведется на основе уравнения

$$\frac{V}{C^2(p^{(i)})} \frac{dp^{(i)}}{dt} = -S\rho(p_a)w(p_a), \quad w(p_a) = \sqrt{2 \int_{p_a}^{p^{(i)}} \frac{dp}{\rho}} \quad (7)$$

В том случае, когда для исходного состояния в емкости  $p_c < p_a$ , весь процесс опорожнения рассчитывается по уравнению (7).

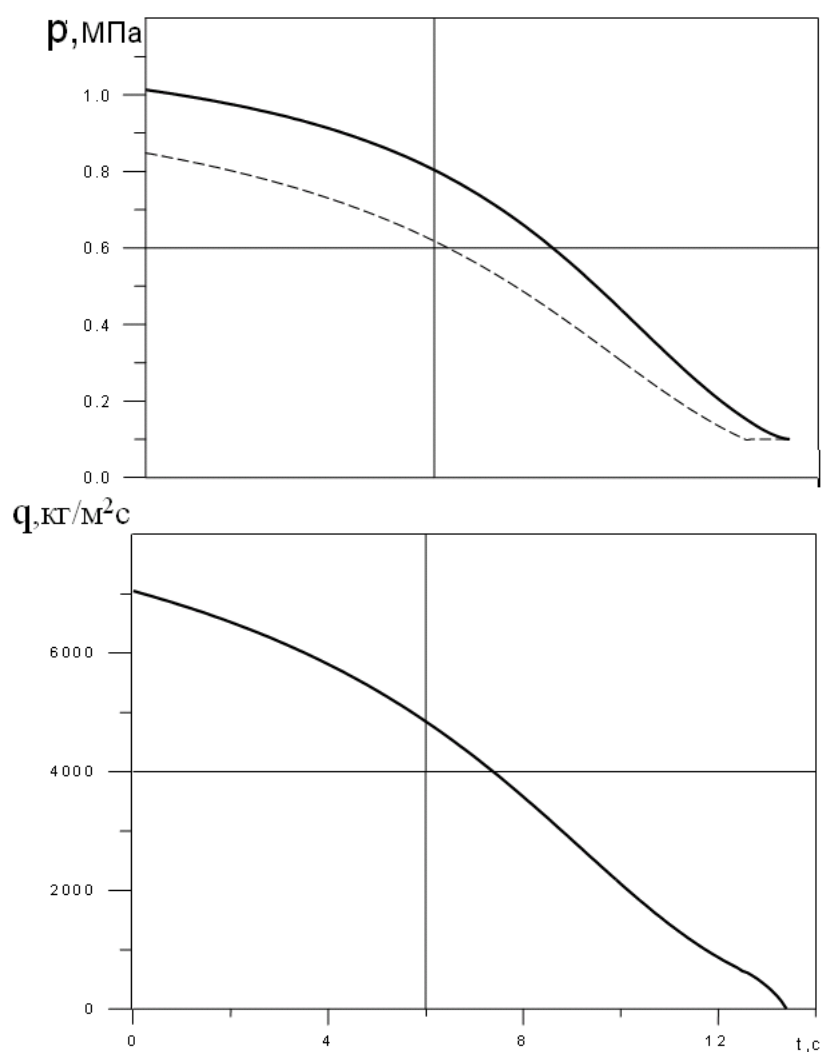


Рис.1. Зависимости давления в емкости (сплошные линии) и на срезе щели (пунктирные линии), а также массового расхода от

времени для сжиженного пропана при следующих параметрах емкости  $V = 100\text{м}^3$ ,  $S = 1\text{м}^2$  и начального давления  $p_0 = 1\text{МПа}$  ( $T_0 = 300\text{K}$ ).

Для газонасыщенной жидкости из уравнения (3) с учетом (7) и баротропического уравнения состояния [3]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_l} - \frac{k_0}{\rho_{g0}} \left(1 - \frac{p_0}{p}\right), \quad \frac{\rho}{\rho_l} = \frac{p}{p_0}$$

получим следующее трансцендентное уравнение

$$(1 - R_*)P_C + R_* = \sqrt{2R_*} \left[ (1 - R_*)(P_{(i)} - P_C) + R_* \ln \left( \frac{P_{(i)}}{P_C} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

$$\left( P_{(i)} = \frac{p_{(i)}}{p_0}, \quad P_C = \frac{p_c}{p_0} \right)$$

для определения  $p_c$  в зависимости от текущего значения давления внутри емкости  $p_{(i)}$ .

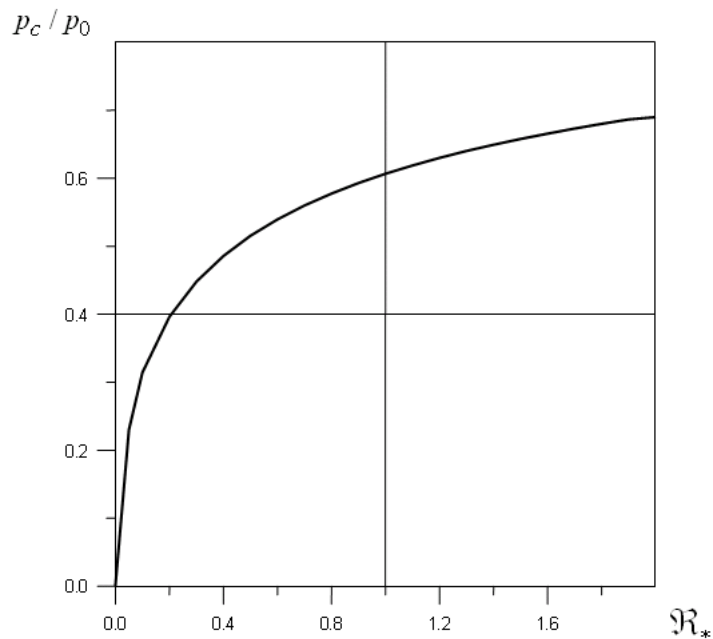


Рис.2. Зависимость давления  $P_C$  от  $R_*$  для начального момента ( $p_{(i)} = p_0$ ).

Для совершенной смеси ( $R_* = 1$ ) отсюда имеем

$$P_C = \frac{P^{(i)}}{\sqrt{e}} \quad (9)$$

Таким образом, в этом случае, если исходное давление  $p_0$  удовлетворяет условию  $p_0 > \sqrt{e}p_a$  опорожнение будет происходить в два этапа. Причем для продолжительности каждого из этапов  $t_1$  и  $t_2$  на основе уравнений (5)-(7) можно получить

$$t_i = \tau_i \frac{V}{S} \sqrt{\frac{\rho_l^0}{p_0}} \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

$$\tau_1 = \sqrt{e} \left( \ln \frac{p_0}{p_a} - \frac{1}{2} \right), \quad \tau_2 = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{\sqrt{2 \ln x}}.$$

Когда давление в емкости достаточно низкое ( $p_a < p_0 < \sqrt{e}p_a$ ), для продолжительности опорожнения имеем

$$t = \tau \frac{V}{S} \sqrt{\frac{\rho_l^0}{p_0}}, \quad \tau = \int_{\frac{p_a}{p_0}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2 \ln x}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шагапов В.Ш. Истечение газожидкостных и парожидкостных сред из большой емкости через щель // ТВТ. 1979. Т.17. №3. С.655-657
- [2] Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.II. М.: Наука, 1987. 360с
- [3] Шагапов В.Ш., Галеева Г.Я. Опорожнение каналов и емкостей, сопровождаемое вскипанием // ТВТ. 2010. Т.48. №3. С.409-418.

УДК 330.4

## АГЕНТЫ-ПРЕДПРИЯТИЯ В РАМКАХ АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ГОРОДА

Гафарова Е. А Газизова К. А. (Уфа, ИСЭИ)

В настоящее время для моделирования функционирования сложных систем активно применяется новый класс экономико-математических моделей агент-ориентированные модели. Анализ агент-ориентированных моделей применительно к проблеме оценки социально-экономического развития территорий показывает, что метод компьютерного имитационного моделирования в настоящее время очень успешно справляется с задачей моделирования поведения сложных систем. Более популярный в прошлом метод системной динамики теперь делит свое место с набирающим обороты агент-ориентированным подходом. Крупнейшие города становятся полноправными, самостоятельными экономическими агентами в конкурентных процессах, проходящих на различных уровнях. Поэтому очень остро становится проблема создания систем поддержки принятия решений для органов власти на всех уровнях. Такой системой может выступать комплексная агент-ориентированная модель, позволяющей на своей основе проверять воздействие управленческих решений на развивающиеся социально-экономические процессы. Для того чтобы наиболее полно и реалистично представить жизнь города в модель решено включить следующие виды агентов, функционирующих в среде районов города

- агенты-люди;
- агенты предприятия.

Для создания данной модели был использован продукт версии AnyLogic 6.9.0, содержащий текстовый язык задания сценариев, Java. Стоит отметить, что на сегодняшний день этот продукт



один из самых востребованных на рынке. Внешняя оболочка модели включает в себя различные элементы, отображающие динамику развития города. Основу интерфейса составляет внедренная карта города Уфы, на которой отмечены 7 районов города, предприятия, являющиеся отраслями города, а также население. В модели существует возможность работать с картой, переключая на ней слои в зависимости от интересов пользователя: возможность отображения предприятий и районов, населения и районов, а также одновременно оба варианта. Основными строительными блоками модели AnyLogic являются активные объекты, для создания агентов в модели используются следующие классы активных объектов:

1. Основной класс, созданный для реализации интерфейса модели;
2. Класс, созданный для реализации районов;
3. Класс для агентов-людей;
4. Класс для агентов-предприятий.

Свой трудовой потенциал агенты-люди реализуют на предприятиях города Уфы. Для удобства выполнения программных операций в каждой зоне функционирует по 15 предприятий, которые представляют собой 15 отраслей хозяйства города. Трудоустройство на самые высокооплачиваемые места предполагает конкуренцию, которую могут выдержать только агенты-люди с самым высоким потенциалом, среди агентов-предприятий также существует конкуренция, трудоустройство начинается с предприятий, имеющих самую высокую среднюю заработную плату. Поведение агентов-предприятий складывается в зависимости от валового выпуска, полученного ими в прошлый и настоящий год, увеличивая инвестиции в основной капитал, при повышении валового выпуска и уменьшая вложения в случае убыли, такое поведение будет пояснено ниже. Каждый из агентов играет свою существенную и

незаменимую роль в жизнедеятельности модели города, обладая индивидуальным набором характеристик. Остановимся подробнее на поведении и наборе необходимых для агентов-предприятий характеристик. Свой трудовой потенциал люди-агенты осуществляют на предприятиях, которые также являются агентами, имеющими свои функции и признаки. Для подсчета и контроля за работниками предприятий, в каждой организации создана коллекция из людей города. Перейдем к описанию переменных, которые присваиваются агентам-предприятиям при помощи различных функций.

1. Первая переменная относит предприятие к той или иной зоне. Расположение имеет значение, для людей планирующих получить работу на данном предприятии. Для человека в приоритете то предприятие, которое находится в его районе проживания, по сравнению с остальными. Стоит сразу отметить, что расположение предприятия не является единственным и главным критерием отбора места работы для агента-человека.
2. Переменная «вид деятельности» относит предприятие к виду деятельности по общероссийскому классификатору видов экономической деятельности. Для упрощения модели примем, что в каждом районе города Уфы располагается по одному предприятию каждого вида деятельности.
3. Следующая переменная указывает максимальную численность работников предприятий по каждому виду деятельности. Организация не может бесконечно наращивать штат, по крайней мере, в рамках краткосрочного периода, должно быть граничное максимальное число. Для каждого вида деятельности это число различается. Распределение по предприятиям максимального количества работников ведется случайным образом с помощью отдельной функции (масштаб

- 1:100 человек), но общее количество человек, занятых в городе определенным видом деятельности, соответствует данным по городу Уфе. Агент-человек может поступить на работу в данную конкретную организацию только при том условии, что объем штата менее установленной максимальной планки. Переменная вводится для отслеживания неустроенных работников, то есть для контроля над безработицей.
4. Каждому предприятию присваивается среднемесячная заработная плата работников организаций по видам экономической деятельности, соответствующая статистическим данным по городу Уфе. Среди различных видов деятельности среднемесячная заработная плата сильно дифференцирована, что необходимо учитывать при моделировании. Всем предприятиям вне зависимости от зоны, средняя заработная плата по видам деятельности присваивается одинаковая с помощью функции «estimateAverageSalary».
  5. По статистическим данным по городу о наличии и состоянии основных фондов по видам экономической деятельности, каждому предприятию присваивается на начало отчетного периода стоимость основных фондов. Начисление основных фондов происходит с помощью специальной функции. Случайным образом каждому предприятию присваивается та или иная сумма, но сумма основных фондов по виду деятельности в городе соответствует данным из таблицы о состоянии основных фондов.
  6. Переменная «стабильность» принимает значения «0» и «1», в зависимости от стабильности отрасли, которая была присвоена предприятию. Используется людьми для подсчета вектора неудовлетворенности и функции полезности.
  7. Предприятию к переменной «инвестиции в основные фонды»

присваивается значение объема инвестиций в основной капитал за год.

8. Переменные со значениями среднесписочных численностей на предприятии в начале и конце года, для включения результата в производственную функцию, речь о которой пойдет ниже.
9. С помощью специальной функции в модели для предприятия рассчитывается валовой выпуск, являющийся экономическим потенциалом предприятия. Расчет осуществлялся на основе производственной функции, построенной специально для отраслей хозяйства по панельным данным РБ. Для расчета требуются значения, определенных ранее инвестиций в основной капитал и среднесписочной численности работников предприятия. Для подсчета традиционной составляющей производственной функции «труд», находится среднее арифметическое от значений переменных со значениями среднесписочных численностей на предприятии в начале и конце года.

Перейдем к рассмотрению отдельных функций класса, которые используются по ходу решения модели.

1. Функция располагает объект «предприятие» в первом свободном месте заданной для предприятия зоны на карте.
2. Следующая функция может принимать только значения «истина» и «ложь». Функция проверяет утверждение о том, что размер штата сотрудников компании меньше, чем ограничение на штат. Если утверждение верно, то предприятие может себе позволить нанять нового сотрудника.
3. Функция добавляет или удаляет предприятия из коллекции предприятий, осуществляющих наём работников.

4. Действие данной функции распространяется на людей, по данной команде человек добавляется в штат предприятия и проверяется, может ли предприятие далее осуществлять наём работников, если да, то предприятие остается в соответствующей коллекции если нет, то удаляется из нее.
5. Человек, который уволился с предприятия, удаляется из коллекции сотрудников предприятия, информация о последнем месте его работы стирается, а его зарплата приравнивается нулю.
6. В результате действия функции ежемесячная заработная плата рабочих всего предприятия повышается на 10%.
7. Данная функция возвращает значение минимальной заработной платы у человека на предприятии, с таким же уровнем образованием, как у претендента на место на данном предприятии.
8. Функция находит среди работников предприятия человека с самым высоким трудовым потенциалом, присваивая функции значение этого трудового потенциала.
9. Возвращается значение самой высокой заработной платы среди всех работников на указанном предприятии.
10. На предприятии рассчитывается средний потенциал работников, как среднее арифметическое от всех потенциалов работников.
11. Возвращается значение самой низкой заработной платы среди всех работников на указанном предприятии.
12. Рассчитывается средняя заработная плата работников предприятия, как среднее арифметическое заработных плат сотрудников.

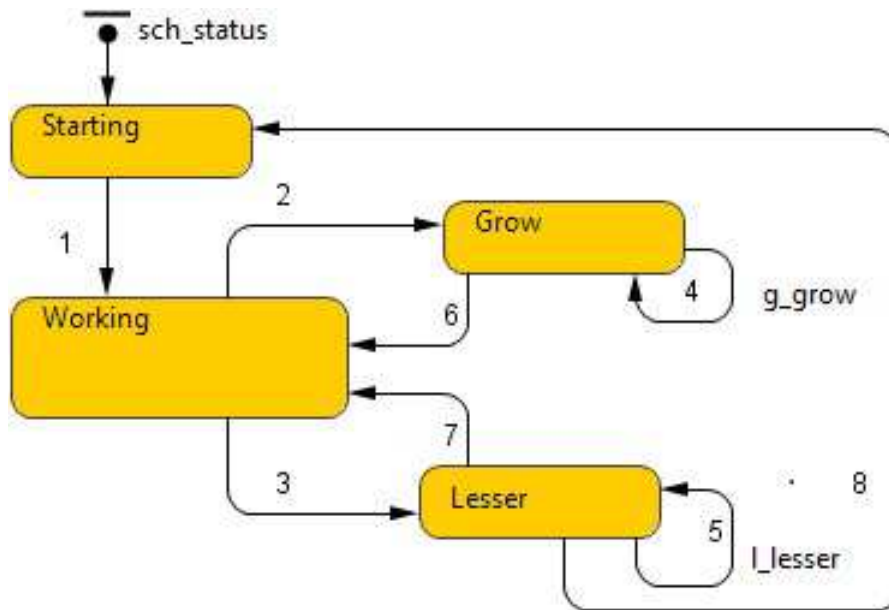


Рис. 1: Диаграмма состояний агентов-предприятий

Работа агентов-предприятий основана на диаграмме состояний (стейтчарт), представленной на рисунке 1.

Как видно из рисунка, предприятие начинает работу с состояния «Starting» (Начало). В данном состоянии не происходит никаких действий. Действие 1 происходит только во время перехода из стартового состояния в состояние функционирования «Working» (Работа), на этом этапе предприятие удаляется из списка нанимающих компаний, если оно там находилось. Это действие происходит по таймауту, определяющемуся случайным образом, от 1 до 30 дней. Как видно из стейтчарта, из данного состояния выходит два действия (2 и 3), и оба могут произойти по завершению таймаута. Какой из вариантов выпадет, определяется случайным образом, какое действие произойдет раньше, вероятности у событий одинаковые, так как в обоих случаях таймаут одинаков. Первая составляющая произведения это сгенерированное значения экспоненциального распределения. Экспоненциальное распре-

деление часто используется для представления промежутка времени между случайными событиями, например, времени между прибытиями заявок в модели СМО или времени между отказами в моделях надежности. Напомним, что из состояния «Working» может выйти два состояния «Grow» (Рост) и «Lesser» (Регрессия). Какое из них произойдет, определится случайным образом. Если выйдет, что у первого состояния счетчик сработает раньше, то запустится действие 2, если же у второго, то действие 3. Рассмотрим вариант перехода предприятия в состояние «Grow». Оно характеризуется тем, что на предприятии открывается новые вакансии, появляются новое рабочее место, поэтому компания добавляется в список нанимающих компаний и при следующем распределении безработных оно будет готово принять на работу сотрудников. Выход из данного состояния осуществляется действием 6 по таймауту, который составит от 0 до 80 дней. Переход в состояние «Lesser» связан, во-первых, с запретом для предприятий на трудоустройство работников. Далее, внутри самого действия, количество рабочих мест на предприятии сокращается на единицу, после чего проверяется, если количество разрешенных рабочих мест превышает настоящее количество, то предприятие увольняет с работы сотрудника, имеющего самую низкую заработную плату. Из данного состояния также выходит еще одно действие номер 8, оно имеется на случай, что на предприятии не останется ни одного работающего человека, тогда этому предприятию разрешается нанять на работу трех человек и отправиться в начало стейтчарта для дальнейшего функционирования. Выход из состояния осуществляется с помощью действия 7, происходящего по таймауту, который составит от 0 до 80 дней. Результатом деятельности предприятий, как уже было сказано выше, является валовой выпуск. В самом начале запуска программы, в начале года для каждого предприятия рассчитывается валовой выпуск, вместо данных о численности сотрудников берется и в случае численности на на-

чало года, и в случае численности на конец года размер штата на начало функционирования программы. Когда модельное время доходит до 31 декабря, то фиксируется новое значение, которое и будет соответствовать численности сотрудников предприятия на конец года. Тогда же, 31 декабря подсчитывается валовой выпуск организации за год. В случае если валовой выпуск за год набрал обороты, то есть увеличился, то для предприятия на следующий год увеличится значение инвестиций в основной капитал и поднимутся заработные платы сотрудников предприятия на 10%. Если выпуск остался на прежнем уровне, либо уменьшился, то инвестиции упадут на 10%. Таким образом, поведение агентов-предприятий складывается в зависимости от валового выпуска, полученного ими в прошлый и настоящий год, увеличивая инвестиции в основной капитал, при повышении валового выпуска и уменьшая вложения в случае убыли. Экономически интерпретировать данное поведение можно следующим образом: основную часть инвестиций в основной капитал часто составляют собственные внутренние средства предприятия, складывающиеся из прибыли, являющейся частью валового выпуска, тем самым обуславливая прямо пропорциональную зависимость между показателями инвестиций в основной капитал в следующем периоде и значением валового выпуска в текущем периоде. Для отображения информации по городу, а также по отдельным агентам используются различные информационные блоки. Информационный блок, посвященный предприятиям выводит на экран данные о налогах на прибыль предприятий, фонде заработной платы, а также об удержанном с сотрудников предприятий выплачиваемом НДФЛ. Программа позволяет просмотреть информацию о случайно выбранном предприятии, куда выносятся вся доступная информация на настоящий момент о случайно подобранном предприятии из выбранной на карте зоны:

1. номер агента-предприятия;



2. вид деятельности агента-предприятия;
3. количество сотрудников на предприятии;
4. размер основных фондов за текущий год агента-предприятия в рублях;
5. инвестиции в основной капитал за текущий год агента-предприятия в рублях;
6. валовой выпуск агента-предприятия за прошедший год;
7. фонд заработной платы агента предприятия на настоящий момент.

На сегодняшний день построена комплексная агент-ориентированная модель развития города, которая позволяет отслеживать динамику социально-экономического состояния городской системы. Модель не включает в себя несколько важных компонентов городской структуры, таких как государство или банковская сфера, поэтому она подлежит следующей доработке. Также подлежит усовершенствованию и существующий алгоритм поведения агентов, а также набор их характеристик, в особенности для агентов предприятий учитывать их размер (объект малого, среднего, крупного бизнеса).

- [1] *Бахтизин А. Р.* Агент-ориентированные модели экономики. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2008. – 279 с.
- [2] *Сушко Е. Д.* Мультиагентная модель региона: концепция, конструкция и реализация / Предпринт WP/2012/292. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 54 с.
- [3] *Фаттахов М. Р.* Агент-ориентированная модель социально-экономического развития мегаполисов (на примере г. Москвы) // автореферат дисс. канд. эконом. наук. – М. – 2011. – 30 с.

- [3] *Электронный ресурс* Федеральная служба государственной статистики. Режим доступа: <http://www.gks.ru/>, свободный. – Загл. с экрана.

УДК 534-143

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДЛЯ ЧИСТОЙ ЖИДКОСТИ

**Гильманова Г. И. (Уфа, БашГУ, Центр микро- и  
наномасштабной динамики дисперсных систем)**

### **Введение**

Распространение акустических возмущений в жидкости приводит к появлению газовых и паровых микропузырьков, а также к их колебанию, движению и схлопыванию. Кроме того, наличие пузырьков в жидкости и их размеры существенно влияют на распространение акустических волн. Интерес к акустической кавитации связан с сопровождающими её физическими и химическими эффектами, такими как эрозия (механическое повреждение поверхности), шум, управление химическими реакциями, излучение света (сонолюминесценция), воздействие на биологические клетки и т.п. [1] В работе [2] показано, что при воздействии акустического поля пузырьки образуют различные структуры. Это явление получило название самоорганизация. В работе [3] показано численное исследование явления самоорганизации.

Самоорганизация пузырьков в акустическом поле или самодействие акустических волн в пузырьковой жидкости это сильно нелинейный эффект благодаря двустороннему взаимодействию пузырьков и акустического поля. [3] Установившиеся акустические колебания описываются трехмерным уравнением Гельмгольца. На

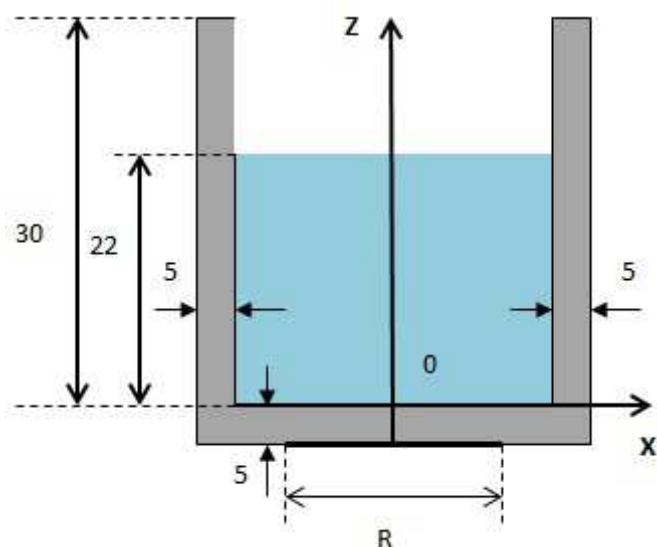


Рис. 1: Геометрия экспериментальной установки

данном этапе решения задачи о самоорганизации, реализован решатель для трехмерного уравнения Гельмгольца в кубе для чистой жидкости.

### Геометрия экспериментальной установки

Рассматривается параллелипипед с внутренними размерами  $30 \times 30 \times 30$  мм<sup>3</sup>, сделанный из акрила с толщиной стенок 5 мм и наполненный водой объемом 20 мл, который обеспечивает высоту 22 мм. К нижней части параллелипипеда крепится дискообразный акустический преобразователь с радиусом 14 мм.

Вычислительная область упрощается до размеров  $40 \times 40 \times 27$  мм<sup>3</sup>. Акустический преобразователь расположен на высоте  $z = -5$  мм. Координата  $z = 0$  соответствует нижнему уровню воды. В расчетах, свойства акрила и воды предполагаются одинаковыми, что определяет выбор расчетной области (в том числе частью коробки

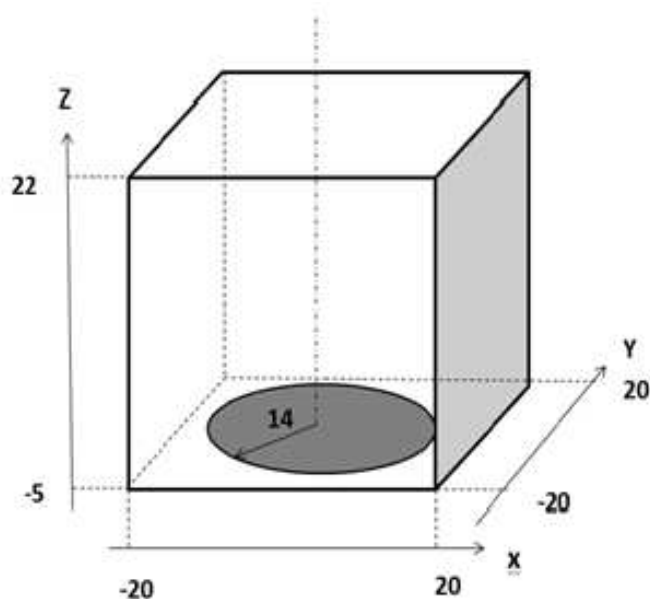


Рис. 2: Вычислительная область

над уровнем воды можно пренебречь). [3]

### Математическая постановка задачи

Благодаря низкой сжимаемости акрила и воды мы считаем, что акустические волны в этих материалах являются линейными и гармоническими по времени, это означает, что акустическое давление описывается уравнением (1)

$$p'(r, t) = \epsilon p_* \operatorname{Re}\{A(r)e^{-i\omega t}\} \quad (1)$$

где  $\epsilon p_*$  – амплитуда давления,  $A$  – безразмерная комплексная

амплитуда давления,  $\omega = 2\pi t$  – круговая частота,  $r$  – радиус вектор,  $t$  – время,  $p'$  – удовлетворяет уравнению (1) . [3,4]

Задача. Требуется найти распределение амплитуды давления,

$$\Delta^2 A + k_l^2 A = 0; \quad k_l = \frac{\omega}{C_l} \quad (2)$$

где  $k_l$ -волновое число и  $C_l$  - скорость звука в жидкости. Расчетная область  $[-\frac{L_x}{2}, \frac{L_x}{2}] \times [-\frac{L_y}{2}, \frac{L_y}{2}] \times [z_{min}, L_z - z_{min}]$ , где  $L_x, L_y, L_z$ , размеры коробки. Граничные условия могут быть наложены условием (3)-(4)

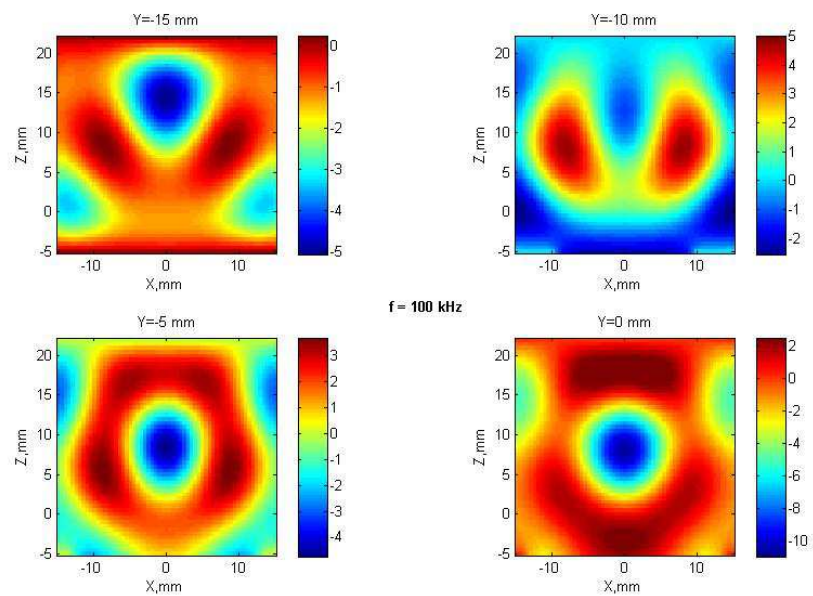
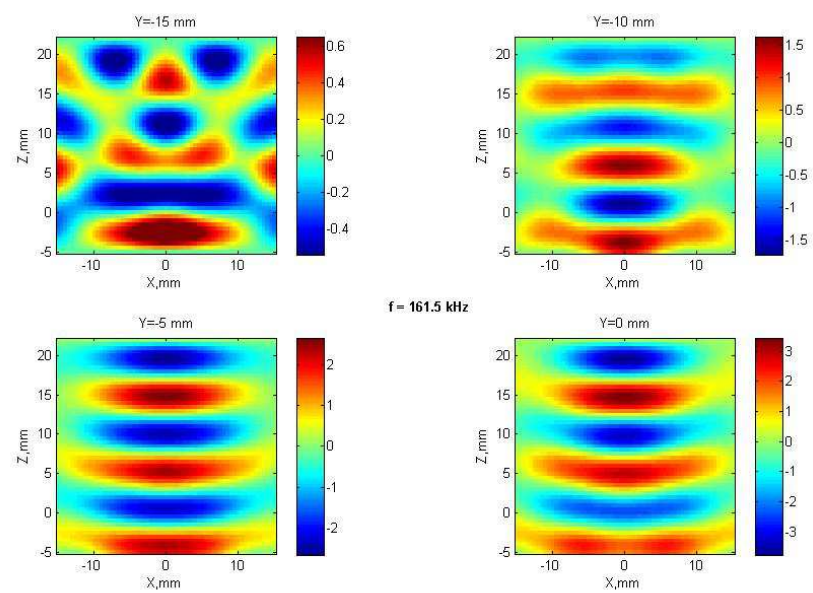
$$\begin{aligned} A|_{x=\pm L_x/2} = 0, \quad A|_{y=\pm L_y/2} = 0, \quad A|_{z=L_z-z_{min}} = 0, \\ A|_{z=z_{min}, x^2+y^2 > R^2} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} |_{z=z_{min}, x^2+y^2 < R^2} = k_l \quad (4)$$

где  $R$ - радиус акустического преобразователя.

### Вычислительный эксперимент

Для решения задачи (2)-(4) применяется метод конечных разностей. В замкнутой области введем в рассмотрение равномерную сетку,  $N_x \times N_y \times N_z$ ,  $N_x = N_y = 80$ ,  $N_z = 54$ . Результаты показаны на рисунках 3 и 4 в сечении по оси  $y$ . Рисунки демонстрируют модель распределение акустического давления, которое во многом зависит от частоты. Вычислительные эксперименты были проведены при различных частотах от 89 кГц до 209.2 кГц. Ниже приводятся результаты для  $f = 100$ кГц и  $f = 161.5$ кГц

Рис. 3: Распределение акустического поля при  $f = 100 \text{ kHz}$ Рис. 4: Распределение акустического поля при  $f = 161.5 \text{ kHz}$

## Заключение

В данной работе был успешно реализован решатель для моделирования акустического поля для чистой жидкости в среде Matlab. Проведены тестовые расчеты при различных частотах от 89 кГц до 209.2 кГц.

## Благодарности

Автор выражает благодарность профессору Университета штата Мэриленд, д.ф.-м.н. Н.А. Гумерову и профессору Университета штата Северная Дакота, д.ф.-м.н. И.Ш. Ахатову за руководство данной работой, выполненной в Центре “Микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем” при Башкирском Государственном Университете.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040).

## Литература

- [1] *U. Parlitz, R. Mettin, S. Luther, I. khatov, M. Voss, and W. Lauterborn* Spatiotemporal dynamics of acoustic cavitation bubble clouds //Phil. Trans. R. Soc. Lond.A 357, 313-334 1999.
- [2] *N.A. Gumerov* On self-organization of voids in acoustic cavitation //Third International Conference on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8–12, 1998
- [3] *N. A. Gumerov, I. S. Akhatov, Claus-Dieter Ohl, S. P. Sametov, M. V. Khasimulin, G. I. Gilmanova* Waves of Acoustically Induced Transparency in Bubbly Liquids: Theoretical Prediction and Experimental Validation //Proceedings of ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress Exposition, 2013

- [4] *N. A. Gumerov, C.-D. Ohl, I. S. Akhatov, S. P. Sametov, and M. V. Khasimullin* Waves of acoustically induced transparency in bubbly liquids: Theory and experiment // 21st International Congress on Acoustics, 165th Meeting of the Acoustical Society of America, 52nd Meeting of the Canadian Acoustical Association, Montreal, Canada, June 2-7, J. Acoust. Soc. Am. 133, 3277.

УДК 517.53

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ  
МИНОРАНТЫ, НЕ ПОДЧИНЕННОЙ УСЛОВИЮ БАНГА

Гайсин Р. А. (Уфа, БашГУ)

При изучении классов Карлемана на произвольных континуумах комплексной плоскости особую роль играют так называемые регулярные последовательности.

**Определение 3.** Последовательность  $\{M_n\}$  ( $M_n > 0$ ) называется регулярной, если для чисел  $m_n = \frac{M_n}{n!}$  ( $n \geq 0$ ) выполняются свойства [1]:

- а)  $m_n^2 \leq m_{n-1}m_{n+1}$  ( $n \geq 1$ );
- б)  $\sup_n \left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$ ;
- в)  $m_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Любую положительную последовательность  $\{M_n\}$ , удовлетворяющую свойствам а), в), будем называть слабо регулярной.

Классом Карлемана на континууме  $\gamma \subset \mathbb{C}$  называется множество

$$C_\gamma(M_n) = \{f \in C^\infty(\gamma) : \sup_{z \in \gamma} |f^{(n)}(z)| \leq K_f^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\}.$$



Здесь для любого  $a \in \gamma$  производная  $f'(a)$  понимается как предел

$$f'(a) = \lim_{z \in \gamma, z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Высшие производные  $f^{(n)}(a)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) определяются по индукции. Не умаляя общности, в дальнейшем будем считать, что  $M_0 = 1$ .

**Определение 4.** Класс  $C_\gamma(M_n)$  называется квазианалитическим, если из того, что  $f \in C_\gamma(M_n)$  и  $f^{(n)}(c) = 0$  при всех  $n \geq 0$  в некоторой граничной точке  $c$  континуума  $\gamma$ , следует  $f(z) \equiv 0$ .

Класс Карлемана  $C_\gamma(M_n)$  называется регулярным, если последовательность  $\{M_n\}$  является регулярной. Отметим, что общей ситуации, когда континуум  $\gamma$  отличен от отрезка, обычно рассматриваются только регулярные классы Карлемана (см. [1], [2], [3]). Так, если  $\gamma$  — дуга или  $\gamma = \bar{D}$ , где  $D$  — односвязная ограниченная область плоскости со спрямляемой жордановой границей, условия квазианалитичности регулярных классов Карлемана в различных терминах изучались соответственно в работах [2], [3]. Но в общем случае класс Карлемана  $C_\gamma(M_n)$  может и не быть регулярным. Поэтому важно выяснить, при каких условиях на  $M_n$  существует регулярная миноранта  $\{M_n^*\}$  для  $\{M_n\}$ , (не)удовлетворяющая условию Банга

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} = \infty.$$

Это позволяет перейти к изучению регулярного класса  $C_\gamma(M_n^*)$ .

В настоящей статье и будет доказан критерий существования такой последовательности  $\{M_n^*\}$ .

Справедлива следующая

**Теорема 7.** Пусть  $M_n > 0$ ,  $\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для того, чтобы существовала регулярная последовательность  $\{M_n^*\}$ ,

такая, что

$$M_n^* \leq M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega_T(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Здесь  $\omega_T = \omega_T(r)$  — наилучшая вогнутая мажоранта функции  $\ln T(r)$ , где

$$T(r) = \max_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}.$$

Доказательство теоремы основано на свойствах преобразования Лежандра. Поэтому вкратце остановимся на них.

Пусть  $M(x)$  — любая непрерывная возрастающая на  $[0, \infty)$  функция,  $M(x) = o(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда функция

$$m(y) = \sup_{x > 0} (M(x) - xy),$$

определенная при  $y > 0$ , называется преобразованием Лежандра функции  $M(x)$ . Если  $M(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , то  $m(y) \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow 0$ . Функция  $m(y)$ , как верхняя огибающая убывающих по  $y > 0$  функций, также убывающая функция. Положим

$$M^*(x) = \inf_{y > 0} (m(y) + yx).$$

Ясно, что  $M^*$  — наименьшая вогнутая возрастающая мажоранта функции  $M$ :  $M(x) \leq M^*(x)$ . Отметим, что если функция  $M$  вогнута, то  $M(x)/x \downarrow$  при  $x \geq a$ . С другой стороны, если  $0 < M(x) \uparrow$ ,  $M(x)/x \downarrow$  при  $x > 0$ , то  $M^*(x) < 2M(x)$  где  $M^*$  — наименьшая вогнутая мажоранта  $M$  [4; гл.VII, §D, с.326].

**Теорема 8.** [4; гл.VII, §D, с.333] Пусть  $M(x)$  — возрастающая вогнутая на  $[0, \infty)$  функция,  $m(y)$  — преобразование Лежандра

функции  $M(x)$ ,  $a > 0$  такое, что  $m(a) = 1$ . Тогда интегралы

$$\int_0^a \ln m(y) dy, \quad \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2} dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Приступим к доказательству теоремы 1.

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Из равенств

$$\frac{z^n}{M_n} = \frac{n!}{M_n} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{e^{zt}}{t^{n+1}} dt \quad (\delta > 0)$$

и условий  $M_n^* \leq M_n$ ,  $\left(\frac{M_n^*}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  имеем:

$$\frac{r^n}{M_n} \leq \frac{n!}{M_n^* \delta^n} e^{\delta r} \leq H^*(\delta) e^{\delta r} \quad (|z| = r), \quad (1)$$

где

$$H^*(\delta) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n^* \delta^n}.$$

Далее, из (1) следует, что

$$T(r) \leq \exp \left[ \inf_{\delta > 0} (\ln H^*(\delta) + \delta r) \right] = \exp(\omega^*(r)).$$

Проверяется, что  $\omega^*$  — неотрицательная неограниченно возрастающая и вогнутая функция на  $[0, \infty)$ . Очевидно,  $\ln H^*(\delta) + \delta r \geq \omega^*(r)$ . Следовательно,

$$\ln H^*(\delta) \geq \sup_{r > 0} (\omega^*(r) - \delta r) \equiv m(\delta).$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

то [1]

$$\int_0^d \ln \ln H^*(\delta) d\delta < \infty,$$

и тем более

$$\int_0^d \ln m(\delta) d\delta < \infty,$$

где  $d > 0$  такое, что  $m(d) = 1$ . Но тогда по теореме 2 возрастающая функция  $\omega^*$  принадлежит классу сходимости  $\Omega$ , то есть

$$\frac{\omega^*(r)}{r} \downarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad \int_1^{\infty} \frac{\omega^*(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Так как  $\omega_T(r) \leq \omega^*(r)$ , то функция  $\omega_T$  также принадлежит  $\Omega$ .

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega_T(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Тогда

$$I(\delta) = \delta \int_0^{\infty} T(r) e^{-\delta r} dr \leq \delta \int_0^{\infty} \exp(\omega_T(r) - \delta r) dr = \delta M(\delta) = H(\delta).$$

Так как, очевидно

$$\frac{r^n}{M_n} \leq T(r) \quad (n \geq 0),$$

то

$$\delta \frac{1}{M_n} \int_0^{\infty} r^n e^{-\delta r} dr \leq I(\delta) \leq H(\delta).$$

Отсюда для любого  $n \geq 0$

$$\frac{n!}{M_n \delta^n} \leq H(\delta) \quad (\delta > 0), \quad (2)$$

в частности,  $M'_n \leq M_n$ , где

$$M'_n = \sup_{\delta > 0} \frac{n!}{H(\delta)\delta^n} \quad (n \geq 0).$$

Поскольку оценки (2) верны для любого  $n \geq 0$ , то при  $\delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln H(\delta)} = 0.$$

Следовательно,  $\frac{\ln H(e^{-x})}{x} \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ , и тогда  $M'_n = n! e^{c_n}$ , где

$$c_n = \sup_{x > 0} (nx - \ln H(e^{-x})).$$

Воспользуемся теперь свойствами преобразования Юнга-Фенхеля-Лежандра [5, ч. II, гл. 1, § 5, предложение 1]: *если функция  $\varphi$  непрерывна на  $\mathbb{R}_+$ , и  $\frac{\varphi(y)}{y} \rightarrow +\infty$  при  $y \rightarrow +\infty$ , то сопряженная по Юнгу к  $\varphi$  функция*

$$\psi(x) = \sup_{y > 0} (xy - \varphi(y))$$

*является выпуклой на  $\mathbb{R}_+$  функцией, также удовлетворяющей условию:*

$$\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, видим, что последовательность  $\{c_n\}$  — выпуклая,  $\frac{c_n}{n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что  $\frac{c_n}{n} \uparrow$  при  $n \rightarrow \infty$ . Значит,

$$\left(\frac{M'_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \uparrow \infty$$

при  $n \rightarrow \infty$ , и последовательность  $\{M'_n\}$ ,  $M'_n \leq M_n$ , является слабо регулярной.

Так как  $H(\delta) = \delta M(\delta)$ , то

$$M'_n \geq \frac{n!}{M(\delta)\delta^{n+1}} \quad (n \geq 0).$$

Отсюда

$$h(\delta) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M'_n \delta^{n+1}} \leq M(\delta). \quad (3)$$

Вспоминая теперь определение функции  $M$ , имеем

$$M(\delta) \leq \exp \left( \sup_{r > 0} \left( \omega_T(r) - \frac{\delta}{2} r \right) \right) \int_0^\infty e^{-\frac{\delta}{2} r} dr = \frac{2}{\delta} e^{m(\frac{\delta}{2})},$$

где  $m(\delta)$  — преобразование Лежандра функции  $\omega_T(r)$ .

Пусть  $c > 0$  такое, что  $h(c) = e$ . Так как  $h(\delta) \leq M(\delta)$ , то  $M(\delta) \geq e$  при  $0 < \delta \leq c$ . Имеем:  $\ln M(\delta) \leq \ln \frac{2}{\delta} + m(\frac{\delta}{2})$  ( $0 < \delta \leq c$ ). Отсюда, пользуясь оценкой

$$\ln^+(a + b) \leq \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2,$$

где  $\ln^+ x = \max(0, \ln x)$ , получаем, что при  $0 < \delta \leq q \leq c$

$$0 \leq \ln \ln M(\delta) < \ln m(\frac{\delta}{2}) + \ln \ln \frac{2}{\delta} + \ln 2.$$

Но по теореме 2 интеграл  $\int_0^q \ln m(\delta) d\delta$  сходится одновременно с интегралом  $\int_1^\infty \frac{\omega_T(r)}{r^2} dr$ . А поскольку  $\int_0^q \ln \ln \frac{2}{\delta} d\delta < \infty$ , то

$$\int_0^q \ln \ln h(\delta) d\delta \leq \int_0^q \ln \ln M(\delta) d\delta < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{M'_n}{M'_{n+1}} < \infty. \quad (4)$$

Действительно, поскольку последовательность  $\left\{ \frac{M'_n}{n!} \right\}$  логарифмически выпукла, то из (3) заключаем, что

$$\sup_{\delta > 0} \frac{n!}{h(\delta) \delta^{n+1}} = M'_n < \infty \quad (n \geq 0).$$

Сходимость ряда (4) вытекает теперь из теоремы 7 работы [2]. Но тогда существует функция  $R = R(t)$ ,  $0 < R(t) \downarrow 0$ ,  $tR(t) \downarrow 0$ ,  $t^2R(t) \uparrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , такая, что [6]

$$1) \frac{1}{(M'_n)^{\frac{1}{n}}} < R(n); \quad 2) \int_1^{\infty} R(t) dt < \infty.$$

В этом случае, как показано в [6], существует регулярная последовательность  $\{M_n^*\}$ ,  $M_n^* \leq M'_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (M_n^*)^{-\frac{1}{n}} < \infty$ . Осталось заметить, что согласно теореме Данжуа-Карлемана, последнее условие эквивалентно условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty.$$

Теорема полностью доказана.

*Замечание.* Из доказательства теоремы 2 видно, что для существования слабо регулярной миноранты  $\{M_n^*\}$  последовательности  $\{M_n\}$  достаточно выполнения условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r)}{r} = 0.$$

Поскольку мажоранта  $\omega_T$  вогнутая, последнее условие равносильно тому, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\omega_T(r)}{r} = 0.$$

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю Р.С. Юлмухаметову за постановку задач и внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Дынькин Е. М.* Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ (Труды VII Зимней школы. Дрогобыч) М.:

АН СССР. Центральный экономико-математический институт, 1976. С. 40–73.

- [2] *Гайсин А. М., Кинзябулатов И. Г.* Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 7. С. 41–62.
- [3] *Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 2. С. 178–217.
- [4] *Koosis P.* The logarithmic integral I. Cambridge: University Press, 1988 (1998).
- [5] *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. М.: Прометей, 2005.–232 с.
- [6] *Гайсин Р. А.* Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для областей общего вида // Уфимский матем. журнал. 2013. Т. 5. № 3. С. 28–40.

УДК 519.8

## СИНТАКСИЧЕСКИЙ АНАЛИЗАТОР ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ

**Ибрагимова Альбина Альбертовна (Стерлитамак, СФ БашГУ)**

### Введение

Перед программистом нередко возникает задача вычисления арифметических или иных выражений, неизвестных на этапе компиляции программы. К сожалению, готовых средств для этого



в Delphi нет. В данной работе представлен способ программного разбора и вычисления арифметических выражений. Идея была реализована с целью ее последующего применения для анализа функции (введенной пользователем), которую необходимо минимизировать.

Для поиска безусловного минимума функции одной переменной использовались метод золотого сечения, метод деления интервала пополам и метод дихотомии. Для поиска безусловного минимума функции нескольких переменных – метод конфигураций, метод Розенброка, метод деформируемого многогранника и метод сопряженных направлений (Пауэлла).

Задача поиска минимума является актуальной и на сегодняшний день. Проект ориентирован как на пользователя, работающего непосредственно с рассматриваемой областью задач, так и на пользователя, не связанного напрямую с ней. Для первой категории пользователей программа может использоваться для проверки вычислений, уже сделанных самим пользователем, для второй – для поиска решения поставленной задачи.

В ходе работы перед нами были поставлены следующие задачи:

1. изучить численные методы безусловной минимизации функции многих переменных;
2. составить алгоритмы методов и программно реализовать их на языке Delphi;
3. протестировать программу на задачах с известным аналитическим решением;
4. разработать синтаксический анализатор выражения для функции;
5. апробировать результаты.

Результатом реализации проекта является программный продукт, включающий в себя синтаксический анализатор функции,

методы для нахождения безусловного минимума функции многих переменных, графическое представление заданных функций и значения функций в заданных точках.

## **Глава 1. Принцип построения лексического анализатора**

В данной работе для разбора арифметических выражений использовался метод рекурсивного нисходящего спуска.

Для анализа использовался принцип разделения выражения на отдельные лексемы. Лексема – это последовательность символов языка, которая имеет смысл только как единое целое. В синтаксическом анализе рассматривается два вида символов: терминальные и нетерминальные. Терминальные символы – это отдельные символы или их последовательности, являющиеся с точки зрения синтаксиса неразрывным целым, не сводимым к другим символам. Нетерминальные символы – это некоторая абстракция, которая по определенным правилам сводится к комбинации терминальных и/или других нетерминальных символов. Правила должны быть такими, чтобы существовала возможность выведения из них выражения, полностью состоящего из терминальных символов за конечное число шагов, хотя рекурсивные определения терминальных символов друг через друга или через самих себя допускаются.

Для каждого нетерминального символа мы ввели отдельную функцию, разбор начинается с символа самого верхнего уровня и следует правилам, записанным для этого символа. Такой способ синтаксического анализа называется левосторонним рекурсивным нисходящим анализом. Левосторонним называется потому, что символы в выражении перебираются слева направо, нисходящим потому, что сначала анализируются символы верхнего уровня, а потом символы нижнего уровня.

Выражение содержит переменные и функции, которые в свою очередь являются идентификаторами. Переменной будем назы-

вать отдельно стоящий символ (буква латинского алфавита), функцией – идентификатор, после которого в скобках записан аргумент, в качестве которого может выступать любое допустимое выражение. Переменные и функции, так же, как и выражения, заключенные в скобки, выступают в роли множителей.

При анализе выражения дополнительно учитывался принцип приоритета операторов, то есть в первую очередь находятся значения выражений в скобках, далее выполняется операция возведения в степень, затем осуществляется умножение или деление, и в последнюю очередь – сложение или вычитание [3].

## Глава 2. Использование программы при решении задач

Задача 1. Найти минимум целевой функции:

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \quad (1)$$

Решение.

1. Аналитическое решение. Очевидно, что точкой минимума функции  $f(x, y)$  является точка  $(2, 3)$ . В результате получаем:

$$(x^*, y^*) = (2, 3) \quad (2)$$

2. Решение с помощью программы `Function_Minimum`.

В результате выполнения программы получаем решение, изображенное на рисунке 1.

Данное решение совпадает с решением, найденным аналитически.

## Заключение

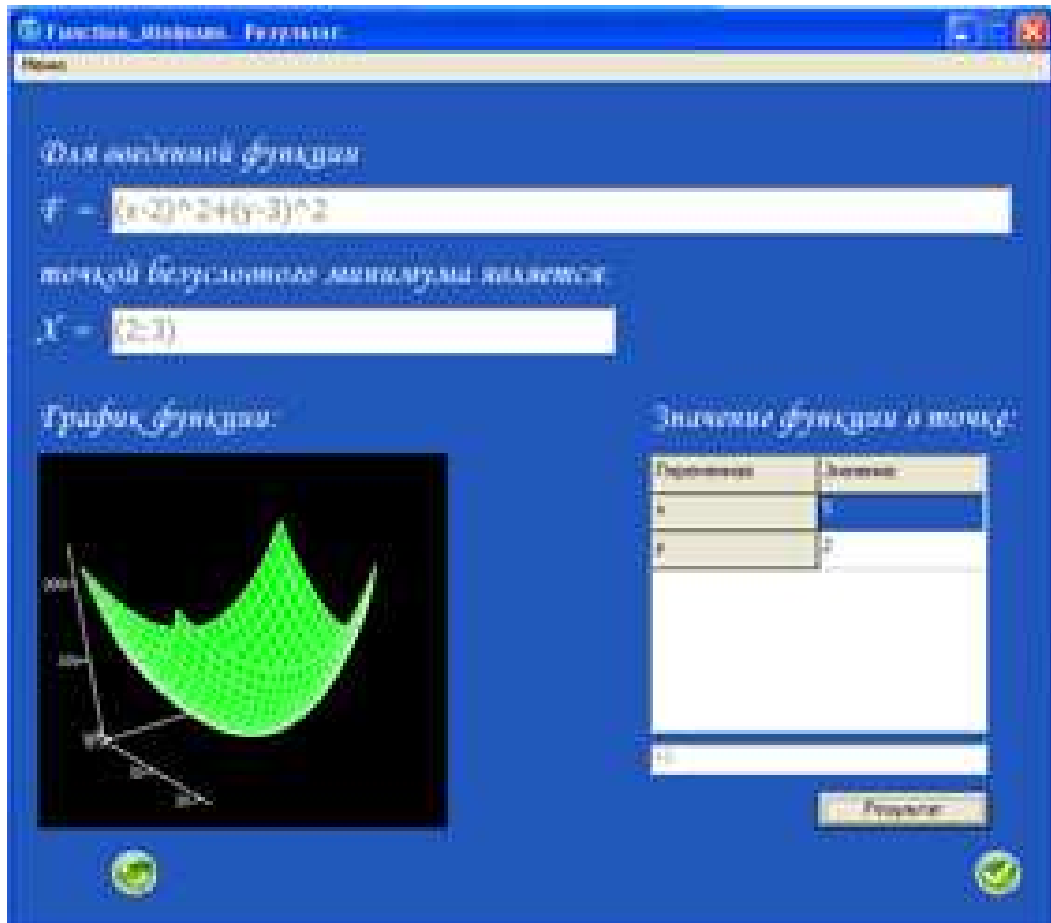


Рис. 1: Результат программы на примере

В ходе выполнения работы были изучены численные методы безусловной минимизации функций одной и многих переменных, были составлены алгоритмы методов и программно реализованы на языке Delphi. Также был разработан синтаксический анализатор выражения для функции, позволяющий проводить поиск экстремума одномерных и многомерных функций, визуализировать результаты в виде графиков, находить значения функций в точке. Все примеры показали удовлетворительное согласование с аналитическим решением.

Программа написана на языке программирования Delphi в среде компилятора Borland Delphi 7.0. Объем программы составляет 15,9 Мб. Минимальные системные требования для установки программы: процессор – Intel Pentium II / 233 МГц, операционная система – Microsoft Windows 98, 2000, Windows XP, Vista, 7; ОЗУ – 4 Мб.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьев А.Б.* О чем не пишут в книгах по Delphi. СПб.: БХВ-Петербург. 2008. 576 с.
2. *Михайлова Т.А., Ибрагимова А.А.* Синтаксический анализатор для минимизации функций многих переменных // Межвуз. Студ. научн.-практ. конф. по прикладной математике: материалы. Уфа.: РИЦ БашГУ. 2012. С. 49 – 50.

УДК 541.128

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

**Икрамов Рустам Джамолович (Стерлитамак, СФ  
БашГУ)**

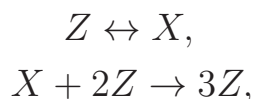
### **Введение**

В настоящее время исследовано и проанализировано множество нелинейных и нестационарных явлений в каталитических процессах. Эти явления, к которым относятся, прежде всего, множественность стационарных состояний и автоколебания, часто называются критическими явлениями. Интерес к их изучению определяется необходимостью их качественного объяснения и численного описания механизмов и закономерностей протекания реакций, а также необходимостью оптимизации режимов работы химического реактора, поскольку автоколебательные режимы неблагоприятны для функционирования технических систем[1]. Именно поэтому исследование критических явлений, построение их математических моделей является одним из важных вопросов в химической кинетике, а результаты исследования можно использовать как в теоретических, так и в практических целях.

### **§1. Автокаталитический триггер**

Основными критическими явлениями, возникающими в ходе реакции, являются триггер, описывающий множество стационарных состояний и осцилляция, представляющая собой колебания температуры или концентраций реагентов.

Рассмотрим простейшую модель, в которой присутствует множество стационарных состояний.



где  $Z$  – катализатор,  $X$  – промежуточное вещество. Составим дифференциальные уравнения, описывающие данную модель:

$$\dot{x} = k_1 z - k_{-1} x - k_2 x z^2, \quad (1)$$

где в соответствии с законом сохранения массы  $z = 1 - x$ .

Найдем стационарные точки, приравняв дифференциальное уравнение (1) к нулю и выразив  $k_1$  как функцию от переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ k_1 z - k_{-1} x - k_2 x z^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Построим графики зависимости  $x$  от  $k_1$  при значениях  $k_2 = 1, 2, 3$  (рис. 1).

Область множественности стационарных состояний может быть выписана в явном виде. Например, при  $k_1 = 3/16, k_{-1} = 0, k_2 = 1$  три стационарных состояния имеют следующие значения:  $x_1 = 1, x_2 = 3/4, x_3 = 1/4$ . Если  $k_{-1} \neq 0$ , то уже внутри отрезка  $[0, 1]$  стационарное значение имеет либо одно, либо три значения[3].

Очевидно, что при увеличении параметра  $k_2$  область множественности стационарных состояний расширяется. Также можно выделить области, в которых наблюдается множественность стационарных состояний. На рис. 2 три области: в первой – одно стационарное состояние, во второй – три стационарных состояний, в третьей – одно стационарное состояние:

## §2. Автоколебания

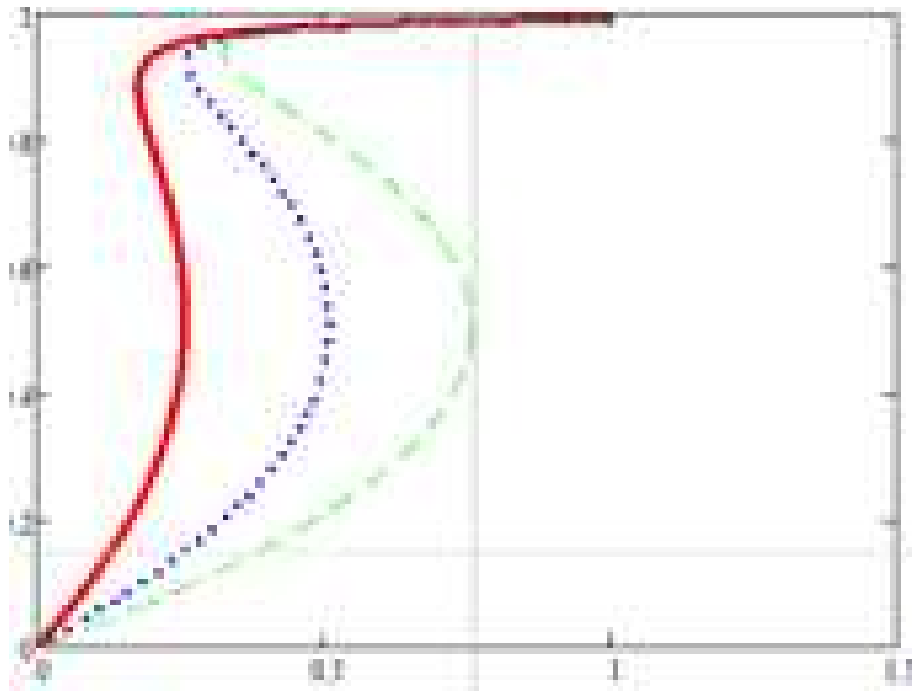


Рис. 1: Графики зависимости  $x$  от  $k_1$



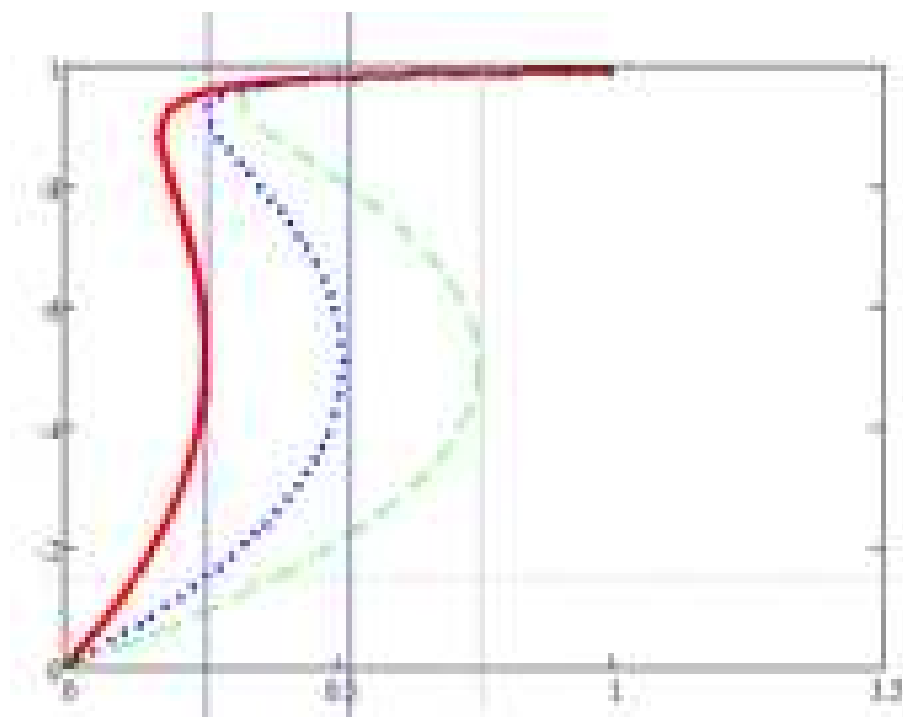
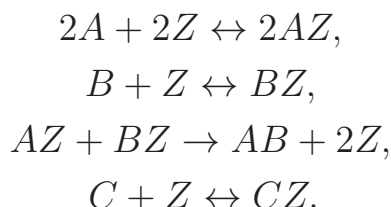


Рис. 2: Графики зависимости  $x$  от  $k_1$ , области разделены синими линиями

Для наглядного представления автоколебаний рассмотрим модель Лэнгмюра-Хиншельвуда:



Этим стадиям реакции отвечает нестационарная кинетическая модель вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2k_1z^2 - 2k_{-1}x_1^2 - k_3x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_2z - 2k_{-2}x_2 - k_3x_1x_2, \\ \dot{x}_3 &= k_4z - k_{-4}x_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $z = 1 - x_1 - x_2 - x_3$ ,  $x_1, x_2, x_3$  – концентрации веществ  $AZ, BZ, CZ$  соответственно;  $k_i > 0$  – константы скоростей реакции.

График численного решения системы дифференциальных уравнений (3) представлен на рис. . На рисунке представлены графики колебаний концентраций веществ  $x_1, x_2$ :

Концепция простых механизмов критических явлений в химической кинетике в настоящее время активно развивается. Их подробный параметрический анализ важен не только с методической точки зрения, но и с практической, так как в конкретные схемы превращения они могут входить в качестве составляющих блоков[2].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев Н.В.* Критические явления в системе «автокаталитический осциллятор + диффузия». - Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2005.

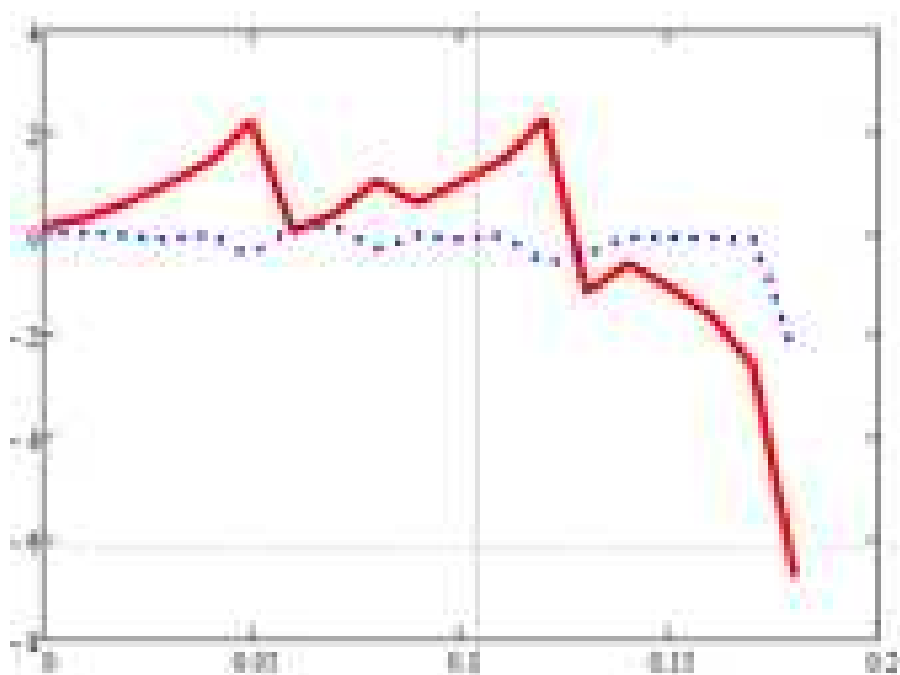


Рис. 3: График численного решения системы ДУ (3)

2. *Пушкарева Т.П., Перегудов А.В.* Математическое моделирование химических процессов: учебное пособие. - Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2013.
3. *Быков В. И.* Моделирование критических явлений в химической кинетике – М.: КомКнига, 2006. – 328 с.

УДК 519.254+57.044

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА  
ПОЧВЫ НА МИКРОБНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

**Искандарова Динара Гайнисламовна (Стерлитамак, СФ  
БашГУ)**

Математические и математико-статистические методы исполь-

зуются в различных областях науки, например биология, медицина, сельское хозяйство. Возникает необходимость в разработке различных методик группировки данных, расчета важнейших статистических показателей, характеризующих эксперимент. Математическая статистика – наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью и закономерностью. Математическая статистика различает следующие методы: корреляционный, регрессионный, факторный, кластерный анализы. В частности, множественная регрессия состоит в анализе связи между несколькими независимыми переменными и зависимой переменной [3].

Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель. Целью данной работы является анализ, выявление и установление формы зависимости между исследуемыми показателями, путем построения множественной регрессии. Практическая значимость заключается в изучении влияния различных факторов на степень приспособленности зерновых культур с целью формирования рекомендаций и обеспечения благоприятной среды развития.

В работе рассматриваются данные исследований зерновых культур, которые играют важную роль в мировом земледелии и растениеводстве прочно закрепила за ним статус средообразующей культуры. Однако в существующих на сегодняшний день технологиях часто не учитывают важнейшие приемы регуляции растительно-микробных взаимодействий, не дают в полной мере реализовать биологический потенциал вида и сорта [1]. В работе проводится анализ влияния различных факторов на состояние растений, таких как: нитратный азот, подвижные формы фосфора (по Кирсанову и по Чирикову), подвижные формы калия (по Чи-

рикову), сумма поглощенных оснований, гигровлага и водородный показатель. Работа имеет практический характер, направленный на выявление значимых факторов для обеспечения благоприятной среды для пшеницы.

Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Он включает в себя три круга вопросов: отбор факторов, выбор вида уравнения регрессии и оценка качества модели. Включение в модель факторов с высокой интеркорреляцией, может привести к нежелательным последствиям – система нормальных уравнений может оказаться плохо обусловленной и повлечь за собой неустойчивость и ненадежность оценок коэффициентов регрессии.

Если между факторами существует высокая корреляция, то нельзя определить их изолированное влияние на результативный показатель и параметры уравнения регрессии оказываются не интерпретируемыми. Если факторы явно коллинеарные, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдается не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами. В этом требовании проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования комплексного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям.

1. Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность.
2. Факторы не должны быть интеркоррелированы и тем более находиться в точной функциональной связи.

Выбор формы уравнения регрессии:

Линейная регрессия –  $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p + \varepsilon$

Линеаризируемые регрессии:

Степенная регрессия –  $y = ax_1^{b_1}x_2^{b_2} + \dots + x_p^{b_p}\varepsilon$

Экспоненциальная регрессия –  $y = e^{a+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_px_p+\varepsilon}$

Гиперболическая регрессия –  $y = \frac{1}{a+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_px_p+\varepsilon}$

При построении моделей уравнений для оценки качества модели используют такие показатели как: коэффициент аппроксимации ( $A$ ), который показывает расхождение расчетных значений от фактических значений; коэффициент детерминации ( $R^2$ ) – это доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая рассматриваемой моделью зависимости; коэффициент эластичности, который показывает, на сколько процентов по совокупности изменится в среднем результат от своей средней величины [2].

При проведении вычислительного эксперимента мы рассматривали пять различных зависимостей и анализировали соответствующие уравнения множественной регрессии на качественность. Рассмотрим подробно этапы анализа и порядок работы с программой на одной зависимости.

Первоначально из вкладки файл необходимо загрузить интересующий нас файл. В табличную часть формы загружаются исходные данные в формате, представленном на рис. 1. Первая строка в данном файле отвечает за количество моделируемого показателя  $y$ , вторая строка – это общее количество всех переменных, третья строка – это количество объясняющих факторов  $x$ . Далее в каждой строке задаются сначала все значения  $y$  показатели микоризации корней пшеницы, а потом значения  $x$  химический анализ почвы полей.

Желтым цветом выделено множество показателей допустимых для моделирования, оставшаяся часть таблицы – это факторы, которые являются независимыми и могут быть выбраны в качестве объясняющих.

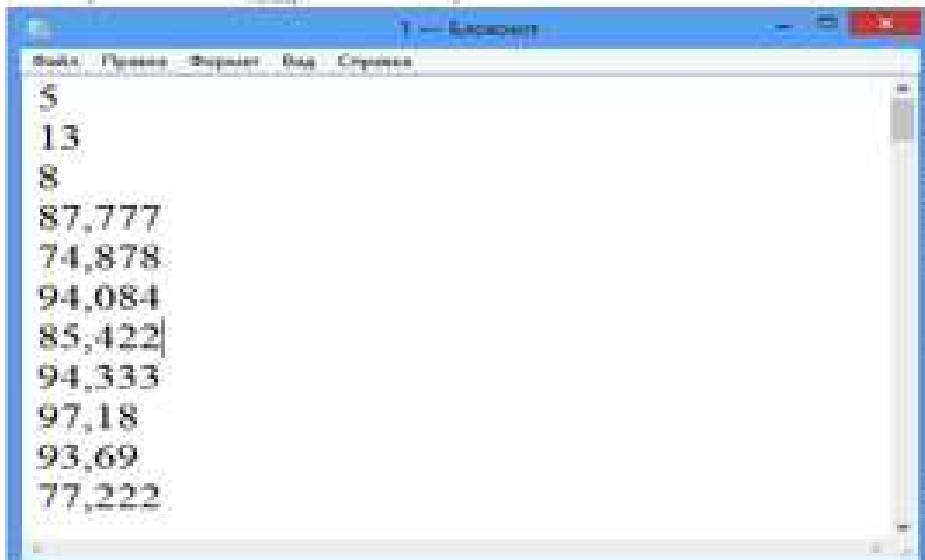


Рис. 1: Структура файла с данными

	$\Gamma_{y1}$	$\Gamma_{y2}$	$\Gamma_{y3}$	$\Gamma_{y4}$	$\Gamma_{y5}$	$\Gamma_{x1}$	$\Gamma_{x2}$	$\Gamma_{x3}$	$\Gamma_{x4}$	$\Gamma_{x5}$	$\Gamma_{x6}$	$\Gamma_{x7}$	$\Gamma_{x8}$
87.777	7.3423	7.998	4.705	0.332	8.03	6.02	7.04	43	316	50.18	473.3	44.7	
74.878	3.8874	4.711	3.05	0.222	7.1	6.22	7.3	10.5	175	482.4	332.7	15.6	
94.084	10.229	10.654	12.622	1.492	7.54	5.23	6.55	48.5	68	363.13	137.3	22.4	
85.422	5.4052	7.295	2.337	0.188	7.55	5.52	6.8	43	108	50.35	223.3	17	
94.333	10.844	11.132	11.015	1.448	5.72	7.02	7.7	3	77.3	50.01	154.7	14.5	
97.18	10.14	10.275	8.915	0.974	6.6	4.93	6.38	32.5	262	688.97	135.3	8.3	
93.69	7.008	7.353	11.985	1.167	8.11	5.91	7.11	37.5	136	44.44	296.7	16.2	
77.222	3.735	4.373	2.199	0.111	6.64	6	6.83	40	101.3	50.53	468	10.7	

Рис. 2: Выбор объясняющих и исследуемых признаков

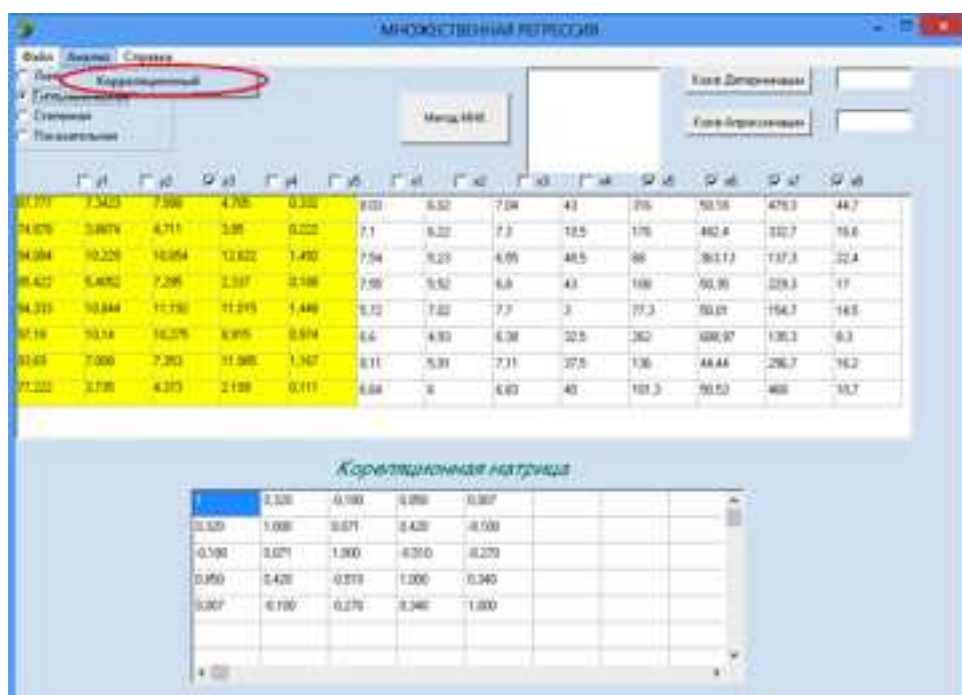


Рис. 3: Подсчет корреляционной матрицы

Предоставляется возможность выбрать с помощью флажка только один моделируемый показатель и необходимое ему количество факторов.

Также есть возможность выбрать форму уравнения регрессии. Далее на вкладке Анализ следует выбрать Корреляционный, после чего будет рассчитана корреляционная матрица (рис. 3.) С помощью кнопки Метод МНК, найдем коэффициенты уравнений. С помощью кнопок Коэф Детерминации и Коэф Аппроксимации найдем соответствующие коэффициенты. При проведении регрессионного анализа с различными зависимыми переменными были выбраны 5 моделей, практически все гиперболического типа. В ходе исследования было установлено, что наиболее значимым признаком является  $x_7$  (подвижные формы фосфора по Кирсанову).

$$Y_1(x_2, x_7, x_8) = 102,53 - 1,032x_2 - 0,04x_7 + 0,28x_8; R^2 = 0,58; A = 4,9;$$



Рис. 4: Вывод коэффициентов уравнений детерминации и аппроксимации

$$Y_2(x_1, x_5, x_7) = 3,72 - 4,6x_1^{-1} - 72,9x_5^{-1} + 1096,7x_7^{-1}; R^2 = 0,65; A = 22,6;$$

$$Y_3(x_5, x_6, x_7, x_8) = 3,16 - 189,6x_5^{-1} + 115,4x_6^{-1} + 1534,9x_7^{-1} - 31,4x_8^{-1}; R^2 = 0,95; A = 6,5;$$

$$Y_4(x_7, x_3, x_8) = 16,7 + 1582,5x_7^{-1} - 101,6x_3^{-1} - 30,8x_8^{-1}; R^2 = 0,53; A = 40,6;$$

$$Y_5(x_4, x_6, x_7) = -0,53 + 0,6x_4^{-1} + 15,6x_6^{-1} + 225,9x_7^{-1}; R^2 = 0,65; A = 72,3;$$

В качестве  $Y_1$  обозначили частоту микоризы в корневой системе,  $F\%$ ;  $Y_2$  – интенсивность колонизации микоризы в корневой системе,  $M\%$ ;  $Y_3$  – интенсивность колонизации микоризы в корневом фрагменте,  $m\%$ ;  $Y_4$  – избытие арбускул в микоризованной части корневого фрагмента,  $a\%$ ;  $Y_5$  – избытие арбускул в корневой системе,  $A\%$ .

В ходе исследований установлено, что наиболее удачными стали первая и третья модели, так как коэффициент аппроксимации

меньше 7%, а коэффициент детерминации больше 0,5.

Рассмотрим более подробно первую модель и дадим ей биологическую интерпретацию. Полученный результат коэффициента регрессии показывает, что при увеличении фактора  $x_2$  (рН кислотность среды) на 1 единицу от своего среднего уровня, результативный признак  $Y_1$  уменьшается на  $-1,032$  ед. от своего среднего уровня. Полученный результат коэффициента регрессии  $b_2 = -0,04$  показывает, что при увеличении фактора  $x_7$  (подвижные формы фосфора по Кирсанову) на 1 единицу от своего среднего уровня, результативный признак  $Y_1$  уменьшается на  $-0,04$  ед. от своего среднего уровня. Полученный результат коэффициента регрессии  $b_2 = 0,28$  показывает, что при увеличении фактора  $x_8$  (нитратный азот) на 1 единицу от своего среднего уровня, результативный признак  $Y_1$  увеличивается на  $0,28$  ед. от своего среднего уровня.

Таким образом на частоту микоризы имеет сильное влияние рН кислотность среды и нитратный азот, причем увеличение кислотности и уменьшение содержания азота ведут к уменьшению частоты микоризы. Но содержание нитратного азота в почве имеет естественные ограничения, поэтому исследователю необходимо искать баланс между соотношением всех веществ.

Практически любой показатель зависит от бесконечного количества факторов. Однако лишь ограниченное количество факторов действительно существенно воздействуют на исследуемый показатель. Доля влияния остальных факторов столь незначительна, что их игнорирование не может привести к существенным отклонениям в поведении исследуемого объекта. Выделение и учет в модели лишь ограниченного числа реально доминирующих факторов является важной задачей качественного анализа, прогнозирования и управления ситуаций.

В данной работе рассмотрено применение метода множественной регрессии для исследования зависимостей между показателя-

ми, характеризующими состав почвы в районах Башкортостана и микро-составом корней пшеницы. По результатам исследований получены модельные уравнения и проведена оценка адекватности. В результате анализа была выделена наиболее качественная модель и выработаны рекомендации для будущих исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Домарадский И.В., Градлова Н. Б.* Очерки микологов для экологов. Под ред. чл.-корр. РАН и акад РАМН И. Б. Ушакова М.: Истоки. 2007
2. *Елисеева И. И., Юзнабашев М. М.* Общая теория статистики. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика. 2004. 576 с.
3. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп.— М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2004. 573 с.

УДК 372.862

#### РАЗРАБОТКА ИГРОВЫХ ПРОГРАММ КАК МОТИВАЦИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Лысенко Д. В. (Стерлитамак, СФ БашГУ)**

#### Введение

Все более значимую роль в человеческом обществе приобретают информационные технологии, которые проникли во все сферы нашей деятельности. Поэтому содержание, особенности умственной деятельности обучающихся в процессе изучения программирования должны быть направлены на развитие системного, конструктивного [3], алгоритмического мышления, на формирование

тех качеств и особенностей, которые позволят впоследствии молодым специалистам строить свою профессиональную деятельность наиболее эффективным образом.

Информатизация существенно повлияла на процесс приобретения знаний. Новые технологии обучения на основе информационных и коммуникационных средств, позволяют интенсифицировать образовательный процесс, увеличить скорость восприятия, понимания и глубину усвоения огромных массивов знаний.

Применение современных информационных технологий в обучении - одна из наиболее важных и устойчивых тенденций развития мирового образовательного процесса. Информационные методы все шире внедряются в научную деятельность. Информатизация, конвергенция компьютерных и телекоммуникационных технологий, переход к широкомасштабному применению современных информационных систем в сфере науки и образования обеспечивают принципиально новый уровень получения и обобщения знаний, их распространения и использования.

Для обслуживания все возрастающих потребностей общества в сфере информационных технологий, в автоматизации хранения и преобразования данных, связи, проведения сложных научных расчетов, развиваются языки программирования. Если раньше языки программирования использовались лишь для создания программ автоматизации вычислительных процессов, то в настоящее время они используются для решения куда более разнообразных задач. Хотя программирование возникло относительно недавно, но, быстро набрав темп, стало неотъемлемой частью современного общества.

Программирование - одна из самых традиционных и важных тем в информатике. Оно вырабатывает у учащихся такие развивающие функции, как логическое и критическое мышление, внимательность, аккуратность; развивает находчивость, фантазию, изобретательность; раскрывает творческие способности.

Конечно, научиться программированию достаточно сложно. Нужно уметь писать программы, ясно мыслить, логически думать и быть терпеливым. Но все-таки, как и в любом деле, здесь главное практика. Хорошим программистам всегда мало знаний, они всегда ищут чего-то нового, новые пути, новые загадки. Недаром многие талантливые программисты, учась на собственных ошибках были "самоучками". Как говорил известный американский журналист, написавший серию книг об информационных технологиях, Стивен Леви, программирование - это искусство. Совершенство достигается лишь тогда, когда программа, выполняющая свою функцию, занимает всего несколько строк; когда одна программа может делать то, чего не может делать другая.

Изучение программирования в школе в обычных классах реализуется на базовом уровне, в состав которого входят основы языков программирования и набор стандартных типовых задач. Более углубленно преподносится учебный материал в профильных классах, на кружках и дополнительных занятиях по программированию.

Что касается возрастного периода, в котором осуществляется преподавание программирования в школе, то здесь бывает по-разному. Чаще всего в последнее время программирование начинают преподавать в 10 классах. Все же бывают случаи, когда изучение основ программирования начинается ранее (в 8-9 классах) или даже встречается программирование в начальной школе (хотя довольно редко).

Как уже было сказано, в школе программирование изучается на базовом уровне, за основу которых взяты процедурные языки типа Pascal. Более сложные языки объектно-ориентированного типа (C++, C Sharp, PHP, Delphi) встречаются все еще достаточно редко.

Как правило, на начальных этапах обучения программированию, обычно предлагаются всевозможные математические зада-

чи. Однако впоследствии решение только таких задач приводит к снижению интереса к программированию: решения этих задач не наглядны, а визуальный результат на фоне современных графических приложений и игр может полностью разочаровать. Как следствие, интерес к программированию у большинства детей в обычной базовой школе практически отсутствует, хотя встречаются учащиеся, которые хотели бы изучать программирование и создавать приложения для Android и iPhone. Кроме того, при изучении программирования со школьниками среднего звена обычно возникают дополнительные трудности: у них отсутствуют необходимые теоретические знания по математике и физике, учащиеся еще не определились в своей профессиональной подготовке (а значит, не уверены в необходимости ими изучения программирования), и т.д. Поэтому основной задачей преподавателя, как школы, так и вуза, должна быть задача заинтересовать учащихся и мотивировать их к изучению программирования.

### **Игра как мотивация**

Итак, с чего же начать? Самая распространенная ошибка начинающих разработчиков - это начать с большого проекта, основанного на сложной структуре взаимодействия отдельных элементов проекта. Вначале следует создавать небольшие проекты. В ранних проектах основная цель - учеба, а не реализация практически важных решений. Поддерживая проект небольшим, можно сфокусироваться на изучении новых техник, а не тратить кучу времени на управление кодом и рефакторинг. Реальность индустрии разработки такова, что чем больше проект, тем больше вероятность совершить ошибку в архитектуре. И чем больше проект, тем дороже обходится эта ошибка.

Очень хорошим способом мотивировки изучения программирования на более поздних этапах изучения (а иногда - и на ранних), является идея использования заданий, вызывающих наибольший

интерес при работе с компьютером. Как правило, в качестве таких заданий выступают всевозможные задачи на разработку компьютерных игр, пусть и пока простых. Однако, скорее всего, даже небольшая игра будет представлять собой программу с большим количеством строк, поэтому разрабатывать ее нужно поэтапно. Расчленение процесса создания программы на ряд относительно самостоятельных этапов наделяет этот процесс многими полезными качествами. Поэтапная разработка [2] облегчает восприятие программы, процесс разработки становится обозримым и прозрачным, поскольку на каждом этапе рассматривается лишь некоторая часть из всего множества конструкций программы. Кроме того, при поэтапной разработке можно на ранних стадиях полностью доработать наиболее тонкие алгоритмы программы, и тем самым застраховать себя от крупных переделок программы на заключительной стадии.

Тем не менее, добавляя в программу новые возможности, разработчик должен заботиться о том, чтобы не испортить уже достигнутого на ранних этапах. Дело в том, что развитие и усложнение программы обычно подразумевает редактирование уже имеющихся исходных текстов, а это всегда чревато внесением ошибок, часто влекущих полную потерю работоспособности программы.

Рассмотрим в качестве примера разработки игрового проекта реализацию простой игры "Лабиринт". В игре участвует игрок и его противник (монстр), причем игрок может прокладывать путь, изменяя структуру лабиринта. Под изменением структуры лабиринта подразумевается разрушение стен лабиринта (взрываются гранатами) и возведение новых стен игроком. Также будем подразумевать, что на один шаг в лабиринте игрок тратит некоторое количество энергии.

Для программной реализации необходимо формализовать структуры данных задачи и рассмотреть методы ее решения. Лабиринт мы задаем процедурой `Randomize` и двумерного массива, состоя-

щего из преград и других объектов. Каждая запись массива определяет стену лабиринта, гранату, с помощью которой можно разрушать стену по направлению движения, также есть в лабиринте "Еда". Именно с этим массивом работает программа при нахождении пути.

Для реализации такой игры потребуется разбить задачу на 5 этапов.

На первом этапе разработки программы необходимо предложить вариант генерации самого лабиринта, разместить в нем игрока и реализовать управление им с клавиатуры. Лабиринт будем хранить в двумерном массиве символьного типа. Для генерации лабиринта используем встроенный генератор случайных чисел - будем генерировать числа, например, от 0 до 99.

На втором этапе реализуем возможность игрока взрывать (разбивать) стены. Для взрыва стены можно использовать клавишу "пробел"(код 32). Здесь мы сталкиваемся с необходимостью запоминать, в каком направлении двигался игрок до того, как была нажата клавиша "пробел" чтобы знать, с какой стороны производить взрыв стены (взрывать стену нужно в направлении движения игрока).

На третьем этапе введем в код программы изменения, связанные с ограничением количества взрывов стен - наш игрок будет теперь обладать ограниченным количеством гранат (например, 10 единиц). Если гранаты заканчиваются, игрок более не сможет разрушать стены. Добавим еще возможность сбора гранат, - в лабиринте будут ящики гранат, например, по 5 единиц.

На четвертом этапе необходимо рассмотреть алгоритм, позволяющий монстру делать не случайные шаги, а целенаправленно двигаться к игроку, обходя препятствия. Существует довольно много различных методов решения подобной задачи, каждый из которых основывается на своих принципах и приемах, имеет уникальные преимущества и, соответственно, недостатки. В данной



работе был использован метод нахождения кратчайшего пути на графе. Этот алгоритм определяет расстояние между вершинами в простом графе с неотрицательными весами. Для нахождения минимального пути в таком графе мы решили использовать аналог волнового алгоритма.

Сам процесс поиска пути состоит из двух частей, причем путь может быть двух видов: ортогональный (ячейка может иметь 4 соседа) и ортогонально-диагональный (ячейка может иметь 8 соседей). Мы использовали в работе ортогональный путь.

В первой части алгоритма из начальной ячейки распространяется в четырех направлениях волна. Ячейка, в которую пришла волна, образует новую волну, и т.д. Новые волны генерируются до тех пор, пока не будет достигнута конечная ячейка (цель), или пока не станет ясно, что цель не может быть достигнута (пути между начальной ячейкой и целью не существует, т.к. он заблокирован препятствиями).

Во второй части алгоритма строится сам путь, причем его построение осуществляется от конечной ячейки (цели) к начальной. Несмотря на всю простоту алгоритма и гарантию нахождения пути в любом лабиринте (если путь, конечно, существует), главный недостаток такого алгоритма в том, что при построении трассы ему требуется большой объем памяти.

И, наконец, на пятом этапе необходимо провести тестирование программы и исключить обнаруженные ошибки и недочеты, связанные с реализациями программы на предыдущих этапах.

## **Заключение**

На основе разработанной программы можно написать другие ее варианты, например, позволяющие играть двум игрокам друг против друга, добавить несколько монстров, задать уникальные свойства отдельным участкам лабиринта, и т.д.

Кроме рассмотренной игры, можно предложить обучающимся

задачи на разработку программ-тестов в игровой форме для оценки качества усвоения знаний. Такие программы интересны еще и тем, что они позволяют осуществить плавный переход к визуальным средам разработки. За основу такой игровой программы-теста может быть взята программа, рассматриваемая в работе [1]. Кроме того, при обучении программированию очень много интересных задач можно найти в учебнике [4] Окулова С. М.

Как показывает практика, при работе над игровыми проектами мотивация обучающихся на протяжении всего времени разработки находится на очень высоком уровне. При этом можно реорганизовать учебный процесс таким образом, что практически все обучаемые окажутся вовлеченными в процесс познания и творческого поиска. Совместная деятельность обучаемых означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности, совместно решаются обнаруженные проблемы. Поэтому такой подход способен внести реальный вклад в повышение эффективности обучения программированию, и методически верно вносить разработку компьютерных игр в процесс обучения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Дмитриев В. Л.* Тестирование в игровой форме как способ проверки усвоения учебного материала // Информатика в школе. №10 (83). 2012. - С. 41–43.
- [2] *Дмитриев В. Л.* Поэтапная разработка программы в среде Turbo Pascal на примере поиска пути с использованием волнового алгоритма // Информатика и образование. №8. 2013. - С. 29–33.
- [3] *Дмитриев В. Л., Ахмадеева Р. З.* Развитие конструктивного мышления при изучении программирования // Информатика и образование. 2009. №2. - С. 69–73.

- [4] *Окулов С. М.* Программирование в алгоритмах. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2002. - 341 с.

УДК 517.977.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА  
ОСНОВЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ  
И ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ СОПОЛИМЕРИЗАЦИИ  
БУТАДИЕНА СО СТИРОЛОМ

**Михайлова Т.А. (Стерлитамак, СФ БашГУ),  
Мифтахов Э.Н. (Ишимбай, ИФ УГАТУ),  
Мустафина С.А. (Стерлитамак, СФ БашГУ)**

В условиях современного промышленного производства синтетических каучуков все чаще применяются методы математического моделирования технологических процессов, позволяющие решать задачи прогнозирования и оптимизации производства. В основе получения данных продуктов лежит сложный химический процесс, протекающий по свободнорадикальному цепному механизму и условно носящий название процесса сополимеризации [1].

При описании математической модели процессов сополимеризации в условиях понимания химических особенностей условно выделяются два подхода: кинетический и статистический.

Кинетический подход является классическим в решении задач химической кинетики и успешно зарекомендовал себя не только в изучении физико-химических явлений, но и в оптимизации технологических процессов в химической промышленности. В основе данного метода лежит составление и численное решение кинетических уравнений для концентраций всех типов частиц, участвующих в процессе. Эти уравнения выводятся из условий материального баланса по каждому компоненту реакции с участием

закона действующих масс, определяющего скорость образования и исчезновения этого компонента.

Поскольку число молекул мономера может достигать десятков тысяч, то кинетическая схема, включающая в себя все основные реакции происходящие в системе, сводится к практически бесконечной системе дифференциальных уравнений [2]. Напрямую такую систему решить не представляется возможным, поэтому при написании уравнений модели производится перевод к моментам молекулярно-массового распределения [3]. Использование такого упрощения системы позволяет рассчитать усредненные молекулярные характеристики получаемого продукта [4], а также в условиях неопределенности констант скоростей некоторых элементарных реакций успешно ставить и решать обратную задачу [5]. Однако получить картину изменения молекулярно-массового распределения и детально исследовать состав получаемого продукта при данном подходе уже невозможно.

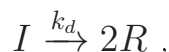
Статистический подход основан на том, что набору молекул полимера в конкретном его образце явным образом ставится в соответствие статистически эквивалентный ему набор реализаций некоторого случайного процесса. Тогда каждая молекула явно или неявно рассматривается как отдельная реализация конкретного случайного процесса условного движения вдоль полимерной молекулы, а вероятность этой реализации считается равной доле соответствующих ей молекул среди всех остальных в реакционной системе.

Для реализации имитационного подхода к моделированию сополимеризационного процесса применим метод, предложенный в 1977 году американским физиком Gillespie [6]. Алгоритм метода опишем в виде следующей последовательности шагов.

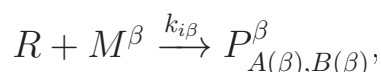
Шаг 1. Выпишем кинетическую схему процесса. Предположив, что реакционная способность активного центра на конце растущей цепи определяется лишь природой концевого звена, кинетическая

схема процесса сополимеризации бутадиена со стиролом может быть описана в виде следующего набора элементарных стадий:

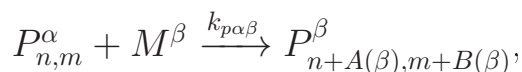
распад инициатора



инициирование активных центров



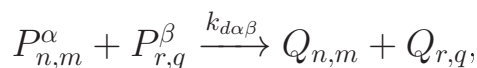
рост цепи



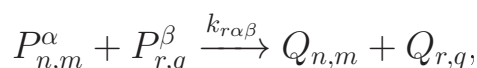
передача цепи



обрыв цепи диспропорционированием



обрыв цепи рекомбинацией



где  $\alpha, \beta = \overline{1, 2}$ ;  $M^1, M^2$  — мономеры первого и второго типа;  $P_{n,m}$  и  $Q_{n,m}$  — соответственно активные и неактивные цепи полимера длиной  $m + n$ , состоящие из  $n$  звеньев мономера  $M^1$  и  $m$  звеньев мономера  $M^2$ ;  $k_i, k_p, k_{reg}, k_d, k_r$  — константы элементарных стадий инициирования, роста, передачи цепи, диспропорционирования и рекомбинации соответственно;  $A(\beta) = \{1, \text{если } \beta = 1; \text{ иначе } 0\}$ .

Шаг 2. Преобразуем константы скоростей элементарных реакций в соответствии с правилом:

$\tilde{k} = k$  для реакций первого порядка;

$\tilde{k} = \frac{k}{V \cdot N_A}$  для реакций второго порядка ( $V$  — объем реакционной смеси,  $N_A$  — число Авогадро).

Шаг 3. Вычислим скорость каждой реакции, используя следующее соотношение:

$$R_i = \tilde{k}_i \cdot X_A \cdot X_B, \quad (1)$$

где  $\tilde{k}_i$  — константа, определяющая скорость  $i$ -й реакции, в которой участвуют реагенты  $A$  и  $B$ ;  $X_A, X_B$  — концентрации реагентов (количество молекул).

Вычисляя с помощью соотношения (1) скорость каждой реакции, просуммируем их и получим общую скорость реакции:

$$R_{sum} = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad (2)$$

где  $n$  — число элементарных реакций, образующих кинетическую схему процесса.

Шаг 4. Вычислим вероятность осуществления каждой реакции в данный момент времени:

$$p_i = \frac{R_i}{R_{sum}}, i = 1..n. \quad (3)$$

Очевидно, что  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

Шаг 5. Сгенерируем равномерно распределенное случайное число  $r$  на отрезке от 0 до 1 и подберем такое значение  $k$ , чтобы имело место неравенство:

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r < \sum_{i=1}^k p_i. \quad (4)$$

Следовательно, в результате имитационного выбора должна произойти реакция под индексом  $k$ .

Шаг 6. Продолжая рассуждения аналогичным образом выстроим всю схему проведения реакции.

Приведенный алгоритм был опробован для условий процесса эмульсионной сополимеризации бутадиена со стиролом. Полученные значения среднечисленной и среднемассовой молекулярной массы показали удовлетворительное согласование с результатами, полученными из кинетической модели процесса [2].

В последние годы все чаще специалисты используют математическое моделирование сополимеризационных процессов, позволяющее провести расчеты оптимальных вариантов синтеза, сопоставить различные условия проведения процесса, конфигурации реактора и т. п. Одним из основных достоинств применения математического моделирования при разработке сополимеризационного процесса является возможность осуществления его оптимизации. В общем случае под оптимизацией производства полимерных материалов понимают улучшение его качества, увеличение выпуска продукта и снижение затрат. При оптимизации технологических процессов синтеза полимеров в качестве критерия оптимальности целесообразно принимать максимальную производительность с учетом требований к качеству получаемого сополимера.

При математическом моделировании процессов синтеза полимеров принципиальное значение имеет выбор пределов изменения параметров процесса — температуры, давления и концентрации. Повышение температуры, давления и концентрации реагентов приводит к повышению скорости процессов.

Согласно методологии оптимизации на первом этапе целесообразно рассмотреть задачу кинетической оптимизации, заключающуюся в определении наилучших условий проведения полимеризации, исходя только из природы самого процесса и его кинетики. Полученные в результате решения такой задачи оптимальные режимы проведения процесса следует рассматривать как идеальные эталонные режимы, к которым могут быть приближены реальные условия осуществления процесса по конкретной технологической схеме. Постановка задачи кинетической оптимизации обусловлена

наличием в процессах полимеризации нескольких одновременно протекающих и конкурирующих реакций, вследствие чего выбор оптимального режима сводится к нетривиальному решению. Кинетические уравнения определяют динамическую модель процесса, в которой концентрации реагентов (обычно мономера и инициатора) рассматриваются в качестве фазовых координат (переменных состояния) управляемого объекта, а температура – в качестве управляющего параметра. Критерий максимальной производительности обычно дополняется требованиями к заданному качеству получаемого полимера. Более строгие требования к качеству полимера учитываются введением дополнительного уравнения, связывающего относительную молекулярную массу полимера с условиями его образования. В этом случае задача кинетической оптимизации сводится к вариационной задаче на условный экстремум. Результаты оптимизации используются при выборе типа реактора. Решение задачи дает теоретически наилучший оптимальный температурный график проведения процесса в аппарате периодического действия или оптимальный температурный профиль в каскаде реакторов.

Следующим этапом является оптимизация технологического режима конкретного реактора или технологической схемы. Задача оптимизации сводится здесь обычно к определению оптимальных значений таких режимных параметров процесса, как температура в реакторе и концентрация во входном потоке. Модель полимеризатора включает в себя прежнюю систему кинетических уравнений процесса, дополненную уравнениями тепло- и массообмена для конкретного типа реактора. Температура в реакторе рассматривается теперь как фазовая координата, а в качестве истинных управляющих воздействий принимаются такие переменные, как температура теплоносителя, температура входного потока, входная концентрация инициатора. Требования к качеству получаемого полимера удобно учитывать путем наложения огра-



ничений на варьируемые режимные переменные. Математическая задача оптимизации сводится к задаче нелинейного программирования и заключается в отыскании экстремума функции нескольких переменных [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Подвальный С. Л.* Моделирование промышленных процессов полимеризации. — М.: Химия, 1979. — 156 с.
- [2] *Мифтахов Э. Н., Насыров И. Ш., Мустафина С. А.* Решение прямой и обратной кинетических задач для процесса эмульсионной сополимеризации бутадиена со стиролом // Башкирский химический журнал. — 2011. — № 2. — С. 335–336.
- [3] *Мифтахов Э. Н., Насыров И. Ш., Мустафина С. А.* Моделирование процесса эмульсионной сополимеризации бутадиена со стиролом // Вестник Башкирского университета. — 2011. — № 1. — С. 21–24.
- [4] *Мифтахов Э. Н., Мустафина С. А.* Моделирование и теоретические исследования процесса эмульсионной сополимеризации непрерывным способом // Вестник УГАТУ. Серия "Управление, вычислительная техника и информатика". — 2011. — № 5. — С. 98–104.
- [5] *Мифтахов Э. Н., Мустафина С. А., Насыров И. Ш.* Моделирование процесса свободнорадикальной сополимеризации бутадиена со стиролом в производстве эмульсионных каучуков // Вестник КГТУ. — 2012. — № 24. — С. 78–81.
- [6] *D. Gillespie* Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions // The Journal of Physical Chemistry. — 1977. — № 81(25). — p. 2340–2361.
- [7] *Кафаров В. В., Дорохов И. Н., Дранишников Л. В.* Системный анализ процессов химической технологии. — М.: Наука, 1991. — 350 с.

УДК 517

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  
ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ

Нугаева И.Г. (УФА, БашГУ)

В настоящей работе изучаются спектральные свойства двумерного гармонического осциллятора в полосе  $\Pi = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq \pi\}$ . Рассмотрим оператор:  $L_0 u = -\Delta u + x^2 u$  задачи Дирихле, где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  в пространстве  $L^2(\Pi)$ .

Обозначим через  $\lambda_{mn}$  – собственные значения оператора  $L_0$ , через  $P_{mn}$  – проекторы на собственные подпространства оператора  $L_0$ , соответствующие  $\lambda_{mn}$ . Основной целью данной работы является исследование спектральных характеристик оператора  $L_0$ .

В операторе  $L_0$ , разделяя переменные, получим сумму двух одномерных операторов:

$$L_0 u = L_1 u + L_2 u,$$

где  $L_1 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u$  – одномерный гармонический осциллятор в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbb{R})$ ;  $L_2 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$  – одномерный оператор Лапласа задачи Дирихле.

Рассмотрим оператор  $L_1 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u$  в  $L_2(\mathbb{R})$ . Хорошо известно [1], что спектр оператора  $L_1$  состоит из собственных значений  $\lambda_m = 2m + 1$ ,  $m=0, 1, \dots$ , а соответствующие собственные функции  $\varphi_m(x) = (2^m m! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)$ , где  $H_m(x)$  – многочлены Эрмита.

Рассмотрим оператор  $L_2 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  задачи Дирихле. Хорошо известно [4], что  $\lambda_n = n^2$  – собственные значения оператора  $L_2$ ,  $f_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ny$  – собственные функции оператора  $L_2$ .

Следовательно собственные значения  $\lambda_{mn}$  оператора  $L_0$  имеют вид  $\lambda_{mn} = 2m + 1 + n^2$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Так как собственные значения оператора  $L_0$  зависят от двух целочисленных переменных, легко заметить, что имеются кратные собственные значения. Поскольку  $\lambda_{01} = 2$  – простое собственное значение, разобьем полуинтервал  $[4, \infty)$  на полуинтервалы  $[(2n)^2, (2n+1)^2)$  и  $[(2n+1)^2, (2n+2)^2)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Рассмотрим  $\lambda_{mn} \in [(2n)^2, (2n+1)^2)$ , причем  $\lambda_{mn}$  представим в виде  $\lambda_{mn}^{(1)} = (2n)^2 + 2m + 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, (2n-1)$ . Так как  $\lambda_{mn}^{(1)}$  – нечетное число, то имеет место представление  $\lambda_{mn}^{(1)} = (2n)^2 + 2m + 1 = (2k)^2 + 2s + 1$ , откуда  $s = 2(n^2 - k^2) + m$ , причем  $k = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, кратность  $\lambda_{mn}^{(1)}$  при каждом  $m = 0, 1, \dots, (2n-1)$  равна  $n$ .

Теперь рассмотрим  $\lambda_{mn} \in [(2n)^2, (2n+1)^2)$ , причем  $\lambda_{mn}$  представим в виде  $\lambda_{mn}^{(2)} = (2n)^2 + 2m$ ,  $m = 0, 1, \dots, 2n$ . Так как  $\lambda_{mn}^{(2)}$  – четное число, то имеет место представление:  $\lambda_{mn}^{(2)} = (2n)^2 + 2m = (2k+1)^2 + 2s + 1$ , откуда  $s = 2(n^2 - k^2 - k) + m - 1$ , причем  $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Следовательно кратность  $\lambda_{mn}^{(2)}$  при каждом  $m = 0, 1, \dots, 2n$  равна  $n$ .

Рассмотрим  $\lambda_{mn} \in [(2n+1)^2, (2n+2)^2)$ , причем  $\lambda_{mn}$  представим в виде  $\lambda_{mn}^{(3)} = (2n+1)^2 + 2m + 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, 2n$ . Так как  $\lambda_{mn}^{(3)}$  – четное число, то имеет место представление:  $\lambda_{mn}^{(3)} = (2n+1)^2 + 2m + 1 = (2k+1)^2 + 2s + 1$ , откуда  $s = 2(n^2 - k^2 + n - k) + m$ , причем  $k = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, кратность  $\lambda_{mn}^{(3)}$  при каждом  $m = 0, 1, \dots, 2n$  равна  $n$ .

Теперь рассмотрим  $\lambda_{mn} \in [(2n+1)^2, (2n+2)^2)$ , причем  $\lambda_{mn}$  представим в виде  $\lambda_{mn}^{(4)} = (2n+1)^2 + 2m$ ,  $m = 1, 2, \dots, (2n+1)$ . Так как  $\lambda_{mn}^{(4)}$  – нечетное число, то имеет место представление:  $\lambda_{mn}^{(4)} = (2n+1)^2 + 2m = (2k)^2 + 2s + 1$ , откуда  $s = 2(n^2 - k^2 + n) + m$ , причем  $k = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, кратность  $\lambda_{mn}^{(4)}$  при каждом  $m = 1, 2, \dots, (2n+1)$  равна  $n$ .

Таким образом кратность  $\lambda_{mn}$  при каждом  $m$  равна  $n$ .

Пусть  $P_s^{(1)}$  – ортонормированный проектор на собственное под-

пространство оператора  $L_1$ , соответствующее собственным значениям  $2s + 1$ , то есть  $P_s^{(1)}\varphi = (\varphi, \varphi_s)\varphi_s$ , где  $\varphi_s(x) = (2^s s! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_s(x)$ . А  $P_l^{(2)}$  – ортонормированный проектор на собственное подпространство оператора  $L_2$ , соответствующие собственным значениям  $l^2$ , то есть  $P_l^{(2)}f = (f, f_l)f_l$ , где  $f_l(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ly$ ,  $y \in [0, \pi]$ . Тогда ортогональный проектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_{mn}^{(1)}$  имеет вид:

$$P_{mn}^{(1)} = \sum_{k=1}^n P_{2(n^2-k^2)+m}^{(1)} \otimes P_{2k}^{(2)},$$

ортогональный проектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_{mn}^{(2)}$  имеет вид:

$$P_{mn}^{(2)} = \sum_{k=1}^n P_{2(n^2-k^2-k)+m-1}^{(1)} \otimes P_{2k+1}^{(2)},$$

ортогональный проектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_{mn}^{(3)}$  имеет вид:

$$P_{mn}^{(3)} = \sum_{k=1}^n P_{2(n^2-k^2+n-k)+m}^{(1)} \otimes P_{2k+1}^{(2)},$$

ортогональный проектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_{mn}^{(4)}$  имеет вид:

$$P_{mn}^{(4)} = \sum_{k=1}^n P_{2(n^2-k^2+n)+m}^{(1)} \otimes P_{2k}^{(2)}$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.В37.21.0358).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фазуллин З. Ю., Муртазин Х. Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Математический сборник. 2001. Т.192. №5. С. 87–124
- [2] Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю. Спектр и формула следов двумерного оператора Шрёдингера в однородном магнитном поле // Дифференциальные уравнения. 2009. Т.45 №4. С. 549–563

- [3] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982
- [4] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981
- [5] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Мир, 1982

УДК 517

## ИССЛЕДОВАНИЕ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУПОЛОСЕ

**Нуртдинов Р. Р. (Уфа, БашГУ)**

### Введение

В настоящей работе изучается вопрос о нахождении кратности собственных значений двумерной задачи на полуполосе.

Рассмотрим оператор:

$$\begin{cases} H^0 u = -\Delta u + x^2 u \\ u|_{\partial\Pi} = 0 \end{cases}$$

где  $\partial\Pi$ - граница полуполосы  $\Pi = \{(x, y), x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ .

### §1. Исследование спектра и определение кратностей.

Рассмотрим оператор:

$$\begin{cases} H^0 u = -\Delta u + x^2 u \\ u|_{\partial\Pi} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Оператор  $H^0$  представим в виде прямой суммы  $H^0u = H^1u \oplus H^2u$ , где  $H^1u = -u''_{xx} + x^2u$  - оператор одномерного гармонического осциллятора;  $H^2u = -u''_{yy}$  - оператор Штурма-Лиувилля.

Обозначим соответственно области операторов  $H^1$  и  $H^2$ :

$$D_{H^1} = \{u(x) \in L^2(0; +\infty), u'(x) \in AC(0; +\infty), u(0) = 0\},$$

$$D_{H^2} = \{u(y) \in W_2^2[0; \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Известно, что спектр оператора  $H^1$  состоит из собственных чисел  $\lambda_k = 4k - 1$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , соответствующие собственные функции имеют вид

$$g_k(x) = \sqrt{2}(2^{2k+1}\sqrt{\pi}(2k+1)!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_{2k+1}(x)$$

где  $H_{2k+1}(x)$  - многочлен Эрмита. Спектр оператора  $H^2$  состоит из собственных чисел  $\nu_m = m^2$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ , соответствующие собственные функции имеют вид  $f_m(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin my$ . Тогда спектр оператора  $H^0$  есть множество

$$\sigma(H^0) = \{m^2 + 4k - 1 \mid m \geq 1, k \geq 1\}$$

Определим кратность собственных чисел

$\mu_{km} = m^2 + 4k - 1$  оператора  $H^0$ ,  $\mu_{km} \in (n^2, (n+1)^2)$ . Очевидно, что спектр оператора  $H^0$  имеет вид  $n^2 + S$ . Рассмотрим всевозможные случаи.

1. Пусть  $n$ -четное,  $n = 2N$ , где  $N = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда  $S$  может быть как четным так и не четным.

а) Если  $S = 2l$  - четное, то для спектра оператора  $H^0$  имеем уравнение:

$$4N^2 + 2l = m^2 + 4k - 1, \quad (2)$$

отсюда  $4N^2 + 2l - 4k = m^2 - 1$  - четное, т.е.  $m$  - нечетное,  $m = 2\tau + 1$ , где  $\tau \geq 0$ . Итак,

$$m^2 - 1 = 4\tau^2 + 4\tau. \quad (3)$$

Определим  $l$ . Из формул (2) и (3) следует, что

$$4\tau^2 + 4\tau + 4k = 4N^2 + 2l, \quad (4)$$

отсюда

$$l = 2(\tau^2 + \tau + k - N^2) = 2d, \quad (5)$$

т.е.  $l$  - четное. Из равенств (4) и (5) найдем  $k$ :

$$k = N^2 - \tau^2 - \tau + \frac{l}{2} = N^2 - \tau^2 - \tau + d. \quad (6)$$

Определим, как меняется  $\tau$ . Мы рассматриваем собственные числа  $\mu_{km} = m^2 + 4k - 1$  на промежутке  $(n^2, (n+1)^2)$ , поэтому

$$m^2 < (n+1)^2. \quad (7)$$

Отсюда, так как  $m = 2\tau + 1$ , а  $n = 2N$ , то справедливо неравенство

$$(2\tau + 1)^2 < (2N + 1)^2.$$

Решая это неравенство, получим

$$\tau < N. \quad (8)$$

Значит,  $0 \leq \tau \leq N - 1$ . Из соотношений (2) и (5) следует, что

$$2l = 4d = 4\tau^2 + 4\tau + 4k - 4N^2$$

Отсюда и из формулы (4) получим равенство  $4d + 4N^2 = 4\tau^2 + 4\tau + 4k$ .

Определим как меняется  $d$ . Так как мы рассматриваем спектр на  $(n^2, (n+1)^2)$  оператора  $H^0$ , который имеет вид  $n^2 + S$ , то

$$n^2 + S < (n+1)^2, \quad (9)$$

где  $S = 2l, n = 2N$ , а из формулы (5) заключаем, что  $S = 4d$ . Тогда из равенства (9) имеем

$$4N^2 + 4d < (2N + 1)^2. \quad (10)$$

Решая неравенство (10), получим

$$d < N + \frac{1}{4}.$$

Значит,  $1 \leq d \leq N$ .

Итак, кратность собственных чисел  $\mu_{km}$  оператора  $H^0$  на промежутке  $(n^2, (n+1)^2)$  при  $S$  и  $n$ - четные, равен  $N$ .

б) Если  $S = 2l + 1$  - нечетное, то для спектра оператора  $H^0$  имеем уравнение:

$$4N^2 + 2l + 1 = m^2 + 4k - 1, \quad (11)$$

отсюда  $4N^2 + 2l + 1 - 4k = m^2 - 1$  - нечетное, т.е.  $m$  - четное,  $m = 2\tau$ , где  $\tau \geq 0$ . Итак,

$$m^2 - 1 = 4\tau^2 - 1. \quad (12)$$

Определим  $l$ . Из формул (11) и (12) следует, что

$$4N^2 + 2l + 1 = 4\tau^2 + 4k - 1, \quad (13)$$

отсюда

$$l = 2\tau^2 + 2k - 2N^2 - 1, \quad (14)$$

т.е.  $l = 2d - 1$  - нечетное. Отсюда  $2l + 1 = 4d - 1$ , то есть  $S = 4d - 1$ . Из равенства (13) найдем  $k$ :

$$k = N^2 - \tau^2 + \frac{l+1}{2} = N^2 - \tau^2 + d. \quad (15)$$

Определим, как меняется  $\tau$ . Мы рассматриваем собственные числа  $\mu_{km} = m^2 + 4k - 1$  на промежутке  $(n^2, (n+1)^2)$ , поэтому

$$m^2 < (n+1)^2. \quad (16)$$



Отсюда, так как  $m = 2\tau$ , а  $n = 2N$ , то справедливо неравенство

$$(2\tau)^2 < (2N + 1)^2$$

Решая это неравенство, получим

$$\tau^2 < N^2 + N + \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Значит,  $1 \leq \tau \leq N$ . Определим как меняется  $d$ . Так как мы рассматриваем спектр  $(n^2, (n + 1)^2)$  оператора  $H^0$ , который имеет вид  $n^2 + S$ , то

$$n^2 + S < (n + 1)^2, \quad (18)$$

где  $S = 2l + 1 = 4d - 1$ ,  $n = 2N$ . Тогда из соотношения (18) имеем

$$4N^2 + 4d - 1 < (2N + 1)^2. \quad (19)$$

Решая неравенство (19) получим

$$d < N + \frac{1}{2}$$

Значит,  $1 \leq d \leq N$ .

Итак, кратность собственных чисел  $\mu_{km}$  оператора  $H^0$  на промежутке  $(n^2, (n + 1)^2)$  при  $S$ - не четным и  $n$ - четные, равен  $N$ .

2. Пусть  $n$ -нечетное,  $n = 2N + 1$ , где  $N = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда  $S$  может быть как четным так и не четным:

а) Если  $S = 2l$  - четное, то для спектра оператора  $H^0$  имеем уравнение:

$$(2N + 1)^2 + 2l = m^2 + 4k - 1, \quad (20)$$

отсюда  $m^2 = 4N^2 + 4N + 2l - 4k + 2$  - четное,  $m = 2\tau$ , где  $\tau \geq 0$ . Итак,

$$m^2 - 1 = 4\tau^2 - 1. \quad (21)$$

Определим  $l$ . Из формул (20) и (21) следует, что

$$4N^2 + 4N + 2l + 1 = 4\tau^2 + 4k - 1, \quad (22)$$

отсюда

$$l = 2\tau^2 + 2k - 2N^2 - 2N - 1, \quad (23)$$

т.е.  $l = 2d - 1$  - нечетное. Отсюда  $2l = 4d - 2$ , то есть  $S = 4d - 2$ . Из равенства (22) найдем  $k$ :

$$k = N^2 - \tau^2 + N + \frac{l + 1}{2} = N^2 - \tau^2 + N + d. \quad (24)$$

Определим, как меняется  $\tau$ . Мы рассматриваем собственные числа  $\mu_{km} = m^2 + 4k - 1$  на промежутке  $(n^2, (n+1)^2)$ , поэтому

$$m^2 < (n + 1)^2. \quad (25)$$

Отсюда, так как  $m = 2\tau$ , а  $n = 2N + 1$ , то справедливо неравенство

$$(2\tau)^2 < (2N + 2)^2.$$

Решая это неравенство, получим

$$\tau^2 < N^2 + 2N + 1 \quad (26)$$

Значит,  $1 \leq \tau \leq N$ .

Определим как меняется  $d$ . Так как мы рассматриваем спектр на  $(n^2, (n+1)^2)$  оператора  $H^0$ , который имеет вид  $n^2 + S$ , то

$$n^2 + S < (n + 1)^2, \quad (27)$$

где  $S = 2l = 4d - 2$ ,  $n = 2N + 1$ , а из формулы (27) имеем

$$(2N + 1)^2 + 4d - 2 < (2N + 2)^2. \quad (28)$$

Решая неравенство (28), получим

$$d < N + 1 + \frac{1}{4}$$

Значит,  $1 \leq d \leq N + 1$ .

Итак, кратность собственных чисел  $\mu_{km}$  оператора  $H^0$  на промежутке  $(n^2, (n + 1)^2)$  при  $S$ - четным и  $n$ - нечетным, равен  $N$ .

б) Если  $S = 2l + 1$  - нечетное, то для спектра оператора  $H^0$  имеем уравнение:

$$(2N + 1)^2 + 2l + 1 = m^2 + 4k - 1, \quad (29)$$

отсюда  $4N^2 + 2N + 2 + 2l - 4k = m^2 - 1$  - четное, т.е.  $m$  - нечетное,  $m = 2\tau + 1$ , где  $\tau \geq 0$ . Итак,

$$m^2 - 1 = 4\tau^2 + 4\tau. \quad (30)$$

Определим  $l$ . Из формул (29) и (30) следует, что

$$(2N + 1)^2 + 2l + 1 = (2\tau + 1)^2 + 4k - 1, \quad (31)$$

отсюда

$$l = 2\tau^2 + 2\tau + 2k - 2N^2 - 2N - 1, \quad (32)$$

т.е.  $l = 2d - 1$  - нечетное. Отсюда  $2l + 1 = 4d - 1$ , то есть  $S = 4d - 1$ . Из равенства (32) найдем  $k$ :

$$k = N^2 + N - \tau^2 - \tau + \frac{l + 1}{2} = N^2 + N - \tau^2 - \tau + d. \quad (33)$$

Определим, как меняется  $\tau$ . Мы рассматриваем собственные числа  $\mu_{km} = m^2 + 4k - 1$  на промежутке  $(n^2, (n + 1)^2)$ , поэтому

$$m^2 < (n + 1)^2. \quad (34)$$

Отсюда, так как  $m = 2\tau + 1$ , а  $n = 2N + 1$ , то справедливо неравенство

$$(2\tau + 1)^2 < (2N + 2)^2.$$

Решая это неравенство, получим

$$\tau^2 + \tau + \frac{1}{4} < N^2 + N + 1. \quad (35)$$

Значит,  $1 \leq \tau \leq N$ .

Определим как меняется  $d$ . Так как мы рассматриваем спектр на  $(n^2, (n+1)^2)$  оператора  $H^0$ , который имеет вид  $n^2 + S$ , то

$$n^2 + S < (n+1)^2, \quad (36)$$

где  $S = 2l + 1 = 4d - 1$ ,  $n = 2N + 1$ , а из формулы (36) заключаем

$$(2N+1)^2 + 4d - 1 < (2N+2)^2. \quad (37)$$

Решая неравенство (37) получим

$$d < N + 1$$

Значит,  $1 \leq d \leq N + 1$ .

Итак, кратность собственных чисел  $\mu_{km}$  оператора  $H^0$  на промежутке  $(n^2, (n+1)^2)$  при  $S$ - нечетным и  $n$ - нечетным, равен  $N$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х.*

Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора. // Математический сборник 2001 Т.192 №5 С. 87-124.

- [2] *Лебедев Н.Н.*

Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента. // Специальные функции и их приложения. 1963. Издание второе, переработанное и дополненное. С.153-158.

[3] *Ватсон Г.Н.*

Асимптотические разложения Бесселевых функций. // Теория Бесселевых функций. 1949. Часть первая. Перевод со 2-го английского издания В.С. Бермана. С.222-231.

[4] *Муртазин Х.Х., Садовничий В.А., Тулькубаев Р.З.*

Асимптотика спектра и формула следов для дифференциальных операторов с неограниченными коэффициентами. // Доклады академии наук, 2007, том 416, №6, С. 740-744.

[5] *Садовничий В.А.*

О некоторых тождествах для собственных чисел сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Соотношение для нулей функции Бесселя. // Вестник МГУ. Сер.1.Математика, механика. 1971. №3. С. 77-86.

[6] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.*

Интегральные представления функций. // Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Издание 4-ое переработанное при участии Ю.В. Геронимуса, М.Ю. Цейтлина С.972-979.

УДК 517.982.1

## К ТЕОРЕМЕ ХАНА–БАНАХА

**Хабибуллин Ф. Б.<sup>2</sup>, Хабибуллина Э. Б. (Уфа, БашГУ)**

Пусть  $X$  — векторное пространство над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$ . Далее  $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} =: [-\infty, +\infty]$  — *расширенная вещественная прямая* с естественным отношением порядка  $\leq$ ;  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} =: (-\infty, +\infty]$  и  $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} =: [-\infty, +\infty)$  — *полу-расширения  $\mathbb{R}$  соответственно вправо и влево.*

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-01-00030а

Для множеств  $A, B$ , как обычно, через  $B^A$  обозначаем множество всех отображений  $f: A \rightarrow B$ , или функционалов, если  $B$  — это  $\mathbb{R}$  или одно из расширений  $\mathbb{R}$ , или функций, если  $B = \mathbb{R}$ . Для  $S \subset A$  сужение  $f$  на  $S$  обозначаем  $f|_S$ . Через  $X^{\text{lin}}$  обозначаем пространство *линейных функционалов*  $l \in \mathbb{R}^X$  на  $X$ , т. е.  $l(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 l(x_1) + \alpha_2 l(x_2)$  для любых  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $Y$  — векторное подпространство в  $X$ . Функционал  $q: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  *допускает двойственное линейное представление* (сверху) на векторе  $y \in Y$  относительно  $Y$ , если [1; Определение 3.3]

$$q(y) = \inf\{l(y) : l \in Y^{\text{lin}}, q(y') \leq l(y') \forall y' \in Y\}. \quad (1)$$

Если (1) выполнено для любого  $y \in Y$ , то  $q$  *допускает двойственное линейное представление на  $Y$* .

Функционал  $q$  *супераддитивный* на  $X$ , если  $q(x_1 + x_2) \geq q(x_1) + q(x_2)$  для всех  $x_1, x_2 \in X$ . Поскольку суммы  $(+\infty) + (-\infty)$  и  $(-\infty) + (+\infty)$  в  $[-\infty, +\infty]$  не определены, данное здесь определение супераддитивности корректно только в двух случаях: когда образ

$$\text{im } q \subset [-\infty, +\infty) \quad \text{или} \quad \text{im } q \subset (-\infty, +\infty]. \quad (2)$$

Функционал  $q$  *положительно однородный*, если  $q(\lambda x) = \lambda q(x)$  для всех  $x \in X$  и  $\lambda > 0$  (при этом  $\lambda \cdot \pm\infty := \pm\infty$ ). В частности [1; § 3], если  $q$  — положительно однородный функционал и  $q(0) \neq \pm\infty$ , то  $q(0) = 0$ .

Функционал  $q$  *вогнутый*, если неравенство

$$q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 q(x_1) + \alpha_2 q(x_2) \quad (3)$$

выполнено для всех  $x_1, x_2 \in X$  и  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Из тех же соображений, что и при определении супераддитивности, определение вогнутости функционала корректно только в двух случаях (2). Символами  $\pm\infty$  обозначаем также и функционалы  $-\infty: x \mapsto -\infty \in [-\infty, +\infty]$ ,  $+\infty: x \mapsto +\infty \in [-\infty, +\infty]$ ,  $x \in X$ . (4)

Для пустого подмножества  $\emptyset \subset [-\infty, +\infty]$ , как обычно, полагаем

$$\sup \emptyset := -\infty, \quad \inf \emptyset := +\infty. \quad (5)$$

При этом справедливо элементарное

**Предложение 1** (ср. с [2; Предложение 1.3]). *Пусть  $q$  — супераддитивный или вогнутый функционал на  $X$  и существует вектор  $x_0 \in X$ , для которого  $q(x_0) = +\infty$ . Тогда  $q = +\infty$  в обозначениях (4) и допускает двойственное линейное представление (сверху) на  $X$ .*

*Доказательство.* Для произвольного вектора  $x \in X$  при супераддитивности  $q$  имеем

$$q(x) = q(x_0 + (x - x_0)) \geq q(x_0) + q(x - x_0) = (+\infty) + q(x - x_0) \stackrel{(2)}{=} +\infty,$$

а при вогнутости  $q$  получаем

$$\begin{aligned} q(x) &= q\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}(2x - x_0)\right) \stackrel{(3)}{\geq} \frac{1}{2}q(x_0) + \frac{1}{2}q(2x - x_0) \\ &= (+\infty) + \frac{1}{2}q(2x - x_0) \stackrel{(2)}{=} +\infty. \end{aligned}$$

В силу (5) для функционала  $q = +\infty$  при  $Y = X$  получаем (1) и двойственное линейное представление на  $X$ .  $\square$

Теперь в определение вогнутости неравенство (3) можно распространить и на случай  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ , если в  $[-\infty, +\infty]$  полагать (см. и ср. [3; 1.3.1])

$$0 \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot 0 := 0, \quad \text{но} \quad 0 \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot 0 := -\infty.$$

Через  $X^{\text{aff}}$  обозначаем векторное пространство над  $\mathbb{R}$  аффинных функционалов  $a \in \mathbb{R}^X$  на  $X$ , т. е.

$$a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 a(x_1) + \alpha_2 a(x_2)$$

для любых  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Каждый такой функционал однозначно представляется в виде  $a = l + c \cdot \mathbf{1}$ , где  $l \in X^{\text{lin}}$ ,  $c = a(0) \in \mathbb{R}$  и  $\mathbf{1}: x \mapsto 1$ ,  $x \in X$ , — функция, равная тождественно 1, и наоборот, каждый функционал вида  $l + c \cdot \mathbf{1}$  — аффинный. Отметим также, что для любого  $c \in \mathbb{R}$  функционал  $q$  вогнутый, если и только если  $q + c \cdot \mathbf{1}$  — вогнутый функционал.

Функционал  $q \in [-\infty, +\infty]^X$  допускает двойственное аффинное представление (сверху) на векторе  $y \in Y$  относительно подпространства  $Y \subset X$ , если

$$q(y) = \inf\{a(y) : a \in Y^{\text{aff}}, q(y') \leq a(y') \forall y' \in Y\}. \quad (6)$$

Если (6) выполнено для любого  $y \in Y$ , то  $q$  допускает двойственное аффинное представление на  $Y$ .

Пусть  $q, p$  — функционалы, определенные на некотором множестве  $S$ , со значениями в  $[-\infty, +\infty]$ . Пишем « $q \leq p$  на  $S$ », если  $q(s) \leq p(s)$  для всех  $s \in S$ . Другими словами,  $p$  мажорирует  $q$  на  $S$ , или  $q$  минорирует  $p$  на  $S$ .

Как версии Теорем Хана–Банаха может рассматриваться следующая

**Основная Теорема.** Пусть  $q \in \mathbb{R}^X$  — функция, т. е.  $\text{im } q \subset \mathbb{R}$ .

- (1) Если  $q$  — супераддитивный положительно однородный функционал, то для любого  $x \in X$  найдется  $l \in X^{\text{lin}}$ , для которого  $l(x) = q(x)$  и  $q \leq l$  на  $X$ ; в частности,  $q$  допускает двойственное линейное представление на  $X$ .
- (2) Если  $q$  — вогнутый функционал, то для любого  $x \in X$  найдется функционал  $a \in X^{\text{aff}}$ , для которого  $a(x) = q(x)$  и  $q \leq a$  на  $X$ ; в частности,  $q$  допускает двойственное аффинное представление на  $X$ .

*Доказательство.* Часть (1) доказывается, например, в [4; гл. XI, § 1, п. 4], [5; II.1.4.III]. Для доказательства части (2) будет использована обобщенная



**Теорема Хана–Банаха** (о продолжении линейного функционала, см. [6]). Пусть  $X$  — векторное пространство  $X$  над  $\mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}^X$  — вогнутый функционал,  $X_0$  — векторное подпространство в  $X$ . Допустим, что сужение  $q|_{X_0}$  функционала  $q$  на  $X_0$  минорирует функционал  $l_0 \in X_0^{\text{lin}}$  на  $X_0$ . Тогда найдется функционал  $l \in X^{\text{lin}}$  с сужением  $l|_{X_0} = l_0$ , мажорирующий  $q$  на  $X$ .

Пусть  $x = 0 \in X$ ,  $X_0 = \{0\} \subset X$ . Тогда нулевой линейный функционал  $l_0 := 0 \cdot \mathbf{1}$  на  $X_0$  совпадает с сужением вогнутого функционала  $q - q(0) \cdot \mathbf{1}$  на  $X_0$  и, в частности, сужение  $(q - q(0) \cdot \mathbf{1})|_{X_0}$  минорирует  $l_0$  на  $X_0$ . По Теореме Хана–Банаха существует функционал  $l \in X^{\text{lin}}$  с сужением  $l|_{X_0} = l_0$ , мажорирующий  $q - q(0) \cdot \mathbf{1}$  на  $X$ . Тогда аффинный функционал  $a := l + q(0) \cdot \mathbf{1} \in X^{\text{aff}}$  мажорирует  $q$  на  $X$  и удовлетворяет равенству  $a(0) = l(0) + q(0) = q(0)$ .

Пусть теперь зафиксировано  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ . Рассмотрим векторное подпространство  $X_0 := \mathbb{R} \cdot x := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Сужение  $q|_{X_0}$  на  $X_0$  можно рассматривать в этом случае как вогнутую функцию  $q_0 : \lambda \mapsto q(\lambda x)$  на  $\mathbb{R}$  одной переменной с  $\text{im } q_0 \subset \mathbb{R}$ . Тогда существует аффинная функция

$$a_0 : \lambda \mapsto a_1(\lambda - 1) + q_0(1) = a_1\lambda - (a_1 - q_0(1)) = a_1\lambda - (a_1 - q(x)) \quad (7)$$

на  $\mathbb{R}$ , где число  $a_1 \in [(q_0)'_+(1), (q_0)'_-(1)]$ ,  $(q_0)'_+(1)$  и  $(q_0)'_-(1)$  — соответственно правая и левая производные функции  $q_0$  в точке  $1 \in \mathbb{R}$  и  $(q_0)'_+(1) \leq (q_0)'_-(1)$  в силу вогнутости функции  $q_0$ . По построению функция  $a_0$  мажорирует функцию  $q_0$  на  $\mathbb{R}$  и  $a_0(1) = q_0(1) = q(x)$ . Положим

$$\begin{aligned} l_0(x) &:= a_1, \quad l_0(\lambda x) := \lambda l_0(x) = \lambda a_1 \stackrel{(7)}{=} a_0(\lambda) + (a_1 - q(x)) \\ &\geq q_0(\lambda) + (a_1 - q(x)) = q(\lambda x) + (a_1 - q(x)), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Эти соотношения определяют линейный функционал  $l_0$  на  $X_0 = \mathbb{R} \cdot x$ , который мажорирует вогнутый функционал

$$q|_{X_0} + (a_1 - q(x)) \cdot \mathbf{1}$$

на  $X_0$  и при этом

$$l_0(x) = a_1 = q(x) + a_1 - q(x) = \left( q \Big|_{X_0} + (a_1 - q(x)) \cdot \mathbf{1} \right) (x).$$

Отсюда по Теореме Хана–Банаха существует функционал  $l \in X^{\text{lin}}$  с сужением  $l \Big|_{X_0} = l_0$ , мажорирующий вогнутый функционал

$$q + (a_1 - q(x)) \cdot \mathbf{1}$$

на  $X$ . Тогда аффинный функционал

$$a := l + (q(x) - a_1) \cdot \mathbf{1} \in X^{\text{aff}}$$

мажорирует  $q$  на  $X$  и удовлетворяет равенству  $a(x) = l(x) + q(x) - a_1 = q(x)$ , что и требовалось.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Известия РАН, Серия матем. 2001. Т. 65, № 4. С. 205–224
- [2] *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1976.
- [3] *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. — М.: Наука, 2007.
- [4] *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. — М.: Мир, 1973.
- [5] *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства. — Новосибирск: Наука, 1978.
- [6] *Weston J. D.* A note on the extension of linear functionals // Amer. Math. Monthly. V. 67. No. 5 (May, 1960). P. 444–445.

УДК 519.213

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО  
ПРИ ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИОБРЕТЕНИЯ  
ЛИЦЕНЗИОННЫХ УЧАСТКОВ

Хашпер Б. Л. (Уфа, БашГУ)

Можчиль А. Ф. (Уфа, ООО "БашНИПИнефть")

Приобретение новых лицензионных участков является основой долгосрочной стратегии развития нефтедобывающих компаний. Но при оценке эффективности приобретения нового лицензионного участка необходимо учитывать множество рисков. Поэтому актуальной задачей является оценка эффективности приобретения лицензионного участка.

Эффективность характеризуется чистым дисконтированным доходом (ЧДД), представляющим собой приведение к текущему моменту времени (моменту оценки инвестиционного проекта) денежного потока [1].

На денежный поток влияет множество факторов, точные значения которых оценить на долгосрочную перспективу невозможно. Решение этой проблемы достигается определением наиболее вероятных значений и коридоров возможных отклонений этих параметров. Использование метода Монте-Карло дает возможность определить наиболее вероятные значения рассматриваемых параметров в выбранном коридоре колебаний и получить вероятностное распределение значения ЧДД, что позволяет оценить среднее и медианное значения ЧДД, а также риски получения отрицательного значения.

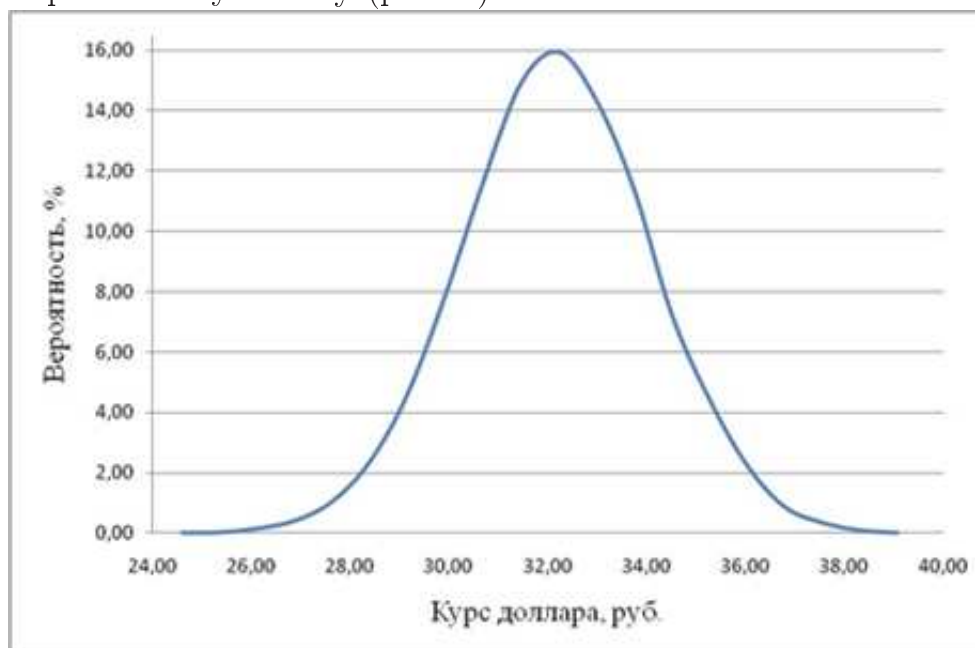
Метод Монте-Карло – это метод моделирования случайных величин с целью вычисления характеристик их распределений [2]. Для оценки эффективности методом Монте-Карло выбирают параметры, влияющие на ЧДД, по наиболее вероятным значениям и коридорам возможных отклонений параметров генерируют наборы их

значений, для каждого набора рассчитывают ЧДД, анализируют полученные результаты. Т. о., использование метода Монте-Карло возможно в условиях неопределенности, когда значения факторов неизвестны точно, но могут быть заданы наиболее вероятными значениями и интервалами.

В работе был разработан и программно реализован алгоритм метода Монте-Карло для оценки эффективности эксплуатации лицензионного участка, приобретаемого ОАО АНК «Башнефть».

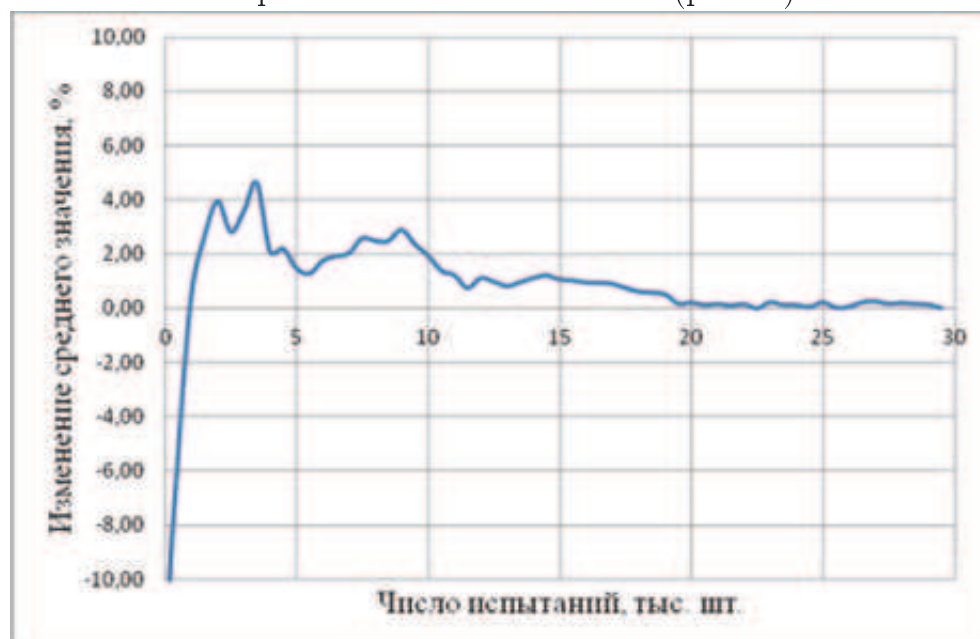
Из множества факторов, входящих в разработанную модель, были отобраны параметры, наиболее влияющие на ЧДД, для которых сложно точно определить значение на весь период расчета. Для каждого параметра выбраны наиболее вероятные значения и отклонения от этих значений. Эти данные занесены на лист книги Excel.

В макросе с помощью функции NormInv для каждого выбранного параметра модели сгенерированы значения, распределенные по нормальному закону (рис. 1).



**Рисунок 1 – Распределение значений курса доллара**  
Для установления минимально необходимого числа итераций про-

ведены серии испытаний с количеством итераций от 10 до 30000. Для каждой серии рассчитаны основные характеристики распределений и построены графики изменения их значений относительно значения серии из 30000 испытаний (рис. 2).



**Рисунок 2 – Изменение среднего значения**

Анализ полученных результатов показал, что основные характеристики распределений существенно не меняются, начиная с 20000 испытаний. Следовательно, для получения корректного результата достаточно провести 20000 итераций.

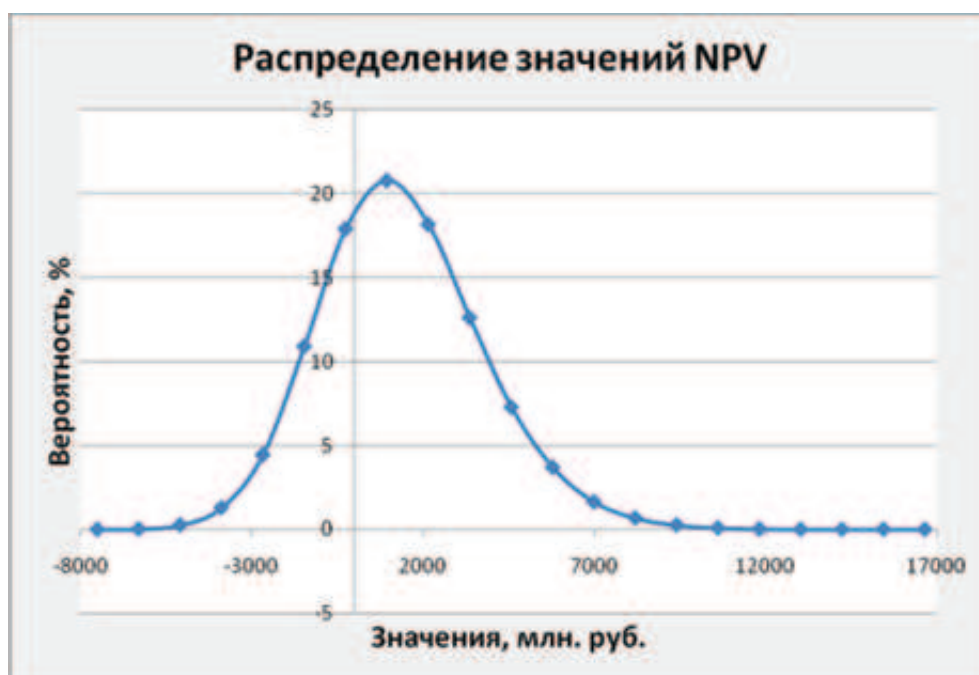
Для проведения испытаний разработан макрос, вызывающий функцию NormInv, встроенную в MS Excel. Эта функция принимает в качестве параметров вероятность, наиболее вероятное значение и среднееквадратичное отклонение и генерирует значение случайной величины по закону нормального распределения. Для каждого выбранного параметра модели сгенерированы значения, распределенные по нормальному закону. Для каждого набора значений параметров с помощью формул, прописанных в соответствующие ячейки книги Excel, производится расчет чистого дисконтированного дохода. В результате получается массив зна-

чений ЧДД. Полученный массив с помощью технологии Object Linking and Embedding (OLE) передается в программную среду Borland C++ Builder, в которой проводится анализ полученных значений.

Для исследуемого проекта были получены следующие результаты (см. табл. 1 и рис. 3).

**Таблица 1 - Анализ значений ЧДД**

<b>Показатель</b>	<b>Значение</b>
Мин. значение ЧДД	-7 528,65 млн. руб.
Макс. значение ЧДД	16 663,40 млн. руб.
Мин. значение 5%	-1 701,40 млн. руб.
Макс. значение 95%	6 142,04 млн. руб.
Медиана	1 828,14 млн. руб.
Среднее значение ЧДД	1 971,98 млн. руб.
Среднее значение ЧДД без учета хвостов	1 917,61 млн. руб.
Среднеквадратичное отклонение	7 330,92 млн. руб.
Коэффициент вариации	3,72
Доля отрицательных значений	20,48%
Число испытаний	20 000



**Рисунок 3 – Распределение значений ЧДД**

Из табл. 1 и рис. 3 видно, что минимальным значением ЧДД является -7 528,65 млн. руб. Максимальное значение составило 16 663,40 млн. руб. Среднее значение ЧДД 1 971,98 млн. руб. Медианой является 1 828,14 млн. руб. Доля отрицательных значений: 0,2048. Если не учитывать значения на концах, которые достигаются с маленькими вероятностями, то минимальное значение составит -1 701,40 млн. руб., а максимальное 6 142,04 млн. руб. Среднее значение в этом случае составит 1 917,61 млн. руб. Полученные результаты свидетельствуют о том, что приобретение исследуемого лицензионного участка выгодно Компании. Но необходимо принять меры для уменьшения вероятности получения отрицательного ЧДД. Например, снизить разброс исходных переменных за счет уточнения их вероятных значений. Это можно осуществить проведением дополнительных геологических исследований, если речь идет о прогнозных уровнях добычи жидкости и нефти, или хеджированием рисков для уменьшения разброса возможной цены на нефть.

Результатом работы является расширение возможностей существующей экономической модели, проведение анализа с использованием большого массива данных, результаты которого позволяют объективно оценить эффективность проекта. Таким образом, разработанная модель позволяет проводить качественную и надежную оценку экономической эффективности лицензионных участков ОАО АНК «Башнефть».

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Волков И. М., Грачева М. В.* Проектный анализ. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 423 с.
- [2] *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.:Наука, 1975 г. – 472 с.

УДК 532.5

#### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БАКЛИ-ЛЕВЕРЕТТА О ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

**Якупова Э. Р. (Уфа, БашГУ, Центр микро- и  
наномасштабной динамики дисперсных систем)**

#### Введение

В нынешнее время, эффективность извлечения нефти из нефтегазового пласта крайне низка, хотя потребление нефтепродуктов растет из года в год. Средняя конечная нефтеотдача пластов по различным странам и регионам составляет от 25 до 40%. Интенсивная разработка газовых и нефтяных месторождений привела к тому, что легкодоступные запасы сырья исчерпываются[1]. А



значит, необходимы исследования, благодаря которым будет возможна максимальная нефтеотдача месторождений. Немаловажную роль в таких исследованиях играет теория фильтрации, так как нефть в основном содержится в пористых средах. Математическое описание и моделирование фильтрационных течений позволяет проводить теоретические исследования и решать современные научно-технические проблемы, возникшие в нефтегазовой отрасли.

### Постановка задачи

Одним из эффективных способов добычи углеводородов является закачивание воды или газа с целью вытеснения нефти в добывающую скважину. Рассмотрим процесс вытеснения, происходящий в прямолинейном горизонтальном пласте, где пористость  $m$  и проницаемость  $k$  постоянны. Обе фазы несжимаемы.

В пласт, первоначально заполненный нефтью, через сечение  $x = 0$  закачивается вода (рис. 1).

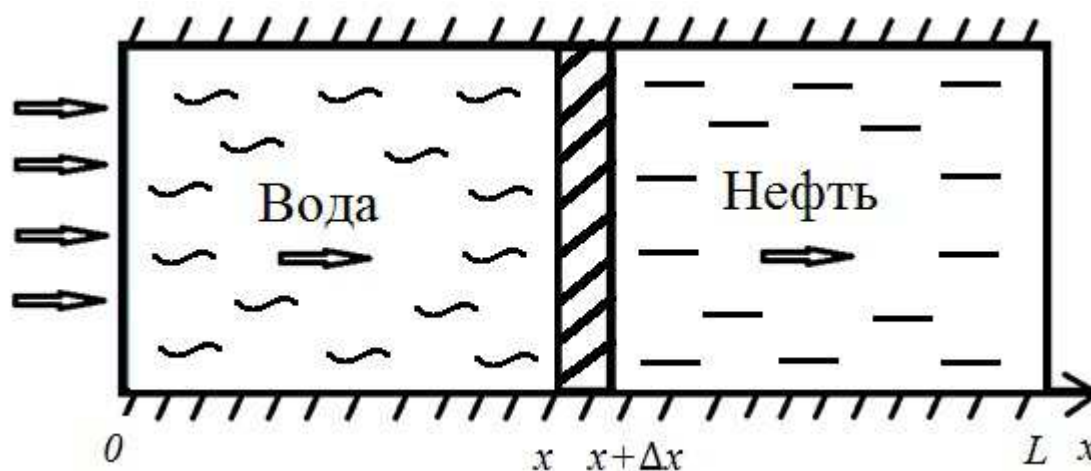


Рис. 1: Схема вытеснения нефти водой.

Уравнения, полностью описывающие процесс вытеснения, имеют следующий вид[2]:

$$\omega_i = -k \frac{k_i(s)}{\eta_i} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \omega_v}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$-m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \omega_n}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\omega_v + \omega_n = \omega(t), \quad (4)$$

$$(s_v + s_n = 1, \quad s \equiv s_v).$$

Начальное условие:

$$s(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq x_0, \\ 0 & \text{при } x > x_0, \end{cases} \quad x > 0. \quad (5)$$

Граничное условие:

$$s(0, t) = 1, \quad t > 0. \quad (6)$$

Здесь  $i = v, n$  – относятся к параметрам воды и нефти соответственно,  $\omega_i$  – скорость фильтрации  $i$  – ой фазы,  $\omega$  – суммарная скорость двухфазного потока,  $s_i$  – насыщенность  $i$  – ой фазой,  $k_i$  – относительная фазовая проницаемость  $i$  – ой фазы,  $p$  – давление в пласте,  $\eta_i$  – коэффициент динамической вязкости фаз,  $x_0$  – начальное положение скачка.

### Численное решение

Сложим (2) и (3):

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial x} + \frac{\partial \omega_n}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Подставим в (7) уравнение (1) для каждой из фаз:

$$\frac{1}{\eta_v} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_v(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\eta_n} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_n(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \quad (8)$$

Граничным и начальным условиями для (8) будут:

$$p(x, 0) = p_0, \quad x > 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial x} = -\frac{\eta_v}{k_v(s)k} \omega_v, \quad t > 0, \quad (10)$$

$p_0 = const$  – начальное давление на левой границе.

Распишем уравнение (1) для воды:

$$\omega_v = -k \frac{k_v(s)}{\eta_v} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (11)$$

Подставив в (2) уравнение (11) получим:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{k}{\eta_v} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_v(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (12)$$

Уравнения (8), (12) с учетом условий (5), (6), (9), (10) используются для численного моделирования процесса вытеснения нефти водой. Из (8) находится распределение давления в пласте, из (12) водонасыщенность в каждой точке в момент времени  $t$ .

Численная схема будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{s_i^{j+1} - s_i^j}{\Delta t} &= \frac{k}{\eta_v m \Delta x} \left( k_{v_i}^j(s) \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{\Delta x} - k_{v_{i-1}}^j(s) \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{\Delta x} \right), \\ &\left( \eta_n k_{v_i}^j(s) + \eta_v k_{n_i}^j(s) \right) \left( p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1} \right) - \\ &\quad - \left( \eta_n k_{v_{i-1}}^j(s) + \eta_v k_{n_{i-1}}^j(s) \right) \left( p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение образует систему алгебраических уравнений, которое использует значения функции в трех соседних узлах сетки. Значения  $k_{v_i}^j(s)$  и  $k_{n_i}^j(s)$  взяты слева для того, чтобы обеспечить устойчивость счета. То есть использована схема с разностями против потока. Программа была реализована в среде MATLAB[3]. Использованная неявная схема для давления была решена методом прогонки[4]. Неизвестная функция водонасыщенности  $s$  находится по схеме «Явный левый угол».

Здесь  $\Delta x$ –шаг по пространству,  $\Delta t$ –шаг по времени.

### Аналитическое решение

Для построения аналитического решения, необходимо совместно решить два уравнения [5]:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \omega f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} dt + \frac{\partial s}{\partial x} dx = 0. \quad (14)$$

Начальное и граничное условия:

$$s(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq x_0, \\ 0 & \text{при } x > x_0 \end{cases} \quad x > 0,$$

$$s(0, t) = 1, \quad t > 0,$$

где  $f'(s)$ –производная от функции Бакли-Левверетта. Функция  $f(s)$  задается следующим образом:

$$f(s) = \frac{k_v(s)}{k_v(s) + \eta_0 k_n(s)}, \quad (15)$$

где  $\eta_0 = \eta_v / \eta_n$

Уравнение (13) является уравнением Бакли-Левретта. Уравнение (14) говорит о том, что вдоль линий  $x(t)$  насыщенность принимает заданное постоянное значение и для любого заданного значения можно установить связь между  $x$  и  $t$ .

Положение  $x$  заданного значения насыщенности находится по формуле:

$$x(s) = \frac{\omega}{m} f'(s)t + x_0. \quad (16)$$

Кривая  $f'(s)$  не монотонная, поэтому, спустя определенный промежуток времени после начала вытеснения, значения насыщенности становятся неоднозначными, что невозможно физически. Для устранения многозначности решения вводят скачок насыщенности. Положение скачка определяется по формуле:

$$x_c = \frac{\omega}{m} f'(s_c)t + x_0. \quad (17)$$

Фронтальная насыщенность  $s_c$  находится из уравнения:

$$f'(s_c) = \frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0}, \quad (18)$$

где  $s_0$  – начальная водонасыщенность.

Относительные фазовые проницаемости  $k_v(s)$  и  $k_n(s)$  в нашем случае заданы следующим образом:

$$k_v(s) = s^2, \quad k_n(s) = (1 - s)^2.$$

Этим фазовым проницаемостям отвечает, согласно (15), следующая функция Бакли-Левретта:

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + \eta_0(1 - s)^2}, \quad (19)$$

а ее производная равна

$$f'(s) = \frac{2\eta_0 s(1-s)}{(s^2 + \eta_0(1-s)^2)^2}, \quad (20)$$

При  $f(s_0) = 0$ ,  $s_0 = 0$ , подставив (19) и (20) в (18), получим:

$$s_c^2 + \eta_0(1-s_c)^2 = 2\eta_0(1-s_c),$$

откуда находим:

$$s_c = \sqrt{\frac{\eta_0}{1+\eta_0}}.$$

### Анализ полученных результатов

Для того, чтобы удостовериться в правильности численных расчетов, сравним полученное решение с аналитическим. Так же рассмотрим влияние разбиения сетки по пространству на численное решение. Рис. 2 иллюстрирует кривую распределения функции водонасыщенности в момент времени  $t = 50$  с., где сплошная линия характеризует аналитическое решение, штриховая—численное решение. Общая длина расчетной области  $L = 1$  м, скорость фильтрации  $\omega = 9 \cdot 10^{-4}$  м/с, шаг по времени  $\Delta t = 10^{-2}$  с, шаг по пространству а)  $\Delta x = 10^{-2}$  м., б)  $\Delta x = 10^{-3}$  м.

Рис. 2, а) показывает, что при более мелком разбиении сетки по пространству, точность численного решения возрастает. Начиная с шага  $\Delta x = 10^{-3}$  м. выбранная конечно-разностная схема хорошо аппроксимирует поставленную задачу о фильтрации нефтяного пласта.

### Заключение

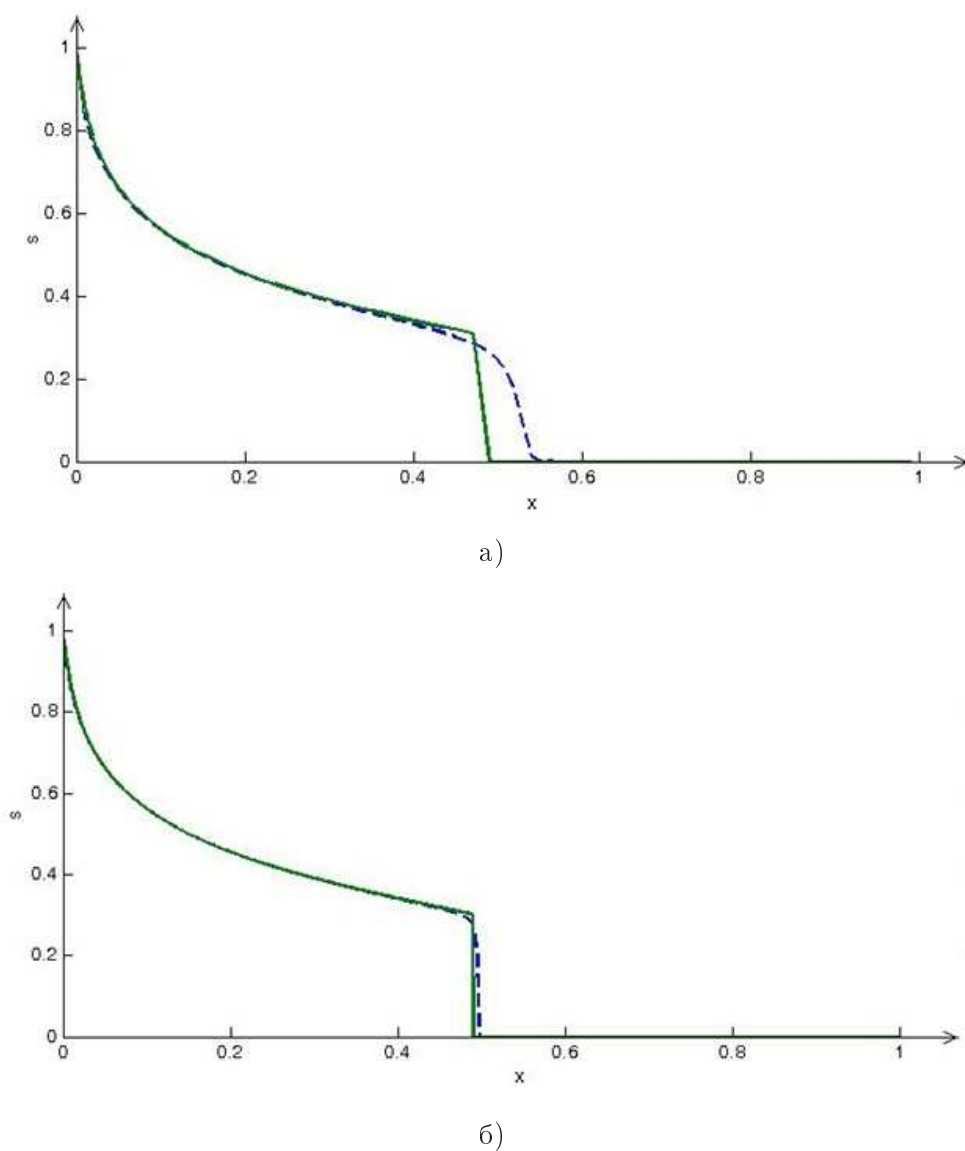


Рис. 2: Кривая распределения функции  $s$ .

В данной статье показано численное и аналитическое решение задачи Бакли-Левретта о двухфазной фильтрации конечно-разностным методом на языке программирования MATLAB, а так же приведено их сравнение. По результатам сопоставления точного решения и приближенного, можно сказать, что они хорошо согласуются между собой. При этом точность численного решения

возрастает при более мелком разбиении сетки.

Автор выражает благодарность профессору Университета штата Мэриленд, д.ф.-м.н. Н.А. Гумерову и профессору Университета штата Северная Дакота, д.ф.-м.н. И.Ш. Ахатову за руководство данной работой, выполненной в Центре «Микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем» при Башкирском Государственном Университете.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (11.G34.31.0040).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Топливная компания «Поволжье Ойл»* Запасы нефти в России /24.05.2012/[Электронный ресурс]—Режим доступа: <http://povoljie-oil.ru/news/detail/18>
- [2] *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика.—М.: Гостоптехиздат., 1963.
- [3] *Ануфриев И., Смирнов А., Смирнова Е.* МАТЛАВ 7.—изд. БХВ-Петербург, 2005.
- [4] *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—3-е изд., испр.—М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1989.-616 с.
- [5] *Басниев К. С., Кочина И.Н., Максимов В. М.* Подземная гидромеханика: Учебник для вузов.—М.: Недра, 1993.



ДЛЯ ЗАМЕЧАНИЙ

ДЛЯ ПРИМЕЧАНИЙ

**ДЛЯ ДОПОЛНЕНИЙ**

*Научное издание*

**VI Международная школа-конференция для студентов,  
аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная  
математика и ее приложения в естествознании»**

**г. Уфа, 9–13 октября 2013 г.**

**Сборник трудов**

**Том 1. Математика**

Редактор А. Ф. Файзуллина  
Корректор А. И. Николаева

*Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать ??????. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. ??????. Уч.-изд. л. ?????.

Тираж 50 экз. Изд. № ??. Заказ ??.

*Редакционно-издательский центр*

*Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке  
Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*