

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**НИЛ "ГАММЕТТ" УФИМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО**  
**АВИАЦИОННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**С. В. ХАБИРОВ**

**ЛЕКЦИИ**  
**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**  
**В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ**

Уфа 2013

УДК 533.6

Лекции аналитические методы в газовой динамике: С.В.Хабиров;  
БГУ, Уфа, 2013. 224 с.

Газовая динамика считается фундаментальной физико-математической дисциплиной. В ней гармонично сочетаются абстрактные математические построения, физические представления о реальном мире, различные методы аналитического и численного моделирования. Поэтому элементы этой теории встречаются в различных теоретических и прикладных курсах. Огромный, накопленный столетиями, материал не позволяет кратко изложить всевозможные аспекты газовой динамики.

Книга предназначена студентам и аспирантам специальности прикладная математика и механика. В ней даются основные математические понятия, аналитические и численные методы решения газодинамических задач. Применен экономный стиль изложения материала с использованием симметричного анализа дифференциальных уравнений. Получено множество точных решений и дана их физическая интерпретация.

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-06819-моб-г), гранта правительства РФ №11.G34.31.0042 по постановлению №220 и за счет внебюджетных средств БашГУ.

Редакционная коллегия: д-р физ. - мат. наук Н.Х. Ибрагимов,  
д-р физ. - мат. наук В.А. Байков,  
д-р физ. - мат. наук Р.К. Газизов,  
к-т физ.- мат. наук В.В. Картак

© Хабиров С.В.

© БГУ, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Обозначения .....	4
Введение. Газовая динамика – фундаментальная дисциплина.....	5
§ 1. Интегральные законы сохранения и их инвариантность.....	7
§ 2. Термодинамические закономерности.....	13
§ 3. Дифференциальные уравнения.....	21
§ 4. Уравнения сильного разрыва и свойства ударных волн.....	26
§ 5. Характеристики и слабые разрывы.....	37
§ 6. Основные краевые задачи.....	43
§ 7. Групповой анализ.....	51
§ 8. Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2.....	58
§ 9. Частично инвариантные подмодели.....	76
§ 10. Дифференциально - инвариантные подмодели.....	82
§ 11. Приближенные группы и подмодели.....	87
§ 12. Нестационарное одномерное движение.....	92
§ 13. Двумерные установившиеся течения.....	107
§ 14. Одномерные движения газа с цилиндрическими волнами и закруткой.....	126
§ 15. Течения со спиральными поверхностями уровня.....	132
§ 16. Инвариантные решения ранга один .....	139
§ 17. Автономные подмодели ранга один .....	162
§ 18. Неавтономные подмодели ранга один .....	182
§ 19. Инвариантные решения подмодели сферически симметричных движений газа.....	200
§ 20. Вычислительные методы .....	208
Приложение. Оптимальная система подалгебр основной алгебры .....	216
Список литературы.....	224

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$R^n(\vec{x})$  – пространство векторов  $\vec{x}$  размерности  $n$ ;

$|\vec{u}|$  – модуль вектора  $\vec{u}$ ;

$\sum_{i=1}^N m_i = m_1 + \dots + m_N$  – сумма из  $N$  слагаемых;

$\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{x}(t_0)$  – начальное значение вектор - функции;

$\vec{u} \cdot \vec{n}$  – скалярное произведение векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{n}$ ;

$\vec{u} \times \vec{n}$  – векторное произведение;

$S^T$  – транспонированная матрица матрицы  $S$ ;

$\det S = |S|$  – определитель матрицы  $S$ ;

$f_\rho = \partial_\rho f = \frac{\partial f}{\partial \rho}$  – частная производная;

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}$  – матрица Якоби из частных производных  $u_{x^i}^k$ ;

$\text{div } \vec{u} = \text{tr } \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}$  – сумма элементов матрицы, стоящих на главной диагонали;

$$\text{rot } \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i}(w_y - v_z) - \vec{j}(w_x - u_z) + \vec{k}(v_x - u_y) = \nabla \times \vec{u};$$

$\nabla = \partial_{\vec{x}} = \text{grad}$  – оператор градиента;

## ***Введение. Газовая динамика – фундаментальная дисциплина.***

Газовая динамика есть физико-математическая дисциплина, занимающая место в списке основных фундаментальных знаний.

С точки зрения физики она занимается изучением движения сплошных сред с сильно меняющимися термодинамическими параметрами: плотностью, давлением, энтропией, внутренней энергией, температурой. Сплошные среды могут быть как газообразные и жидкие, так и твердые при воздействии больших температур и давлений. В реальных условиях проявление сильного изменения термодинамических параметров сопровождается другими важными эффектами: вязкостью, теплопроводностью, химическими реакциями, фазовыми переходами, излучением и т.п. Такие диссипативные процессы имеют характерные времена протекания. Если ограничиться быстропротекающими процессами, в которых диссипация мало меняется, то изменение термодинамических параметров становится преобладающим. Таковую газовую динамику называют классической наукой о движении газа, ее изучению посвящена эта книга.

С точки зрения математики классическая газовая динамика является объектом приложения абстрактных теорем из алгебры, анализа, геометрии, нелинейных дифференциальных уравнений и других математических дисциплин. Кроме того, физические наблюдения за поведением газа приводят к новым математическим понятиям и новым задачам, решение которых развивает известные математические теории и способствует появлению новых аналитических и численных методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений. Богатство теоретической газовой динамики заключено в большом количестве различных математических моделей и подмоделей, в разнообразии применяемых методов, в многочисленных точно решенных задачах, в разнообразии

примененных численных методов, во множестве открытых проблем, в ценности ее выводов для практических приложений.

Как самостоятельная наука газовая динамика начала складываться в первой половине XIX века. С. Пуассон, Дж. Стокс, Р. Иршоу начали анализ нелинейных эффектов, возникающих при распространении волн давления. Б. Риман (Германия), Ж. Адамар (Франция) завершили теорию сильного разрыва. Эксперименты Сен-Венана, А. Гюгонио, Э. Жуге (Франция), Н.В. Маевского (Россия), Э. Маха (Австрия) заложили основы знаний о движении сильных и слабых разрывов. На рубеже веков В.А. Михельсон, Д. Чепмен, Э. Жуге заложили основы теории горения и детонации.

В XX веке газовая динамика развивалась в основном как прикладная наука, возникают все новые и новые направления: теория обтекания, теория внутренних течений, метеорология, акустика, численные методы в газовой динамике. Большой вклад в газовую динамику внесли выдающиеся ученые, как математики, так и механики многих стран мира: Л. Прандтль, А. Буземан, Г. Гудерлей, К. Фридрихс (Германия), Я. Аккерет, А. Стодал (Швейцария), Л. Крокко (Италия), Дж. Тейлор (Англия), Т. Карман, С. Тзян (США), Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин, А.А. Фридман, Н.Е. Кочин, М.В. Келдыш, И.А. Кибель, Ф.И. Франкль, С.А. Христианович, М.А. Лаврентьев, Л.И. Седов, А.А. Дородницын (Россия), Х. А. Рахматулин, А.Ф. Сидоров, Л.В. Овсянников, Г.Г. Черный, Н.Н. Яненко и др.

Перечисление большого числа известных ученых, работающих в области газовой динамики, дает представление о многообразии полученных результатов и о трудностях наибольшего охвата знаний в преподавании дисциплины.

В основу книги положен универсальный способ изложения методов газовой динамики – способ, основанный на симметричном (групповом) анализе дифференциальных уравнений. Уже при выводе уравнений

замечается их инвариантность относительно группы Галилея расширенной растяжением, с помощью которой классифицируются движения газа, разрабатываются методы решения, находятся точные решения.

Конечно, пока не все теоретические методы объясняются в рамках симметричного анализа, но такой подход дает экономию времени изложения, объема содержания, усилий преподавания основ газовой динамики.

### ***§1. Интегральные законы сохранения и их инвариантность.***

Общие физические представления таковы: всякий ограниченный объем газа  $\omega$  состоит из конечного числа движущихся частиц  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , с массами  $m_i$ , векторами скоростей  $\vec{u}_i$ , импульсами  $m_i \vec{u}_i$ , кинетическими энергиями  $\frac{1}{2} m_i |\vec{u}_i|^2$  и внутренними энергиями  $\varepsilon_i$ . В результате столкновений молекул меняются скорости, импульсы и энергии, что приводит к хаотическому движению молекул в объеме  $\omega$ .

Способ описания движения всех молекул в отдельности с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений неприменим не только из-за очень большого их числа (в  $1 \text{ см}^3$  воздуха при нормальных условиях содержится  $2.7 \cdot 10^{19}$  молекул), но и потому, что невозможно указать точные начальные данные. Поэтому в газовой динамике используется осредненное описание движения. Для выделенного объема  $\omega$  вводят понятия **массы** газа

$$m = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \text{импульса} \quad \vec{K} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{u}_i \quad \text{и} \quad \text{полной} \quad \text{энергии}$$

$$E = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i |\vec{u}_i|^2 + \varepsilon_i \right). \quad \text{Если } |\omega| \text{ есть величина } \omega, \text{ то определяются ве-}$$

личины: средняя плотность  $\rho = m|\omega|^{-1}$ , средняя скорость  $\vec{u} = m^{-1}\vec{K}$ , средняя внутренняя энергия  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{|\omega|} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i |\vec{u}_i - \vec{u}|^2 + \varepsilon_i \right)$ .

Упражнение 1. Показать, что масса, импульс и полная энергия газа в объеме  $\omega$  выражаются через средние величины по формулам

$$m = |\omega|\rho, \quad \vec{K} = |\omega|\rho\vec{u}, \quad E = |\omega|\left(\frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + \bar{\varepsilon}\right). \quad (1.1)$$

В газовой динамике постулируется **гипотеза сплошности**: при стягивании объема  $\omega$  в точку (в малый объем возле фиксированной точки) введенные средние величины имеют конечный предел и тем самым порождают распределение плотности, вектора скорости и внутренней энергии. Стянутый в точку объем называется **частицей**, которая со временем  $t$  занимает различные положения в пространстве  $R^3(\vec{x})$ . Поэтому пространство событий газовой динамики есть  $R^4(\vec{x}, t)$ , основными величинами являются **скорость**  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ , **плотность**  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ , **давление**  $p = p(\vec{x}, t)$ , **удельная внутренняя энергия**  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t)$  ( $\bar{\varepsilon} = \rho\varepsilon$ ). Эти величины задают движение газа.

Положение частицы  $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0)$  определяется ее скоростью и зависит от времени и начального положения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{x}_0. \quad (1.2)$$

Упражнение 2. Записать векторное уравнение (1.2) и начальные условия в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Если векторное поле  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  задано в некоторой области  $\Omega \subset R^4$ , непрерывно в  $\Omega$  и удовлетворяет условию Липшица по  $\vec{x}$ , то область  $\Omega$  однократно покрыта семейством интегральных кривых уравнения (1.2). Эти



кривые называются **мировыми линиями частиц** в пространстве событий  $R^4(\vec{x}, t)$ . Проекция мировой линии в пространство  $R^3(\vec{x})$  называется **траекторией частиц**.

Каждая мировая линия определена начальным условием, как решение задачи (1.2)

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0) \quad (1.3)$$

Одна частица отличается от другой значением  $\vec{x}_0$ . Все функции можно выразить через переменные  $t, \vec{x}_0$  – это локальные **лагранжевы переменные**.

Переменные  $t, \vec{x}$  определяют положение частиц в момент времени  $t$  – это **эйлеровы переменные**.

Связь между эйлеровыми и лагранжевыми переменными дается формулой (1.3).

Скорость может быть определена в области  $\Omega$  большей, чем область занятая графиками (1.3), так как якобиан  $|\partial\vec{x}/\partial\vec{x}_0|$  в некоторых точках  $\Omega$  может обратиться в ноль. В этих точках происходит схлопывание частиц. Существуют для заданного состояния газа глобальные лагранжевы координаты, которые различают частицы во всех точках области  $\Omega$ .

Упражнение 3. По мировым линиям (1.3) определить вектор скорости в эйлеровых переменных.

Область  $\omega(t) \subset R^3$ , состоящая при всех  $t$  из одних и тех же частиц, называется **движущимся объемом**.

Вводятся физические характеристики движущегося объема: **масса**

$$\int_{\omega(t)} \rho d\omega, \text{ импульс } \int_{\omega(t)} \rho \vec{u} d\omega, \text{ энергия } \int_{\omega(t)} \rho \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \varepsilon \right) d\omega.$$

В газовой динамике постулируется **принцип отвердевания**: изменение массы, импульса и энергии любого движущегося объема  $\omega(t)$  для ка-

ждого  $t$  происходит так же, как для твердого тела, занимающего объем  $\omega(t)$  и имеющего те же физические характеристики.

Следовательно, справедливы законы движения твердого тела из теоретической механики: масса неизменна

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho d\omega = 0,$$

импульс меняется за счет приложения всех сил, действующих на объем  $\omega(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \vec{u} d\omega = \vec{F},$$

энергия меняется за счет работы внешних сил и дополнительного притока энергии

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \varepsilon \right) d\omega = W + Q,$$

где  $W$  – мощность, развиваемая суммой всех сил  $\vec{F}$ ,  $Q$  – скорость притока дополнительной энергии.

В книге рассматривается модель **невязкого, нетеплопроводного** газа, действующая в отсутствие внешних силовых полей и внешних источников энергии  $Q=0$ . Силами, действующими на объем, будут только поверхностные **силы давления**, направленные по нормали к поверхности  $\gamma(t)$ , ограничивающей объем  $\omega(t)$ . Пусть  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали, тогда

$$\vec{F} = - \int_{\gamma(t)} p \vec{n} d\gamma, \quad W = - \int_{\gamma(t)} p \vec{n} \cdot \vec{u} d\gamma.$$

Итак, справедливы интегральные законы движения газа

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho d\omega &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \vec{u} d\omega &= - \int_{\gamma(t)} p \vec{n} d\gamma, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \varepsilon \right) d\omega &= - \int_{\gamma(t)} p \vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma. \end{aligned} \tag{1.4}$$

для любого движущегося объема  $\omega(t)$  с гладкой границей  $\gamma(t)$ , у которой есть непрерывная внешняя нормаль  $\vec{n}$ .

Упражнение 4. Показать, что закон изменения момента импульса

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho (\vec{u} \times \vec{x}) d\omega = - \int_{\gamma(t)} \rho (\vec{n} \times \vec{x}) d\gamma$$

является следствием первых двух законов (1.4) для непрерывных движений и сильных разрывов.

Упражнение 5. Показать, что балансовый закон сохранения величин  $\rho$ ,  $\rho \vec{u}$ ,  $\rho(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon)$  в неподвижном объеме  $\omega_0$  задается равенством

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_0} \rho d\omega_0 &= - \int_{\gamma_0} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma_0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_0} \rho \vec{u} d\omega_0 &= - \int_{\gamma_0} (p \vec{n} + \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n})) d\gamma_0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_0} \rho \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \varepsilon \right) d\omega_0 &= - \int_{\gamma_0} (p + \rho \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \varepsilon \right)) \vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma_0. \end{aligned}$$

Система (1.4) содержит пять скалярных уравнений и связывает шесть скалярных искомым величин (три компоненты скорости, плотность, давление, внутреннюю энергию). Она не определена, поэтому требуется привлечение термодинамических закономерностей.

Уравнения (1.4) были выведены из законов движения твердого тела. В теоретической механике доказывается, что эти законы не зависят от выбора начала отсчета в  $R^4(\vec{x}, t)$ , от поворота системы координат на любой угол вокруг любой оси, от движения с постоянной скоростью начала отсчета. Перечисленные преобразования образуют группу Галилея:

$$1^\circ. \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a};$$

$$2^\circ. t' = t + a_0;$$

$$3^\circ. \vec{x}' = O\vec{x}, \quad \vec{u}' = O\vec{u}, \quad OO^T = 1, \quad \det O = 1;$$

$$4^\circ. \vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}, \quad \vec{u}' = \vec{u} + \vec{b}.$$

Здесь не указаны преобразования инвариантных (не меняющихся) переменных,  $O$  – оператор вращения, который может быть представлен как суперпозиция трех вращений вокруг трех взаимно перпендикулярных осей (например, декартовой системы координат) и, значит, зависит от трех параметров – углов вращения. Преобразования  $1^\circ \div 4^\circ$  не должны изменять уравнения (1.4).

Проверяется, что равномерное растяжение в  $R^4(\vec{x}, t)$ :

$$5^\circ. t' = ct, \quad \vec{x}' = c\vec{x}$$

тоже не меняет уравнения (1.4). Это следует из соотношений  $(dt)' = cdt$ ,  $(d\omega)' = c^3 d\omega$ ,  $(d\gamma)' = c^2 d\gamma$ .

Суперпозиция преобразований  $1^\circ$ – $5^\circ$  зависит от 11 параметров.

Упражнение 5. Записать преобразования  $1^\circ$ – $5^\circ$  в декартовой системе координат, причем вращения вокруг каждой оси отдельно. Проверить, что уравнения (1.4) не меняются. Показать, что преобразования  $1^\circ$ – $5^\circ$  образуют группу  $G_{11}$ .

Итак, с интегральными уравнениями движения газа (1.4) связана группа  $G_{11}$  преобразований, допускаемых уравнениями.

## **§2. Термодинамические закономерности.**

При движении частицы в сплошной среде происходит ее энергетическое взаимодействие с окружением. Имеет место **первый закон термодинамики**: подводимое к частице тепло  $\delta Q$  в расчете на единицу массы в процессе малого изменения ее состояния связано с изменением внутренней энергии частицы  $d\varepsilon$  и работой  $\delta A^{(i)}$ , совершаемой в частице внутренними силами, соотношением

$$\delta Q = d\varepsilon + \delta A^{(i)},$$

причем  $d\varepsilon$  есть полный дифференциал внутренней энергии  $\varepsilon$ . Этим постулируется существование функции состояния – **внутренней энергии**, определенной с точностью до постоянного слагаемого.

Если система с течением времени может проходить некоторую последовательность состояний как в одном, так и в другом направлении, то этой последовательности состояний соответствует **обратимый процесс**, в противном случае процесс называется **необратимым**. Непрерывный процесс обратим, если все описывающие процесс соотношения для бесконечно малых изменений параметров состояния сохраняются при замене знаков этих изменений на обратные.

Имеет место **второй закон термодинамики**: существует отнесенная к единице массы среды функция состояния  $S$  – энтропия такая, что при обратимых изменениях состояния частицы

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

где  $T$  – абсолютная температура частицы,  $\delta Q$  – подводимое к ней извне тепло. В термодинамике доказывается, что для обратимых процессов  $dS$  является дифференциалом.

При необратимых процессах

$$T dS = \delta Q + \delta Q'.$$

Здесь  $\delta Q'$  – некомпенсированное тепло.

**Третий закон термодинамики** утверждает

$$\delta Q' \geq 0.$$

Знак равенства соответствует обратимым процессам.

Если частица теплоизолирована, то  $\delta Q = 0$ . Такой процесс называется **адиабатическим**. Если адиабатический процесс обратим, то  $dS = 0$ , т.е.  $S = \text{const}$ . При адиабатическом необратимом процессе  $dS > 0$  – энтропия возрастает.

Для **идеального газа** касательные напряжения на любую площадку отсутствуют, есть только нормальные силы давления  $\vec{p}_n = -p\vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к площадке. Поэтому работа внутренних сил частицы отнесенная к единице массы газа равна  $\delta A^{(i)} = pdV$ , где  $V = \rho^{-1}$  – **удельный объем**.

Помимо внутренней энергии  $\varepsilon$ , энтропии  $S$ , плотности  $\rho$  или удельного объема  $V = \rho^{-1}$ , давления  $p$ , температуры  $T$ , удобно ввести **энтальпию** по формуле  $i = \varepsilon + pV$ . Таким образом, для обратимых процессов в частице идеального газа справедливы соотношения, связывающие параметры состояния и их дифференциалы

$$\delta Q = TdS = d\varepsilon + pdV \quad (2.1)$$

или

$$TdS = di - \rho^{-1} dp \quad (2.2)$$

В дальнейшем предполагается, что газ как термодинамическая система является двухпараметрической средой. Это означает, что параметры состояния частицы  $\rho, p, S, T, \varepsilon$  вполне определяются заданием двух каких-либо параметров. В этом случае должно быть три соотношения на пять параметров состояния. Два соотношения задает уравнение в полных

дифференциалах (2.1). Еще одно недостающее соотношение является эмпирическим и называется **калорическим уравнением состояния**, если  $S$  – один из независимых параметров, и **термическим уравнением состояния**, если  $T$  – один из независимых параметров.

Если калорическое уравнение имеет вид  $\varepsilon = E(V, S)$ , то из (2.1) следует  $T = E_S(V, S), p = -E_V(V, S)$ .

Упражнение 1. Пусть калорическое уравнение имеет вид  $i = I(p, S)$ . Тогда остальные параметры определяются по формулам  $T = I_S, V = \rho^{-1} = I_p, \varepsilon = I - pV$ . Покажите, что термодинамические потенциалы Гиббса: внутренняя энергия  $\varepsilon = E(V, S)$ , энтальпия  $i = I(p, S)$ , свободная энергия  $F = \varepsilon - TS = F(V, T)$ , полный термодинамический потенциал  $\Psi = \varepsilon - TS + pV = \Psi(p, T)$ , энтропия  $S = S(\varepsilon, V)$ , удельный объем  $V = V(\varepsilon, S)$  полностью определяют из (2.1) все газодинамические параметры явно. Остальные 4 случая двух независимых термодинамических параметров приводят к дифференциальному уравнению, решения которого определено с точностью до функции одного переменного. Для однозначного определения параметров газа надо измерять второе уравнение состояния.

В термодинамике вводятся дополнительные величины. **Удельная теплоемкость  $c$**  определяется равенством

$$cdT = \delta Q.$$

При постоянном объеме из (2.1) следует  $\delta Q = \varepsilon_T|_V dT$ , т.е.  $c_V = \varepsilon_T|_V$  – **теплоемкость при постоянном объеме** всегда положительна  $c_V > 0$ .

При постоянном давлении из (2.2) следует  $\delta Q = i_T|_p dT$ , т.е.  $c_p = i_T|_p$  – **теплоемкость при постоянном давлении**.

Важной характеристикой сжимаемой среды является отношение теплоемкостей  $\gamma = c_p / c_V$ .

Для калорического уравнения состояния вида  $p = f(\rho, S)$  величина  $f_\rho|_S$  всегда положительна. Величина  $a = (f_\rho|_S)^{1/2}$  называется **скоростью звука**. Если калорическое уравнение записать в виде  $p = g(V, S) = f(V^{-1}, S)$ , то величина  $\rho a = (-g_V|_S)^{1/2}$  называется **акустическим импедансом**.

Упражнение 2. Вывести формулу

$$\frac{d(\rho a)}{d\rho} = \frac{m+2}{2} a, \text{ где } m = \rho f_{\rho\rho} f_\rho^{-1}.$$

Для **совершенных** газов справедливо уравнение Клайперона

$$pV = RT, \tag{2.3}$$

где  $R$  – газовая положительная постоянная. В этом случае из (2.1) следует, что внутренняя энергия  $\varepsilon = \varepsilon(T)$  зависит только от температуры.

Действительно пусть  $\varepsilon = \varepsilon(T, p)$ , тогда из (2.1) и (2.3) следует

$$\varepsilon_T + R = TS_T, \quad \varepsilon_p - RTp^{-1} = TS_p.$$

Приравнивая смешанные производные  $S_{Tp} = S_{pT}$ , получим  $\varepsilon_p = 0$  и  $S$  определяется с точностью до постоянного слагаемого, если задать  $\varepsilon = \varepsilon(T)$ . Итак, термическое уравнения (2.3) недостаточно, чтобы определить все термодинамические параметры, необходимо доопределить модель заданием функции  $\varepsilon = \varepsilon(T)$ , тогда

$$S = R \ln V + \int T^{-1} c_V(T) dT, \quad c_V = \varepsilon'_T(T)$$

$$i(T) = \varepsilon(T) + RT, \quad c_p = i'_T(T), \quad \gamma(T) = c_p c_V^{-1},$$

$$c_p - c_V = R$$

Так как  $R > 0$ ,  $c_V > 0$ , то всегда  $\gamma > 1$ .



Если  $c_v = \text{const}$ , то совершенный газ называется **политропным** и тогда

$$\varepsilon = c_v T, i = c_p T, c_p = \text{const}, S = R \ln V + c_v \ln T + S_0, \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{const},$$

$$p = e^{\frac{S-S_0}{c_v}} \rho^\gamma. \quad (2.4)$$

Из статистической физики следует, что энергия молекул газа в равновесном состоянии распределяется равномерно по всем степеням свободы возможных движений молекулы; энергия, приходящаяся на одну степень свободы, составляет  $\frac{1}{2} RT$  в расчете на единицу массы газа. Если  $n$  – число степеней свободы движений молекулы, то удельная внутренняя энергия газа равна  $\varepsilon = \frac{1}{2} nRT$ , а удельная энтальпия есть  $i = \frac{n+2}{2} RT$ .

Соответственно теплоемкости и их отношения даются формулами

$$c_v = \frac{1}{2} nR; \quad c_p = \frac{1}{2} (n+2)R, \quad \gamma = \frac{n+2}{n}.$$

Одноатомный газ имеет три степени свободы – возможность двигаться в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Для него  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Газы со сложными молекулами имеют большое число внутренних степеней свободы и для них  $\gamma \rightarrow 1$ . Итак, для совершенных газов  $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$ .

Статистическая физика не правильно трактует распределение энергии по колебательным степеням свободы, а при низких температурах – и по вращательным степеням свободы молекул.

Для двухатомных молекул число степеней свободы  $n = 7$  (три поступательных, две вращательных, две колебательные) и согласно со статисти-

ческой физикой  $\gamma = \frac{9}{7}$ . Однако точный результат для теплоемкости двухатомных молекул при постоянном объеме таков

$$c_V = \left[ \frac{5}{2} + \left( \frac{\theta_V}{T} \right)^2 e^{\theta_V T^{-1}} \left( e^{\theta_V T^{-1}} - 1 \right)^{-2} \right] R,$$

где  $\theta_V$  – характеристическая колебательная температура. Например,  $\theta_V = 2273K$  для  $O_2$ ,  $3393K$  для  $N_2$ ,  $3122K$  для CO. Отсюда

$$\text{при } T \ll \theta_V \Rightarrow c_V = \frac{5}{2} R, \quad \gamma = \frac{7}{5}; \quad \text{при } T \gg \theta_V \Rightarrow c_V = \frac{7}{2} R, \quad \gamma = \frac{9}{7}.$$

Таким образом, для воздуха (смесь  $O_2$ ,  $N_2, \dots$ ) в нормальных условиях  $\gamma = 1,4$ .

При  $S = \text{const}$  уравнение (2.4) задает адиабату Пуассона для совершенного газа с постоянными теплоемкостями, тогда  $\gamma$  называется **показателем адиабаты** и для основных термодинамических величин получаются выражения

$$a = (\gamma p \rho^{-1})^{\frac{1}{2}} = (\gamma R T)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon = \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)}, \quad i = \frac{a^2}{\gamma - 1}.$$

Упражнение 3. Показать, что в совершенном газе скорость звука выражается через внутреннюю энергию  $\varepsilon = \varepsilon(T)$  по формуле

$$a^2 = RT(1 + R\varepsilon'^{-1})$$

Упражнение 4. Доказать предложение

$$\varepsilon(V, T) = \varepsilon_1(V) + \varepsilon_2(T) \Leftrightarrow p(V, T) = p_1(V)T + p_2(V).$$

В газовой динамике выявлены свойства уравнений состояния  $p = f(\rho, S), \varepsilon = e(V, p) = E(V, S)$ , описывающих поведения нормальных газов. Этим свойствам достаточно, чтобы провести качественное исследование фундаментальных закономерностей при движении газа.

Газ называется **нормальным**, если функции  $f, e, E$  обладают следующими свойствами.

1. Функция  $f$  определена и трижды непрерывно дифференцируема в области  $\{0 < \rho < \infty, S_* < S < S^*\}$ , всюду в этой области удовлетворяет неравенствам

$$f > 0, \quad f_\rho > 0, \quad f_{\rho\rho} > 0, \quad f_S > 0, \quad (2.5)$$

и предельным соотношениям

$$f \rightarrow 0 \text{ при } S \rightarrow S_*, \quad f \rightarrow \infty \text{ при } S \rightarrow S^*. \quad (2.6)$$

2. Функция  $e$  определена и трижды непрерывно дифференцируема в области  $Q = \{0 < V < \infty, 0 < p < \infty\}$ , всюду в  $Q$  удовлетворяет неравенствам

$$e > 0, \quad pe_p \geq e \quad (2.7)$$

и предельным соотношениям

$$e \rightarrow 0 \text{ при } V \rightarrow 0, \quad E(V, S) \rightarrow 0 \text{ при } V \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Упражнение 5. Для нормального газа выполняются соотношения

$$f \rightarrow 0, f_\rho \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0;$$

$$\int_0^\rho f_\rho(\rho, S) \rho^{-1} d\rho < \infty;$$

$$e_p > 0, \quad 2e_v + p > 0. \quad (2.9)$$

Доказать для функции  $g(V, S) = f(V^{-1}, S)$  неравенства газа Вейля

$$g > 0, \quad g_V < 0, \quad g_{VV} > 0, \quad g_S > 0.$$

Состояние газа называется **вакуумом**, если выполнено одно из равенств  $\rho = 0, V = \infty, p = 0, e = 0$ , остальные будут следствием для нормального газа.

Рассмотрим свойства адиабат Пуассона  $S = \text{const}$  для нормального газа в плоскости  $(V, p)$ .

Через фиксированную точку  $(V_0, p_0) \in Q$  проходит одна и только одна адиабата  $S = S_0$ . Действительно,  $p = f(p, S) = g(V, S)$  из (2.5) следует  $g_S = f_S > 0$ , т.е. при фиксированном  $V$  значение  $p$  строго возрастает с ростом  $S$ . Так как в  $Q$   $f_p = -V^2 g_V > 0$ ,  $2f_g + pf_{pp} = V^3 g_{VV} > 0$ ,

то кривая  $S = S_0$  строго выпукла вниз и убывает. Из (2.5) и упражнения 5 следует, что  $g \rightarrow 0$  при  $V \rightarrow \infty$ ,  $g \rightarrow \infty$  при  $V \rightarrow 0$ . Значит, у всех адиабат Пуассона есть асимптоты  $V=0$  и  $p=0$ . Любая прямая  $l_-$  с отрицательным углом наклона  $\alpha < 0$  (Рис. 1) касается единственной адиабаты  $S = S_0$  в точке  $(V_0, p_0)$ . Все адиабаты  $S = S_2 > S_0$  не пересекаются с  $l_-$ .

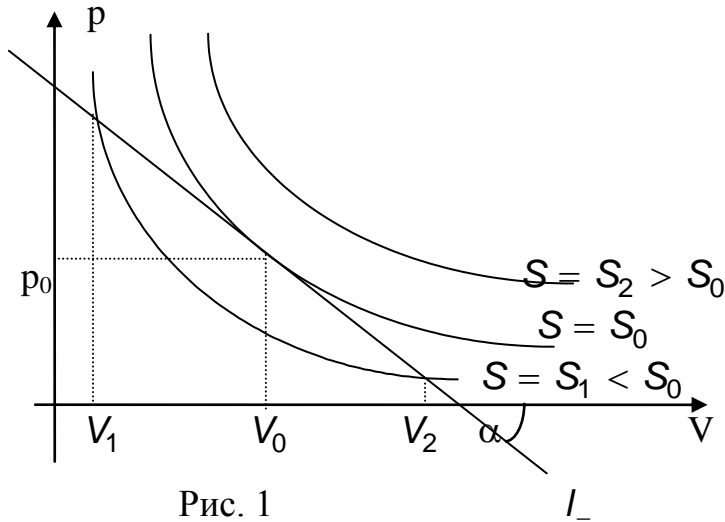


Рис. 1

Всякая адиабата  $S = S_1 < S_0$  пересекает  $l_-$  в двух точках  $(V_1, p_1)$ ,  $(V_2, p_2)$ , причем вдоль прямой  $\frac{dS}{dV} > 0$  при  $V < V_0$  и  $\frac{dS}{dV} < 0$  при  $V > V_0$ .

На практике используют уравнения состояния более общие, чем для совершенного газа или нормального газа. Например, уравнение Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{c}{V^2}, \quad b > 0, c > 0, \quad (2.10)$$

где  $b$  – объем занятый частицами газа,  $c$  – величина силы притяжения между частицами, используется для плотных газов, жидкостей и смесей; уравнение состояния вида

$$p = \Phi(V) + Tf(V) \quad (2.11)$$

описывает поведение реальных плотных сред - газов, жидкостей, твердых тел при больших давлениях и температурах.

Для воды при высоких давлениях используют уравнение состояния Тэта

$$p = B(S) \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (2.12)$$

где  $B(S)$  – слабо зависит от энтропии.

В самом общем виде уравнение состояния представляется вириальным разложением

$$pV = RT(1 + A_2V^{-1} + A_3V^{-2} + \dots),$$

где вириальные коэффициенты имеют вид  $A_i = b_{i1} + b_{i2}T^{-1} + b_{i3}T^{-2} + \dots$

Упражнение 6. Выразить оставшиеся термодинамические параметры для сред с уравнениями состояния (2.10), (2.11), (2.12). Проверить свойства нормальности.

### §3. Дифференциальные уравнения.

**Движением** (или **течением**) газа в области  $\Omega \subset R^4(t, \vec{x})$  называется набор функций  $\vec{u}, \rho, p, \varepsilon$ , определенных в  $\Omega$  и удовлетворяющих уравнениям (1.4).

Движение называется **гладким**, если функции  $\vec{u}, \rho, p, \varepsilon$  непрерывны вместе с первыми производными всюду в  $\Omega$ . Гладкие движения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, равносильной (1.4). Для вывода этих уравнений вводится абстрактный закон сохранения

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f d\omega + \int_{\gamma(t)} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} d\gamma = 0 \quad (3.1)$$

В объемном интеграле вводятся лагранжевы переменные  $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0)$ :

$$\int_{\omega(t)} f d\omega = \int_{\omega_0} f J d\omega_0, \text{ где } J = \det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} - \text{якобиан замены. Из (1.2) следует}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \text{ и } J_t = J \operatorname{div} \vec{u}. \quad (3.2)$$

Для любой функции  $F(\vec{x}, t)$  справедлива формула дифференцирования  $\partial_t F(\vec{x}(t, \vec{x}_0), t) = F_t + \vec{u} \cdot \nabla F = DF$ . Теперь можно выполнить дифференцирование интеграла по движущемуся объему

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f d\omega = \int_{\omega(0)} \partial_t (f J) d\omega_0 = \int_{\omega(0)} (\partial_t f + f \operatorname{div} \vec{u}) J d\omega_0 = \int_{\omega(t)} (Df + f \operatorname{div} \vec{u}) d\omega.$$

Применение формулы Остроградского - Гаусса к поверхностному интегралу

$$\int_{\gamma(t)} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} d\gamma = \int_{\omega(t)} \operatorname{div} \vec{\varphi} d\omega$$

и тождества  $Df + f \operatorname{div} \vec{u} = f_t + \operatorname{div}(f\vec{u})$  приводит (3.1) к виду

$$\int_{\omega(t)} (f_t + \operatorname{div}(f\vec{u} + \vec{\varphi})) d\omega = 0. \quad (3.3)$$

Так как  $\omega(t)$  – произвольный объем, то в области непрерывного течения справедливо дифференциальное уравнение

$$f_t + \operatorname{div}(f\vec{u} + \vec{\varphi}) = 0 \quad (3.4)$$

Все скалярные уравнения из системы (1.4) имеют вид (3.1): для закона сохранения массы  $f = \rho$ ,  $\vec{\varphi} = \mathbf{0}$ ; для закона сохранения импульса в декартовых координатах  $f = \rho u, \rho v, \rho w$ ,  $\vec{\varphi} = (\rho, 0, 0), (0, \rho, 0), (0, 0, \rho)$ ; для закона сохранения энергии  $f = \rho \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \varepsilon \right)$ ,  $\vec{\varphi} = \rho \vec{u}$ .

Подстановка в (3.4) дает **уравнение неразрывности, уравнение импульса и уравнение энергии**

$$\rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (3.5)$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho^{-1} \nabla \rho = 0, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \varepsilon + \rho \rho^{-1} \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) с помощью термодинамического тождества (2.1) и уравнения (3.5) равносильно уравнению для энтропии

$$DS = S_t + (\vec{u} \cdot \nabla)S = 0 \quad (3.8)$$

Если уравнение состояния задать в виде  $\rho = f(\rho, S)$ , то дифференцирование дает уравнение для давления

$$D\rho + A(\rho, p)div \vec{u} = 0, \quad (3.9)$$

где  $A(\rho, p) = \rho f_\rho = \rho a^2(\rho, p)$ .

Упражнение 1. Записать уравнения (3.5)÷(3.9) в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Система уравнений (3.5), (3.6), (3.9) замкнута, т.е. число искомых функций совпадает с числом уравнений. Коэффициент  $A$  этой системы выражается через уравнение состояния. Если рассматривать систему (3.5), (3.6), (3.7) (или (3.5), (3.6), (3.8)), то для замыкания системы надо добавить уравнение состояния  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$  (или  $\rho = f(\rho, S)$ ).

Выведенная система уравнений может быть записана в симметрическом виде в декартовой системе координат. Для этого надо взять уравнение (3.6), умноженное на  $\rho$ ; уравнение (3.9), умноженное на  $b = A^{-1}$  и уравнение (3.8). Тогда получается система в матричном виде

$$A^t \vec{U}_t + A^x \vec{U}_x + A^y \vec{U}_y + A^z \vec{U}_z = 0, \quad (3.10)$$

где

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ S \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} \rho & & & & \\ & \rho & & & \\ & & \rho & & \\ & & & b & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad A^x = \begin{bmatrix} \rho u & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & bu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix},$$

$$A^y = \begin{bmatrix} \rho v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & bv & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}, \quad A^z = \begin{bmatrix} \rho w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & bw & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $A^j$  симметричны, а  $A^t$  положительно определенная матрица.

Рассматриваются некоторые кинематические характеристики: **вихрь скорости**  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ , **циркуляция скорости**  $\Gamma = \int_l \vec{u} \cdot d\vec{l}$  вдоль линии  $l$ .

Пусть  $l$  – кривая АВ, состоящая из одних и тех же частиц. Тогда в силу (3.6), (1.2)

$$\frac{d}{dt} \Gamma = \int_{AB} \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{u} \cdot d\vec{u} = - \int_{AB} \rho^{-1} \nabla p \cdot d\vec{l} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \Big|_A^B.$$

Если кривая  $l$  замкнута, то по теореме Стокса

$$\Gamma = \oint_l \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_{\sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= - \oint_l \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{l} = - \int_{\sigma} \vec{n} \cdot \text{rot} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) d\sigma = \\ &= \int_{\sigma} \left( \nabla p \times \nabla \frac{1}{\rho} \right) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\sigma} (\nabla T \times \nabla S) \cdot \vec{n} d\sigma, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $\sigma$  поверхность, натянутая на контур  $l$ , с нормалью  $\vec{n}$ . Последнее равенство в (3.12) следует из термодинамического тождества (2.2)  $\rho^{-1} \nabla p = \nabla i - T \nabla S$ .

При баротропном гладком движении  $\rho = \rho(p)$  из (3.12) следует

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \text{ т.е. циркуляция по жидкому замкнутому контуру (или поток вихря}$$

сквозь такой контур) остается постоянной. При этом вихри в движущемся газе сохраняются.



Упражнение 2. Доказать формулы векторного анализа.

$$\text{rot}(V\nabla p) = \nabla V \times \nabla p,$$

$$\text{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a} \text{div} b - \vec{b} \text{div} \vec{a},$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 + \text{rot} \vec{u} \times \vec{u},$$

$$\text{rot} \nabla i = 0, \text{div rot } \vec{a} = 0.$$

Уравнение импульса (3.6) можно записать в форме Лэмба - Громеки

$$\vec{u}_t + \frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 + \rho^{-1} \nabla p = \vec{u} \times \vec{\omega}. \quad (3.13)$$

Применение операции rot к (3.13) дает уравнение для вихря

$$D\vec{\omega} = \vec{\omega}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - \vec{\omega} \text{div} \vec{u} + \rho^{-2} \nabla \rho \times \nabla p. \quad (3.14)$$

Упражнение 3. Показать, что для баротропных движений решение уравнений (3.14) с начальными условиями  $\vec{\omega}(0, \vec{x}_0) = \vec{\omega}_0(\vec{x}_0)$  таково

$$\vec{\omega}(t, \vec{x}_0) = \left( \det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \right)^{-1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \vec{\omega}_0(\vec{x}_0).$$

Система уравнений (3.5), (3.6), (3.7) с добавленным уравнением состояния получена из интегральных законов сохранения (1.4), путем преобразований, независимых от выбора системы отсчета. Поэтому они допускают группу преобразований  $G_{11}$  из §1.

Упражнение 4. Проверить, что преобразования 1°–5° не меняют систему (3.5), (3.6), (3.9) в декартовой системе координат.

Упражнение 5. Доказать формулу Эйлера (3.2).

Упражнение 6. Показать, что в лагранжевых координатах уравнения (3.5), (3.6), (3.8) принимают вид

$$(\rho J)_t = 0, \quad M^T \vec{u}_t + \rho^{-1} \partial_{\vec{x}_0} p = 0, \quad S_t = 0, \quad M_t = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}_0},$$

где  $M = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0}$ ,  $J = \det M$ ,  $M^T$  – транспонированная матрица.

Имеют место два интеграла  $\rho J = \rho_0(\vec{x}_0)$ ,  $S = S_0(\vec{x}_0)$  и одно нелинейное векторное уравнение  $M^T \vec{x}_{tt} + J \rho_0^{-1} \partial_{\vec{x}_0} p = 0$ , где  $p = f(\rho, S)$ .

#### **§4. Уравнения сильного разрыва и свойства ударных волн.**

В приложениях возникает необходимость в изучении классов движений, более широких, чем класс гладких движений. Это обобщенные движения, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (1.4) с добавленным уравнением состояния.

Удобно работать с абстрактным законом сохранения в форме (3.3), проинтегрировав его по  $t$  в интервале  $(t_1, t_2)$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega(t)} (f_t + \text{div}(f\vec{u} + \vec{\varphi})) d\omega dt = 0.$$

Здесь интегрирование происходит по ограниченной области  $\Omega \subset R^4$  с кусочно гладкой границей  $\Gamma$  и сечениями  $\omega(t)$  гиперплоскостями  $t = \text{const}$ , подынтегральное выражение есть дивергенция четырехмерного вектора  $\vec{g} = (f, fu + \varphi_1, fv + \varphi_2, fw + \varphi_3)$ . По теореме Остроградского - Гаусса объемный интеграл равен интегралу по граничной трехмерной поверхности

$$\int_{\Gamma} \vec{g} \cdot \vec{v} d\Gamma = 0, \quad (4.1)$$

где  $\vec{v}$  – орт внешней нормали к  $\Gamma$ . Если  $\vec{l}$  – орт оси  $t$ ,  $\vec{n}$  – орт внешней нормали к сечению  $\omega(t)$ , то

$$\vec{v} = \vec{l} \cos \psi + \vec{n} \sin \psi, \quad (4.2)$$

где  $\psi$  - угол между векторами  $\vec{l}$  и  $\vec{v}$ , значит,

$\vec{g} \cdot \vec{v} = f \cos \psi + (f\vec{u} + \vec{\varphi}) \cdot \vec{n} \sin \psi$ . Уравнению (4.1) могут удовлетворять не только гладкие функции, с помощью которых оно было получено, но и разрывные функции.

Набор функций  $\bar{u}, \rho, p, \varepsilon$ , определенных в  $R^4(\bar{x}, t)$ , называется **обобщенным движением** газа, если для любой замкнутой кусочно-гладкой гиперповерхности  $\Gamma \in R^4$  эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\rho \cos \psi + \rho \bar{u} \cdot \bar{n} \sin \psi) d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Gamma} (\rho \bar{u} \cos \psi + (\rho(\bar{u} \cdot \bar{n})\bar{u} + p\bar{n}) \sin \psi) d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Gamma} \left( \rho \left( \frac{1}{2} |\bar{u}|^2 + \varepsilon \right) \cos \psi + \left( \rho \left( \frac{1}{2} |\bar{u}|^2 + \varepsilon \right) + p \right) \bar{u} \cdot \bar{n} \sin \psi \right) d\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Соотношения (4.3) получаются из (4.1) путем спецификации функций  $f, \bar{\phi}$  соответственно законам сохранения (1.4).

Если в области определения обобщенного движения существует гиперповерхность  $\Sigma \subset R^4$ , на которой величины  $\bar{u}, \rho, p, \varepsilon$  имеет разрыв первого рода, и вне которой это движение непрерывно, то такое движение называется движением с **сильным разрывом**, а сечение  $V(t)$  гиперповерхности  $\Sigma$  гиперплоскостями  $t = \text{const}$  называется **поверхностью сильного разрыва**. Поверхность сильного разрыва есть двумерная поверхность,двигающаяся со временем в пространстве  $R^3$ . Скачки функций на поверхности сильного разрыва удовлетворяют **уравнениям сильного разрыва**. Для вывода этих уравнений на гиперповерхности  $\Sigma$  рассматривается малая ограниченная область  $\sigma$  с гладкой границей  $\gamma$  и строится цилиндрическая поверхность  $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , где  $\sigma_3$  – боковая поверхность цилиндра с направляющей  $\gamma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – области параллельные  $\sigma$  на расстоянии  $h$  от  $\Sigma$  (рис. 1).  $t$

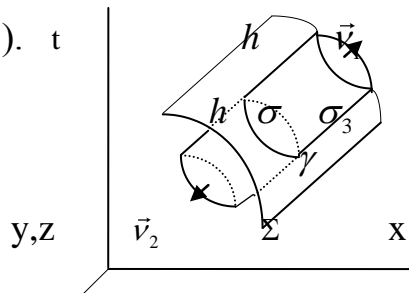


Рис. 1

В уравнении (4.1) интеграл разбивается на три интеграла по  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При предельном переходе  $h \rightarrow 0$  интеграл по  $\sigma_3$  стремится к нулю, так как подынтегральная функция ограничена, а мера  $\sigma_3$  стремится к нулю. Интегралы по  $\sigma_1, \sigma_2$  стремятся к интегралам по разным сторонам  $\sigma$  с противоположно направленными нормальными  $\vec{v}_2 = -\vec{v}, \vec{v}_1 = \vec{v}$ .

Пусть  $[a] = a_2 - a_1$  – символ скачка функции  $a$  на  $\Sigma$ . Тогда из (4.1) следует соотношение

$$\int_{\sigma} [f \cos \psi + (fu_n + \phi_n) \sin \psi] d\sigma = 0,$$

где  $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$ ,  $\phi_n = \vec{\phi} \cdot \vec{n}$ . В силу произвольности  $\sigma \subset \Sigma$  и непрерывности подынтегрального выражения на  $\Sigma$  получается абстрактное уравнение сильного разрыва

$$[f \cos \psi + (fu_n + \phi_n) \sin \psi] = 0. \quad (4.4)$$

Рассматривается поверхность сильного разрыва в момент  $t$  и  $t + \Delta t$ :  $B(t), B(t + \Delta t)$ . Пусть точки  $M \in B(t), N \in B(t + \Delta t)$  лежат на нормали поверхности  $B(t)$ ,  $H(\Delta t)$  – проекция вектора  $\overrightarrow{MN}$  на орт нормального вектора  $\vec{n}$ . Скоростью перемещения поверхности  $B(t)$  в направлении нормали  $\vec{n}$  называется предел

$$D_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(\Delta t)}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Из рисунка 2 видно, что вектор  $D_n \vec{n} + \vec{l}$  лежит в касательной плоскости к  $\Sigma$  и поэтому ортогонален  $\vec{v}$ . Из (4.2) следует связь между  $D_n$  и четырехмерной нормалью  $\vec{v}$

$$D_n \sin \psi + \cos \psi = 0.$$

Тогда (4.4) записывается в виде

$$[f(u_n - D_n) + \varphi_n] = 0 \quad (4.6)$$

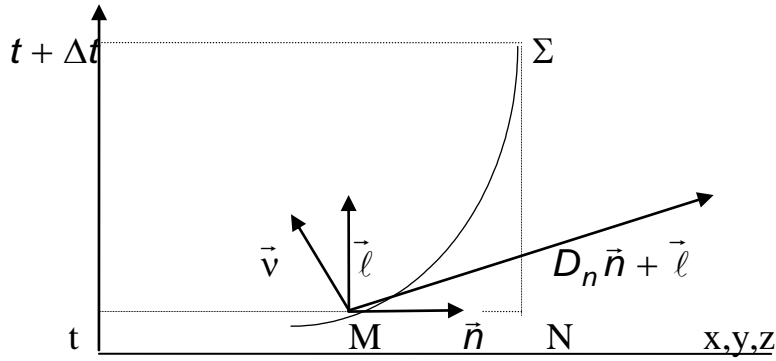


Рис. 2

Применение (4.6) к конкретным уравнениям (4.3) дает уравнения сильного разрыва

$$\begin{aligned} [\rho(u_n - D_n)] &= 0 \\ [\rho \bar{u}(u_n - D_n) + p \bar{n}] &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\left[ \rho \left( \frac{1}{2} |\bar{u}|^2 + \varepsilon \right) (u_n - D_n) + \rho u_n \right] = 0$$

Упражнение 1. Показать, что скорость перемещения в направлении нормали  $\bar{n}$  поверхности, заданной уравнением  $F(\bar{x}, t) = 0$ , равна

$$D_n = -\frac{F_t}{\bar{n} \cdot \nabla F}, \quad \bar{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}.$$

Пусть  $\bar{u}_\sigma$  составляющая вектора скорости, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва  $V(t)$ . Проектирование на эту плоскость второго из уравнений (4.7) дает соотношение

$$[\rho(u_n - D_n) \bar{u}_\sigma] = \rho_i (u_{in} - D_n) [\bar{u}_\sigma] = 0, i = 1, 2.$$

Отсюда следуют два типа разрывов.

**Контактный разрыв:**  $u_n = D_n$ ,  $[\rho] = 0$ ,  $[u_n] = 0$ . Через такой разрыв газ не течет, но  $[\bar{u}_\sigma] \neq 0$ .

**Ударная волна:**  $u_n \neq D_n$ ,  $[\vec{u}_\sigma] = 0$ . Через такой разрыв газ течет. Вводится скорость течения газа относительно фронта в направлении нормали  $v = u_n - D_n$ . Из (4.7) следуют уравнения

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1, \quad (4.8)$$

$$\rho_2 + \rho_2 v_2^2 = \rho_1 + \rho_1 v_1^2, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_2 + \rho_2 v_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = \varepsilon_1 + \rho_1 v_1 + \frac{1}{2} v_1^2, \quad (4.10)$$

$$\vec{u}_{2\sigma} = \vec{u}_{1\sigma}. \quad (4.11)$$

Упражнение 2. Вывести полезные соотношения из (4.8)÷(4.11)

$$v_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}, v_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (4.12)$$

$$(v_2 - v_1)^2 = (\rho_2 - \rho_1)(V_1 - V_2), \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_1)(V_1 - V_2), \quad (4.14)$$

$$|\nabla F|^2[\vec{u}] - ([\vec{u}] \cdot \nabla F)\nabla F = 0. \quad (4.15)$$

Пусть  $\varepsilon = \varepsilon(V, p)$  – уравнение состояния. Тогда вводится функция Гюгонио  $H = H(V, p; V_1, p_1) = \varepsilon(V, p) - \varepsilon(V_1, p_1) + \frac{1}{2}(V - V_1)(p + p_1)$ , с которой уравнение (4.14) принимает вид  $H(V_2, p_2; V_1, p_1) = 0$ . Кривая  $H(V, p; V_1, p_1) = 0$  на плоскости  $R^2(V, p)$  называется **адиабатой Гюгонио** с центром в точке  $(V_1, p_1)$ . Она определяет возможные состояния ударного перехода. Далее формулируются свойства адиабаты Гюгонио для нормального газа.

**Теорема 1.** Адиабата Гюгонио с центром  $(V_1, p_1)$  задается трижды непрерывно дифференцируемой функцией

$$V = W(p) = W(p; V_1, p_1), \quad (4.16)$$

которая однозначно определена и убывает для  $p \in (0, \infty)$ .

**Доказательство.** В силу (2.7)  $2H_V = 2e_V + p + p_1 > 0$ ,  $H \rightarrow +\infty$  при  $V \rightarrow \infty$ . В силу (2.8)  $H \rightarrow -\epsilon(V_1, p_1) - \frac{1}{2} V_1(p + p_1) < 0$  при  $V \rightarrow 0$ .

Поэтому для каждого  $p \in (0, \infty)$  существует единственное значение  $V = W(p)$ , при котором  $H=0$ . Гладкость функции  $W$  следует из определения нормального газа, т.е. из гладкости функции  $e$ .

Дифференцирование тождества  $H(W(p), p; V_1, p_1) = 0$  дает

$$(2e_V + p + p_1)W_p + 2e_p + W(p) - V_1 = 0. \quad (4.17)$$

Из свойств нормального газа следует  $2e_V + p + p_1 > 0$ , а также

$$2e_p + W - V_1 = 2e_p - 2 \frac{e(V, p) - e(V_1, p_1)}{p + p_1} \geq 2 \left( \frac{e}{p} - \frac{e - e_1}{p + p_1} \right) = 2 \frac{ep_1 + e_1p}{p(p + p_1)} > 0.$$

Из соотношения (4.17) следует неравенство  $W_p(p) < 0$ .

**Следствие.** Вдоль адиабаты Гюгонио существуют предельные значения

$$\infty > V_0 = \lim_{p \rightarrow 0} W(p) > V_1, \quad V_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p) < V_1.$$

**Теорема 2.** Вдоль адиабаты Гюгонию с центром  $(V_1, p_1)$  справедливо соотношение

$$\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{S(p) - S(p_1)}{(p - p_1)^3} = k_1 > 0. \quad (4.18)$$

Адиабата Гюгонию имеет касание второго порядка с адиабатой Пуассона  $S = S_1$ .

**Доказательство.** Вдоль адиабаты Гюгонию из первого закона термодинамики (2.1) и уравнения состояния следуют тождества

$$\mathfrak{a}(\rho) = \mathfrak{a}(W(\rho), \rho) = \mathfrak{a}(V_1, \rho_1) - \frac{1}{2}(W(\rho) - V_1)(\rho + \rho_1),$$

$$TS' = \mathfrak{e}' + \rho W', \quad \mathfrak{g}(W(\rho), S(\rho)) = \rho.$$

Дифференцирование по  $\rho$  дает

$$2TS' = (\rho - \rho_1)W' - W + V_1,$$

$$2T'S' + 2TS'' = (\rho - \rho_1)W'', \quad (4.19)$$

$$2T''S' + 4T'S'' + 2TS''' = W'' + (\rho - \rho_1)W''';$$

$$g_V W' + g_S S' = 1,$$

$$g_{VV} W'^2 + 2g_{VS} W'S' + g_{SS} S'^2 + g_V W'' + g_S S'' = 0.$$

В точке  $(V_1, \rho_1)$  отсюда получаются выражения для производных

$$S'_1 = 0, \quad S''_1 = 0, \quad S'''_1 = -\frac{g_{VV}}{2T_1 g_V^3} > 0, \quad W'_1 = \frac{1}{g_V}, \quad W''_1 = -\frac{g_{VV}}{g_V^3}.$$

Формула Тейлора дает формулу (4.18) с  $k_1 = \frac{1}{6} S'''_1$ .

Адиабата Пуассона  $V = V(\rho)$  определяется равенством  $\mathfrak{g}(V(\rho), S_1) = \rho$ . Дифференцирование по  $\rho$  этого тождества дает  $g_V V' = 1$ ,  $g_{VV} V'^2 + g_V V'' = 0$ . Отсюда  $W'_1 = V'_1$ ,  $W''_1 = V''_1$ , что доказывает касание второго порядка адиабат Пуассона и Гюгонио.

Следствие. Из определения скорости звука  $a^2 = f_\rho(\rho, S)$  и формул (4.12), (4.13) следуют соотношения вдоль адиабаты Гюгонио при  $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ :

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \rightarrow a_1^2, \quad |u_{n1} - D_n| \rightarrow a_1, \quad |u_{n2} - D_n| \rightarrow a_1, \quad \frac{u_{n2} - u_{n1}}{\rho_2 - \rho_1} \rightarrow \frac{1}{\rho_1 a_1}.$$

Таким образом, слабые ударные волны (сила скачка  $[\rho] = \rho_2 - \rho_1$  стремится к нулю) распространяются со скоростью звука относительно потока газа, а скачек энтропии есть величина третьего порядка малости.



**Теорема 3.** Вдоль адиабаты Гюгонио с центром  $(V_1, p_1)$

$$S'(p) > 0 \text{ при } p \neq p_1. \quad (4.20)$$

**Доказательство.** В силу теоремы 2 неравенство (4.20) справедливо в окрестности точки  $p_1$ . Пусть  $S'(p_2) = 0$ ,  $p_2 \neq p_1$ ,  $V_2 = W(p_2)$ . Прямая  $\ell_-: V = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{p_2 - p_1}(p - p_1)$  имеет отрицательный наклон, и в силу свойств адиабаты Пуассона из § 2 на ней имеется лишь одна экстремальная точка для энтропии. Для уравнения состояния вдоль адиабаты Гюгонио  $S(p) = \sigma(W(p), p)$  справедливо равенство  $\sigma_V W'(p_2) + \sigma_p = 0$ , а вдоль адиабаты Пуассона  $S_2 = \sigma(V(p), p) \Rightarrow \sigma_V V'(p_2) + \sigma_p = 0$ . Значит,  $V'(p_2) = W'(p_2)$  и обе адиабаты касаются прямой  $\ell_-$  в точке  $(V_2, p_2)$  в силу (4.19).

Вдоль  $\ell_-$  справедливы равенства

$$dH = d\varepsilon + \frac{1}{2}(V - V_1)dp + \frac{1}{2}(p + p_1)dV = d\varepsilon + pdV = TdS \quad (4.21)$$

Функция  $H$  обращается в нуль в точках  $(V_1, p_1)$ ,  $(V_2, p_2)$  и по теореме Ролля  $dH=0$  в точке  $(V_3, p_3)$  на прямой  $\ell_-$ . Тогда  $dS(p_3) = 0$  и на прямой  $\ell_-$  имеется две экстремальные точки. Противоречие.

**Следствие.** Адиабата Гюгонио **звездна** относительно своего центра, т.е. всякий луч, выходящий из центра, может пересечь адиабату Гюгонио в одной точке.

Вдоль адиабаты Гюгонио энтропия возрастает с ростом давления. Из второго закона термодинамики в теплоизолированной частице энтропия должна возрасти при переходе через ударную волну. Следовательно, из теоремы 3 возрастает давление и плотность.

**Теорема 4 (Цемплен).** Абсолютная величина нормальной составляющей скорости частицы относительно ударной волны до перехода

фронта ударной волны больше скорости звука, а после перехода фронта меньше скорости звука.

**Доказательство.** Пусть состояние 1 – перед фронтом, а состояние 2 – за фронтом. Рассматривается изменение энтропии на отрезке прямой  $\ell_-: p - p_1 = k(V - V_1)$ , соединяющей две точки  $(V_1, p_1)$  и  $(V_2, p_2)$  адиабаты Гюгонио с центром в точке  $(V_1, p_1)$ ,  $p_2 > p_1$ ,  $k = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} < 0$ . Из

соотношения (4.21), справедливого вдоль  $\ell_-$ , следует  $dS=0$  в некоторой точке рассматриваемого отрезка. В силу свойств адиабат Пуассона в этой точке достигается максимум энтропии на отрезке, т.е.  $S_{V_1} < 0$ ,  $S_{V_2} > 0$ .

Дифференцирование уравнения состояния  $p = g(V, S)$  вдоль  $\ell_-$  дает соотношение  $k = g_V + g_S S_V$ . Так как  $g_S > 0$  для нормального газа, то

$g_{V_1} > k > g_{V_2}$ . В силу равенств  $g_V = -\rho^2 a^2$ , (4.12) неравенства принимают

вид:  $a_2^2 > \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = v_2^2$ ,  $a_1^2 > \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = v_1^2$ , которые рав-

носильны утверждению теоремы.

Уравнения сильного разрыва связывают семь величин

$$u_{n1}, \rho_1, p_1; \quad u_{n2}, \rho_2, p_2, D_n.$$

**Теорема 5.** Пусть заданы состояние по одну из сторон ударной волны  $u_{n1}, \rho_1, p_1$  и еще одна из величин  $u_{n2}, \rho_2, p_2, D_n$ . Тогда уравнения ударного перехода определяют остальные величины и состояние частицы до или после прохождения ударной волны.

**Доказательство.** Пусть задано  $p_2$ . Если  $p_2 > p_1$  ( $p_2 < p_1$ ), то частица в состоянии 1 находится до (после) прохождения через ударную волну. По адиабате Гюгонио определяется  $V_2 = \rho_2^{-1}$ . После чего из (4.12) и (4,8)

определяются  $D_n = u_{n1} \pm \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{[\rho]_1}{[\rho]_2}}$ ,  $u_{n2} = D_n + \frac{\rho_1}{\rho_2}(u_{n1} - D_n)$ . Если

нормаль направлена в сторону состояния 1, то выбирается знак  $+(-)$ .

Пусть задано  $\rho_2$ . Сравнение с  $\rho_1$  определяет сторону ударной волны. Адиабата Гюгонио определяет  $\rho_2$ , если

$$\rho_1 < \rho_2 < V_\infty^{-1} \text{ или } \rho_1 > \rho_2 > V_0^{-1}. \quad (4.22)$$

Скорости определяются как при задании  $\rho_2$ .

Пусть задана величина  $D_n$ . Определяется

$a_1^2 = -V_1^2 g_V(V_1, S_1) = f_\rho(\rho_1, S_1)$ . По теореме 4 при  $|v_1| > a_1$  состояние 1 до прохождения ударной волны, при  $|v_1| < a_1$  состояние 1 после прохождения ударной волны. В последнем случае должно быть выполнено условие

$$v_1^2 \geq \rho_1 V_1^2 (V_0 - V_1)^{-1}. \quad (4.23)$$

Тогда (4.12), (4.14) имеют единственное решение  $V_2, \rho_2$ , отличное от  $V_1, \rho_1$ , в силу звездности адиабаты Гюгонио. После этого определяется  $u_{n2}$  по формуле (4.8).

Пусть задана величина  $u_{n2}$ . Значения  $V_2, \rho_2$  определяются как точки пересечения гиперболы (4.13) и адиабаты Гюгонио. Возможны два или одно решение (см. рис.3).

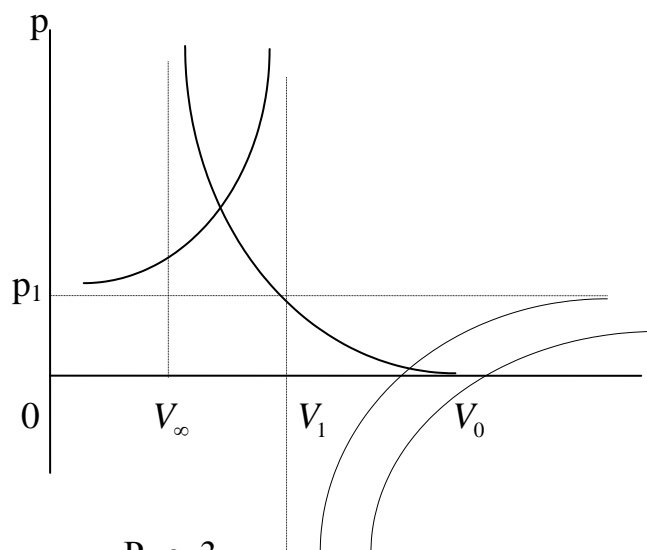


Рис. 3

Точка пересечения с верхней ветвью гиперболы отвечает состоянию 1 частицы до прохождения ударной волны. Точка пересечения с нижней ветвью гиперболы отвечает состоянию частицы после прохождения ударной волны и возможна при условии

$$(u_{n2} - u_{n1})^2 \leq p_1 (V_0 - V_1). \quad (4.24)$$

$D_n$  определяется как в первом случае.

Упражнение 3. Вывести следствие теоремы 1 и ограничения (4.22), (4.23), (4.24).

Упражнение 4. Выяснить взаимное расположение адиабаты Гюгонио с центром  $(V_1, p_1)$ , хорды соединяющей точки  $(V_1, p_1)$  и  $(V_2, p_2)$ , адиабат Пуассона  $S = S_1$  и  $S = S_2$ , адиабаты Гюгонио с центром  $(V_2, p_2)$ .

Упражнение 5. Для каких уравнений состояния возможно, что скорость ударной волны есть линейная функция нормальной скорости.

Уравнения сильного разрыва (4.7) выводились из интегральных законов сохранения (1.4), которые инвариантны относительно группы  $G_{11}$ . Следовательно (4.7) инвариантны относительно удвоенной на зависимые переменные группы  $G_{11}$ .

### §5. Характеристики и слабые разрывы.

Для уравнений газовой динамики, как и для любой системы квазилинейных уравнений, вводится понятие характеристик. Рассматривается система в матричном виде (3.10) и определяется характеристическая матрица

$$A(\vec{\xi}) = A^t \tau + A^x \xi + A^y \eta + A^z \zeta = \begin{bmatrix} \rho\chi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & \rho\chi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \rho\chi & \zeta & 0 \\ \xi & \eta & \zeta & b\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \end{bmatrix},$$

где  $\chi = \tau + u\xi + v\eta + w\zeta$ ,  $b = \rho^{-1}a^{-2}$ . Вектор  $\vec{\xi} = (\tau, \xi, \eta, \zeta)$  называется **характеристическим вектором** системы, если  $\det A(\vec{\xi}) = 0$ . Так как

$\det A(\vec{\xi}) = \rho^3 b \chi^3 (\chi^2 - a^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2))$ , то относительно  $\tau$  получается алгебраическое уравнение 5-ой степени. Имеется 5 вещественных корней: один трехкратный корень  $\chi = 0$  и два простых корня  $\chi \pm a(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2} = 0$ . Если число действительных корней характеристического уравнения, учитывая кратность, и число левых собственных векторов совпадает с порядком системы, то система (3.10) называется **гиперболической**.

Поверхность  $h(t, x, y, z) = 0$  называется **характеристической**, если ее нормаль в каждой точке совпадает с характеристическим вектором  $\vec{\xi} = (h_t, h_x, h_y, h_z)$ . Таким образом, трем действительным корням соответствуют 3 уравнения с частными производными первого порядка для действительных характеристик

$$C_0 : h_t + uh_x + vh_y + wh_z = 0, \quad (5.1)$$

$$C_{\pm} : h_t + uh_x + vh_y + wh_z \pm a(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^{1/2} = 0. \quad (5.2)$$

Решение характеристического уравнения задает поверхность  $\Gamma$  в  $R^4(t, x)$  с единичным нормальным вектором  $\vec{\xi} = \vec{\ell} \cos \psi + \vec{n} \sin \psi$ , где  $\vec{\ell}$  – орт

оси  $t$ ,  $\vec{n}$  – нормаль к  $C(t)$  в  $R^3$ ,  $C(t)$  сечение  $\Gamma$  плоскостью  $t = \text{const}$ ,  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sin^2 \psi$ ,  $\psi$  – угол между векторами  $\vec{\ell}$  и  $\vec{\xi}$ .

Для величины  $\chi$  имеется представление  $\chi = \cos \psi + u_n \sin \psi$ . Так же как в §4 для скорости  $C_n$  перемещения поверхности  $C(t)$  в направлении нормали справедливо соотношение  $C_n \sin \psi + \cos \psi = 0$ . Следовательно,  $\chi = (u_n - C_n) \sin \psi$  и уравнения характеристик записываются в виде

$$C_0: u_n - C_n = 0; \quad C_{\pm}: u_n - C_n \pm a = 0. \quad (5.3)$$

Через характеристику  $C_0$  газ не течет, в пространстве  $R^4$  она является геометрическим местом мировых линий частиц и называется **контактной характеристикой**.

Через характеристики  $C_{\pm}$  газ течет, причем относительно характеристики по нормали к ней – со скоростью звука. Они называются **звуковыми характеристиками**.

Характеристики  $C_0$ ,  $C_{\pm}$  определяются на заданном решении уравнений газовой динамики. Для их однозначного определения к уравнениям (5.1), (5.2) надо задать двумерную поверхность  $\sigma$  в  $R^4$ , через которую проходят  $C_0$  и  $C_{\pm}$ , например, так  $h(0, \vec{x}) = h_0(\vec{x})$ . Тогда уравнение  $h_0(\vec{x}) = \text{const}$  определяет в  $R^3(\vec{x})$  начальную двумерную поверхность, через которую пройдут характеристики  $h(t, \vec{x}) = \text{const}$ .

Решения уравнений (5.1), (5.2) строятся методом характеристик, которые для уравнений газовой динамики называются **бихарактеристиками**. Бихарактеристики – это кривые, которые, проходя через каждую точку двумерной поверхности  $\sigma$ , образуют характеристическую поверхность. Уравнения для бихарактеристик таковы

$$C_0: \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}; \quad (5.3)$$

$$C_{\pm}: \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \pm a|\nabla h|^{-1}\nabla h, \quad \frac{dh_j}{dt} = -\vec{u}_j \cdot \nabla h \mp a_j|\nabla h|, \quad j = t, x, y, z. (5.4)$$

Все бихарактеристики, выходящие из одной точки  $P(t_0, \vec{x}_0)$  образуют **характеристический коноид**. Бихарактеристика для  $C_0$  есть мировая линия. Бихарактеристики для коноида  $C_{\pm}$  удовлетворяют системе (5.4) с начальными условиями  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ ,  $h_j(t_0) = h_{j0}$  и условиями согласования  $h_{t0} + u_0 h_{x0} + v_0 h_{y0} + w_0 h_{z0} \pm a_0 (h_{x0}^2 + h_{y0}^2 + h_{z0}^2)^{1/2} = 0$ , где  $u_0, v_0, w_0, a_0$  – значение известных функций в точке  $P$ . Так как точка  $P$  фиксирована, а условие согласования однородно по переменным  $h_{j0}$ , и уравнения (5.4) допускают растяжение по этим переменным, то в начальных условиях остается лишь два свободных параметра. Таким образом, двухпараметрическое семейство бихарактеристик образует двигающуюся двумерную поверхность в  $R^3$ .

Упражнение 1. Показать, что характеристический коноид для постоянного решения задается уравнением

$$|\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{u}_0(t - t_0)|^2 = a_0^2(t - t_0)^2, \quad (5.5)$$

которое определяет трехмерный конус в  $R^4(\vec{x}, t)$ . Сечение гиперплоскостью  $t = \text{const}$  есть сфера в  $R^3(\vec{x})$  с центром, двигающимся по прямой траектории  $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}_0(t - t_0)$ , и радиусом равным  $a_0|t - t_0|$ . Для дозвуковых движений  $|\vec{u}_0| < a_0$  сферы вложены друг в друга, для звуковых движений сферы касаются друг друга в одной и той же точке, для сверхзвуковых движений огибающая поверхность всех сфер образует конус.

Звуковые поверхности, исходящие из начальной поверхности  $h_0(\vec{x}_0) = 0$  при  $t = t_0$  ( $\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\alpha, \beta)$  - параметрическое задание начальной поверхности, т.е.  $h_0(\vec{x}_0(\alpha, \beta)) \equiv 0, \vec{x}_{0\alpha} \cdot \nabla_0 h_0 = 0, \vec{x}_{0\beta} \cdot \nabla_0 h_0 = 0, \vec{n}_0$  - нормаль к начальной

поверхности) строятся по решению системы (5.4) с условиями  $\nabla h|_{t=t_0} = \nabla_0 h_0$ .

Для постоянного решения получим

$\nabla h = \nabla_0 h_0$ ,  $\vec{x} = \vec{x}_0(\alpha, \beta) + (\vec{u}_0 \pm a_0 \vec{n}_0)(t - t_0)$  - параметрическое задание двигающейся поверхности. Например, для сферы  $h_0(\vec{x}_0) = |\vec{x}_0| - R = 0$  (в сферической системе координат  $x_0 = R \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y_0 = R \sin \theta \sin \varphi$ ,

$z_0 = R \cos \theta$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) имеем  $\nabla_0 h_0 = R^{-1} \vec{x}_0(\varphi, \theta)$ ,

$\vec{x} = \vec{x}_0(1 \pm a_0 R^{-1}(t - t_0)) + \vec{u}_0(t - t_0)$  или, исключая  $\varphi, \theta$ , получим

$|\vec{x} - \vec{u}_0(t - t_0)| = |R \pm a_0(t - t_0)|$  - две двигающиеся сферы: одна «+» двигается вне начальной сферы, другая «-» двигается внутри начальной сферы.

Вдоль характеристик уравнения газовой динамики представляются как обыкновенные дифференциальные уравнения. Для этого вычисляют левые собственные векторы матрицы  $A(\vec{\xi})$  для каждого характеристического вектора, и действуют ими на систему (3.10).

Для характеристики  $C_0 : Dh^0 = 0$  ранг матрицы  $A(\vec{\xi})$  равен двум и имеются три линейно независимых собственных вектора  $(0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(-h_y^0, h_x^0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, -h_z^0, h_y^0, 0, 0)$ . Умножение (3.10) на них слева дает уравнения, в которых дифференцирование функций  $u, v, w, p, S$  производится вдоль некоторой линии, лежащей на характеристике  $h^0(\vec{x}, t) = 0$ :

$$\begin{aligned} DS = 0, & -\rho h_y^0 Du + \rho h_x^0 Dv - h_y^0 p_x + h_x^0 p_y = 0, \\ & -\rho h_z^0 Dv + \rho h_y^0 Dw - h_z^0 p_y + h_y^0 p_z = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$



Для характеристики  $C_{\pm}: Dh^{\pm} \pm a|\nabla h^{\pm}| = 0$  ранг матрицы  $A(\vec{\xi})$  равен четырем. Собственный вектор таков  $(h_x^{\pm}, h_y^{\pm}, h_z^{\pm}, \pm \rho a|\nabla h^{\pm}|, 0)$ . Умножение (3.10) на собственный вектор слева дает условие на характеристике  $C_{\pm}$

$$\rho a(\nabla h^{\pm} \cdot D\bar{u} \pm a(\nabla h^{\pm}(\operatorname{div}\bar{u})) \pm (\nabla h^{\pm}(Dp + a\nabla h^{\pm} \cdot \nabla p) = 0. \quad (5.8)$$

Система из восьми уравнений (5.1), (5.2), (5.7), (5.8) для восьми иско-  
мых функций  $h^0, h^{\pm}, u, v, w, p, S$  вместе с уравнением состояния образует **характеристическую форму** уравнений газовой динамики.

Упражнение 2. Проверить, что функции  $u, v, w, p, S$  в уравнениях (5.7), (5.8) дифференцируются вдоль некоторых кривых, лежащих на соответствующих характеристиках.

Характеристики играют важную роль при постановке и решении краевых задач. Например, задача Коши для (3.10) ставится так: на некоторой гиперповерхности  $\Gamma$  задаются значения искоемых функций

$$\bar{u} = \bar{u}_0(\vec{x}, t), p = p_0(\vec{x}, t), S = S_0(\vec{x}, t), (\vec{x}, t) \in \Gamma, \quad (5.9)$$

и требуется определить решение в окрестности  $\Gamma$ , принимающее заданные значения на  $\Gamma$ . Существование условий на характеристиках означает, что данные (5.9) не могут быть произвольными, если  $\Gamma$  является характеристикой. Кроме того, если  $\Gamma$  – характеристика и выполнены условия на характеристике, то решение не может быть единственным. Действительно, все производные можно выразить через производные вдоль кривых, лежащих в  $\Gamma$ , и производные в направлении нормали к  $\Gamma$ . Хотя бы одна линейная комбинация уравнений системы (3.10) связывает только производные, касательные к  $\Gamma$ . Оставшихся уравнений недостаточно, чтобы определить все нормальные производные однозначно. Таким образом, задача Коши с данными на характеристике поставлена некорректно.

Если некоторое решение системы (3.10) ограничено характеристической поверхностью  $\Gamma$ , то с другой стороны  $\Gamma$  могут непрерывно примыкать другие решения, причем производные в направлении нормали к  $\Gamma$  могут претерпевать разрыв.

Поверхность  $\Gamma \in \mathbb{R}^4(\vec{x}, t)$  называется **поверхностью слабого разрыва** решения, если это решение и производные от решения по касательным направлениям к поверхности  $\Gamma$  непрерывны, а производные по нормали имеют в точках  $\Gamma$  разрыв первого рода.

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  является поверхностью слабого разрыва решения  $\Phi$  системы (3.10). Тогда  $\Gamma$  есть характеристика на решении  $\Phi$ .

**Доказательство.** Пусть  $\vec{\xi}$  – единичный вектор нормали поверхности  $\Gamma$ ,  $\partial_\lambda$  – дифференцирование по направлению  $\vec{\xi}$ . Для любого направления  $\vec{\ell}$  дифференцирование  $\partial_\ell$  вдоль  $\vec{\ell}$  раскладывается в сумму  $\partial_\ell = (\vec{\xi} \cdot \vec{\ell})\partial_\lambda + \partial_s$ , где  $\partial_s$  – дифференцирование в касательном к  $\Gamma$  направлении. Если  $\vec{\ell}$  есть орт оси  $x^i$ , то  $\vec{\xi} \cdot \vec{\ell} = \xi^i$ ,  $\partial_{x^i} = \xi^i \partial_\lambda + \partial_{s^i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ . В результате подстановки выражений для всех производных в уравнения (3.10) получается соотношение  $A(\vec{\xi})\vec{U}_\lambda = \vec{F}$ , где  $\vec{F}$  – гладкая функция на  $\Gamma$  и в ее окрестности. Если для характеристической матрицы  $\det A(\vec{\xi}) \neq 0$ , то все нормальные производные однозначно определяются, что противоречит определению слабого разрыва. Значит,  $\det A(\vec{\xi}) = 0$  и  $\Gamma$  – характеристика.

Уравнения характеристик (5.1), (5.2) получены из дифференциальных уравнений газовой динамики (3.10) алгебраическими преобразованиями. Поэтому они инвариантны относительно группы преобразований  $G_{11}$ .

Упражнение 3. Проверить, что (5.1), (5.2) допускают преобразования группы  $G_{11}$ , а также растяжение  $h' = dh$  и преобразование  $h' = \varphi(h)$ , где  $\varphi$  – произвольная функция. Аналогичное утверждение справедливо и для уравнений на бихарактеристики (5.3), (5.4).

Показать, что поверхность слабого разрыва инвариантна относительно удвоенной на газодинамические функции группы преобразований  $G_{11}$ .

### **§6. Основные краевые задачи.**

Квазилинейная система (3.10) или интегральная система (1.4) имеет бесконечное множество решений. Для выделения из него специальных решений необходимо задавать дополнительные соотношения. Таковыми могут быть дополнительные уравнения, соотношения на поверхностях в пространстве движения газа, предельное поведение решения, интегральные характеристики движения. Как правило, дополнительные соотношения получаются из физической постановки задачи, но они могут задаваться определенным видом искомого решения.

**Краевая задача** – это способ задания искомых величин и их производных на поверхностях, ограничивающих область движения газа. К таким задачам предъявляется требование **корректности**: в определенном функциональном пространстве решение задачи должно существовать, быть единственным и непрерывно зависеть от дополнительных условий.

**Задача Коши** или задача с начальными данными. задается движение в начальный момент времени  $t = t_0$ :

$$\bar{u}(\bar{x}, t_0) = \bar{u}_0(\bar{x}), \quad \rho(\bar{x}, t_0) = \rho_0(\bar{x}), \quad p(\bar{x}, t_0) = p_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in R^3 \quad (6.1)$$

и требуется найти решение уравнений газовой динамики, принимающее при  $t = t_0$  значения (6.1).

Решение задачи Коши можно искать в различных функциональных классах: в классе  $C_A$  аналитических функций, в классе  $C_\infty$  бесконечно диф-

ференцируемых функций, в классе  $C_k$  функций конечной гладкости, имеющих непрерывные производные  $k$ -го порядка, в классе  $C$  непрерывных функций, в классе измеряемых ограниченных функций, в классах обобщенных функций.

**Теорема 1 (Коши-Ковалевской).** Для любых аналитических данных (6.1) и аналитического уравнения состояния  $\rho = f(\rho, S)$  существует единственное аналитическое решение системы уравнений (3.5), (3.6), (3.9), удовлетворяющее начальным условиям (6.1),

$$\inf_{\bar{x} \in \mathbb{R}^3} \rho_0(\bar{x}) = \bar{\rho}_0 > 0. \quad (6.2)$$

Это решение определено в области  $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3, |t| < \alpha(\bar{x})\}$ , где  $\alpha(\bar{x}) > 0$ , и непрерывно зависит от начальных данных (6.1) в метрике пространства аналитических функций.

**Доказательство.** Фиксируем  $t_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ . Начальные функции (6.1) разлагаем в ряды Тейлора по степеням  $\bar{x} - \bar{x}_0$ , сходящиеся в шаре  $|\bar{x} - \bar{x}_0| \leq r(\bar{x}_0)$ . Докажем теорему в шаре быть может меньшего размера. Замена переменных  $\bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{y} = (y', y^2, y^3), t - t_0 = \tau$ ,  $\bar{u} - \bar{u}_0(\bar{x}_0) = (U_1, U_2, U_3), \rho - \rho_0(\bar{x}_0) = U_4, p - p_0(\bar{x}_0) = U_5$  приводит к задаче Коши вида

$$\bar{U}_\tau = B^k(\bar{U})\bar{U}_{y^k}, \quad \bar{U}(0, \bar{y}) = \bar{U}_0(\bar{y}), \quad \bar{U}_0(0) = 0, \quad (6.3)$$

где элементы матриц  $B^k$  и вектора  $\bar{U}_0$  являются аналитическими функциями в нуле. Ряды этих функций сходятся в шарах  $|\bar{U}| \leq R, |\bar{y}| \leq r$ .

Говорят, что аналитическая функция  $\varphi(\bar{x}) = \sum \varphi_n x^n, n = (n_1, \dots, n_k), x^n = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ , имеет **мажоранту**  $\psi(\bar{x}) = \sum_n \psi_n x^n, \psi_n \geq 0$ , если  $|\varphi_n| \leq \psi_n$ .

Дифференцирование равенств (6.3) определяет все производные функции  $\bar{U}$  в нуле. Значит, если искать решение задачи (6.3) в виде ряда Тейлора, то его коэффициенты определяются однозначно как многочлены с положительными коэффициентами от коэффициентов рядов для  $\mathbf{V}^k(\bar{U})$  и  $\bar{U}_0(\bar{y})$ . Для этого делаются следующие операции: дифференцирование рядов, сложение и умножение рядов, подстановка ряда в ряд, переход к пределу при  $\tau \rightarrow 0, \bar{y} \rightarrow 0$ , что определяет положительность коэффициентов многочлена.

Рассматривается задача Коши для мажоранты

$$\bar{W}_\tau = \mathbf{C}^k(\bar{W})\bar{W}_{y^k}, \quad \bar{W}(0, \bar{y}) = \bar{W}_0(\bar{y}), \quad (6.4)$$

где  $\mathbf{C}^k$  – мажоранта для  $\mathbf{V}^k$ ,  $\bar{W}_0$  – мажоранта для  $\bar{U}_0$ . Если найдется сходящийся в нуле ряд, являющийся решением задачи (6.4), то он будет мажорантой для формального ряда – решения задачи (6.3). Действительно, многочлены, одни и те же для обеих задач (6.3) и (6.4). Эти многочлены с положительными коэффициентами, значит, их значения для задачи (6.4) мажорируют их значения для задачи (6.3). Остается подобрать  $\mathbf{C}^k$ ,  $\bar{W}_0$  возможно простого вида, чтобы задача для мажоранты точно разрешалась.

Пусть элементы матрицы  $\mathbf{V}^k$  и вектора  $\bar{U}_0$  разлагаются в ряды  $b_{ij}^k = \sum b_{ijn}^k U^n$ ,  $U_{0i} = \sum U_{0im} y^m$ ,  $n = (n_1, \dots, n_5)$ ,  $U^n = U_1^{n_1} \dots U_5^{n_5}$ ,

$m = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $y^m = y_1^{m_1} y_2^{m_2} y_3^{m_3}$ , сходящиеся в шарах

$|\bar{U}| \leq R, |\bar{y}| \leq r$ . Тогда существуют постоянные  $N, M > \frac{1}{5}R$  такие, что

$$|b_{ijn}^k| \leq \frac{N}{R^{|n|}} \leq \frac{N}{R^{|n|}} \frac{|n|!}{n_1! \dots n_5!} = C_{ijn}^k, \quad |n| = n_1 + \dots + n_5;$$

$$|U_{0im}| \leq \frac{M}{r^{|m|}} \leq \frac{M}{r^{|m|}} \frac{|m|!}{m_1! m_2! m_3!} = W_{0im}, \quad |m| = m_1 + m_2 + m_3;$$

$$\sum C_{ijn}^k W^n = NR(R - W_1 - \dots - W_5)^{-1}, \quad \sum W_{0im} y^m = Mr(r - y_1 - y_2 - y_3)^{-1}.$$

Решение задачи (6.4) разыскивается в виде  $W_1 = \dots = W_5 = W(s)$ ,

$$s = y_1 + y_2 + y_3:$$

$$W_\tau = 3NR(R - 5W)^{-1} W_s, \quad W(0, s) = Mr(r - s)^{-1}. \quad (6.5)$$

Решение задачи (6.5) задается квадратным уравнением

$$W \left[ \frac{3}{5} RN\tau - s \left( W - \frac{1}{5} R \right) \right] + r \left( W - \frac{1}{5} R \right) (W - M) = 0. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) имеет два различных корня при  $\tau = s = 0$ , так как  $M > \frac{1}{5}R$ . Поэтому в некотором шаре  $Q_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  точки  $\tau = s = 0$  уравнение (6.6) имеет ненулевой дискриминант. Из двух корней выбирается тот, который при  $\tau = s = 0$  принимает значение  $M$ . Итак, определяется аналитическое решение задачи (6.5), разлагающееся в ряд, сходящийся в шаре  $Q_\varepsilon$  с центром в точке  $\tau = s = 0$ . Этот ряд является мажорантой решения задачи (6.3). Теорема доказана в областях  $\{\bar{y} \leq r\} \cap \{|y_1 + y_2 + y_3| < \varepsilon\}$ , которыми можно покрыть все пространство  $R^3$ .

Непрерывная зависимость от начальных данных следует из того, что при  $M \rightarrow 0$  выбранный корень уравнения (6.6) стремится к нулю.

Упражнение 1. В каком месте доказательства теоремы 1 использовалось условие (6.2)? Чему равны значения функции  $\alpha(\bar{x})$ ?

В классах функций конечной гладкости справедлив аналог теоремы 1, утверждающий корректность поставленной задачи Коши в малом по  $t$ , т.е. в области  $\{\bar{x} \in R^3, |t| < \alpha(\bar{x})\}$  для небольших значений  $\alpha(\bar{x}) > 0$ .

Теорема единственности справедлива в большой области.

**Теорема 2.** Пусть ограниченная область  $\Omega \subset R^4(\bar{x}, t)$  имеет сечения  $\omega(t)$  гиперплоскостью  $t = \text{const}$  и ограничена областью  $\omega_0 = \omega(0) \subset R^3(\bar{x})$  и

гиперповерхностью  $\Gamma$  с внешней нормалью  $\vec{\xi} = (\tau, \xi, \eta, \zeta)$ , имеющую общую границу с областью  $\omega_0$ .

Пусть решение системы (3.10)  $\vec{U} = (u, v, w, p, S) \in C_1(\bar{\Omega})$  и граница  $\Gamma$  удовлетворяют условиям

$$\inf_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) = \rho_1 > 0, \quad (6.7)$$

$$\tau + u\xi + v\eta + w\zeta \geq a(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2} \quad (6.8)$$

Тогда для любого другого решения  $\vec{V} \in C_1(\bar{\Omega})$  найдется постоянная  $k > 0$ , с которой для разности  $\vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$  справедлива оценка

$$\|\vec{W}; t\| \leq k \|\vec{W}; 0\|, \quad t > 0, \quad (6.9)$$

где норма решения определяется равенством

$$\|\vec{W}; t\|^2 = \int_{\omega(t)} |\vec{W}|^2 d\omega, \quad |\vec{W}|^2 = \sum_{i=1}^5 W_i^2(\vec{x}, t).$$

**Доказательство.** Система (3.10) с помощью обозначения  $A \cdot \partial = A^i \partial_i = A^t \partial_t + A^x \partial_x + A^y \partial_y + A^z \partial_z$  записывается в матричном виде  $A(\vec{U}) \partial \vec{U} = 0$ . Для разности двух решений  $\vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$  получим

$$A(\vec{U}) \partial \vec{W} = C \vec{W}, \quad C \vec{W} = (A(\vec{U}) - A(\vec{U} + \vec{W})) \partial \vec{W}.$$

Скалярное умножение на  $2\vec{W}$ , тождество  $\partial_j (\vec{W} \cdot A^j \vec{W}) = 2\vec{W} \cdot A^j \partial_j \vec{W} + \vec{W} \cdot (\partial_j \cdot A^j) \vec{W}$ ,  $A^j$  – симметричные матрицы, приводят к соотношению  $\partial_j (\vec{W} \cdot A^j \vec{W}) = \vec{W} \cdot B \vec{W}$ ,  $B = 2C + \partial_j A^j$ .

Интегрирование по части области  $\Omega$ , лежащей между гиперплоскостями  $t = 0$ ,  $t = \text{const}$ , дает по формуле Гаусса-Остроградского

$$\int_{\omega(t)} \bar{W} \cdot A^t \bar{W} \, d\omega - \int_{\omega(0)} \bar{W} \cdot A^t \bar{W} \, d\omega + \int_{\Gamma(t)} \bar{W} \cdot A(\vec{\xi}) \bar{W} \, d\Gamma = \int_0^t \int_{\omega(\tau)} \bar{W} \cdot B \bar{W} \, d\omega d\tau, \quad (6.10)$$

где  $A(\vec{\xi})$  – характеристическая матрица из § 5.

Неравенство Коши  $|\xi W_1 + \eta W_2 + \zeta W_3| \leq (W_1^2 + W_2^2 + W_3^2)^{1/2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$  и соотношение (6.8) дают положительную определенность квадратичной формы на гиперповерхности  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \bar{W} \cdot A(\vec{\xi}) \bar{W}|_{\Gamma} &= (\tau + \xi u + \eta v + \zeta w) \left[ \rho (W_1^2 + W_2^2 + W_3^2) + b W_4^2 + W_5^2 \right] + \\ &+ 2 W_4 (\xi W_1 + \eta W_2 + \zeta W_3) \geq ab (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2} \cdot \\ &\cdot \left[ \left( a \rho (W_1^2 + W_2^2 + W_3^2)^{1/2} - W_4 \right)^2 + \rho a^2 W_5^2 \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ввиду равномерной ограниченности решений и их производных в  $\Omega$ , условия (6.8) и положительной определенности матрицы  $A^t$  утверждается, что с некоторыми положительными постоянными  $M$ ,  $m$ ,  $N$  справедливы неравенства

$$M |\bar{W}|^2 \geq \bar{W} \cdot A^t \bar{W} \geq m |\bar{W}|^2, \quad |\bar{W} \cdot B \bar{W}| \leq N |\bar{W}|^2 \quad (6.12)$$

Из (6.10), (6.11), (6.12) следует неравенство

$$m \|\bar{W}; t\|^2 \leq M \|\bar{W}; 0\|^2 + N \int_0^t \|\bar{W}; \tau\|^2 \, d\tau \quad (6.13)$$

для любого  $t \in (0, T)$ ,  $T = \sup_{\Omega} t$ .

Замена  $\varphi(t) = \int_0^t \|\bar{W}; \tau\|^2 \, d\tau$ ,  $\psi(t) = \varphi(t) \exp(-tNm^{-1})$  в (6.13) дает

$\psi' \leq Mm^{-1} \varphi'(0) \exp(-tNm^{-1})$ . Интегрирование последнего неравенства с граничным условием  $\psi(0) = 0$  дает  $\psi(t) \leq MN^{-1} \varphi'(0) (1 - \exp(-tNm^{-1}))$



или  $\varphi(t) \leq MN^{-1}\varphi'(0)\left(-1 + \exp(tNm^{-1})\right)$ . Тогда неравенство (6.13) принимает вид  $m\varphi'(t) \leq M\varphi'(0)\exp(tNm^{-1})$ . Отсюда следует (6.9) с  $k = (M/m)^{1/2}\exp(TN/2m)$ .

Следствие. Если  $\bar{U} = \bar{V}$  на  $\omega_0$  при  $t=0$ , то это равенство верно в любой точке  $(\bar{x}, t) \in \Omega$ .

Если  $\Gamma(t)$  – гладкая гиперповерхность класса  $C_1$ , то на ней (6.8) может выполняться в виде равенства, т.е. она, есть характеристика на решении  $\bar{U}$ , тогда  $\Omega$  называется **областью определенности** задачи Коши.

**Обобщенная задача Коши.** Значения искомым функций задаются на гиперповерхности  $\Sigma$ , в каждой точке которой выполнено строгое неравенство (6.8) для ее нормали. Если же некоторые бихарактеристики лежат в гиперповерхности  $\Sigma$  или касаются ее, то обобщенная задача Коши может быть некорректной.

**Задача о поршне.** Вместе с начальными данными на гиперплоскости  $t=0$  задают контактную характеристику  $\Sigma: h(t, \bar{x}) = 0, h_t + \bar{u} \cdot \nabla h = 0$ . Через  $\Sigma$  газ не течет и ее сечение гиперплоскостью  $t=\text{const}$  задает движение деформирующегося поршня. Скорость движения этого сечения в направлении нормали при  $t=0$  может не совпадать с нормальной компонентой скорости частиц газа. В этом случае возникает сильный разрыв. Если скорость сечения в начальный момент совпадает с нормальной компонентой скорости, то выполняются условия согласования нулевого порядка и возможен слабый разрыв производных, который будет двигаться по звуковой характеристике. При согласовании первых производных, могут рваться вторые производные и т.д. Задача о поршне с условием согласования корректна в малом по  $t$  возможно со слабым разрывом, распространяющимся по звуковой характеристике, проходящей через сечение  $\Sigma$  с гиперплоскостью  $t=0$ . Если же условия

согласования не выполнены, то непрерывного течения не существует и реализуется движение с сильным разрывом и центрированными волнами разрежения.

**Задача обтекания.** Частный случай задачи о поршне, когда поверхность  $\Sigma$  неподвижна и непроницаема. Если  $\Sigma$  задается уравнением  $h(\vec{x}) = 0$ , то условие непроницаемости таково

$$\vec{u} \cdot \nabla h|_{\Sigma} = 0. \quad (6.14)$$

Набегающий поток газа задается параметрами газа на бесконечности.

**Задача со свободной границей.** Задаются начальные данные. Разыскивается контактная характеристика  $\Sigma$ , на которой задается давление. Если  $\Sigma$  определяется уравнением  $h(\vec{x}, t) = 0$ , то условия на свободной поверхности таковы

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z = 0, \quad p = p_0(\vec{x}, t). \quad (6.15)$$

Разрешимость таких задач изучена слабо.

**Задача Гурса.** Все граничные данные задаются на характеристиках и удовлетворяют условиям на характеристиках. Например, пусть задана гладкая поверхность  $\sigma \in \mathbb{R}^3(\vec{x})$ , расположенная на гиперплоскости  $t=0$ . Через нее проходят две звуковые характеристики  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  разных семейств, на которых заданы значения газодинамических величин  $\bar{U}_+ = (\bar{u}_+, \rho_+, p_+)$ ,  $\bar{U}_- = (\bar{u}_-, \rho_-, p_-)$  как функции класса  $C_1(\Gamma_{\pm})$  с выполненными условиями на характеристиках. Требуется определить решение в области  $\Omega$ , ограниченной характеристиками  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ . Если выполнены условия согласования на поверхности  $\sigma$ , то в области  $\Omega$  содержится контактная характеристика  $\Gamma_0$ , на которой может образоваться слабый разрыв. Если граничные данные непрерывны на  $\sigma$ , то вдоль характеристики  $\Gamma_0$  распространяется разрыв производных. Если на  $\sigma$  непрерывны первые производные

граничных значений, то вдоль характеристики  $\Gamma_0$  распространяется разрыв вторых производных и т.д. Если условие согласования не выполнены, то в  $\Omega$  необходимо возникают особенности.

Задача Гурса корректна в малом по  $t$  для времени подобных областей, для которых прямая параллельная оси  $t$  выпущенная из точек  $\sigma$  лежит внутри области  $\Omega$ . В противном случае для пространственно подобных областей на граничных характеристиках должны выполняться условия согласования: мировая линия частицы пересекающая характеристики имеет в точках пересечения согласованные скорости.

**Задача с особенностями.** Если начальные данные (6.1) не являются непрерывными, то для любого  $t$  в решении появятся особенности, характер которых зависит от структуры функций (6.1). К таким задачам приводятся физические задачи взаимодействия различных движений газа или соприкосновение газа с внешними телами; сосредоточенное взаимодействие на газ в точке, на линии или на поверхностях, на которых задаются интегральные характеристики: поток массы, импульса или энергии; асимптотического поведения параметров газа в точке, на линии, на поверхности при  $t \rightarrow \infty$ .

**Задача отыскания периодических решений.** Начальные данные (6.1) есть периодические функции. Требуется найти решение, являющееся периодическим для  $t > t_0$ .

Могут быть и другие ограничения на решения. С ними познакомимся далее.

### **§7. Групповой анализ.**

Уравнения газовой динамики (3.5), (3.6), (3.9) инвариантны при действии  $G_{11}$  группы Галилея, расширенной растяжением. Существуют ли другие однопараметрические группы преобразований, допускаемые уравнениями газовой динамики? Ответ отрицательный, если уравнение состояния

$\rho = f(\rho, S)$  общего вида. Для специальных уравнений состояния допускаемая группа расширяется.

Существует алгоритм вычисления группы, допускаемой дифференциальными уравнениями. Он основан на соответствии между однопараметрическими группами преобразований и линейными дифференциальными операторами первого порядка.

Пусть  $x^i, i = 0,1,2,3$ , независимые переменные;  $u^k, k = 1, \dots, 5$ , зависимые переменные,

$$x^{i'} = f^i(x, u, a), \quad u^{k'} = g^k(x, u, a) \quad (7.1)$$

**однопараметрическая группа преобразований**, т.е. суперпозиция двух преобразований с параметрами  $a_1, a_2$  есть преобразование из этого же семейства с параметром  $a_3 = \varphi(a_1, a_2)$ . Функция  $\varphi$  задает **закон умножения**. При  $a=0$  (7.1) задает тождественное преобразование.

Тогда функции  $\xi^i(x, u) = \partial_a f^i|_{a=0}$ ,  $\eta^k(x, u) = \partial_a g^k|_{a=0}$  задают оператор дифференцирования вдоль орбиты группы (7.1) в точке  $a=0$ :

$$X = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^k \partial_{u^k}. \quad (7.2)$$

Для каждого оператора (7.2) решается задача Коши

$$\partial_a x^{i'} = \xi^i(x', u'), \quad \partial_a u^{k'} = \eta^k(x', u'), \quad (x', u')|_{a=0} = (x, u). \quad (7.3)$$

Решение задачи (7.3) есть однопараметрическая группа с **каноническим законом умножения**  $a_3 = a_2 + a_1$  (его всегда можно ввести заменой группового параметра).

Если однопараметрические группы образуют группу Ли  $G$ , то им соответствующие операторы образуют **алгебру Ли**  $L$  – векторное пространство с **коммутатором** двух элементов

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = (X_1 \xi_2^i - X_2 \xi_1^i) \partial_{x^i} + (X_1 \eta_2^k - X_2 \eta_1^k) \partial_{u^k} \quad (7.4)$$

со свойствами билинейности, антисимметричности  $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$  и тождеством Якоби  $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$ .

Группе  $G_{11}$  из § 1 соответствует алгебра Ли  $L_{11}$  с базисом из операторов, записанных в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w, \\ X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\ X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Алгоритм отыскания допускаемой группы равносильен разыскиванию операторов (7.2), для которых уравнение газовой динамики являются инвариантным многообразием, т.е. операторы являются касательными дифференцированиями. Операторы (7.2) предварительно продолжают на производные по правилу

$$\mathcal{X} = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^k \partial_{u^k} + (D_i \eta^k - u_j^k D_i \xi^j) \partial_{u_i^k}, \quad (7.6)$$

где  $D_i = \partial_{x^i} + u_i^k \partial_{u^k}$  – операторы полного дифференцирования.

Вычисления дают следующий классификационный результат. Если уравнение состояния  $p = f(p, S)$  общего вида, то максимальная алгебра Ли, допускаемая уравнениями (3.5), (3.6), (3.9), есть  $L_{11}$ . Для специальных уравнений состояния возникают дополнительные операторы, расширяющие алгебру  $L_{11}$  до  $L_k$ ,  $k$  – размерность алгебры. Результаты приведены в таблице 1, где  $f, \varphi$  – произвольные функции,  $Y_0 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w$ ,  $S$  – произвольная функция энтропии.

Таблица 1

N	$p$	$k$	Дополнительные операторы
1	$\rho^\gamma f(\rho S)$	12	$\rho \partial_\rho + \gamma \rho \partial_\rho - 2^{-1}(\gamma - 1) Y_0$

2	$f(S\rho)$	12	$Y_0 - 2\rho\partial_\rho$
3	$S\rho^\gamma, \gamma \neq \frac{5}{3}$	13	$Y_0 + 2\rho\partial_\rho, Y_\rho$
4	$S\rho^{5/3}$	14	$tY_0 + xX_4 + yX_5 + zX_6 - t(3\rho\partial_\rho + 5\rho\partial_\rho),$ $Y_0 + 2\rho\partial_\rho, Y_\rho$
5	$\ln \rho + f(S\rho)$	12	$Y_0 + 2\rho\partial_\rho + 2\partial_\rho$
6	$f(\rho) + S$	12	$Y_1$
7	$\rho^\gamma + S,$ $\gamma \neq 0, \pm 1, \frac{1}{3}$	13	$Y_1, Y_0 - (\bar{\gamma} - 2)\rho\partial_\rho - \bar{\gamma}\rho\partial_\rho;$ $\bar{\gamma} = 2\gamma(\gamma - 1)^{-1} \neq 2, \pm 1, 0$
8	$\rho^{-1} + S$	13	$Y_1, Y_0 + \rho\partial_\rho - \rho\partial_\rho$
9	$\rho + S$	13	$Y_1, Y_\rho$
10	$\ln \rho + S$	13	$Y_1, Y_0 + 2\rho\partial_\rho$
11	$\rho^{1/3} + S$	13	$Y_1, Y_0 + 3\rho\partial_\rho + \rho\partial_\rho$
12	$S$	$\infty$	$Y_0 + 2\rho\partial_\rho, Y_{\varphi(\rho)} = \rho\varphi'(\rho)\partial_\rho + \varphi(\rho)\partial_\rho$

Некоторые алгебры в таблице 1 подобны относительно замены переменных  $\rho, p$ . В таблице 2 указываются подобные пары алгебр Ли из таблицы 1 и приводятся преобразования подобия.

Таблица 2

Алгебры	Преобразование подобия
$N=6, N=1$ при $\gamma = 1$	$\bar{\rho} = \rho\rho^{-1}, \bar{p} = \ln \rho$
$N=2, N=1$	$\bar{\rho} = \rho\rho^{-\gamma}, \bar{p} = \rho\rho^{-1}, \gamma \neq 1$
$N=5, N=2$	$\bar{\rho} = \rho\rho^{-1}, \bar{p} = -\ln \rho$
$N=10, N=3$	$\bar{\rho} = \rho\rho^{-1}, \bar{p} = \ln \rho$

В случае бесконечной алгебры  $N=12$  операторы алгебры и уравнения газовой динамики допускают преобразование  $\bar{\rho} = \rho\psi'(\rho), \bar{p} = \psi(\rho)$ . Эти

преобразования подобия позволяют установить конечное число классов подобных конечномерных подалгебр.

**Подалгеброй** алгебры Ли называется подпространство замкнутое относительно коммутатора.

Для приложений важно знать всевозможные подалгебры алгебр Ли из таблицы 1. Для каждой подалгебры система уравнений газовой динамики может быть сведена к более простой системе уравнений на инварианты подалгебры, которая называется **подмоделью**.

Перечисление подалгебр алгебры Ли  $L$  производится с точностью до внутренних автоморфизмов алгебры  $L$  – однопараметрические линейные преобразования в  $L$ , удовлетворяющие задаче

$$\partial_a \bar{X} = [\bar{X}, Y], \quad \bar{X}|_{a=0} = X, \quad (7.7)$$

где  $\bar{X}, X, Y \in L$ , в качестве  $Y$  можно брать базисные операторы. Вычисление однопараметрических групп для базисных операторов алгебры Ли и их суперпозиции дают полную линейную группу внутренних автоморфизмов.

Если взять по одной подалгебре из класса подобных относительно группы внутренних автоморфизмов, то получится **оптимальная система подалгебр**.

Инварианты подобных подалгебр связаны заменой переменных из группы, допускаемой исходными уравнениями, поэтому решения подмоделей, построенных на подобных подалгебрах с помощью связанных инвариантов, связаны той же заменой переменных. Поэтому достаточно строить подмодели для подалгебр из оптимальной системы.

Для основных алгебр из Таблицы 1 оптимальные системы построены. В приложении приводится оптимальная система для алгебры  $L_{11}$ , взятая из работы [5]. В таблице введены обозначения:  $r$  – размерность подалгебры,  $i$  – номер подалгебры в данной размерности; в базисах подалгебр оставлены номера операторов (7.5); в колонке  $\text{No}$  поставлен номер подалгебры  $(r.i)$  из

таблицы, которая является нормализатором подалгебры в строке; знак = у номера подалгебры-нормализатора обозначает, что подалгебра в строке самонормализована.

**Нормализатором**  $Nor_L(M)$  подалгебры  $M$  алгебры  $L$  называется максимальная подалгебра в  $L$ , для которой  $M$  является идеалом.

**Идеалом**  $J$  алгебры Ли  $L$  называется подалгебра, для каждого элемента которой коммутатор с любым элементом из  $L$  принадлежит  $J$ .

Подмодель подвергается исследованию, так же как и основные уравнения газовой динамики. Упрощение происходит за счет уменьшения числа переменных. Усложнения получаются ввиду того, что решения подмодели необходимо интерпретировать в физических переменных. Подмодель допускает преобразования нормализатора, записанного в инвариантах подалгебры.

В дальнейшем проводятся исследования некоторых подмоделей. Подмодели могут быть разных типов, в зависимости от того какие инварианты рассматриваются (точечные или дифференциальные), а также от того, какие выражения для инвариантов получаются.

Полное исследование всех подмоделей еще далеко от завершения. Можно лишь констатировать, что ранее исследованные подклассы точных решений системы уравнений газовой динамики вкладываются в систему подмоделей, построенных по оптимальным системам.

По оптимальной системе можно построить граф – дерево вложенных подалгебр, учитывая внутренние автоморфизмы. Каждой ветке этого дерева (подалгебра – надалгебра) можно сопоставить вложенные подмодели так, что решения любой подмодели надалгебры порождают точные решениями некоторой подмодели подалгебры. Для этого всегда можно выбрать инварианты надалгебры как функции инвариантов подалгебры. Представление группового решения определяется заданием функциональной зависимости



одной части инвариантов через другие. Сравнение представлений подалгебры и надалгебры задает связь между решениями подмоделей.

Упражнение 1. Доказать, что в любой однопараметрической группе можно ввести канонический параметр.

Упражнение 2. Показать, что однопараметрическая группа удовлетворяет задаче (7.3).

Упражнение 3. Показать, что решение задачи (7.3) образует каноническую группу.

Упражнение 4. Проверить свойства билинейности, антисимметричности и тождество Якоби для коммутатора (7.4).

Упражнение 5. Вывести операторы (7.5) из преобразований  $1^\circ \div 5^\circ$  §1. Обратно, решая (7.3) для операторов (7.5) получить группу  $G_{11}$ .

Упражнение 6. Продолжить операторы (7.5) на производные и проверить, что они допускаются системой уравнений газовой динамики.

Упражнение 7. Проверить, что операторы в каждой строке таблицы 1 образуют алгебру Ли, составив таблицу коммутаторов.

Упражнение 8. Проверить, что  $L_{11}$  является идеалом в каждой алгебре из таблицы 1.

Упражнение 9. Проверить, что операторы таблицы 1 допускаются уравнениями газовой динамики.

Упражнение 10. Проверить преобразования подобия из таблицы 2.

Упражнение 11. Показать, что преобразования подобия  $\bar{\rho} = \rho\psi'(\rho)$ ,  $\bar{p} = \psi(\rho)$  приводят конечномерные подалгебры бесконечной алгебры  $\{Y_{\varphi(\rho)}\}$  к одной из трех:  $\{Y_1\}$ ;  $\{Y_1, Y_\rho\}$ ;  $\{Y_1, Y_\rho, Y_{\rho^2}\}$ .

Упражнение 12. Найти внутренние автоморфизмы алгебры  $L_{11}$ , решая задачи (7.7) для базисных операторов.

Упражнение 13. Найти нормализаторы подалгебр из упражнения 11.

Упражнение 14. Проверить, что в таблице из приложения операторы в строчках образуют подалгебры, и вычислить для них нормализаторы.

Упражнение 15. Показать, что  $J_6 = \{X_1, \dots, X_6\}$  есть идеал в  $L_{11}$ , а  $\{X_7, \dots, X_{11}\} = N_5$  подалгебра. Составить оптимальную систему для  $N_5$ :

r	i	Базис	Nor	r	i	Базис	Nor
5	1	7, 8, 9, 10, 11	=5.1	1	1	$7+a11, a \neq 0$	2.1
4	1	7, 8, 9, 10	5.1		2	7	3.2
	2	7, 8, 9, 11	=4.2		3	$7+10$	2.2; $a=0$
3	1	7, 8, 9	5.1		4	10	5.1
	2	7, 10, 11	=3.2		5	11	4.2
2	1	7, 11	=2.1				
	2	$7+a11, 10$	3.2				
	3	10, 11	5.1				

Упражнение 16. Для каждой подалгебры из таблицы упражнения 15 вычислить **стационарную подгруппу** автоморфизмов, действующую в  $J_6$ .

Упражнение 17. Проверить оптимальную систему из приложения.

Упражнение 18. Записать базисные операторы алгебры  $L_{11}$  в цилиндрической системе координат.

### **§8. Инвариантные подмодели ранга три.**

Одномерным подалгебрам из оптимальной системы (см. Приложение) сопоставляются инвариантные подмодели ранга три. Необходимо вычислить базис функционально независимых инвариантов оператора, причем выбрать его так, чтобы три инварианта базиса выражались только через независимые переменные, а из остальных инвариантов определились бы все неизвестные функции. Инварианты – функции всех переменных зависимых и независимых, которые обращаются в нуль действием операторов из подалгебры. Вы-

числять инварианты многомерной подалгебры можно последовательно. Сначала вычисляются инварианты одного любого оператора, а остальные операторы записываются через инварианты первого. При лишней неинвариантной переменной коэффициенты приравниваются нулю (расщепление). Далее вычисляются инварианты следующего оператора и так далее.

Инварианты можно выбрать так, что инвариантная подмодель ранга три принимает один из следующих двух типов: **эволюционный тип E**

$$\begin{aligned}
 u_{1t} + u_1 u_{1x_1} + v_1 u_{1y_1} + b_1 R^{-1} P_{x_1} &= a_1, \\
 v_{1t} + u_1 v_{1x_1} + v_1 v_{1y_1} + b_2 R^{-1} P_{y_1} &= a_2, \\
 w_{1t} + u_1 w_{1x_1} + v_1 w_{1y_1} &= a_3, \\
 R_t + u_1 R_{x_1} + v_1 R_{y_1} + R(u_{1x_1} + v_{1y_1}) &= Ra_4, \\
 P_t + u_1 P_{x_1} + v_1 P_{y_1} + A(R, P)(u_{1x_1} + v_{1y_1}) &= a_5,
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

где коэффициенты системы  $b_i(t, x_1, y_1) > 0$ ,  $a_i$  – квадратичные функции по переменным  $u_1, v_1, w_1$ ; **стационарный тип S**

$$\begin{aligned}
 u_1 u_{1x_1} + v_1 u_{1y_1} + w_1 u_{1z_1} + b_1 R^{-1} P_{x_1} &= a_1, \\
 u_1 v_{1x_1} + v_1 v_{1y_1} + w_1 v_{1z_1} + b_2 R^{-1} P_{y_1} &= a_2, \\
 u_1 w_{1x_1} + v_1 w_{1y_1} + w_1 w_{1z_1} + b_3 R^{-1} P_{z_1} &= a_3, \\
 u_1 R_{x_1} + v_1 R_{y_1} + w_1 R_{z_1} + R(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) &= Ra_4, \\
 u_1 P_{x_1} + v_1 P_{y_1} + w_1 P_{z_1} + A(R, P)(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) &= a_5,
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

где  $b_i(x_1, y_1, z_1) > 0$ ,  $a_i$  – квадратичные функции по  $u_1, v_1, w_1$ .

Системы (8.1), (8.2) приводятся к симметрическим системам так же, как это было сделано в § 3. По определению из § 5 система (8.1) гиперболическая.

**Теорема 1.** Для системы (8.2) область гиперболичности определяется неравенством

$$b_1^{-1}u_1^2 + b_2^{-1}v_1^2 + b_3^{-1}w_1^2 > a^2. \quad (8.3)$$

**Доказательство.** По определению из § 5 для характеристического вектора  $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$  системы (8.2) получается уравнение

$$\chi^3 \left[ \chi^2 - a^2(b_1\xi^2 + b_2\eta^2 + b_3\zeta^2) \right] = 0,$$

где  $\chi = \xi u_1 + \eta v_1 + \zeta w_1$ . Для гиперболичности системы необходимо, чтобы квадратичная форма по переменным  $\xi, \eta, \zeta$  в квадратных скобках была знакопеременна. Это возможно, если собственные числа матрицы квадратичной формы имеют разные знаки.

Уравнение для собственных чисел таково

$$g(\lambda) = \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0, \quad (8.4)$$

где  $J_1 = a^{-2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - b_1 - b_2 - b_3$ ,  $J_2 = b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - a^{-2}[u_1^2(b_2 + b_3) + v_1^2(b_1 + b_3) + w_1^2(b_1 + b_2)]$ ,  
 $J_3 = a^{-2}(b_1b_2w_1^2 + b_1b_3v_1^2 + b_2b_3u_1^2) - b_1b_2b_3$ .

По теореме Раусса (Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. М. Наука, 1966, с. 475) число  $k$  положительных корней многочлена  $g(\lambda)$  равно числу перемен знака в ряду выражений, составленных из коэффициентов уравнения (8.4)

$$1, \quad -J_1, \quad J_2 - J_3J_1^{-1}, \quad -J_3.$$

При  $k=1$  возможны три случая

- 1)  $J_1 > 0, \quad J_1J_2 \leq J_3, \quad J_3 > 0;$
- 2)  $J_1 < 0, \quad J_1J_2 \geq J_3, \quad J_3 > 0;$
- 3)  $J_1 < 0, \quad J_1J_2 < J_3, \quad J_3 > 0.$

При  $k=2$  возможны еще три случая

$$4) \quad J_1 < 0, \quad J_1 J_2 > J_3, \quad J_3 < 0;$$

$$5) \quad J_1 > 0, \quad J_1 J_2 \leq J_3, \quad J_3 < 0;$$

$$6) \quad J_1 > 0, \quad J_1 J_2 > J_3, \quad J_3 < 0.$$

Пусть  $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3, q^2 = a^{-2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$ , иначе переобозначим переменные.

В случае 1) из  $J_1 > 0$  следует  $q^2 > b_1 + b_2 + b_3$  и  $J_3 > 0$ . Покажем, что неравенство  $J_1 J_2 \leq J_3$  выполняется. Действительно,

$$J_1 J_2 < (q^2 - b_1 - b_2 - b_3) [b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - q^2(b_1 + b_2)];$$

$b_1 b_2 (q^2 - b_3) < J_3$  и достаточно доказать неравенство

$$(q^2 - b_1 - b_2 - b_3) [1 + (b_1^{-1} + b_2^{-1})(b_3 - q^2)] \leq q^2 - b_3, \text{ которое равносильно}$$

следующему очевидному неравенству

$$(q^2 - b_3 - b_2)(q^2 - b_3 - b_1) \geq 0 \text{ или } b_1 b_2 \geq 0.$$

Значит, область вне сферы  $q^2 = b_1 + b_2 + b_3$  в пространстве переменных  $q_1 = u_1 a^{-1}, q_2 = u_2 a^{-1}, q_3 = u_3 a^{-1}$  является областью гиперболичности.

Из 2), 3) следует, что область между сферой  $q^2 = b_1 + b_2 + b_3$  и эллипсоидом  $q_1^2 b_1^{-1} + q_2^2 b_2^{-1} + q_3^2 b_3^{-1} = 1$  разбивается на две части поверхностью

$$J_1 J_2 = J_3 \text{ и обе части являются областями гиперболичности.}$$

Таким образом, случаи 1)÷3) объединяются в одном неравенстве  $J_3 > 0$ , равносильном (8.3).

В случае 4) следует  $q^2 < b_3$ ,

$$\begin{aligned} & (q^2 - b_1 - b_2 - b_3)(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - b_1q^2 - b_2q^2) > \\ & > J_1J_2 > J_3 > b_1b_2(q^2 - b_3). \end{aligned}$$

Отсюда следует противоречивое неравенство

$$(q^2 - b_3 - b_2)(q^2 - b_3 - b_1) < 0 \text{ или } b_1b_2 < 0.$$

В случаях 5), 6) из неравенств  $J_1 > 0, J_3 < 0$  следуют противоречивые неравенства  $q^2 > b_1 + b_2 + b_3, q^2 < b_3$ . Теорема доказана.

Рассматриваются инвариантные подмодели ранга 3, построенные по одномерным подалгебрам оптимальной системы из приложения.

**Подалгебра 1.1** задает движение с **квазиконической спиральной линией уровня** инвариантных функций. Для составления уравнений подмодели вычисляются инварианты оператора подалгебры в цилиндрической системе координат. Оператор  $at\partial_t + (ax + bt)\partial_x + ar\partial_r + \partial_\theta + b\partial_U$  имеет

$$\text{инварианты: } x_1 = xt^{-1} - ba^{-1} \ln t, y_1 = rt^{-1}, z_1 = \theta - a^{-1} \ln t;$$

$$u_1 = U - xt^{-1} - ba^{-1}, v_1 = V - rt^{-1}, w_1 = tWr^{-1} - a^{-1}, P = p, R = \rho.$$

Используя инварианты, записываем вид инвариантного решения

$$U = u_1 + xt^{-1} + ba^{-1}, V = v_1 + rt^{-1}, W = rt^{-1}(w_1 + a^{-1}), p = P, \rho = R, \quad (8.5)$$

где  $u_1, v_1, w_1, P, R$  – функции инвариантов  $x_1, y_1, z_1$ .

Подстановка (8.5) в уравнения газовой динамики (3.5), (3.6), (3.9), записанных в цилиндрической системе координат, дает систему стационарного типа (8.2) с  $b_1 = b_2 = 1, b_3 = y_1^{-2}$ ;

$$a_1 = -u_1 - ba^{-1}, a_2 = -v_1 + y_1(w_1 + a^{-1})^2, a_3 = -y_1^{-1}(w_1 + a^{-1})(2v_1 + y_1),$$

$$a_4 = -3 - y_1^{-1}v_1, a_5 = Aa_4.$$

Линия в физическом пространстве  $R^4(t, x, r, \theta)$ , соответствующая постоянным значениям инвариантов  $x_1 = x_0, y_1 = r_0, z_1 = \theta_0$ , является линией

уровня инвариантных функций  $u_1, v_1, w_1, P, R$ . Проекция этой линии в пространство  $R^3(x, r, \theta)$  задается равенствами

$$x = \frac{r}{r_0} \left( x_0 + \frac{b}{a} \ln \frac{r}{r_0} \right), \quad r = r_0 e^{a(\theta - \theta_0)}.$$

Первое уравнение задает поверхность вращения квазилуча (см. рис. 1), пересекающего ось  $r$  в точках  $r=0$  и  $r = r_1 = r_0 e^{-ax_0 b^{-1}}$ , и имеющего один минимум в точке  $x_m = -ba^{-1} e^{-1} r_1 r_0^{-1}$ ,  $r_m = r_1 e^{-1}$ .

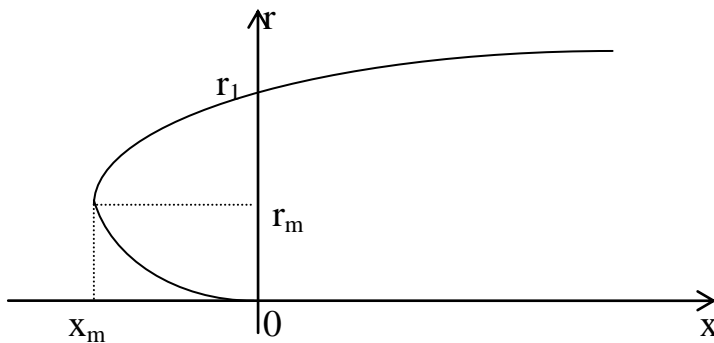


Рис. 1

Второе уравнение задает цилиндр с прямой образующей параллельной оси  $x$  и направляющей – логарифмической спиралью. Таким образом, линия уровня есть спираль, намотанная на поверхность вращения квазилуча.

При  $b = 0$  квазилуч становится лучом  $x = r r_0^{-1} x_0$ . Поверхность вращения есть конус. Таким образом, спираль наматывается на коническую поверхность.

Фиксируем переменные  $t, x, r$  и меняем  $\theta$  от  $\theta_0$  до  $\theta_0 + 2\pi$ . Мы получим одну и ту же точку в физическом пространстве. При этом значения инварианта  $z_1$  принимает приращение  $2\pi$ . Значит, для того, чтобы решение инвариантной подмодели задавало непрерывное течение в физическом пространстве, необходима  $2\pi$  – периодичность инвариантного решения  $u_1, v_1, w_1, P, R$  по переменной  $z_1$ . В противном случае в течении должны быть поставлены стенки или сильные разрывы.

**Подалгебра 1.2** задает движение с винтовыми линиями уровня, шаг которых зависит от времени. В цилиндрической системе координат оператор имеет вид:  $a\partial_x + \partial_\theta + a\partial_U$ ,  $a \neq 0$ ; инварианты таковы  $t, x_1 = x - at\theta$ ,  $r, U - xt^{-1}, V, W, p, \rho$ . Представление инвариантного решения имеет вид

$$\begin{aligned} U &= a\theta + r^2(r^2 + a^2t^2)^{-1}u_1 + atr^{-1}w_1; V = v_1, \\ W &= w_1 - atr(r^2 + a^2t^2)^{-1}u_1, \rho = R, p = P, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где  $u_1, v_1, w_1, P, R$  – функции инвариантов  $t, x_1, r = y_1$ .

Подстановка (8.6) в уравнения газовой динамики (3.5), (3.6), (3.9), записанных в цилиндрических координатах, дает систему эволюционного типа (8.1), где  $b_1 = 1 + a^2t^2r^{-2}, b_2 = 1; a_4 = -v_1r^{-1}, a_5 = Aa_4$ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2a}{r} \left( \frac{t}{r}v_1 - 1 \right) \left( w_1 - \frac{atr}{r^2 + a^2t^2}u_1 \right), \quad a_2 = \frac{1}{r} \left( w_1 - \frac{atr}{r^2 + a^2t^2}u_1 \right)^2, \\ a_3 &= \frac{v_1(a^2t^2r^{-1} - r) - 2a^2t}{r^2 + a^2t^2} \left( w_1 - \frac{atr}{r^2 + a^2t^2}u_1 \right). \end{aligned}$$

Постоянным значениям инвариантов  $t, x_1, r$  соответствует винтовая линия в физическом пространстве  $R^3(x, r, \theta)$ . Это линия постоянства инвариантных функций.

При фиксированных переменных  $t, x, r$  и меняющимся угле  $\theta$  от  $\theta_0$  до  $\theta_0 + 2\pi$  инвариант  $x_1$  и функция  $U$  получают приращение  $2\pi at$  и  $2\pi a$  соответственно. Следовательно, в области движения газа должна быть стенка или поверхность сильного разрыва, сечение которых любым цилиндром  $r = \text{const}$  есть винтовая линия.

**Подалгебра 1.3** имеет инварианты  $t, x, r; U, V, W, p, \rho$  в цилиндрических координатах. Инвариантное решение вида  $U = u_1(t, x_1, y_1)$ ,



$V = v_1(t, x_1, y_1), W = w_1(t, x_1, y_1), p = P(t, x_1, y_1), \rho = R(t, x_1, y_1), x_1 = x,$   
 $y_1 = r;$  определяет подмодель эволюционного типа (8.1) с  $b_1 = b_2 = 1,$   
 $a_1 = 0, a_2 = r^{-1}w_1^2, a_3 = -r^{-1}v_1w_1, a_4 = -r^{-1}v_1, a_5 = Aa_4.$  Линии уровня инвариантных функций есть окружности, поэтому подмодель называют подмоделью **вращательно симметричных движений.**

**Подалгебра 1.4** задает движение с винтовыми линиями уровня, шаг которых не зависит от времени. Инварианты в цилиндрической системе координат таковы  $t, x_1 = r, y_1 = x - \theta; U, V, W, p, \rho.$  Инвариантное решение вида  $U = v_1 + r^{-1}w_1 - r^{-2}u_1, V = u_1, W = w_1 - r^{-1}u_1, p = P, \rho = R,$  где функции  $u_1, v_1, w_1, P, R$  зависят от инвариантов  $t, x_1, y_1,$  задает эволюционного типа подмодель (8.1) с  $b_1 = 1, b_2 = 1 + r^{-2};$

$$a_1 = r^{-1}(w_1 - r^{-1}u_1)^2, \quad a_2 = 2r^{-2}u_1(w_1 - r^{-1}u_1),$$

$$a_3 = -r^{-1}u_1w_1 + r^{-2}(w_1 - r^{-1}u_1)^2, \quad a_4 = -r^{-1}u_1, \quad a_5 = Aa_4.$$

Если решение подмодели  $2\pi$ -периодическое по  $y_1,$  то оно задает непрерывное движение газа.

**Подалгебра 1.5** задает вращательные движения в однородном поле сил. Инварианты в цилиндрической системе координат таковы  $x_1 = x - \frac{1}{2}t^2, y_1 = r, z_1 = a\theta - t, U - t, V, W, p, \rho.$  Представление решения в виде  $U = t + u_1; V = v_1, W = a^{-1}r(1 + w_1), p = R, \rho = P,$  где функции  $u_1, v_1, w_1, R, P$  зависят от инвариантов  $x_1, y_1, z_1,$  задает стационарного типа подмодель (8.2) с  $b_1 = b_2 = 1, b_3 = a^2r^{-2}; a_1 = -1,$

$$a_2 = a^{-2}r(1 + w_1)^2, \quad a_3 = -2r^{-1}v_1(1 + w_1), \quad a_4 = -r^{-1}v_1, \quad a_5 = Aa_4.$$

Для непрерывности физического течения нужно потребовать  $2\pi a$ -периодичность по  $z_1$  решения подмодели.

Уравнения  $x_1 = \text{const}, y_1 = \text{const}, z_1 = \text{const}$  задают вращательное движение точки по цилиндру, равноускоренное в направлении оси цилиндра.

**Подалгебра 1.6** задает **вращательные движения**. Инварианты в цилиндрической системе координат таковы  $x_1 = x, y_1 = r, z_1 = \theta - t, U, V, W, \rho, p$ . Представление инвариантного решения в виде  $U = u_1; V = v_1, W = r(1 + w_1), \rho = R, p = P$ , где функции  $u_1, v_1, w_1, R, P$  зависят от  $x_1, y_1, z_1$ , определяет стационарного типа подмодель (8.2) с  $b_1 = b_2 = 1, b_3 = r^{-2}; a_1 = 0, a_2 = r(1 + w_1)^2, a_3 = -2r^{-1}v_1(1 + w_1), a_4 = -r^{-1}v_1, a_5 = Aa_4$ .

Для непрерывности физического течения требуется  $2\pi$ -периодичность по  $z_1$  решения подмодели.

На линии постоянства инвариантов  $x_1, y_1, z_1$  точка движется по окружности с постоянной круговой скоростью.

**Подалгебра 1.7** задает **обобщенно конические течения**. Инварианты в декартовой системе координат таковы  $x_1 = xt^{-1} - a \ln t, y_1 = yt^{-1}, z_1 = zt^{-1}, u - xt^{-1}, v, w, \rho, p$ . Представление инвариантного решения в виде  $u = u_1 + xt^{-1} + a, v = v_1 + yt^{-1}, w = w_1 + zt^{-1}, \rho = R, p = P$ , где функции  $u_1, v_1, w_1, P, R$  зависят от  $x_1, y_1, z_1$ , определяет стационарного типа подмодель (8.2) с  $b_1 = b_2 = b_3 = 1; a_1 = -u_1 - a, a_2 = -v_1, a_3 = -w_1, a_4 = -3, a_5 = Aa_4$ .

Линия в  $R^3(x, y, z)$  постоянства инвариантов  $x_1 = x_0, y_1 = y_0, z_1 = z_0$  есть квазилуч  $x = \frac{y}{y_0} \left( x_0 + a \ln \frac{y}{y_0} \right)$  (см. Рис. 1) в плоскости  $z_0 y = y_0 z$ .

**Подалгебра 1.8** задает конические течения. Инварианты в декартовой системе таковы  $x_1 = xt^{-1}$ ,  $y_1 = yt^{-1}$ ,  $z_1 = zt^{-1}$ ,  $u = xt^{-1}$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\rho$ ,  $\rho$ .

Представление инвариантного решения в виде  $u = u_1 + xt^{-1}$ ,  $v = v_1 + yt^{-1}$ ,  $w = w_1 + zt^{-1}$ ,  $\rho = R$ ,  $\rho = P$ , где функции  $u_1, v_1, w_1, P, R$  зависят от  $x_1, y_1, z_1$ , определяет стационарного типа подмодель (8.2) с  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ ;  $a_1 = -u_1$ ,  $a_2 = -v_1$ ,  $a_3 = -w_1$ ,  $a_4 = -3$ ,  $a_5 = Aa_4$ .

Линии постоянства инвариантов  $x_1, y_1, z_1$  являются прямыми, проходящими через начало декартовой системы координат.

**Подалгебра 1.9** задает движения газа в постоянном поле сил. Инварианты в декартовой системе координат таковы  $x_1 = x - \frac{1}{2}t^2$ ,  $y_1 = y$ ,  $z_1 = z$ ;  $u = t$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\rho$ ,  $\rho$ . Представление инвариантного решения в виде  $u = t + u_1$ ,  $v = v_1$ ,  $w = w_1$ ,  $\rho = R$ ,  $\rho = P$  задает подмодель (8.1) с  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ .

Линии постоянства инвариантов  $x_1, y_1, z_1$  есть прямые, параллельные оси  $x$ , по которым точки двигаются равноускоренно.

**Подмодель 1.10** задает стационарные движения газа. В этом случае представление решения есть газодинамические функции, независящие от времени. Получается стационарная подмодель (8.2) с  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ .

Проведем качественные исследования эталонной простейшей подмодели стационарного типа. Индекс 1 у всех переменных опускается в дальнейшем описании стационарных движений.

Линии в  $R^3(x, y, z)$ , определяемые как интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

называются **линиями тока** и обозначаются символом  $L$ . Из (1.2) следует, что линии тока являются траекториями частиц в стационарном движении. Уравнения для энтропии (3.8) принимает вид  $D'S = uS_x + vS_y + wS_z = 0$ . Отсюда следует **интеграл энтропии**: энтропия вдоль линии тока постоянна

$$S = S_0(L). \quad (8.7)$$

Из уравнения (3.13) после скалярного умножения на скорость  $\bar{u}$  следует равенство

$$D'(2^{-1}|\bar{u}|^2) + \rho^{-1}D'\rho = 0.$$

Вводится в рассмотрение энтальпия  $i = \varepsilon + pV$ . В силу первого закона термодинамики (2.2) и (8.7) следует равенство

$$D'(|\bar{u}|^2 + 2i) = 0$$

Отсюда получается **интеграл Бернулли**

$$|\bar{u}|^2 + 2i = 2i_0(L) \quad (8.8)$$

Так как  $\frac{di}{d\rho}|_{S=\text{const}} = \frac{a^2}{\rho}$ , то  $I = 2 \int_0^\rho \frac{a^2}{\rho} d\rho$  отличается от  $2i$  на слагаемое, зависящее от  $S$ .

Упражнение 1. Для нормального газа при постоянной  $S$  справедливо, что  $I(a^2)$  есть однозначная возрастающая функция квадрата скорости звука и  $I(a^2) \rightarrow 0$  при  $a^2 \rightarrow 0$ ;  $I(a^2) \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Итак, (8.8) представляется в виде

$$|\bar{u}|^2 + I(a^2) = q_m^2(L),$$

где  $q_m$  есть максимально возможная скорость на данной линии тока  $L$ . Максимальная скорость достигается в точке вакуума  $a = 0$  и  $\rho = 0$ .

**Критической скоростью**  $a_* > 0$  называется единственный корень уравнения

$$a_*^2 + I(a_*^2) = q_m^2.$$

**Теорема 2.** Для дозвуковых течений  $|\bar{u}| < a$  справедливо неравенство  $|\bar{u}| < a_* < a$ ; для сверхзвуковых течений  $|\bar{u}| > a$  следует неравенство  $|\bar{u}| > a_* > a$ .

**Доказательство.**  $I(a^2)$  – монотонно возрастающая функция. При  $|\bar{u}| < a$  справедлива цепочка неравенств

$$|\bar{u}|^2 + I(|\bar{u}|^2) < |\bar{u}|^2 + I(a^2) = q_m^2(L) = a_*^2 + I(a_*^2) < a^2 + I(a^2),$$

откуда следует неравенство  $|\bar{u}| < a_* < a$ .

При  $|\bar{u}| > a$  все знаки неравенств заменяются на противоположные.

Неравенство (8.3) показывает, что в области сверхзвукового течения система (8.2) является гиперболической.

Для определения характеристик подмодели установившихся течений воспользуемся результатами §5. В выражении для характеристической матрицы  $A$  отсутствуют слагаемое с  $A^t$ . Нормальный характеристический вектор в  $R^3(x, y, z)$  таков  $\bar{n} = (\xi, \eta, \zeta)$ ,  $|\bar{n}| = 1$  – это единичная нормаль к характеристике. Величина  $\chi = \bar{u} \cdot \bar{n} = u_n$  – проекция на нормаль вектора скорости. Уравнение для нахождения характеристического вектора  $\det A(\bar{n}) = 0$  распадается на три:  $u_n = 0$  – **контактные характеристики**, которые состоят из линий тока;  $u_n = \pm a$  – **звуковые характеристики**, на которых проекция скорости на нормаль по абсолютной величине равна скорости звука. Звуковые характеристики возможны лишь в области сверхзвукового течения, так как  $|\bar{u}| \geq |u_n| = a$ . В областях дозвуковых течений возможны лишь контактные характеристики.

Для линии тока  $L$  определяется **трубка тока**  $T_r$ , которая образована линиями тока, проходящими через окружность  $K_r$  малого радиуса  $r$  с центром на линии  $L$  и лежащей в плоскости перпендикулярной  $L$  (Рис. 2).

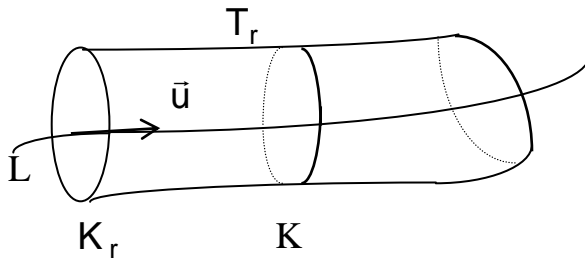


Рис. 2

Пусть  $K$  – другое сечение  $T_r$  и  $\Sigma$  – боковая поверхность между  $K_r$  и  $K$ . Поверхность  $\Sigma$  образована линиями тока, поэтому на ней  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ , где  $\vec{n}$  – нормаль к  $\Sigma$ .

Интегральный закон сохранения массы для неподвижного объема  $\omega$  с границей  $\gamma$  гласит: изменение массы в объеме равно потоку массы через поверхность

$$\partial_t \int_{\omega} \rho d\omega = \int_{\gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma.$$

Для стационарных течений отсюда следует равенство

$$Q(T_r) = \int_{K_r} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma = \int_K \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma \quad (8.9)$$

для **расхода**  $Q(T_r)$ , который не зависит от сечения.

Пусть площади  $K_r, K$  есть  $\sigma_r, \sigma$  и существует предел  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma_r} = F$  –

**площадь сечения.**

Тогда существует конечный предел

$$Q = \lim_{r \rightarrow 0} Q(T_r) \sigma_r^{-1} = \rho |\vec{u}| F$$

называемый **расходом вдоль линии тока L.**

Из (8.9) следует интеграл

$$\rho F |\vec{u}| = \text{const.} \quad (8.10)$$

**Теорема 3.** В расширяющейся трубке тока дозвуковая скорость убывает, а сверхзвуковая скорость возрастает; в сужающейся трубке тока, наоборот, дозвуковая скорость возрастает, а сверхзвуковая убывает.

**Доказательство.** Дифференциал от (8.8), (8.10) вдоль  $L$  дает

$$\frac{d(\rho|\bar{u})}{d|\bar{u}|} = \rho(1 - M^2), M = \frac{|\bar{u}|}{a};$$

$$\frac{dF}{F} + \frac{d(\rho|\bar{u})}{\rho|\bar{u}|} = 0.$$

Отсюда получим равенство

$$\frac{dF}{F} = (M^2 - 1) \frac{d|\bar{u}|}{|\bar{u}|}. \quad (8.11)$$

Из (8.11) следуют все возможные сочетания знаков:

$$dF > 0, \quad M < 1, \quad d|\bar{u}| < 0;$$

$$dF > 0, \quad M > 1, \quad d|\bar{u}| > 0;$$

$$dF < 0, \quad M < 1, \quad d|\bar{u}| > 0;$$

$$dF < 0, \quad M > 1, \quad d|\bar{u}| < 0,$$

равносильные совокупности всех утверждений о свойствах трубки тока.

В установившемся движении поверхность ударной волны неподвижна  $D_n = 0$  и называется **скачком уплотнения**.

По теореме Цемплена 4.4 состояние 1 перед скачком и состояние 2 за скачком связаны неравенствами

$$|u_{n1}| > a_1, \quad |u_{n2}| < a_2.$$

Следовательно, перед скачком уплотнения течение сверхзвуковое, а за скачком может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым. Из (4.10) следует

$$\left[ \frac{1}{2} |\bar{u}|^2 + \varepsilon + pV \right] = 0 \text{ или } \left[ |\bar{u}|^2 + 2i \right] = 0,$$

т.е. постоянная в интеграле Бернулли (8.8) не меняется при переходе через скачок  $[i_0] = [q_m] = 0$  вдоль линии тока  $L$ .

Если вектор скорости ортогонален скачку, то скачок называется **прямым**. В этом случае линия тока проходит через скачок гладко. Скачок уплотнения называется **косым**, если вектор скорости образует угол с нормалью скачка. В этом случае вектор скорости меняет направление при переходе через скачок, а линия тока имеет излом, при этом касательная составляющая скоростей не меняется (4.11) (см. Рис. 3).

Уравнение (4.15) имеет вид  $[\vec{u}] \times \nabla h = 0$  и служит для определения поверхности скачка  $\Sigma: h(\vec{x}) = 0$ , здесь  $||[\vec{u}]|| = [u_n]$ . Уравнение адиабаты Гюгонио (4.14) или (4.16) удобно записать в виде  $V_2 = V_1(1 - \Gamma(z))$ , где  $z = [\rho]V_1a_1^{-2}$  - амплитуда скачка.

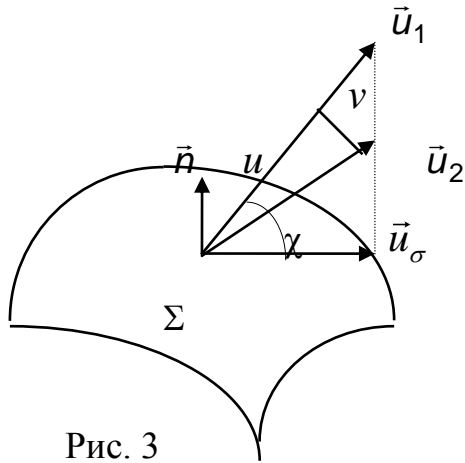


Рис. 3

Поведение графика функции  $\Gamma(z)$  следует из свойств адиабаты Гюгонио, установленных в § 4 (Рис. 4.3), в нормальном газе (см. Рис. 4, где  $z_1 = \rho_1 \rho_1^{-1} a_1^{-2}$ ). Условия на скачке принимают вид  $u_{n2} u_{n1}^{-1} = 1 - \Gamma(z)$ ,  $a_1^2 z = u_{n1}^2 \Gamma(z)$ . Отсюда  $z = (M_1^2 - \bar{u}_\sigma^2 a_1^2) \Gamma(z)$ .

Из подобия прямоугольных треугольников на рисунке 3 следует

$$\frac{v}{u_\sigma} = \frac{q_1 - u}{u_{n1}} = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{q_1}, \text{ где } |\vec{u}_1| = q_1, u_\sigma^2 = q_1^2 - u_{n1}^2, |\vec{u}_2|^2 = u^2 + v^2.$$



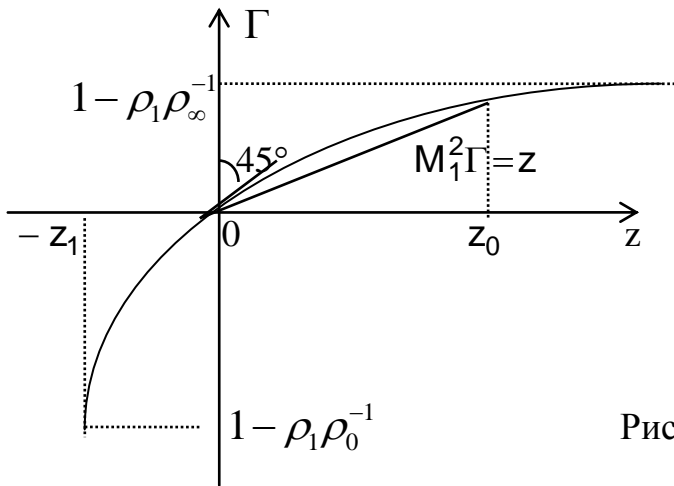


Рис. 4

Отсюда получается параметрическое представление ударной поляры  $u = q_1(1 - M_1^{-2}z)$ ,  $v^2 = a_1^2 z(\Gamma(z) - zM_1^{-2})$ , где  $M_1 = q_1 a_1^{-1}$ ,  $z$  - параметр кривой в плоскости  $(u, v)$  (Рис. 5).

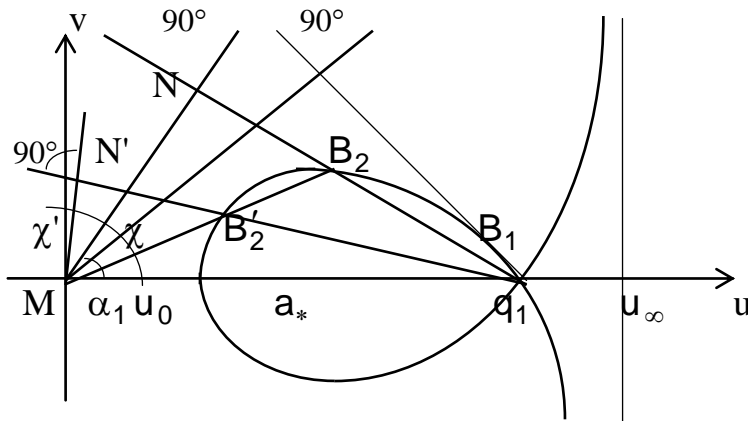


Рис. 5

Из свойства звездности адиабаты Гюго-Ранкина следует, что уравнение  $\Gamma(z) = M_1^{-2}z$  при любом  $M_1 > 1$  имеет единственный корень  $z_0(M_1)$ . Поэтому ударная поляра определена в интервале  $0 \geq z \leq z_0$ , звезда относительно точки  $(q_1, 0)$ , имеет в этой точке производную  $|dv/du| \rightarrow \text{ctg} \alpha_1$  при  $z \rightarrow 0$ , где  $\alpha_1$  - угол Маха  $\sin \alpha_1 = a_1 q_1^{-1}$ . В силу звездности угол наклона  $\chi$  скорости  $\vec{u}_1$  к поверхности скачка всегда больше угла Маха  $\alpha_1$ .

Точка  $(u_0, 0)$ ,  $u_0 = q_2 = q_1(1 - M_1^{-2}z_0)$ , соответствует прямому скачку. По теореме Цемплена 4.4 течение за прямым скачком всегда дозвуковое  $u_0 < a_*$ . За косым скачком течение может быть как сверхзвуковым  $B_2$ , так и

дозвуковым  $B'_2$ . Для косых скачков угол поворота вектора скорости не превосходит некоторого максимального значения. Ударная поляра при  $z < 0$  имеет бесконечные ветви в области  $u > q_1$  с асимптотой  $u = u_\infty = q_1(1 + z_1)$ . В этом случае состояние 1 находится за скачком.

**Подалгебра 1.11** задает **сдвиговые движения**. Инварианты в декартовой системе координат таковы  $t, x_1 = x - tz, y_1 = y; u - z, v, w, \rho, p$ .

Представление инвариантного решения в виде  $u = z + \frac{u_1 + tw_1}{1 + t^2}, v = v_1,$

$w = \frac{w_1 - tu_1}{1 + t^2}, \rho = R, p = P,$  где функции  $u_1, v_1, w_1, P, R$  зависят от

$t, x_1, y_1,$  определяет подмодель эволюционного типа (8.1) с  $b_1 = 1 + t^2, b_2 = 1,$

$a_1 = 2 \frac{tu_1 - w_1}{1 + t^2}, a_2 = a_4 = a_5 = 0, a_3 = u_1.$

Линии уровня инвариантных функций есть параллельные прямые, лежащие в плоскостях параллельных плоскости  $(x, z)$ . Направления прямых линий уровня линейно зависят от времени.

**Подалгебра 1.12** описывает **галилеево - инвариантные движения газа**. Инварианты в декартовой системе координат таковы  $t, x_1 = y,$

$y_1 = z, u - xt^{-1}, v, w, \rho, p.$  Представление инвариантного решения в виде

$u = xt^{-1} + w_1, v = u_1, w = v_1, \rho = R, p = P,$  где  $u_1, v_1, w_1, P, R$  зависят от

$t, x_1, y_1,$  определяет подмодель эволюционного типа (8.1) с  $b_1 = b_2 = 1;$

$a_1 = a_2 = 0, a_3 = -t^{-1}w_1, a_4 = -t^{-1}; a_5 = Aa_4.$

Линии уровня инвариантных функций параллельны оси  $x$ .

**Подалгебра 1.13** описывает **двумерные движения газа**. Инвариантное решение имеет представление  $u = w_1, v = u_1, w = v_1, \rho = P, p = R,$  где

все функции зависят от  $t, x_1 = y, y_1 = z$ , и задает подмодель эволюционного типа (8.1) с  $b_1 = b_2 = 1, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ .

При  $w_1 = 0$  получаются **плоскопараллельные движения газа**.

В последних двух случаях третье уравнение подмодели отщепляется от системы и может быть решено как линейное уравнение по известному решению оставшихся уравнений. С учетом этого замечания каждая из рассмотренных здесь подмоделей ранга три допускает лишь нормализатор алгебры, по которой она построена. При этом операторы нормализатора должны быть записаны в инвариантных переменных, которые остались в системе после отщепления некоторых уравнений.

Таблица 1 из §7 не сохраняется для подмоделей. Есть подмодели, когда она сокращается и когда она расширяется с появлением новых уравнений состояния, при которых допускаемая подмоделью группа расширяется.

Упражнения 2. Подставить представления инвариантных решений для подалгебр 1.1- 1.13, указанные в тексте, в уравнения газовой динамики, и получить подмодели (8.1) и (8.2).

Упражнения 3. Перенести некоторые свойства подмодели установившихся движений на другие подмодели стационарного типа.

Упражнения 4. Найти базисы функционально - независимых инвариантов для всех подалгебр из приложения.

Упражнения 5. Как можно доказать утверждения о двух типа инвариантных подмоделей, не перебирая все подалгебры?

Упражнение 6. Для каждой из подмоделей проверить утверждение о допускаемой алгебре в виде нормализатора.

Упражнение 7. Привести подмодели к симметрическому виду.

Упражнение 8. Составить таблицы расширений для подмоделей.

Упражнение 9. Вывести уравнения характеристик для подмоделей.

### §9. Частично инвариантные подмодели.

Для некоторых подалгебр из оптимальной системы нельзя построить инвариантных решений. Это случается, когда из инвариантов подалгебры невозможно определить все газодинамические функции. Число  $\delta$  лишних функций, неопределяемых из выражений для инвариантов, называется **дефектом** инвариантности. Инварианты, из которых определяются некоторые газодинамические функции, назначаются функциями от лишних функций и инвариантов, выражающихся через независимые переменные. Число  $r$  независимых переменных этих функций называется **рангом**.

В качестве примера рассматривается подалгебра 5.34 из приложения, состоящая из всех переносов и растяжения. Ее инварианты:  $u, v, w, \rho, p$ . Инвариантное решение ранга ноль есть постоянное решение:

$$\bar{u} = \bar{u}_0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0.$$

Частично инвариантное решения подалгебры 5.34 ранга  $n$  дефекта  $n$  называется  **$n$  - волной**: **простая волна** при  $n=1$ , **двойная волна** при  $n=2$ , **тройная волна** при  $n=3$ .

Рассматривается простая волна, для которой представление решения удобно искать в параметрическом виде

$\bar{u} = \bar{u}(\alpha), \quad \rho = \rho(\alpha), \quad p = p(\alpha), \quad S = S(\alpha)$ , где  $\alpha(t, \bar{x})$  – новая искомая функция. **Поверхности уровня** простой волны есть гиперповерхности  $\alpha(t, \bar{x}) = \text{const}$ , на них газодинамические функции постоянны. Из уравнений газовой динамики (3.5), (3.6), (3.8) следует переопределенная система уравнений

$$\begin{aligned} \rho' D\alpha + \rho \bar{u}' \cdot \nabla \alpha &= 0, \\ \rho \bar{u}' D\alpha + \rho' \nabla \alpha &= 0, \\ S' D\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Условия совместности системы (приведение в инволюцию) порождают новые уравнения. Часть из них образует систему обыкновенных дифференциальных уравнений для  $\bar{u}, \rho, p$ , остальные уравнения есть пассивная система уравнений для  $\alpha$ .

Последнее уравнение системы (9.1) приводит к альтернативе: либо  $D\alpha = 0$ , либо  $S' = 0$ .

В первом вырожденном случае  $p = \text{const}$ . Изобарические течения будут рассмотрены позже.

**Теорема 1.** Невырожденная простая волна есть изоэнтропическое безвихревое движение. Поверхности уровня являются гиперплоскостями и звуковыми характеристиками.

**Доказательство.** Во втором случае альтернативы  $S = \text{const}$ ,  $p' \neq 0$ ,  $\text{rot} \bar{u} = \nabla \alpha \times \bar{u}' = 0$ ,  $\nabla \alpha = k \bar{u}'$ , где  $k(t, \bar{x}) \neq 0$  – фиксированная функция. Скалярное умножение второго уравнения (9.1) на  $\nabla \alpha$  в силу первого уравнения дает

$$\rho'(D\alpha)^2 - \rho'|\nabla\alpha|^2 = 0 \text{ или } (D\alpha)^2 - a^2|\nabla\alpha|^2 = 0.$$

В силу (5.2) уравнение  $\alpha = \text{const}$  задает звуковую характеристику.

Скалярное умножение второго уравнения (9.1) на  $\bar{u}'$  в силу первого уравнения дает

$$\rho^2|\bar{u}'|^2 = \rho'p'. \quad (9.2)$$

Так как  $D\alpha = \alpha_t + \bar{u} \cdot \nabla \alpha = \alpha_t + k \bar{u} \cdot \bar{u}'$ , то из первого уравнения (9.1) получаем в силу (9.2)

$$\alpha_t = -k\left(|\bar{u}| \cdot |\bar{u}'| + \rho^{-1}p'\right), \nabla \alpha = k \bar{u}'. \quad (9.3)$$

Отсюда следует, что нормаль к поверхности  $\alpha = \text{const}$  имеет одно и тоже направление для всех ее точек, т.е. эта поверхность является гиперплоско-

стью.

Из доказательства теоремы 1 следует, что система обыкновенных дифференциальных уравнений для  $\bar{u}, \rho, p, S$  есть  $S' = 0$ , (9.2) и уравнение состояния  $p = f(\rho, S)$ . Имеется произвол в решении в 3 функции одного переменного. Система (9.3) есть пассивная система для  $\alpha$ . Для поверхности уровня  $\alpha = \text{const}$  имеем уравнение с постоянными коэффициентами

$$0 = d\alpha = \nabla\alpha \cdot d\bar{x} + \alpha_t dt = k \left[ \bar{u}' \cdot d\bar{x} - \left( |\bar{u}| |\bar{u}'| + \rho^{-1} p' \right) dt \right].$$

Интегрирование приводит к неявному заданию функции  $\alpha$

$$\bar{x} \cdot \bar{u}' - t \left( |\bar{u}| |\bar{u}'| + \rho^{-1} p' \right) = F(\alpha),$$

если определены  $\bar{u}(\alpha), \rho(\alpha), p(\alpha), F(\alpha)$ .

Рассматривается другой пример частично инвариантного решения для всей допускаемой алгебры  $L_{11}$ . Имеется только два инварианта  $\rho, p$ . Изобарические течения  $p = \text{const}$  есть частично инвариантные решения ранга ноль дефекта 4. Уравнения газовой динамики становятся переопределенной системой для лишних функций

$$D\rho = 0, \quad D\bar{u} = 0, \quad \text{div}\bar{u} = 0. \quad (9.4)$$

Для описания таких движений удобно ввести лагранжевы переменные (1.2)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}|_{t=0} = \bar{\xi}. \quad (9.5)$$

Тогда определяются все искомые функции

$$\rho = \rho(\bar{\xi}), \quad \bar{u} = \bar{u}(\bar{\xi}), \quad \bar{x} = \bar{\xi} + t\bar{u}(\bar{\xi}), \quad (9.6)$$

а последнее уравнение системы (9.4) в силу равенств (3.2), (9.6) принимает вид

$$1 = \det \left( I + t \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} \right) = 1 + t \text{tr} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + t^2 \text{tr} \left( \det \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} \right)^{-1} \right) + t^3 \det \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}},$$

где  $I$  – единичная матрица. Отсюда следуют три уравнения для начальных скоростей, которые в декартовой системе координат таковы

$$\begin{aligned}
 u_{\xi} + v_{\eta} + w_{\zeta} &= 0, \\
 \begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\eta} \\ v_{\xi} & v_{\eta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\zeta} \\ w_{\xi} & w_{\zeta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{\eta} & v_{\zeta} \\ w_{\eta} & w_{\zeta} \end{vmatrix} &= 0, \\
 \begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\eta} & u_{\zeta} \\ v_{\xi} & v_{\eta} & v_{\zeta} \\ w_{\xi} & w_{\eta} & w_{\zeta} \end{vmatrix} &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Для системы (9.7) найдено общее решение (Л.В. Овсянников. Изобарические движения газа. Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30, № 10. С.1792-1799). Пусть  $r_* = \text{rank} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}$ .

**Теорема 2.** Любое решение системы (9.7) принадлежит одному из трех классов:  $r_* = 0$  – постоянное решение,  $r_* = 1$  – простая волна,  $r_* = 2$  – двойная волна.

Поверхности уровня простой волны есть цилиндрические поверхности в  $\mathbb{R}^3(\vec{\xi})$ . Линии уровня двойной волны есть плоские кривые второго порядка.

Решения типа простой волны зависят от двух произвольных функций одного переменного и одной произвольной функции двух переменных. Решения типа двойных волн зависят от трех произвольных функций двух переменных.

**Доказательство.** Если  $r_* = 0$ , то  $\bar{u} = \text{const}$ . Если  $r_* = 1$ , то  $\bar{u} = \bar{u}(\alpha(\vec{\xi}))$  – простая волна. Подстановка в (9.7) дает

$$\bar{u}'(\alpha) \cdot \nabla \alpha = 0, \tag{9.8}$$

т.е. поверхность  $\alpha = \text{const}$  есть цилиндр с образующей параллельной вектору  $\vec{u}'(\alpha)$ . Общее решение (9.8) можно представить в виде:  
 $\alpha = u, v = v(u), w = w(u);$

$$\zeta = \xi w' + \varphi(u, \eta - v' \xi),$$

где  $v, w, \varphi$  – произвольные функции своих аргументов.

Если  $r_* = 2$ , то  $\vec{u} = \vec{u}(\alpha, \beta)$  – двойная волна. Подстановка в (9.7) дает

$$\vec{u}_\alpha \cdot \nabla \alpha + \vec{u}_\beta \cdot \nabla \beta = 0, \quad (9.9)$$

$$(\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta) \cdot (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = 0. \quad (9.10)$$

Двойную волну можно задать равенством  $f(u, v, w) = 0$ ,

$f(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta)) = 0$ . Отсюда следуют равенства

$$\nabla_{\vec{u}} f \cdot \vec{u}_\alpha = 0, \quad \nabla_{\vec{u}} f \cdot \vec{u}_\beta = 0, \quad \nabla_{\vec{u}} f = m(\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta)$$

с некоторым множителем  $m \neq 0$ . Для линий уровня  $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$  имеем  $\nabla \alpha \cdot d\vec{\xi} = 0, \nabla \beta \cdot d\vec{\xi} = 0, d\vec{\xi} = n(\nabla \alpha \times \nabla \beta)$ , с некоторым множителем  $n \neq 0$ . В силу (9.10) имеем  $\nabla_{\vec{u}} f \cdot d\vec{\xi} = 0$ , и после интегрирования вдоль линии тока получаем

$$\vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{u}} f = g(\vec{u}), \quad (9.11)$$

т.е. линии уровня есть плоские кривые в  $R^3(\vec{\xi})$ .

Дифференцирование (9.11) по  $\vec{\xi}$  дает

$$\nabla_{\vec{u}} f + (\vec{A} \cdot \vec{u}_\alpha) \nabla \alpha + (\vec{A} \cdot \vec{u}_\beta) \nabla \beta = 0,$$

где  $\vec{A} = \vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{u}}^2 f - \nabla_{\vec{u}} g, \nabla_{\vec{u}}^2 f$  – матрица из вторых производных.

Скалярное умножение на  $\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta$  с учетом (9.9) дает  $\vec{B} \cdot \nabla \alpha = \vec{B} \cdot \nabla \beta = 0$ ,

$$\vec{B} = -(\vec{A} \cdot \vec{u}_\alpha) \vec{u}_\beta + (\vec{A} \cdot \vec{u}_\beta) \vec{u}_\alpha = \vec{A} \times (\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta). \text{ Отсюда } \vec{B} = l(\nabla \alpha \times \nabla \beta) \text{ с}$$

некоторым множителем  $l \neq 0$  и  $d\vec{\xi} \times \vec{B} = 0$ . Так как



$$d\vec{\xi} \times \vec{B} = d\vec{\xi} \times (\vec{A} \times (\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta)) = \vec{A}(d\vec{\xi} \cdot (\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta)) - (\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta)(d\vec{\xi} \cdot \vec{A}) =$$

$$= -(\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta)(\vec{A} \cdot d\vec{\xi}), \text{ то } \vec{A} \cdot d\vec{\xi} = 0. \text{ Интегрирование вдоль линии уровня да-}$$
 ет равенство

$$\vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{u}}^2 f \cdot \vec{\xi} - 2\vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{u}} g = h(\vec{u}), \quad (9.12)$$

которое показывает, что линии уровня есть плоские кривые второго порядка.

Пусть  $f = \varphi(u, v) - w, \alpha = u, \beta = v$ , тогда (9.11), (9.12) задают общее решение уравнений (9.7)

$$\xi\varphi_u + \eta\varphi_v - \zeta = g(u, v), \quad (9.13)$$

$$\xi^2\varphi_{uu} + 2\xi\eta\varphi_{uv} + \eta^2\varphi_{vv} - 2\xi g_u - 2\eta g_v = h(u, v),$$

зависящее от трех произвольных функций.

Упражнение 1. Записать уравнения (9.7) в полярных координатах, связанных с цилиндрическими формулами  $V = Q \cos \varphi, \quad W = Q \sin \varphi,$

$$\varphi = \psi - \theta; \quad r|_{t=t_0} = R, \quad \theta|_{t=t_0} = \vartheta, \quad x|_{t=t_0} = \xi.$$

Упражнение 2. Вывести представление решения (9.7) для  $r_* = 0, 1, 2$  в полярной системе координат:

$$r_* = 0: \quad U = u_0, \quad V = v_0 \cos \vartheta + w_0 \sin \vartheta, \quad W = -v_0 \sin \vartheta + w_0 \cos \vartheta;$$

$$r_* = 1: \quad \xi(Q'^2 + Q^2\psi'^2)^{1/2} = R \sin(\mu - \psi + \vartheta) + \varphi(U, R \cos(\mu - \psi + \vartheta)),$$

где  $\operatorname{tg} \mu = Q'(Q\psi')^{-1}, \quad Q(U), \psi(U), \varphi$  – произвольные функции;

$$r_* = 2: \quad U = \varphi(Q, \psi), \quad \xi - R \cos(\psi - \vartheta)\varphi_Q + RQ^{-1}\varphi_\psi \sin(\psi - \vartheta) = g(Q, \psi);$$

$$- R^2 \cos^2(\psi - \vartheta)\varphi_{QQ} - R^2Q^{-2} \sin^2(\psi - \vartheta)\varphi_{\psi\psi} + R^2Q^{-1} \sin 2(\psi - \vartheta)\varphi_{Q\psi} -$$

$$- R^2Q^{-1} \sin^2(\psi - \vartheta)\varphi_Q - R^2Q^{-2} \sin 2(\psi - \vartheta)\varphi_\psi - 2R \cos(\psi - \vartheta)g_Q +$$

$$+ 2RQ^{-1} \sin(\psi - \vartheta)g_\psi = h(Q, \psi).$$

### **§10. Дифференциально инвариантные подмодели.**

Для подгрупп большей размерности точечных инвариантов становится мало, для того чтобы существовало представление конструктивно вычисляемого группового решения. Число инвариантов можно увеличить с помощью продолжения операторов подалгебры на производные по формулам (7.6). Такие инварианты называются **дифференциальными**. Для любой алгебры операторов существует **базис** дифференциальных инвариантов, из которого все остальные получаются с помощью операторов инвариантного дифференцирования и функциональными операциями [6, стр. 319].

Уравнения газовой динамики записываются через дифференциальные инварианты базиса, тем самым определяются независимые инварианты базиса.

**Дифференциально инвариантной подмоделью** ранга  $r + r_1$  называется представление уравнений газовой динамики как многообразие размерности  $r + r_1$  в пространстве независимых дифференциальных инвариантов, проекция которого в пространство инвариантов нулевого порядка имеет размерность  $r$ .

Величина  $r$  ограничена сверху числом независимых переменных и ограничена снизу числом инвариантов, зависящих только от независимых переменных. Величина  $r_1$  ограничена сверху числом независимых дифференциальных инвариантов базиса.

Для каждой подалгебры из оптимальной системы можно рассмотреть более общее определение дифференциально – инвариантных решений: дополнительные соотношения на дифференциальные инварианты. Эти соотношения называют инвариантными дифференциальными связями.

Рассматривается известный пример такого представления.

Нетрудно проверить, что векторное уравнение

$$\operatorname{rot} \bar{u} = 0 \text{ (или } \bar{\omega} = 0) \quad (10.1)$$

инвариантно относительно всей алгебры  $L_{11}$ , продолженной на производные. Оно может быть записано через дифференциальные инварианты. Движения газа, удовлетворяющие (10.1), называются **безвихревыми**. Из анализа известно, что (10.1) равносильно существованию **потенциала**  $\varphi = \varphi(\bar{x}, t)$ :

$$\bar{u} = \nabla\varphi, \quad (10.2)$$

поэтому безвихревое движение называют также **потенциальным**.

**Лемма.** При непрерывном безвихревом движении нормального газа выполняется соотношение

$$\nabla\rho \times \nabla S = 0. \quad (10.3)$$

**Доказательство.** Из уравнения (3.14) для вихря

$$D\bar{\omega} = (\bar{\omega} \cdot \nabla)\bar{u} - \bar{\omega} \operatorname{div} \bar{u} + \rho^{-2} \nabla\rho \times \nabla\rho$$

в силу равенства  $\nabla\rho = a^2 \nabla\rho + f_S \nabla S$  при  $\bar{\omega} = 0$  получается (10.3).

Если движение газа баротропно  $p = p(\rho)$ , непрерывно и в начальный момент безвихревое, то оно будет безвихревым во все моменты времени.

Для безвихревого изэнтропического движения уравнение импульсов интегрируется. Действительно,  $S = \text{const}$  из (2.2) следует  $dp = \rho di$  или  $\nabla p = \rho \nabla i$ . Уравнение (3.13) принимает вид  $\nabla \left( \varphi_t + \frac{1}{2} |\bar{u}|^2 + i \right) = 0$ . Отсюда

получается **интеграл Коши - Лагранжа**

$$\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + i(\rho) = b(t). \quad (10.4)$$

Без ограничения общности  $b(t)$  можно считать равным нулю. Вместе с уравнением неразрывности получается замкнутая подмодель

$$D\rho = \rho_t + \nabla\varphi \cdot \nabla\rho = -\rho \Delta\varphi, \quad (10.5)$$

где  $\Delta\varphi = \operatorname{div} \nabla\varphi$  – оператор Лапласа.

Из (10.4), (10.5) исключается  $\rho$ ; получается квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$D\left(\varphi_t + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right) - a^2(\rho)\Delta\varphi = 0,$$

где  $\rho$  должно быть найдено из (10.4),  $D = \partial_t + \nabla\varphi \cdot \nabla$ .

В декартовой системе координат имеем

$$\begin{aligned} &\varphi_{tt} + 2\varphi_x\varphi_{xt} + 2\varphi_y\varphi_{yt} + 2\varphi_z\varphi_{zt} + (\varphi_x^2 - a^2)\varphi_{xx} + (\varphi_y^2 - a^2)\varphi_{yy} + \\ &+ (\varphi_z^2 - a^2)\varphi_{zz} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + 2\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} + 2\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) имеет только две звуковые характеристики. Следовательно, в потенциальном движении слабый разрыв распространяется только по звуковым характеристикам, а на поверхностях из линий тока всякий слабый разрыв есть контактный разрыв.

Для установившегося потенциального течения интеграл Коши-Лагранжа (10.4) совпадает с интегралом Бернулли (8.8)

$$|\nabla\varphi|^2 + I(a^2) = q_m^2, \quad (10.7)$$

где  $q_m$  не зависит от линий тока. Из (10.6) получим

$$\begin{aligned} &(u^2 - a^2)\varphi_{xx} + (v^2 - a^2)\varphi_{yy} + (w^2 - a^2)\varphi_{zz} + \\ &+ 2uv\varphi_{xy} + 2uw\varphi_{xz} + 2vw\varphi_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Характеристическая квадратичная форма для единичного нормального вектора имеет вид:  $(\vec{\xi} \cdot \nabla\varphi)^2 - a^2$ . Так как  $|\vec{u}| \geq |\vec{\xi} \cdot \nabla\varphi|$ , то в области течения с дозвуковыми скоростями уравнение (10.8) имеет эллиптический тип. Если  $|\vec{u}| > a$ , то квадратичная форма разлагается на два действительных множителя, т.е. (10.8) имеет гиперболический тип. В области течения с трансзвуковыми скоростями  $M = \frac{|\vec{u}|}{a} \sim 1$  уравнение (10.8) имеет смешанный эллиптико - гиперболический тип.

Уравнения газовой динамики вместе с (10.1) допускают  $L_{11}$ . Значит, уравнение (10.6) допускает аналог  $L_{11}$ , записанный для производных от функции  $\varphi$  (это алгебра контактных преобразований). Уравнения (10.8) допускают аналог нормализатора алгебры  $X_{10}$  из оптимальной системы, т.е. подалгебру 8.1, записанную в переменных  $x, y, z$ .

На группе вращений рассматривается особое инвариантное решение с представлением вида

$$\nabla\varphi = \bar{u} = \frac{\bar{x}}{r} \psi(r), \quad r = |\bar{x}|.$$

Подстановка в (10.8) и (10.7) дает  $\frac{\psi d\psi}{a^2} = 2 \frac{dr}{r} + \frac{d\psi}{\psi}$ ,

$$\psi^2 + I(a^2) = q_m^2. \quad (10.9)$$

Подстановка в первое равенство дифференциала второго равенства  $d\psi^2 + 2a^2\rho^{-1}d\rho = 0$  и интегрирование дает

$$\rho\psi r^2 = Q = \text{const} > 0, \quad (10.10)$$

где  $4\pi Q$  есть **расход** газа через сферу радиуса  $r$ .

Итак, имеется два интеграла (10.9), (10.10) для описания движения. Для конечных значений  $\rho$  и  $\psi$  из (10.10) следует, что  $r \geq r_*$ . Минимум

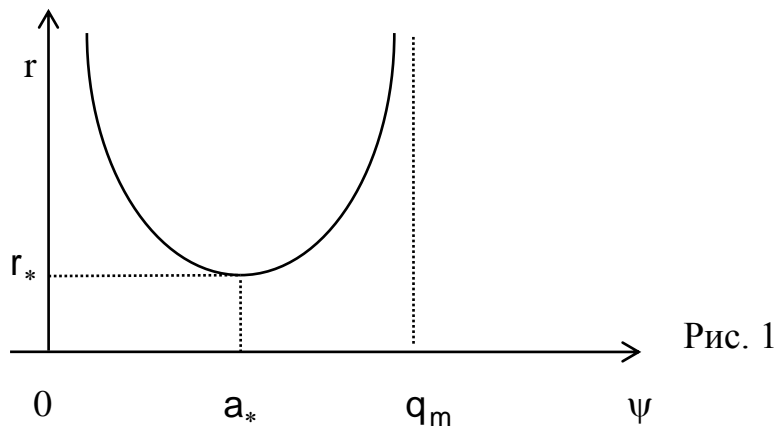
$$r_* = (Q/\rho_* a_*)^{1/2} \text{ вычисляется у функции } r^4 = Q^2 \rho^{-2} \left( q_m^2 - 2 \int_0^\rho a^2 \rho^{-1} d\rho \right)^{-1},$$

достигается для критической скорости при  $a = a_* = |\vec{u}|$  и равен

$$r_* = (Q/\rho_* a_*)^{1/2}. \text{ При } r \rightarrow \infty \text{ либо } \psi \rightarrow 0, \text{ либо } \rho \rightarrow 0 \text{ при этом } \psi \rightarrow q_m \text{ (Рис. 1).}$$

Таким образом, при  $\psi > 0, Q > 0$  ( $\psi < 0, Q < 0$ ) получаются два возможных неточечных звуковых источника (стока).

В случае  $0 < \psi \leq a_*$  течение вне источника (стока) дозвуковое, в случае  $a_* \leq \psi < q_m$  течение сверхзвуковое.



Ускорение частицы в рассматриваемом радиальном течении вычисляется по формуле  $\bar{a} = \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} = \bar{x} r^{-1} \psi \psi' = 2\bar{x} r^{-2} \psi^2 a^2 (\psi^2 - a^2)^{-1}$ . При  $r \rightarrow r_*$  получаем  $a \rightarrow a_*$ ,  $\bar{a} \rightarrow \infty$ .

Таким образом, течение двулистно и происходит с дозвукового листа на сверхзвуковой лист через звуковую сферу  $r = r_*$  с бесконечным ускорением. Поверхность, на которой ускорение бесконечно, называется **предельной поверхностью** и физически реализоваться не может. До ее появления в течении образуется поверхность слабого или сильного разрыва, по которой примыкает другое решение уравнений газовой динамики или какой-то другой модели.

Другой пример дифференциально - инвариантного решения есть движение газа с не изменяющимся объемом  $J_t = 0$  или  $div \bar{u} = 0$  (см. (3.2)). Это уравнение инвариантно относительно всей алгебры  $L_{11}$ .

Из уравнений газовой динамики и закона (2.2) следует

$$Di = 0, D\bar{u} + \nabla i = 0.$$

Эта переопределенная подмодель **изохорических движений** не приведена в инволюцию.

Упражнение 1. Продолжить операторы алгебры  $L_{11}$  на производные.

Упражнение 2. Проверить инвариантность относительно  $L_{11}$  равенств  $\operatorname{rot} \bar{u} = 0, \operatorname{div} \bar{u} = 0$ .

Упражнение 3. Построить решение уравнений газовой динамики с  $\operatorname{div} \bar{u} = 0$ .

Упражнение 4. Построить все инвариантные подмодели ранга 2 для уравнения (10.6).

Упражнение 5. Вычислить характеристическую квадратичную форму для уравнения (10.8).

### ***§11. Приближенные подмодели.***

Оптимальная система подалгебр позволяет строить множество точных решений уравнений газовой динамики, а также конструировать подмодели. На практике часто необходимо рассмотреть близкие к точным решения или более подробно выяснить поведение решений подмодели в малых областях особых многообразий. В обоих случаях в уравнениях газовой динамики или ее подмоделях вводится малый параметр. Формальное введение малого параметра может осуществляться с помощью некоторой группы преобразований, не допускаемой исходными уравнениями.

Если малый параметр ввели в систему, то далее производится асимптотическое разложение решений по этому параметру. Члены наименьшего порядка образуют приближенную подмодель. Основная трудность состоит в оценке младших членов, что сделано лишь в редких случаях простейших краевых задач.

1°. Наиболее часто встречающийся приближенный метод есть линеаризация на точном решении. Пусть

$$\bar{u} = \bar{u}_0(\bar{x}, t), \rho = \rho_0(\bar{x}, t), p = p_0(\bar{x}, t), S = S_0(\bar{x}, t) \quad (11.1)$$

есть решение уравнений газовой динамики.

Разыскивается другое решение вида

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \delta \bar{u}', \rho = \rho_0 + \delta \rho', \rho = \rho_0 + \delta \rho', \mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \delta \mathbf{S}', \quad (11.2)$$

где  $\delta$  – малый параметр,  $\bar{u}', \rho', \rho', \mathbf{S}'$  – новые неизвестные функции переменных  $t, \bar{x}, \delta$ .

Подстановка (11.2) в (3.5), (3.6), (3.8) и в уравнение состояния, сокращение на общий множитель дает

$$\begin{aligned} D_0 \rho' + \bar{u}' \cdot \nabla \rho_0 + \rho' \operatorname{div} \bar{u}_0 + \rho_0 \operatorname{div} \bar{u}' + \delta \bar{u}' \cdot \nabla \rho' + \delta \rho' \operatorname{div} \bar{u}' &= 0, \\ D_0 \bar{u}' + \bar{u}' \cdot \nabla \bar{u}_0 + (\rho_0 + \delta \rho')^{-1} (\rho' \rho_0^{-1} \nabla \rho_0 + \nabla \rho') + \delta (\bar{u}' \cdot \nabla) \bar{u}' &= 0, \\ D_0 \mathbf{S}' + \bar{u}' \cdot \nabla \mathbf{S}_0 + \delta \bar{u}' \cdot \nabla \mathbf{S}' &= 0, \\ \rho' &= \delta^{-1} (f(\rho_0 + \delta \rho', \mathbf{S}_0 + \delta \mathbf{S}') - f(\rho_0, \mathbf{S}_0)), \end{aligned} \quad (11.3)$$

где  $D_0 = \partial_t + \bar{u}_0 \cdot \nabla$ .

Основное предположение, обоснование которого делает законным процесс линеаризации, заключается в следующем. Функции  $\bar{u}', \rho', \rho', \mathbf{S}'$ , как решения точных уравнений (11.3), их производные имеют конечные предельные значения при  $\delta \rightarrow 0$ :  $\bar{u}'(t, \bar{x}, \delta) \rightarrow \bar{u}(t, \bar{x})$ ,  $\rho'(t, \bar{x}, \delta) \rightarrow \rho(t, \bar{x})$ ,  $\mathbf{S}'(t, \bar{x}, \delta) \rightarrow \mathbf{S}(t, \bar{x})$ . Если предположение оправдано, то предельный переход в (11.3) дает уравнения для **возмущений** основного движения

$$\begin{aligned} D_0 \rho + \rho \operatorname{div} \bar{u}_0 + \bar{u} \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \\ D_0 \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}_0 + \rho_0^{-1} \nabla p - \rho_0^{-2} \rho \nabla p_0 &= 0, \\ D_0 \mathbf{S} + \bar{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_0 = 0, p = a_0^2 \rho + f_{S_0} \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

где  $f_{S_0} = f_S(\rho_0, \mathbf{S}_0)$ ,  $a_0^2 = f_\rho(\rho_0, \mathbf{S}_0)$  – квадрат скорости звука основного движения. Приближенная подмодель (11.4) является линейной системой для предельных возмущений.

Рассмотрим пример **постоянного** основного решения  $\bar{u}_0 = 0, \rho_0, \rho_0, \mathbf{S}_0$  – постоянные.



Система (11.4) принимает вид **уравнений акустики**

$$\begin{aligned} \rho_t + u_0 \cdot \nabla \rho + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \vec{u}_t + (u_0 \cdot \nabla) \vec{u} + \rho_0^{-1} \nabla p = 0, \\ S_t + u_0 \cdot \nabla S &= 0, p = a_0^2 \rho + f_{S_0} S \end{aligned} \quad (11.5)$$

Замена  $\vec{y} = \vec{x} - t\vec{u}_0$  приводит к покою ( $\vec{u}_0 = 0$ ):

$$\rho_t + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} = 0, \vec{u}_t + \rho_0^{-1} \nabla p = 0, S_t = 0, p = a_0^2 \rho + f_{S_0} S.$$

Замена плотности приводит к нулевой энтропии. Отсюда следует волновое уравнения для давления

$$p_{tt} = a_0^2 \Delta p, \quad (11.6)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. Уравнению (11.6) удовлетворяет плотность  $\rho$ , а для скорости  $\vec{u}$  имеется система уравнений

$$\vec{u}_{tt} = a_0^2 \nabla \operatorname{div} \vec{u}.$$

В потенциальном случае  $\vec{u} = \nabla \varphi$  скорости и потенциал скорости удовлетворяют уравнению (11.6).

2°. Рассматриваются изоэнтропические безвихревые установившиеся движения, описываемые интегралом Бернулли (10.7) и уравнением для потенциала скоростей (10.8). **Околозвуковое приближение** описывает малые возмущения звукового потока

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_*, \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_*. \quad (11.7)$$

Линеаризация на решении (11.7) дает неудовлетворительную приближенную модель. Правильное описание возмущений получится, если сделать следующую замену переменных

$$\mathbf{x} = \delta^{1+k} \mathbf{x}', \mathbf{y} = \delta^k \mathbf{y}', \mathbf{z} = \delta^k \mathbf{z}', \varphi = \mathbf{a}_* \mathbf{x} + \delta^{3+k} \varphi', \mathbf{a} = \mathbf{a}_* + \delta^2 \mathbf{a}' \quad (11.8)$$

при любом выборе значения параметра  $k$ .

Подстановка (11.8) в интеграл Бернулли (10.7) и уравнения потенциала (10.8) приводит к равенствам

$$m_* \varphi'_{\mathbf{x}'} + 2\mathbf{a}' = O(\delta^2), \text{ где } m_* = \rho_* f_{\rho\rho}(\rho_*) f_{\rho}^{-1}(\rho_*);$$

$$2a_*^{-1}(\varphi'_{x'} - a')\varphi'_{x'x'} - \varphi'_{y'y'} - \varphi'_{z'z'} = O(\delta^2).$$

Предполагается, что функции  $\varphi'_{x'}$ ,  $\varphi'_{y'}$ ,  $\varphi'_{z'}$ ,  $a'$  как решения соответствующих точных уравнений, их производные при фиксированных конечных значениях переменных  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  имеют конечные предельные значения при  $\delta \rightarrow 0$ .

Предельный переход в последних равенствах дает подмодель околосвукового приближения

$$a_*^{-1}(2 + m_*)\varphi'_{x'}\varphi'_{x'x'} - \varphi'_{y'y'} - \varphi'_{z'z'} = 0. \quad (11.9)$$

3°. При установившемся обтекании тонких тел, движущихся с большими сверхзвуковыми скоростями, делают **гиперзвуковое приближение**. Так как уравнения газовой динамики допускают преобразования Галилея 4° из  $G_{11}$  (§ 1), то можно считать, что тело покоится, а на него набегают гиперзвуковой поток.

Основное постоянное течение таково:

$$u = u_1, \quad v = w = 0, \quad a = a_1,$$

где  $\delta = a_1 u_1^{-1}$  – малый параметр. Правильное описание возмущений гиперзвукового потока получается при следующей замене переменных

$$x = x', \quad y = \delta y', \quad z = \delta z', \quad u = u_1 + \delta^2 u', \quad v = \delta v', \quad w = \delta w', \quad p = \delta^2 p', \quad \rho = \rho', \quad S = S'.$$

Подстановка в подмодель 1.10 стационарных движений газа (§ 8) дает

$$(u_1 + \delta^2 u')u'_{x'} + v'u'_{y'} + w'u'_{z'} + \rho'^{-1}p'_{x'} = 0,$$

$$(u_1 + \delta^2 u')v'_{x'} + v'v'_{y'} + w'v'_{z'} + \rho'^{-1}p'_{y'} = 0,$$

$$(u_1 + \delta^2 u')w'_{x'} + v'w'_{y'} + w'w'_{z'} + \rho'^{-1}p'_{z'} = 0,$$

$$(u_1 + \delta^2 u')\rho'_{x'} + v'\rho'_{y'} + w'\rho'_{z'} + \rho'(\delta^2 u'_{x'} + v'_{y'} + w'_{z'}) = 0,$$

$$(u_1 + \delta^2 u')S'_{x'} + v'S'_{y'} + w'S'_{z'} = 0.$$

Предполагается, что  $u', v', w', \rho', \rho', S'$  и их производные по  $x', y', z'$  имеют при фиксированных конечных значениях переменных  $x', y', z'$  конечные предельные значения при  $\delta \rightarrow 0$ . В результате предельного перехода получается подмодель гиперзвукового приближения

$$\begin{aligned}
u_1 u'_{x'} + v' u'_{y'} + w' u'_{z'} + \rho'^{-1} \rho'_{x'} &= 0, \\
u_1 v'_{x'} + v' v'_{y'} + w' v'_{z'} + \rho'^{-1} \rho'_{y'} &= 0, \\
u_1 w'_{x'} + v' w'_{y'} + w' w'_{z'} + \rho'^{-1} \rho'_{z'} &= 0, \\
u_1 \rho'_{x'} + (\rho' v')_{y'} + (\rho' w')_{z'} &= 0, \\
u_1 S'_{x'} + v' S'_{y'} + w' S'_{z'} &= 0.
\end{aligned} \tag{11.10}$$

Пусть поверхность тонкого тела задана уравнением  $\delta F(x', y', z') = 0$ .

Тогда на этой поверхности выполняется условие обтекания

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = 0, \tag{11.11}$$

где внешняя нормаль

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \left( \delta^2 F_{x'}^2 + F_{y'}^2 + F_{z'}^2 \right)^{-1/2} \left( \bar{i} \delta F_{x'} + \bar{j} F_{y'} + \bar{k} F_{z'} \right) = \bar{n}' - \bar{i} \delta u_1^{-1} D + O(\delta^2), \\
\bar{n}' &= \left( F_{y'}^2 + F_{z'}^2 \right)^{-1/2} \left( \bar{j} F_{y'} + \bar{k} F_{z'} \right), D = -u_1 F_{x'} \left( F_{y'}^2 + F_{z'}^2 \right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Подстановка в (11.11) и предельный переход дает приближенное условие обтекания для системы (11.10)

$$u_1 F_{x'} + v' F_{y'} + w' F_{z'} = 0 \text{ при } F(x', y', z') = 0. \tag{11.12}$$

Если ввести переменную  $x' u_1^{-1} = t$ , то система (11.10) без первого уравнения становится подмоделью 1.13 двумерных движений газа, а условие обтекания (11.12) есть условие не протекания газа сквозь контур  $F(u_1 t, y', z') = 0$  в плоскости  $y', z'$ , представляющей собой сечение обтекаемого тела плоскостью  $x = u_1 t$ .

Упражнение 1. Вывести условие сильных разрывов для подмодели (11.10).

Упражнение 2. Провести вывод подмодели околосвуковых приближений (11.9).

Упражнение 3. Найти алгебру Ли, допускаемую подмоделью (11.9).

Упражнение 4. Для уравнений в новых штрихованных переменных провести асимптотическое разложение, представив решение в виде ряда по неотрицательным степеням малого параметра.

Упражнение 5. Провести линеаризацию уравнений газовой динамики на решении (11.7).

## **§ 12. Нестационарное одномерное движение.**

1°. Инвариантные подмодели ранга два получаются при рассмотрении двумерных подалгебр. В оптимальной системе 27 классов неподобных подалгебр. Рассмотрим лишь некоторые из них.

Так же как для инвариантных подмоделей ранга 3 для двумерных подалгебр инварианты можно выбрать так, что подмодель будет иметь одну из двух форм: **эволюционный тип**

$$\begin{aligned}
 u_{1t} + u_1 u_{1x_1} + bR^{-1}P_{x_1} &= a_1, \\
 v_{1t} + u_1 v_{1x_1} &= a_2, \\
 w_{1t} + u_1 w_{1x_1} &= a_3, \\
 R_t + u_1 R_{x_1} + Ru_{1x} &= Ra_4, \\
 P_t + u_1 P_{x_1} + A(R, P)u_{1x} &= a_5,
 \end{aligned}
 \tag{12.1}$$

где  $b(t, x_1) > 0$ ,  $a_i$  – линейные или квадратичные функции по переменным  $u_1, v_1, w_1$ ; **стационарный тип**

$$\begin{aligned}
u_1 u_{1x_1} + v_1 u_{1y_1} + b_1 R^{-1} P_{x_1} &= a_1, \\
u_1 v_{1x_1} + v_1 v_{1y_1} + b_2 R^{-1} P_{y_1} &= a_2, \\
u_1 w_{1x_1} + v_1 w_{1y_1} &= a_3, \\
u_1 R_{x_1} + v_1 R_{y_1} + R(u_{1x_1} + v_{1y_1}) &= R a_4, \\
u_1 P_{x_1} + v_1 P_{y_1} + A(R, P)(u_{1x_1} + v_{1y_1}) &= a_5,
\end{aligned} \tag{12.2}$$

где  $b_i(x_1, y_1) > 0$ ,  $a_i$  – линейные или квадратичные функции по переменным  $u_1, v_1, w_1$ .

Системы (12.1), (12.2) записываются в симметрическом виде так же, как это было сделано в § 3. Система (12.1) всегда гиперболическая. Область гиперболичности для решения системы (12.2) определяется неравенством

$$b_1^{-1} u_1^2 + b_2^{-1} v_1^2 > a^2 \tag{12.3}$$

Доказательство такое же как теоремы 1 из § 8.

Подалгебра 2.27 задает подмодель нестационарных одномерных движений эволюционного типа (12.1) с  $b = 1, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ . Второе и третье уравнения системы отщепляется, т.е. могут быть рассмотрены после нахождения решения остальных уравнений.

Подалгебра 2.11 задает подмодель вращательных движений. В цилиндрических координатах представление решения таково

$U = v_1 + \beta\theta, V = u_1, W = w_1, \rho = P, \rho = R$ , где функции  $u_1, v_1, w_1, P, R$  зависят от  $t, x_1 = r, \beta$  – алгебраический параметр. Получается система эволюционного типа (12.1) с  $b = 1, a_1 = r^{-1} w_1^2, a_2 = -\beta r^{-1} w_1, a_3 = -r^{-1} u_1 w_1, a_4 = -r^{-1} u_1, a_5 = A a_4$ . Второе уравнение отщепляется, а вместо третьего можно получить **интеграл закрутки**

$$r w_1 = \chi(S), \tag{12.4}$$

где  $\chi$  – произвольная функция.

Подалгебра 3.1 имеет инварианты  $t, r = |\vec{x}|, \rho, p$  и инвариантное многообразие  $\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z}$ , которые задают особое инвариантное решение вида

$$\vec{u} = \vec{x}r^{-1}u_1(t, r), p = P(t, r), \rho = R(t, r). \quad (12.5)$$

Подстановка (12.5) в уравнения газовой динамики (3.5), (3.6), (3.9) приводит к подмодели **сферических движений**

$$\begin{aligned} u_{1t} + u_1 u_{1r} + \rho^{-1} p_r &= 0, \\ \rho_t + u_1 \rho_r + \rho(u_{1r} + v r^{-1} u_1) &= 0, \\ p_t + u_1 p_r + \rho a^2(u_{1r} + v r^{-1} u_1) &= 0, \end{aligned} \quad (12.6)$$

где  $v = 2$ . Если в (12.6)  $v = 1$ , то получается подмодель **вращательных движений** без отщепленных уравнений и при  $\chi = 0$ . При  $v = 0$  получается подмодель **нестационарных одномерных движений** без отщепленных уравнений. Далее в системе (12.6) индекс "1" опускаем и назовем ее уравнениями одномерных движений с плоскими ( $v = 0$ ), цилиндрическими ( $v = 1$ ) и сферическими ( $v = 2$ ) волнами.

2°. Характеристическая матрица системы (12.6) имеет вид

$$A(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \chi & 0 & \rho^{-1} \xi \\ \rho \xi & \chi & 0 \\ \rho a^2 \xi & 0 & \chi \end{pmatrix}, \text{ где } \chi = \tau + \xi u, \vec{\xi} = (\xi, \tau) - \text{характеристический вектор} \quad (\S 5).$$

Характеристическое уравнение  $\det A(\vec{\xi}) \equiv \chi(\chi^2 - a^2 \xi^2) = 0$  имеет три вещественных корня  $\chi = 0, \chi = \pm a \xi$ . Левые собственные векторы матрицы  $A(\vec{\xi})$  для них соответственно равны  $(0, -a^2, 1), (\mp \rho a, 0, 1)$ . Если характеристические линии разыскивать в виде  $h \equiv r - r(t) = 0$ , то их уравнения и условие на них таковы

$$\begin{aligned}
C_0: \quad r' &= u, \quad D_0\rho = a^2 D_0\rho \quad (\text{или } D_0S = 0), \\
C_+: \quad r' &= u + a, \quad D_+u + (\rho a)^{-1} D_+\rho = -vr^{-1}au, \\
C_-: \quad r' &= u - a, \quad D_-u - (\rho a)^{-1} D_-\rho = vr^{-1}au,
\end{aligned} \tag{12.7}$$

где  $D_0 = \partial_t + u\partial_r$ ,  $D_{\pm} = \partial_t + (u \pm a)\partial_r$ .

**Лемма.** Пусть для непрерывного движения  $\rho = 0$  в некоторой точке  $M$  ( $r \neq 0$  при  $v > 0$ ). Тогда  $\rho = 0$  вдоль всей траектории  $C_0(M)$ , проходящей через точку  $M$ .

**Доказательство.** Второе уравнение системы (12.6) записывается в виде обыкновенного дифференциального уравнения для  $\rho$  вдоль  $C_0$

$$D_0\rho + (u_r + vr^{-1}u)\rho = 0.$$

Это линейное однородное уравнение имеет непрерывный коэффициент. Интегрирования вдоль  $C_0$  с начальными данными  $\rho(M) = 0$  дает  $\rho(C_0(M)) = 0$  в силу единственности решения.

Аналогичное свойство справедливо для  $\rho$  и  $a$  в нормальном газе. Отсюда следует, что если какая-либо из величин  $\rho$ ,  $a$ ,  $r$  отлична от нуля в точке  $M$ , то все они не равны нулю вдоль линии  $C_0(M)$ . **Точкой вакуума** называют точку, в которой  $\rho = a = r = 0$ . Линия вакуума может быть только траектория  $C_0$ , которая сливается с характеристиками  $C_{\pm}$  (см.(12.7)).

В непрерывном движении через каждую точку  $M$  проходят три ха-

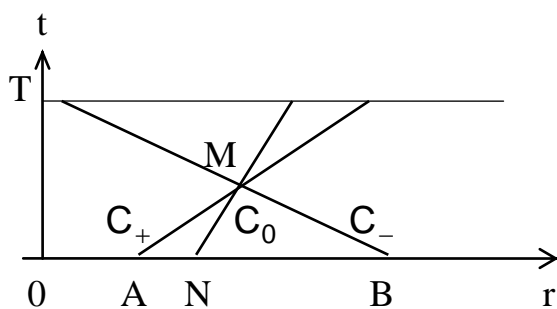


Рис. 1

актеристики, как показано на Рис. 1, если  $M$  не есть точка вакуума. Внутри характеристического треугольника  $AMB$  нет точек вакуума. Также как в § 6 доказывается теорема единственности гладкого

решения задачи Коши в характеристическом треугольнике.

3°. Система (12.6) сводится к одному квазилинейному уравнению второго порядка для лагранжевой координаты  $\xi(r, t)$ :  $\xi_t + u\xi_r = 0$ ,  $\xi_r \neq 0$ . В этом случае справедлив интеграл энтропии

$$S = S(\xi). \quad (12.8)$$

Дифференцирование по  $r$  дает  $D_0\xi_r + u_r\xi_r = 0$ . В силу второго уравнения (12.6) следует  $D_0(r^{-\nu}\rho^{-1}\xi_r) = 0$ . Значит,

$$\xi_r = r^\nu \rho \varphi(\xi), \quad \xi_t = -r^\nu u \rho \varphi(\xi). \quad (12.9)$$

На данном движении лагранжева координата  $\xi$  определена с точностью до взятия от нее произвольной монотонной функции. Если конкретизировать  $\varphi(\xi)$ , например,  $\varphi = 1$ , то  $\xi$  определена однозначно и называется **массовой лагранжевой координатой**. В этом случае из (12.9) находятся

$$\rho = r^{-\nu} \xi_r, \quad u = -\xi_t \xi_r^{-1}, \quad p = f(\rho, S). \quad (12.10)$$

Подстановка (12.10) в первое уравнение (12.6) дает универсальное уравнение возможных лагранжевых замен на каком-либо движении газа:

$$\xi_r^2 \xi_{tt} - 2\xi_r \xi_t \xi_{rt} + (\xi_t^2 - a^2 \xi_r^2) \xi_{rr} + \nu r^{-1} a^2 \xi_r^3 = \xi_r^3 f_S S'(\xi) r^\nu \quad (12.11)$$

Упражнение 1. Построить класс точных решений уравнений газовой динамики в случае политропного газа, положив  $\xi = rb(t)$  в уравнениях (12.11).

4°. Для изэнтропических непрерывных движений с плоскими волнами многие уравнения интегрируются. В этом случае  $r = x$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $\nu = 0$ ,  $S = S_0 = \text{const}$ ,

$$u_t + uu_x + \rho^{-1} a^2(\rho) \rho_x = 0, \quad (12.12)$$

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0.$$

Уравнения (12.7) для (12.12) принимают вид

$$C_+: \quad x' = u + a, \quad r = u + \sigma(a) = \text{const};$$

$$C_-: \quad x' = u - a, \quad l = u - \sigma(a) = \text{const},$$



где  $\sigma = \int_0^p \rho^{-1} a(\rho) d\rho$ ;  $r, l$  – инварианты Римана. Для нормального газа

$\sigma'(a) = 2f_\rho f_{\rho\rho}^{-1} \rho^{-1} = 2m^{-1} > 0$ , т.е.  $\sigma(a)$  монотонная функция имеет обратную  $\sigma^{(-1)}$ . Поэтому  $u$  и  $a$  выражаются через инварианты Римана

$$u = \frac{1}{2}(r + l), a = \sigma^{(-1)}\left(\frac{1}{2}(r - l)\right).$$

Так как  $D_+ r = 0, D_- l = 0$ , то система (12.12) записывается в инвариантах Римана

$$\begin{aligned} r_t + \left[ \frac{1}{2}(r + l) + \sigma^{(-1)}\left(\frac{1}{2}(r - l)\right) \right] r_x &= 0, \\ l_t + \left[ \frac{1}{2}(r + l) - \sigma^{(-1)}\left(\frac{1}{2}(r - l)\right) \right] l_x &= 0. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Результаты § 9 о простых волнах в рассматриваемом случае уточняются.

**Теорема 1.** В простой волне (решение не постоянно) один из инвариантов Римана  $r$  или  $l$  сохраняет постоянное значение в области течения. Если  $r = \text{const}$  ( $l = \text{const}$ ), то линии уровня являются прямолинейными характеристиками  $C_-$  ( $C_+$ ). Обратно если в некоторой области непостоянного течения один из инвариантов Римана постоянен, то движение в этой области есть простая волна.

**Доказательство.** В простой волне все функции зависят от одного параметра-функции  $\alpha = \alpha(x, t)$ , т.е.

$$r = r(\alpha), l = l(\alpha). \tag{12.14}$$

Подставка в (12.13) дает равенства  $r'(\alpha)D_+\alpha = 0, l'(\alpha)D_-\alpha = 0$ . Случаи  $r'(\alpha) = l'(\alpha) = 0$  и  $D_+\alpha = D_-\alpha = 0$  не годятся, так как приводят к постоянному решению.

Случай  $r'(\alpha) = 0, D_- \alpha = 0$  приводит к **r – волне**  $r = r_0 = \text{const}$  и вдоль  $C_-$   $\alpha = \text{const}$ , т.е. разность  $u$ -а – постоянна и уравнение характеристик интегрируется

$$x - (u - a)t = F(u), u + \sigma(a) = r_0, \quad (12.15)$$

где  $F$  - произвольная функция.

Случай  $l'(\alpha) = 0, D_+ \alpha = 0$  приводит к **l – волне**  $l = l_0 = \text{const}$  :

$$x - (u + a)t = G(u), u - \sigma(a) = l_0, \quad (12.16)$$

где  $G$  - произвольная функция.

Обратно, пусть  $l = \text{const}$  в области течения и  $r \neq \text{const}$ . Тогда  $u, a$  – функции от  $r$ , т.е. задают простую волну.

**Теорема 2.** Пусть в непрерывном движении есть характеристика  $C_+(C_-)$ , не являющаяся линией вакуума, и вдоль которой  $u, \rho, p$  постоянны. Тогда в окрестности этой характеристики движение является изэнтропическим и либо постоянным, либо простой l – волной (r – волной).

**Доказательство.** Пусть  $u, \rho, p$  постоянны вдоль  $C_+$ , значит,  $S = \text{const}$ . Так как  $C_+$  не есть линия вакуума, то пересекающие ее траектории  $C_0$  образуют область, в которой энтропия постоянна. Пересекающие  $C_+$  характеристики  $C_-$  образуют область, в которой  $l = \text{const}$ . Значит, в пересечении рассматриваемых областей течение либо постоянно, либо простая l – волна.

Простая r – волна (l – волна) называется **центрированной** в точке  $(x_0, t_0)$ , если все ее прямолинейные характеристики  $C_-(C_+)$  пересекаются в точке  $(x_0, t_0)$ . Из (12.15) и (12.16) получаются уравнения центрированной r – волны

$$u + \sigma(a) = r_0 = \text{const}, u - a = \frac{x - x_0}{t - t_0}; \quad (12.17)$$

и центрированной l – волны

$$u - \sigma(a) = l_0 = \text{const}, u + a = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \quad (12.18)$$

Центрированные простые волны дают пример решений с особенностью. Из (12.17), (12.18) следует, что основные величины не являются непрерывными в центре волны  $(x_0, t_0)$ , а область существования решения есть сектор, не содержащий прямой  $t = t_0$ .

Упражнение 2. С помощью центрированных волн решить задачу об истечении покоящегося газа в вакуум.

Простая волна называется **волной сжатия** (**волной разрежения**), если плотность  $\rho$  в частице со временем возрастает  $D_0\rho > 0$  (убывает  $D_0\rho < 0$ ).

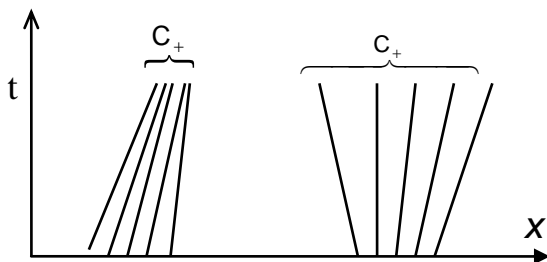
**Теорема 3.** Простая волна является волной сжатия (волной разрежения), если и только если для углового коэффициента  $k = u \pm a$  соответствующего семейства прямолинейных характеристик выполняется неравенство  $k_x < 0$  ( $k_x > 0$ ).

**Доказательство.** Для  $r$  – волны (l – волны) из (12.15) ((12.16)) имеем  $\rho u_x + a\rho_x = 0$  ( $\rho u_x - a\rho_x = 0$ ). Дифференцирование равенства  $a^2 = f_\rho$  по  $x$  дает  $a_x = -\frac{m}{2}u_x$  ( $a_x = \frac{m}{2}u_x$ ), где  $m = \rho f_\rho^{-1} f_{\rho\rho} > 0$  для нормального газа.

Отсюда  $k_x = \left(1 + \frac{1}{2}m\right)u_x$  и из уравнения неразрывности системы (12.12)

получим равенство

$$k_x = -\frac{m+2}{2\rho}D_0\rho, \text{ из которого следует утверждение теоремы.}$$



На Рис. 2 изображены вееры прямолинейных характеристик для l – волны сжатия и

разряжения. В волнах сжатия характеристики при некотором  $t_1$  пересекаются:  $k_x \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_1$ . Происходит неограниченный рост градиентов основных величин. Такое явление типично для нелинейных гиперболических уравнений и называется **градиентной катастрофой**. Оно может произойти в непрерывных движениях общего характера. В действительности такие особенности отсекаются сильными разрывами.

Упражнение 3. Вычислить время наступления градиентной катастрофы в простых волнах сжатия.

5°. Если инварианты Римана  $r = r(x, t), l = l(x, t)$  имеют ненулевой якобиан  $j = r_x l_t - r_t l_x \neq 0$ , то в (12.13) удобно поменять местами зависимые и независимые переменные, т.е. выразить  $x = x(r, l), t = t(r, l)$  (переход в плоскость инвариантов Римана). В силу (12.13)  $j = 2ar_x l_x$ . Якобиан  $j$  обращается в нуль либо при  $r_x = r_t = 0$  ( $r = r_0$ ), либо при  $l_x = l_t = 0$  ( $l = l_0$ ), либо  $r_x = r_t = l_x = l_t = 0$  ( $r = r_0, l = l_0$ ). Значит, прямым  $r = r_0; l = l_0$  и точке  $r = r_0, l = l_0$  в плоскости инвариантов Римана соответствует в пространстве  $R^2(x, t)$   $r$ -волна,  $l$ -волна и постоянное течение соответственно.

Так как вдоль  $C_+$  меняется только  $l$ , то уравнение характеристики  $C_+$ :  $dx = (u + a) dt$  равносильно уравнению  $x_l = (u + a)t_l$ . Аналогично, вдоль  $C_-$  меняется только  $r$ , значит,  $x_r = (u - a)t_r$ . Получается система линейных уравнений, которую можно привести к гиперболическому **уравнению Дарбу**

$$t_{rl} - H(r - l)(t_r - t_l) = 0, \quad (12.19)$$

где функция  $H(z)$  определяется параметрически

$$z = 2\sigma(a), H(z) = \frac{1}{8} a^{-1}(m(a) + 2).$$

Упражнение 4. Пользуясь определением инвариантов Римана вывести уравнение (12.19) или равносильное самосопряженное уравнение

$$(ht_l)_r + (ht_r)_l = 0, \text{ где } h(z) = \rho a.$$

Упражнение 5. Свести задачу о взаимодействии двух центрированных волн к задаче Гурса для уравнения (12.19). Применить метод Римана для решения задачи Гурса.

Далее рассматривается классическое решение газодинамической задачи с использованием простых волн и сильных разрывов.

**6°. Задача о распаде произвольного разрыва** формулируется так: при  $t=0$  заданы разрывные начальные данные

$$u = u_1, \rho = \rho_1, p = p_1 (x < 0); \quad u = u_2, \rho = \rho_2, p = p_2 (x > 0),$$

где  $u_j, \rho_j, p_j, j = 1, 2$ , – постоянные. Задача инвариантна относительно растяжения 5° группы  $G_{11}$  из § 1, поэтому ее решение разыскивается как инвариантное:

$$u = u(\lambda), \quad \rho = \rho(\lambda), \quad p = p(\lambda); \quad \lambda = xt^{-1}. \quad (12.20)$$

Простые волны возникающие при решении задачи всегда центрированные. Линии уровня газодинамических функций и линии сильных разрывов на плоскости  $R^2(x, t)$  есть прямые, проходящие через начало.

В простых волнах величину  $\sigma$  можно рассматривать как функцию  $\sigma = \sigma(p)$ . В r – волне выполняется соотношение

$$u + \sigma(p) = u_0 + \sigma(p_0), \quad u - a = \lambda, \quad (12.21)$$

в l – волне выполняется соотношение

$$u - \sigma(p) = u_0 - \sigma(p_0), \quad u + a = \lambda, \quad (12.22)$$

где  $(u_0, p_0)$  – состояние перед волнами.

В плоскости  $(p, u)$  имеются две кривые для простых волн. Ветви, для которых  $p > p_0$  ( $p < p_0$ ), соответствуют волнам сжатия (разрежения).  $(p, u)$  – **диаграмма простых волн** с центром  $(u_0, p_0)$  симметрична относительно прямой  $u = u_0$  (Рис. 3). Верны следующие равенства для производных

$$\frac{du}{dp} = \mp \frac{1}{\rho a}, \quad \frac{d^2u}{dp^2} = \pm \frac{m+2}{2\rho^2 a^3}, \quad m = \frac{\rho f_{\rho\rho}}{f_{\rho}}, \quad (12.23)$$

где верхний знак для  $\Gamma$  – волны, нижний знак для  $l$  – волны.

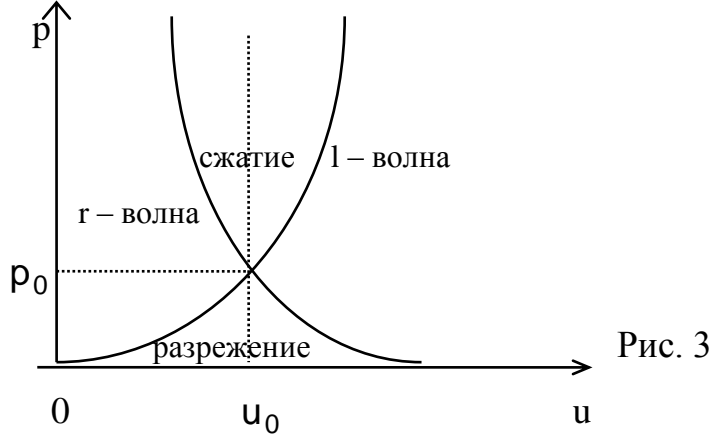


Рис. 3

Для ударных волн равенства (4.8), (4.13), (4.14) принимают вид

$$(u - D)V_0 = (u_0 - D)V \quad (12.24)$$

$$(u - u_0)^2 = (p - p_0)(V_0 - V), \quad (12.25)$$

$$e(V, p) - e(V_0, p_0) = \frac{1}{2}(p + p_0)(V_0 - V), \quad (12.26)$$

где  $D$  – скорость ударной волны.

Уравнение (12.26) задает адиабату Гюгонио  $V = W(p; V_0, p_0)$  с центром в  $(p_0, V_0)$ , уравнение (12.25) после исключения  $V$  задает  $(p, u)$  – **диаграмму ударных волн с центром  $(u_0, p_0)$** . Величина  $V_0$  определяется из уравнения состояния  $p_0 = g(V_0, S_0)$ ,  $S_0$  – энтропия непрерывного изоэнтропического течения, являющаяся параметром  $(p, u)$  – диаграмм.  $(p, u)$  – диаграмма ударных волн симметрична относительно прямой  $u = u_0$  (см. (12.25)).

Дифференцирование (12.25) дает

$$2(u - u_0) \frac{du}{dp} = V_0 - W - (p - p_0) \frac{dW}{dp}, \quad (12.27)$$

$$2(u - u_0) \frac{d^2 u}{dp^2} + 2 \left( \frac{du}{dp} \right)^2 = -2 \frac{dW}{dp} - (p - p_0) \frac{d^2 W}{dp^2}. \quad (12.28)$$

В точке  $(u_0, p_0)$  получается формула

$$\left( \frac{du}{dp} \right)_0^2 = - \left( \frac{dW}{dp} \right)_0 = \frac{1}{\rho_0^2 a_0^2}, \quad (12.29)$$

где последнее равенство следует из теоремы 2 § 4. Значит, через центр  $(u_0, p_0)$  проходят две ветви  $(p, u)$  – диаграммы ударных волн.

Из (12.27) в силу (12.25) получается неравенство

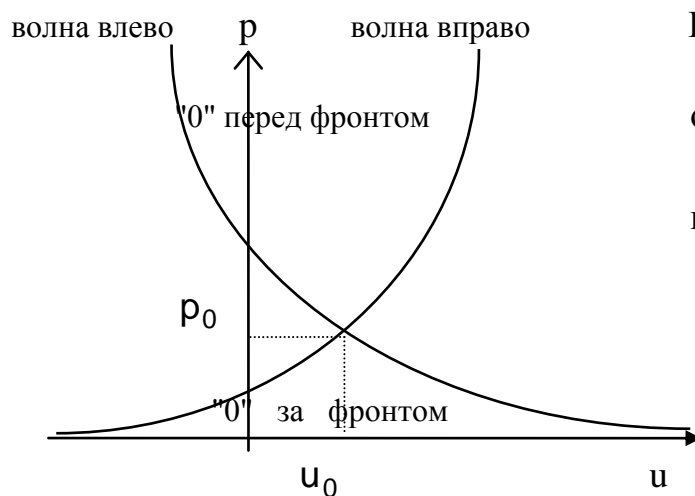
$$(u - u_0)(p - p_0) \frac{du}{dp} > 0. \quad (12.30)$$

Отсюда и из теоремы 1 § 4 следует, что ветви есть монотонные кривые, вдоль которых принимаются все значения давления,  $0 < p < \infty$ .

Закон сохранения массы (12.24) записывается в виде

$$(u - u_0)V_0 = (D - u_0)(V_0 - V).$$

Отсюда следует, что знак произведения  $(u - u_0)(p - p_0)$  совпадает со знаком величины  $D - u_0$ . Для волн, обращенных вправо ( $x > 0$ ),  $D > u_0 > 0$ , для волн, обращенных влево ( $x < 0$ ),  $D < u_0 < 0$ .



В силу неравенства (12.30) это

означает, что  $\frac{du}{dp} > 0$  для

волн, обращенных вправо;

$\frac{du}{dp} < 0$  для волн, обращенных

влево (Рис. 4).

Дифференцирование (12.28) с учетом формул из теоремы 2 § 4 дает

$$\left(\frac{d^2 u}{dp^2}\right)_0 = \pm \frac{m+2}{2\rho_0^2 a_0^3}. \quad (12.31)$$

Таким образом,  $(p, u)$  – диаграммы простых волн и ударных волн с одним центром  $(u_0, p_0)$  имеют касание второго порядка в центре (см. (12.23), (12.29), (12.31)).

**Теорема 4.** Задача о распаде произвольного разрыва в нормальном газе при любых начальных данных имеет единственное инвариантное решение вида (12.20).

**Доказательство.** По теореме единственности из § 6 в окрестности лучей  $t = 0, x < 0$ ;  $t = 0, x > 0$  имеются постоянные решения  $u = u_1, p = p_1, \rho = \rho_1$ ;  $u = u_2, p = p_2, \rho = \rho_2$ . Эти решения могут измениться либо непрерывным образом в некоторых центрированных волнах разрежения, либо через ударные волны.  $(p, u)$  - диаграммы изменений таковы

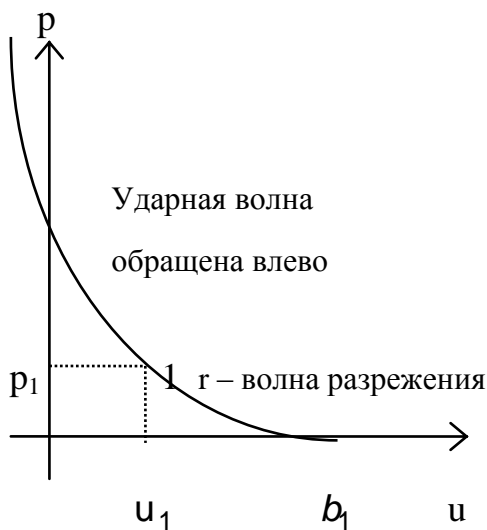


Рис. 5

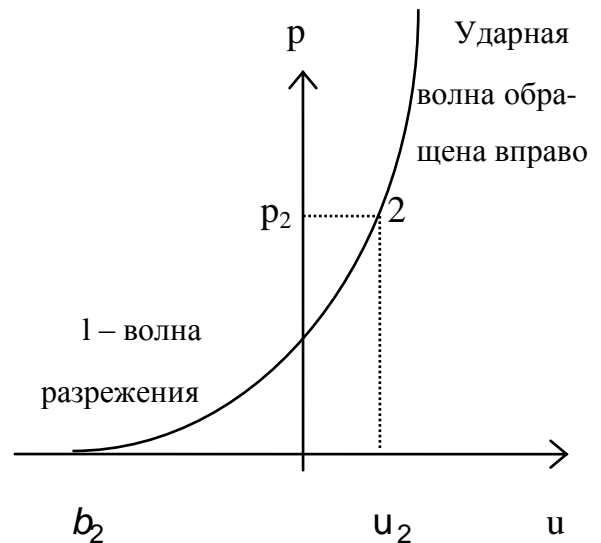


Рис. 6

Из свойств нормального газа и адиабаты Гюгонию (теорема 1 § 4) следует, что диаграммы определены в интервале  $0 < p < \infty$ , монотонные, причем вдоль ударных волн  $|u| \rightarrow \infty$  при  $p \rightarrow \infty$ .

Если совместить Рис. 5 и Рис. 6, то существует единственная точка 3 пересечения диаграмм, за исключением случая  $b_1 < b_2$ .



Точка пересечения  $(u_3, p_3)$  дает решение задачи. Оба газа 1 и 2 после переходов 1-3 и 2-3 имеют одинаковую скорость  $u_3$  и давление  $p_3$ , поэтому их можно связать контактными разрывом, идущим по лучу  $x = u_3 t$ , вдоль которого могут претерпевать разрыв  $\rho$  и  $S$ . Возможны 10 типов конфигураций распада произвольного разрыва в зависимости от расположения точек 1, 2, 3 на совмещенных рисунках 5, 6. Например,

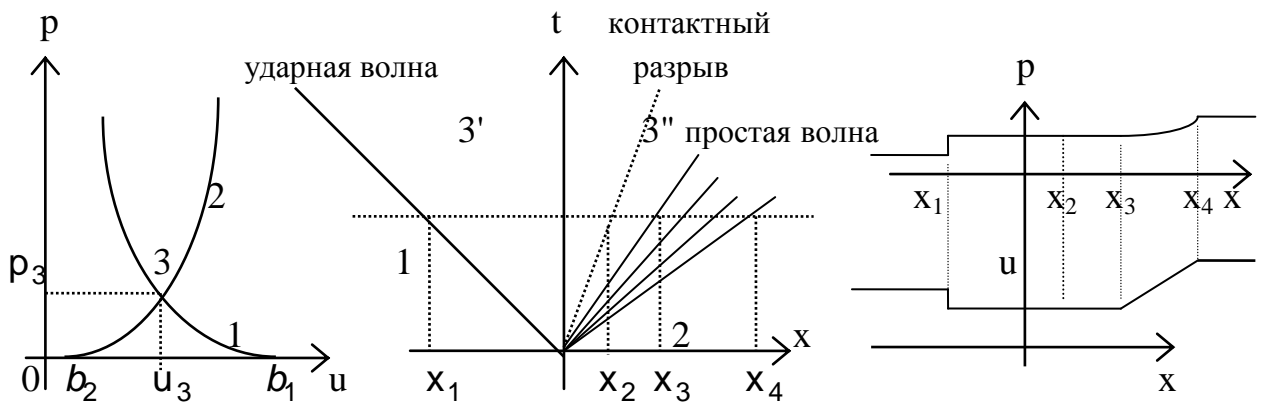


Рис. 7

рассмотрим распад, изображенный на Рис. 7. Ударная волна обращена влево  $D < u_1$ , поэтому из (12.24) следует  $D < u_3$ . На задней стороне центрированной 1-волны  $\lambda_3 = u_3 + a_3 > u_3$ . Значит, луч контактного разрыва  $x = u_3 t$  находится между ударной волной и 1-волной.

Случай  $b_1 < b_2$  возможен, когда  $\rho_1 = 0$  или  $\rho_2 = 0$ , т.е. вместо одного из газов находится вакуум. Происходит истечение в вакуум с помощью центрированной простой волны.

Единственность инвариантного решения следует из того, что  $C_0$  – траектория вида  $x = \lambda t$  может быть только одна. Точнее, две контактные инвариантные характеристики  $C_0: x = \lambda_1 t, x = \lambda_2 t, \lambda_1 < \lambda_2$  возможны только в случае, если между ними находится вакуум. Действительно, масса газа между ними равна

$$\int_{\lambda_1 t}^{\lambda_2 t} \rho\left(\frac{x}{t}\right) dx = t \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho(\lambda) d\lambda$$

и не должна зависеть от  $t$ , что возможно только когда интеграл равен нулю, т.е.  $\rho(\lambda) = 0$  в интервале  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ . Если есть  $C_0$  – характеристика  $x = u_3 t$ , то состояния по каждую ее сторону получаются из состояния 1 с помощью волн, обращенных влево, из состояния 2 с помощью волн, обращенных вправо. В инвариантном решении не может быть двух последовательных волн (ударных или простых), обращенных в одну сторону. Например, пусть две ударные волны, обращенные вправо, двигаются со скоростями  $D_2, D'_2, D_2 > D'_2$  (Рис. 8). Тогда  $D_2 > u'_2, D'_2 > u'_2$ , по теореме 4

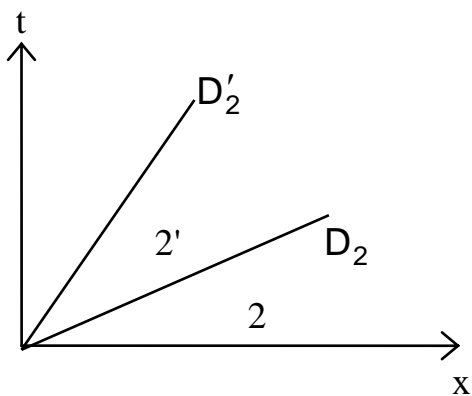


Рис. 8

(Цемплена) из § 4

$D_2 - u'_2 < a'_2, D'_2 - u'_2 > a'_2$ . Откуда

$D'_2 > D_2$ , что противоречит предположению. Для двух центрированных

простых волн, идущих в одну сторону

последняя характеристика

одной волны и первая характеристика

второй волны совпадают, так что есть только одна простая волна. Аналогично рассматриваются другие комбинации волн, идущих в одну сторону.

Если есть только по одной волне, идущих в разные стороны, то состояние между ними определяется точкой пересечения  $(p, u)$  – диаграмм. В противном случае были бы нарушены условия контактного разрыва.

Упражнение 6. Рассмотреть все случаи теоремы 4.

Упражнение 7. Написать формулы для кривых на Рис. 5,6.

Упражнение 8. Два покоящихся газа разделены заслонкой. При  $t = 0$  заслонку мгновенно убирают. Описать движение газов и рассчитать их параметры при  $t > 0$ .

Упражнение 9. В трубе газ перекрыт поршнем. В момент  $t = 0$  поршень начинает двигаться с постоянной скоростью. Рассчитать параметры газа при  $t > 0$ .

Упражнение 10. В трубе закрытой жесткой стенкой и заполненной покоящимся газом движется ударная волна с постоянной скоростью. Найти параметры отраженной ударной волны.

Упражнение 11. Рассчитать взаимодействие ударной волны и контактного разрыва в покоящемся газе.

Упражнение 12. Рассчитать взаимодействие двух ударных волн в покоящемся газе.

Упражнение 13. Рассчитать взаимодействие ударной волны и простой волны в **акустическом приближении**, когда  $(p, u)$  – диаграммы заменяются прямыми – касательными в центре диаграммы.

### ***§13. Двумерные установившиеся течения.***

1°. Рассматривается хорошо изученная инвариантная подмодель ранга 2 смешанного типа (12.2), построенная на подалгебре 2.17 (см. Приложение). В этом случае  $b_1 = b_2 = 1$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ . Третье уравнение отщепляется. Далее индекс 1 опускаем и записываем подмодель в виде

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x &= 0, \\ uv_x + vv_y + \rho^{-1}p_y &= 0, \\ u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) &= 0, \\ uS_x + vS_y = 0, \quad p = f(\rho, S). \end{aligned} \tag{13.1}$$

**Линии тока**  $L$  для системы (13.1) есть интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \tag{13.2}$$

Частицы двигаются вдоль линий тока. Вводятся операторы дифференцирования вдоль линий тока  $D_1 = u\partial_x + v\partial_y$  и по нормали к линиям тока  $D_n = -v\partial_x + u\partial_y$ , а также **функция тока**  $\psi(x, y)$  с помощью формул  $\psi_x = -\rho v$ ,  $\psi_y = \rho u$ . Условие совместности для  $\psi$  есть третье уравнение системы (13.1), таким образом  $\psi$  определено с точностью до постоянного слагаемого.

Вдоль линии тока функция тока постоянна, так как  $D_1\psi = 0$ .

**Расход** между двумя линиями тока:  $L_1$  и  $L_2$  определяется так

$$Q(L_1, L_2) = \int_{A_1 A_2} \rho \bar{u} \cdot \bar{n} \, ds = \psi(A_2) - \psi(A_1),$$

где  $A_1 \in L_1, A_2 \in L_2$ ,  $A_1 A_2$  – кривая между линиями тока,  $\bar{n}$  – нормаль к кривой  $A_1 A_2$ . Расход не зависит от кривой  $A_1 A_2$  и от точек  $A_1, A_2$  на линиях тока  $L_1, L_2$ .

Так же как в любом установившемся движении имеется **интеграл энтропии**

$$S = S(\psi), \tag{13.3}$$

**интеграл Бернулли**

$$u^2 + v^2 + I(a^2) = q_m^2(\psi). \tag{13.4}$$

Система (13.1) равносильна одному уравнению для функции тока:

$$\begin{aligned} & (\rho^2 a^2 - \psi_y^2) \psi_{xx} + 2\psi_x \psi_y \psi_{xy} + (\rho^2 a^2 - \psi_x^2) \psi_{yy} + \\ & + (\psi_x^2 + \psi_y^2 - \rho^2 a^2) \rho (a^2 \rho_\psi + f_S S_\psi) = 0, \end{aligned} \tag{13.5}$$

где функция  $\rho(\psi, \psi_x^2 + \psi_y^2)$  определяется из (13.4).

2°. Для безвихревых движений  $v_x = u_y$  из леммы § 9 следует

$$\rho_x S_y - \rho_y S_x = 0.$$

Если  $\rho = \text{const}$ , то получаются классические безвихревые течения несжимаемой жидкости, которые в газовой динамике играют роль приближенной модели.

Случай  $S = \text{const}$  дает изоэнтропические течения, которые рассматриваются далее подробно.

В случае  $\rho = \rho(S)$  система (13.1) интегрируется. Для этого делается замена

на  $\xi = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\rho(\psi)}$  и вводятся новые независимые переменные

$y, \xi; u(x, y) = \alpha(y, \xi), v(x, y) = \nabla(y, \xi)$ . Отсюда  $\xi_x = -\nabla, \xi_y = \alpha, \rho(\xi), \rho(\xi)$ , и

(13.1) принимает вид

$$\alpha_y = \rho^{-1} \rho', \nabla \nabla_y = -\rho^{-1} \rho' \alpha, \nabla_y + \alpha \nabla_\xi - \nabla \alpha_\xi = 0.$$

Интегрирование дает с точностью до переноса по  $y$

$$u = \rho' \rho^{-1} y, v^2 = -(\rho' \rho^{-1})^2 y^2 + 2(\rho' \rho^{-1})^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\rho d\xi}{\rho'} \quad (13.6)$$

Линии тока для этого решения есть концентрические окружности

$$(x - x_0)^2 + y^2 = 2 \int \rho(\rho')^{-1} d\xi. \quad (13.7)$$

Итак, безвихревые не изоэнтропические течения бывают лишь специального вида (13.6), (13.7).

Упражнение 1. Вывести формулу (13.6) и доказать, что  $x_0 = \text{const}$  в (13.7).

Упражнение 2. Показать, что безвихревое изоэнтропическое течение является **изоэнергетическим**, т.е. постоянная в интеграле Бернулли (13.4) не зависит от  $\psi$ .

3°. Безвихревые изоэнтропические течения определяются системой из двух уравнений, которые следуют из (13.1) после исключения  $\rho$

$$u_y - v_x = 0, \tag{13.8}$$

$$(u^2 - a^2)u_x + 2uvu_y + (v^2 - a^2)v_y = 0,$$

где  $a^2$  выражается через  $u^2 + v^2$  из интеграла Бернулли  $u^2 + v^2 + I(a^2) = q_m^2$  с постоянной величиной  $q_m$  (Упр. 2).

Потенциал скоростей  $u = \varphi_x, v = \varphi_y$  вместе с функцией тока  $\psi$  удовлетворяет системе уравнений равносильной (13.8)

$$\psi_x = -\rho\varphi_y, \psi_y = \rho\varphi_x, \tag{13.9}$$

где  $\rho$  определяется из равенства  $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + I(a^2) = q_m^2, a^2 = f_\rho$ .

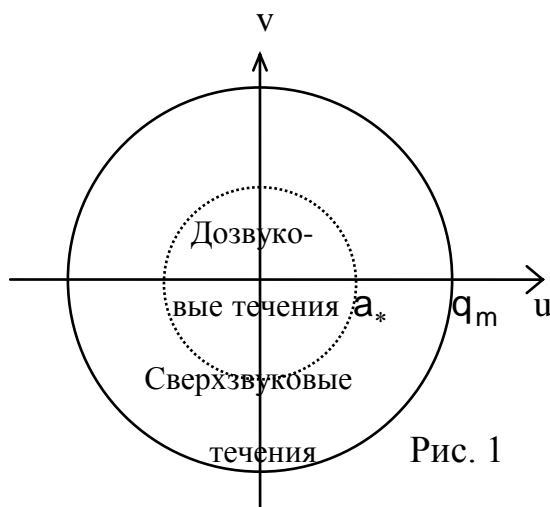
Линии тока  $\psi(x, y) = \text{const}$  и эквипотенциали  $\varphi(x, y) = \text{const}$  образуют ортогональную сеть, так как  $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0$ . Соотношение сторон прямоугольных ячеек этой сети дается равенством  $D_n\psi = \rho D_l\varphi$ .

Исключение  $\psi$  из (13.9) дает уравнение для потенциала скоростей

$$(u^2 - a^2)\varphi_{xx} + 2uv\varphi_{xy} + (v^2 - a^2)\varphi_{yy} = 0. \tag{13.10}$$

Система (13.8) линеаризуется, если значения  $u, v$  рассматривать как новые независимые переменные; **преобразование годографа**  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ .

Из интеграла Бернулли (13.4) следует, что годограф любого течения



находится внутри круга радиуса  $q_m$  (Рис. 1). Сверхзвуковым течениям соответствует кольцо  $a_* < q < q_m$ , где  $q^2 = u^2 + v^2$ , дозвуковым течениям – круг  $q < a_*$ , окружность  $q = q_m$  отвечает состояние вакуума.

Постоянному течению  $u = u_0, v = v_0$  соответствует точка плоскости годографа. Якобиан годографа есть

$$J = u_x v_y - u_y v_x. \quad (13.11)$$

Он равен нулю для простых волн  $u = F(v)$  или  $v = G(u)$ . Годограф простой волны есть кривая. Если течение в области не постоянно и не есть простая волна, то ее годограф есть взаимно-однозначное отображение на область в  $R^2(u, v)$ .

Годограф (13.8) таков

$$\begin{aligned} x_v &= y_u, \\ (u^2 - a^2)y_v - 2uvx_v + (v^2 - a^2)x_u &= 0. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Здесь тоже можно ввести потенциал  $x = \Phi_u, y = \Phi_v$ , который связан с  $\varphi(x, y)$  преобразованием Лежандра

$$\varphi = xu + yv - \Phi.$$

Система (13.12) переходит в линейное уравнение для потенциала

$$(u^2 - a^2)\Phi_{vv} - 2uv\Phi_{uv} + (v^2 - a^2)\Phi_{uu} = 0.$$

В полярной системе координат в плоскости годографа  $u = q \cos \vartheta, v = q \sin \vartheta$  уравнение принимает вид

$$(1 - M^2)(q\Phi_q + \Phi_{\vartheta\vartheta}) + q^2\Phi_{qq} = 0, \quad (13.13)$$

где  $M = q/a$  – число Маха. Линейное уравнение (13.13) можно решить **методом разделения переменных**, т.е. в виде  $\Phi = Q(q)\Theta(\vartheta)$ . Оно имеет гиперболический тип, если  $M > 1$  (сверхзвуковое течение); эллиптический тип, если  $M < 1$  (дозвуковое течение), и **вырождается** при  $M = 1, \infty$ .

Линейное **уравнение Чаплыгина** может быть получено для функции тока

$$(1 - M^2)\psi_{\vartheta\vartheta} + \rho q(q\rho^{-1}\psi_q)_q = 0. \quad (13.14)$$

Упражнение 3. Вывести уравнение (13.14) из системы (13.9), переходя последовательно к переменным  $(\psi, \varphi; x, y) \rightarrow (u, v; \psi, \varphi) \rightarrow (q, \vartheta; \psi, \varphi) \rightarrow (\psi, \varphi; q, \vartheta)$ , получая промежуточные формулы:

$$d\varphi = udx + vdy, \quad d\psi = -\rho vdx + \rho udy; \quad (13.15)$$

$$dx = q^{-1} \cos \vartheta d\varphi - (\rho q)^{-1} \sin \vartheta d\psi, \quad dy = q^{-1} \sin \vartheta d\varphi + (\rho q)^{-1} \cos \vartheta d\psi$$

$$\vartheta_{\psi} = (\rho q)^{-1} (M^2 - 1) q_{\varphi}, \quad q_{\psi} = q \rho^{-1} \vartheta_{\varphi}, \quad (13.16)$$

$$\varphi_q = (\rho q)^{-1} (M^2 - 1) \psi_{\vartheta}, \quad \varphi_{\vartheta} = q \rho^{-1} \psi_q.$$

В уравнении (13.14) делается замена  $\zeta = k_0 \int_q^{a_*} \rho q^{-1} dq$ :

$$K(\zeta) \psi_{\vartheta\vartheta} + \psi_{\zeta\zeta} = 0, \quad (13.17)$$

с функцией Чаплыгина  $K(\zeta) = (1 - M^2)(k_0 \rho)^{-2}$ .

Упражнение 4. Показать, что  $\zeta(q)$  – монотонная функция

$$\lim_{q \rightarrow 0} \zeta(q) = +\infty, \quad \lim_{q \rightarrow q_m} \zeta(q) = \zeta_m < 0.$$

Упражнение 5. Показать, что  $K(0) = 0, K(+\infty) = (k_0 \rho_0)^{-2}, K(\zeta_m) = -\infty$ .

Таким образом, график коэффициента  $K(\zeta)$  показан на Рис. 2, а область годографа Рис. 1 переходит в полуполосу Рис. 3.

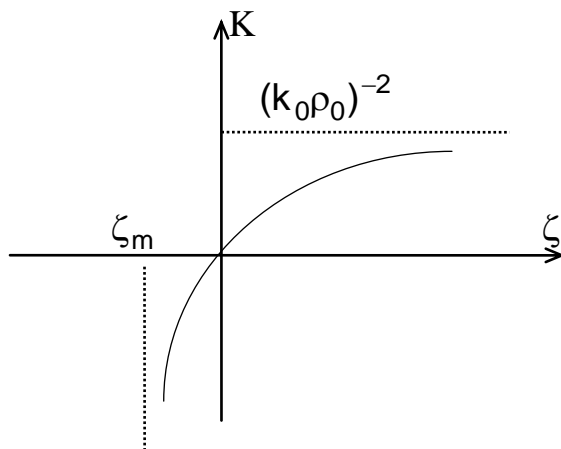


Рис. 2

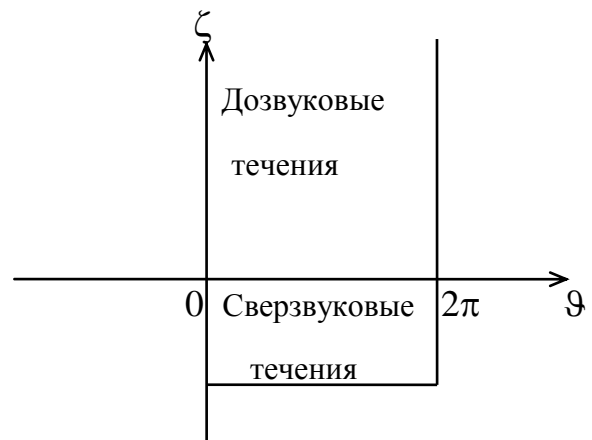


Рис. 3



4°. Для дозвуковых течений эффективен метод разделения переменных при решении краевых задач газовой динамики. Рассмотрим его применение для задачи об изоэнтропическом истечении симметричной струи из бесконечного сосуда с прямолинейными стенками Рис.4.

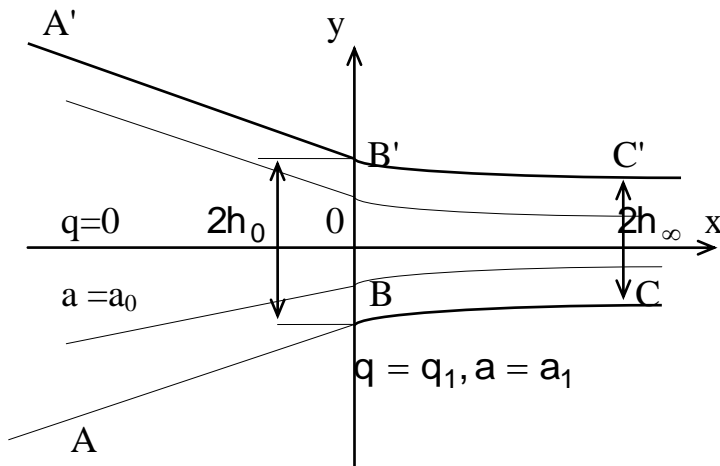


Рис. 4

AB, A'B' – стенки симметричного относительно оси x сосуда, с углом наклона  $\vartheta_0$ , BB' – отверстие ширины  $2h_0$ , из которого вытекает газ. Вверх по течению ( $x \rightarrow -\infty$ ) заданы  $q=0$ ,  $\rho_0$ ,  $q_m^2 = I(a_0^2)$ . Интеграл Бернулли

принимает вид  $q^2 + I(a^2) = I(a_0^2)$ . Из него определяется критическая скорость  $a_*$ , критическая плотность  $\rho_*$  и критическое давление  $p_*$ . На свободных границах B'C', BC задано давление  $p_1 < p_0 = f(\rho_0, S_0)$  и определяется  $\rho_1, a_1$  и  $q_1$  из интеграла Бернулли  $q_1^2 + I(a_1^2) = I(a_0^2)$ . Предполагается, что

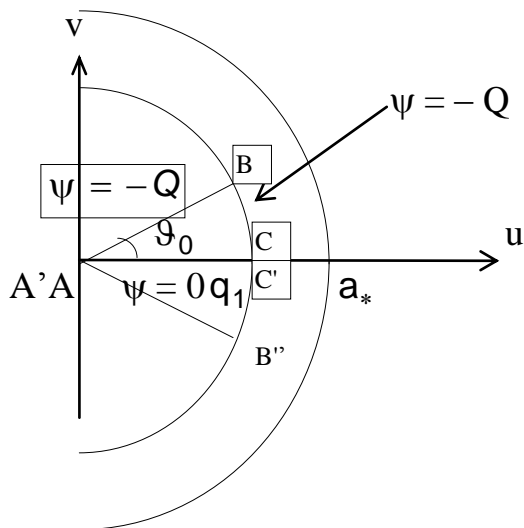


Рис. 5

$q_1 < a_1$  или  $q_1 < a_*$  или  $p_* < p_1 < p_0$ . Требуется определить течение, величину расхода газа  $2Q$  через любое сечение струи, минимальное сужение струи  $2h_\infty$ :  $Q = h_\infty \rho_1 q_1$ .

Годограф течения есть круговой сектор (Рис. 5). Из симметрии задачи следуют краевые условия

$$\psi(q, 0) = 0, \psi(q_1, \vartheta) = -Q = \psi(q, \vartheta_0)$$

и достаточно решить эту задачу Дирихле в секторе ABC.

Для вспомогательной функции  $\bar{\psi} = \frac{\psi}{Q} + \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ , разделяя переменные находим частное решение уравнения (13.14), обращающееся в нуль при  $\vartheta = 0, \vartheta_0$ ,

$$\bar{\psi}_n = z_n(q) \sin(v_n \vartheta), \quad v_n = \frac{n\pi}{\vartheta_0}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $z_n(q)$  – ограниченное решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(q\rho^{-1}z_n')' - v_n^2(\rho q)^{-1}(1 - M^2)z_n = 0. \quad (13.18)$$

Решение задачи задается рядом

$$\bar{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n z_n(q) \sin(v_n \vartheta),$$

если коэффициенты  $\psi_n$  удовлетворяют краевому условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n z_n(q_1) \sin(v_n \vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} - 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0.$$

Разложение в ряд Фурье правой части равенства определяет

$$\psi_n = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{nz_n(q_1)}. \quad \text{Итак, искомая функция тока равна}$$

$$\psi = Q \left( -\frac{\vartheta}{\vartheta_0} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(q)}{z_n(q_1)} \cdot \frac{\sin(v_n \vartheta)}{n} \right), \quad v_n = \frac{n\pi}{\vartheta_0}. \quad (13.19)$$

Для обоснования полученного представления решения, необходимо выяснить асимптотическое поведение функций  $z_n(q)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для решений уравнений (13.18) оно таково

$$z_n(q) = R(q) \left( 1 + \frac{b_n(q)}{n} \right) q^{v_n},$$

$$\text{где } R(q) = \exp \left( \frac{1}{2} q(1 - M^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \int_0^q (1 + M^2)(1 - M^2)^{-1/2} dq \right),$$

$b_n(q)$  – ограниченные функции в интервале  $0 \leq q \leq a_*$ . (А.Н.Тихонов., А.Б.Васильева., А.Г.Свешников. Дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980, стр. 201). Отсюда следует, что ряд (13.19) абсолютно сходится в области АВВ'А' и его можно почленно дифференцировать по  $q$  и  $\vartheta$ . Значит, (13.19) дает решение задачи.

По формулам перехода (13.15), (13.16) можно вычислить величины в плоскости течения. Например,  $h_\infty$  находится интегрированием вдоль ВС (Рис. 4)

$$h_0 - h_\infty = \int_{BC} dy = \int_{\vartheta_0}^0 q_1^{-1} \varphi_\vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^0 \rho_1^{-1} \psi_q(q_1, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= 2h_\infty q_1 \vartheta_0^{-1} \sin \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z'_n(q_1)}{z_n(q_1)} \frac{(-1)^n v_n}{v_n^2 - 1}.$$

Решение (13.19) пригодно для  $q_1 < a_*$ . Можно показать, что оно справедливо при  $q_1 = a_*$ , причем в этом случае струя выравнивается на конечном расстоянии от отверстия (Л.В. Овсянников. Об одном газовом течении с прямой линией перехода. ПММ. Т. 13, Вып. 5. 1949. С. 537-542).

Упражнение 6. Решить задачу об истечении струи из несимметричного сосуда с прямолинейными стенками.

Упражнение 7. Решить задачу о симметричном струйном обтекании клиновидной стенки конечной длины.

Упражнение 8. Решить задачу о лобовом столкновении двух свободных струй.

5°. Для сверхзвуковых безвихревых изоэнтропических течений выполняется условие гиперболичности (12.3). Поэтому для системы (13.1) можно найти характеристики и условия на них. Удобно пользоваться плоскостью потенциала ( $\varphi, \psi$ ), которая связана с плоскостью течения формулами (13.15). Система (13.16) записывается в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -q \\ ctg^2\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \vartheta \end{pmatrix}_{\varphi} + \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \vartheta \end{pmatrix}_{\psi} = 0, \quad (13.20)$$

где  $\sin \alpha = M^{-1}$ ,  $M = qa^{-1}$ ,  $\alpha$  - угол Маха. Пусть характеристика  $\psi(\varphi)$  имеет нормаль  $(-k, 1)$ ,  $k = \frac{d\psi}{d\varphi}$ ; характеристическая матрица такова

$$A(k) = \begin{pmatrix} \rho & kq \\ -kctg^2\alpha & -\rho q \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение  $\det A(k) = q(k^2ctg^2\alpha - \rho^2) = 0$  имеет решения  $k_{\pm} = \pm \rho tg\alpha$ . Левые собственные векторы матрицы  $A(k)$  можно взять в виде  $(1, \pm tg\alpha)$ . Умножение на них (13.20) дает условие на характеристиках

$$C_+: \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \rho tg\alpha, \quad r \equiv \vartheta - \mu(q) = \text{const},$$

$$C_-: \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = -\rho tg\alpha, \quad l \equiv \vartheta + \mu(q) = \text{const},$$

где  $\mu(q) = \int_{a_*}^q q^{-1} ctg\alpha dq$ .

Переход в плоскость течения по формулам (13.15) дает

$$C_+: \quad \frac{dy}{dx} = tg(\vartheta + \alpha), \quad r \equiv \vartheta - \mu(q) = \text{const}; \quad (13.21)$$

$$C_-: \quad \frac{dy}{dx} = tg(\vartheta - \alpha), \quad l \equiv \vartheta + \mu(q) = \text{const}.$$

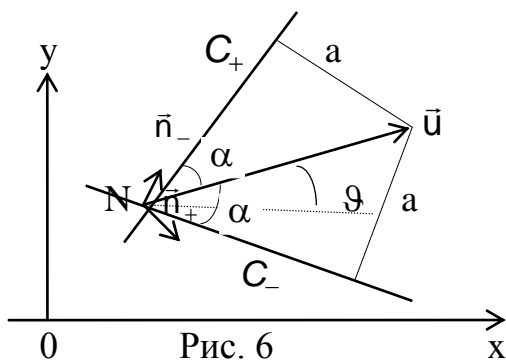


Рис. 6

Так как  $q \sin \alpha = a$ , то отсюда следует, что абсолютная величина проекции вектора скорости на нормаль к характеристике равна скорости звука (Рис. 6). Простые волны для системы (13.16) имеют свойства такие же как для

одномерных нестационарных течений.

**Теорема 1.** В простой волне одни из инвариантов Римана  $r$  или  $l$  сохраняет постоянное значение. Если  $r = \text{const}$ ,  $r$  – волна, ( $l = \text{const}$ ,  $l$  – волна), то линии уровня простой волны являются прямолинейными характеристиками  $C_-(C_+)$ . Обратно, если в области непостоянного течения один из инвариантов Римана постоянен, то течение есть простая волна.

**Доказательство.** В простой волне  $q = q(\lambda)$ ,  $\vartheta = \vartheta(\lambda)$ ;  $\lambda = \lambda(\varphi, \psi)$ . Подстановка в (13.16) дает

$$q\vartheta'\lambda_\varphi - \rho q'\lambda_\psi = 0,$$

$$q'\text{ctg}^2\alpha\lambda_\varphi - \rho q\vartheta'\lambda_\psi = 0.$$

Непостоянное решение  $\lambda$  возможно лишь при

$$q^2\vartheta'^2 - q'^2\text{ctg}^2\alpha = 0 \text{ или } r'l' = 0.$$

Пусть  $r = \vartheta - \mu(q) = r_0 = \text{const}$ , тогда  $q\vartheta' = q'\text{ctg}\alpha$ ,  $\lambda_\varphi - \rho\text{tg}\alpha \cdot \lambda_\psi = 0$ .

Значит,  $\lambda$  постоянно вдоль характеристики  $C_-$ , но на  $C_-$  постоянно  $l$ . Значит, на  $C_-$  постоянны  $r$ ,  $l$  или  $q$ ,  $\vartheta$  или  $\alpha$ ,  $\rho$ . Следовательно уравнение характеристики  $C_-$  интегрируется и получаются прямые линии

$$\psi + \rho r \text{tg}\alpha = F_1(q), \quad y - x \text{tg}(\vartheta - \alpha) = F(q). \quad (13.22)$$

Пусть  $l = \vartheta + \mu(q) = l_0 = \text{const}$ , тогда получаются прямые характеристики  $C_+$

$$\psi - \rho r \text{tg}\alpha = G_1(q), \quad y - x \text{tg}(\vartheta + \alpha) = G(q). \quad (13.23)$$

Наконец, если в некотором непостоянном течении  $r = \text{const}$  ( $l = \text{const}$ ), то величина  $\vartheta$  зависит от  $q$ . Значит, параметр простой волны равен  $q$ .

**Теорема 2.** Если в непрерывном безвихревом изэнтропическом плоском течении есть характеристика  $C_+(C_-)$ , вдоль которой вектор скорости постоянен, то к ней примыкает либо постоянное течение, либо простая  $l$  – волна ( $r$  – волна).

**Доказательство.** Пусть вдоль  $C_+$  постоянно  $q$ . Так как вдоль  $C_+$  постоянно  $r$ , то величины  $\vartheta, l$  тоже постоянны (см. (13.21)). Через каждую точку  $C_+$  проходят характеристики  $C_-$  заполняя некоторую область, в которой  $l = \text{const}$ . Значит, в этой области имеется либо  $l$  – волна, либо постоянное течение.

Простая волна называется **центрированной**, если все ее прямолинейные характеристики проходят через одну точку.

Упражнение 9. Вывести уравнения центрированной  $r$  – волны:

$$\vartheta - \mu(q) = r_0, \quad \text{tg}(\vartheta - \alpha) = \frac{y}{x}, \quad \rho \text{tg}\alpha = -\frac{\psi}{\varphi} \quad (13.24)$$

и центрированной  $l$  – волны:

$$\vartheta + \mu(q) = l_0, \quad \text{tg}(\vartheta + \alpha) = \frac{y}{x}, \quad \rho \text{tg}\alpha = \frac{\psi}{\varphi}. \quad (13.25)$$

Центрированные плоские простые волны называются **течениями Прантля-Мейера**.

Упражнение 10. С помощью центрированной простой волны решить задачу обтекания выпуклого угла.

Простая волна называется **волной сжатия (волной разрежения)**, если вдоль линии тока в направлении вектора скорости плотность возрастает (убывает). Так как в указанном направлении  $d\varphi > 0$ , то волну определяет знак производной:  $\rho_\varphi > 0$  – течение сжатия,  $\rho_\varphi < 0$  – течение разрежения.

**Лемма 1.** Угловые коэффициенты  $\frac{dy}{dx}, \frac{d\psi}{d\varphi}$  прямолинейных характери-

стик в простой волне с ростом  $\varphi$  либо оба возрастают, либо оба убывают.

**Доказательство.** Для  $r$  – волны имеем, используя интеграл Бернулли,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{tg}(\vartheta - \alpha) = \cos^{-2}(\vartheta - \alpha)(\vartheta_\varphi - \alpha_\varphi),$$

$$\alpha_\varphi = -\frac{m + 2 \sin^2 \alpha}{2q \sin \alpha \cos \alpha} q_\varphi, \quad \vartheta_\varphi = q^{-1} \operatorname{ctg} \alpha \cdot q_\varphi, \quad m = \frac{\rho f_{\rho\rho}}{f_\rho}.$$

Отсюда выражения для производных  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{dy}{dx} = \frac{m+2}{2q \sin \alpha \cos \alpha} q_\varphi$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\rho \operatorname{tg} \alpha) = \frac{m+2}{2q \sin \alpha \cos \alpha} \rho q_\varphi \text{ и имеют один и тот же знак.}$$

Для  $l$ -волны выражения для производных отличаются знаком.

Таким образом, геометрический критерий различия простых волн сжатия и разрежения на плоскости течения и на плоскости потенциала формулируются одинаково.

**Теорема 3.** Простая волна является волной сжатия (разрежения), если и только если прямолинейные характеристики сходятся (расходятся) в направлении течения (Рис. 7).

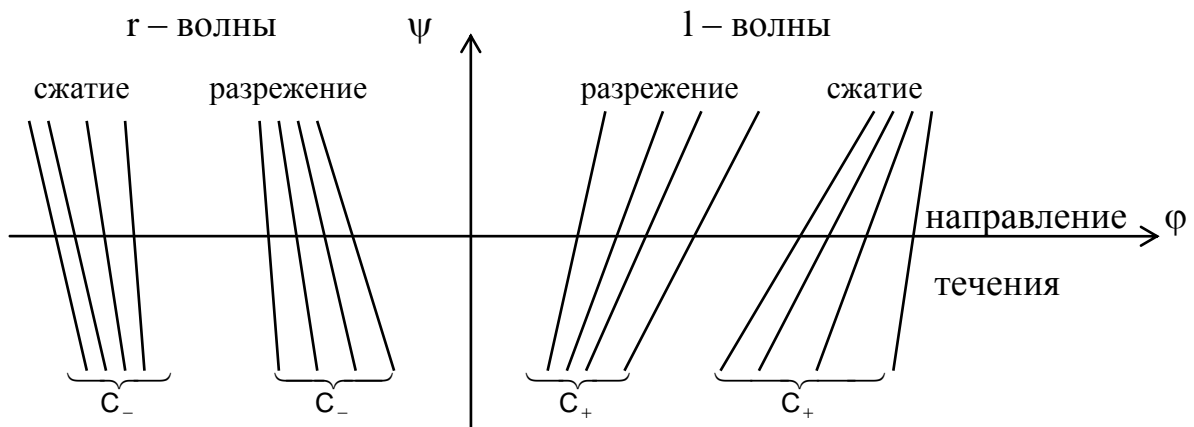


Рис. 7

**Доказательство.** Прямолинейные характеристики в простых волнах сходятся (расходятся) в направлении  $d\varphi > 0$ , если  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left| \frac{d\psi}{d\varphi} \right| > 0$  ( $< 0$ )

(см. Рис. 7). Вычисления из леммы 1  $\left| \frac{d\psi}{d\varphi} \right|_\varphi = (\rho \operatorname{tg} \alpha)_\varphi = \frac{m+2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} \rho_\varphi$

показывают, что  $\rho_\varphi > 0$  ( $< 0$ ).

В простой волне сжатия наступает **градиентная катастрофа**, т.е. производные функций стремятся к бесконечности при неограниченном сближении прямолинейных характеристик.

Упражнение 11. Найти место наступления градиентной катастрофы в простой волне сжатия.

6°. Для анализа сверхзвуковых течений общего характера плоскость годографа преобразуют в плоскость инвариантов Римана по формулам

$$r = \vartheta - \mu(q), l = \vartheta + \mu(q), \mu(q) = \int_{a_*}^q q^{-1} \operatorname{ctg} \alpha \, dq.$$

Выведем дифференциальное уравнение, равносильное уравнению (13.14).

Вдоль  $C_+$  меняется только  $l$ , т.е. уравнение характеристики  $C_+$

$d\psi = \rho \operatorname{tg} \alpha \, d\varphi$  равносильно  $\psi_l = \rho \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi_l$ . Вдоль  $C_-$  меняется только  $r$  и

ее уравнение дает  $\psi_r = -\rho \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi_r$ . Величины  $\rho, \alpha$  зависят только от  $q$ , по-

этому их можно выразить как функции разности  $l - r$ . Исключение  $\varphi$  из по-

лученных уравнений дает **уравнение Дарбу**

$$\psi_{lr} - G(l - r)(\psi_l - \psi_r) = 0, \quad (13.26)$$

где  $z = 2\mu$ ,  $G(z) = \frac{m + 2}{8 \sin \alpha \cos^3 \alpha} \cong \frac{m_* + 2}{8z}$  при  $z \rightarrow 0$ .

Как пример постановки краевой задачи для (13.26), рассматривается за-

дача об истечении сверхзвуковой струи из прямолинейной трубы ширины

$2y_0$ , в которой течет постоянный поток газа с параметрами  $\rho_0, p_0, q_0 > a_0$ .

Вне струи покоится газ с давлением  $p_1 < p_0$ . Граница струи с покоящимся

газом считается контактнм разрывом. Пока течение в струе непрерывно,

оно является безвихревым и изоэнтропическим. Постоянная в интеграле

Бернулли определяется данными задачи  $q_m^2 = q_0^2 + l(a_0^2)$ . На границе струи

давление равно  $p_1$ , из уравнения состояния определяется плотность  $\rho_1$  и

скорость звука  $a_1$ , из интеграла Бернулли определяется модуль скорости



$q_1^2 + l(a_1^2) = q_m^2$ . Ось трубы является осью симметрии задачи, примем ее за ось  $x$  и положим на этой линии тока  $\psi = 0$ . Граница течения есть тоже линия тока с  $\psi = \psi_0 = \rho_0 q_0 y_0$ .

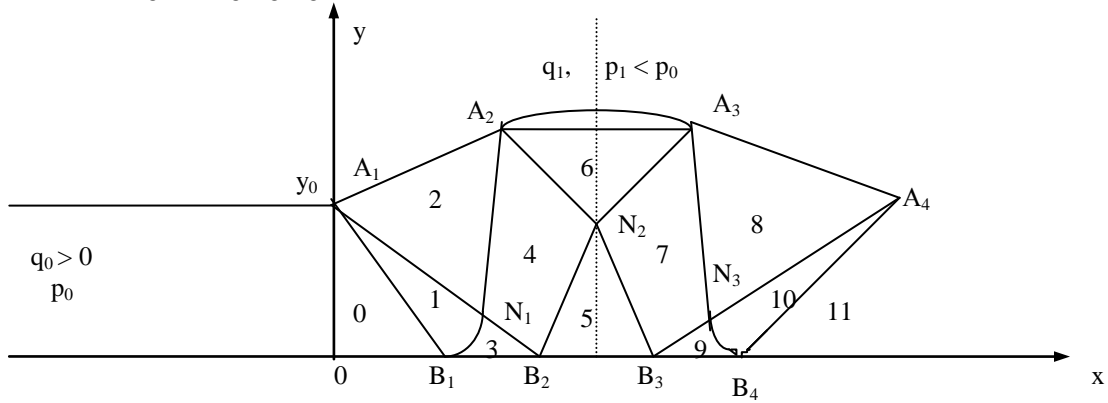


Рис. 8

В плоскости потенциала получается краевая задача для нелинейной системы (13.16) в полуполосе  $0 \leq \psi \leq \psi_0, \varphi \geq 0$  с начальными данными  $q(0, \psi) = q_0, \vartheta(0, \psi) = 0$  и граничными условиями  $q(\varphi, \psi_0) = q_1, \vartheta(\varphi, 0) = 0$ .

Область течения разбивается на подобласти 0, 1, ..., 10, ... (Рис. 8), в которых решение либо задается явными формулами, либо ставится классическая краевая задача. К области 0 постоянного течения  $q = q_0, \vartheta = 0$  вдоль характеристики  $C_-$  примыкает центрированная простая  $r$ -волна (область 1 –  $A_1B_1N_1$ )  $r = \vartheta - \mu(q) = -\mu(q_0) = r_1, y - y_0 = x \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)$ .

В ней можно найти точку пересечения  $B_1$  первой  $C_-$  – характеристики  $y - y_0 = -x \operatorname{tg} \alpha_0$  с осью  $x$ , характеристику  $C_+$ , выходящую из  $B_1$ , точку пересечения  $C_+$  – характеристики  $B_1N_1$  с прямой  $C_-$  – характеристикой  $A_1N_1$ . В области 2 формируется постоянное течение  $q = q_1, \vartheta = \vartheta_2 = \mu(q_1) - \mu(q_0)$ . Эта область ограничена прямыми  $A_1N_1: y - y_0 = x \operatorname{tg}(\vartheta_2 - \alpha_1), A_1A_2: y - y_0 = x \operatorname{tg} \vartheta_2$  и прямой  $C_+$  – характеристикой  $A_2N_1$ , примыкающей  $l$  – волны области 4:

$$l = \vartheta + \mu(q) = \vartheta_2 + \mu(q_1) = \mu(q_5) = l_2, \quad y - x \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) = G(q).$$

К области 4 примыкает постоянное течение (область 5 –  $B_2N_2B_3$ ) с  $q = q_5, \vartheta = 0$ .  $C_-$  – характеристика  $N_1B_2$ , ее точка пересечения  $B_2$  с осью  $x$  определяются из решения общей краевой задачи в области 3 –  $B_1N_1B_2$  для уравнения (13.26). Вдоль  $C_+$  – характеристики  $B_1N_1$ , постоянен

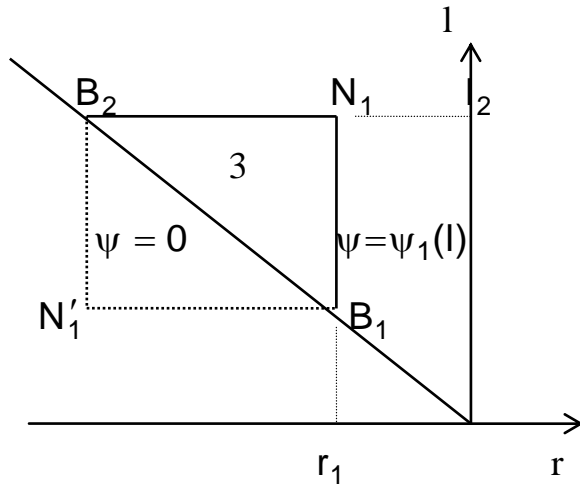


Рис. 9

инвариант  $r = r_1$ , и определяется функция  $\psi = \psi_1(l)$ , вдоль  $C_-$  – характеристики  $N_1B_2$  постоянен инвариант  $l = l_2$ , на оси  $B_1B_2$  заданы угол наклона скорости  $\vartheta = 0 = r + l$  и функция тока  $\psi = 0$  (Рис. 9).

При замене переменных –  $r \leftrightarrow l$ ,

$\psi \rightarrow -\psi$  уравнение (13.26) остается

инвариантным, треугольник  $B_2N_1B_1$  переходит в треугольник  $B_2N_1'B_1$ , симметричный относительно биссектрисы  $r + l = 0$ , граничное условие

$\psi|_{N_1B_1} = \psi_1(l)$  перейдет в граничное условие  $\psi|_{N_1'B_1} = -\psi_1(-r)$ . Таким образом, в прямоугольнике  $B_2N_1B_1N_1'$  получается задача Гурса, которая имеет

единственное решение. Если решение этой задачи найдено, то определяется  $C_-$  – характеристика  $N_1B_2$  и параметры на ней. Значит, определяются параметры простой  $l$  – волны в области 4, в частности  $C_-$  – характеристика  $A_2N_2$ .

Аналогично области 3 в области 6 ставится краевая задача для уравнения (13.26), из которой определяется  $C_+$  – характеристика  $N_2A_3$  и параметры на ней. Далее строится простая  $l$  – волна в области 7 и т.д.

Упражнение 12. Поставить краевые задачи в областях 3, 6, 9. Написать формулы для простых волн в областях 1, 4, 7, 10. Определить постоянные

течения в областях 2, 5, 8, 11. Симметрична ли фигура  $A_1B_1B_4A_4$  относительно прямой параллельной оси  $y$ , проходящей через точку  $N_2$  (Рис. 8)?

Упражнение 13. Вывести уравнение ударной поляры для политропного газа.

Упражнение 14. Нарисовать ударные поляры для  $a_* \leq q_1 \leq q_m$ .

Упражнение 15. Показать, что окружность  $q = a_*$  пересекает ударную поляру в точке, находящейся на большем расстоянии от центра, чем точка максимального угла поворота потока.

Упражнение 16. Решить задачу обтекания тупого угла сверхзвуковым постоянным потоком газа с присоединившимся прямым скачком уплотнения.

Упражнение 17. Решить задачу об отражении косого скачка от прямолинейной стенки с помощью еще одного отраженного скачка (регулярное отражение).

Упражнение 18. Показать, что из точки схождения трех ударных волн обязательно должен выходить контактный разрыв.

8°. Установившееся течение газа в окрестности звуковой линии называется **околозвуковым**. Звуковая линия на данном решении определяется одним из равносильных равенств  $q(x, y) = a(x, y)$ ,  $q(x, y) = a_*$ ,  $M(x, y) = 1$ .

Если к звуковой линии примыкает сверхзвуковое течение, то в каждой точке звуковой линии характеристики  $C_+$  и  $C_-$  образуют с вектором скорости угол  $90^\circ$  (13.21), так как  $\sin \alpha = 1$ .

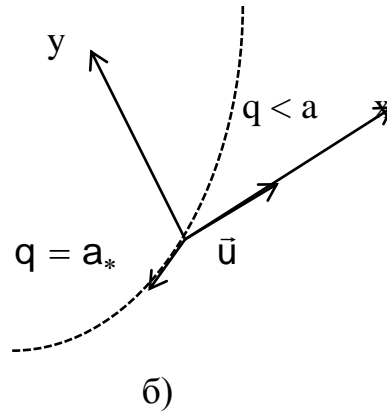
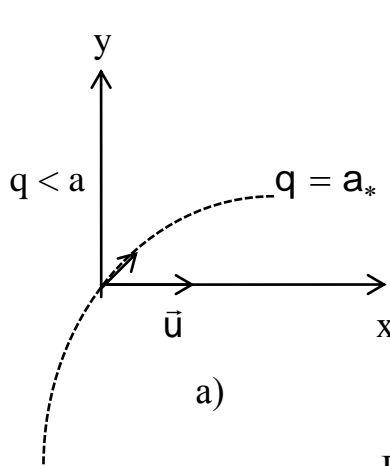
Теорема 4 (Никольский, Таганов). В плоском потенциальном потоке при движении вдоль звуковой линии, не совпадающей с линией тока, вектор скорости поворачивается монотонно.

**Доказательство.** Из уравнений (13.15), (13.16) следуют равенства для Якобианов

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\vartheta, q)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\vartheta, q)} = \frac{1}{\rho^2 q^3} (q^2 \psi_q^2 + (1 - M^2) \psi_\vartheta^2) > 0 \quad \text{при} \quad M \leq 1,$$

$$\psi \neq \text{const}; \quad \frac{\partial(\vartheta, q)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\vartheta, q)}{\partial(x, q)} \cdot \frac{\partial(x, q)}{\partial(x, y)} = \vartheta_x|_{q=\text{const}} \cdot q_y|_{x=\text{const}} > 0.$$

Выберем локальную систему координат так, как показано на Рис.10.



Если двигаться по линии  $q = a_*$ , чтобы дозвуковая область оставалась слева, то

а)  $q_y < 0, \vartheta_x < 0,$

б)  $q_y > 0, \vartheta_x > 0.$

Рис. 10

Следовательно, вектор  $\bar{u}$  поворачивается по часовой стрелке.

Если к звуковой линии примыкает область сверхзвукового течения и двигаться так, чтобы эта область оставалась справа, то вектор скорости поворачивается по часовой стрелке.

Если с обеих сторон звуковой линии течение дозвуковое или сверхзвуковое, то на ней  $\vartheta = \text{const}, q = a_* = \text{const}$ , значит, эта линия эквипотенциаль  $d\varphi = 0$ .

**Теорема 5.** Пусть в области непрерывного течения к звуковой линии примыкает простая волна. Тогда звуковая линия является прямой двойной характеристикой  $C_\pm$ . Вектор скорости ортогонален этой прямой.

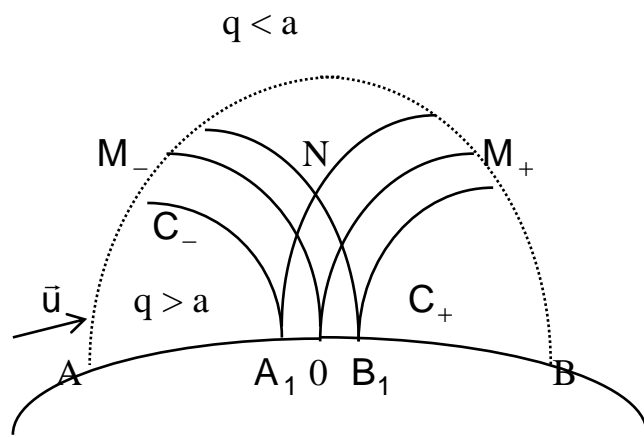
**Доказательство.** Пусть к звуковой линии  $L$  примыкает  $r$  – волна с уравнением (13.21)  $\vartheta - \mu(q) = r_0$ . Так как  $\mu(a_*) = 0$ , то  $\vartheta = r_0$  вдоль  $L$ , т.е.  $L$  есть линия уровня простой волны, совпадая с некоторой характеристикой

$$C_-: \frac{dy}{dx} = \text{tg}(\vartheta - \alpha) = \text{tg}(r_0 - \pi/2) = -\text{ctg} r_0. \text{ Отсюда следует, что } L = C_- -$$

прямая  $y - y_0 = -(x - x_0) \operatorname{ctg} r_0$ ,  $(x_0, y_0) \in L$ . Характеристика  $C_+$ , проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ , определяется из уравнений  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Прямая  $L$  удовлетворяет этой задаче, значит,  $L = C_- = C_+$ . Никакая другая характеристика не пересекает  $L$ .

Касательный вектор к  $L$  есть  $\vec{l} = (\sin r_0, -\cos r_0)$ , а вектор скорости течения  $\vec{u} = a_*(\cos r_0, \sin r_0)$ . Следовательно,  $\vec{l} \cdot \vec{u} = 0$ .

Из доказанных утверждений следует, что непрерывное обтекание стенки с местной сверхзвуковой зоной неустойчиво. Действительно, пусть



$$q < a$$

$M_-$   $N$   $M_+$

$$q > a$$

$A_1$   $O$   $B_1$

Рис. 11

на участке  $AB$  стенки возникла сверхзвуковая зона и имеется прямолинейный участок

$A_1B_1 \subset AB$  (Рис. 11), имеющий

угол наклона равный  $\vartheta_0$ . В

точке  $O \in A_1B_1$ :  $q = q_0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ .

Из точки  $O$  выходят две характеристики:

$C_+$ :  $\vartheta + \mu(q) = \vartheta_0 + \mu(q_0)$ ,  $C_-$ :  $\vartheta - \mu(q) = \vartheta_0 - \mu(q_0)$ , которые пересекают звуковую линию в точках  $M_+$ ,  $M_-$ , так что  $\vartheta_{M_-} = \vartheta_0 + \mu(q_0)$ ,

$\vartheta_{M_+} = \vartheta_0 - \mu(q_0)$ . Отсюда  $\vartheta_{M_-} + \vartheta_{M_+} = 2\vartheta_0$ . При изменении положения

точки  $O$  на  $A_1B_1$  точки  $M_-$ ,  $M_+$  на звуковой линии смещаются, причем

$d\vartheta_{M_-} + d\vartheta_{M_+} = 0$ . По теореме 1 знаки  $d\vartheta_{M_-}$  и  $d\vartheta_{M_+}$  одинаковы, значит,

$d\vartheta_{M_-} = d\vartheta_{M_+} = 0$  и  $q_0 = \text{const}$  на отрезке  $A_1B_1$ . В характеристическом

треугольнике  $A_1NB_1$  должно быть постоянное течение  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $q = q_0$ . К

постоянному течению примыкают простые волны, которые достигают звуко-

вой линии. По теореме 5 звуковая линия есть прямая  $C_{\pm}$  характеристика в

этих простых волнах, что противоречит ее пересечению характеристиками в точках  $M_+, M_-$ .

Итак, непрерывное течение невозможно с местной сверхзвуковой зоной, в которой есть прямолинейный участок стенки. В такой зоне должны возникать скачки уплотнения.

Упражнение 19. Рассмотреть качественную картину течения в канале с переходом через звуковую линию (сопло Лаваля). Изобразить годограф течения.

Упражнение 20. Качественно построить картину истечения сверхзвуковой струи с переходом через звуковую линию из симметричного бесконечного сосуда с прямолинейными стенками.

#### **§14. Одномерные движения газа с цилиндрическими волнами и закруткой.**

Рассматривается подалгебра 2.11 из приложения. В цилиндрической системе координат инвариантное решение записывается в виде  $U = v_1 + \beta\theta, \quad V = u_1, \quad W = w_1$ , где  $\beta$  – алгебраический параметр, функции  $u_1, v_1, w_1, \rho, \rho$  – зависят от  $t, r$ . Подстановка в уравнения газовой динамики (3.5), (3.6), (3.9) дает подмодель эволюционного типа (12.1) с  $b = 1, a_1 = r^{-1}w_1^2, a_2 = -\beta r^{-1}w_1, a_3 = -r^{-1}u_1w_1, a_4 = -r^{-1}u_1, a_5 = Aa_4$ .

Опуская индекс 1, получим систему

$$\begin{aligned}
u_t + uu_r + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}w^2, \\
v_t + uv_r &= -\beta r^{-1}w, \\
(rw)_t + u(rw)_r &= 0, \\
(r\rho)_t + (r\rho u)_r &= 0, \\
p_t + up_r + A(u_r + r^{-1}u) &= 0 \text{ или } S_t + uS_r = 0.
\end{aligned}
\tag{14.1}$$

Второе уравнение системы (14.1) для  $v$  отщепляется; его можно решать как линейное неоднородное уравнение для каждого решения оставшихся уравнений, в которые не входит величина  $v$ . Четвертое уравнение системы (14.1) определяет функцию тока (или лагранжеву координату из §12)  $\psi(t, r)$ :  $r\rho = \psi_r G(\psi)$ ,  $r\rho u = -\psi_t G(\psi)$ . Третье и пятое уравнения системы (14.1) интегрируются и дают **интеграл закрутки**

$$rw = \chi(\psi), \tag{14.2}$$

и **интеграл энтропии**

$$S = S(\psi) \tag{14.3}$$

Остается первое уравнение, которое после подстановки интегралов становится квазилинейным гиперболическим уравнением для функции тока:

$$\begin{aligned}
&\psi_r^2 \psi_{tt} - 2\psi_t \psi_r \psi_{tr} + (\psi_t^2 - a^2 \psi_r^2) \psi_{rr} = \\
&= \psi_r^3 (rf_s S' G^{-1} - r^{-1} a^2 - r^{-3} \chi^2) + \psi_r^4 G^{-1} G'.
\end{aligned}
\tag{14.4}$$

При  $\chi = 0$  уравнение (14.4) и система (14.1) рассматривались в §12. Здесь предполагается  $\chi \neq 0$ .

В силу (14.2) из первого уравнения следует, что закрутку можно трактовать как массовую силу в обычном одномерном движении с цилиндрическими волнами.

Пусть  $u(r, t)$ ,  $v(r, t)$ ,  $w(r, t)$ ,  $p(r, t)$ ,  $\rho(r, t)$  – гладкое решение подмодели (14.1) без особенностей. Тогда в физическом пространстве траектория,

проходящая через точку  $M_0 = (x_0, r_0, \theta_0)$ , находится как решение задачи

$$\begin{aligned} r_t &= u(r, t), \quad r\theta_t = w(r, t), \quad x_t = v(r, t) + \beta\theta; \\ r|_{t=0} &= r_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad x|_{t=0} = x_0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Отсюда следует, что  $r = r(t, r_0)$ ,  $\theta = \theta(t, r_0) + \theta_0$ ,  $x = x(t, r_0) + \beta\theta_0 t + x_0$ .

Если точка  $M_0$  движется по кривой  $x_0(s), r_0(s), \theta_0(s)$  (в качестве параметра кривой  $s$  можно взять  $0 \leq r_0 < \infty$ ), то решения задачи (14.5) лежат на поверхности ( $s, t$  – параметры поверхности), которая состоит из траекторий. Эта поверхность может быть контактнм разрывом или стенкой.

Рассматривается плоскость  $x = x_0$ , на которой выбирается ось для отсчета углов. Фиксируется  $r = r_0$ ,  $t = t_0$  и меняется угол  $\theta$  от  $\theta_0$  до  $\theta_0 + 2\pi$ . Величина  $U = v(r, t) + \beta\theta$  при обходе окружности принимает приращение  $2\pi\beta$ , остальные физические величины непрерывны. Значит, в области течения должен быть контактнм разрыв или стенка, состоящая из траекторий. Стенка выстраивается после получения решения уравнений (14.1). При  $r=0$  получается кромка этой стенки. Возникает вопрос о существовании аналитического решения возле кромки и вопрос о произволе таких решений.

Физическое решение без особенности на оси  $r=0$  требует, чтобы  $u(t, 0) = 0$ ,  $w(t, 0) = 0$ . Вид аналитического по  $r$  решения подмодели (14.1) имеет вид

$$\begin{aligned} u &= r \sum u_k r^k, \quad w = r \sum w_k r^k, \quad \rho = \sum \rho_k r^k, \quad p = P + r^2 \sum p_k r^k, \\ A &= \sum A_k r^k, \quad A_k = (k!)^{-1} D_r^k A(p, \rho)|_{r=0} = A_{\rho}^0 \rho_k + A_p^0 p_{k-2} + \dots, \end{aligned}$$

где происходит суммирование по  $k \geq 0$ .

Подстановка рядов в систему (14.1) дает

$$\begin{aligned} &\sum \rho_k r^k \left( \sum u_{kt} r^k + \sum u_k r^k \sum (k+1) u_k r^k \right) - \\ &- \sum \rho_k r^k \left( \sum w_k r^k \right)^2 + \sum (k+2) p_k r^k = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum w_{kt} r^k + \sum u_k r^k \sum (k+2) w_k r^k &= 0, \\ \sum \rho_{kt} r^k + \sum u_k r^k \sum k \rho_k r^k + \sum \rho_k r^k \sum (k+2) u_k r^k &= 0, \\ P_t + r^2 \left( \sum \rho_{kt} r^k + \sum u_k r^k \sum (k+2) \rho_k r^k \right) + \sum A_k r^k \sum (k+2) u_k r^k &= 0. \end{aligned}$$

При  $r=0$  получается не определенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая интегрируется:

$$\rho_0 (u_{0t} + u_0^2) - \rho_0 w_0^2 + 2\rho_0 = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{1}{2} C_1^2 \rho_0^3 + \frac{1}{4} \rho_{0tt} - \frac{3}{8} \rho_0^{-1} \rho_{0t}^2,$$

$$w_{0t} + 2u_0 w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = C_1 \rho_0,$$

$$\rho_{0t} + 2u_0 \rho_0 = 0 \Rightarrow u_0 = -\frac{1}{2} \rho_0^{-1} \rho_{0t},$$

$$P_t + 2A_0 u_0 = 0 \Rightarrow dP = a^2(\rho_0, P) d\rho_0 \Rightarrow F(P, \rho_0) = C_0 \Rightarrow P = P(\rho_0),$$

где  $C_0, C_1$  – постоянные,  $\rho_0(t)$  – произвольная функция.

Коэффициенты рядов при  $r$  определяются из системы

$$\rho_0 (u_{1t} + 3u_0 u_1) - \rho_1 w_0^2 - 2\rho_0 w_0 w_1 + 3\rho_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 \text{ определяется через } \rho_0,$$

$$w_{1t} + 3u_0 w_1 + 2w_0 u_1 = 0 \Rightarrow w_1 = C_3 \rho_0^{3/2} - \frac{2}{3} C_1 C_2 \rho_0^{3/2} \int \rho_0^{-3/2} A_0^{-1} A_\rho^0 R_1 d\rho_0,$$

$$\rho_{1t} + 3u_0 \rho_1 + 3\rho_0 u_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = C_2 \rho_0^{3/2} \exp\left(-\frac{2}{3} \int A_0^{-1} A_\rho^0 d\rho_0\right) \equiv C_2 R_1(\rho_0),$$

$$3A_0 u_1 + 2A_\rho^0 u_0 \rho_1 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3} C_2 A_0^{-1} A_\rho^0 R_1(\rho_0) \rho_0^{-1} \rho_{0t},$$

где  $C_2, C_3$  – постоянные. Все величины с индексом 1 выражаются через

$\rho_0(t)$ . Для величин с индексом  $k$  получается система

$$\begin{aligned} \rho_k (u_{0t} + u_0^2) + \rho_0 (u_{kt} + (k+2) u_0 u_k) - \\ - w_0^2 \rho_k - 2w_0 \rho_0 w_k + (k+2) p_k = g_{1k}, \\ w_{kt} + 2w_0 u_k + (k+2) u_0 w_k = g_{2k}, \end{aligned} \tag{14.6}$$

$$\rho_{kt} + (k + 2)(u_0 \rho_k + \rho_0 u_k) = g_{3k},$$

$$2A_\rho^0 u_0 \rho_k + A_0 (k + 2) u_k = g_{4k},$$

где  $g_{ik}$  выражаются через коэффициенты рядов с индексом меньше  $k$ .

Предположим, что все величины с индексом меньше чем  $k$  выражаются через  $\rho_0$ . Покажем, что все величины с индексом  $k$  выражаются через  $\rho_0$ . Из последнего уравнения системы (14.6) определяется  $u_k$  линейно через  $\rho_k$  и  $\rho_0$ . Тогда третье уравнение системы (14.6) есть линейное уравнение для нахождения  $\rho_k$  с коэффициентами, выражающимися через  $\rho_0$ . Поэтому  $\rho_k$  выражается через  $\rho_0$ . Второе уравнение системы (14.6) так же есть линейное уравнение для нахождения  $w_k$  с коэффициентами, зависящими от  $\rho_0$ . Первое уравнение в (14.6) определяет  $p_k$ .

Итак, по индукции показали, что все коэффициенты рядов определяются через произвольную функцию  $\rho_0(t)$ , которая может быть задана на кромке. Кроме того, в каждом порядке появляются две постоянные интегрирования.

Сходимость рядов для малых  $r$  доказывается на основе теоремы 6.1 Коши-Ковалевской. Для этого система (14.1) должна быть системой типа Коши по переменной  $r$ . Это так, если  $u^2 - a^2 \neq 0$ ,  $u(0, t) = w(0, t) = 0$ ,  $p_r(0, t) = 0$ .

Упражнение 1. Показать, что на линии  $a = |u|$  система (14.1) будет системой типа Коши по  $r$ , если функция  $f$ , задающая уравнение состояния  $p = f(\rho, S)$ , не удовлетворяет уравнению  $f + \rho f_\rho = \chi(\rho^2 f_\rho)$ , где  $\chi$  — произвольная функция.

Упражнение 2. В случае политропного газа  $\rho = B(S)\rho^\gamma$  найти решение уравнения (14.4) вида  $\psi = r/b(t)$ . Показать, что  $b(t)$  определяется равен-

$$\text{ством } \int_{b_0}^{b(t)} \left( C_3 - C_2 b^{-2} + C_1 (\gamma - 1)^{-1} b^{2(1-\gamma)} \right)^{-1/2} db = t,$$

где  $b_0, C_1, C_2, C_3$  – постоянные.

Система (14.1) с отщепленным вторым уравнением допускает операторы  $\partial_t, t\partial_t + r\partial_r$ , что совпадает с нормализатором подалгебры 2.11 из приложения.

Упражнение 3. Показать, что  $\partial_t$  – инвариантное решение бывают двух типов

а)  $u = 0, \rho = r p_r w^{-2}, S = S(p, \rho)$  – уравнение состояния,  $w(r), p(r)$  – произвольные функции,  $v = -\beta r^{-1} w t + v_0(r)$ .

б)  $u \neq 0, S = S_0$  – изэнтропическое течение,  $w = \chi_0 r^{-1}$ ,  
 $u^2 + 2 \int \rho^{-1} dp + \chi_0^2 r^2 = B^2$  – интеграл Бернулли.

Получается изэнтропическое течение из неточечного источника с закруткой.

Упражнение 4. Показать, что автомодельное решение – инвариантное решение, построенное на операторе  $t\partial_t + r\partial_r$ , задается формулами  $S = S_0$  – интеграл энтропии,  $u = s + u_1(s), s = r t^{-1}, u_1 \neq 0; C_1 \rho u_1 = s w^2$  – интеграл закрутки; а  $u_1(s), \rho(s)$  определяются параметрически системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{s} &= s^2 (u_1^2 - a^2), \\ \dot{u}_1 &= u_1^2 (C_1 \rho - s^2) + a^2 s (u_1 + 2s), \\ \dot{\rho} &= -\rho u_1 (C_1 \rho + s u_1 + s^2). \end{aligned} \tag{14.7}$$

Упражнение 5. Для каких уравнений состояния система (14.7) имеет интеграл вида: а)  $F(\rho, u_1) = \text{const}$ , б)  $F_1(\rho, u_1)s + F_2(\rho, u_1) = \text{const}$ ?

Упражнение 6. Показать, что простая волна редуцируется к инвариантному решению для системы (14.1).

Упражнение 7. Вычислить характеристики и условия на них для системы (14.1)

$$C_0: d_t r = u, \quad D_0 S = 0;$$

$$C_+: d_t r = u + a, \quad \rho a D_+ u + D_+ \rho = r^{-3} a \chi^2(S) - r^{-1} \rho a^2 u;$$

$$C_-: d_t r = u - a, \quad \rho a D_- u - D_- \rho = r^{-3} a \chi^2(S) + r^{-1} \rho a^2 u.$$

Упражнение 8. Вывести уравнения инвариантных разрывов  $r = r_b(t)$  для подмодели 2.11: контактный разрыв  $u = r'_b$ ,  $[p] = 0$ ,  $[u] = 0$ ; ударная волна:  $[v] = [w] = 0$ ,  $(u_1 - r'_b)^2 = \rho_2 \rho_1^{-1} [p][\rho]^{-1}$ ,

$$(u_2 - r'_b)^2 = \rho_1 \rho_2^{-1} [p][\rho]^{-1}, \quad H(\rho_1, p_1; \rho_2, p_2) = 0 - \text{условие Гюгонио.}$$

### § 15. Течения со спиральными поверхностями уровня.

Рассматривается подалгебра 2.1 из приложения. В цилиндрической системе координат базис ее операторов записывается так  $\alpha t \partial_x + \partial_\theta + \alpha \partial_U, t \partial_t + (\beta t + x) \partial_x + r \partial_r + \beta \partial_U$ , где  $\alpha, \beta$  – алгебраические параметры ( в таблице приложения  $\alpha = a, \beta = b$ ). После вычисления инвариантов можно написать следующее представление инвариантного решения:

$$U = x t^{-1} + q(q^2 + \alpha^2)^{-1} [q(u + \beta) + \alpha w], V = v + q, \quad (15.1)$$

$$W = q(q^2 + \alpha^2)^{-1} [q w - \alpha(u + \beta)]; q = r t^{-1}, s = x t^{-1} - \alpha \theta - \beta \ln t,$$

где  $u, v, w, p, \rho$  – инвариантные  $i$  – скорости, давление, плотность являются функциями инвариантов  $q, s$  – новых независимых переменных.

Подстановка представления (15.1) в уравнения газовой динамики (3.6), (3.9), (3.8) приводит к уравнениям инвариантной подмодели стационарного типа 12.2

$$\begin{aligned}
& \rho q^2 (q^2 + \alpha^2)^{-1} D\mathbf{u} + p_s = \\
& = q\rho (q^2 + \alpha^2)^{-2} \left[ 2\alpha q w - (q(q^2 + \alpha^2) + 2\alpha^2)(u + \beta) \right], \\
& \rho Dv + p_q = -v\rho + q\rho (q^2 + \alpha^2)^{-2} (qw - \alpha u - \alpha\beta)^2, \\
& Dw = -w(1 + q^{-1}v), \\
& A^{-1}Dp + u_s + v_q = -q^{-1}v - 3, \\
& DS = 0, p = f(\rho, S),
\end{aligned} \tag{15.2}$$

где  $D = u\partial_s + v\partial_q$ . Вместо последнего уравнения для энтропии можно взять уравнение (3.5) для плотности

$$D\rho + \rho(u_s + v_q + q^{-1}v + 3) = 0. \tag{15.3}$$

Система (15.2) имеет симметрический вид, так как матрицы при производных вектора  $(\mathbf{u}, v, w, p, S)$  симметричны. Если одна из них положительно определена, то система (15.2) является симметрической гиперболической системой.

Пусть  $h(\mathbf{s}, q) = 0$  уравнение  $i$  – характеристик. Имеется (см. § 5) трехкратная контактная  $i$  – характеристика

$$C_0: uh_s + vh_q = 0, \tag{15.4}$$

и возможные две другие действительные  $i$  – характеристики удовлетворяют уравнению

$$C_{\pm}: (u^2 - a^2(1 + \alpha^2 q^{-2}))h_s^2 + 2uvh_s h_q + (v^2 - a^2)h_q^2 = 0. \tag{15.5}$$

Условие гиперболичности системы (15.2) есть условие неотрицательности дискриминанта квадратичного уравнения (15.5) относительно  $h_s h_q^{-1}$ , оно задает  $i$  – область гиперболичности на данном  $i$  – решении

$$q^2(q^2 + \alpha^2)^{-1}u^2 + v^2 \geq a^2. \quad (15.6)$$

Условие (15.6) в физических переменных принимает вид

$$(V - rt^{-1})^2 + r^2(r^2 + \alpha^2 t^2)^{-1}(U - \alpha t r^{-1}W - xt^{-1} - \beta)^2 \geq a^2.$$

Для инвариантной подмодели (15.2), (15.3) можно ввести величины и определения, аналогичные величинам и определениям двумерных установившихся течений из § 13:  $i$  – линии тока

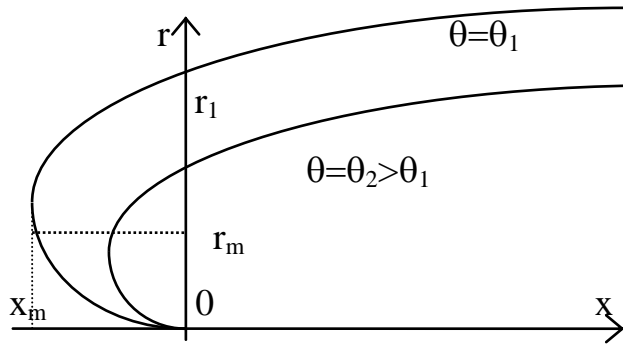
$$\frac{ds}{u} = \frac{dq}{v} \quad (15.7)$$

есть бихарактеристики  $i$  – характеристики  $C_0$ ;  $i$  – функция тока  $\psi(s, q)$ , с которой  $u = -\frac{3}{2}q\rho\psi_q, v = \frac{3}{2}q\rho\psi_s, \rho = \varphi_\psi\varphi_s^{-1}, q = \varphi_s(s, \psi); i$  – интеграл энтропии  $S = S(\psi); i$  – интеграл закрутки  $w = D(\psi)\varphi_\psi^{2/3}\varphi_s^{-1}$ .

Упражнение 1. Получить интегралы энтропии и закрутки для системы (15.2), (15.3).

Точке  $(s, q)$  инвариантной подмодели (15.2) соответствует двумерная поверхность в физическом пространстве  $R^4(x, r, \theta, t)$ . Сечение гиперплоскостью  $t = \text{const}$  дает кривую в  $R^3(x, r, \theta)$ . При различных значениях  $t$  проекции кривых в пространство  $R^3(x, r, \theta)$  образуют поверхность. Эта поверхность будет поверхностью уровня инвариантных функций, значения которых вычислены в одной точке, и является **спиральной поверхностью**. Уравнение поверхности уровня получается из формул (15.1) для независимых инвариантов  $q, s$  после исключения  $t$

$$x = rq^{-1}(\alpha\theta + s - \beta \ln q + \beta \ln r). \quad (15.8)$$



Сечение поверхности (15.8) полуплоскостью  $\theta = \text{const}$  есть кривая, имеющая два нуля функции  $x(r)$  в точках  $r_0 = 0$  (Рис. 1),

$r_1 = q \exp(-\beta^{-1}(s + \alpha\theta))$ ; один минимум  $er_m = r_1, ex_m = -\beta r_1$ . При увели-

чении угла  $\theta$  величины  $r_1, |x_m|$  — уменьшаются. Сечение поверхности (15.8)

плоскостью  $x = x_0$  есть спираль при  $x_0 \geq 0$ , или две спирали, соединенные

в точке  $\beta r_0 = -qx_0, \alpha\theta_0 + s = \beta(\ln \beta - 1 - \ln|x_0|)$ , согласно уравнению

$\alpha\theta = x_0 q r^{-1} - s + \beta \ln q - \beta \ln r$  при  $x_0 < 0$ .

При  $\alpha = 0$  поверхности уровня являются цилиндрическими поверхностями, образованными вращением кривой (15.8) вокруг оси  $x$ .

Пусть  $\omega \subset \mathbb{R}^2(s, q)$  область в полуплоскости  $q > 0$ . При фиксированном  $t$  точкам области  $\omega$  соответствуют линии в  $\mathbb{R}^3(x, r, \theta)$ , которые покрывают область  $\Omega$ . Пусть  $\Omega_{\theta_0}$  сечение области  $\Omega$  полуплоскостью  $\theta = \theta_0$ .

Имеется взаимно - однозначное соответствие между  $\omega$  и  $\Omega_{\theta_0}$  по формулам

(15.1). При изменении  $\theta_0$  на  $2\pi k, k$  — целое, образ  $\Omega_{\theta_0}$  сдвигается вдоль оси

$x$  на  $2\pi k \alpha t$  и оба образа находятся в одной и той же полуплоскости (Рис. 2).

Для однолиственности образов необходимо и достаточно, чтобы ширина  $\omega$

вдоль  $s$ , т.е. длина сечения  $\omega$  прямой  $q = q_0$ ,

не превосходила величины  $2\pi\alpha$ . Например,

для этого можно взять  $\omega$  из полуполосы

$$\{q \geq 0, |s| \leq \pi\alpha\}.$$

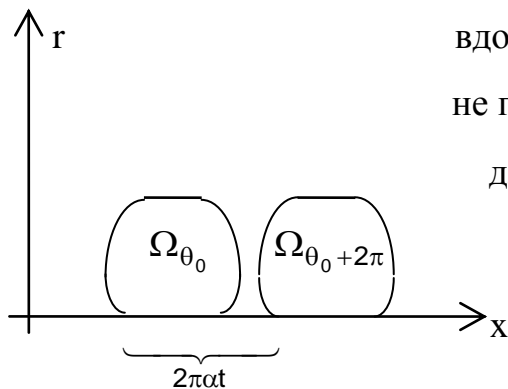


Рис. 2

Если при некотором значении  $q = q_0$  ширина  $\omega$  вдоль  $s$  равняется  $2\pi\alpha$ , то в физическом пространстве для фиксированного  $t$  могут получиться разрывы физических величин  $U, V, W, p, \rho$  на винтовой линии  $s = s_0, q = q_0$ . Для непрерывности требуется периодичность инвариантных функций по  $s$  с периодом  $2\pi\alpha$ .

Итак, непрерывное инвариантное течение во всем пространстве возможно, если существует периодическое решение подмодели (15.2) в области шириной  $2\pi\alpha$  по  $s, q \geq 0$ .

Если значения  $u$  инвариантных функций в точках  $q = q_0, s_1 = s_0, s_2 = s_0 + 2\pi\alpha$  различны, то каковы они должны быть, чтобы винтовая поверхность разрыва была контактным разрывом, ударной волной, стенкой?

**Лемма 1.** Физические траектории лежат на поверхностях, соответствующих  $i$ -линиям тока подмодели.

**Доказательство.** По формулам (15.1) уравнения расчета траекторий таковы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{q^2(u + \beta) + \alpha qw}{q^2 + \alpha^2}, \quad \frac{dr}{dt} = v + q; \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{q^2 w - \alpha q(u + \beta)}{q^2 + \alpha^2}$$

В силу этих уравнений дифференцирование независимых инвариантов дает  $d_t q = vt^{-1}, \quad d_t s = ut^{-1}$ . Отсюда получается уравнение для  $i$ -линии тока (15.7).

**Следствие.** Если область  $\omega$  определения решения подмодели (15.2) ограничена  $i$  – линиями тока и ее ширина по  $s$  не превосходит  $2\pi\alpha$ , то в физическом пространстве границе области  $\omega$  соответствует движущаяся стенка или контактный разрыв. В частности криволинейной полуполосе  $q \geq 0$  ширины  $2\pi\alpha$  по  $s$ , ограниченной  $i$  – линиями тока, соответствует течение, в котором двигается винтообразная стенка нулевой толщины. Если на этой поверхности давление непрерывно, то получается контактный разрыв.



Инвариантная поверхность задается равенством

$$F(x, r, \theta, t) = q - h(s) = 0 \quad (15.9)$$

Нормаль в физическом пространстве и скорость движения поверхности в направлении нормали вычисляется по формулам § 4.

$$\bar{n} = |\nabla F|^{-1} \nabla F = \left(1 + (1 + \alpha^2 q^{-2}) h_s^2\right)^{1/2} (-h_s, 1, \alpha q^{-1} h_s);$$

$$D_n = -|\nabla F|^{-1} F_t = \left(q - (\beta + x t^{-1}) h_s\right) \left(1 + (1 + \alpha^2 q^{-2}) h_s^2\right)^{1/2},$$

где  $\nabla = (\partial_x, \partial_r, r^{-1} \partial_\theta)$ .

Вектор скорости раскладывается на нормальную и касательную составляющие  $\bar{u} = (U, V, W) = u_n \bar{n} + \bar{u}_\sigma$ ,  $u_n = \bar{u} \cdot \bar{n}$ .

Относительная скорость и условия на поверхности сильного разрыва (§ 4) записываются через инварианты

$$\omega = u_n - D_n = (v - u h_s) \left(1 + (1 + \alpha^2 q^{-2}) h_s^2\right)^{-1/2}, \quad (15.10)$$

для контактного разрыва

$$[p] = p_2 - p_1 = 0, \quad v_j - u_j h_s = 0, \quad (15.11)$$

где индекс  $j = 1, 2$  определяет значения величин по разные стороны разрыва;

для ударной волны

$$\omega_1^2 = \rho_2 \rho_1^{-1} [p][\rho]^{-1}, \quad \omega_2^2 = \rho_1 \rho_2^{-1} [p][\rho]^{-1}, \quad (15.12)$$

$H(\rho_1, \rho_1; \rho_2, \rho_2) = 0$  – условие Гюгонио,  $[a_\sigma] = 0$ .

Из последнего условия следует альтернатива:

1) **i – прямой скачок:**  $h_s = 0$ ,

$$[u] = [w] = 0, \quad [v] = [\omega]; \quad (15.13)$$

2) **i – косой скачок:**  $h_s \neq 0$ ,

$$[u] = -(\alpha^2 h^{-2} + 1) h_s [v], \quad [w] = 0, \quad [\omega] = [v] \left(1 + (1 + \alpha^2 h^{-2}) h_s^2\right)^{1/2}. \quad (15.14)$$

**Теорема 1.** По заданным параметрам течения перед ударной волной при условии гиперболичности (15.6) в случае  $i$  – косо́го скачка и одному из параметров течения за фронтом ударной волны  $\rho_2, p_2, h(s)$  определяются остальные параметры течения из условий ударного перехода.

**Доказательство.** Пусть заданы  $\rho_1, p_1, u_1, v_1, w_1$  и, например,  $\rho_2 > \rho_1$ . Тогда из условия Гюгонио определяется  $p_2$ . Из (15.12) определяется  $\omega_1, \omega_2$ . В случае  $i$  – прямо́го скачка из (15.13) находятся  $u_2, w_2, v_2$ .

Для  $i$  – косо́го скачка уравнение его поверхности (15.9) определяется из (15.10) со стороны заданных параметров

$$\left(u_1^2 - \omega_1^2(1 + \alpha^2 h^{-2})\right)h_s^2 - 2v_1 u_1 h_s + v_1^2 - \omega_1^2 = 0.$$

Действительные решения возможны при условии не отрицательности дискриминанта этого квадратного уравнения относительно переменной  $h_s$ :

$$v_1^2 + h^2(h^2 + \alpha^2)^{-1}u_1^2 \geq \omega_1^2 = \rho_2 \rho_1^{-1} [p][\rho]^{-1} \geq a_1^2.$$

Это неравенство совпадает с (15.6) со стороны заданных параметров. После определения  $h(s)$  из (15.14) находятся  $w_2, v_2, u_2$ .

Если задано  $p_2$  вместо  $\rho_2$ , то  $\rho_2$  определяется из условия Гюгонио.

Если задано  $h(s)$ , то по (15.10) определяется  $\omega_1$  и условие Гюгонио вместе с первым равенством (15.12) определяют  $\rho_2, p_2$  в случае нормального газа.

Если задано  $v_2$ , то из (15.10), (15.14) определяется в случае  $i$  – косо́го скачка

$$p_2 = p_1 - \rho_1 [v](v_1 - u_1 h_s)$$

$$\rho_2^{-1} = \rho_1^{-1} \left(1 + [v](v_1 - u_1 h_s)^{-1} \left(1 + (1 + \alpha^2 h^{-2})h_s^2\right)\right).$$

Подстановка этих выражений в условие Гюгонио дает дифференциальное уравнение для определения  $h(s)$ .

Аналогично разрешается  $i$  – косо́й скачок в случае задания  $u_2$ .

Подмодель (15.2) допускает только перенос  $\partial_s$  в случае произвольного уравнения состояния, что совпадает с нормализатором подалгебры 2.1 из приложения.

Упражнение 2. Показать, что инвариантное  $\partial_s$  – решение подмодели (15.2) имеет интегралы:  $S = S_0, D_0^3 \rho v = q^2 w^3, u + \beta = C_0 q w$  при  $\alpha = 0$ , где  $S_0, D_0, C_0$  – постоянные. В результате получается система обыкновенных уравнений

$$\lambda^{-1} \lambda_q + v^{-1} \left( 1 + 2\alpha^2 q^{-1} (q^2 + \alpha^2)^{-1} \right) = 0,$$

$$v v_q + v + \rho^{-1} a^2 \rho_q = q (q^2 + \alpha^2)^{-2} \lambda^2, \rho^{-1} \rho_q + v^{-1} (v_q + 3) q^{-1} = 0,$$

где  $\lambda = qw - \alpha(u + \beta)$ .

Упражнение 3. Найти изобарические решения подмодели (15.2), используя формулы упражнения 2 из § 9.

### **§16. Инвариантные решения ранга один**

Для нахождения решений по трехмерной подалгебре необходимо вычислить ее инварианты. Подалгебры, содержащие оператор вращения  $X_7$ , записываются в цилиндрической системе координат  $C$ :

$$y = r \cos \theta, z = r \sin \theta, v = V \cos \theta - W \sin \theta, w = V \sin \theta + W \cos \theta, u = U;$$

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} (\partial_\theta + W \partial_v - V \partial_w),$$

$$X_3 = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} (\partial_\theta + W \partial_v - V \partial_w), X_4 = t \partial_x + \partial_u,$$

$$X_5 = \cos \theta (t \partial_r + \partial_v) - \frac{\sin \theta}{r} t [\partial_\theta + W \partial_v - (V - \frac{r}{t}) \partial_w],$$

$$X_6 = \sin \theta (t \partial_r + \partial_v) + \frac{\cos \theta}{r} t [\partial_\theta + W \partial_v - (V - \frac{r}{t}) \partial_w],$$

$$X_7 = \partial_\theta,$$

$$X_8 = \sin \theta (r \partial_x - x \partial_r + V \partial_u - U \partial_v) + \cos \theta [W \partial_u - U \partial_w - \frac{x}{r} (\partial_\theta + W \partial_v - V \partial_w)],$$

$$X_9 = -\cos \theta (r \partial_x - x \partial_r + V \partial_u - U \partial_v) + \sin \theta [W \partial_u - U \partial_w - \frac{x}{r} (\partial_\theta + W \partial_v - V \partial_w)],$$

$$X_{10} = \partial_t, X_{11} = t \partial_t + x \partial_x + r \partial_r$$

Трёхмерная подалгебра из 3-х вращений представляется в сферической системе координат S:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta, u = (U \sin \theta + V \cos \theta) \cos \phi - W \sin \phi, \\ v = (U \sin \theta + V \cos \theta) \sin \phi + W \cos \phi, w = U \cos \theta - V \sin \theta.$$

Инварианты трёхмерной подалгебры вычисляются по следующему правилу. Сначала вычисляется полный функционально независимый набор инвариантов первого базисного оператора. Затем два других базисных оператора записываются в инвариантах первого (замена переменных) и приравниваются нулю выражения при неинвариантной переменной. Расщепления даст лишь два линейно не связанных оператора. Далее вычисляются инварианты одного из оставшихся операторов, и последний оператор записывается в новых инвариантах. Наконец, вычисляются инварианты оставшегося оператора. Результат вычислений сводится в таблицу. Обозначения по столбцам :

№ - номер подалгебры из оптимальной системы, базис подалгебры, система координат K (D - декартова, C - цилиндрическая, S - сферическая); выражения для инвариантов, в которых отсутствуют общие для всех подалгебр инварианты  $\rho, \rho$ ;  $(\sigma, \delta_{\min})$  - ранг и минимальный дефект возможного частично инвариантного решения.

№	Базис	К	Инварианты ( $\rho, \rho$ - общие)	$\sigma, \delta_{\min}$
3.1	7,8,9	S	$t, r, U, V^2 + W^2$	2,1
3.2	7,10,11	C	$xr^{-1}, U, V, W$	1,0
3.3	4,7,11	C	$rt^{-1}, U - xt^{-1}, V, W$	1,0
3.4	1, $\alpha 4 + 7,$ $\beta 4 + 11$	C	$rt^{-1}, U - \alpha \theta - \beta \ln t , V, W$	1,0
3.5	1,10, $\beta 4 + 7 + \alpha 11$	C	$re^{-\alpha \theta}, U - \beta \theta, V, W$	1,0
3.6	1, $\beta 4 + 7, 4 + 10$	C	$r, U - t - \beta \theta, V, W$	1,0
3.7	1,10, $\beta 4 + 11$	D	$yz^{-1}, u - \beta \ln z , v, w$	1,0
3.8	5,6, $\beta 4 + 7 + \alpha 11$ $\alpha \neq 0$	C	$xt^{-1} - \beta \alpha^{-1} \ln t , U - \beta \alpha^{-1} \ln t , (V - rt^{-1})^2 + W^2 = Q^2,$ $\theta - \alpha^{-1} \ln t  - \arcsin((V - rt^{-1})Q^{-1})$	1,0
3.9	3+5, 2-6, $\alpha 1 + \beta 4 + 7$	C	$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0: t, U - \beta x(\alpha + \beta t)^{-1},$ $(V - tr(t^2 + 1)^{-1})^2 + (W + r(t^2 + 1)^{-1})^2 = Q^2,$ $\theta - x(\alpha + \beta t)^{-1} - \arcsin((V - tr(t^2 + 1)^{-1})Q^{-1})$ $\alpha = \beta = 0: t, x, U,$ $(V - tr(t^2 + 1)^{-1})^2 + (W + r(t^2 + 1)^{-1})^2 = Q^2$	1,0 2,1
3.10	5,6, $1 + \alpha 4 + 7$	C	$t, U - \alpha x(1 + \alpha t)^{-1}, (V - rt^{-1})^2 + W^2 = Q^2,$ $\theta - x(\alpha t + 1)^{-1} - \arcsin((V - rt^{-1})Q^{-1})$	1,0
3.11	5,6, $\beta 4 + 7$	C	$\beta \neq 0: t, U - xt^{-1}, (V - rt^{-1})^2 + W^2 = Q^2,$ $\theta - x(\beta t)^{-1} - \arcsin((V - rt^{-1})Q^{-1})$ $\beta = 0: t, x, U, (V - rt^{-1})^2 + W^2$	1,0 2,1
3.12	1,4,7 + $\alpha 11$ $\alpha \neq 0$	C	$rt^{-1}, \theta - \alpha^{-1} \ln t , V, W$	2,1
3.13	1,4,7	C	$t, r, V, W$	2,1

3.14	2,3, $\beta 4+7+\alpha 11$ $\alpha \neq 0$	C	$xt^{-1} - \beta \alpha^{-1} \ln t , U - xt^{-1}, V^2 + W^2 = Q^2,$ $\theta + \alpha^{-1} \ln t  - \arcsin(VQ^{-1})$	1,0
3.15	2,3, $\beta 4+7,$ $\beta \neq 0$	C	$t, U - xt^{-1}, V^2 + W^2 = Q^2,$ $\theta - x(\beta t)^{-1} - \arcsin(VQ^{-1})$	1,0
3.16	2,3,1+7	C	$t, U, V^2 + W^2 = Q^2, \theta - x - \arcsin(VQ^{-1})$	1,0
3.17	2,3,7	C	$t, x, U, V^2 + W^2$	2,1
3.18	1,4,7+10	C	$r, \theta - t, V, W$	2,1
3.19	2,3, $\beta \neq 0$ $\beta 4 + 7 + \beta 10$	C	$x - 2^{-1}t^2, U - t, V^2 + W^2 = Q^2, \theta - \beta^{-1}t - \arcsin(VQ^{-1})$	1,0
3.20	2,3,7+10	C	$x, U, V^2 + W^2 = Q^2, \theta - t - \arcsin(VQ^{-1})$	1,0
3.21	5,6, $\beta 4+11$	D	$xt^{-1} - \beta \ln t , u - xt^{-1}, v - yt^{-1}, w - zt^{-1}$	1,0
3.22	1, $\alpha 4+6,$ $\beta 4+\sigma 5+11$	D	$yt^{-1} - \sigma \ln t , u - \alpha zt^{-1} - \beta \ln t , v - \sigma \ln t , w - zt^{-1}$	1,0
3.23	1,4, $\alpha 5+11$ $\alpha \neq 0$	D	$yt^{-1}, zt^{-1} - \alpha \ln t , v, w - \alpha \ln t $	2,1
3.24	1,4,11	D	$yt^{-1}, zt^{-1}, v, w$	2,1
3.25	2,3, $\beta 4+\alpha 5+11,$ $\alpha \neq 0$	D	$xt^{-1} - \beta \ln t , u - xt^{-1}, v - \alpha \ln t , w$	1,0
3.26	2,3, $\beta 4+11$	D	$xt^{-1} - \beta \ln t , u - xt^{-1}, v, w$	1,0
3.27	3, $\alpha 1+\beta 2+6$ 4+10	D	$u - t, v$ $\beta \neq 0: \beta(x - 2^{-1}t^2) - \alpha y, w - y\beta^{-1}$ $\beta = 0, \alpha \neq 0: y, w - \alpha^{-1}(x - 2^{-1}t^2)$ $\beta = \alpha = 0: y, x - 2^{-1}t^2$	1,0 1,0 2,1
3.28	1,2+4,10	D	$z, u - y, v, w$	1,0
3.29	1,4,10	D	$y, z, v, w$	2,1
3.30	2,3,4+ $\alpha 5+10$ $\alpha \neq 0$	D	$x - 2^{-1}t^2, u - t, v, w - \alpha t$	1,0
3.31	2, 3, 6+10	D	$x, u, v, w - t$	1,0

3.32	2, 3, 4+10	D	$x - 2^{-1}t^2, u - t, v, w$	1,0
3.33	2,3,10	D	$x, u, v, w - t$	1,0
3.34	$-\delta^2 + \beta^3 + 4,$ $\delta^1 + \sigma^2 - \alpha^3 + 5,$ $-\beta^1 + \alpha^2 + \tau^3 + 6$	D	$\delta^2(t - \sigma)^2 + \beta^2\tau^2 + \alpha^2\sigma^2 = 1: t, \bar{u} + A\bar{x}, A = -A_1^{-1};$ $A_1 = C + D + tI, D = \text{diag}\{1, \sigma, \tau\},$ $C = -C^T = E\langle \bar{c} \rangle, \bar{c} = (\alpha, \beta, \delta)$	1,0
3.35	$\alpha^1 + 4, \beta^3 + 5,$ $\beta^2 - 6,$ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$	D	$t, u - x(t + \alpha)^{-1}, v - (ty + \beta z)(t^2 + \beta^2)^{-1}, w + (\beta y - tz)(t^2 + \beta^2)^{-1}$	1,0
3.36	4,5,6	D	$t, \bar{u} - \bar{x}t^{-1}$	1,0
3.38	$\alpha^1 + 3, 5, 6$	D	$\alpha \neq 0: t, u, v - yt^{-1}, w + (x - \alpha z)(\alpha t)^{-1}$ $\alpha = 0: t, x, u, v - yt^{-1}$	1,0 2,1
3.37	$\alpha^1 + 3, \beta^1 + 5,$ $\sigma^1 + \tau^2 + 6$ $\beta^2 + \tau^2 + \sigma^2 = 1$	D	$\alpha^2 + \sigma^2 + \tau^2\beta^2 \neq 0: t, x - \alpha z - \beta v - (\sigma - \alpha t)w, u,$ $y - tv - \tau w$ $\alpha = \sigma = \tau = 0, \beta = 1: t, x - yt^{-1}, u, v - yt^{-1}$ $\alpha = \beta = \sigma = 0, \tau = 1: t, x, u, w + tv - y$	1,0 2,1 2,1
3.39	$1, 3 + 5, \alpha^2 + 6$ $\alpha \neq -1$	D	$t, u, v + (\alpha z - ty)(t^2 - \alpha)^{-1}, w + (y - zt)(t^2 - \alpha)^{-1}$	1,0
3.40	$1, 3 + 5, 2 - 6$	D	$t, u, v - (\alpha z + ty)(t^2 + \alpha)^{-1}, w + (y - zt)(t^2 + \alpha)^{-1}$	1,0
3.41	1,5,6	D	$t, u, v - yt^{-1}, w - zt^{-1}$	1,0
3.42	$\alpha^1 + 3, 2, 4$	D	$t, u - xt^{-1} + \beta zt^{-1}, v, w$	1,0
3.43	2,3,4	D	$t, u - xt^{-1}, v, w$	1,0
3.44	1,2,3+4	D	$t, u - z, v, w$	1,0
3.45	1,2,4	D	$t, z, v, w$	2,1
3.46	1,2,3	D	$t, u, v, w$	1,0

Инвариантные решения ранга 1 возможны для подалгебр из таблицы, у которых в последнем столбце стоит (1,0). В этом случае инварианты, содержащие зависимые переменные, являются новыми функциями от инварианта, выраженного через независимые переменные. Из этих равенств определяется

представление решения через новые инвариантные функции. Подстановка в уравнения газовой динамики приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, у которой находятся не менее трех интегралов. Если система уравнений сводится к квадратурам, то говорят об инвариантных решениях. Неинтегрируемая система называется инвариантной подмоделью ранга один.

Сначала рассматриваются барохронные инвариантные решения  $\rho = \rho(t)$ . В общем случае барохронные движения газа изучались А.П.Чупахиным ("Барохронные движения газа. Общие свойства и подмодели типов (2,1) и (1,1)". Препринты № 4 - 98. Новосибирск: Институт гидродинамики СО РАН. 1998. 66 с.).

**Подалгебра 3.46** дает представление инвариантного решения

$$\vec{u} = \vec{u}(t), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из уравнений газовой динамики получается постоянное решение:

$\vec{u} = \vec{u}_0, \rho = \rho_0, S = S_0$ , которое описывает равномерное прямолинейное течение.

**Подалгебра 3.44** дает

$$u = z + u_1(t), v = v(t), w = w(t), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из уравнений газовой динамики получается сдвиговое движение

$$u = z - w_0 t, v = v_0, w = w_0, \rho = \rho_0, S = S_0.$$

В равномерно двигающейся системе координат со скоростью

$\vec{u}_0 = (0, v_0, w_0)$  решение имеет такой же вид, но с  $v_0 = w_0 = 0$ . В этом случае мировые линии частиц есть прямые  $x = x_0 + z_0 t, y = y_0, z = z_0$ .

Траектории есть прямые параллельные оси  $x$ . В каждой плоскости  $y = \text{const}$  происходят одинаковые движения. При  $z=0$  - покой. На прямой  $x = \text{const}, y = \text{const}$  профиль скоростей частиц линейный. Квадрат из начального положения частиц в плоскости  $(x, z)$  переходит в параллелограмм (см. рисунок 1). Происходит сдвиговое движение.



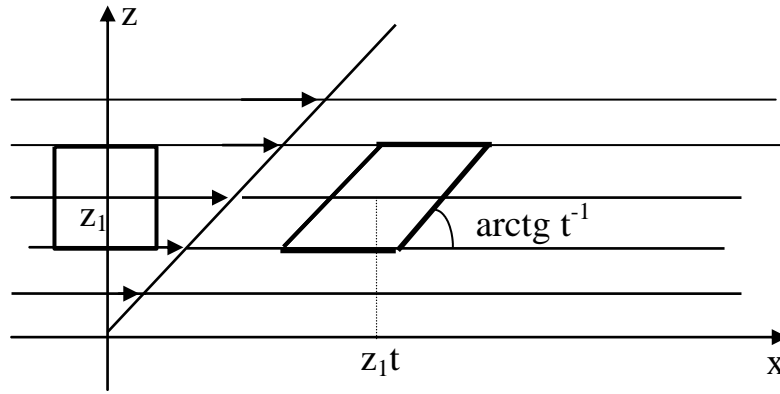


Рис. 1

**Подалгебры 3.42  $\cup$  3.43** дают

$$u = \alpha z^{-1} - \alpha z t^{-1} + u_1(t), v = v(t), w = w(t), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из уравнений газовой динамики получается движение

$$u = (\alpha - \alpha z) t^{-1}, v = w = 0, \rho = \rho_0 t^{-1}, S = S_0$$

с прямыми мировыми линиями

$$x = \alpha z_0 + u_0 t, y = y_0, z = z_0.$$

Траектории есть прямые параллельные оси  $x$ . В начальный момент  $t=0$  все частицы сосредоточены в плоскости  $x = \alpha z$ . Из каждой точки этой плоскости  $(\alpha z_0, y_0, z_0)$  начинают двигаться множество частиц со скоростями  $(u_0, 0, 0)$ , мгновенно заполняя прямую  $y = y_0, z = z_0$ . Картина движения одинакова в любой плоскости  $y = \text{const}$  (см. рисунок 2).

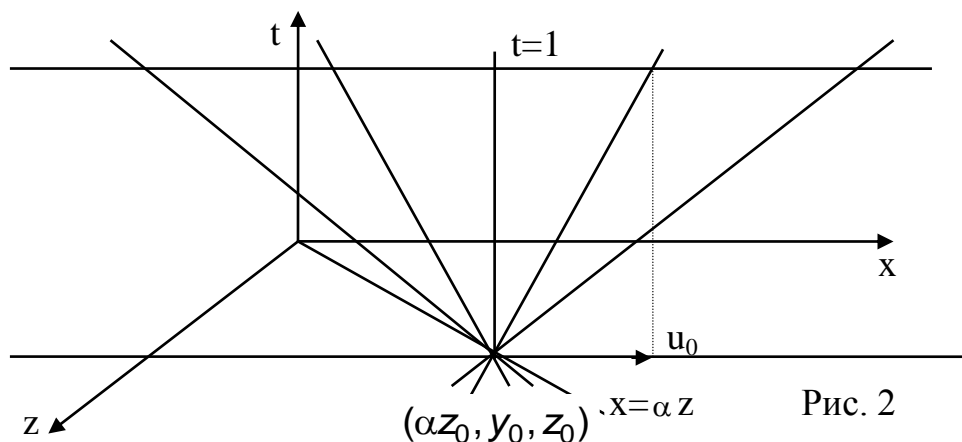


Рис. 2

Плотность бесконечная в начальный момент становится конечной

при  $t > 0$ , уменьшается до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Такое движение газа можно назвать **мгновенным плоским источником**.

Для отрицательных моментов времени  $t < 0$  частицы **коллапсируют** из пространства на плоскость  $x = \alpha z$ . Коллапс не физическое явление, частицы не должны сталкиваться. Поэтому существуют поверхности в области движения частиц, по которым примыкают другие решения. Эти поверхности есть характеристики или ударные волны.

**Подалгебра 3.41** дает

$$u = u(t), v = yt^{-1} + v_1(t), w = zt^{-1} + w_1(t), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение, записанное в цилиндрической системе координат

$$U = U_0, V = rt^{-1}, W = 0, \rho = \rho_0 t^{-2}, S = S_0.$$

Галилеев перенос по  $x$  делает  $U_0 = 0$ . (постоянная не существенна).

Мировые линии - прямые, одни и те же в каждой полуплоскости  $\theta = \text{const}$

$$x = x_0, r = q_0 t, \theta = \theta_0.$$

В момент времени  $t=0$  частицы стартуют с оси  $x$ . Из каждой точки  $x = x_0$  оси  $x$  вылетает множество частиц с различными скоростями в направлении лучей  $x = x_0, \theta = \theta_0$  мгновенно заполняя всю плоскость  $x = x_0$ .

Картина на каждом из лучей одинакова (см. рисунок 3)

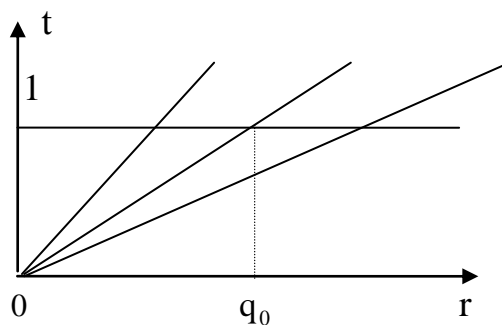


Рис. 3

Такое движение газа можно назвать **мгновенным линейным источником**. Для отрицательных  $t$  имеем коллапс на ось  $x$ .

**Подалгебры 3.39**  $\cup$  **3.40** дают

$$u = u(t), \rho = \rho(t), S = S(t), v = (ty - \alpha z)(t^2 - \alpha)^{-1} + v_1(t), w = (tz - y)(t^2 - \alpha)^{-1} + w_1(t).$$

Из УГД получается решение

$$u = u_0, S = S_0, \rho = \rho_0 (t^2 - \alpha)^{-1}, v_1 = (w_0 t - \alpha v_0)(t^2 - \alpha)^{-1}, \\ w_1 = (v_0 t - w_0)(t^2 - \alpha)^{-1}.$$

Галилеев перенос по  $x$  и переносы по  $y, z$  делают  $u_0 = 0, w_0 = v_0 = 0$ .

Общее решение подобно простейшему

$$u = 0, S = S_0, \rho = \rho_0 (t^2 - \alpha)^{-1}, v = (ty - \alpha z)(t^2 - \alpha)^{-1}, w = (tz - y)(t^2 - \alpha)^{-1}.$$

Мировые линии этого решения - прямые

$$x = x_0, y = y_0 + tz_0, z = z_0 + \alpha^{-1} y_0 t,$$

где  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  положение частиц в момент  $t=0$  (лагранжевы координаты). Матрица перехода от лагранжевых координат к эйлеровым имеет вид

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t\alpha^{-1} & 1 \end{vmatrix}, \quad k = \text{rank} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} = 3 \quad \text{при } t^2 - \alpha \neq 0, \quad k=2 \quad \text{при } t^2 = \alpha.$$

Если  $\alpha < 0$ , то  $\det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \neq 0$  и происходит движение частиц по прямым без

особенностей (столкновений). Картина движения в каждой плоскости

$x=\text{const}$  одинакова. Траектория в плоскости  $x=\text{const}$  задается равенством

$$(y - y_0, z - z_0) \cdot (y_0, -\alpha z_0) = 0 \quad \text{и является прямой перпендикулярной вектору}$$

$(y_0, -\alpha z_0)$ , проходящей через точку  $(y_0, z_0)$ . Расстояние  $r_0$  между двумя

частицами плоскости  $x=\text{const}$ :  $(y_{01}, z_{01}), (y_{02}, z_{02})$  изменяется со временем по

$$\text{закону } r^2 = r_0^2 \cos^2 \varphi_0 [(1 + t \text{tg} \varphi_0)^2 + (t\alpha^{-1} + \text{tg} \varphi_0)^2], \quad \text{где } \text{tg} \varphi_0 = (z_{01} - z_{02})(y_{01} - y_{02})^{-1}.$$

Угол поворота отрезка, соединяющего две точки со временем изменяется

так  $\text{tg} \varphi = (t\alpha^{-1} + \text{tg} \varphi_0)(1 + t \text{tg} \varphi_0)^{-1}$ . Экстремум расстояния достигается в момент

$t_m = -\alpha(\alpha + 1)\text{tg} \varphi_0 (1 + \alpha^2 \text{tg}^2 \varphi_0)^{-1}$  и равен

$$r_m^2 = r_0^2 (\cos^2 \varphi_0 - \alpha \sin^2 \varphi_0) (\cos^2 \varphi_0 + \alpha^2 \sin^2 \varphi_0)^{-1}.$$

При этом  $\operatorname{tg}\varphi_m = \alpha \operatorname{tg}\varphi_0$ . Начальные углы, в направлении которых происходит экстремальные удаления таковы

$$\varphi_0 = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi(r_m = r_0), \operatorname{tg}^2 \varphi_0 = -\alpha^{-1}(r_m = r_0 \sqrt{2\alpha(\alpha-1)})^{\frac{-1}{2}}.$$

Константа квазиконформности есть отношение наибольшего и наименьшего удалений  $Q = \sqrt{2\alpha(\alpha-1)^{-1}}$ . Она конечна при  $\alpha < 0$  и при  $\alpha = -1$  равна 1 (отображение лагранжевых координат в эйлеровы конформно).

Если  $\alpha \geq 0$ , то при  $t = \sqrt{\alpha}(t = -\sqrt{\alpha})$  частицы сосредотачиваются в плоскости  $y = \sqrt{\alpha}z (y = -\sqrt{\alpha}z)$ . В точку этой плоскости с координатами  $x = x_0, y = y_1 = \sqrt{\alpha}z_1 (y = y_1 = -\sqrt{\alpha}z_1), z = z_1$  попадают частицы, находящиеся на прямой  $x = x_0, y_0 + \sqrt{\alpha}z_0 = y_1 (y_0 - \sqrt{\alpha}z_0 = y_1)$  в момент  $t=0$ .

За время  $-\infty < t < -\sqrt{\alpha}$  происходит коллапс частиц всего пространства на плоскость  $y = -\sqrt{\alpha}z$ . В момент  $t = -\sqrt{\alpha}$  рождается мгновенный плоский источник, и частицы при  $-\sqrt{\alpha} < t < \sqrt{\alpha}$  заполняют все пространство. При  $t \rightarrow \sqrt{\alpha}$  происходит коллапс частиц на плоскость  $y = \sqrt{\alpha}z$ . В момент  $t = \sqrt{\alpha}$  рождается другой мгновенный плоский источник, заполняя все пространство при  $t > \sqrt{\alpha}$ .

**Подалгебра 3.38** дает

$$u = u(t), v = yt^{-1} + v_1(t), w = zt^{-1} - x(\alpha t)^{-1} + w_1(t), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение

$$u = 0, v = yt^{-1}, w = zt^{-1} - x(\alpha t)^{-1}, \rho = \rho_0 t^{-2}, S = S_0.$$

Мировые линии - прямые

$$x = x_0, y = tv_0, z = w_0 t + x_0 \alpha^{-1}.$$

Лагранжевы координаты  $\vec{x}_0 = (x_0, v_0, w_0)$ . Особенность перехода к лагранжевым переменным происходит при  $t=0$  ( $\det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} = 0$ ). При этом

$\text{rank} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} \Big|_{t=0} = 1$ . Особое многообразие есть прямая  $y = 0, x = \alpha z$  (коллапс - мгновенный линейный источник). Из каждой точки прямой вылетают частицы с различными скоростями  $(0, v_0, w_0)$ , мгновенно заполняя все пространство.

**Подалгебра 3.37** дает

$$u = u(t), \rho = \rho(t), S = S(t), v = (\tau x - (\sigma - \alpha t)y - \alpha \tau z + \tau f(t) - (\sigma - \alpha t)g(t))(\beta \tau - \sigma t + \alpha t^2)^{-1}, \\ w = (-\tau x + \alpha \tau z + \beta y - \tau f(t) + \beta g(t))(\beta \tau - \sigma t + \alpha t^2)^{-1}, \beta^2 + \tau^2 + \sigma^2 = 1, \alpha^2 + \sigma^2 + \tau^2 \beta^2 \neq 0.$$

Из УГД получается решение

$$u = f = g = 0, S = S_0, \rho = \rho_0 (\alpha t^2 - \sigma t + \beta \tau)^{-1}.$$

Мировые линии - прямые

а)  $\alpha \neq 0$ :  $x = x_0, y = v_0 t + \tau w_0, \alpha z = x_0 + \alpha w_0 t - \beta v_0 - \sigma w_0$ ;

б)  $\alpha = 0, \sigma \neq 0$ :  $x = x_0, y = v_0 t + \tau \sigma^{-1}(x_0 - \beta v_0), z = \sigma^{-1}(\beta v_0 - x_0)t + z_0$ ;

в)  $\alpha = \sigma = 0$ :  $x = x_0, y = x_0 \beta^{-1} t + y_0, z = y_0 \tau^{-1} t + z_0$ ;

где величины с индексом ноль есть лагранжевы координаты.

Якобиан преобразования лагранжевых координат в эйлеровы равен

а)  $\alpha^{-1}(\alpha t^2 - \sigma t + \beta \tau)$ , б)  $t - \tau \beta \sigma^{-1}$ , в) 1. В случае в) имеем движение без особенности; в случае б) при  $t = \tau \beta \sigma^{-1}$  движение происходит в плоскости  $\sigma y = \tau x$  (коллапс - мгновенный источник); в случае а) при  $\sigma^2 - 4\alpha \beta \tau < 0$  движение без особенности; при  $\sigma^2 = 4\alpha \beta \tau$  имеется одна особенность на плоскости  $2\alpha \tau z + \sigma y - 2\tau x = 0$  в момент  $t = \sigma(2\alpha)^{-1}$ ; при  $\Delta^2 = \sigma^2 - 4\alpha \beta \tau > 0$  имеется две особенности на плоскостях  $\alpha z = x + (-\sigma \pm \Delta)(2\tau)^{-1} y$  в моменты  $t = (\sigma \pm \Delta)(2\alpha)^{-1}$ .

**Подалгебра 3.36** дает

$$\bar{u} = \bar{x} t^{-1} + \bar{u}_1(t), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение

$$\bar{u} = \bar{x} t^{-1}, \rho = \rho_0 t^{-3}, S = S_0.$$

Мировые линии – прямые  $\vec{x} = t\vec{u}_0$ , проходящие через начало координат в момент  $t=0$ . Решение описывает мгновенный точечный источник при  $t > 0$  и коллапс в точку при  $t < 0$ .

**Подалгебра 3.35** дает

$$u=x(t+\alpha)^{-1}+u_1(t), \quad v=(yt+\beta z)(t^2+\beta^2)^{-1}+v_1(t), \quad w=(zt-\beta y)(t^2+\beta^2)^{-1}+w_1(t), \\ \rho=\rho(t), \quad S=S(t).$$

Из УГД получается решение  $u=x(t+\alpha)^{-1}, \quad v=(yt+\beta z)(t^2+\beta^2)^{-1},$   
 $w=(zt-\beta y)(t^2+\beta^2)^{-1}, \quad \rho=\rho_0(t+\alpha)^{-1}(t^2+\beta^2)^{-1}, \quad S=S_0.$

Мировые линии – прямые  $x = u_0(t + \alpha), y = y_0 + z_0 t \beta^{-1}, z = z_0 - y_0 t \beta^{-1},$  где  $u_0, y_0, z_0$  - лагранжевы переменные. Якобиан перехода от лагранжевых переменных к эйлеровым равен  $(t + \alpha)(1 + t^2 \beta^{-2})$ . При  $t = -\alpha$  все частицы сосредоточены в плоскости  $x=0$  (особенность типа коллапс - мгновенный источник).

**Подалгебра 3.34** дает представление решения

$$\vec{u} = -A\vec{x} + \vec{u}_1(t), \rho = \rho(t), S = S(t); A_t = A^2, -A^{-1} = C + D + It,$$

где  $C = E\langle \vec{c} \rangle$  задает поворот с угловой скоростью,  $\vec{c} = (\alpha, \beta, \delta), D = \text{diag}\{1, \sigma, \tau\}, I$  – единичная матрица ( $C\vec{a} = \vec{c} \times \vec{a}, I\vec{a} = \vec{a}$ ) и  $\delta^2(t - \sigma)^2 + \beta^2 \tau^2 + \alpha^2 \sigma^2 = 1$ .

Из УГД получается решение с точностью до галилеевых переносов

$$\vec{u} = -A\vec{x}, \rho = \rho_0 e^{\text{tr}A}, S = S_0.$$

Мировые линии – прямые

$$\vec{x} = t\vec{u}_0 + D\vec{u}_0 + \vec{c} \times \vec{u}_0,$$

где  $\vec{u}_0$  - лагранжевы переменные.

Определитель матрицы Якоби  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}_0} = C + D + It$  равен

$t^3 + t^2(\sigma + \tau + 1) + t(\sigma\tau + \sigma + \tau + \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) + \sigma\tau + \beta^2\sigma + \tau\delta^2 + \alpha^2$ . Он обращается в ноль при  $t = t_1$ . Действительных корней может быть 3, 2 или 1. Это собственные числа матрицы  $C + D$ . Если ранг матрицы Якоби равен 2 при  $t = t_1$ ,

то в этот момент все частицы сосредоточены на плоскости. Ранг матрицы Якоби равен 1 в трех случаях

- 1)  $t_2 = -1, \delta = \beta = 0, (\sigma - 1)(\tau - 1) + \alpha^2 = 0, t_1 = 1 - \sigma - \tau;$
- 2)  $t_2 = -\sigma, \delta = \alpha = 0, (\sigma - 1)(\sigma - \tau) + \beta^2 = 0, t_1 = \sigma - \tau - 1;$
- 3)  $t_2 = -1, \alpha = \beta = 0, (\tau - 1)(\tau - \sigma) + \delta^2 = 0, t_1 = \tau - \sigma - 1;$

когда имеется собственное число кратности 2.

В момент  $t_2$  при выполнении соответствующих равенств на параметры частицы сосредоточены на прямой, и есть еще один корень уравнения

$\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}_0} = 0 : t = t_1$ , для которого частицы находятся на плоскости. Параметры

подалгебры таковы, что случай  $\text{rank} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}_0} = 0$  невозможен.

**Подалгебра 3.16** дает

$$U = U(t), V = Q(t) \sin(\theta - x - \varphi(t)), W = Q(t) \cos(\theta - x - \varphi(t)), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение в системе координат D:

$$u = 0, v = -Q_0 \sin x, w = Q_0 \cos x, \rho = \rho_0, S = S_0.$$

Это случай двумерных изобарических постоянных течений в каждой плоскости  $x = \text{const}$  (см. подалгебру 3.33).

**Подалгебра 3.15** дает в системе координат D

$$u = xt^{-1} + u_1(t), v = q(t) \cos(x(t\beta)^{-1} - \varphi(t)), w = q(t) \sin(x(t\beta)^{-1} - \varphi(t)), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение с точностью до галилеева переноса и вращения

$$u = xt^{-1}, v = q_0 \cos(x(t\beta)^{-1}), w = q_0 \sin(x(t\beta)^{-1}), \rho = \rho_0 t^{-1}, S = S_0.$$

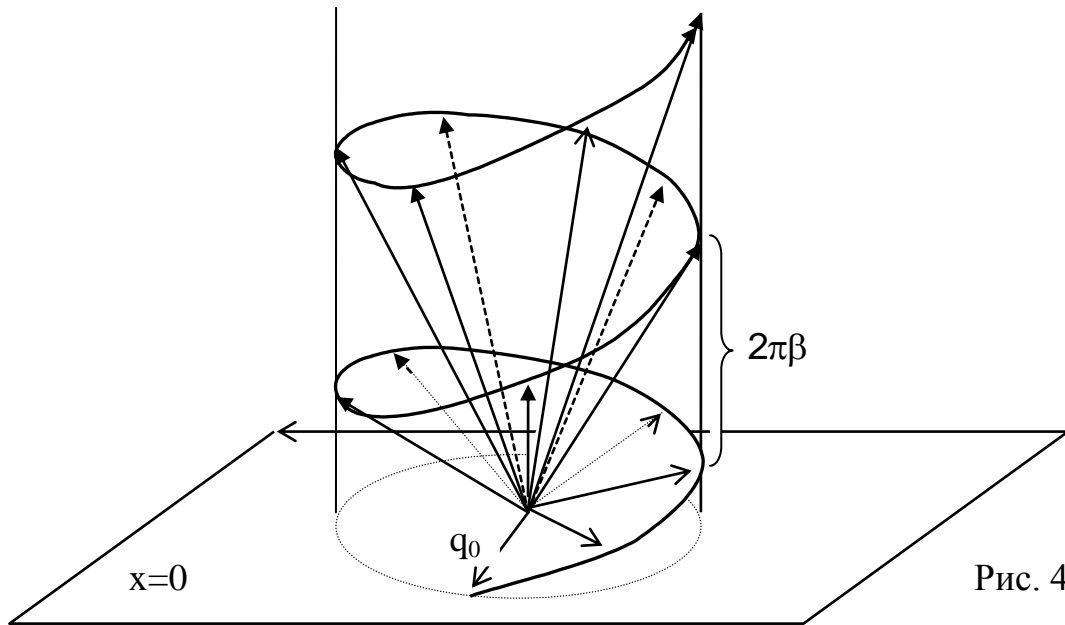
Мировые линии – прямые

$$x = u_0 t, y = q_0 t \cos(u_0 \beta^{-1}) + y_0, z = q_0 t \sin(u_0 \beta^{-1}) + z_0,$$

где  $u_0, y_0, z_0$  - лагранжевы переменные. При  $t=0$  частицы сосредоточены на плоскости  $x=0$ . Из точки  $(0, y_0, z_0)$  при  $t>0$  вылетает множество частиц со

скоростями  $(u_0, q_0 \cos(u_0 \beta^{-1}), q_0 \sin(u_0 \beta^{-1}))$ , их годограф есть винтовая линия ( $u_0$ -параметр) на цилиндре радиуса  $q_0$  с шагом  $2\pi\beta$  (см. рисунок 4).

Пусть скорость частиц ограничена  $0 \leq |\vec{u}_0| < U_0$ . Тогда частицы с единичной площади плоскости  $x=0$  за время  $T$  займут объем  $T\sqrt{U_0^2 - q_0^2}$ , плотность мгновенного источника равна  $\rho_0 \sqrt{1 + q_0^2 \beta^{-2}} \sqrt{U_0^2 - q_0^2}$ , расход через единичную площадь плоскости  $x = x_0$  за время  $T$  есть  $\rho_0(U_0 - x_0 T^{-1}) \rightarrow \rho_0 U_0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Контактный разрыв  $y \cos(x(\beta t)^{-1}) - z \sin(x(\beta t)^{-1}) = h(xt^{-1})$  возможен для политропного газа  $S_1 \rho_1^\gamma = S_2 \rho_2^\gamma$ .



**Подалгебра 3.11** дает

$$u = xt^{-1} + u_1(t), v = yt^{-1} + q(t) \cos((x(\beta t)^{-1}) + \phi(t)),$$

$$w = zt^{-1} + q(t) \sin((x(\beta t)^{-1}) + \phi(t)), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение с точностью до галилеевых переносов и вращения

$$u = xt^{-1}, v = yt^{-1} + q_0 t^{-1} \cos(x(\beta t)^{-1}), w = zt^{-1} + q_0 t^{-1} \sin(x(\beta t)^{-1}), \rho = \rho_0 t^{-3}, S = S_0.$$

Мировые линии – прямые

$$x = u_0 t, y = v_0 t - q_0 \cos(u_0 \beta^{-1}), z = w_0 t - q_0 \sin(u_0 \beta^{-1}),$$



где  $\bar{u}_0 = (u_0, v_0, w_0)$  - лагранжевы переменные. Матрица Якоби  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}_0}$  вырождается при  $t=0$ ,  $\text{rank} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}_0} = 1$ . При  $t=0$  частицы сосредоточены на окружности  $x = 0, y^2 + z^2 = q_0^2$ . Из точки  $(0, y_0 = q_0 \cos \varphi_0, z_0 = q_0 \sin \varphi_0)$  этой окружности вылетают множество частиц, которые в момент  $t$  занимают плоскости  $x = \beta t(\varphi_0 - \pi(2k+1))$ .

**Подалгебра 3.10** дает

$$u = \alpha x(1 + \alpha t)^{-1} + u_1, v = yt^{-1} + q(t) \cos(x(\alpha t + 1)^{-1} + \varphi(t)),$$

$$w = zt^{-1} + q(t) \sin(x(\alpha t + 1)^{-1} + \varphi(t)), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение с точностью до переносов и вращений

$$u = \alpha x(1 + \alpha t)^{-1}, v = yt^{-1} + q_0 t^{-1} \cos(x(1 + \alpha t)^{-1}), w = zt^{-1} + q_0 t^{-1} \sin(x(1 + \alpha t)^{-1}),$$

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)^{-1} t^{-2}, S = S_0.$$

Мировые линии – прямые

$$x = x_0(1 + \alpha t), y = v_0 t - q_0 \cos x_0, z = w_0 t - q_0 \sin x_0,$$

где  $x_0, v_0, w_0$  - лагранжевы переменные. Определитель матрицы Якоби равен  $t^2(1 + \alpha t)$ . При  $t = -\alpha^{-1}$  частицы сосредоточены на плоскости  $x = 0$ . При  $t=0$  частицы сосредоточены на винтовой линии  $y = -q_0 \cos x, z = -q_0 \sin x$ . В точку  $(x_1, -q_0 \cos x_1, -q_0 \sin x_1)$  на винтовой линии попадают частицы из любой точки плоскости  $x=0$ , причем из точки  $(0, -\alpha^{-1}v_0 - q_0 \cos x_1, -\alpha^{-1}w_0 - q_0 \sin x_1)$  частица движется со скоростью  $(\alpha x_1, v_0, w_0)$ .

**Подалгебра 3.9** дает

$$u = \beta x(\alpha + \beta t)^{-1} + u_1(t), v = (ty + z)(t^2 + 1)^{-1} + q(t) \cos(x(\alpha + \beta t)^{-1} + \varphi(t)),$$

$$w = (tz - y)(t^2 + 1)^{-1} + q(t) \sin(x(\alpha + \beta t)^{-1} + \varphi(t)), \rho = \rho(t), S = S(t).$$

Из УГД получается решение с точностью до переносов

$$u = \beta\Phi, \Phi = x(\beta t + \alpha)^{-1}, v = (ty + z + q_0(\cos\Phi - t \sin\Phi))(t^2 + 1)^{-1},$$

$$w = (tz - y + q_0(t \cos\Phi + \sin\Phi))(t^2 + 1)^{-1}, \rho = \rho_0(\alpha + \beta t)^{-1}(t^2 + 1)^{-1}, S = S_0.$$

Мировые линии – прямые

$$x = \Phi_0(\alpha + \beta t), y = v_0 t - w_0 + q_0 \sin\Phi_0, z = w_0 t + v_0 - q_0 \cos\Phi_0,$$

где  $\Phi_0, v_0, w_0$  - лагранжевы координаты. Определитель матрицы Якоби равен  $(t^2 + 1)(\alpha + \beta t)$ . особенность возникает в момент  $t = -\alpha\beta^{-1}$  (при  $\beta = 0$  нет особенности), когда все частицы сосредотачиваются на плоскости  $x = 0$ . Из каждой точки этой плоскости вылетают частицы со всевозможными скоростями. Если выбрать по одной частице со специально подобранной скоростью для каждой точки плоскости, то в момент  $t$  можно получить из этих частиц любую поверхность.

Инвариантные барохронные движения ранга 1 рассмотрены. Они имеют общие свойства: частицы двигаются по прямым. Якобиан перехода от лагранжевых переменных к эйлеровым переменным обратно пропорционален плотности. Моменту времени, когда якобиан обращается в ноль, соответствует многообразие частиц размерности, равной рангу матрицы Якоби в этот момент.

Далее рассматриваются подалгебры, для которых  $t$  не является инвариантом.

**Подалгебра 3.33** дает представление решения, в котором все функции зависят только от одной пространственной переменной  $x$ .

Из УГД следует либо постоянное решение, либо решение  $u = 0, v = v(x), w = w(x), \rho = \rho(x), p = p_0$  с тремя произвольными функциями. Во втором изобарическом случае частицы двигаются по параллельным прямым  $y = y_0 + v(x_0)t, z = z_0 + w(x_0)t$  в плоскостях  $x = x_0$ .

**Подалгебра 3.32** дает

$$u = t + u_1(s), v = v(s), w = w(s), \rho = \rho(s), S = S(s), s = x - \frac{1}{2}t^2.$$

Из УГД получается два типа решений:

$$1) u_1 \rho = C, u_1^2 + 2 \int \rho^{-1} d\rho = D - s, v = v_0, w = w_0, S = S_0;$$

$$2) u = t, v = v(s), w = w(s), p = p(s), \rho = p'(s).$$

Мировые линии определяются равенствами

$$x = x_0 + \frac{1}{2}t^2, y = y_0 + v(x_0)t, z = z_0 + w(x_0)t.$$

В равноускоренной вдоль оси  $x$  системе координат решения второго типа совпадают с решениями, построенными по подалгебре 3.33. Значит, на движение, инвариантное относительно подалгебры 3.33, инерционные силы не оказывают влияния при равноускоренном движении среды вдоль оси  $x$ .

Решение первого типа в равноускоренной системе координат описывают установившееся течение из неточечного источника, так как решение определено только при  $s \leq D$ .

**Подалгебра 3.31** дает

$$u = u(x), v = v(x), w = t + w_1(x), \rho = \rho(x), S = S(x).$$

Из УГД получается решение

$$u = u_0 \neq 0, v = v_0, w = t + w_0 - xu_0^{-1}, \rho = \rho_0, S = S_0.$$

Растяжение, инверсия и галилеевы переносы по  $x, y, z$  делают  $u_0 = v_0 = w_0 = 0$  и приводят к сдвиговому движению (см. подалгебру 3.44).

**Подалгебра 3.30** дает

$$u = t + u_1(s), v = v(s), w = \alpha t + w_1(s), \rho = \rho(s), S = S(s), s = x - \frac{1}{2}t^2, \alpha \neq 0.$$

Из УГД получается решение с точностью до галилеевых переносов по  $y$  и  $z$ :  $v = 0, w = -\alpha \int u_1^{-1} ds, S = S_0, \rho u_1 = D,$

$$G(\rho) = D^2 \rho^{-2} + 2 \int_0^{\rho} \rho^{-1} d\rho = C - 2s = F(s).$$

Решение определено в области  $s \leq s_* < 2^{-1}D$ , где

$$C - 2s_* = D^2 \rho_*^{-2} + 2 \int_0^{\rho_*} \rho^{-1} d\rho, \quad \rho_* f_{\rho}^{1/2} = D \quad (\text{см. рисунок 5}).$$

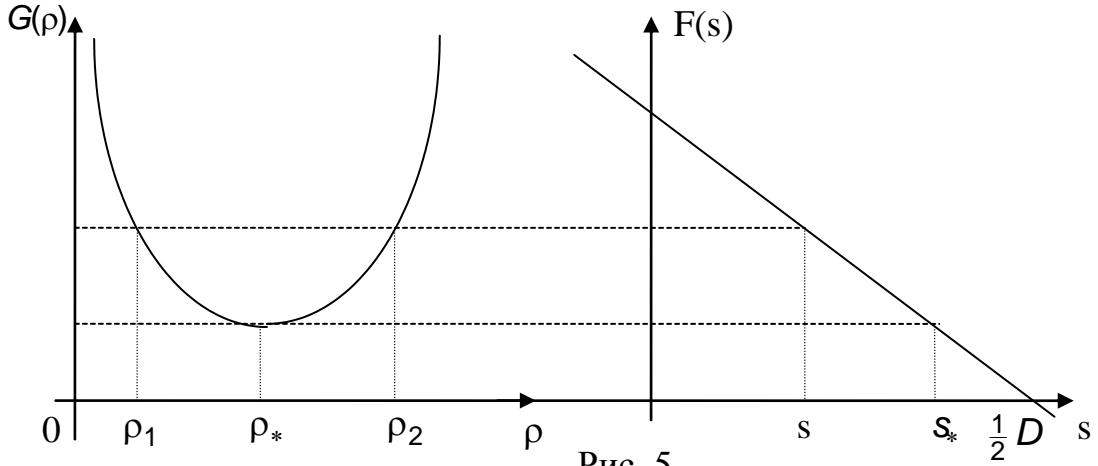


Рис. 5

Для каждого  $s < s_*$  имеется два значения  $\rho_i(s) > \rho_*$ ,  $i = 1, 2$ . Имеем два истечения газа из двигающегося вдоль оси  $z$  источника, с равноускоренно двигающейся границей  $x = \frac{1}{2}t^2 + s_*$ . Мирные линии частиц определяются ра-

$$\text{венствами } \int_{s_*}^s \rho(s) ds = Dt + s_0, \quad y = y_0, \quad z = \frac{1}{2} \alpha t^2 + z_0.$$

В системе координат, двигающейся с ускорением  $\vec{a} = (1, 0, \alpha)$ , получается установившееся течение из неточечного источника.

При  $s \rightarrow s_*$  имеем,  $f_{\rho}(\rho_*) = u_1^{-2}(s_*)$  и  $u_1' = (f_{\rho} - u_1^2)^{-1} \rightarrow \infty$ . Значит, граница звукового источника совпадает с предельной плоскостью. До предельной плоскости движение должно перестроиться.

**Подалгебра 3.28** дает

$$u = y + u_1(z), \quad v = v(z), \quad w = w(z), \quad \rho = \rho(z), \quad S = S(z).$$

Из УГД получается два вида стационарных решений.

1.  $u = y + u_1(z), v = w = 0, \rho = \rho(z), p = p_0$ , где  $u_1(z), \rho(z)$  - произвольные функции. Мирные линии частиц есть прямые  $x = x_0 + t(y_0 + u_1(z_0)), y = y_0, z = z_0$ ,

траектории, которых параллельны оси  $x$ . Получаются сдвиговые пространственные изобарические течения по прямым.

2.  $u = y - zv_0 w_0^{-1}, v = v_0, w = w_0 \neq 0, \rho = \rho_0, S = S_0$ . Галилеевы переносы по  $y$  и  $z$  приводят к случаю 1.

**Подалгебра 3.27** дает два представления решений

а)  $\beta \neq 0: u = t + u_1(s), v = v(s), w = y\beta^{-1} + w_1(s), \rho = \rho(s), S = S(s), s = \beta(x - \frac{1}{2}t^2) - \alpha y;$

б)  $\beta = 0, \alpha \neq 0: u = t + u_1(y), v = v(y),$   
 $w = \alpha^{-1}(x - \frac{1}{2}t^2) + w_1(y), \rho = \rho(y), S = S(y).$

Из УГД получаются несколько типов решений.

а)  $\beta u_1 = \alpha v: u = t, v = 0, w = y\beta^{-1} + w_1(s), \rho = -\beta p'(s), p = p(s), w_1(s)$  - произвольные функции. Мировые линии есть параболы в плоскостях  $y = \text{const}: x = x_0 + \frac{1}{2}t^2, y = y_0, z = (y_0\beta^{-1} + w_1(\beta x_0 - \alpha y_0))t + z_0.$

В равноускоренной вдоль оси  $x$  системе отчета движение происходит по прямым параллельным оси  $z$ .

а2)  $\alpha = 0, u_1 \neq 0: u = t + D\rho^{-1}, v = v_0, w = \beta^{-1}(y - v_0 D^{-1} \int \rho ds),$

$$D^2\rho^{-2} + 2\int \rho^{-1} d\rho = C - 2x + t^2.$$

Мировые линии определяются равенствами

$$\int \rho ds = D(t + s_0), y = v_0 t + y_0, z = \beta^{-1}t(y_0 - v_0 s_0) + z_0.$$

Это еще один источник, с равноускоренно двигающейся границей.

б)  $v \neq 0: u = tyv_0^{-1} + u_0, v = v_0, w = \alpha^{-1}(x - \frac{1}{2}t^2 - u_0 v_0^{-1}y + \frac{1}{2}y^2 v_0^{-2}),$

$\rho = \rho_0, S = S_0.$

Галилеевы переносы и переносы приводят это решение к виду

$$u = -yv_0^{-1}, v = 0, w = \alpha^{-1}(x + tyv_0^{-1} + y^2 2^{-1} v_0^{-2}), \rho = \rho_0, S = S_0.$$

Мировые линии - прямые

$$x = x_0 - yv_0^{-1}t, y = y_0, z = z_0 + \alpha^{-1}(x_0 + y_0^2 2^{-1} v_0^{-2})t,$$

где  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  есть положение частицы в момент  $t=0$  (лагранжевы переменные). Якобиан  $\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \right| = 1$  не вырождается, нет особенностей при дви-

жении газа. Расстояние между двумя частицами

$R = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta z = z_2 - z_1$  вычисляется по формуле

$$R^2 = R_0^2 + \frac{2t}{\alpha} \left[ \Delta z_0 \left( \Delta x_0 + \Delta y_0 \frac{\sigma}{v_0} \right) - \frac{\alpha}{v_0} \Delta x_0 \Delta y_0 \right] + \frac{t^2}{\alpha^2} \left[ \frac{\alpha^2}{v_0^2} + \left( \Delta x_0 + \Delta y_0 \frac{\sigma}{v_0} \right)^2 \right]$$

где  $\sigma = 2^{-1}(y_{01} + y_{02})$ .

Минимальное схождение частиц равно

$$R_m^2 = R_0^2 - ([\Delta z_0 (\Delta x_0 + \Delta y_0 \sigma v_0^{-2}) - \alpha v_0^{-1} \Delta x_0 \Delta y_0]^2) (\alpha^2 v_0^{-2} \Delta y_0^2 + (\Delta x_0 + \Delta y_0 \sigma v_0^{-2})^2)^{-1}$$

при

$$t_m = -\alpha (\Delta z_0 (\Delta x_0 + \Delta y_0 \sigma v_0^{-2}) - \alpha v_0^{-1} \Delta x_0 \Delta y_0) (\alpha^2 v_0^{-2} \Delta y_0^2 + (\Delta x_0 + \Delta y_0 \sigma v_0^{-2})^2)^{-1}.$$

**Подалгебра 3.20** дает  $U = U(x)$ ,  $V = Q(x) \sin(\theta - t - \varphi(x))$ ,

$$W = Q(x) \cos(\theta - t - \varphi(x)), \rho = \rho(x), S = S(x).$$

Из УГД получаются решения.

а)  $U = V = W = 0, \rho = \rho_0$ . Тогда можно взять  $\rho = \rho(x, y, z)$  как произвольную функцию. Это покой газа.

б)  $S = S_0, Q = Q_0, \rho = \rho_0, U = U_0 \neq 0, \varphi = -xU_0^{-1} + \varphi_0$ . Галилеев перенос по  $x$  приводит к частному виду решений из подалгебры 3.33.

**Подалгебра 3.19** дает  $U = t + U_1(s)$ ,  $V = Q(s) \sin(\theta - \beta^{-1}t - \varphi(s))$ ,

$$W = Q(s) \cos(\theta - \beta^{-1}t - \varphi(s)), \rho = \rho(s), S = S(s), s = x - \frac{1}{2}t^2.$$

Из УГД получаются решения.

а)  $U = t, V = W = 0, \rho = -p'(s), p = p(s)$  - произвольная функция.

Получается равноускоренное в направлении оси  $x$  движение с не возрастающим давлением и согласованной плотностью. Если давление ограничено и монотонно убывает на всей прямой  $s$ , то положительная кривая

плотности имеет горб на прямой  $s$  и имеет участки выпуклости и вогнутости. Поэтому звуковые характеристики сгущаются с ростом  $t$  и приводят к образованию ударной волны.

$$\text{б) } S = S_0, Q = Q_0, \rho U_1 = D, D^2 \rho^{-2} + 2 \int \rho^{-1} d\rho = C - 2s,$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - (\beta D)^{-1} \int \rho ds.$$

В декартовой системе координат имеем

$$v = Q_0 \cos(\beta^{-1}t - (\beta D)^{-1} \int \rho ds), \quad w = Q_0 \sin(\beta^{-1}t - (\beta D)^{-1} \int \rho ds).$$

Мировые линии задаются формулами

$$\int_{s_*}^s \rho ds = D(t - s_0); \quad y = y_0 + Q_0 t \cos(\beta^{-1} s_0), \quad z = z_0 + Q_0 t \sin(\beta^{-1} s_0).$$

Поведение газа в проекции на ось  $x$  аналогично движению, которое возникало при рассмотрении подалгебры 3.30. Имеем два движения из плоского источника, сдвигающейся границей  $x = \frac{1}{2}t^2 + s_*$ . Частица  $(s_0, x_0, y_0)$  из источника летит по линии, проекция которой на плоскость  $y, z$  есть луч с направлением  $Q_0(\cos(s_0\beta^{-1}), \sin(s_0\beta^{-1}))$ . Направление зависит от проекции частицы на ось  $x$ , значит, источник вращается вокруг оси  $x$ .

**Подалгебра 3.7** дает

$$u = \beta \ln|z| + u_1(s), v = v(s), w = w(s), \rho = \rho(s), S = S(s), s = yz^{-1}.$$

Из УГД получаются два типа решения.

а)  $v = w = 0, p = p_0$  и можно взять  $u = u(y, z), \rho = \rho(y, z)$  произвольными функциями. Траектории частиц параллельны оси  $x$ . Имеем изобарическое установившееся течение постоянное в направлении оси  $x$  с произвольным профилем скорости.

$$\text{б) } S = S_0, u = \beta \ln|\rho(zv - yw)|, v^2 + w^2 + 2 \int \rho^{-1} d\rho = C^2, dw + s dv = 0, \\ (v^2 - f_\rho) dv^2 + 2v w dv dw + (w^2 - f_\rho) dw^2 = 0.$$

В плоскости  $(y, z)$  имеем автомодельную простую волну Прантля -Майера (13.21), которая существует лишь при  $v^2 + w^2 \geq f_\rho$ . Если ввести полярную систему координат как в плоскости течения  $y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$ , так и в плоскости годографа  $v = q \cos \vartheta, w = q \sin \vartheta$ , то решение задается квадратурами:

$$\vartheta \pm \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta, \mu(q) = \pm \vartheta + \text{const}, \text{ где } \mu = \int q^{-1} \text{ctg} \alpha dq, \sin \alpha = aq^{-1}.$$

**Подалгебра 3.6** дает

$$U = \beta \theta + t + U_1(r), V = V(r), W = W(r), \rho = \rho(r), S = S(r).$$

Из УГД получаются два типа решений.

а)  $V = 0, \beta \neq 0, W = -r\beta^{-1}, \rho = \beta^2 r^{-1} p'(r); U_1(r), p(r)$  - произвольные функции.

Мировая линия частицы  $r = r_0, \theta = \theta_0 - t\beta^{-1}, x = x_0 + t(\beta\theta_0 + U_1(r_0))$  лежит на цилиндре. Траектория есть винтовая линия

$$r = r_0, x - x_0 = \beta(\theta_0 - \theta)(\beta\theta_0 + U_1(r_0)).$$

При фиксированном  $t, r$  непрерывного распределения функции  $U$  на всем цилиндре быть не может. При изменении  $\theta$  от  $\theta_0$  до  $\theta_0 + 2\pi$  функция  $U$  принимает приращение  $2\pi\beta$ , при этом  $W$  остается непрерывным.

Значит, на цилиндре  $r = r_0$  существует контактный разрыв  $\theta_0 = h(r_0)$ , который передвигается по закону  $\theta = h(r_0) - t\beta^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{б) } S = S_0, W = Dr^{-1}, V = (r\rho)^{-1}, E^2(r\rho)^{-2} + I(\rho) = C^2 - D^2 r^{-2} \text{ или} \\ G(r) = r^{-2} = \rho^2(C^2 - I(\rho))(E^2 + D^2\rho^2)^{-1} = F(\rho), I(\rho) = 2\int \rho^{-1} d\rho, \\ U_1 = U_0 - \int \rho(r^2 + \beta D)(rE)^{-1} dr. \end{aligned}$$

Функция  $F(\rho)$  имеет два корня:  $\rho = 0, \rho = \rho_0, I(\rho_0) = C^2$ ; один максимум  $\rho = \rho_*, I(\rho_*) + E^{-2}f_\rho(\rho_*) = C^2$  (см. рисунок б). Максимуму  $F(\rho_*)$  соответствует значение  $r = r_*(G(r_*) = F(\rho_*))$ , которое ограничивает область определения решения ( $r > r_*$ ).



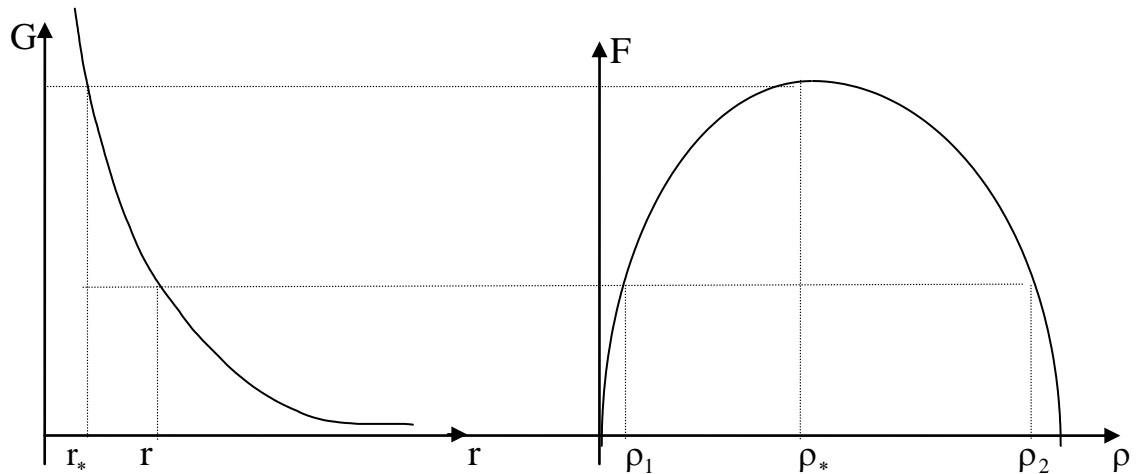


Рис. 6

Решение двухзначно:  $0 < \rho_1(r) < \rho_*$  и  $\rho_* < \rho_2(r) < \rho_0$ . Имеем два различных истечения из вращающегося вокруг оси  $x$ , идвигающегося вдоль оси  $x$  цилиндрического источника  $r = r_*$  (стока при  $E < 0$ ). В области движения газа имеется поверхность контактного разрыва  $h(t, x, r, \theta) = 0$ . Из условий на контактном разрыве  $[\rho] = 0$ ,  $\bar{u} \cdot \bar{n} = D_n = -h_t |\nabla h|^{-1}$  следует:

$$[V] = 0, [W] = 0, [U] = 2\pi\beta \neq 0, h_x = 0, h = r - R(\theta, t),$$

$$R^2 R_t + DR_\theta = R^2 V(R).$$

На предельной окружности  $r = r_*$  радиальная составляющая вектора скорости равняется скорости звука  $V_* = f_\rho(\rho_*)$ , а ускорение  $V_r \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow r_*$ . Это является физическим препятствием достижимости течением предельной окружности и течение должно перестроиться.

Рассмотрены трехмерные подалгебры, для которых инвариантные подмодели интегрируются. Остальные инвариантные подмодели ранга один сводятся к системе из двух уравнений первого порядка. Имеются 7 автономных инвариантных подмоделей, которые сводятся к одному уравнению первого порядка и квадратуре, а также 3 неавтономные инвариантные подмодели. Эти подмодели рассмотрены далее.

**§17. Автономные подмодели ранга один.**

**Подалгебра 3.26** задает представление инвариантного решения

$$u = xt^{-1} + \beta + u_1(s), v = v(s), w = w(s),$$

$$\rho = \rho(s), S = S(s), s = xt^{-1} - \beta \ln|t|.$$

Из уравнений газовой динамики получается решение с точностью до галилеевых переносов по  $y$  и  $z$

$$u = xt^{-1} + \beta + u_1(s), v = w = 0, \rho = \rho(s), S = S_0, p = f(\rho, S_0),$$

где функции  $u_1(s), \rho(s)$  удовлетворяют квазилинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_1' + u_1 \rho^{-1} \rho' = -1, u_1 u_1' + \rho^{-1} f_\rho \rho' = -u_1 - \beta.$$

Система не разрешается относительно производных, если определитель из коэффициентов при производных равен нулю (особое решение):

$$u_1^2 - f_\rho = a^2 \Rightarrow \beta = 0, a + \int \rho^{-1} a d\rho \pm xt^{-1} = D, u_1 = \pm a.$$

Особые решения возможны для любого уравнения состояния и являются плоскими центрированными простыми волнами.

Если система уравнений разрешается относительно производных ( $|u_1| \neq a$ ), то она сводится к уравнению Риккати

$$\frac{du_2}{d\rho} = f_\rho - \frac{u_2^2}{\beta^2 \rho^2}, u_2 = \beta \rho u_1, \beta \neq 0,$$

и квадратуре  $\int \rho^{-1} du_2 + \beta s = \beta C$ . Случай  $\beta = 0$  сводится к постоянному течению. Замена  $\tau = \beta^{-2} \rho^{-1}, f(\rho) = g(\tau)$  приводит уравнение Риккати к каноническому виду

$$\frac{du_2}{d\tau} = u_2^2 + g_\tau = \left(u_2 - |g_\tau|^{\frac{1}{2}}\right) \left(u_2 + |g_\tau|^{\frac{1}{2}}\right). \quad (17.1)$$

Для нормального газа уравнение состояния  $p = f(\rho)$ ,  $0 < \rho < \infty$  имеет свойства

$$f > 0, f_\rho > 0, f_{\rho\rho} > 0, f \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0, f \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \infty, f_\rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Для функции  $p = g(\tau)$ ,  $0 < \tau < \infty$  отсюда получим

$$g > 0, g_\tau < 0, g_{\tau\tau} > 0, g \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0, g \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \infty \Rightarrow g_\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} -0, g_\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} -\infty.$$

Через каждую точку области  $\tau > 0$  проходит единственное гладкое решение  $u_2$  уравнения (1). В области  $|u_2| < |g_\tau|^{\frac{1}{2}}$  оно монотонно убывает, граница области состоит из точек минимумов решений. В областях  $u_2 > |g_\tau|^{\frac{1}{2}}$ ,  $u_2 < -|g_\tau|^{\frac{1}{2}}$  решение  $u_2$  монотонно возрастает.

В области  $|u_2| > |g_\tau|^{\frac{1}{2}}$  решение  $u_2 \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \tau_1 < \infty$  (полюс).

Действительно, справедливо неравенство

$$\frac{du_2}{d\tau} > u_2 \left( u_2 - |g_\tau|^{\frac{1}{2}} \right) \Rightarrow \left( u_2^{-1} \exp \left( - \int_{\tau_0}^{\tau} |g_\tau|^{\frac{1}{2}} d\tau \right) \right)_\tau < - \exp \left( - \int_{\tau_0}^{\tau} |g_\tau|^{\frac{1}{2}} d\tau \right), \tau > \tau_0$$

Интегрируя неравенство, получим

$$0 < u_2^{-1} \exp \left( - \int_{\tau_0}^{\tau} |g_\tau|^{\frac{1}{2}} d\tau \right) < u_2^{-1} - \int_{\tau_0}^{\tau} u_2^{-1} \exp \left( - \int_{\tau_0}^{\tau} |g_\tau|^{\frac{1}{2}} d\tau \right) d\tau \rightarrow 0, \tau \rightarrow \tau_1.$$

Точки перегиба расположены на кривой  $u_2^3 + g_\tau u_2 + \frac{1}{2} g_{\tau\tau} = 0$ .

Существует отрицательная ветвь этой кривой с асимптотой  $u_2 = 0$ .

В области  $|u_2| < |g_\tau|^{\frac{1}{2}}$  вдоль интегральных кривых  $u_2' \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , значит  $u_2 \rightarrow 0$  (см. рисунок 1).

Пусть  $u_2$  монотонная ограниченная функция при  $\tau \rightarrow 0 (\rho \rightarrow \infty)$ . Тогда  $u_{2\rho} = f_\rho - \beta^{-2} \rho^{-2} u_2^2 \rightarrow \infty$  и следует противоречие.

Значит,  $u_2 \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Имеется два типа интегральных кривых.

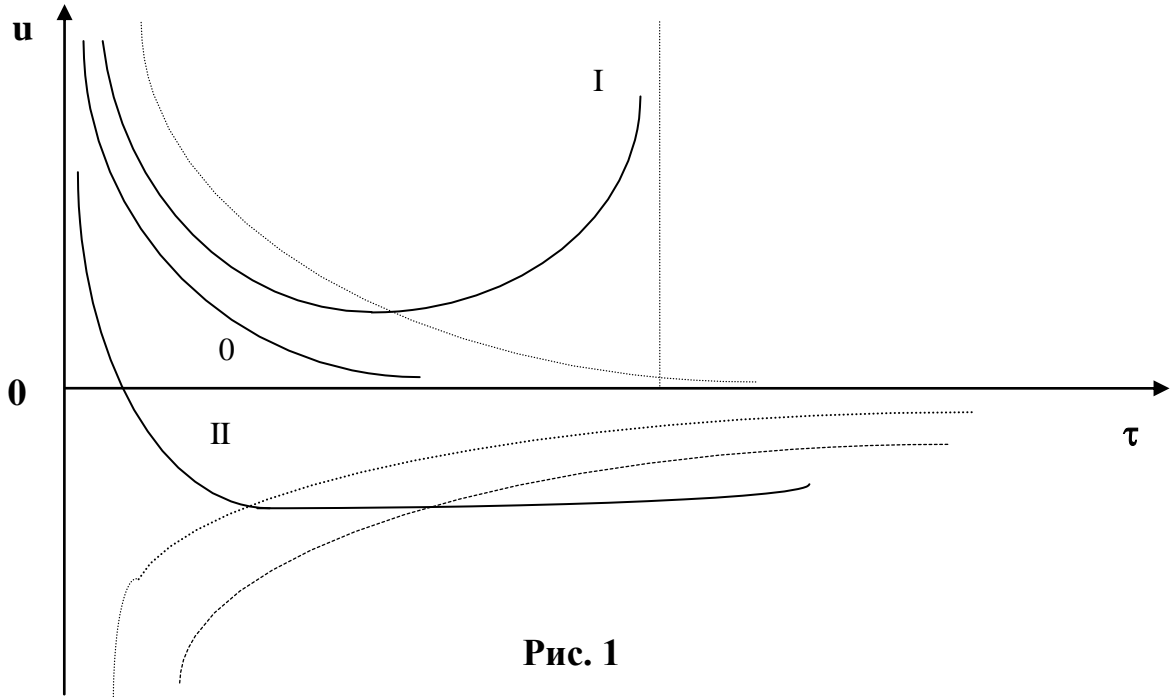


Рис. 1

Первый тип (I) имеет две вертикальные асимптоты  $\tau = 0, \tau = \tau_1$ . Вторым тип (II) имеет одну вертикальную асимптоту  $\tau = 0$  и одну горизонтальную асимптоту  $u_2 = 0$ . Имеется разделительная кривая типа II(0), не имеющая точек минимума. В соответствии с этим имеются два типа кривых  $u_2 = u_2(\rho)$ . Для второго типа кривых (II и 0)  $u_2 \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ . Из уравнения следует  $u_{2\rho}(0) = -\beta^{-2} u_{2\rho}^2(0)$ . Если  $u_{2\rho}(0) = 0$ , то  $u_2 \square c_1 \rho^2 \Rightarrow u_{2\rho} \square -2c_1 \beta^{-2} \tau^{-3} < 0$  и имеем разделительную кривую. Если  $u_{2\rho}(0) = -\beta^{-2}$ , то  $u_2 \square \beta^2 \rho, u_{2\rho} \square -\tau^{-2} < 0$  и имеем кривую типа II (см. рисунок 2).

Каждая кривая  $u_2 = u_2(\rho) = \beta \rho u_1$  вместе с квадратурой

$$\Phi(\rho) = u_1 + \int u_1 \rho^{-1} d\rho = C - s \quad (17.2)$$

задает решение, обобщающее простую центрированную волну ( $\beta = 0$ ).

Для разделяющего решения (0) в окрестности вакуума ( $\rho = 0$ ) имеем  $u_1 = \beta^{-1} \rho (\frac{1}{2} f_{\rho\rho}(0) + \dots)$ ,  $\Phi(\rho) = \beta^{-1} f_{\rho\rho}(0) \rho + \dots$ . Уравнение (17.2) определяет функцию  $\rho(s)$ . При  $s \rightarrow C \Rightarrow \rho \rightarrow 0$  (вакуум). Квазилуч  $s = xt^{-1} - \beta \ln t = s_0$  является изохорой.

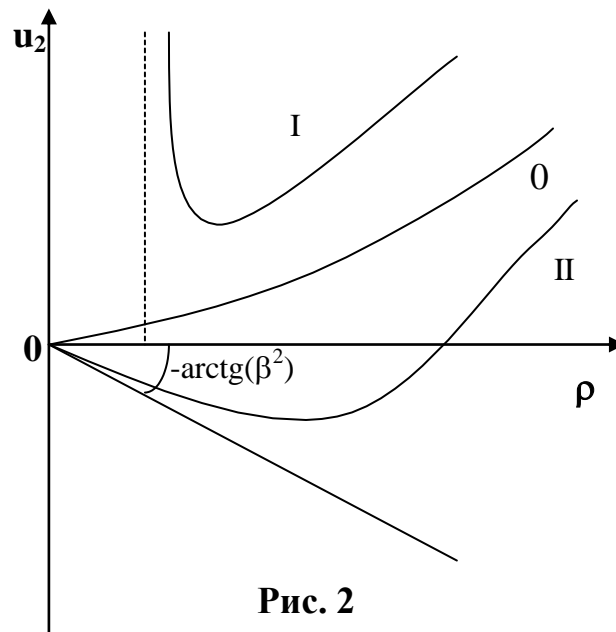


Рис. 2

Мировые линии определяются из уравнения

$$\int u_1(s)^{-1} ds = \ln|t| - 2\ln|C_0|.$$

Вакуумная линия ( $\rho = 0$ ) совпадает с мировой линией. Все мировые линии исходят из начала 0, касаются оси x, имеют бесконечные отрицательные скорости при  $t \rightarrow 0$  и пересекают изохоры. Это мгновенный точечный источник. В окрестности вакуумной линии мировые линии ведут себя как кривые  $x \approx \beta i \ln|t| + Ct - |C_0| \sqrt{|t|}$ .

Мгновенный точечный источник в нуле ( $t=0$ ) с бесконечными скоростями частиц можно физически объяснить как начальные движения частиц

при  $t = \varepsilon$  из точек полупрямой  $x < 0$ . Одну из мировых линий можно взять в качестве двигающегося поршня. Сначала поршень вытягивает газ из отрезка, а затем толкает его в вакуум без образования ударной волны (см. рисунок 3).

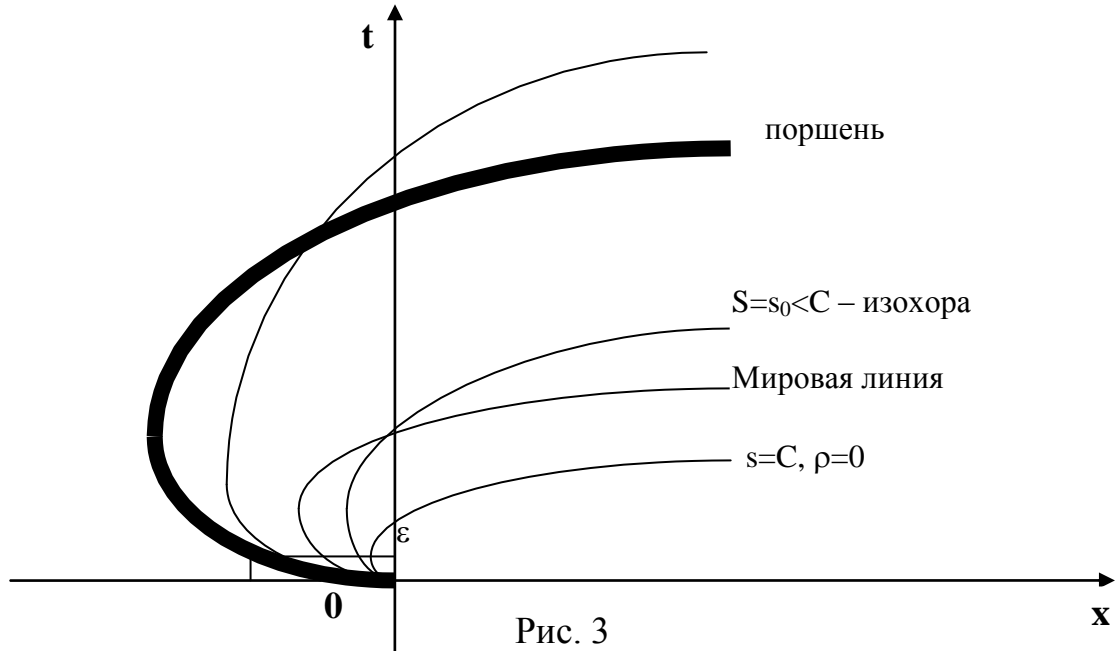


Рис. 3

Для кривых типа II поведение таково  $u_1 = -\beta + \beta^{-1} f_{\rho\rho}(0) \rho \ln \rho + \dots$ ,  $\Phi(\rho) = (-\beta + 2\beta^{-1} f_{\rho\rho}(0) \rho) \ln \rho = C + \beta + \beta^{-1} f_{\rho\rho}(0) - s$ . Значит, функция  $\rho(s)$  двужначна, определена для  $s < C$ . (см. рисунок 4):

$$0 \leq \rho_1(s) \leq \rho_m, \rho_m \leq \rho_2(s) < \infty,$$

где  $\rho_m$  – минимум функции  $\Phi(\rho)$ .

Ветвь  $\rho_2(s)$  похожа на разделяющее решение. Между этими решениями может быть инвариантный ударный переход. Решение  $\rho_1(s)$  принципиально другое решение. Вакуум наступает при  $s \rightarrow -\infty$ . Квазилуч, отвечающий минимальной плотности не является мировой линией. Его можно трактовать как движущийся источник.

Для кривых типа I поведение в окрестности полюса таково

$\Phi(\rho) \approx \beta \rho_1 (\rho - \rho_1)^{-1} + \beta \ln(1 - \rho_1 \rho^{-1})$  при  $\rho \rightarrow \rho_1$ ,

$\Phi(\rho) \approx f_\rho^{1/2} + \int \rho^{-1} f_\rho^{1/2} d\rho$  при  $\rho \rightarrow \infty$ , Имеются два решения аналогично кривым типа II. Отличие состоит в том, что первая ветвь отграничена от нуля  $\rho_1 \leq \rho_1(s) \leq \rho_m$ . Значит, при  $s \rightarrow -\infty$  вакуум не достигается.

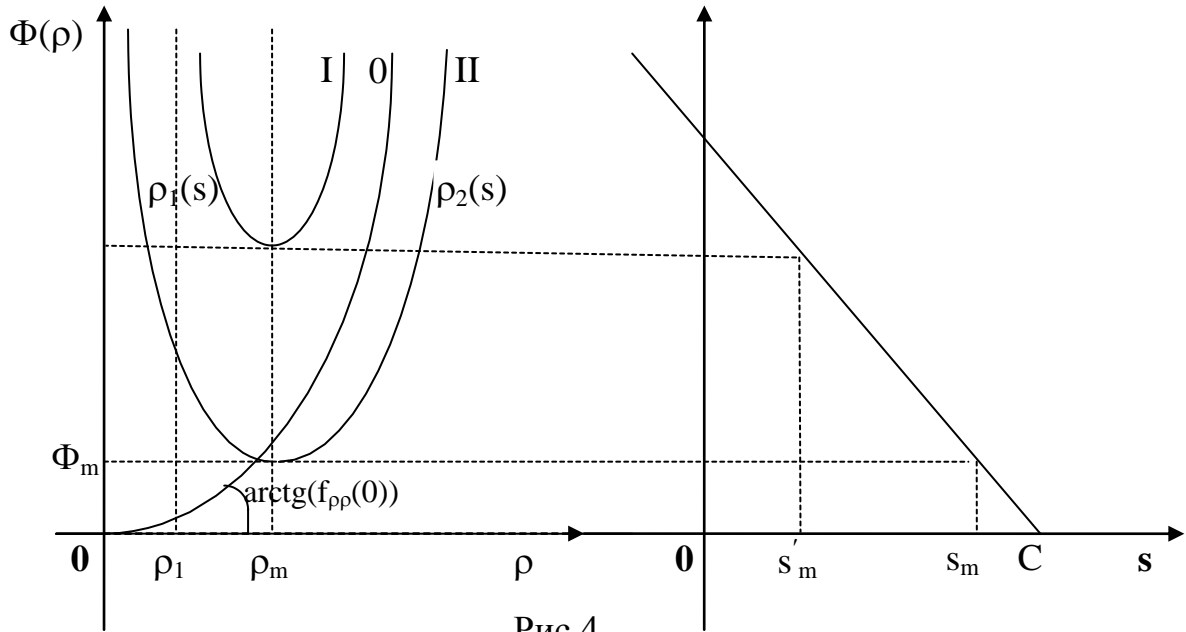


Рис.4

**Подалгебра 3.25** задает инвариантное решение, отличающееся от предыдущего случая подалгебры 3.26 только тем, что  $v = \alpha \left( \ln t - \int u_1^{-1} ds \right)$ .

Проекция мировой линии на ось  $y$  такова:  $y = 2\alpha \ln |C_0| t + y_0$ .

**Подалгебра 3.22** дает  $u = \alpha z t^{-1} + \beta \ln |t| + u_1(s), v = \sigma \ln |t| + v_1(s),$   
 $w = z t^{-1} + w_1(s), \rho = \rho(s), S = S_0, s = y t^{-1} - \sigma \ln |t|.$

Из уравнений газовой динамики получается решение с точностью до галилеева переноса по  $x$ :

$u = \alpha z t^{-1} + \beta \ln |t| + \alpha w_1 + \beta \ln |w_1|, v = \sigma \ln |t| + v_1(s), w = z t^{-1} + w_1(s),$   
 $\rho = \rho(s), S = S_0, w_1^2 = C \rho |v_1 - s - \sigma|,$  где функции  $v_1(s), \rho(s)$  удов-

летворяют квазилинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v_1 + (v_1 - s - \sigma)\rho^{-1}\rho' = -1, \quad (v_1 - s - \sigma)v_1 + f_\rho\rho^{-1}\rho' = -\sigma.$$

Особое решение получается, когда определитель системы равен нулю:  $v_1 = s + 2\sigma$ ,  $f_\rho = \sigma^2 \neq 0$ ,  $\rho = \rho_0 \exp(-2s\sigma^{-1})$ ,  $w_1 = w_0 \exp(-s\sigma^{-1})$  и возможно лишь при линейном уравнении состояния  $p = f(\rho) = \sigma^2\rho + p_0$ .

Мировые линии таковы  $y = 2\sigma t \ln|t| + ty_0$ ,

$$z = -w_0 \exp(-y_0\sigma^{-1}) \text{sign}(t) + tz_0, \quad x = (\alpha z_0 + \beta \ln|w_0| - \beta y_0\sigma^{-1})t + x_0.$$

Плотность в частице изменяется по закону  $\rho = \rho_0 t^{-2} \exp(-2y_0\sigma^{-1})$ . Лагранжевыми координатами частиц являются  $x_0, y_0, z_0$ ; при этом выполняются равенства

$$\det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} = t^2 \left( 1 - \alpha \sigma^{-1} w_0 \exp(-y_0\sigma^{-1}) \text{sign}(t) \right), \quad \text{rank} \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \right|_{t=0} = 1.$$

При  $t = 0$  частицы сосредоточены на прямой  $y = z = 0$  (коллапс - мгновенный источник). Траектория есть квазилуч, лежащий в плоскости  $z_0(x - x_0) = (\alpha z_0 + \beta \ln|w_0| - \beta \sigma^{-1} y_0) \left( z + w_0 \exp(-y_0\sigma^{-1}) \text{sign}(t) \right)$ .

Проекция движения частицы на ось  $y$  есть квазилуч отличный от квазилуча - изохоры. При  $y_0 \rightarrow -\infty$  квазилуч и квазилуч - изохора с  $\rho = 0$  совпадают с полупрямой  $y > 0$ . Картина движения похожа на Рис. 4.

Если  $f_\rho \neq (v_1 - s - \sigma)^2$ , то система уравнений сводится к уравнению Абеля 2-го рода

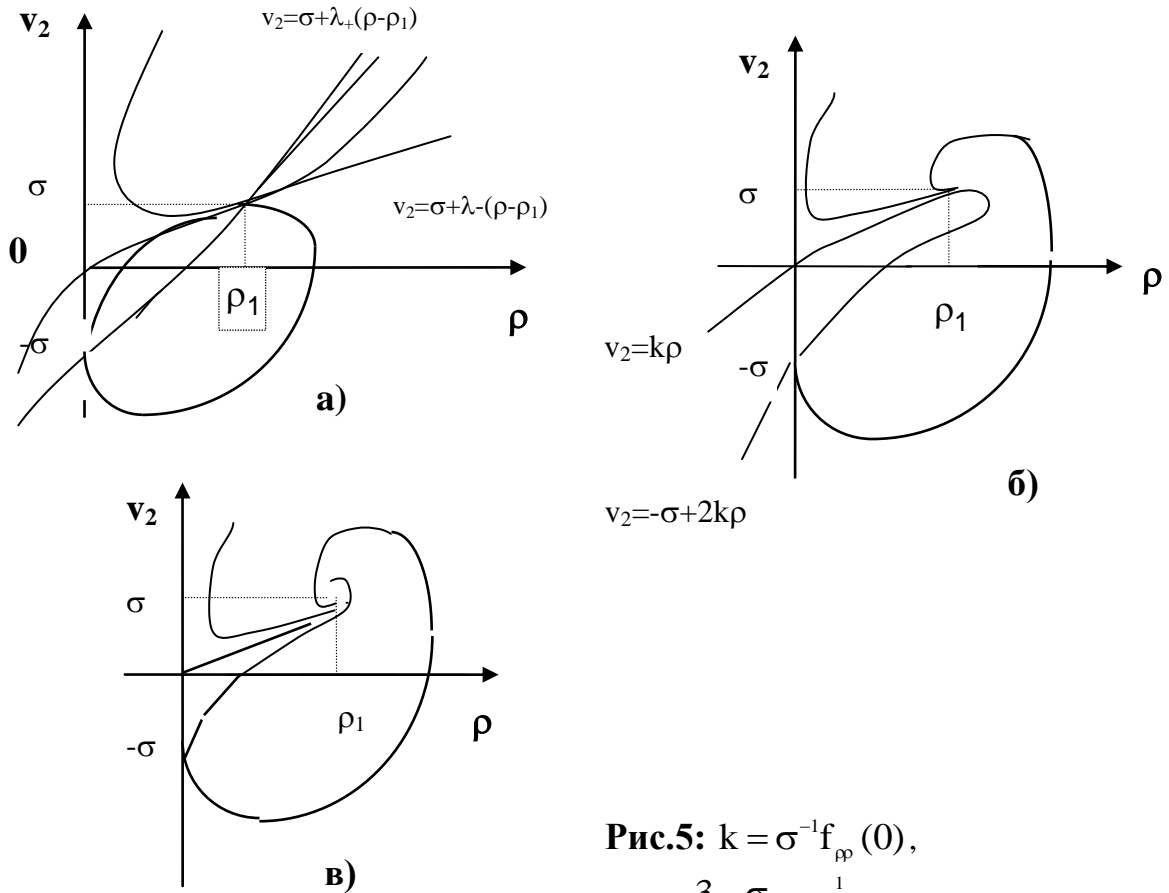
$$\rho \frac{dv_2}{d\rho} = \frac{v_2^2 + \sigma v_2 - 2f_\rho}{v_2 - \sigma}, \quad v_2 = v_1 - s - \sigma, \quad (17.3)$$

и квадратуре



$$-2s + C_1 = 2 \int \frac{f_\rho - v_2^2}{v_2 - \sigma} \frac{d\rho}{\rho} = v_2 + \int v_2 \frac{d\rho}{\rho}. \quad (17.4)$$

Интегральная кривая  $\rho = 0$  отделяет полуплоскость  $\rho > 0$  физических решений. Имеется три особые точки: 1.  $\rho = v_2 = 0$  (седло), 2.  $\rho = 0, v_2 = -\sigma$  (узел), 3.  $v_2 = \sigma, \rho = \rho_1, f_\rho(\rho_1) = \sigma^2$ . Пусть  $\Delta = 9\sigma^2 - 8\rho_1 f_{\rho\rho}(\rho_1)$ , тогда получается 3а) узел при  $\Delta > 0$ , 3в) фокус при  $\Delta < 0$ , 3б) вырожденный узел при  $\Delta = 0$  (см. рисунок 5).



**Рис.5:**  $k = \sigma^{-1} f_{\rho\rho}(\rho_1)$ ,

$$\lambda_{\pm} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma}{\rho_1} \pm \Delta^{\frac{1}{2}}$$

Для каждого  $\rho > 0$  имеется две точки экстремума у кривой  $v_2 = v_2(\rho)$ . При  $v_2 = \sigma, |v_{2\rho}| = \infty$ . Для каждой однозначной ветви функции  $v_2 = v_2(\rho)$  получается зависимость  $\rho = \rho(s)$  из квадратуры (17.4). Также как это делалось

при рассмотрении подалгебры 3.26, можно рассмотреть течения между квазилучами – изобарами.

Если  $\sigma = 0$ , то уравнение (17.3) интегрируется и решения представляются квадратурами

$$v_1 = v_2 + s, v_2 = \pm \rho (C_2 - 4 \int f_\rho \rho^{-3} d\rho)^{1/2},$$

$$\mp 2s + C_1 = \rho (C_2 - 4 \int f_\rho \rho^{-3} d\rho)^{1/2} + \int (C_2 - 4 \int f_\rho \rho^{-3} d\rho)^{1/2} d\rho.$$

Мировые линии определяются из равенств  $z = tz_1(s)$ ,

$x = x_1 + \beta t(\ln|t| - 1)$ ; где функции  $s = s(t)$ ,  $z_1 = z_1(s)$ ,  $x_1 = x_1(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{ds}{v_2(s)} = \frac{dt}{t}, dz_1 = \frac{w_1(s)}{v_2(s)} ds, \frac{dx_1}{dt} = \alpha(z_1 + w_1) + \beta \ln|w_1|.$$

**Подалгебра 3.21** задает представление

$$u = \frac{x}{t} + u_1(s), v = \frac{y}{t} + v_1(s), w = \frac{z}{t} + w_1(s), \rho = \rho(s), S = S(s), s = \frac{x}{t} - \beta \ln|t|.$$

Из уравнений газовой динамики получаются интегралы

$$S = S_0, v_1^3 = C^3 \rho (u_1 - \beta), \omega_1^3 = D^3 \rho (u_1 - \beta)$$

и подмодель ранга 1

$$(u_1 - \beta)u_1' + \rho^{-1} f_\rho \rho' = -u_1, \rho u_1' + (u_1 - \beta)\rho' = -3\rho.$$

Особое решение возможно лишь при  $\beta \neq 0$  для уравнения состояния

$$p = \frac{1}{4} \beta^2 \rho + p_0: u_1 = \frac{3}{2} \beta, \rho = \rho_0 \exp(-6s\beta^{-1}), \text{ где } \rho_0, p_0 - \text{ постоянные.}$$

Мировые линии задаются равенствами:  $x = \frac{3}{2} \beta t(\ln|t| + a)$ ,

$$y = bt - C(\frac{1}{2} \beta \rho_0)^{1/3} e^{-3a} \text{sign}(t), z = ct - D(\frac{1}{2} \beta \rho_0)^{1/3} e^{-3a} \text{sign}(t),$$

где  $a, b, c$  – постоянные.

При  $t \rightarrow 0$  частицы сосредотачиваются на прямой  $x = 0$ ,  $Dy = Cz$  (коллапс – мгновенный источник). Плотность в частице изменяется по закону  $\rho = \rho_0 e^{-3a|t|^{-3}}$ . Траектория частицы есть пространственный квазилуч.

Если  $(u_1 - \beta)^2 \neq f_\rho$ , то система уравнений сводится к уравнению Абеля 2-го рода

$$\rho \frac{du_1}{d\rho} = \frac{u_1^2 - \beta u_1 - 3f_\rho}{2u_1 - 3\beta}$$

и к квадратуре

$$-3s + C_1 = u_1 - \beta \ln \rho + \int u_1 \rho^{-1} d\rho = F(\rho).$$

Уравнение Абеля отличается от уравнения (17.3) лишь коэффициентами, поэтому картина интегральных кривых такая же как на Рис. 5.

При  $\beta = 0$  уравнение Абеля интегрируется

$$u_1^2 = \rho(C_0 - 3 \int \rho^{-2} f_\rho d\rho).$$

Из этой формулы следует, что плотность отграничена от нуля.

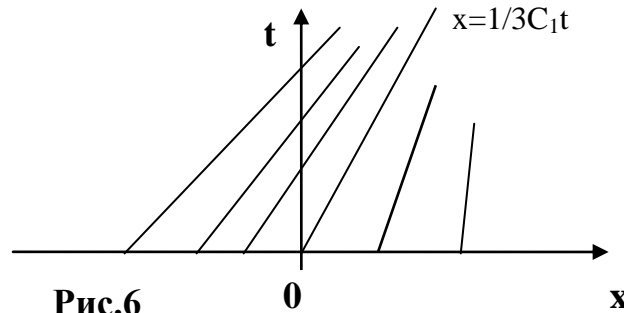


Рис.6

Например, при  $f = B\rho^\gamma$ ,  $1 < \gamma < 2$ , имеем  $u_1 = \pm \rho^{1/2} (C_0 + \frac{3\gamma B}{\gamma - 2} \rho^{\gamma-2})^{1/2}$ ,

$$\rho > \rho_0 = \left(\frac{2-\gamma}{3\gamma B} C_0\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}; F(\rho) \sim \pm 3C_0^{1/2} \rho^{1/2}, \text{ при } \rho \rightarrow +\infty,$$

$$F(\rho) \sim \pm (C_0(2-\gamma)(\rho - \rho_0))^{1/2}, \text{ при } \rho \rightarrow \rho_0. \text{ Отсюда следует } \rho \sim \frac{s^2}{C_0}, u_1 \sim -s$$

при  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $\rho \sim \rho_0 + \frac{(C_1 - 3s)^2}{C_0(2 - \gamma)}$ ,  $u_1 \sim C_1 - 3s$  при  $s \rightarrow \frac{1}{3}C_1$ . Движение частицы

в проекции на ось  $x$  таково: вблизи прямой  $x = \frac{1}{3}C_1 t$  плотность  $\rho \sim \rho_0$ ,

$x \sim \frac{1}{3}C_1 t + C_2 t^2$ , при  $|s| \rightarrow \infty$  имеем  $x_2 \sim C_2$ ,  $\rho \rightarrow \infty$  (см. рисунок 6).

Получается фокусировка газа к заданной плотности  $\rho = \rho_0$ .

**Подалгебра 3.14** задает представление

$$U = xt^{-1} + U_1(s), \quad V = Q(s) \sin(\theta + \alpha^{-1} \ln |t| - \varphi(s)),$$

$$W = Q(s) \cos(\theta + \alpha^{-1} \ln |t| - \varphi(s)), \quad \rho = \rho(s), \quad S = S(s); \quad s = xt^{-1} - \beta\alpha^{-1} \ln |t|.$$

Из уравнений газовой динамики следуют интегралы:  $S = S_0$ ,  $Q = Q_0$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \alpha^{-1} \int u_1^{-1} ds$  при  $Q_0 \neq 0$ . Если  $Q_0 = 0$ , то  $\varphi(s)$  – произвольная функция. Вращение вокруг оси  $x$  делает  $\varphi_0 = 0$ .

После замены  $u_1 = U_1 - \beta\alpha^{-1}$ ,  $\beta\alpha^{-1} \rightarrow \beta$  получается подмодель такая же, как для подалгебры 3.26.

**Подалгебра 3.8** задает представление

$$U = \beta\alpha^{-1} \ln |t| + U_1(s), \quad V = rt^{-1} + Q(s) \sin(\theta - \alpha^{-1} \ln |t| - \varphi(s)),$$

$$W = Q(s) \cos(\theta - \alpha^{-1} \ln |t| - \varphi(s)), \quad \rho = \rho(s), \quad S = S(s); \quad s = xt^{-1} - \beta\alpha^{-1} \ln |t|.$$

Из уравнений газовой динамики получаются интегралы:  $S = S_0$ ,  $Q = D \exp(\alpha\varphi)$ ,  $Q^3 = C\rho(U_1 - s - \beta\alpha^{-1})$  и подмодель ранга один

$$U_1' + (U_1 - s - \beta\alpha^{-1})\rho'\rho^{-1} = -2,$$

$$(U_1 - s - \beta\alpha^{-1})U_1' + f_\rho \rho'\rho^{-1} = -\beta\alpha^{-1}.$$

Особое решение возможно лишь для уравнения состояния

$$p = \frac{1}{4}\beta^2\alpha^{-2}\rho + p_0 \quad \text{и} \quad \beta \neq 0: \quad U_1 = s + \frac{3}{2}\beta\alpha^{-1}, \quad \rho = \rho_0 \exp(-6\alpha\beta^{-1}s),$$

$$Q = Q_0 \exp(-2\alpha\beta^{-1}s), \quad \varphi = -2\beta^{-1}s.$$

Мировая линия задается формулами:

$$x = t(x_0 + \frac{3}{2}\beta\alpha^{-1}\ln|t|), \operatorname{tg}(\theta + 2x_0\beta^{-1}) = \operatorname{tg}\theta_0 - Q_0 \exp(-2\alpha\beta^{-1}x_0)R_0^{-1}|t|^{-1},$$

$$r^2 = \left(tR_0 \cos^{-1}\theta_0 - Q_0 \exp(-2\alpha\beta^{-1}x_0)\sin\theta_0\right)^2 + Q_0^2 \exp(-4\alpha\beta^{-1}x_0)\cos^2\theta_0,$$

где  $x_0, R_0, \theta_0$  – лангранжевы координаты. Вдоль мировой линии плотность

изменяется по закону  $\rho = \rho_0 \exp(-6\alpha\beta^{-1}x_0) e^{-\frac{6\alpha}{\beta}x_0} |t|^{-3}$ .

При  $t = 0$  частицы сосредоточены на логарифмической спирали  $x = 0, x = 0, r = Q_0 \exp(\alpha(\theta + \frac{1}{2}\pi))$  (коллапс – мгновенный источник).

Проекция мировой линии на плоскость  $(t, x)$  есть квазилуч (см. рисунок 3), проекция на  $(t, r)$  есть гипербола с асимптотами

$$\pm r = tR_0 \cos^{-1}\theta_0 - Q_0 \exp(-2\alpha\beta^{-1}x_0)\sin\theta_0 \text{ и экстремальной точкой}$$

$t_m = \frac{1}{2}Q_0R_0^{-1}\exp(-2\alpha\beta^{-1}x_0)\sin(2\theta_0), r_m = Q_0 \exp(-2\alpha\beta^{-1}x_0)\cos\theta_0$ , проекция на плоскость  $(t, \theta)$  есть монотонно возрастающая кривая

$$-\frac{1}{2}\pi < \theta + 2\beta^{-1}x_0 < \theta_0.$$

Таким образом, особое решение типа мгновенного источника задает разлет частиц в вакууме по сложной пространственной траектории.

Если  $f_\rho \neq (U_1 - s - \beta\alpha^{-1})^2$ , то система уравнений сводится к уравнению Абеля 2-го рода вида (17.3)

$$\rho \frac{dU_2}{d\rho} = \frac{U_2^2 + \beta\alpha^{-1} - 3f_\rho}{2U_2 - \beta\alpha^{-1}}, U_2 = U_1 - s - \beta\alpha^{-1}$$

и квадратуре вида (17.4)  $U_2 + \int U_2\rho^{-1}d\rho = -3s + C_1$ .

Исследование интегральных кривых проводится так же как при рассмотрении подалгебры 3.22.

**Подалгебра 3.5** задает представление

$$U = \beta\theta + U_1(s), V = V(s), W = W(s), \rho = \rho(s), S = S(s); s = r \exp(-\alpha\theta).$$

Из уравнений газовой динамики получаются 4 типа решений.

а)  $V = 0, \alpha \neq 0, W = 0, p = p_0$  - постоянная,  $\rho = \rho(s), U_1 = U_1(s)$  - произвольные функции. Решение описывает течение аналогичное решению, построенному по подалгебре 3.7 а).

б)  $V = 0, \alpha = 0, W^2 = rp'\rho^{-1}, p(r) (p'(r) \geq 0), \rho(s), U_1(s)$  - произвольные функции. Мировые линии определяются равенствами

$$r = r_0, x = \frac{1}{2}\beta t^2 \left( \frac{p'(r_0)}{r_0 \rho(r_0)} \right)^{1/2} + (\beta\theta_0 + U_1(r_0))t + x_0, \theta = t \left( \frac{p'(r_0)}{r_0 \rho(r_0)} \right)^{1/2} + \theta_0.$$

При  $\beta = 0$  траектории есть винтовые линии на цилиндре с шагом  $2\pi U(r_0) r_0 \rho(r_0)^{1/2} (p'(r_0))^{-1/2}$ .

Два таких решения с  $\beta = 0$  можно сопрячь через скачок уплотнения. Действительно, пусть  $h(x, r, \theta) = 0$  есть уравнение поверхности скачка уплотнения. Тогда  $D_n = 0, \vec{u}_\sigma = \vec{u} - u_n \vec{n}, u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}, \vec{n} = \nabla h / |\nabla h|^{-1}$  и из условия на скачке  $[\vec{u}_\sigma] = 0$  следует  $h_r = 0, \frac{h_x}{h_\theta} = \frac{[U]}{r[W]} = k = \text{const}$ . Значит,  $h = \theta + kx - \theta_1$

след скачка на цилиндре  $r = r_0$  есть винтовая линия с шагом  $2\pi k^{-1}$ . Уравнения (4.12) - (4.15) на скачке принимают вид  $(krU_1 + W_1)^2 = (k^2 r^2 + 1) \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{[p]}{[\rho]}$ ,

$$(k^2 r^2 + 1)[W]^2 = \frac{[p][\rho]}{\rho_1 \rho_2}, [U] = kr[W], H(p_2, \rho_2; p_1, \rho_1) = 0 - \text{уравнение Гюгонио,}$$

где  $W_1^2 = \frac{p'_1}{r\rho_1}, W_2^2 = \frac{p'_2}{r\rho_2}$ . Если задать  $k, \rho_1, p_1 (p'_1 > 0)$ , то из уравнения Гюгонио

определяется  $\rho_2^{-1} = V(p_2, r) < \rho_1^{-1}, p_2 > p_1$ . Другие уравнения определяют  $U_1, U_2$  и остается обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения  $p_2(r)$ :

$$r(k^2 r^2 + 1) V p'_2 = \left( ((p_2 - p_1)(V_1 - V))^{1/2} \pm (V_1 p'_1 (k^2 r^2 + 1))^{1/2} r^{1/2} \right)^2.$$

Отсюда следует, что  $p'_2 > 0$ .

Итак, для сопряжения двух решений через винтовой скачок уплотнения с заданным шагом (след скачка на цилиндре  $r = r_0$  есть винтовая линия с шагом, не зависящем от  $r_0$ ) можно взять решение перед скачком с произвольными функциями  $\rho_1(r)$ ,  $p_1(r)$  ( $p'_1 > 0$ ). Тогда  $\rho_2(r)$ ,  $p_2(r)$ ,  $U_2(r)$ ,  $U_1(r)$  определяются из уравнений на скачке при этом  $p'_2 > 0$ .

В зависимости от знака  $[W]$  есть две конфигурации течений: со стенкой перед скачком и со стенкой за скачком (см. рисунок 7). Стенки образованы винтовыми линиями траекторий.

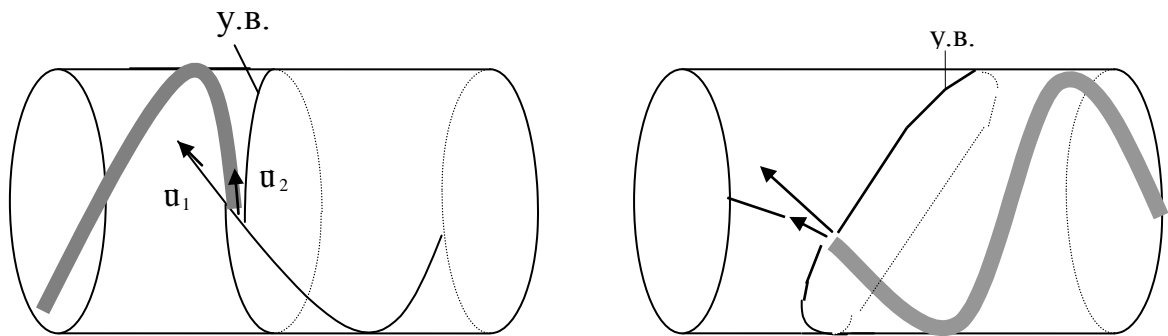


Рис.7

$$в) \alpha = 0, V \neq 0, S = S_0, r\rho V = E, R_w = D, V^2 + 2 \int \rho^{-1} dp = C^2 - r^{-2} D^2,$$

$U_1 = U_0 - \beta D C^{-1} \int \rho(r) r^{-1} dr$ . Это решение задает четыре истечения из цилиндрического источника аналогичное решению, построенному на подальгебре 3.6 б), и отличающееся от него лишь движением источника вдоль оси  $x$ . При  $\beta = 0$  контактный разрыв отсутствует.

$$г) \alpha \neq 0, V \neq \alpha W, S = S_0, U_1 = U_0 + \beta \alpha^{-1} \ln(s\rho(V - \alpha W)),$$

$V^2 + W^2 + 2 \int \rho^{-1} dp = C^2$  - интегралы движения. Подмодель ранга один (особое решение рассмотрено в а)) сводиться к автономному уравнению

$$\frac{dV}{dW} = \frac{f_p(V + \alpha W) + W^2(V - \alpha W)}{f_p(W - \alpha V) - VW(V - \alpha W)} \quad (17.5)$$

и к квадратуре

$$\alpha^{-1} \ln|W| + \int W^{-1} dV = -\theta_* + \theta_1, \text{ или } \int \frac{\alpha dV + dW}{W} = \alpha(\theta_1 - \theta_*), \quad (17.6)$$

где  $\theta_1 = -\alpha^{-1} \ln s$ ,  $\theta_*$  - постоянная.

При  $\beta = 0$  течение безвихревое и не является простой волной подмодели ранга 2 или ранга 3. В полярных координатах плоскости годографа  $V = Q \cos \vartheta$ ,  $W = Q \sin \vartheta$  уравнения (17.5), (17.6) принимают вид:

$$Q^2 + 2i(\rho) = C^2, \quad \rho_i = f_p,$$

$$Q_\vartheta [\alpha f_p + Q^2 \sin \vartheta (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)] + f_p Q = 0, \quad (17.7)$$

$$\alpha^{-1} (\ln Q + \ln |\sin \vartheta|) + \int \operatorname{ctg} \vartheta Q^{-1} dQ = \vartheta + \theta_1 - \theta_* \quad (17.8)$$

Физические кривые уравнения (17.5) должны лежать в круге  $Q < C$ .

Окружность  $Q = C$  интегральная кривая, на ней  $\rho = 0$ ,  $s \sin \vartheta = D_1 \exp(\alpha \vartheta)$ .

Траектория на этом решении является границей с вакуумом

$$\frac{dr}{\cos \vartheta} = \frac{rd\theta}{\sin \vartheta} \Rightarrow (\alpha \sin \vartheta - \cos \vartheta) d(\vartheta + \theta) = 0.$$

При  $\vartheta + \theta = \theta_0 = \text{const}$  вакуумные траектории есть прямые

$$C |y \sin \theta_0 - z \cos \theta_0| = \exp(\alpha(\theta_0 - \theta_*)), \text{ зависящие от параметра } \theta_0. \text{ При}$$

$\vartheta = \arctg \alpha^{-1}$  вакуумная траектория есть логарифмическая спираль

$$r = r_0 \exp(\alpha \theta), \text{ где } r_0 = D \sqrt{1 + \alpha^2} \exp(\alpha \arctg \alpha^{-1}), \text{ являющаяся огибающей}$$

семейства прямых и одновременно некоторой линией уровня.

Уравнение (17.5) допускает инверсию  $V \rightarrow -V$ ,  $W \rightarrow -W$ , значит, картина интегральных кривых симметрична относительно начала координат.

Имеется 5 особых точек уравнения:

1)  $V = W = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $2i(\rho) = C^2$  – фокус и точка торможения;



- 2)  $W = 0, V = \pm C, \rho = 0$  – узлы при  $\gamma \neq 2$  с касательными интегральных кривых  $m_{\mp}$ :  $W = \alpha \frac{\gamma-1}{2-\gamma} (V \mp C)$ ; - вырожденные узлы при  $\gamma = 2$ , где  $f(\rho) \sim \rho^{\gamma}$ , при  $\rho \rightarrow 0$ ;
- 3)  $V = \pm \frac{\alpha C}{\sqrt{1+\alpha^2}}, W = \pm \frac{C}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \rho = 0$  – два седла с сепаратрисами касательными к окружности  $V^2 + W^2 = C^2$  и к прямым  $l_{\pm}: ((\gamma - 1)\alpha^2 - \gamma)V + \alpha(2\gamma - 1)W = \pm C(\gamma - 1)\alpha\sqrt{\alpha^2 + 1}$  (см. рисунок 8).

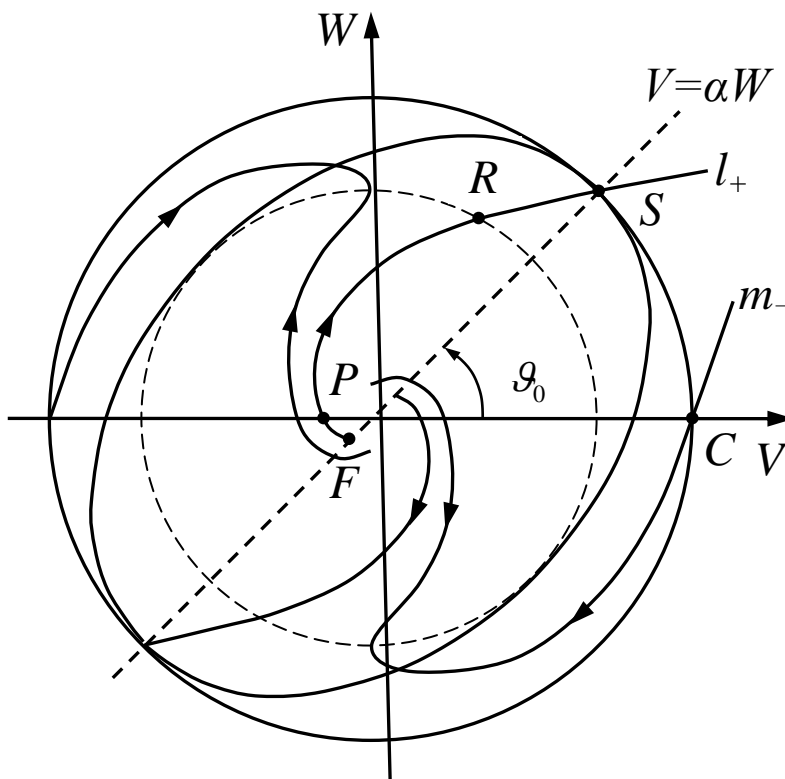


Рис. 8

Непрерывный кусок течения может быть в области (фундаментальная область), заключенная между разными спиральными линиями уровня. Уравнения разных линий уровня таковы  $\theta_1 = \theta - \alpha^{-1} \ln r = \theta_0, 0 \leq \theta_0 < 2\pi$ ; или  $r = r_0 \exp(\alpha\theta), 1 \leq r_0 < \exp(2\pi\alpha)$ .

**Теорема 17.1.** Линия тока не может быть продолжена за точку касания с линией уровня.

Доказательство. Линии уровня удовлетворяют уравнению

$$r^{-1}dr = \alpha d\theta \quad \text{или} \quad d\theta_1 = 0,$$

и являются логарифмическими спиралями  $\theta_1 = \theta - \alpha^{-1} \ln r = const$ .

Линии тока по решению уравнений (17.5), (17.6) или (17.7), (17.8) определяются из равенств

$$\frac{dr}{V} = \frac{rd\theta}{W} \quad \text{или} \quad \frac{dr}{r} = \text{ctg}\vartheta d\theta \quad \text{или} \quad d\theta_1 = (1 - \alpha^{-1}VW^{-1})d\theta. \quad (17.9)$$

Условия касания линии тока и линии уровня имеют вид

$$V = \alpha W \quad \text{или} \quad \text{ctg}\vartheta = \alpha \quad (\vartheta = \vartheta_0).$$

Интегральные кривые уравнения (17.5) пересекают прямую  $V = \alpha W$

под постоянным углом  $\left. \frac{dV}{dW} \right|_{V=\alpha W} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}$ . В полярных координатах плоскости годографа подмодель имеет вид

$$Q_{\theta_1} = -\frac{\alpha Q f_p}{Q^2 (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)^2 - (\alpha^2 + 1) f_p},$$

$$\vartheta_{\theta_1} = \alpha \frac{\alpha f_p + Q^2 \sin \vartheta (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)}{Q^2 (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)^2 - (\alpha^2 + 1) f_p}.$$

$$\text{Отсюда следует } \vartheta_{\theta_1} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = -\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} < 0, \quad Q_{\theta_1} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \frac{\alpha^2 Q}{\alpha^2 + 1} > 0.$$

Значит, если двигаться вдоль линии тока в сторону увеличения  $\theta_1$  через точку касания линии тока с линией уровня, то угол наклона вектора скорости к вектору точки положения монотонно убывает, а модуль скорости монотонно возрастает.

Если линия тока лежит по одну сторону от линии уровня и касается ее, то соседняя линия уровня пересекает ее в двух точках, в которых  $\vartheta$  одинаково, и получается противоречие с монотонностью изменения угла наклона вектора скорости к вектору точки положения.

Пусть линия тока пересекает линию уровня и касается ее в точке пересечения. Так как угол между вектором точки положения на линии уровня и

линией уровня постоянен и равен  $\vartheta_0$ , то угол между вектором точки на линии тока с линией тока имеет экстремум в точке касания. Получается противоречие с монотонностью изменения  $\vartheta$  при переходе через точку касания.

Из этой теоремы следует, что интегральные кривые уравнения (17.5) нужно рассматривать лишь по одну сторону от прямой  $V = \alpha W$  (см. рисунок 8). Каждый кусок интегральной кривой дает непрерывное течение в области, ограниченной двумя разными линиями уровня.

Знак  $d\theta_1$  определяется знаком выражения

$$\Delta = Q^2 (\cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)^2 - f_p (\alpha^2 + 1).$$

На кривой  $\Delta = 0$  меняется направление возрастания  $\theta_1$  и ускорение обращается в бесконечность. Уравнение  $\Delta = 0$  равносильно уравнению  $|\sin(\vartheta - \vartheta_0)| = aQ^{-1} = \sin \phi$ ,  $\phi$  – угол Маха, т.е.  $\pm \phi = \vartheta - \vartheta_0$ . Дифференцирование по  $\vartheta$  приводит к равенству  $\sin 2\phi = -(m + 2a^2Q^{-2})Q^{-1}Q_\vartheta$ . При  $\phi = 0$  и  $\frac{\pi}{2}$  кривая  $\Delta = 0$  (овал, эллипс для политропного газа) касается окружностей  $Q = C$  и  $Q = a_*$ . Для точек близких к окружности  $Q = C$  выполняется неравенство  $\Delta > 0$ . Направление возрастания  $\theta_1$  при движении вдоль интегральных кривых показано стрелками на рисунке 8.

Рассмотрим пример построения линии тока для интегральной кривой SPF, идущей из седла в фокус, которая задается уравнением  $Q = Q(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + \pi)$ . При движении от S к F значение переменной  $\theta_1$  убывает. За начальную точку линии тока возьмем точку P, для которой  $\vartheta = \pi$ ,  $Q = Q_p$  и скорость направлена к центру по лучу. Пусть для этой точки  $\theta_0 = 0$ , этого можно добиться поворотом начального луча полярной системы координат.

Линия тока задается равенствами  $\theta = \pi - \vartheta + \int_{\pi}^{\vartheta} \operatorname{ctg}(\vartheta - \vartheta_0) Q^{-1} dQ$ ,

$$\theta_1 = \theta_* - \vartheta + \frac{1}{\alpha} \ln Q + \int_{\pi}^{\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta (\alpha^{-1} dQ + Q^{-1} dQ), \text{ где } \vartheta - \text{ параметр, } \theta_* \text{ задает}$$

начальную линию уровня  $\theta = \theta_P$ , которую можно выбрать произвольно (см. рисунок 9).

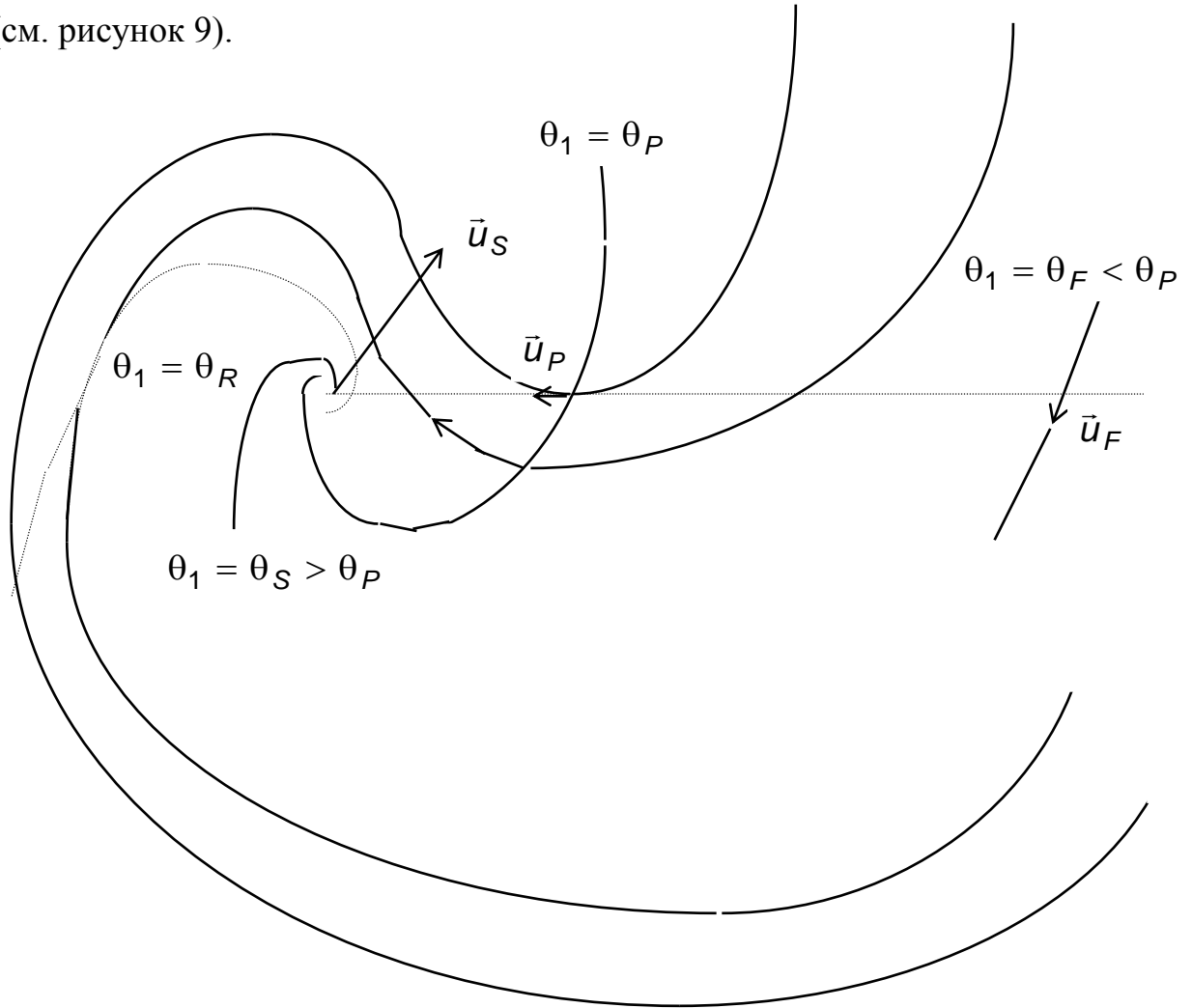


Рис. 9

Из уравнения (17.7) для  $\vartheta \in (\pi, \vartheta_0 + \pi)$  следует неравенство

$$-\alpha Q^{-1} Q_{\vartheta} = \left( 1 + \frac{Q^2}{\alpha f_p} \frac{\tau - \alpha}{1 + \tau^2} \right)^{-1} < 1, \text{ где } \tau = \operatorname{ctg} \vartheta \in (\alpha, \infty).$$

В силу этого равенства получим

$$\theta_1(\pi + \theta_0) = \theta_F = \theta_* - \pi - \vartheta_0 + \frac{1}{\alpha} \ln Q_F + \int_{\pi}^{\pi + \vartheta_0} \operatorname{ctg} \vartheta \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{Q'_{\vartheta}}{Q} \right) dQ > \theta_* - \pi - \vartheta_0 + \frac{1}{\alpha} \ln Q_F,$$

$$\theta(\pi + \theta_0) = -\vartheta_0 + \int_{\pi}^{\pi + \vartheta_0} \operatorname{ctg}(\theta - \theta_0) \frac{Q_{\vartheta}}{Q} dQ > -\vartheta_0 - \frac{1}{\alpha} \ln |\sin(\vartheta - \vartheta_0)|_{\pi}^{\pi + \vartheta_0} \rightarrow \infty.$$

и линия тока наворачивается из бесконечности, где приближается к линии уровня  $\theta_1 = \theta_F$ .

Для  $\vartheta \in (\vartheta_0, \pi)$  воспользуемся равенствами  $Q_\vartheta|_{\vartheta=\vartheta_0} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\alpha} C$ ,

$Q_\vartheta|_{\vartheta=\pi} = -\frac{1}{\alpha} Q_p$ ,  $Q(\vartheta_0) = C$ ,  $Q(\pi) = Q_p$  и априорным представлением о картине

интегральных кривых (Рис. 8), в частности, для интегральной кривой, идущей

из седла, справедливы неравенства  $1 < -\alpha Q^{-1} Q_\vartheta < \chi = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ . Тогда

$$\theta(\vartheta_0) = \pi - \vartheta_0 + \int_{\pi}^{\vartheta_0} \text{ctg} \vartheta (\vartheta - \vartheta_0) Q^{-1} Q_\vartheta d\vartheta > \pi - \vartheta_0 - \alpha^{-1} \chi \ln |\sin(\vartheta - \vartheta_0)| \Big|_{\pi}^{\vartheta_0} \rightarrow \infty;$$

$$\theta_1(\vartheta_0) = \theta_* - \vartheta_0 + \alpha^{-1} \ln C + \int_{\pi}^{\vartheta_0} \text{ctg} \vartheta (\alpha^{-1} + Q^{-1} Q_\vartheta) d\vartheta = \theta_s, \text{ где интеграл сходится, так}$$

как в особой точке  $\vartheta = \pi - 0$  или  $\tau = \text{ctg} \vartheta \rightarrow -\infty$  подынтегральное выражение  $\text{ctg} \vartheta (\alpha^{-1} + Q^{-1} Q_\vartheta) \sim \alpha^{-2} a_p^{-2} Q_p^2$  имеет конечный предел.

Итак, линия тока разворачивается в бесконечность при  $\vartheta \rightarrow \vartheta_0$ , приближаясь к линии уровня  $\theta_1 = \theta_s$ .

Другие линии тока получаются перенесением скоростей вдоль линии уровня. Такое перенесение можно сделать неограниченно далеко в бесконечность и неограниченно близко к нулю, если все линии уровня в этом течении различны. Для этого необходимо выполнение условия

$$\theta_1(\vartheta_0) - \theta_1(\vartheta_0 + \pi) < 2\pi \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \ln \frac{C}{Q_F} + \int_{\vartheta_0+\pi}^{\vartheta_0} \text{ctg} \vartheta \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{Q_\vartheta}{Q} \right) d\vartheta < \pi,$$

которое можно удовлетворить выбором  $\alpha$ . В этом случае получается закрученное течение между спиральными линиями уровня с переходом через скорость звука ( $\theta_1 = \theta_R$  - звуковая линия уровня) из бесконечности в бесконечность с разворотом потока (Рис. 9). Любая линия тока наворачивается из бесконечности, где она асимптотически приближается к линии уровня  $\theta_1 = \theta_F$  и, которую можно считать стенкой; на некотором витке она разворачивается,

пресекает звуковую линию, и далее разворачивается в бесконечность асимптотически приближаясь к линии уровня  $\theta_1 = \theta_s$ , за которой вакуум. Если  $\theta_s - \theta_F < 2\pi$ , то получается однолистное течение.

Если  $\theta_s - \theta_F > 2\pi$ , то непрерывный кусок течения возможен только на одном витке. Но можно представить и многолистное течение, когда  $\beta \neq 0$  и имеется движение частиц в направлении перпендикулярном плоскости переменных  $r, \theta$ .

Две разные линии тока задают бесконечное скрученное сопло, которое можно обрезать на любом витке.

### ***§18. Неавтономные подмодели ранга один.***

**Подалгебра 3.2** задает представление конических течений

$$U = U(s), V = V(s), W = W(s), \rho = \rho(s), S = S(s); s = xr^{-1} = ctg\varphi.$$

Подмодель 3.2 вкладывается в подмодель 2.5, построенной по под-алгебре  $\{\partial_t, \partial_\theta\}$ . Подмодель 2.5 допускает операторы  $\partial_x, x\partial_x + r\partial_r$ , поэтому у неё существуют простые волны, когда все функции зависят от одного параметра. Из представления конических течений видно, что решение есть простая волна. Верно и обратное утверждение: всякая осесимметричная простая волна есть коническое течение с точностью до переноса по  $x$  [1, с. 259].

Из уравнений газовой динамики получаются два типа решений.

а)  $U = V = W = 0, p = p_0$  и можно взять  $\rho = \rho(x, y, z)$  как произвольную функцию. Это движение задает изобарический покой с произвольно распределенной плотностью.

б)  $S = S_0$  - интеграл энтропии,  $W^2 = D\rho|U - sV|$  - интеграл закрутки,  $U^2 + V^2 + W^2 + 2\int \rho^{-1} dp = C^2$  - интеграл Бернулли. Обозначим  $D > 0$ ,  $\sigma = \text{sign}(U - sV)$ . Получается подмодель ранга один автомодельных закрученных при  $D \neq 0$  волн:

$$sU' + V' = \sigma D\rho, \left[ (U - sV)^2 - f_\rho \right] U' + s f_\rho V' = V f_\rho \quad (18.1)$$

Подмодель допускает отражение  $W \rightarrow -W$ , что позволяет считать  $W > 0$ .

Особое решение получается, если определитель квазилинейной системы (18.1) обращается в нуль. В этом случае

$$V = \sigma Ds\rho, U = \sigma(Ds^2\rho + a\lambda), \lambda = \sqrt{1 + s^2}, a = \sqrt{f_\rho}, W^2 = D\rho a\lambda$$

( $\lambda$  и  $a$  должны быть одного знака, например, положительны),

$$D^2 s^2 \lambda^2 \rho^2 + D(1 + 2s^2)\lambda\rho a + \lambda^2 a^2 + I(s) = C^2, I(\rho) = 2\int \rho^{-1} dp, \quad (18.2)$$

$$\frac{2sds}{\lambda^2} + \frac{2D\lambda + a^{-1}f_{\rho\rho}}{2D\lambda\rho + a} d\rho = 0. \quad (18.3)$$

Два последних равенства определяют уравнения состояния, где  $s$ - параметр.

**Теорема 18.1.** Существует единственное особое решение с точностью до отражения для уравнения состояния  $p = \frac{1}{2}a_0^2\rho^2 + p_0$ .

Доказательство. Уравнения (18.3) и (18.2) записываются в переменных  $\lambda, \rho, a$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{a_\rho + D\lambda}{a + 2D\rho\lambda} d\rho = 0,$$

$$D^2 \lambda^4 \rho^2 + 2D\lambda^3 \rho a + \lambda^2 (a^2 - D^2 \rho^2) - D\lambda\rho a + I(\rho) = C^2.$$

Дифференцирование последнего равенства в силу предыдущего дает

$$(2D\lambda\rho + a) \left[ (2D\lambda\rho + a)^2 - 9a^2 \right] = 0.$$

Для  $\lambda$  есть три корня:  $-\frac{a}{2D\rho}$ ,  $-\frac{2a}{D\rho}$ ,  $\frac{a}{D\rho}$  и лишь один положительный имеет физический смысл. Подстановка  $\lambda = \frac{a}{D\rho}$  в (18.3) приводит к равенству

$a = a_0\sqrt{\rho}$ . Отсюда следует уравнение состояния  $p = \frac{1}{2}a_0^2\rho^2 + p_0$  и решение

$$\rho = \frac{a_0^2}{D^2(1+s^2)}, V = \frac{a_0^2 s}{D(1+s^2)}, U = \frac{a_0^2(1+2s^2)}{D(1+s^2)}, W = \frac{a_0^2}{D\lambda}, \quad (18.4)$$

которое задает сверхзвуковое течение

$$q^2 = U^2 + V^2 + W^2 = 2\frac{a_0^4(1+2s^2)}{D^2(1+s^2)} > \frac{a_0^4}{D^2(1+s^2)} = a^2.$$

В начальном сечении  $s = 0$  имеем  $V = 0$ ,  $\rho = D^{-2}a_0^2 = \rho_0$ ,

$U = \rho_0 D = W$  закрученный поток. При  $s \rightarrow \pm\infty$  имеем  $V = W = \rho$ ,

$U = 2\rho_0 D$  истечение в вакуум с удвоенной начальной продольной скоростью. Линия тока  $L$  удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dx}{r^2 + 2x^2} = \frac{dr}{xr} = \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

и определяется равенствами

$$x^2 = r^2(K_0^2 r^2 - 1), \quad r = K_0^{-1} ch(\theta - \theta_0),$$

где  $K_0, \theta_0$  - постоянные. Отсюда следует, что  $r > K_0^{-1}$ , график функции

$r = r(x)$  симметричен относительно оси  $r$ , в первом квадранте имеются

точка перегиба  $(\frac{1}{2}\sqrt{3}K_0^{-1}, \sqrt{\frac{3}{2}}K_0^{-1})$  и точка минимума  $(0, K_0^{-1})$ , нет асимптоты (рисунок 1). Линия тока есть спираль, намотанная на цилиндрическую

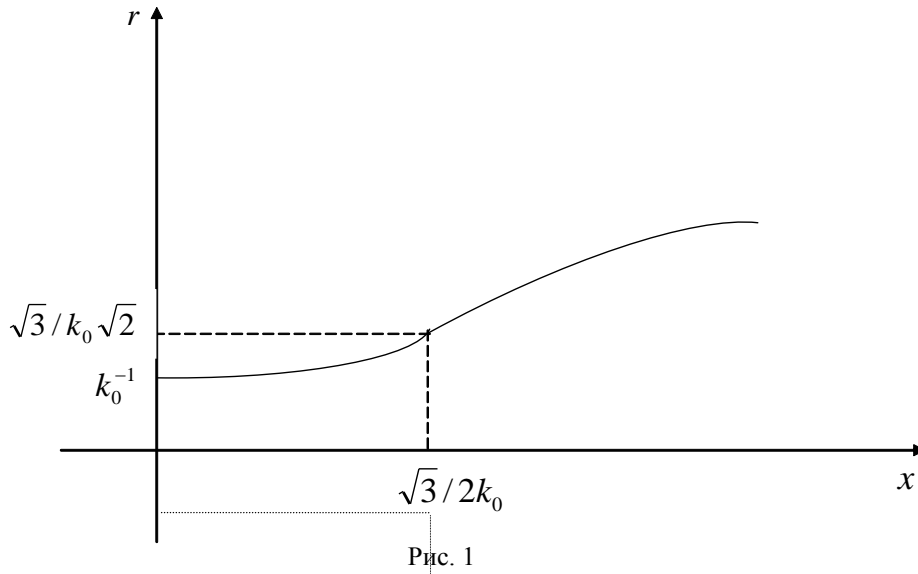
поверхность, образованную вращением кривой  $r = r(x)$  вокруг оси  $x$ .

Плотность и число Маха вдоль линии тока имеют предельные значения

$$\rho|_L = K_0^{-1} r^{-2} \rho_0 \rightarrow 0, \quad M^2 = q^2 a^{-2} = 2(1+2s^2)|_L = 2(2K_0^2 r^2 - 1) \rightarrow \infty$$

при  $r \rightarrow \infty$ .





Плоскость  $x = 0$  ( $s = 0$ ) является  $C_-$  характеристикой для подмодели установившихся течений на решении (18.4). Значит, к течению (18.4) в области может примыкать через слабый разрыв ( $x = 0$ ) равномерный закрученный поток в области  $x < 0$ . Имеется единственный ненулевой скачок ускорения  $[V_x] = a_0^2 D^{-1} r^{-1}$ .

Цилиндрическая поверхность вращения из линии тока задает разгонное сопло вращающегося поступательного потока в поступательный поток, истекающий в вакуум.

Если определитель системы (1) не равен нулю, то система разрешается относительно производных

$$U' = \frac{a^2(V - \sigma Ds\rho)}{(U - sV)^2 - a^2(1 + s^2)}, \quad V' = \frac{\sigma Ds(U - sV)^2 - a^2(sD\rho + sV)}{(U - sV)^2 - a^2(1 + s^2)}, \quad (18.5)$$

где плотность  $\rho$  определяется из уравнения Бернулли

$$U^2 + V^2 + D\rho|U - sV| + I(\rho) = C^2.$$

Завихренность вычисляется по формуле

$$\text{rot } \vec{u} = \vec{e}_x(W_r - r^{-1}V_q + r^{-1}W) + \vec{e}_r(r^{-1}U_q - W_x) + \vec{e}_q(V_x - U_r) =$$

$$= r^{-1}(W - sW', -W', D\rho).$$

Для системы (18.5) можно рассмотреть точные решения, задав одну из функций  $U$  или  $V$  и подобрав уравнения состояния. Для одного простого решения уравнение состояния произвольно:  $U = U_0 = const$ ,  $V = D\rho_0 s$ ,  $W^2 = D\rho_0(U_0 - D\rho_0 s^2)$ ,  $\rho = \rho_0 = const$  определяется из уравнения  $U_0^2 + \sigma D\rho_0 U_0 + 2i(\rho_0) = C^2$ .

Если  $\sigma = 1$ , то  $U_0 \geq D\rho_0 s^2$  и течение определено в области  $|x| \leq r\sqrt{U_0 D^{-1} \rho_0^{-1}}$ . Граница области есть конус, где  $W = 0$  и вектор скорости направлен по касательной (см. рисунок 2). При  $x = 0$  имеем  $U = U_0$ ,  $V = 0$ ,  $W = \sqrt{D\rho_0 U_0}$  постоянный закрученный поток. Итак, решение описывает непрерывное обтекание конуса закрученным потоком.

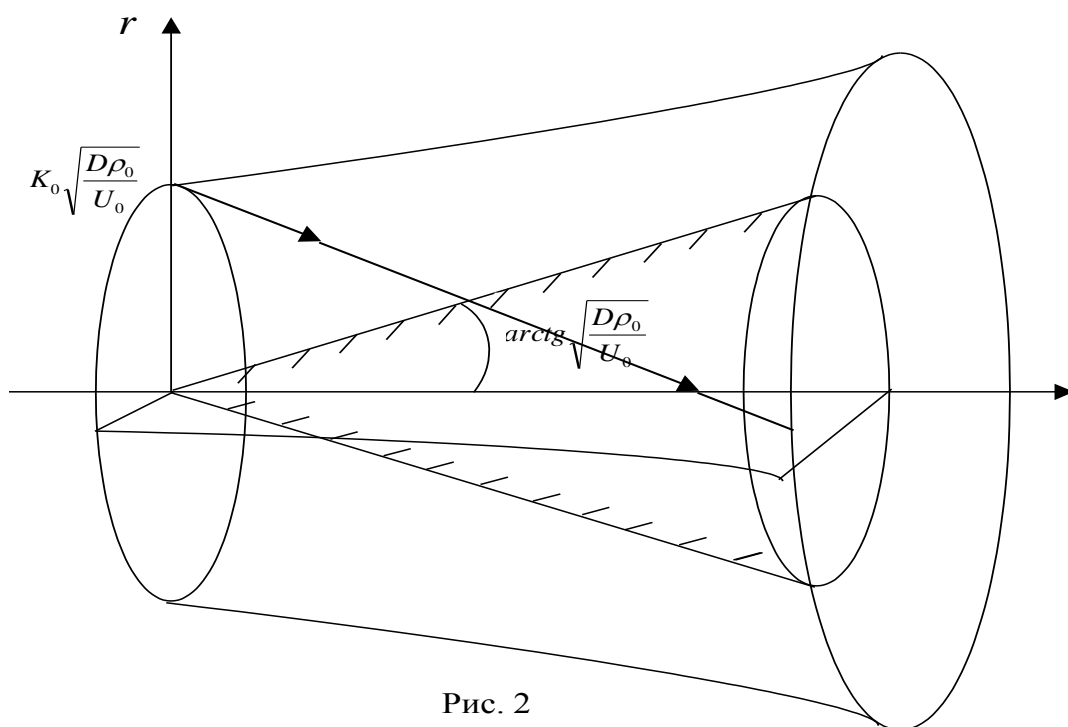


Рис. 2

При  $\sigma = -1$  течение происходит по тем же линиям тока в обратном направлении.

Линии тока  $L$  определяются из равенств  $\frac{dx}{U} = \frac{dr}{V} = \frac{rd\theta}{W}$ :

$U_0 r^2 = D\rho_0(x^2 + K_0^2)$ ,  $r\sqrt{U_0} \cos(\theta - \theta_0) = K_0\sqrt{D\rho_0}$ . Эта прямая на симметричном относительно оси  $x$  однополостном гиперboloиде. При

$K_0 \rightarrow 0$  гиперboloиды приближаются к граничному конусу. При

$\theta - \theta_0 \rightarrow \frac{1}{2}\pi$  частица уходит в бесконечность  $r \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Вдоль линии тока при  $r \rightarrow \infty$ :  $U = U_0$ ,  $W^2 \Big|_{L(K_0)} = K_0^2 D^2 \rho_0^2 r^{-2} \rightarrow 0$ ,

$V^2 = D\rho_0 U_0 - K_0^2 D^2 \rho_0^2 r^{-2} \rightarrow D\rho_0 U_0$  течение стремится к равномерному потоку, при этом модуль скорости сохраняется.

Плоскость  $x = 0$  будет звуковой характеристикой для подмодели ранга 2 стационарных вращательных течений (подалгебра 2.5), если  $U_0 = a_0$ . Поэтому к этой плоскости может примыкать через слабый разрыв равномерный закрученный поток.

При  $D = 0$  получаются течения Буземана ([2, с. 318]; [4, с. 374]). Выполняются условия безвихревого течения, так как  $W = 0$ . С независимой переменной  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , уравнения принимают вид:

$$V_\varphi \operatorname{tg} \varphi + U_\varphi = 0 \text{ или } V_U \operatorname{tg} \varphi + 1 = 0$$

$$NU_\varphi = f_\rho V, \quad N = f_\rho - (V \cos \varphi - U \sin \varphi)^2 = f_\rho - V_n^2, \quad (18.6)$$

$$U^2 + V^2 + 2i(\rho) = q_m^2, \quad i(\rho) = \int_0^\rho f_\rho \rho^{-1} d\rho.$$

Направление линии уровня  $\varphi = \text{const}$  совпадает с направлением нормали к кривой  $V = V(U)$ ,  $V_n = U \sin \varphi - V \cos \varphi$  есть нормальная составляющая скорости к линии уровня (см. рисунок 3).

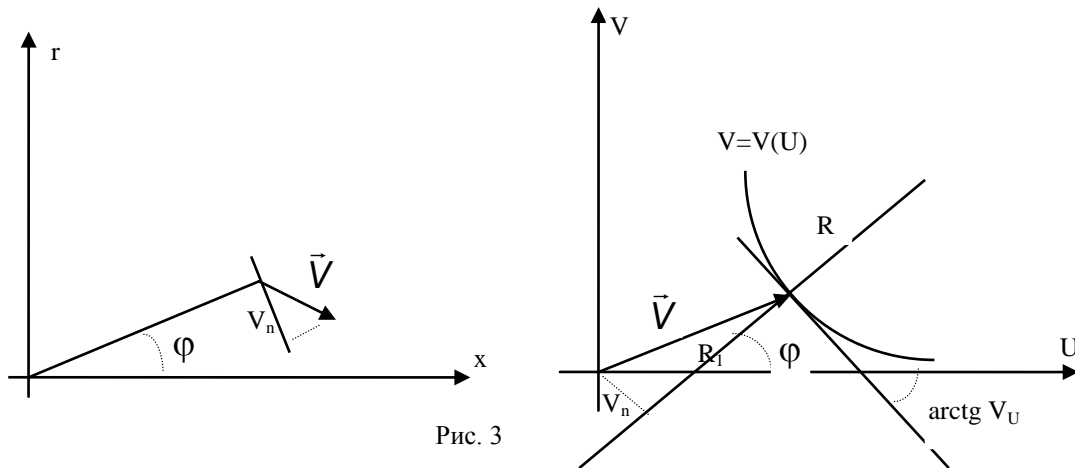


Рис. 3

Исключение  $\varphi$  приводит к уравнению

$$VV_{UU} = 1 + V_U^2 - f_\rho^{-1}(U + VV_U)^2 = (1 - f_\rho^{-1}V_n^2)(1 + V_U^2) \quad (18.7)$$

или

$$R = R_1(1 - V_n^2 a^{-2})^{-1},$$

где  $R$  - радиус кривизны кривой  $V = V(U)$ ,  $R_1$  - расстояние от точки на кривой до точки пересечения нормали с осью  $U$  (Рис. 3).

При переходе от переменной  $\varphi$  к переменной  $U$  якобиан преобразования отличен от нуля в области непрерывного однолистного течения  $\varphi_U = V_{UU} \sin^2 \varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq 0, V_{UU} \neq 0$ .

Рассмотрим непостоянное течение, непрерывно примыкающее к однородному поступательному потоку вдоль линии уровня  $\varphi = \varphi_0$ :

$$U = U_0 > 0, V = N = 0 \Rightarrow a_0^2 = U_0^2 \sin^2 \varphi_0 \Rightarrow U_0 > a_0.$$

Если  $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ , то примыкание возможно только к звуковому потоку  $U_0 = a_0$ . Дифференцированием уравнений (18.6) по  $\varphi$  можно показать, что все производные при  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  равны нулю. Значит, непостоянное коническое течение не может непрерывно примыкать к звуковому потоку.

Пусть  $U_0 > a_0$  сверхзвуковой поток примыкает по конусу Маха  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\sin \varphi_0 = \pm a_0 U_0^{-1} = \pm \sin \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  - угол Маха набегающего потока. Отсюда следует  $\varphi_0 = \pm \alpha_0$  и выполняется условие  $dU = \pm \operatorname{tg} \alpha_0 dV$  на характеристике  $r = \pm \operatorname{tg} \alpha_0 x$  подмодели 2.5.

Дифференцирование уравнений (18.6), (18.7) при  $\varphi = \varphi_0$  дает значение производных

$$\begin{aligned} U_{\varphi_0} &= -U_0 (m_0 + 2)^{-1} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0, \\ V_{\varphi_0} &= U_0 (m_0 + 2)^{-1} \cos^2 \varphi_0, \\ N_{\varphi_0} &= -U_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0, \\ V_{U_0} V_{UU_0} &= 2a_0^{-2} U_0 (1 + V_{U_0}^2) + m_0 a_0^{-4} U_0^3 > 0, \end{aligned} \quad (18.8)$$

где  $m_0 = \rho_0 a_0^{-2} f_{\rho\rho_0}$ .

Пусть  $\varphi_0 < \frac{1}{2}\pi$ , т.е. характеристика набегающего однородного потока направлена по потоку  $d\varphi < 0$ . Тогда из равенств (18.8) следует  $U_{\varphi_0} < 0$ ,  $V_{\varphi_0} > 0$ ,  $N_{\varphi_0} < 0$  и  $dU > 0$ ,  $dV > 0$ ,  $dN > 0 \Rightarrow U$  возрастает,  $V$  убывает ( $V < 0$ ),  $|V|$  возрастает,  $q^2 = U^2 + V^2$  возрастает,  $\rho$  и  $p$  убывают,  $N = a^2 - V_n^2$  возрастает и положительно,  $V_n < a$ ,  $V_{U_0} < 0$ ,  $V_{UU_0} < 0$ .

Нормальная к лучу  $\varphi = \operatorname{const}$  составляющая скорости становится дозвуковой. Имеем волну разрежения. Лучи  $\varphi = \operatorname{const}$  в примыкающей простой волне не являются характеристиками. Такое течение продолжается до  $\varphi = \varphi_1 > 0$ , при котором  $V_{UU_1} = 0$ . Действительно, если течение продолжается до оси симметрии  $\varphi = 0$ , то существует  $\varphi = \varphi_2$ , для которого  $V_2 = 0$ ,  $V_{U_2} > 0$  и  $V_{UU} < 0$  при  $\varphi_2 \leq \varphi < \varphi_0$ . Соотношения (18.8) справедливы при  $\varphi = \varphi_2$  и, значит,  $V_{UU_2} > 0$ ; противоречие.

Дифференцирование уравнения (18.7) в силу (18.6) дает

$$V_{UUU} = \frac{(m+2)V_n^3 + (f_\rho - V_n^2)(4V_n + f_\rho \cos \varphi)}{|V| f_\rho^2 \sin^3 \varphi} > 0.$$

Так как  $V_{UU} = V^{-1}(1+V_U^2)(1-V_n^2 f_\rho^{-1}) < 0$  при  $\varphi > \varphi_0$ , то  $V_{UU}$  возрастает до нуля. При  $\varphi = \varphi_1$  имеем  $V_{UU} = 0$ ,  $f_\rho = V_n^2$ ,  
 $V_{UUU} = (m+2)|V|^{-1} f_\rho^{-1/2} \sin^{-3} \varphi_1 > 0$ ,  $V_U = -ctg \varphi_1 < 0$ ,  $N \rightarrow 0$ ,  $U_\varphi \rightarrow -\infty$ ,  
 $V_\varphi \rightarrow \infty$ ,  $\rho_\varphi \rightarrow \infty$ .

Луч  $\varphi = \varphi_1$  имеет характеристическое направление, но не является характеристикой, так как не выполнено условие на характеристике. Этот луч есть огибающая характеристик и не может быть конической ударной волной, так как  $V_n < a$  перед скачком.

Значит, простая коническая волна подрезается характеристикой  $C_+$ , за которой формируется не коническая волна сжатия с появлением в ней ударной волны (см. рисунок 4).

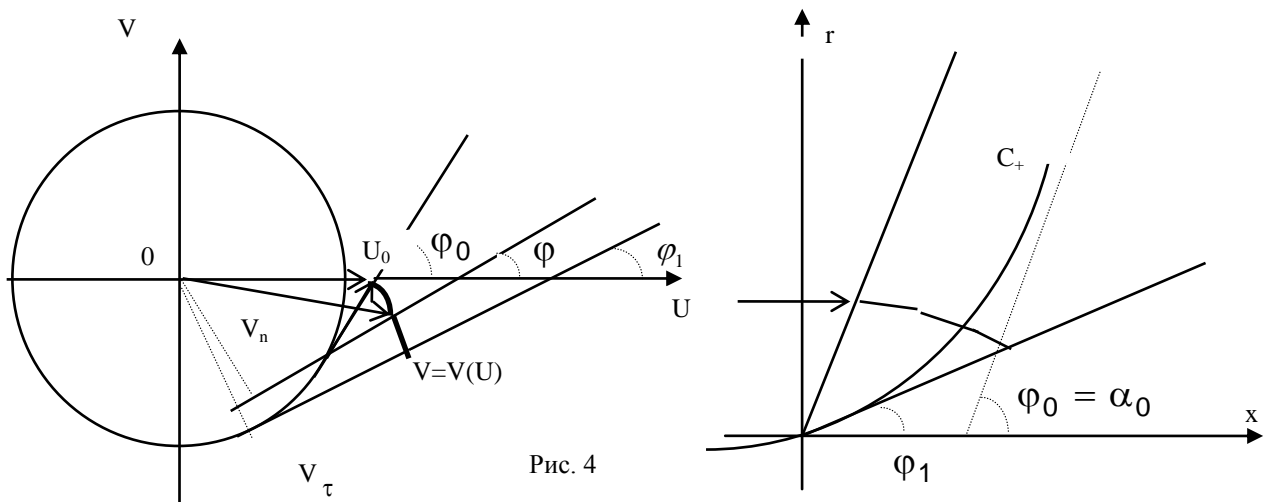


Рис. 4

Пусть  $\varphi_0 > \frac{1}{2}\pi$ , т.е. волна примыкает к набегающему однородному потоку вдоль обращенной вперед характеристики  $d\varphi < 0$ . Тогда по формулам (18.8)  $U_{\varphi_0} > 0$ ,  $V_{\varphi_0} > 0$ ,  $N_{\varphi_0} > 0$  и  $dU < 0$ ,  $dV < 0$ ,  $dN < 0 \Rightarrow$

$U$  убывает,  $V$  убывает и отрицательно,  $|V|$  возрастает,  $N$  убывает и отрицательно,  $V_n > a$ . Это направление изменения  $U$  и  $V$  сохранится при изменении  $\varphi$  от  $\varphi_0$  до  $\frac{1}{2}\pi$ . Действительно, пусть при  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\varphi_0 > \varphi_1 > \frac{1}{2}\pi$  величина  $U_{\varphi_1}$  впервые обратится в нуль. При  $\varphi > \varphi_1$  величина  $N$  не может стать нулем, так как тогда вместе с  $N$  обратится в нуль  $V$  и по теореме Ролля  $V_\varphi$ , а значит,  $U_\varphi$  обратятся в нуль для  $\varphi > \varphi_1$ . Из уравнения (18.6) следует, что  $U_\varphi > 0$ ,  $V_\varphi > 0$ .

При уменьшении угла  $\varphi < \frac{1}{2}\pi$  меняется знак  $V_\varphi < 0$  (см. (18.6)) и  $V$  возрастает,  $|V|$  - убывает. Продолжить течение до  $V = 0$  при некотором  $\varphi > 0$  нельзя, так как при этом  $N = 0$ , и выполняются соотношения (18.8), из которых следует  $V_\varphi > 0$ , противоречие. Таким образом, непрерывно соединить волну с однородным потоком невозможно в простой волне.

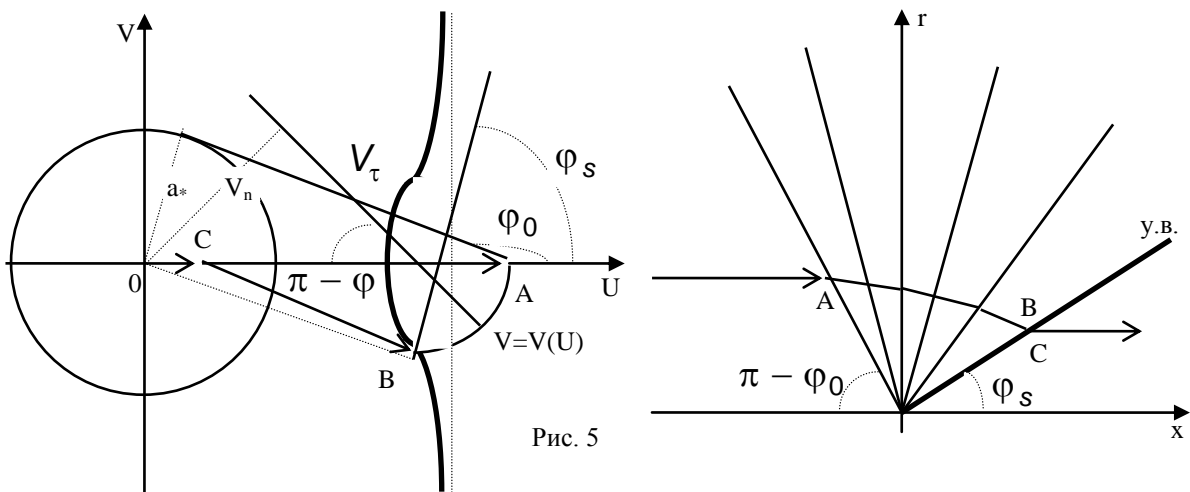


Рис. 5

Поскольку  $N < 0$ ,  $V > 0$ ,  $U_\varphi > 0$ , то проекция скорости на нормаль к лучу сверхзвуковая  $V_n > a$  и возможно поместить на луче  $\varphi = \varphi_s$  скачок уплотнения, переводящий течение в простой волне в однородный дозвуковой поток вдоль оси  $x$ . Это следует из того, что при  $\varphi < \frac{1}{2}\pi$  имеем

простую волну сжатия. Действительно,  $\varphi$  убывает и  $qq_\varphi = UU_\varphi + VV_\varphi = (U - Vctg\varphi)U_\varphi = V_n U_\varphi \sin^{-1}\varphi > 0 \Rightarrow q$  убывает,  $\rho$  возрастает из интеграла Бернулли (см. рисунок 5).

Коническую простую волну можно применить для решения задачи о сверхзвуковом обтекании кругового конуса  $\varphi = \varphi_0$ . Головной скачок уплотнения, отделяющий однородный набегающий поток от возмущенного течения за ним, должен быть конусом  $\varphi = \varphi_s$ . За скачком течение изэнтропическое, значит, безвихревое. Течение за скачком есть осесимметричная простая волна, и в плоскости годографа удовлетворяет уравнению

$$VV_{UU} = (1 - a^{-2}V_n^2)(1 + V_U^2), V^2 + U^2 + I(a^2) = q_m^2,$$

а в плоскости течения находится по решению в плоскости годографа согласно равенству  $V_U = -ctg\varphi$ .

На поверхности конуса  $\varphi = \varphi_0$  выполняется соотношение  $V = Utg\varphi_0$  или в плоскости годографа  $VV_U + U = 0$ , значит, нормаль к кривой  $V = V(U)$  в точке, соответствующей поверхности конуса, должна проходить через начало координат плоскости годографа.

На скачке уплотнения  $\varphi = \varphi_s$  значения  $U$ ,  $V$  удовлетворяют соотношениям  $U + Vtg\varphi_s = U_0$  (касательные к скачку скорости неизменны),

$$V^2 = q_m^2 - U^2 - 2i(\rho) \quad (\text{интеграл Бернулли}),$$

$(U - U_0)\rho_0 U_0 = \rho(q_m^2 - U_0 U - 2i(\rho))$  (ударная поляра), а производная

$V_U = -ctg\varphi_s$ . Требуется определить кривую  $V = V(U)$  и угол  $\varphi_s$  по

заданному углу  $\varphi_0$  (см. рисунок 6).



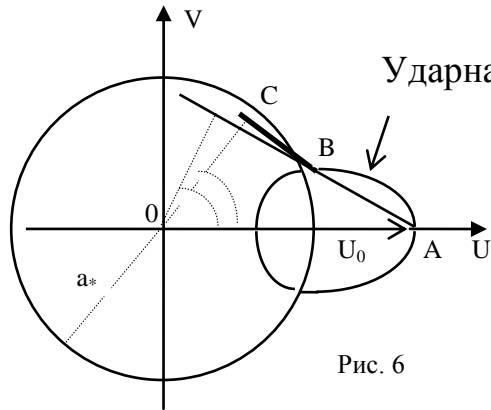
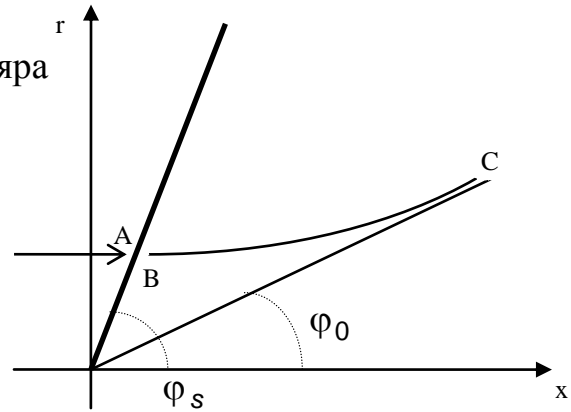


Рис. 6



На практике численно решают серию прямых задач: по заданному  $\varphi_s$  определяют  $\varphi_0$  и  $V = V(U)$  (задача Коши), а затем подбором находят решение обратной задачи (Н.Е. Кочин, И.А. Киболь, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика. т.2. С.195).

**Подалгебра 3.3** задает представление

$$U = xt^{-1} + U_1(s), V = V(s), W = W(s), \rho = \rho(s), S = S(s); s = rt^{-1}.$$

Из УГД получаются интегралы

$$S = S_0, W^3 s^2 = C \rho (V - s), U_1 = DsW$$

и подмодель ранга один

$$V' + (V - s)\rho^{-1}\rho' = -s^{-1}V - 1, (V - s)V' + f_\rho \rho^{-1}\rho' = C^{2/3} s^{-7/3} \rho^{2/3} |V - s|^{2/3}.$$

Особое решение задается равенствами:  $f_\rho = (V - s)^2 \neq 0,$

$$s^4 (V + s)^3 (V - s) + C^2 \rho^2 = 0, (V + s)^2 (2V - s) s^3 = E.$$

При  $E = 0$  имеется два решения

$$а) V = \frac{1}{2}s, \rho = \frac{3}{4}\sqrt{3}C^{-1}s^4, W = -\frac{1}{2}\sqrt{3}s, U_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}Ds^2;$$

$$p = C^{1/2} 3^{-7/4} \rho^{3/2} + p_0.$$

Мировые линии частиц задаются равенствами

$$r = r_0 |t|^{1/2}, \theta = \theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln |t|, x = u_0 t + \frac{1}{2} \sqrt{3} D r_0^2 \operatorname{sign} t.$$

При  $t \rightarrow 0$  все частицы сосредоточены на оси  $x$  (в начальной точке при  $D = 0$ ). Траектории есть спирали на параболоиде. Получается мгновенный закрученный источник с полуоси  $x$  ( $x \geq 0$ ), движущийся с постоянной скоростью  $u_0$ . Относительная скорость частицы стремится к нулю на бесконечности.

Лагранжевыми координатами являются  $r_0$  (фиксирует точку на полуоси мгновенных источников),  $u_0$  и  $\theta_0$  (задают всевозможные наклоны параболоидов и спиралей на них).

$$\text{б) } V = -s, \rho = \rho_0 |s|^{-1/2}, W = 0, U_1 = 0; p = p_0 - \frac{4}{3} \rho_0^4 \rho^{-3} \Rightarrow a = 2s.$$

Мировые линии задаются равенствами

$$r = r_0 |t|^{-1}, \theta = \theta_0, x = u_0 |t|.$$

При  $t \rightarrow 0$  частицы сосредоточены на плоскости  $x = 0$  в бесконечно удаленной точке. При  $t > 0$  частицы выходят из плоскости  $x = 0$ , симметрично, двигаясь к оси  $x$ . При  $t \rightarrow \infty$  частицы стремятся к оси  $x$  и равномерному движению. Получается осесимметричная струя с траекториями - гиперболами  $xr = r_0 u_0$ .

Рассматриваемое решение является частным решением подмодели 2.1 ( $a = b = 0$ ). Эта подмодель стационарного типа с независимыми переменными  $x_1 = xt^{-1}$ ,  $r_1 = rt^{-1}$ . Условие гиперболичности выполнено во всей области течения, причем тройная характеристика  $C_0$  является гиперболой  $x_1 r_1 = \text{const}$ , а характеристики  $C_+$  и  $C_-$  совпадают и являются двойной характеристикой  $r_1 = \text{const}$ .

В общем случае  $E \neq 0$ ,  $C \neq 0$  для  $V_1 = s^{-1}V$  имеем кубическое уравнение  $F \equiv (V_1 + 1)^2(2V_1 - 1) = Es^{-6} \equiv G$  и  $C^2 \rho^2 = s^8(V_1 + 1)^2(1 - V_1^2) \Rightarrow |V_1| \leq 1$ . При  $|V_1| = 1$  наступает вакуум  $\rho = 0$ .

Графики функций  $F(V_1)$ ,  $G(s)$  определяют несколько ветвей решения (см. рисунок 7).

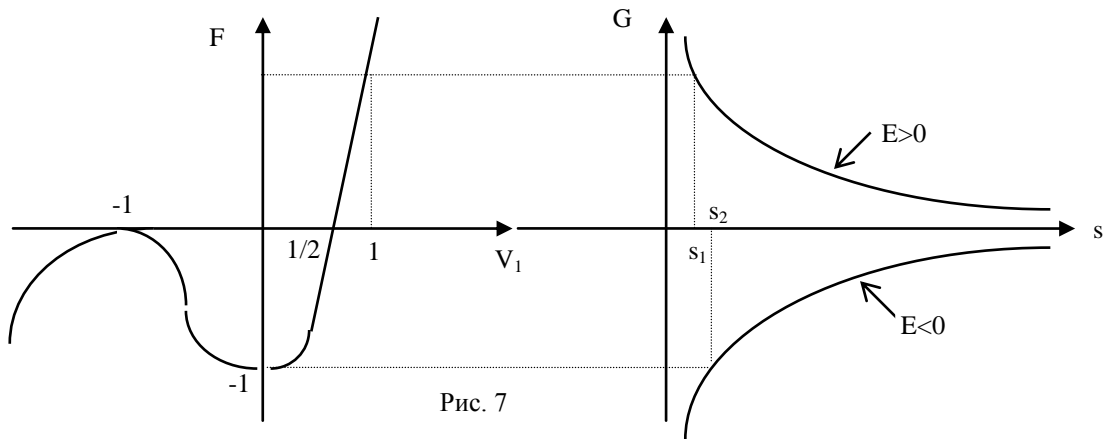


Рис. 7

При  $E > 0$  имеется одна ветвь решения  $1 > V_1 > \frac{1}{2}$ ,  $s_1 < s < \infty$ ,  $s_1 = (4^{-1}E)^{1/6}$ ,  $0 < \rho < \infty$ .

При  $E < 0$  имеется две ветви решений

- 1)  $-1 < V_1 \leq 0$ ,  $\infty > s \geq s_2$ ,  $s_2 = |E|^{1/6}$ ,  $0 < \rho \leq C^{-1}s_2^4$ ;
- 2)  $0 \leq V_1 < \frac{1}{2}$ ,  $s_2 \leq s < \infty$ ,  $C^{-1}s_2^4 \leq \rho < \infty$ .

Получаются различные течения специального газа из неточечного расширяющегося источника (или стока) с образованием вакуума.

Если  $f_\rho \neq (V - s)^2$ , то система разрешается относительно производных

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{s^{-1}(V^2 - s^2) + C^{2/3}s^{-7/3}\rho^{2/3}(V - s)^{2/3}}{f_\rho - (V - s)^2},$$

$$V' = \frac{-s^{-1}(V + s)f_\rho + C^{2/3}s^{-7/3}\rho^{2/3}(V - s)^{5/3}}{f_\rho - (V - s)^2}.$$

Этим уравнениям соответствует автономная система 3-го порядка

$$\rho_\tau = \rho(V^2 - s^2)s^{4/3} + C^{2/3}\rho^{5/3}(V - s)^{2/3},$$

$$V_\tau = -(V + s)s^{4/3}f_\rho - C^{2/3}\rho^{2/3}(V - s)^{5/3},$$

$$s_\tau = s^{7/3}\left[f_\rho - (V - s)^2\right].$$

Стационарные точки лежат на линиях в  $R^3(s, \rho, V)$ :

1.  $\rho = 0, s = 0$  (ось  $V$ );
2.  $\rho = 0, V = s$  (прямая);
3.  $V = s = 0$  (ось  $\rho$ );
4.  $(s + V)^3(V - s)s^4 + C^2\rho^2 = 0, f_\rho = (V - s)^2$ .

Мы не будем изучать поведения интегральных кривых в пространстве, а приведем лишь частные решения.

Пусть  $V = 0$ , тогда  $p = a_0^2\rho + p_0, \rho = a_0^3C^{-1}s, W = -a_0, U_1 = -Da_0s$  и решение УГД принимает вид

$$U = xt^{-1} - Da_0rt^{-1}, V = 0, W = -a_0, \rho = \rho_0rt^{-1}, S = S_0.$$

Мировые линии есть винтовые линии на цилиндре

$$r = r_0, \theta = -a_0t + \theta_0, x = Da_0r_0 + u_0t,$$

где величины с индексом ноль и  $D$  постоянные.

Пусть  $V = Ks, K = const$ , тогда из уравнений подмодели следует

$$f_\rho = \frac{K(K-1)^2}{2K+1}s^2 - (C\rho s^{-1})^{2/3}\frac{(K-1)^{5/3}}{2K+1}, \rho = \rho_0s^{\frac{2K+1}{1-K}},$$

$$W = C^{1/3}(K-1)^{1/3}s^{\frac{3K}{1-K}}, U_1 = DC^{1/3}(K-1)^{1/3}s^{\frac{2K+1}{1-K}}.$$

Отсюда определяется уравнение состояния

$$p = \frac{1}{3}K(K-1)^2\rho_0^{\frac{2K-1}{2K+1}}\rho^{\frac{3}{2K+1}} - \frac{(K-1)^{5/3}}{4K+1}C^{2/3}\rho_0^{\frac{2K-1}{3(2K+1)}}\rho^{\frac{4K+1}{2K+1}} + p_0,$$

которое при  $C = 0$  или при  $K = \frac{1}{2}$ ,  $C \neq 0$  соответствует политропному газу.

**Подалгебра 3.4** задает представление  $U = \alpha\theta + \beta \ln|t| + U_1(s)$ ,

$$V = V(s), W = W(s), \rho = \rho(s), S = S(s); s = rt^{-1}.$$

Из УГД получаются интегралы

$$S = S_0, W^2 s = D\rho(V - s), U_1 = U_0 - \int \frac{\beta s + \alpha W}{s(V - s)} ds,$$

и подмодель ранга один

$$V' + (V - s)\rho^{-1}\rho' = -s^{-1}V, (V - s)V' + f_\rho\rho^{-1}\rho' = Ds^{-2}\rho(V - s).$$

Особое решение  $f_\rho = (V - s)^2 \neq 0$  возможно лишь для уравнения состояния  $p = p_0 - \frac{1}{4}D\rho^2$  и дается формулами

$$\rho = -\frac{1}{2}D^{-1}s^2, D < 0, V = \frac{1}{2}s, W = \pm\frac{1}{2}s, U_1 = U_0 + (2\beta \pm \alpha)\ln|s|.$$

Мировые линии особого решения имеют уравнения

$$r = r_0|t|^{1/2}, \theta = \pm\frac{1}{2}\ln|t| + \theta_0, x = t(U_0 + \alpha\theta_0 + (2\beta \pm \alpha)\ln r_0) + x_0.$$

Траектория частицы есть логарифмическая спираль  $r = r_0 e^{\pm(\theta - \theta_0)}$  на параболоиде  $x = x_0 + r_0^2 r^2 (U_0 + \alpha\theta_0 + (2\beta \pm \alpha)\ln r_0)$ . Плотность частицы изменяется по закону  $\rho = -\frac{1}{2}r_0^2 D^{-1}|t|^{-1}$ . При  $t = 0$  частицы сосредоточены на оси  $x$ , имеют бесконечную радиальную скорость (мгновенный источник) и бесконечную плотность. При  $t \rightarrow \infty$  скорость становится конечной, частицы летят в бесконечность, плотность стремится к нулю (вакуум). Итак, получается истечение в вакуум из мгновенного линейного источника.

Если  $f_\rho \neq (V - s)^2$ , то подмодель разрешается относительно производных

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{(V - s)(D\rho + Vs)}{s^2(f_\rho - (V - s)^2)}, V' = -\frac{sVf_\rho + (V - s)^2 D\rho}{s^2(f_\rho - (V - s)^2)}$$

и эквивалентна автономной системе 3-го порядка

$$\rho_\tau = \rho(V - s)(Ds + Vs),$$

$$V_\tau = -sVf_\rho - D\rho(V - s)^2,$$

$$s_\tau = s^2(f_\rho - (V - s)^2).$$

Стационарные точки образуют следующие множества точек

1.  $\rho = 0, s = 0$  (ось  $V$ );
2.  $\rho = 0, V = s$  (прямая);
3.  $V = 0, \rho = 0$  (ось  $\rho$ );
4.  $D\rho + Vs = 0, f_\rho s^2 = (D\rho + s^2)^2$  при  $D \neq 0$ ;
4.  $s = 0$  (плоскость) при  $D = 0$ ,
5.  $V = 0, f_\rho = s^2$ .

Мы не будем изучать поведения интегральных кривых в пространстве, приведем лишь частные решения.

Пусть  $V = Ks, K = const$ , тогда из уравнений подмодели следует

$$f_\rho = -\frac{1}{2}DK^{-1}(K-1)^2\rho + \frac{1}{2}(K-1)^2s^2, \rho = \rho_0 s^{\frac{2K}{1-K}}, W^2 = D\rho_0(K-1)s^{\frac{2K}{1-K}},$$

$$U_1 = U_0 - \beta(K-1)^{-1} \ln|s| + \alpha(D\rho_0(K-1))^{1/2} (2K-1)^{-1} s^{\frac{2K-1}{1-K}}.$$

Отсюда определяется уравнение состояния

$$p = p_0 + \frac{1}{2}K(K-1)^2 \rho_0^{\frac{K-1}{K}} \rho^{\frac{1}{K}} - \frac{1}{4}DK^{-1}(K-1)^{-1} \rho^2.$$

Мировые линии определяются равенствами

$$r = r_0 t^K, \theta = \theta_0 + (D\rho_0(K-1))^{1/2} (1-2K)^{-1} r_0^{\frac{2K-1}{1-K}} t^{1-2K},$$

$$x = x_0 + t(\alpha\theta_0 + U_0 - \beta(K-1)^{-1} \ln r_0).$$

При  $K > 0$  и  $t \rightarrow 0$  частицы сосредотачиваются на оси  $x$ . Получается мгновенный источник.

При  $K < 0$  и  $t \rightarrow \infty$  частицы стремятся к оси  $x$ . Образуется струя.

Еще одно решение, справедливое для любого уравнения состояния, имеет вид

$$\rho = \rho_0, V = -D\rho_0 s^{-1}, W^2 = -D\rho_0(D\rho_0 s^{-2} + 1) \Rightarrow D < 0,$$

$$|s| \geq |D\rho_0|^{1/2}, U_1 = U_0 + \frac{1}{2}\beta \ln(s^2 + D\rho_0) + \alpha \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2 + D\rho_0}}{|D\rho_0|}.$$

Мировые линии этого решения задаются равенствами

$$r^2 = |D\rho_0|t^2 + r_0^2; r_0 \operatorname{tg}(\theta - \theta_0) = |D\rho_0|t,$$

$$x = x_0 + t(\alpha\theta_0 + \frac{1}{2}\alpha\pi + U_0 + \beta \ln r_0)$$

и являются прямыми, так как в декартовых координатах имеем

$$y = r_0 \cos \theta_0 - |D\rho_0|t \sin \theta_0, z = r_0 \sin \theta_0 + |D\rho_0|t \cos \theta_0.$$

Получается движение газа вне расширяющегося цилиндра

$r \geq |D\rho_0|^{1/2} t$  по прямым без особенностей с постоянной плотностью и постоянным давлением.

**§19. Инвариантные решения подмодели сферически симметричных движений газа.**

Сферически симметричные движения газа описываются особой инвариантной подмоделью на группе вращений

$$\begin{aligned} U_t + UU_r + \rho^{-1} p_r &= 0, \\ \rho_t + U \rho_r + \rho(U_r 2r^{-1}U) &= 0, \\ S_t + US_r = 0, p = f(\rho, S), a^2 = f_\rho. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Групповая классификация системы (19.1) совпадает с групповой классификацией общих уравнений газовой динамики. Ядро групп состоит из переноса по времени и равномерного растяжения:  $\partial_t, t\partial_t + r\partial_r$ , что совпадает с фактором нормализатора подалгебры вращений. Допускается отражение  $t' = -t, U' = -U$ .

Рассмотрим инвариантные решения ранга 1. Оптимальная система одномерных подалгебр состоит из двух представителей  $\partial_t$  и  $t\partial_t + r\partial_r$ .

1. **Стационарное решение** на подалгебре  $\partial_t$  таково:

$$S = S_0, U^2 + 2 \int \rho^{-1} dp = C^2, r^2 \rho U = D.$$

Оно задает течение газа из неточечного источника или стока.

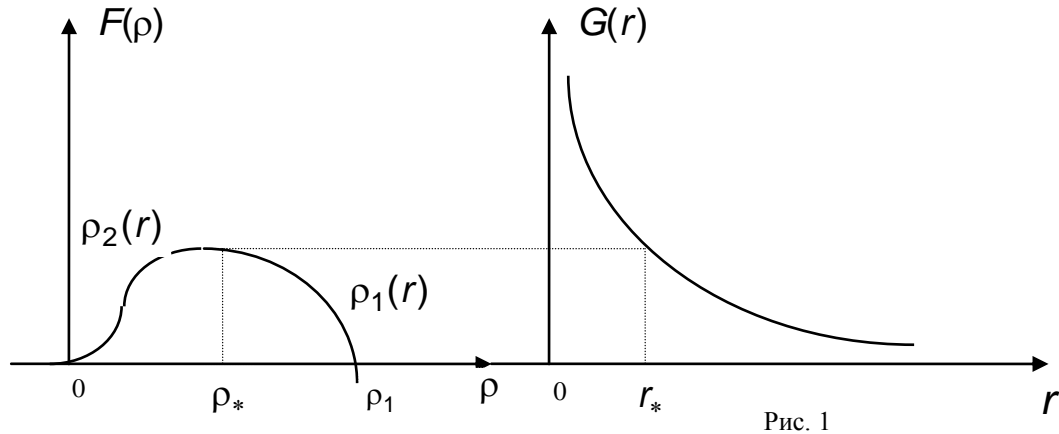
Для политропного газа  $p = B\rho^\gamma, \gamma > 1, a^2 = B\gamma\rho^{\gamma-1}$  имеем

$$U = Dr^{-2} \rho^{-1}, G(r) = D^2 r^{-4} = \rho^2 (C^2 - 2B\gamma(\gamma-1)^{-1} \rho^{\gamma-1}) = F(\rho).$$

Построим график функций  $G(r)$  и  $F(\rho)$  с осями  $r$  и  $\rho$  на одной прямой (см. рисунок 1). Нулями функции  $F(\rho)$  являются  $\rho = 0, \rho = \rho_1, \rho_1^{\gamma-1} = C^2(\gamma-1)(2B\gamma)^{-1}$ . Максимум функции  $F(\rho)$  достигается в точке



$\rho = \rho_*$ ,  $\rho_*^{\gamma-1} = C^2(\gamma-1)(B\gamma(\gamma+1))^{-1}$ . Равенство  $F(\rho_*) = G(r_*)$  определяет область течения  $r \geq r_* = \sqrt{\frac{D}{C\rho_*}} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/4}$ .



Имеется две ветви решения  $\rho_i(r), i = 1, 2, r \geq r_*$ . Истечение из источника  $r = r_*$  звуковое:  $U(r_*) = U_* = a_* = a(r_*)$ . Для первой ветви (см. рисунок 1)  $\rho_1(r) \rightarrow \rho_1, a \rightarrow a_1 = \sqrt{B\gamma\rho_1^{(\gamma-1)/2}}, r \rightarrow \infty, U \rightarrow 0$  течение дозвуковое. Для второй ветви  $\rho_2(r) \rightarrow 0, U \rightarrow C, a \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$  течение сверхзвуковое.

Сфера  $r = r_*$  является предельной линией, на ней ускорение бесконечно  $U_r = \frac{D}{r^3\rho} \left[ \frac{4D^2}{r^4\rho F \odot(\rho)} - 1 \right] \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow r_*, \rho \rightarrow \rho_*$ .

Наличие предельной линии говорит о невозможности стационарного решения в целом. К подобласти определения стационарного течения (например ограниченной конусом) должна примыкать по характеристике УГД рассматриваемого течения область другого движения, вместо характеристики можно взять сильный разрыв.

2. Автомодельные решения на подалгебре  $t\partial_t + r\partial_r$  совпадает

простыми волнами  $S = S_0$ ,  $U = U(s)$ ,  $a = a(s)$ ,  $s = rt^{-1}$ , и образуют под-  
 модель ранга один

$$sU' = -\frac{2Ua^2}{a^2 - (U - s)^2}, \quad sa' = M(a) \frac{aU(U - s)}{a^2 - (U - s)^2}, \quad M(a) = \frac{\rho f_{\rho\rho}}{f_\rho}, \quad a^2 = f_\rho.$$

При  $M = \gamma - 1$ ,  $\gamma = const$ , т.е. с уравнением состояния вида

$p = B(S)\rho^\gamma + B_1(S)$ , система приводится к автономному уравнению после

замены функций  $U = sU_1$ ,  $a = sa_1$ ,

$$\frac{da_1}{dU_1} = \frac{a_1}{U_1} \frac{a_1^2 - (U_1 - 1)(\gamma U_1 - 1)}{3a_1^2 - (U_1 - 1)^2}, \quad (19.2)$$

и квадратуре

$$\frac{ds}{s} = -\frac{a_1^2 - (U_1 - 1)^2}{a_1^2 - (U_1 - 1)(\gamma U_1 - 1)} \frac{da_1}{a_1} = -\frac{a_1^2 - (U_1 - 1)^2}{3a_1^2 - (U_1 - 1)^2} \frac{dU_1}{U_1}. \quad (19.3)$$

Уравнение (19.2) имеет 6 особых точек при  $\gamma \neq 1/3$ :

1.  $U_1 = a_1 = 0$  - дикритический узел;
2.  $a_1 = 0, U_1 = 1$  - при  $1 < \gamma < 2$  двойной узел с касательными интегральных  
 кривых  $a_1 = \pm \sqrt{(2 - \gamma) / 3(U_1 - 1)}$ ;
3.  $a_1 = 1, U_1 = 0$  - вырожденный узел;
4.  $a_1 = -1, U_1 = 0$  - вырожденный узел ;
5.  $U_1 = 2 / (3\gamma - 1) = U_{10}, a_1 = \sqrt{3}(\gamma - 1) / (3\gamma - 1) = a_{10}, \gamma \neq 1/3$  - седло с  
 сепаратрисами, касательными к прямым  $2\sqrt{3}(a - a_{10}) = k_\pm (U_1 - U_{10})$ ,  
 $k_\pm = (3 - \gamma) / 2 \pm \sqrt{((3 + \gamma) / 2)^2 + 1}$ ,  $k_+ > 0$ ,  $k_- < 0$ .
6.  $U_1 = U_{10}, a = -a_{10}$  - седло.

Имеются интегральные прямые  $a_1 = 0$  и  $U_1 = 0$ . Уравнение (19.2) допускает отражение  $a_1 \leftrightarrow -a_1$ , значит, картина интегральных кривых симметрична относительно оси  $U_1$ .

Интегральные кривые имеют направления с нулевым углом к оси  $U_1$ , в точках гиперболы  $a_1^2 - \gamma(U_1 - (\gamma + 1) / (2\gamma))^2 = 1 - (\gamma + 1)^2 / (4\gamma)$ , и имеют направления с нулевым углом к оси  $a_1$  в точках скрещивающихся прямых  $p_{\pm} : \sqrt{3}a_1 = \pm(U_1 - 1)$  (см. рисунок 2).

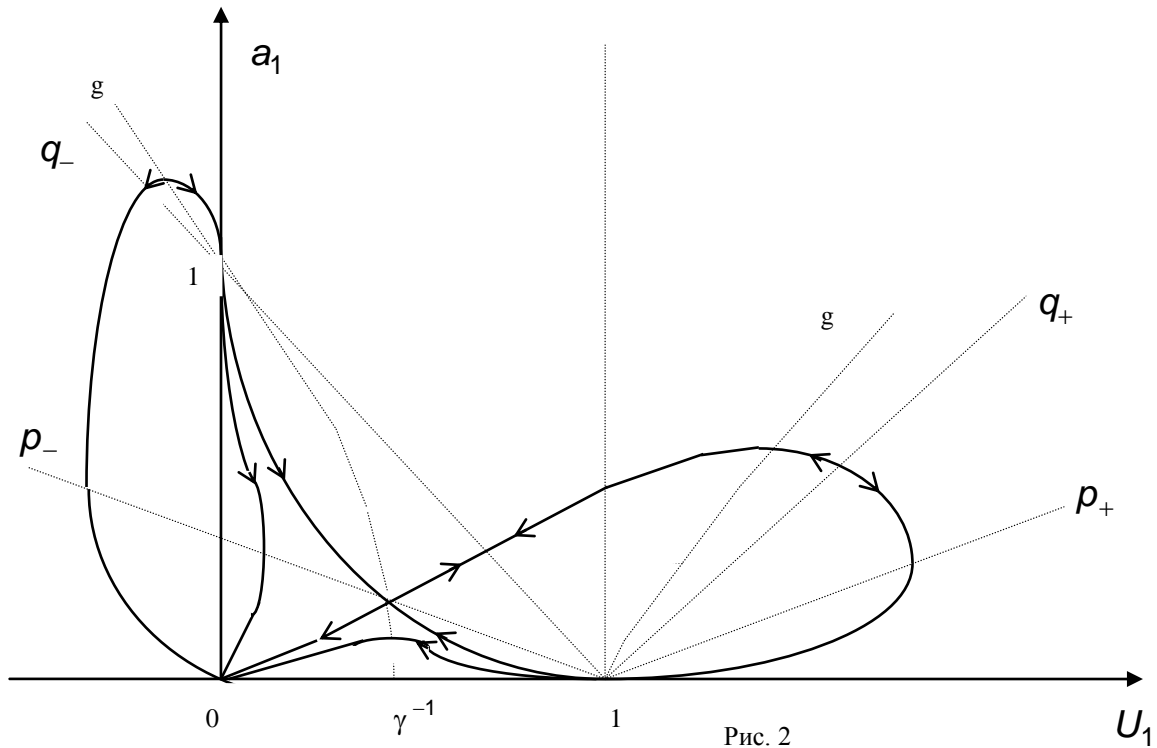


Рис. 2

Картина интегральных кривых совпадает с одной из картин, полученных Л.И. Седовым для политропного газа (Метод подобия и размерности в механике. 1965. § 5, рис. 30, стр. 200).

В бесконечно удаленную точку входят только интегральные прямые  $a_1 = 0$  и  $U_1 = 0$ . Гипербола  $g : a_1^2 = (U_1 - 1)(\gamma U_1 - 1)$ , прямые  $p_{\pm} : \sqrt{3}a_1 = \pm(U_1 - 1)$ ,  $q_{\pm} : a_1 = \pm(U_1 - 1)$  есть линии перемена знака в выраже-

ниях (19.3). Стрелками на рисунке указаны направления движения по интегральным кривым, чтобы выполнялось неравенство  $s^{-1}ds > 0$ .

Непрерывным решениям соответствуют интегральные кривые в первом квадранте, входящие в дикритический узел, и идущие из вырожденного узла и двойного узла. Граничные интегральные кривые есть сепаратрисы седла. Направления возрастания величины  $s^{-1}ds$  меняется на прямых  $a_1 = \pm(U_1 - 1)$ .

В окрестности дикритического узла интегральные кривые имеют асимптотическое поведение  $a_1 \approx kU_1$ . Уравнение (19.3) принимает вид

$$\frac{ds}{s} \approx -\frac{(k^2 - 1)U_1^2 + 2U_1 - 1}{((\sqrt{3}k - 1)U_1 + 1)((\sqrt{3}K + 1)U_1 - 1)} \frac{dU_1}{U_1} \approx (-U_1^{-1} + 2k^2U_1)dU_1.$$

Интегрирование дает  $rt^{-1} = s = CU_1^{-1} \exp(k^2U_1^2) \rightarrow \infty$  при  $U_1 \rightarrow 0$ .

При фиксированном значении времени  $t$  получаем распределение функций  $U_1, a_1$  такое, что  $U_1 \rightarrow 0 (U \rightarrow C)$ ,  $a_1 \rightarrow 0 (a \rightarrow kC)$  при  $r \rightarrow \infty$ , т.е. в бесконечности имеется постоянный поток частиц.

В окрестности двойного узла интегральные кривые имеют поведение  $a_1 \approx \pm\sqrt{(2 - \gamma)/3}(U_1 - 1)$ . Уравнение (19.3) принимает вид

$$s^{-1}ds \approx -(\gamma + 1)(3(\gamma - 1)U_1)^{-1} dU_1.$$

Интегрирование дает  $rt^{-1} = s = CU_1^{-\frac{\gamma+1}{3(\gamma-1)}} \rightarrow C$  при  $U_1 \rightarrow 1$ .

При  $t = 1$  имеется сфера  $r = C$ , на которой частицы имеют скорость  $U = C(U_1 = 1)$  и скорость звука  $a \rightarrow 0 (a_1 \rightarrow 0)$  (вакуум).

В окрестности вырожденного узла интегральные кривые имеют поведение  $a_1 \approx 1 + U_1(k + \frac{\gamma+1}{2} \ln |U_1|)$ . Уравнение (19.3) принимает вид

$$\frac{ds}{s} \approx -[k + \frac{\gamma+1}{2}(1 + \ln |U_1|)]dU_1.$$

Интегрирование дает

$$\ln s \approx \ln C - kU_1 - \frac{\gamma+1}{2}U_1 \ln |U_1| \rightarrow \ln C \text{ при } U_1 \rightarrow 0 \Rightarrow s \rightarrow C.$$

При  $t = 1$  имеется сфера  $r = C$ , на которой частицы имеют скорость  $U = 0 (U_1 = 0)$  и скорость звука  $a \rightarrow C (a_1 \rightarrow 1)$  (торможение).

Возможны два типа непрерывных движений со специальным распределением параметров газа при  $t = 1$ .

1) Интегральная кривая соединяет дикритический узел и двойной узел. Имеется вакуум внутри сферы  $r = C$ , задается достаточно большой импульс к разлету  $U = C$  при  $r = C$  и на бесконечности  $r \rightarrow \infty$  имеется достаточно малое противодавление  $a = kC$ ,  $k \leq k_0$ , где  $k_0$  - наклон сепаратрисы седла, идущей в дикритический узел (см. рисунок 3).

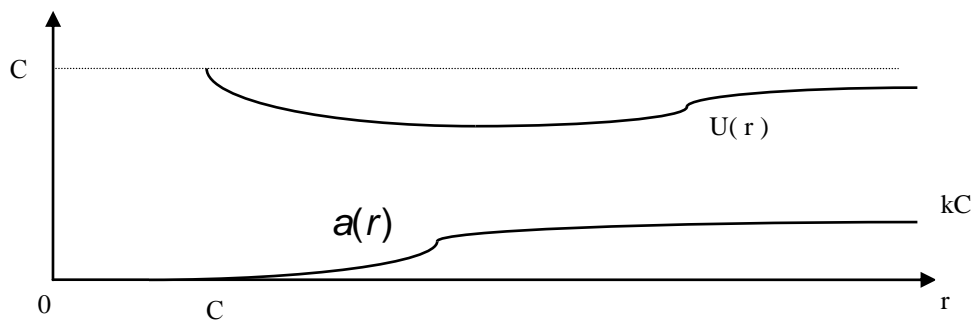


Рис. 3

2) Интегральная кривая соединяет дикритический узел и вырожденный узел. В этом случае имеется покоящийся газ внутри сферы  $r = C$ , сток газа на бесконечности  $r \rightarrow \infty$  с большим противодавлением  $a = kC, k \geq k_0$  (см. рисунок 4).

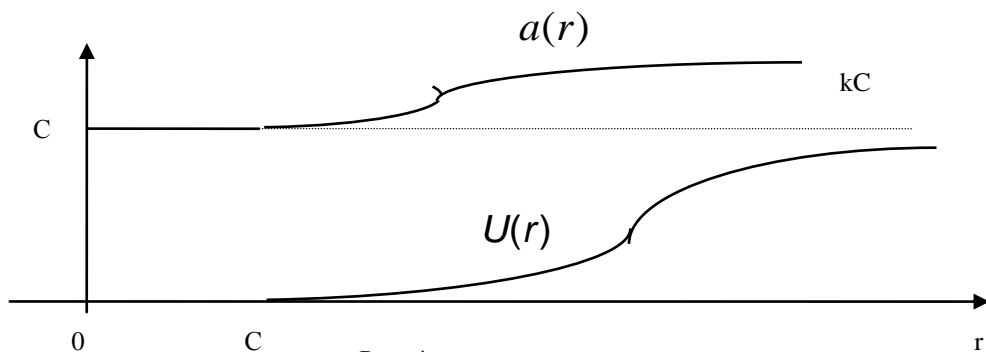


Рис. 4

Условие на инвариантной ударной волне  $r = Dt$  запишем в переменных  $U_1, a_1$ :  $U = sU_1$ ,  $a = sa_1$ ,  $D = s$  - скорость поверхности,  $D = const$ ,

$$\frac{1}{2}(\gamma + 1)(\bar{U}_1 - 1) = \frac{\gamma - 1}{2}(U_1 - 1) + a_1^2 (U_1 - 1)^{-1}, \quad (19.4)$$

$$\bar{a}_1^2 = 2(\gamma + 1)^{-1} [a_1^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(U_1 - 1)^2] [2\gamma - (\gamma - 1)a_1^2 (U_1 - 1)^{-2}].$$

При таких переходах остаются инвариантными прямые  $a_1^2 = (U_1 - 1)^2$ . В точках этих прямых ударная волна вырождается в слабый разрыв. Прямые слабых разрывов совпадают с прямыми, на которых происходит смена знака выражения  $s^{-1}ds$ , поэтому однолиственный непрерывный инвариантный слабый переход невозможен. На этих же прямых достигается знак равенства в утверждении теоремы 4.4 (Цемплена).

Прямая точек вакуума  $a_1 = 0$  при преобразовании (19.4) переходит в прямые  $\bar{a}_1^2 = 2\gamma(\gamma - 1)^{-1}(\bar{U}_1 - 1)^2$ , ограничивающие область ударных переходов. Прямая точек покоя  $U_1 = 0$  переходит через ударную волну (преобразование (19.4)) в эллипс  $\bar{a}_1^2 = (1 - \bar{U}_1)(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\bar{U}_1)$ . Прямая  $U_1 = 1$  точек инвариантного движения поршня не входит в область ударных переходов.

Итак, если двигаться по интегральной кривой по стрелки в области выше прямых  $a_1 = \pm(U_1 - 1)$ , то непрерывное инвариантное движение невозможно в целом. Непрерывная часть движения возможна до пересечения с прямыми  $\bar{a}_1^2 = 2\gamma(\gamma - 1)^{-1}(\bar{U}_1 - 1)^2$ , ограничивающими область ударных переходов. Из области ударных переходов преобразованием (19.4) перейдем в область, ограниченную сепаратрисами седла, или в область ниже прямой  $a_1 = U_1 - 1$ . Далее двигаемся по стрелки вдоль новой интегральной кривой в вырожденный узел или в двойной узел (см. рисунок 2). Получается движение газа с ударной волной в целом.

Если двигаться вдоль интегральной кривой от прямой  $U_1 = 1$  до эллипса, то через ударную волну перейдем к покою. Такая интегральная кривая описывает движение газа под действием расширяющегося сферического поршня, который производит ударную волну, двигающуюся по покою.

**3. Простые волны.** Для двумерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями (19.1), инвариантами являются  $U, \rho, S$ . Нерегулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1 называются простыми волнами. Если  $\rho = \rho_0$  - постоянная, то  $U = 0, S = S_0, p = p_0$  - равномерный покой. Пусть  $\rho \neq const$  и  $U = U(\rho), S = S(\rho), p = p(\rho)$ .

Если  $S' \neq 0$ , то  $U = 0, p = p_0, \rho = R(r), p_0 = f(R(r), S(r))$  - неравномерный покой.

Пусть  $S = S_0$  - постоянная, тогда из системы (19.1) следует

$$\rho_t + \left( U + \frac{p'}{\rho U'} \right) \rho_r = 0, \quad \rho_r = \frac{2\rho^2 U U'}{r(p' - \rho^2 U'^2)}.$$

Первое уравнение интегрируется

$$r = R(\rho) + t \left( U + p'(\rho U')^{-1} \right), \quad (19.5)$$

а из второго уравнения следует соотношение

$$\left[ R + t \left( U + p'(\rho U')^{-1} \right) \right] (p' - \rho^2 U'^2) = 2\rho^2 U U' \left[ R' + t \left( U + p'(\rho U')^{-1} \right)' \right].$$

Приравнивая коэффициенты при  $t$ , получим

$$\frac{p' - \rho^2 U'^2}{2\rho^2 U U'} = \left( U + \frac{p'}{\rho U'} \right)' \left( U + \frac{p'}{\rho U'} \right)^{-1} = \frac{R'}{R}.$$

Если  $R = 0$ , то последнее равенство отсутствует.

При  $R \neq 0$  имеется интеграл  $r = C(U + p'(\rho U')^{-1})$ . Первое уравнение определяет функцию  $U(\rho)$  по заданному уравнению состояния  $p(\rho) = f(\rho, S_0)$ ,  $p' = a^2(\rho) = f_\rho$ .

Подстановка в (19.5) определяет функцию  $\rho(t, r)$ , при этом перенос по  $t$  делает  $C = 0(R = 0)$ .

Итак, без ограничения общности считаем  $R = 0$  и простые волны определяются уравнением

$$2a^2UU_{\tau\tau} = 3UU_\tau^3 + a^2U_\tau^2 + (4aa_\tau - a^2)UU_\tau - a^4, \tau = \ln \rho.$$

Из уравнения (19.5) следует, что  $\rho = \rho(s), s = rt^{-1}$ . Значит, простые волны подобны автомодельным решениям.



## §20. Вычислительные методы.

В вычислительной газовой динамике есть два классических метода: метод характеристик и метод распада произвольного разрыва (С.К. Годунов). Иллюстрируем эти методы на примере одномерных движений.

### 1. Метод характеристик.

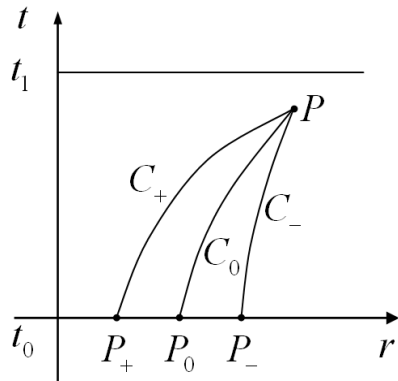
Одномерные уравнения газовой динамики в характеристической форме ( $\nu = 0, 1, 2$ ) имеют вид (12.7)

$$C_+ : dr = (u + a)dt, \quad du + \frac{dp}{\rho a} = -\nu \frac{ua}{r} dt;$$

$$C_- : dr = (u - a)dt, \quad du - \frac{dp}{\rho a} = \nu \frac{ua}{r} dt;$$

$$C_0 : dr = udt, \quad dp = a^2 d\rho \quad (\text{èèèè } dS = 0), \quad p = f(\rho, S), \quad a^2 = f_\rho.$$

Задача Коши:  $u, \rho, p, S$  заданы при  $t = t_0$ , где нет точек вакуума ( $\rho \neq 0, p \neq 0$ ).



Существует единственное решение для  $t_0 < t < t_1$ .

Если решение известно, то для любых близких точек  $P_+, P_-$  проведем характеристики  $C_+, C_-$  до пересечения в точке  $P$ . Далее проведем  $C_0$  из  $P$  в  $P_0$  назад. По значениям газодинамических функций в  $P_+, P_0, P_-$  определяются значения в  $P$ .

Если решение заранее не задано, то газодинамические параметры в  $P$  определяются приближенно из уравнений

$$r_P - r_{P_+} = (u + a)_{P_+} (t_P - t_{P_+}), \quad r_P - r_{P_-} = (u - a)_{P_-} (t_P - t_{P_-});$$

$$u_P - u_{P_+} + \frac{1}{(\rho a)_{P_+}} (p_P - p_{P_+}) = -\nu \left( \frac{au}{r} \right)_{P_+} (t_P - t_{P_+});$$

$$u_P - u_{P_-} - \frac{1}{(\rho a)_{P_-}} (p_P - p_{P_-}) = \nu \left( \frac{au}{r} \right)_{P_-} (t_P - t_{P_-}).$$

По найденным  $t_P, r_P, u_P, p_P$  определяем  $r_{P_0}, S_P$  (или  $\rho_P$ )

$$r_P - r_{P_0} = u_P (t_P - t_{P_0}), \quad S_P - S_{P_0} = 0, \quad p_P = f(\rho_P, S_P), \quad p_P - p_{P_0} = (a^2)_{P_0} (\rho_P - \rho_{P_0}).$$

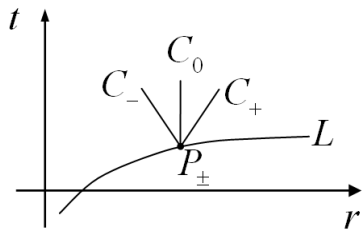
Если  $S$  задано дискретно в  $P_+, P_-$ , то применяем линейную интерполяцию  $\frac{S_{P_0} - S_{P_+}}{r_{P_0} - r_{P_+}} = \frac{S_{P_-} - S_{P_+}}{r_{P_-} - r_{P_+}}$ . Точность вычислений можно увеличить,

если коэффициенты  $K = \left\{ \frac{1}{\rho a}, \frac{a u}{r}, u \right\}$  вычислять в средней точке

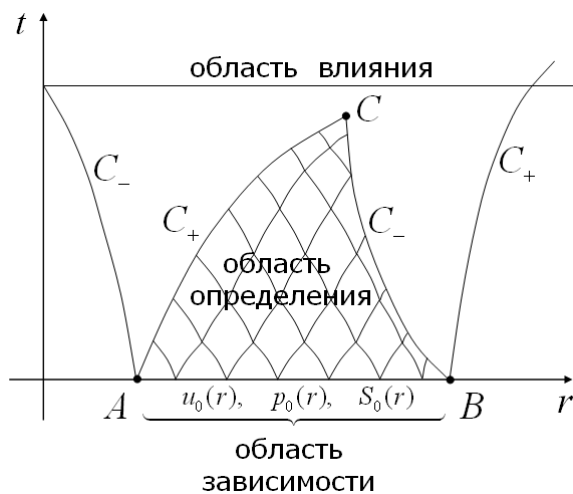
$K = \frac{K_{P_+} + K_{P_-}}{2}$ , а систему приближенных уравнений решать итерациями.

Первое приближение для  $K = \frac{K_{P_+} + K_{P_-}}{2}$ .

Задача Коши на кривой  $L$  решается также, если все характеристики

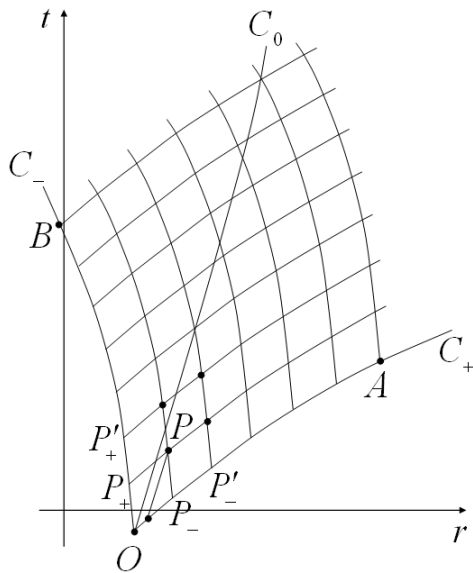


выходят из точек  $L$  в одну сторону (пространственно подобная кривая  $L$ ). Кривая  $L$  временно подобна, если она разделяет характеристики  $C_+$  и  $C_-$ .



Численно строится сетка из характеристик в треугольнике  $ABC$ . Для некоторых начальных данных характеристики  $AC$ ,  $BC$  не пересекаются и  $C$  уходит в бесконечность при  $t \rightarrow \infty$ . Доказано, что точное решение единственно и непрерывно зависит от начальных

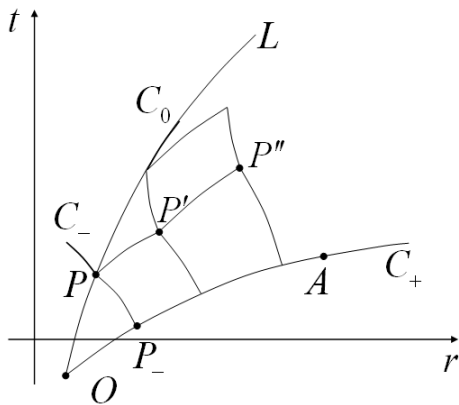
данных и возмущений. При уменьшении расстояний между узлами сетки приближенное решение стремится к точному решению в узлах сетки.



Задача Гурса с данными на характеристиках  $C_-$ ,  $C_+$  удовлетворяет условиям на характеристиках и с условиями согласования в т.  $O$ , так что две из трех функций независимы. Из точек  $P_-, P'_-$  на  $C_+ = OA$  и из точек  $P_+, P'_+$  на  $C_- = OB$  проводим звуковые характеристики до пересечения. Характеристику  $C_0$  проводим назад. Определим функции в узлах. Область определения решения может быть

бесконечной (из  $A, B$  звуковые характеристики идут в бесконечность) или ограниченной, когда характеристики разных семейств пересекаются.

Задача о поршне или с ударной волной.



На кривой  $OA$  характеристики  $C_+$  заданы функции, удовлетворяющие условиям на характеристиках. На неизвестной кривой  $OL$  характеристики  $C_0$  задана связь  $G(t, r, u, p) = 0$  (кроме энтропии). Пусть в точке  $O$  данные согласуются. Из точек  $O$  и  $P_-$  проводим характеристики  $C_0, C_-$  до

пересечения в точке  $P$ , условия на характеристиках определяют функции в точке  $P$  ( $S_p = S_0$ ).

Далее решаем элемент задачи Гурса для определения газодинамических функций функций в точке  $P'$ .

В качестве  $G(t, r, u, p) = 0$  берутся:

- 1)  $\frac{dr}{dt} = u(t, r)$  - задача о поршне;

2) задача со свободной границей  $\frac{dr}{dt} = u(t, r)$ ,  $p(t, r(t)) = p_0$  ( $r = r(t)$ )

не задана);

3) задача с ударной волной  $\frac{dr}{dt} = D$ , условия на ударной волне с заданными значениями газодинамических функций перед фронтом;

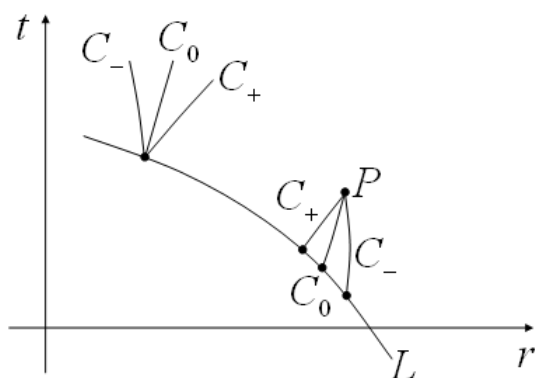
заданными значениями газодинамических функций перед фронтом;

4) разгон поршня  $M \frac{du}{dt} = (p - p_a)L$ ,  $\frac{dr}{dt} = u$ ,  $M$  - масса поршня,  $L$  -

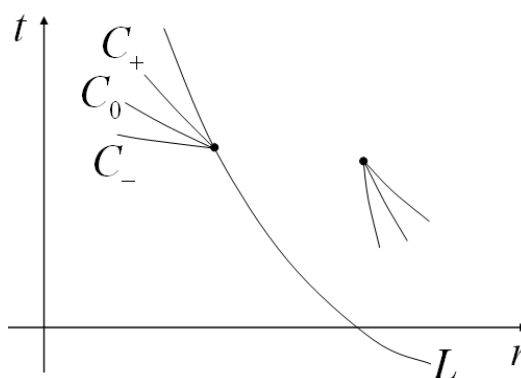
площадь поршня.

Общие замечания о числе газодинамических параметров, задаваемых на кривой  $L$ . Область движения газа справа от кривой  $L$ .

а) Пространственно подобная кривая

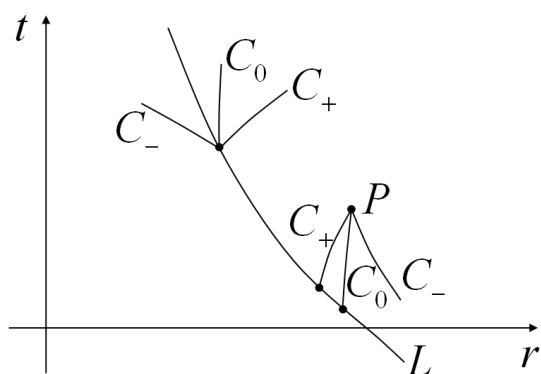


на  $L$  заданы все функции

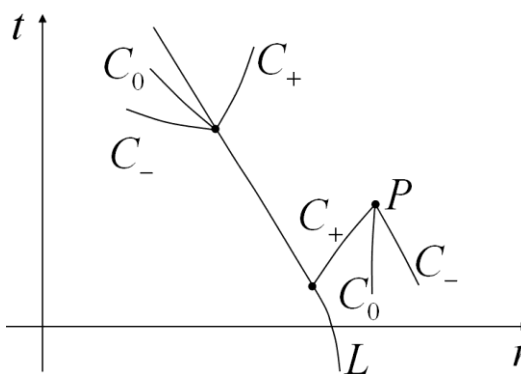


на  $L$  не задано никаких условий

б) Временно подобная кривая



на  $L$  задают 2 условия



на  $L$  задают одно условие

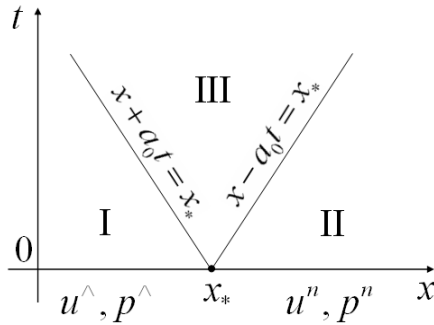
Если  $L$  неизвестно, то на движение  $L$  надо задать дополнительное уравнение.

## 2. Схема С.К. Годунова.

Схему демонстрируем на примере уравнений акустики (11.5)

$$u_t + \rho_0^{-1} p_x = 0, \quad p_t + \rho a_0^2 u_x = 0.$$

Начальные данные заменим кусочно постоянными функциями между узлами сетки. Разрывы распространяются вдоль характеристик.



Характеристическая форма системы

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = a_0, \quad D_+ \left( \overbrace{p + a_0 \rho_0 u}^{I_+} \right) = 0;$$

$$C_- : \frac{dx}{dt} = -a_0, \quad D_- \left( \overbrace{p - a_0 \rho_0 u}^{I_-} \right) = 0.$$

К постоянному решению в области I и II примыкает простая волна, в которой инварианты Римана  $I_+$  и  $I_-$  постоянны:  $p + a_0 \rho_0 u = p^n + a_0 \rho_0 u^n$ ,  $p - a_0 \rho_0 u = p^{\wedge} - a_0 \rho_0 u^{\wedge}$ . Обобщенное решение задачи о распаде произвольного разрыва таково:

$$u = u^{\wedge}, \quad p = p^{\wedge} \quad \text{при} \quad x < x_* - a_0 t; \quad u = u^n, \quad p = p^n \quad \text{при} \quad x > x_* + a_0 t;$$

$$u = \frac{u^n + u^{\wedge}}{2} + \frac{p^n - p^{\wedge}}{2a_0 \rho_0}, \quad p = \frac{p^{\wedge} + p^n}{2} + a_0 \rho_0 \frac{u^n - u^{\wedge}}{2} \quad \text{при} \quad x_* - a_0 t < x < x_* + a_0 t.$$

Для ударных волн  $(p, u)$  – диаграммы простых и ударных волн совпадают. Действительно, дифференциальные уравнения имеют дивергентный вид, их интегрирование по области (аналогично тому, как это делалось в параграфе 4) по формуле Гаусса-Остроградского дает криволинейный интеграл для произвольной части  $\sigma$  ударной волны

$$\int_{\sigma} [u dx - p \rho_0^{-1} dt] = 0, \quad \int_{\sigma} [p dx - \rho_0 a_0^2 dt] = 0.$$

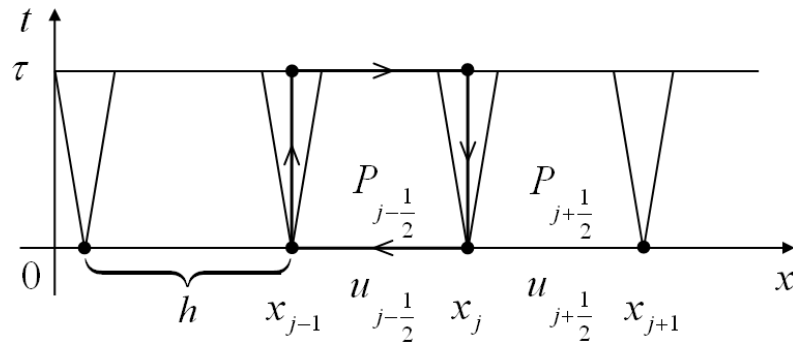
Отсюда следуют соотношения

$$D = \frac{[p]}{\rho_0 [u]} = \rho_0 a_0^2 \frac{[u]}{[p]} \Rightarrow [p] = \pm \rho_0 a_0 [u],$$

где  $D = \frac{dx}{dt}$  – скорость ударной волны.

Упражнение 1. Вывести соотношения на ударной волне из формулы

(4.13) для слабых ударных волн.



Пусть  $u = \bar{u}(x), p = \bar{p}(x)$  – непрерывны при  $t = 0$ . На разностной сетке при  $t = 0$  начальные функции кусочно постоянны. Решаем задачу о распаде разрыва

$$u = u_{j-\frac{1}{2}}, \quad p = p_{j-\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad x_{j-1} + a_0 t < x < x_j - a_0 t;$$

$$u = u_{j+\frac{1}{2}}, \quad p = p_{j+\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad x_j + a_0 t < x < x_{j+1} - a_0 t;$$

$$u = U_j = \frac{u_{j-\frac{1}{2}} + u_{j+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}}{2\rho_0 a_0}, \quad p = P_j = \frac{p_{j-\frac{1}{2}} + p_{j+\frac{1}{2}}}{2} + \rho_0 a_0 \frac{u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\text{при} \quad x_j - a_0 t < x < x_j + a_0 t.$$

Заменим полученные решения при  $t = \tau$  приближенным, чтобы структура решения была такой как при  $t = 0$ , т.е. была бы кусочно постоянна между узлами  $x_j$ :

$$u^{j-\frac{1}{2}} = u_{j-\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{h} \frac{1}{\rho_0} (P_j - P_{j-1}), \quad p^{j-\frac{1}{2}} = p_{j-\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{h} \rho_0 a_0^2 (U_j - U_{j-1}) \quad \text{при} \quad x_{j-1} < x < x_j.$$

Приближенные формулы получены из законов сохранения в интегральной форме. Уравнения имеют дивергентный вид. Их интегрирование по прямоугольнику по формуле Гаусса-Остроградского дает

$$\int_{\square} u dx - \frac{P}{\rho_0} dt = 0, \quad \int_{\square} p dx - \rho_0 a_0^2 dt = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, \tau) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, 0) dx - \frac{1}{\rho_0} \int_0^\tau \left[ p(x_j, t) - p(x_{j-1}, t) \right] dt,$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} p(x, \tau) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} p(x, 0) dx - \rho_0 a_0^2 \int_0^\tau \left[ u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t) \right] dt.$$

В этих формулах  $\tau < \frac{h}{2a_0}$  (условие Куранта). В этом случае характеристики не пересекаются в полосе  $0 < t < \tau$ . Условия пересечения таково  $x_{j-1} + a_0 \tau = x_j - a_0 \tau$ .

Для расчета одномерных движений газа по схеме С.К. Годунова используют уравнения газовой динамики в дивергентной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \varepsilon + \frac{1}{2} u^2 \rho \right) + \left( \left( \varepsilon \rho + p + \frac{1}{2} u^2 \rho \right) u \right)_x = 0$$

и используют точные решения задачи о распаде произвольного разрыва.

**Приложение. Оптимальная система подалгебр основной алгебры.**

r	i	Базис	Nor
11	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	=11.1
10	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11	=10.1
	2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	11.1
9	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11	=9.1
	2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	11.1
8	1	1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11	=8.1
	2	1, 2, 3, 5, 6, $a_4+7$ , 10, $b_4+11$	9.1
	3	1, 2, 3, 4, 5, 6, $7+a_{11}$ , 10	9.1
	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11	=8.4
	5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11	11.1
7	1	1, 2, 3, 7, 8, 9, 11	=7.1
	2	4, 5, 6, 7, 8, 9, 11	=7.2
	3	1, 2, 3, 7, 8, 9, 10	8.1
	4	2, 3, 5, 6, 7, 10, 11	=7.4
	5	1, 2, 3, 4, 7, 10, 11	=7.5
	6	1, 2, 3, 5, 6, 10, $b_4+7+a_{11}$	9.1
	7	1, 2, 3, 5, 6, $a_4+7$ , $4+10$	8.3; $a=0$
	8	2, 3, 4, 5, 6, 7, 11	=7.8
	9	1, 2, 3, 5, 6, $a_4+7$ , $b_4+11$	8.4
	10	1, 2, 3, 5, 6, 10, $a_4+11$	9.1
	11	1, 2, 3, 4, 5, 6, $7+a_{11}$ , $a \neq 0$	8.4
	12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	9.1
	13	1, 2, 3, 4, 5, 6, $7+10$	8.3; $a=0$
	14	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10	11.1
	15	1, 2, 3, 4, 5, 6, 11	10.1



6	1	4, 5, 6, 7, 8, 9	7.2
	2	1, 2, 3, 7, 8, 9	8.1
	3	1, 2, 3, $a^4+7$ , 10, $b^4+11$	7.5
	4	1, 4, 5, 6, 7, 11	$=6.4$
	5	1, 2, 3, 4, 7, 11	$=6.5$
	6	2, 3, 5, 6, $a^4+7$ , $b^4+11$	7.8
	7	2, 3, 5, 6, $7+a^11$ , 10, $a \neq 0$	7.4
	8	2, 3, 5, 6, 7, 10	8.2; $a=b=0$
	9	2, 3, 5, 6, $1+7$ , 10	7.6; $a=b=0$
	10	2, 3, 5, 6, $a^1+7$ , $4+10$	7.7; $a=0$
	11	1, 2, 3, 4, $7+a^11$ , 10	7.5
	12	2, 3, 5, 6, 10, 11	7.4
	13	1, 2, 3, 4, 10, $a^5+11$ ; $a \neq 0$	8.5
	14	1, 2, 3, 4, 10, 11	9.1
	15	2, 3, 4, 5, 6, $7+a^11$ , $a \neq 0$	7.8
	16	2, 3, 4, 5, 6, $1+7$	7.12
	17	2, 3, 4, 5, 6, 7	8.4
	18	1, 2, 3, 5, 6, $b^4+7+a^11$ ; $a \neq 0$	8.4
	19	1, 2, 3, 5, 6, $a^4+7$	9.1
	20	1, 2, 3, 5, 6, $a^4+7+10$	7.6; $a=0$
	21	1, 2, 3, 5, 6, 10	9.1
	22	1, 2, 3, 5, 6, $4+10$	8.3; $a=0$
	23	2, 3, 4, 5, 6, 11	7.8
	24	1, 2, 3, 5, 6, $a^4+11$	8.4
	25	1, 2, 3, 4, 5, 6	11.1
5	1	7, 8, 9, 10, 11	$=5.1$
	2	1, 4, 7, 10, 11	$=5.2$

3	2, 3, 7, 10, 11	=5.3
4	4, 5, 6, 7, 11	=5.4
5	1, 5, 6, $a^4+7$ , $b^4+11$	6.4
6	2, 3, 4, 7, 11	=5.6
7	1, 2, 3, $a^4+7$ , $b^4+11$	6.5
8	1, 2, 3, 10, $b^4+7+a^11$	7.5
9	1, 2, 3, $a^4+7$ , $4+10$	6.11, $a=0$
10	2, 3, 5, 10, $a^6+11$	6.12
11	1, 2, 3, 10, 11	11.1
12	1, 2, 3, 10, $4+a^11$	9.1
13	2, 3, $a^1+5$ , 6, $4+10$ ; $a \neq 0$	6.22
14	2, 3, $1+5$ , 6, 10	6.21
15	2, 3, 5, 6, $4+10$	7.7; $a=0$
16	2, 3, 5, 6, 10	8.2; $a=b=0$
17	1, 2, 3, 6, $4+10$	7.14
18	1, 4, 5, 6, $7+a^11$	6.4
19	2, 3, 5, 6, $7+a^11$ , $a \neq 0$	7.8
20	2, 3, 5, 6, $a^4+7$ ; $a \neq 0$	8.4
21	2, 3, 5, 6, $1+7$	8.3; $a=0$
22	2, 3, 5, 6, 7	9.1
23	1, 2, 3, 4, $7+a^11$ ; $a \neq 0$	6.5
24	1, 2, 3, 4, 7	7.5
25	1, 4, $3+5$ , $2-6$ , 7	=5.25
26	2, 3, 5, 6, $a^4+7+a^10$ ; $a \neq 0$	7.7; $a=0$
27	2, 3, 5, 6, $7+10$	7.6; $a=b=0$
28	1, 2, 3, 4, $7+10$	6.11; $a=0$
29	1, 4, 5, 6, 11	6.4

	30	2, 3, $a^4+5$ , 6, $b^4+11$	6.23
	31	2, 3, 5, 6, $a^4+11$	7.8
	32	2, 3, 4, 6, $a^5+11$	6.23
	33	1, 2, 3, 4, $a^5+11$ ; $a \neq 0$	7.15
	34	1, 2, 3, 4, 11	8.4
	35	2, 3, 4, 5, 6	8.4
	36	2, 3, 4, 5, $1+6$	6.25
	37	1, 2, 3, 5, 6	9.1
4	1	7, 8, 9, 11	$=4.1$
	2	7, 8, 9, 10	5.1
	3	1, $a^4+7$ , 10, $b^4+11$	5.2
	4	5, 6, $a^4+7$ , $b^4+11$	5.4
	5	1, 4, 7, 11	$=4.5$
	6	2, 3, $a^4+7$ , $b^4+11$	5.6
	7	1, 4, 10, $7+a^11$	5.2
	8	2, 3, 10, $7+a^11$ ; $a \neq 0$	5.3
	9	2, 3, 7, 10	6.3; $a=b=0$
	10	2, 3, $1+7$ , 10	5.8; $a=b=0$
	11	2, 3, $a^1+7$ , $4+10$	5.9; $a=0$
	12	1, 4, 10, 11	5.2
	13	2, 3, 10, $a^5+11$ ; $a \neq 0$	6.12
	14	2, 3, 10, 11	7.4
	15	4, 5, 6, $7+a^11$ ; $a \neq 0$	5.4
	16	4, 5, 6, 7	6.4
	17	$a^1+4$ , $3+5$ , $2-6$ , $b^1+7$	5.25
	18	$a^1+4$ , 5, 6, $b^1+7$ ; $a^2 + b^2 = 1$	5.18; $a=0$
	19	1, 5, 6, $b^4+7+a^11$	6.4

20	1, 3+5, 2-6, a4+7	5.25
21	2, 3, 4, 7+a11	5.6
22	2, 3, 4, 1+7	5.24
23	1, 2, 3, b4+7+a11; a ≠ 0	6.5
24	1, 2, 3, a4+7	7.5
25	1, 2, 3, a4+7+10	6.11; a=0
26	4, 5, 6, 11	7.2
27	1, a4+5, 6, b4+11, a ≠ 0	5.29
28	1, 5, 6, a4+11	6.4
29	1, 4, 6, a5+11	5.29
30	2, 3, a4+6, b4+c5+11	6.23
31	2, 3, 4, a5+11; a ≠ 0	6.23
32	2, 3, 4, 11	7.8
33	1, 2, 3, a4+11	8.4
34	1, 2, 3, 11	10.1
35	2, 3, a1+5, 4+b6+10	6.22
36	2, 3, a1+5, 6+10	6.21
37	2, 3, 1+5, 10	6.21
38	2, 3, 5, 10	7.10; a=0
39	1, 2, 3, 4+10	8.3; a=0
40	1, 2, 3, 10	11.1
41	1, a2+b3+4, c3+5, d2+6; $a^2 + b^2 + (c+d)^2 = 1$	6.25
42	1, 4, 3+5, 2-6	7.12
43	1, 4, 5, 6	8.4
44	2, 1+a3, 3+5, 6	6.25
45	2, 3, 1+5, 6	7.12
46	2, 3, 5, 6	9.1

	47	$1+a^3, 2, 5, 6$	7.15
	48	1, 2, 3, 4	9.1
3	1	7, 8, 9	5.1
	2	7, 10, 11	=3.2
	3	4, 7, 11	=3.3
	4	1, $a^4+7, b^4+11$	4.5
	5	1, 10, $b^4+7+a^11$	5.2
	6	1, $4+10, a^4+7$	4.7; $a=0$
	7	1, 10, $a^4+11$	5.2
	8	5, 6, $b^4+7+a^11; a \neq 0$	5.4
	9	3+5, 2-6, $a^1+b^4+7$	5.25
	10	5, 6, $1+b^4+7$	5.18; $a=0$
	11	5, 6, $a^4+7$	6.4
	12	1, 4, $7+a^11; a \neq 0$	4.5
	13	1, 4, 7	5.2
	14	2, 3, $b^4+7+a^11; a \neq 0$	5.6
	15	2, 3, $a^4+7, a \neq 0$	6.5
	16	2, 3, $1+7$	6.11; $a=0$
	17	2, 3, 7	7.5
	18	1, 4, $7+10$	4.7; $a=0$
	19	2, 3, $a^4+7+a^10; a \neq 0$	5.9; $a=0$
	20	2, 3, $7+10$	5.8; $a=b=0$
	21	5, 6, $a^4+11$	5.4
	22	1, $a^4+5, b^4+c^6+11$	5.29
	23	1, 4, $a^5+11, a \neq 0$	5.29
	24	1, 4, 11	6.4
	25	2, 3, $a^4+b^5+11; b \neq 0$	6.23

	26	2, 3, $a^4+11$	7.8
	27	3, $a^1+b^2+6$ , $4+10$	5.17
	28	1, $2+4$ , 10	5.12; $a=0$
	29	1, 4, 10	7.5
	30	2, 3, $4+a^5+10$ ; $a \neq 0$	6.22
	31	2, 3, $5+10$	6.21
	32	2, 3, $4+10$	7.7; $a=0$
	33	2, 3, 10	8.2; $a=b=0$
	34	$-a^2+b^3+4$ , $a^1+d^2-c^3+5$ , $-b^1+c^2+e^3+6$ ; $a^2(e-d)^2 + b^2 e^2 + c^2 d^2 = 1$	6.25
	35	$a^1+4$ , $b^3+5$ , $b^2-6$ ; $a^2 + b^2 = 1$	7.12
	36	4, 5, 6	10.1
	37	$a^1+3$ , $b^1+5$ , $c^1+d^2+6$ ; $b^2 + c^2 + d^2 = 1$	6.25
	38	$a^1+3$ , 5, 6	7.15
	39	1, $3+5$ , $a^2+6$ ; $a \neq -1$	6.25
	40	1, $3+5$ , $2-6$	7.12
	41	1, 5, 6	8.4
	42	2, $a^1+3$ , 4	7.15
	43	2, 3, 4	8.4
	44	1, 2, $3+4$	7.14
	45	1, 2, 4	8.5
	46	1, 2, 3	11.1
2	1	$a^4+7$ , $b^4+11$	3.3
	2	10, $7+a^11$ ; $a \neq 0$	3.2
	3	$a^1+7$ , $4+10$	3.6; $a=0$
	4	$1+7$ , 10	3.5; $a=b=0$
	5	7, 10	4.3; $a=b=0$

	6	10, 11	5.1
	7	4, $7+a11$ ; $a \neq 0$	3.3
	8	1, $b4+7+a11$ ; $a \neq 0$	4.5
	9	4, $1+7$	3.13
	10	4, 7	4.5
	11	1, $a4+7$	5.2
	12	1, $a4+7+10$	4.7; $a=0$
	13	4, 11	5.4
	14	4, $a5+11$ ; $a \neq 0$	4.26
	15	1, $a4+b5+11$	5.29
	16	1, $a4+11$	6.4
	17	1, 10	7.5
	18	3, $4+a6+10$	5.17
	19	1, $4+10$	6.11, $a=0$
	20	$a1+c3+5, b1+d2+6; a^2 + b^2 + (c+d)^2 = 1$	6.25
	21	3+5, 2-6	7.12
	22	5, 6	8.4
	23	$a1+2, 3+4$	6.25
	24	$a1+2, 4$	7.15
	25	1, $3+4$	7.14
	26	1, 4	9.1
	27	2, 3	9.1
1	1	$b4+7+a11$ ; $a \neq 0$	3.3
	2	$a4+7$ ; $a \neq 0$	4.5
	3	7	5.2
	4	$1+7$	4.7; $a=0$
	5	$a4+7+10$ ; $a \neq 0$	3.6; $a=0$

	6	$7+10$	3.5; $a=b=0$
	7	$a^4+11$ ; $a \neq 0$	5.4
	8	11	7.2
	9	$4+10$	5.9; $a=0$
	10	10	8.1
	11	$3+4$	6.25
	12	4	8.4
	13	1	9.1

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.В. Овсянников. Лекции по газовой динамике. М. Наука. 1981.
2. Г.Г. Черный. Газовая динамика. М. Наука. 1988.
3. Г. Биркгоф. Гидродинамика. МИЛ. 1954.
4. Р. Курант, К.О. Фридрихс. Сверхзвуковые течения и ударные волны. МИЛ. 1950.
5. Л.В. Овсянников. Программа подмодели. Газовая динамика. Прикладная математика и механика. 1994. Т. 54, вып. 4. С. 30-55.
6. Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.