МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ «ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

Сборник трудов
Том I. Математика

Научные статьи

Уфа 2012

УДК 51+ 54
ББК 22.1+24
Ф94

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-06819-моб-г), при поддержке гранта правительства РФ по договору №11.G34.31.0042 и за счет внебюджетных средств БашГУ.

Международная школа-конференция для студентов,
Ф94 аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании»:
Сборник трудов. Том 1. Математика.– Уфа: БашГУ, 2012.-172с.

В сборнике трудов помещены научные статьи участников международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Научные статьи воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51+54
ББК 22.1+24

ISBN 978-5-7477-3097-7

Содержание

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ЗАДАЧЕ ВОЗМУЩЕНИЯ КРАТНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Абушахмина Г. Р.
Сибай, СИ (филиал) БашГУ

Введение

Одной из основных задач теории возмущения линейных операторов является задача построения собственных значений оператора, зависящего от параметров. Эта задача детально изучена для случая простых собственных значений; здесь предложены различные методы (см., например, [1]). Более сложной и менее изученной является указанная задача в случае кратных собственных значений. В настоящей работе предлагается способ решения этой задачи на основе метода функционализации параметра.

Пусть $A(\mu)$ - квадратная матрица $\mathbb{N}$ - го порядка, ($\mathbb{N} \geq 2$), зависит от вещественного параметра μ, дважды непрерывно дифференцируемая. Пусть при $\mu = 0$ матрица $A(0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Общий случай рассматривается по аналогичной схеме. Рассматривается задача построения собственных значений матрицы $A(\mu)$ при μ близких к 0.

Для простоты будет рассматриваться случай $\mathbb{N} = 2$.

Так как матрица $A(\mu)$ гладко зависит от μ, то $A(\mu)$ представима в виде:

$$A(\mu) = A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + A_3(\mu), \tag{1}$$

где $A_0 = A(0), \quad A_1 = A'(0), \quad A_2 = \frac{A''(0)}{2}$, $A_3(\mu) = O(\mu^3)$, при $\mu \to 0$.

Предполагаемая схема построения собственных значений матрицы $A(\mu)$ существенно зависит от свойств матрицы A_1. А именно для матрицы A_1 возможны два основных случая:

V1) A_1 имеет пару простых вещественных собственных значений $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

V2) A_1 имеет комплексные собственные значения $\gamma_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$.

Поставленная задача отличается от классических постановок задач теории возмущений тем, что в последней невозмущенная матрица не зависит от параметра μ, а в нашей постановке матрица $A_0 + \mu A_1$ зависит от μ, что усложняет исследование.

§ 1. **Случай вещественных собственных значений**

Рассмотрим сначала случай V1). В силу теории возмущения линейных операторов матрица $A(\mu)$ при малых ненулевых μ, будет иметь пару простых вещественных собственных значений $\lambda_1(\mu) = 1 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_{1,2} + \varepsilon_1(\mu)$ и $\lambda_2(\mu) = 1 + \mu\lambda_2 + \mu^2\lambda_{2,1} + \varepsilon_2(\mu)$, где $\varepsilon(\mu) = o(\mu^2)$ при $\mu \to 0$.

Функцию $\tilde{\lambda}_1(\mu) = 1 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_{1,2}$, назовем главной асимптотикой собственного значения матрицы $A(\mu)$.

Основной целью следующих построений является нахождение главной асимптотики, т.е. определение чисел $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{2,1}$.

Так как $\mathbb{N} = 2$, то $A_0 = I$. Положим $B(\mu) = I + \mu A_1$.

В силу условия $V1)$ матрица $B(\mu)$ при малых ненулевых μ имеет простое собственное значение $1 + \mu\lambda_1$.

Пусть $e_0(\mu)$ - собственный вектор матрицы $B(\mu)$, отвечающий этому собственному значению, т.е. $B(\mu)e_0(\mu) = (1 + \mu\lambda_1)e_0(\mu)$.

Обозначим через $H_0(\mu)$ одномерное подпространство, содержащее вектор $e_0(\mu)$, т.е. $H_0(\mu) = \{x : \ x = Ce_0(\mu)\}$. Подпространство $H_0(\mu)$ будет собственным подпространством матрицы $B(\mu)$, отвечающим собственному значению $1 + \mu\lambda_1$.

Так как $1 + \mu\lambda_1$ является изолированным собственным значением матрицы $B(\mu)$, то согласно спектральной теории линейных ограниченных операторов, пространство $\mathbb{R}^2$ может быть представлено в виде $\mathbb{R}^2 = H_0(\mu) \oplus H^0(\mu)$, где $H_0(\mu)$ - указанное выше одномерное подпространство, а $H^0(\mu)$ - дополнительное к $H_0(\mu)$ инвариантное для $B(\mu)$ пространство. При этом спектр σ матрицы $B(\mu)$ представим в виде $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{1 + \mu\lambda_1\}$, $\sigma_2 = \sigma \setminus \sigma_1$ - спектр матрицы $B(\mu) : \ H^0(\mu) \to H^0(\mu)$. В частности, $(1 + \mu\lambda_1) \notin (B(\mu) : \ H^0(\mu) \to H^0(\mu))$ и, следовательно, существует обратный $(B(\mu) - (1 + \mu\lambda_1)I)^{-1} : \ H^0(\mu) \to H^0(\mu)$.

Транспонированная матрица $B^* = B^*(\mu)$, где $B^* = I + \mu A_1^*$, также имеет простое собственное значение $1+\mu\lambda_1$, которому отвечает собственный вектор $g_0(\mu)$: $B^*(\mu)g_0(\mu) = (1 + \mu\lambda_1)g_0(\mu)$.

Известно, что пространство $H^0(\mu)$ может быть определено равенством $H^0(\mu) = \{u : \ (g_0(\mu), u) = 0\}$, где u - любой вектор из пространства $H^0(\mu)$.

Поэтому имеет место соотношение $(e_0(\mu), g_0(\mu)) \neq 0$.

Ниже будем считать, что собственные векторы $e_0(\mu)$ и $g_0(\mu)$ матриц $B(\mu)$ и $B^*(\mu)$ нормированы исходя из соотношений:

$$\|e_0(\mu)\| = 1, \quad (e_0(\mu), g_0(\mu)) = 1.$$

Теорема 1. *Пусть* $(A_2e_0(\mu), g_0(\mu)) \neq 0$. *Тогда при малых* $|\mu|$ *матрица* $A(\mu)$ *имеет близкое к* $1+\mu\lambda_1$ *простое собственное значение* $\lambda_1(\mu)$, *главной асимптотикой которого будет функция*

$$\widetilde{\lambda}_1(\mu) = 1 + \mu\lambda_1 + \mu^2(A_2e_0(\mu), g_0(\mu)). \tag{2}$$

Приведем схему доказательства этой теоремы.

Собственные значения λ матрицы $A(\mu)$ совпадают с теми λ, при которых уравнение

$$A(\mu)x = \lambda x, \tag{3}$$

имеет ненулевые решения. Если λ - это собственное значение матрицы $A(\mu)$, то соответствующий собственный вектор $x = x(\mu)$ является неизолированным решением уравнения (3), т.к. в этом случае все векторы вида $Cx(\mu)$ при любом C также будут собственными векторами, отвечающими тому же собственному значению.

Для перехода к задаче с изолированными решениями воспользуемся методом функционализации параметра (см., например, [2]), а именно, в уравнении (3) вместо λ мы подставим непрерывный функционал $f(x)$, т.е. $\lambda = f(x)$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$A(\mu)x = f(x)x. \tag{4}$$

Если x^* - решение уравнения (4), то x^* будет собственным вектором, а $f(x^*)$ - собственным значением матрицы $A(\mu)$.

Функционал $f(x)$ выберем в линейном виде:

$$f(x) = (1 + \mu\lambda_1)(x, g_0(\mu)). \tag{5}$$

Очевидны соотношения:

$$f(e_0(\mu)) = 1 + \mu\lambda_1, \quad (f'_x(e_0(\mu)), e_0(\mu)) \neq 0.$$

Подставляя (1) и (5) в уравнение (4) получим:

$$A(\mu)x = (1 + \mu\lambda_1)(x, g_0(\mu))x. \tag{6}$$

Положим

$$\begin{cases} F(x,\mu) = B(\mu)x - (1 + \mu\lambda_1)(x, g_0(\mu))x, \\ \varepsilon(x,\mu) = A_2\mu^2 x + A_3(\mu)x, \end{cases} \tag{7}$$

тогда уравнение (6) примет вид

$$F(x,\mu) + \varepsilon(x,\mu) = 0. \tag{8}$$

Для исследования уравнения (8) применим модифицированный метод Ньютона-Канторовича.

Положим

$$P_0x = (x, g_0(\mu))e_0(\mu), \quad P^0x = (I - P_0)x. \tag{9}$$

По построению операторы P_0 и P^0 являются операторами проектирования, при этом P_0 проектирует пространство $\mathbb{R}^2$ на подпространство $H_0(\mu)$, а P^0 - на пространство $H^0(\mu)$ и выполняется равенство $P_0B(\mu) = B(\mu)P^0$.

Непосредственный подсчет показывает, что оператор $F(x, \mu)$ дифференцируем по x при любом $x \in \mathbb{R}^2$, причем производная Фреше $F'_x(x, \mu)$ определяется равенством:

$$F'_x(x, \mu)h = B(\mu)h - (1 + \mu\lambda_1)(h, g_0(\mu))x - (1 + \mu\lambda_1)(x, g_0(\mu))h, \tag{10}$$

где $h \in \mathbb{R}^2$.

При $x = e_0(\mu)$ оператор (10) примет вид:

$$F'_x(e_0(\mu), \mu)h = B(\mu)h - (1 + \mu\lambda_1)(h, g_0(\mu))e_0(\mu) - (1 + \mu\lambda_1)h. \tag{11}$$

Лемма 1. *Оператор $F'_x(e_0(\mu), \mu) : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ при малых ненулевых μ непрерывно обратим.*

Обозначим $\Gamma = (F'_x(e_0(\mu), \mu))^{-1}$.

Оператор Γ вычисляется по формуле

$$\Gamma x = -\frac{1}{1 + \mu\lambda_1}P_0x + (B(\mu) - (1 + \mu\lambda_1)I)^{-1}P^0x, \tag{12}$$

где $P_0x = (x, g_0(\mu))e_0(\mu)$, $P^0x = (I - P_0)x$, $(B(\mu) - (1 + \mu\lambda_1)I)^{-1}$ - матрица, обратная к матрице $(B(\mu) - (1 + \mu\lambda_1)I) : \ H^0(\mu) \to H^0(\mu)$.

Теорема 2. *Существуют $\delta_0, \quad 0 < \delta_0 < 1$, и $\quad \delta_1, \quad \delta_1 > 0$, такие, что при $\|\mu\| \leq \delta_1$, $\mu \neq 0$, в шаре $T(e_0(\mu), \delta_0)$ выполняются условия сходимости модифицированного метода Ньютона-Канторовича*

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma F(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

где $x_0 = e_0(\mu)$. При этом предел $x^*(\mu)$ итераций (13) будет собственным вектором матрицы $A(\mu)$, отвечающим собственному значению $\lambda_1(\mu) = (1 + \mu\lambda_1)(x^*(\mu), g_0(\mu))$, т.е.

$$A(\mu)x^*(\mu) = (1 + \mu\lambda_1)(x^*(\mu), g_0(\mu))x^*(\mu).$$

Доказательство этой теоремы сводится к проверке условий сходимости метода Ньютона-Канторовича для уравнения (13).

В теореме 1 строится главная асимптотика собственного значения $\lambda_1(\mu)$, использующая итерации (13). Наряду с главной асимптотикой собственного значения $\lambda_1(\mu)$ можно также построить и главную асимптотику собственного вектора $x^*(\mu)$.

Первая итерация в (13) дает главную асимптотику для собственного вектора

$$x_1(\mu) = x_0 - \Gamma F(x_0, \mu) = e_0(\mu) - \Gamma(\mu^2 A_2 e_0(\mu)) + o(\mu^2),$$

а именно, равенство

$$\tilde{x}_1(\mu) = e_0(\mu) - \Gamma(\mu^2 A_2 e_0(\mu)). \tag{14}$$

Подставляя равенство (14) в функционал (5) получим главную асимптотику (2), что завершает доказательство теоремы.

§ 2. **Случай комлексных собственных значений**

Теперь рассмотрим случай V2), когда матрица A_1 имеет комплексные собственные значения $\gamma_1 = \alpha + i\beta, \ \ \gamma_2 = \alpha - i\beta$. Ограничимся построением собственного значения $\gamma_1 = \alpha + i\beta, \ \ e_0(\mu) + ig_0(\mu)$ - собственный вектор матрицы $B(\mu)$.

Пусть $B(\mu)(e_0(\mu) + ig_0(\mu)) = (1 + \mu\alpha + i\mu\beta)(e_0(\mu) + ig_0(\mu))$.

Также воспользуемся методом функционализации параметра. Для случая комплексного собственного значения уравнение (4) примет вид:

$$A(\mu)z = f(z)z, \ \ z \in \mathbb{C}^2, \tag{15}$$

где функционал $f(z)$ выберем в линейном виде

$$f(z) = (1 + \mu\alpha + i\mu\beta)\left(z, \frac{e^*(\mu) - ig^*(\mu)}{2}\right), \tag{16}$$

$e^*(\mu) - ig^*(\mu)$ - собственный вектор транспонированной матрицы $B^*(\mu)$.

Подставляя функционал (16) в (15) получим уравнение

$$F(z, \mu) \equiv B(\mu)z - (1 + \mu\alpha + i\mu\beta)\left(z, \frac{e^*(\mu) - ig^*(\mu)}{2}\right) z = 0, \tag{17}$$

где $z \in \mathbb{C}^2, \ \ z(\mu) = e(\mu) + ig(\mu)$.

Уравнение (17) будем решать методом Ньютона-Канторовича с возмущением. Для этого найдем производную Фреше $F'_z(z, \mu)$:

$$F'_z(z, \mu) = B(\mu)h - (1 + \mu\alpha + i\mu\beta)h -$$

$$(1+\mu\alpha+i\mu\beta)\left(h,\frac{e^*(\mu)-g^*(\mu)}{2}\right)z.$$

Оператор $F_z'(z,\mu)$ непрерывно обратим при малых ненулевых μ, т.е существует $[F_z'(z,\mu)]^{-1}$.

Оператор Γ вычисляется по формуле

$$\Gamma z=-\frac{1}{1+\mu\alpha+i\mu\beta}P_0z+(B(\mu)-(1+\mu\alpha+i\mu\beta)I)^{-1}P^0z, \tag{18}$$

где $(B(\mu)-(1+\mu\alpha+i\mu\beta)I)^{-1}$ - оператор, обратный к оператору

$$(B(\mu)-(1+\mu\alpha+i\mu\beta)I):\ H^0(\mu)\to H^0(\mu),\ \ \Gamma:\ \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2,\ \ z\in\mathbb{C}^2.$$

Для уравнения

$$B(\mu)z-(1+\mu\alpha+i\mu\beta)\left(z,\frac{e^*(\mu)-ig^*(\mu)}{2}\right)z+\mu^2A_2z=0 \tag{19}$$

выполнены все условия метода Ньютона-Канторовича с возмущением.

Положим $z_0=e_0(\mu)+ig_0(\mu)$.

Теорема 3. *Существуют δ_0, $0<\delta_0<1$, и δ_1, $\delta_1>0$, такие, что уравнение (19) при $\|\mu\|\le\delta_1$, $\mu\ne0$, в шаре $T(z_0,\delta_0)=\{z:\ \ \|z-z_0\|\le\delta_0\}$ имеет единственное решение $z=z^*$, которое может быть получено при помощи итераций*

$$z_{n+1}=z_n-\Gamma(F(z_n,\mu)+\varepsilon(z_n,\mu)),\ \ n=0,1,2,\dots, \tag{20}$$

где $z_0=e_0(\mu)+ig_0(\mu)$.

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. - М.: Мир. 1972, 740 с.

[2] *Красносельский М.А., Юмагулов М.Г.* Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений - ДАН России. 1999. Т. 365, № 2, с. 162-164.

УДК 517.984.54

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Ахтямов А. М., Галеева Д. Р.
Уфа, БашГУ

Введение

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка - очень важный раздел в изучении дифференциальных уравнений, не только по теоретическим причинам, но и по практическим. На практике зачастую встречаются такие ситуации, когда спектральный параметр входит в краевое условие.

Рассмотрена задача:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x,\lambda)\frac{dy}{dx} + P_2(x,\lambda)y = 0,$$
$$a(\lambda)y'(0) + b(\lambda)y(0) = 0,$$
$$c(\lambda)y'(1) + d(\lambda)y(1) = 0,$$

где $x \in [0,1], \lambda$ - спектральный параметр, коэффициенты $a(\lambda), b(\lambda)$, $c(\lambda), d(\lambda)$ не обращаются в нуль одновременно.

В работе [1] показано, что полином $d(\lambda)$ из краевого условия однозначно восстанавливается по двум ненулевым попарно различным собственным значениям. Однако в [1] полиномы $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda)$ были известны.

В настоящей работе рассмотрен случай, когда полиномы $b(\lambda), d(\lambda)$ неизвестны и имеют следующий вид:

$$b(\lambda) = h_0 + h_1\lambda,$$

$$d(\lambda) = H_0 + H_1\lambda,$$

их коэффициенты восстанавливаются с помощью пяти ненулевых попарно-различных собственных собственных значений.
Решены прямая и обратная задачи для данного случая.

§ 1. **Постановка задачи**

Рассмотрим спектральную задачу Штурма-Лиувилля со следующими граничными условиями:

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, \tag{1}$$

$$U_1(y) = y'(0) - (h_0 + h_1\lambda)y(0) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(y) = y'(1) + (H_0 + H_1\lambda)y(1) = 0; \tag{3}$$

где $q(x)$ - суммируемая функция, $y = y(x, \lambda), x \in [0, 1], \lambda$ - спектральный параметр, h_0, h_1, H_0, H_1 не обращаются в нуль одновременно.

Требуется восстановить коэффициенты h_0, h_1, H_0, H_1 по собственным значениям $\lambda_i, i = \overline{1, 5}$ задачи $(1) - (3)$.

Теорема: Коэффициенты h_0, h_1, H_0, H_1 из краевых условий $(2), (3)$ восстанавливаются с точностью до перемены мест по пяти ненулевым собственным значениям $\lambda_i, i = \overline{1, 5}$ задачи $(1) - (3)$.

Доказательство: Пусть $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ - линейно независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям:

$$y_1(0, \lambda) = 1, y_1'(0, \lambda) = 0, y_2(0, \lambda) = 0, y_2'(0, \lambda) = 1. \tag{4}$$

$$y_1(x, \lambda) = y_2'(x, \lambda), x \in [0, 1] \tag{5}$$

Собственные значения задачи $(1) - (3)$ являются корнями характеристического определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(y_1(x, \lambda)) & U_1(y_2(x, \lambda)) \\ U_2(y_1(x, \lambda)) & U_2(y_2(x, \lambda)) \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Учитывая условия (4), получаем
$\Delta(\lambda) = -(h_0 + h_1\lambda)(y_2'(1, \lambda) + (H_0 + H_1\lambda)y_2(1, \lambda)) - y_1'(1, \lambda) -$
$- (H_0 + H_1\lambda)y_1(1, \lambda) = 0$

На основании условия (5) выпишем характеристическое уравнение:

$$y_1(1, \lambda)(h_0 + h_1\lambda + H_0 + H_1\lambda) + y_2(1, \lambda)((h_0 + h_1\lambda)(H_0 + H_1\lambda)) = -y_1'(1, \lambda) \tag{7}$$

Введем новые обозначения: $a_1 = h_0 + H_0, a_2 = h_1 + H_1, a_3 = h_0H_0, a_4 = h_0H_1 + h_1H_0, a_5 = h_1H_1$.
Перепишем уравнение (7) с новыми переменными:

$$y_1(1, \lambda)(a_1 + \lambda a_2) + y_2(1, \lambda)(a_3 + \lambda a_4 + \lambda^2 a_5) = -y_1'(1, \lambda). \tag{8}$$

Отсюда получаем

$$a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 + \lambda\mu a_4 + \lambda^2\mu a_5 = \frac{-y_1'(1,\lambda)}{y_1(1,\lambda)}, \tag{9}$$

где $\mu = \dfrac{y_2(1,\lambda)}{y_1(1,\lambda)}$.

Подставив в последнее уравнение известные нам пять собственных значений $\lambda_i, i = \overline{1,5}$, получим систему 5 линейных уравнений с пятью неизвестными $a_i, i = \overline{1,5}$:

$$\begin{cases} a_1 + \lambda_1 a_2 + \mu_1 a_3 + \lambda_1\mu_1 a_4 + \lambda_1^2\mu_1 a_5 = \dfrac{-y_1'(1,\lambda_1)}{y_1(1,\lambda_1)}, \\ a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_2 a_3 + \lambda_2\mu_2 a_4 + \lambda_2^2\mu_2 a_5 = \dfrac{-y_1'(1,\lambda_2)}{y_1(1,\lambda_2)}, \\ \qquad \ldots \\ a_1 + \lambda_5 a_2 + \mu_5 a_3 + \lambda_5\mu_5 a_4 + \lambda_5^2\mu_5 a_5 = \dfrac{-y_1'(1,\lambda_5)}{y_1(1,\lambda_5)}; \end{cases} \tag{10}$$

где $y_1(1,\lambda_i) \neq 0, i = \overline{1,5}$.

Если $y_2(1,\lambda_i) \neq \pm y_1'(1,\lambda_i), i = \overline{1,5}$, то система решается любым из известных явных методов (Гаусса, Крамера, и т.д.)
Зная a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, найдем искомые неизвестные:

$$\begin{cases} h_0 + H_0 = a_1, \\ h_1 + H_1 = a_2, \\ h_0 H_0 = a_3, \\ h_0 H_1 + h_1 H_0 = a_4, \\ h_1 H_1 = a_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_0 = \dfrac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_3}}{2}, \\ H_0 = \dfrac{a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_3}}{2}, \\ h_1 = \dfrac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_5}}{2}, \\ H_1 = \dfrac{a_2 \mp \sqrt{a_2^2 - 4a_5}}{2}, \\ H_0 h_1 + H_1 h_0 = a_4; \end{cases}$$

Таким образом, мы получили 4 решения, но благодаря условию $a_4 = h_0 H_1 + h_1 H_0$ два лишних решения отсекаются, и остается одна пара решений.

Что и требовалось доказать.

Замечание 1: Необходимость восстановления коэффициентов h_0, h_1, H_0, H_1 по пяти собственным значениям, является существенной. Мы можем восстановить их и с помощью четырех собственных значений $\lambda_i, i = \overline{1,4}$, но тогда получим 4 решения. При добавлении дополнительного λ_5, 2 "лишних"решения можно убрать.

Замечание 2: Не всегда система (10) будет иметь единстенное решение. Например, при $q = const$ у системы будет бесконечно много решений, поэтому в подобном случае коэффициенты h_0, h_1, H_0, H_1 следует искать непосредственно из характеристического уравнения. Такой частный случай задачи (1) – (3) рассматривается в §2.

§ 2. **Частный случай обратной задачи**

Рассмотрим случай, когда полином $q(x)$ из уравнения (1) является константой, и выпишем для него характеристическое уравнение:

$$-y'' + qy = \lambda y, \tag{11}$$

$$y'(0) - (h_0 + h_1\lambda)y(0) = 0, \tag{12}$$

$$y'(1) + (H_0 + H_1\lambda)y(1) = 0, \tag{13}$$

где $q = const$, $y = y(x, \lambda), x \in [0, 1], \lambda$ - спектральный параметр, h_0, h_1, H_0, H_1 не обращаются в нуль одновременно.
Обшее решение имеет вид:

$$y(x, \lambda) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda - q}) + C_2 \sin(x\sqrt{\lambda - q}), \tag{14}$$

По краевым условиям найдем константы C_1, C_2 и выпишем характеристическое уравнение:

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\lambda - q}(h_0 + h_1\lambda + H_0 + H_1\lambda)+$$
$$+ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda - q}((h_0 + h_1\lambda)(H_0 + H_1\lambda) - \lambda + q) = 0 \tag{15}$$

Если мы переобозначим неизвестные и выпишем систему уравнений вида (10), то не сможем решить ее однозначно, поэтому мы будем искать коэффициенты h_0, h_1, H_0, H_1 из следующей системы:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_1 - q} = \dfrac{\sqrt{\lambda_1 - q}(h_0 + h_1\lambda_1 + H_0 + H_1\lambda_1)}{\lambda_1 - q - (h_0 + h_1\lambda_1)(H_0 + H_1\lambda_1)}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_2 - q} = \dfrac{\sqrt{\lambda_2 - q}(h_0 + h_1\lambda_2 + H_0 + H_1\lambda_2)}{\lambda_2 - q - (h_0 + h_1\lambda_2)(H_0 + H_1\lambda_2)}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_3 - q} = \dfrac{\sqrt{\lambda_3 - q}(h_0 + h_1\lambda_3 + H_0 + H_1\lambda_3)}{\lambda_3 - q - (h_0 + h_1\lambda_3)(H_0 + H_1\lambda_3)}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_4 - q} = \dfrac{\sqrt{\lambda_4 - q}(h_0 + h_1\lambda_4 + H_0 + H_1\lambda_4)}{\lambda_4 - q - (h_0 + h_1\lambda_4)(H_0 + H_1\lambda_4)}. \end{cases} \tag{16}$$

Все уравнения системы - трансцендентные, их можно решить численно (например, модифицированным методом Ньютона). При достаточно хороших начальных приближениях система решается однозначно.

§ 3. **Решение прямой задачи**

Для того, чтобы решить обратную задачу, необходимо знать собственные значения $\lambda_i, i = \overline{1,5}$. На практике они обычно берутся из измерений, но в нашем случае мы найдем их, непосредственно решив прямую задачу. В дальнешем (см. §4) это поможет нам определить точность вычисления коэффициентов h_0, h_1, H_0, H_1 в обратной задаче.
В общем случае собственные значения задачи $(1)-(3)$ находятся из характеристического уравнения (7):

$$y_1(1,\lambda)(h_0+h_1\lambda+H_0+H_1\lambda)+y_2(1,\lambda)((h_0+h_1\lambda)(H_0+H_1\lambda))+$$

$+y_1'(1,\lambda)=0$
В случае, когда полином $q(x)=const$, собственные значения находятся из характеристического уравнения (15):

$$\sqrt{\lambda-q}(h_0+h_1\lambda+H_0+H_1\lambda)+\operatorname{tg}\sqrt{\lambda-q}((h_0+h_1\lambda)(H_0+H_1\lambda)-$$

$-\lambda+q)=0$
Или

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda-q}=\frac{\sqrt{\lambda-q}(h_0+h_1\lambda+H_0+H_1\lambda)}{\lambda-q-(h_0+h_1\lambda)(H_0+H_1\lambda)} \qquad (17)$$

Уравнение (17) - трансцендентное, его невозможно решить аналитически, поэтому собственные можно найти численно (например, методом половинного деления). При этом нужно учитывать, что в прямой задаче коэффициенты h_0, h_1, H_0, H_1 нам известны.

§ 4. **Пример**

Прямая задача
Для примера рассмотрим следующую задачу:

$$-y''+(2-\lambda)y=0, \qquad (18)$$

$$y'(0)-(1+3\lambda)y(0)=0, \qquad (19)$$

$$y'(1)+(2-4\lambda)y(1)=0, \qquad (20)$$

где $y = y(x, \lambda), x \in [0, 1], \lambda$ - спектральный параметр.
Требуется найти собственные значения задачи (18) – (20).
Выпишем характеристическое уравнение:

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\lambda - 2}(1 + 3\lambda + 2 - 4\lambda) + \operatorname{tg}\sqrt{\lambda - 2}((2 - 4\lambda)(1 + 3\lambda) - \lambda + 2) = 0$$

Или

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda - 2} = \frac{\sqrt{\lambda - 2}(3 - \lambda)}{\lambda - 2 - (2 - 4\lambda)(1 + 3\lambda)}$$

Находим собственные значения методом половинного деления с точностью 10^{-7}:
$\lambda_1 = 11.7652882$,
$\lambda_2 = 41.3308708$,
$\lambda_3 = 90.6686245$,
$\lambda_4 = 159.7520554$,
$\lambda_5 = 248.5766984$.

Обратная задача

Теперь решим обратную задачу, зная вышеперечисленные $\lambda_i, i = \overline{1, 5}$
Система (16) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_1 - 2} = \dfrac{\sqrt{\lambda_1 - 2}(h_0 + h_1\lambda_1 + H_0 + H_1\lambda_1)}{\lambda_1 - 2 - (h_0 + h_1\lambda_1)(H_0 + H_1\lambda_1)}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_2 - 2} = \dfrac{\sqrt{\lambda_2 - 2}(h_0 + h_1\lambda_2 + H_0 + H_1\lambda_2)}{\lambda_2 - 2 - (h_0 + h_1\lambda_2)(H_0 + H_1\lambda_2)}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_3 - 2} = \dfrac{\sqrt{\lambda_3 - 2}(h_0 + h_1\lambda_3 + H_0 + H_1\lambda_3)}{\lambda_3 - 2 - (h_0 + h_1\lambda_3)(H_0 + H_1\lambda_3)}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_4 - 2} = \dfrac{\sqrt{\lambda_4 - 2}(h_0 + h_1\lambda_4 + H_0 + H_1\lambda_4)}{\lambda_4 - 2 - (h_0 + h_1\lambda_4)(H_0 + H_1\lambda_4)}. \end{cases} \tag{21}$$

Возьмем начальные приближения, достаточно близкие к искомым: $h_0^0 = 0.5, h_1^0 = 2.7, H_0^0 = 1.6, H_1^0 = -3.5$. Решаем модифицированным методом Ньютона с точностью 10^{-5}.
После вычисления получаем
$h_0 = 1.00051 \approx 1$,
$h_1 = 3.00047 \approx 3$,
$H_0 = 1.99879 \approx 2$,
$H_1 = -4.00012 \approx -4$.
Полученные решения совпадают с коэффициентами задачи (18) – (20).

§ 5. **Частный случай обратной задачи 2**

Рассмотрим случай, когда полином $q(x) = q = const$ и он неизвестен, коэффициенты $h_1, H_1 = 0$. Необходимо найти оставшиеся коэффициенты h_0, H_0 и q.

$$-y'' + qy = \lambda y, \tag{22}$$

$$y'(0) - h_0 y(0) = 0, \tag{23}$$

$$y'(1) + H_0 y(1) = 0, \tag{24}$$

где $q = const$, $y = y(x, \lambda), x \in [0, 1], \lambda$ - спектральный параметр, h_0, h_1, H_0, H_1 не обращаются в нуль одновременно.
Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\sqrt{\lambda - q}(h_0 + H_0) + \operatorname{tg}\sqrt{\lambda - q}(h_0 H_0 - \lambda + q) = 0 \tag{25}$$

Из системы ниже находим h_0, H_0, q с помощью численных методов по трем ненулевым собственным значениям $\lambda_i, i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_1 - q} = \dfrac{\sqrt{\lambda_1 - q}(h_0 + H_0)}{\lambda_1 - q - h_0 H_0}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_2 - q} = \dfrac{\sqrt{\lambda_2 - q}(h_0 + H_0)}{\lambda_2 - q - h_0 H_0}, \\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_3 - q} = \dfrac{\sqrt{\lambda_3 - q}(h_0 + H_0)}{\lambda_3 - q - h_0 H_0}. \end{cases} \tag{26}$$

§ 6. **Пример 2**

Рассмотрим задачу:

$$-y'' + qy = \lambda y,$$

$$y'(0) - h_0 y(0) = 0,$$

$$y'(1) + H_0 y(1) = 0,$$

Известны следующие собственные значения:
$\lambda_1 = 11.7652882$,
$\lambda_2 = 41.3308708$,
$\lambda_3 = 90.6686245$,
Необходимо найти h_0, H_0 и q.

Возьмем начальные приближения: $q^0 = 3.5, h_0^0 = 2.5, H_0^0 = 1.4$. Решим систему (26) модифицированным методом Ньютона с точностью 10^{-5}.

После вычисления получаем: количество итераций 39,
$q = 4.00055 \approx 4$,
$h_0 = 3.00076 \approx 3$,
$H_0 = 1.99898 \approx 2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. - М.: Изд-во. Моск. ун-та, 2009. –184 с.

[2] *Вержбицкий В. М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. - М.: Высш. шк., 2000. –266 с.: ил.

[3] *Киреев В. И., Пантелеев А. В.* Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ, 2000. – 376 с.: ил.

УДК 534.1

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАССЫ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ, СОСРЕДОТОЧЕННОГО НА КОНЦЕ БАЛКИ

Ахтямова А. А.
Уфа, БашГУ

Введение

В данной работе рассматривается задача идентификации массы и момента инерции груза, сосредоточенного на одном из концов стержня, по двум (трем) собственным частотам свободных колебаний стержня. Показано, что для однозначной идентификации двух неизвестных – массы и момента инерции груза – достаточно использования трех собственных частот. Для решения задачи предложен метод введения дополнительной неизвестной величины. С помощью этого метода построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А.Н. Тихонову.

§ 1. **Постановка обратной задачи**

Рассмотрим однородную балку Эйлера-Бернулли, длиной L, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F, левый конец которой заделан, на правом конце сосредоточен груз массой m_0 и моментом инерции I_0. Пусть масса m_0 и моментом инерции I_0 груза неизвестны. Требуется их найти по собственным частотам колебаний балки.

Уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [1, с. 152]:

$$EI\,\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial x^4} + \rho\,F\,\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $U(X,t)$ – прогиб текущей точки оси стержня, EI – изгибная жесткость стержня, ρ – плотность стержня, F – площадь поперечного сечения стержня.

При $t = 0$ должны выполняться начальные условия

$$U(X,0) = f(X), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(X,0) = g(X).$$

Если левый конец заделан, а на правом конце имеется сосредоточенный инерционный элемент, то краевые условия записываются в следующем виде [1, с. 153]:

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \qquad (\text{при } X = 0),$$

$$EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial X^3} = -m\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -I_1\,\frac{\partial^3 U}{\partial X\,\partial t^2} \qquad (\text{при } X = L).$$

Вводя обозначения

$$x = \frac{X}{L}, \quad u = \frac{U}{L},$$

запишем уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня и краевые условия в виде

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho\,F\,L^4}{EI}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (\text{при } x = 0),$$

$$EI\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad EI\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -I_1\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2} \qquad (\text{при } x = 1).$$

Обозначим $\rho\,F\,L^4\,\omega^2\,/\,(EI)$ через λ^4. Тогда поставленная выше задача о свободных изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t) = y(x)\,\cos(\omega\,t)$ сводится (см., например,[2]) к следующей спектральной задаче [1]:

$$y^{(4)} = \lambda^4\,y, \quad U_1(y) = y(0) = 0, \quad U_2(y) = y'(0) = 0, \tag{1}$$

$$U_3(y) = y'''(1) - a_1\,\lambda^4\,y(1) = 0, U_4(y) = y''(1) - a_2\,\lambda^4\,y'(1) = 0, \tag{2}$$

где $a_1 = (m\,L^3)/(EI)$, $a_2 = (I_1\,L)/(EI)$.

Таким образом, поставленная нами задача определения массы и момента инерции груза, сосредоточенного на одном из концов стержня, свелась к следующей обратной задаче: *Дана краевая задача (1), (2) со спектральным параметром λ и неизвестными коэффициентами a_1 и a_2. Требуется по ненулевым собственным значениям λ_i задачи (1), (2) найти неизвестные коэффициенты a_1 и a_2.*

В дальнейшем будем рассматривать именно эту обратную задачу.

Покажем, что эта задача может быть переформулирована в терминах характеристического определителя.

Функции

$$\begin{aligned} y_1(x,\,\lambda) &= \big(\cos\lambda\,x + \mathrm{ch}\lambda\,x\big)/2, \\ y_2(x,\,\lambda) &= \big(\sin\lambda\,x + \mathrm{sh}\lambda\,x\big)/(2\lambda), \\ y_3(x,\,\lambda) &= \big(-\cos\lambda\,x + \mathrm{ch}\lambda\,x\big)/(2\lambda^2), \\ y_4(x,\,\lambda) &= \big(-\sin\lambda\,x + \mathrm{sh}\lambda\,x\big)/(2\lambda^3) \end{aligned} \tag{3}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda) = \lambda^4\, y(x,\lambda), \tag{4}$$

удовлетворяющие условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0, \text{ при } j \neq r, \\ 1, \text{ при } j = r, \end{cases} \qquad j,\, r = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \tag{5}$$

(другими словами, решения $y_j(x,\,\lambda)$ $(j = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [1].

Общее решение уравнения (4) представляется в следующем виде

$$y(x) = y(x,\lambda) = C_1\, y_1(x,\lambda) + C_2\, y_2(x,\lambda) + C_3\, y_3(x,\lambda) + C_4\, y_4(x,\lambda).$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют краевые условия из (1),(2):

$$\begin{gathered} U_i(y) = U_i(C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + C_3\, y_1 + C_4\, y_2) = C_1\, U_i(y_1) + \\ + C_2\, U_i(y_2) + C_3\, U_i(y_1) + C_4\, U_i(y_2) = 0, \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \end{gathered} \tag{6}$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (1),(2) получают из условия существования ненулевого решения C_i из системы (6). Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} \tag{7}$$

соответствующей системы. Этот определитель называют характеристическим определителем спектральной задачи (1), (2) Его нули совпадают с собственными значениями задачи (1),(2) [3]. Учитывая условия (5), из (7) получаем получаем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Отсюда и из(1),(2)имеем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} y_3'''(1) - a_1 \lambda^4\, y_3(1) & y_4'''(1) - a_1\, \lambda^4\, y_4(1) \\ y_3''(1) - a_2\, \lambda^4\, y_3'(1) & y_4''(1) - a_2\, \lambda^4\, y_4'(1) \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta(\lambda) \equiv -f_0(\lambda) + a_1\, f_1(\lambda) + a_2\, f_2(\lambda) - a_1\, a_2\, f_3(\lambda), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= \tfrac{1}{2}\,(1+\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda)\,,\\ f_1(\lambda) &= \tfrac{\lambda}{2}\,(\cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda - \sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda)\,,\\ f_2(\lambda) &= \tfrac{\lambda^3}{2}\,(\sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda + \cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda)\,,\\ f_3(\lambda) &= \tfrac{\lambda^4}{2}\,(\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda - 1)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, задачу идентификации краевых условий по собственным частотам в терминах функции (9) можно сформулировать следующим образом: *Требуется идентифицировать неизвестные коэффициенты a_i $(i = 1, 2)$ по известным ненулевым корням λ_k характеристического определителя (9).*

§ 2. **Метод системы двух нелинейных уравнений**

Поставленную задачу можно решить следующим способом. Пусть λ_i являются собственными значениями краевой задачи (1),(2). Тогда λ_i – корни уравнения характеристического определителя (9) [3]. Поэтому подставив эти три значения в (9), получим систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов a_1 и a_2:

$$a_1\, f_1(\lambda_i) + a_2\, f_2(\lambda_i) - a_1\, a_2\, f_3(\lambda_i) = f_0(\lambda_i). \tag{11}$$

Сколько собственных значений нужно для однозначной идентификации коэффициентов a_1 и a_2? Если подставить два собственных значения, то решение этой системы уравнений сведется к решению квадратного уравнения, которое как правило имеет два решения. Значит, для однозначной идентификации двух собственных значений еще недостаточно. Покажем это на примерах.

Пример 1. Пусть $\lambda_1 = 3,8614829$, $\lambda_2 = 7,0316430$. Подставив эти значения в (11) и решив соответствующую систему нелинейных уравнений, получим два решения: $a_1 = 2,000$ и $a_2 = 0,000$ или $a_1 = 0,254$ и $a_2 = 0,017$.

Пример 2. Пусть $\lambda_1 = 3,8614829$, $\lambda_2 = 7,0316430$. Подставив эти значения в (11) и решив соответствующую систему нелинейных уравнений, получим два решения: $a_1 = 2,000$ и $a_2 = 0,000$ или $a_1 = 0,254$ и $a_2 = 0,017$.

Выделить все случаи решений системы нелинейных уравнений (бесчисленное множество решений, два, одно, ноль решений) оказывается достаточно сложной задачей. Численные эксперименты показывают, что во всех реальных задачах использование дополнительно третьего собственного значения позволяет однозначно идентифицировать коэффициенты a_1 и a_2. Так, если в первом примере дополнительно использовать еще и третье собственное значение $\lambda_3 = 10,1850206$ и решить систему уравнений (11) с $\lambda_1 = 3,8614829$ и $\lambda_3 = 10,1850206$, получим снова два решения: $a_1 = 2,000$ и $a_2 = 0,000$ или $a_1 = 0,185$ и $a_2 = 0,013$. Общим для этих решений и решений примера 1 оказывается единственное решение $a_1 = 2,000$ и $a_2 = 0,000$. Ниже показано, что это является общей закономерностью, а именно для однозначной идентификации действительных коэффициентов a_1 и a_2 достаточно трех собственных значений.

§ 3. **Метод введения дополнительной неизвестной величины**

Пусть λ_1, λ_2 и λ_3 – собственные значения задачи (1),(2). Введем дополнительное неизвестное

$$a_3 = -a_1\, a_2 \tag{12}$$

и подставим его вместе с собственными значениями λ_1, λ_2 и λ_3 в уравнение (11). В результате получим систему трех линейных уравнений от трех неизвестных a_1, a_2 и a_3:

$$a_1\, f_1(\lambda_i) + a_2\, f_2(\lambda_i) + a_3\, f_3(\lambda_i) = f_0(\lambda_i), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{13}$$

Из правила Крамера следует, что если определитель

$$D = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix} \tag{14}$$

системы уравнений (13) отличен от нуля, то коэффициенты a_1 и a_2 находятся однозначно по формулам

$$a_1 = \frac{D_1}{D}, \quad a_2 = \frac{D_2}{D}, \tag{15}$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_0(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_0(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_0(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_0(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_0(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_0(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix}. \tag{16}$$

При этом коэффициент a_3 находится по формуле

$$a_3 = \frac{D_3}{D}, \qquad \text{где } D_3 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_0(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_0(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_0(\lambda_3) \end{vmatrix}. \tag{17}$$

В случае, если собственные значения λ_1, λ_2 и λ_3 найдены с большой погрешностью, то может оказаться, что

$$\frac{D_3}{D} \neq -\frac{D_1}{D} \cdot \frac{D_2}{D} \tag{18}$$

и тогда система уравнений для определения неизвестных a_1 и a_2 оказывается переопределенной. Т.е. задача определения неизвестных a_1 и a_2 по трем значениям λ_1, λ_2 и λ_3 может не иметь решения, а поэтому является некорректной о Адамару. Однако она корректна по А.Н. Тихонову.

Действительно, для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = R\,M$.

Задача $R\,v = z$ называется *корректной по А.Н. Тихонову* (условно корректной), если выполнены следующие условия [4, 5, 6]:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V;

2) решение единственно на множестве M;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \widetilde{z} \in \Lambda = R\,M$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_Z < \delta$ выполнено неравенство $\|v - \widetilde{v}\|_V < \varepsilon$.

В нашем случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (13), переводящее тройку чисел a_1, a_2 и a_3 в тройку значений λ_1, λ_2, λ_3, у которой матрица системы имеет определитель $D \neq 0$.

Будем называть *множеством корректности* M такое множество троек $v = (a_1, a_2, a_3)$, для которого выполнено условие (12).

С помощью введенного множества корректности нетрудно показать корректность по А.Н. Тихонову задачи отыскания a_1, a_2 по значениям λ_1, λ_2, λ_3 для которых система уравнений (13) имеет определитель, отличный от нуля.

Пусть V – это пространство $\mathbb{R}^3$ элементов $v = (v_1, v_2, v_3)$ с нормой $\|v\| = \max(|v_1|, |v_2|, |v_3|)$; Z – это пространство $\mathbb{R}^3$ элементов $z = (z_1, z_2, z_3)$ с нормой $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|, |z_3|)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = R\,M$.

Тогда задача $R\,v = z$ будет *корректной по А.Н. Тихонову*, так как все три условия определения выполнены (третье условие вытекает из аналитичности $f_i(\lambda)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ по λ.

Наиболее известны два метода решения корректных по А.Н. Тихонову задач – метод квазирешения и метод подбора. В настоящей статье предлагается метод решения задачи идентификации краевых условий, который по сути представляет собой метод подбора.

Если априори известно, что искомые числа a_1, a_2 существуют, действительные собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 и определители $D \neq 0, D_1, D_2, D_3$ найдены точно, то условия (12) выполнены, причем числа a_1, a_2, a_3 находятся однозначно по формулам (15),(16),(17). Все условия корректности по А.Н. Тихонову выполнены, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\widetilde{z} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3) \in \Lambda = R\,M$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_{\mathbb{R}^3} < \delta$ выполнено неравенство $\|(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}) - (\frac{\widetilde{D}_1}{\widetilde{D}}, \frac{\widetilde{D}_2}{\widetilde{D}}, \frac{\widetilde{D}_3}{\widetilde{D}})\|_{\mathbb{R}^3} < \varepsilon$. Последнее вытекает из аналитичности функций $f_i(\lambda)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ по параметру λ.

Если числа λ_1, λ_2, λ_3, а значит, и $D \neq 0, D_1, D_2, D_3$ даны приближенно, то равенство (18) может не выполняться и поэтому формально по $D \neq 0, D_1, D_2, D_3$ тройку чисел a_1, a_2 и a_3 найти невозможно. Однако нам выполнение (18) не нужно. Решением будем считать следующую тройку значений: числа a_1 и a_2 найденные по формулам (15), где значения $D \neq 0, D_1, D_2$ являются приближенными, и a_3, найденное по формуле (12), а не (17). Эта тройка значений a_1, a_2 и a_3 лежит в множестве корректности, т.к. для нее выполнено условие (12) и это решение тем ближе к точному, чем ближе к точным собственным значениям числа λ_1, λ_2, λ_3.

Таким образом, верна следующая

Теорема 1. *Если λ_1, λ_2, λ_3 являются действительными собственными значениями краевой задачи (1),(2), причем определитель (14) системы уравнений (13) отличен от нуля, то задача отыскания коэффициентов a_1 и a_2 по собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 является корректной по А.Н. Тихонову. А ее единственное решение дается формулами (15).*

Пример 3. Пусть $\lambda_1 = 3,8614829$, $\lambda_2 = 7,0316430$, $\lambda_3 = 10,1850206$. Подставив эти значения в (14), (15), (16) получим: $D = 0,6643522 \cdot 10^{13}$, $D_1 = 0,1328704 \cdot 10^{14}$, $D_2 = -0,2090646 \cdot 10^5$, $a_1 = D_1/D = 2,000$ и $a_2 = D_2/D = 0,000$.

Пример 4. Пусть $\lambda_1 = 1,1217345$, $\lambda_2 = 4,6238916$, $\lambda_3 = 10,9485549$. Подставив эти значения в (14), (15), (16), получим: $D = 0,7221436 \cdot 10^9$, $D_1 = 0,1444287 \cdot 10^{10}$, $D_2 = 0,7221436 \cdot 10^9$, $a_1 = D_1/D = 2,000$ и $a_2 = D_2/D = 1,000$.

Заключение

Таким образом, в данной работе показано, что для однозначной идентификации двух неизвестных — массы и момента инерции груза, прикрепленного к балке Эйлера-Бернулли — достаточно использования трех собственных частот. Для решения задачи предложен метод введения дополнительной неизвестной величины. С помощью этого метода построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А.Н. Тихонову.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Вибрации в технике: Справочник.* Т. 1. Колебания линейных систем Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[2] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.

[3] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[4] *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 200 с.

[5] *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.

[6] *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

УДК 517.547, 517.544

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВЕСОВЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Багаутдинова А. Р., Луценко А. В., Луценко В. И., Шаймуратова Э. Д.
Уфа, БашГУ

Введение

В данной работе получены весовые интегральные оценки производных функций аналитических вне выпуклых ограниченных областей через интегралы самих функций, исчезающих на бесконечности. Результат является обобщением теоремы Харди– Литтлвуда вне выпуклых ограниченных областей. Такого вида теоремы ранее были получены Н.Ф. Абузяровой, К.П. Исаевым, Р.С. Юлмухаметовым для степенного веса и производной аналитической функции первого порядка из L^2 [1–2].

Н.М. Ткаченко и Ф.А. Шамоян обобщили этот результат на производные произвольного порядка из пространства L^p [5–7].

В данной статье, при этом, существенно расширен класс рассматриваемых весов.

§ 1. **Основной результат**

Пусть $G-$ ограниченная выпуклая область и $D = \mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Обозначим пространство голоморфных функций

$$H_2^1(D) = \left\{ f \in H(D), f(\infty) = 0 : \|f\|^2 = \int\limits_D |f'(z)|^2 d\mu \right\}, \tag{1}$$

где $d\mu(z)$ мера лебега. В работе [1] доказана следующая теорема

Теорема А. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любой функции $f \in H_2^1(D)$ выполнено соотношение*

$$c \int\limits_D |f''(z)|^2 d^2(z) d\mu \leqslant \int\limits_D |f'(z)|^2 d\mu \leqslant 2 \int\limits_D |f''(z)|^2 d^2(z) d\mu, \tag{2}$$

где $d(z) = dist(z, \partial G)$. При доказательстве данной теоремы была использован результат (см. [3], с.203):

Теорема B. *Пусть $A-$ произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда на $\mathbb{R}^n \backslash A$ существует бесконечно дифференцируемая функция $\delta(x) = \delta(x, A)$ обладающая свойствами*

$$C_1\delta(x) \leqslant dist(x, A) \leqslant C_2\delta(x),$$

и для любого α имеем

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\delta(x)\right| \leqslant C_\alpha(dist(x, A))^{1-|\alpha|},$$

где C_α, C_1, C_2 не зависят от A.

Там же доказана и следующая теорема:

Теорема C. *Пусть Ω - некоторое открытое связное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, тогда существует такой набор квадратов $P = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots\}$, $(Q_k\backslash\partial Q_k) \cap (Q_m\backslash\partial Q_m) = \emptyset, k \neq m$, что $\bigcup\limits_k Q_k = \Omega$, причем*

$$c_1 diam(Q_k) \leqslant dist(Q_k, \partial\Omega) \leqslant c_2 diam(Q_k)$$

константы c_1, c_2 не зависят от Ω.

В работе [1] также доказана следующая лемма:

Лемма A. *Пусть $G-$ выпуклая область и $z_0 \notin G$. Если функция $dist(z, G)$ дифференцируема в точке z_0, то $|grad\ dist(z_0, G)| = 1$.*

Нам понадобится следующая известная лемма:

Лемма B. *Пусть $G \subseteq \mathbb{C}$ односвязная область, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}-$ оператор Лапласа, $f \in H(G)$, $2 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$\Delta|f^{(k)}(z)|^p = p^2|f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2.$$

Справедлива следующая основная теорема:

Теорема 1. *Пусть $G-$ ограниченная выпуклая область и $D = \mathbb{C}\backslash\overline{G}$, $f \in H(D)$. Тогда для $\forall k \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant p < \infty$, справедливы оценки*

$$\begin{aligned} c_1\int\limits_D |f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z, \partial G) w(d(z, \partial G)) d\mu(z) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_D |f(z)|^p w(d(z, \partial G)) d\mu(z) \leqslant \\ \leqslant c_2 \int\limits_D |f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z, \partial G) w(d(z, \partial G)) d\mu(z), \end{aligned} \tag{3}$$

где $c_1(n)$, $c_2(n,p,\alpha)$– положительные постоянные, зависящие только от n, p, α и $w(t)$– неотрицательная функция удовлетворяющая следующим условиям: $(t^2w(t))'' \geqslant \alpha w(t), w(2t) \leqslant \beta w(t)$, для некоторых положительных констант α, β, при $\forall t \geqslant 0$.

Замечание: Частным случаем весов фигурирующих в теореме являются $w(t)=t^{\alpha}$, при $\alpha > -1$.

Доказательство: Докажем правое неравенство (3).

Пусть $B(r)$– круг радиуса r с центром в начале координат, $R_0 = diam(G)$. Построим выпуклый многоугольник M, такой что $\overline{G} \subset M \subset B(2R_0)$. Определим область $U = \mathbb{C}\backslash\overline{M} \cap B(R)$, для произвольного $R > 2R_0$. Так как граница U кусочно - гладкая, то можно применить формулу Грина:

$$\int\limits_U h(z)\Delta g(z) - g(z)\Delta h(z) d\mu = \int\limits_{\partial U} h(z)\frac{\partial g(z)}{\partial n} - g(z)\frac{\partial h(z)}{\partial n} ds, \tag{4}$$

где $ds(z)$– элемент длины границы ∂U.

Определим функции h и g:

Пусть $\eta(z)$– неотрицательная гладкая функция типа "шапочки"(см. [3]): $\eta(z) \equiv 0$ при $|z| \geqslant 1$, $\int\limits_{\mathbb{C}} \eta(z) d\mu(z) = 1$. Функцию $d(z,\partial M)$ продолжим нулем на ∂M и для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим гладкую функцию

$$d_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\mathbb{C}} \eta\left(\frac{\theta - z}{\varepsilon}\right) d(\theta,\partial M) d\mu(\theta).$$

Так как функция $d(z,\partial M)$– выпуклая, в частности субгармоническая, то семейство функций $d_\varepsilon(z,\partial M)$ также являются субгармоническими и при $\varepsilon \to 0$ убывают и сходятся к $d(z,\partial M)$, более того верны неравенства $\Delta d_\varepsilon(z) \geqslant 0$ (см.[4]). Итак, пусть $h(z) = d_\varepsilon^{kp+2}(z) w(d_\varepsilon(z))$, а $g(z) = |f^{(k)}(z)|^p$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. Формула (4) примет вид:

$$\int\limits_U (d_\varepsilon^{kp+2} w(d_\varepsilon)\Delta|f^{(k)}(z)|^p - |f^{(k)}(z)|^p \Delta(d_\varepsilon^{kp+2} w(d_\varepsilon))) d\mu =$$

$$= \int\limits_{\partial U}\left(d_\varepsilon^{kp+2} w(d_\varepsilon)\frac{\partial |f^{(k)}(z)|^p}{\partial n} - |f^{(k)}(z)|^p \frac{\partial (d_\varepsilon^{kp+2} w(d_\varepsilon))}{\partial n}\right) ds.$$

На границе многоугольника M $d_\varepsilon(z) = 0$, $\frac{d_\varepsilon(z)}{\partial n} = 0$. Интегралы по границе круга $B(R)$ стремятся к нулю при увеличении R. Поэтому формула преобразуется к виду

$$\int\limits_{\mathbb{C}\backslash\overline{M}} d_\varepsilon^{kp+2} w(d_\varepsilon)\Delta|f^{(k)}(z)|^p d\mu = \int\limits_{\mathbb{C}\backslash\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p \Delta(d_\varepsilon^{kp+2} w(d_\varepsilon)) d\mu. \tag{5}$$

Распишем подробнее оператор Лапласа.

$$\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))) = \frac{\partial(d_\varepsilon^{kp+2}(x,y)w(d_\varepsilon(x,y)))}{\partial x^2} +$$
$$+\frac{\partial(d_\varepsilon^{kp+2}(x,y)w(d_\varepsilon(x,y)))}{\partial y^2},$$

где $z = x + iy$. Для сокращения записи опустим параметры в частных производных. Получим следующую формулу

$$(d^{kp}d^2w(d))'' = [(kp+2)d^{kp+1}w(d)d' + d^{kp+2}w'(d)d']' =$$
$$= d^{kp}[(kp+2)(kp+1)w(d) + 2(kp+2)dw'(d) + d^2w''(d)]\,(d')^2 +$$
$$+d^{kp+1}[(kp+2)w(d) + dw'(d)]d''.$$

Сведем воедино частные производные

$$\begin{gathered}\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon)) = d_\varepsilon^{kp}[(kp+2)(kp+1)w(d_\varepsilon)+\\ +2(kp+2)d_\varepsilon w'(d_\varepsilon) + d_\varepsilon^2 w''(d_\varepsilon)]|grad\, d_\varepsilon|^2+\\ +d_\varepsilon^{kp+1}[(kp+2)w(d_\varepsilon) + d_\varepsilon w'(d_\varepsilon)]\Delta d_\varepsilon\end{gathered} \tag{6}$$

Перегруппировав слагаемые получим

$$\begin{gathered}\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}w(d_\varepsilon)) = d_\varepsilon^{kp}kp(kp-1)w(d_\varepsilon)|grad\, d_\varepsilon(z)|^2+\\ +d_\varepsilon^{kp}[kp\{2(2w(d_\varepsilon)+d_\varepsilon w'(d_\varepsilon))\}]|grad\, d_\varepsilon|^2+\\ +d_\varepsilon^{kp}[2w(d_\varepsilon) + 4d_\varepsilon w'(d_\varepsilon) + d_\varepsilon^2 w''(d_\varepsilon)]|grad\, d_\varepsilon|^2+\\ +d_\varepsilon^{kp+1}[kpw(d_\varepsilon)]\Delta d_\varepsilon+\\ +d_\varepsilon^{kp+1}[2w(d_\varepsilon) + d_\varepsilon w'(d_\varepsilon)]\Delta d_\varepsilon\end{gathered} \tag{7}$$

Так как по условию $w(t)t^2$ возрастающая выпуклая функция, то $2w(t) + tw' \geqslant 0$ и $2w(t) + 4tw' + t^2w'' \geqslant 0$. Также учитывая, что $\Delta d_\varepsilon(z) \geqslant 0$ и то, что все строчки формулы (7) неотрицательные, получим неравенство

$$\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))) \geqslant d_\varepsilon^{kp}(z)kp(kp-1)w(d_\varepsilon(z))|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 \tag{8}$$

И оценка (5), с учетом леммы В, принимает вид

$$\frac{p^2}{4}\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2 d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))d\mu(z) \geqslant$$

$$\geqslant kp(kp-1)\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p d_\varepsilon^{kp}(z)w(d_\varepsilon(z))|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 d\mu(z).$$

При $k = 0$ третья строка формулы (5) дает оценку:

$$\frac{p^2}{4} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^{p-2} |f^{(k+1)}(z)|^2 d_\varepsilon^{kp+2}(z) w(d_\varepsilon(z)) d\mu(z) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p d_\varepsilon^{kp}(z) w(d_\varepsilon(z)) |grad\, d_\varepsilon(z)|^2 d\mu(z).$$

Устремим ε к нулю, тогда в силу непрерывной дифференцируемости функции $d(z, \partial M)$ имеем

$$\frac{\partial d_\varepsilon(z)}{\partial x} \to \frac{\partial d(z, \partial M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial d_\varepsilon(z)}{\partial y} \to \frac{\partial d(z, \partial M)}{\partial y}, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{M}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |grad\, d_\varepsilon(z)|^2 = |grad\, d(z, \partial M)|^2$ и учитывая лемму А, в пределе получаем следующую оценку

$$C(k, p, \alpha) \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^{p-2} |f^{(k+1)}(z)|^2 d^{kp+2}(z) w(d(z)) d\mu(z) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z) w(d(z)) d\mu(z),$$

где

$$C(k, p, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{4\alpha}, & \text{при } k = 0, \\ \dfrac{p^2}{4kp(kp-1)}, & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

Выберем последовательность выпуклых многоугольников M_n, таких что: $M_n \subset B(2R_0)$, $\overline{G} \subset M_n$, $\overline{M_{n+1}} \subset M_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \overline{G}$. Так как на каждом из этих многоугольников выполняется последнее неравенство, то в пределе получаем:

$$\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z) w(d(z)) d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant C(k, p, \alpha) \int\limits_D |f^{(k)}(z)|^{p-2} |f^{(k+1)}(z)|^2 d^{kp+2}(z) w(d(z)) d\mu(z)$$

Применяя к правому интегралу неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p}{p-2}$ и $\frac{p}{2}$. и применив сокращение нетрудно получить следующую оценку

$$\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp} w(d) d\mu \leqslant C^{\frac{p}{2}}(k, p, \alpha) \int\limits_D |f^{(k+1)}(z)|^p d^{(k+1)p} w(d) d\mu$$

Рассматривая, последовательно, $k=0$, $k=1$, $k=2$, $\ldots$, $k=n-1$, получаем неравенство

$$\int\limits_D |f(z)|^p w(d) d\mu \leqslant c(n,p,\alpha) \int\limits_D |f^{(n)}(z)|^p d^{np} w(d) d\mu.$$

Докажем левое неравенство теоремы 1, используя теорему C. Пусть $P = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots\}$, вышеуказанный набор квадратов, $G = \bigcup\limits_k Q_k$, тогда

$$\int\limits_G |f^{(n)}(z)|^p d^{np} w(d) d\mu(z) = \sum_k \int\limits_{Q_k} |f^{(n)}(z)|^p d^{np} w(d) d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \max_{z \in Q_k} [|f^{(n)}(z)|^p d^{np} w(d)] diam^2(Q_k) \leqslant$$

$$\leqslant c_2^2 \sum_k \max_{z \in Q_k} [|f^{(n)}(z)|^p d^{np+2} w(d)] \leqslant$$

$$\leqslant c_2^2 \sum_k |f^{(n)}(z_k)|^p d^{np+2}(z_k) w(d(z_k)),$$

где $z_k \in Q_k$.

Пусть теперь Q_k^*– квадрат, с общим центром с Q_k, и увеличенный в $1+\varepsilon$ раз, где $0 < \varepsilon < 0.25$. Обозначим

$$B_r(z_k) = \{z : |z - z_k| < r\}, \text{ где } 0 < k < dist(Q_k, \partial Q_k^*)/2.$$

Так как

$$f^{(n)}(z_k) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_k)} \frac{f(z)dz}{(z - z_k)^{n+1}}, \text{то}$$

$$\left| f^{(n)}(z_k) \right| = \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{r^n} \max_{\partial B_r(z_k)} |f(z)| \leqslant \frac{c_1}{d^n(\tilde{z}_k, \partial G)} |f(\tilde{z}_k)|,$$

где $\tilde{z}_k \in \partial B_r(z_k)$. По построению квадратов известно, что

$$diam(Q_k) \asymp d(z_k, \partial G), diam(Q_k^*) \asymp d(\tilde{z}_k, \partial G),$$

но $diam(Q_k) < diam(Q_k^*) < \frac{5}{4} diam(Q_k)$, поэтому $d(\tilde{z}_k, \partial G) \asymp d(z_k, \partial G)$. Более того, из условий, наложенных на функцию w, получим эквивалентность $w(d(\tilde{z}_k, \partial G)) \asymp w(d(z_k, \partial G))$. Действительно, пусть $A^{-1} t_1 \leqslant t_2 \leqslant A t_1$, тогда $\exists m \in \mathbb{Z} : 2^{m-1} < A \leqslant 2^m$, и $2^{-m} t_2 \leqslant t_1 \leqslant 2^m t_2$. Так как $t^2 w(t)$– возрастающая, то

$$t_1^2 w(t_1) \leqslant 2^{2m} t_2^2 w(2^m t_2) \leqslant 2^{2m} t_2^2 \beta^m w(t_2) \leqslant 2^{2m} (2^m t_1)^2 \beta^m w(t_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w(t_1) \leqslant 2^{4m} \beta^m w(t_2).$$

Аналогично, учитывая что, $t_2 \leqslant 2^m t_1 \Rightarrow w(t_2) \leqslant 2^{4m}\beta^m w(t_1)$, т.е. $2^{-4m}\beta^{-m}w(t_2) \leqslant w(t_1) \leqslant 2^{4m}\beta^m w(t_2)$. Следовательно, если $t_1 \asymp t_2 \Rightarrow w(t_1) \asymp w(t_2)$.

$$\sum_k |f^{(n)}(z_k)|^p d^{np+2}(z_k) w(d(z_k)) \leqslant c_3 \sum_k |f(\tilde{z}_k)|^p \frac{d^{np+2}(z_k) w(d(z_k))}{d^{np}(\tilde{z}_k)}$$
$$\leqslant c_4 \sum_k |f(\tilde{z}_k)|^p d^2(\tilde{z}_k) w(d(z_k)) \leqslant c_5 \sum_k |f(\tilde{z}_k)|^p d^2(\tilde{z}_k) w(d(\tilde{z}_k))$$

Возьмем $r_0 : 0 < r_0 < dist(Q_k, \partial Q_k^*)/2$, при этом, очевидно, $B_{r_0}(\tilde{z}_k) \subset Q_k^*$. Учитывая, что $|f(z)|^p-$ субгармоническая при всех значениях $p : 0 < p < \infty$, то

$$|f(\tilde{z}_k)|^p \leqslant \frac{1}{\pi r_0^2} \int\limits_{B_{r_0}(\tilde{z}_k)} |f(z)|^p d\mu(z) \leqslant \frac{c_8}{d^2(\tilde{z}_k, \partial G)} \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p d\mu(z)$$

Далее,

$$|f(\tilde{z}_k)|^p d^2(\tilde{z}_k, \partial G) \leqslant c_9 \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p d\mu(z),$$

$$|f(\tilde{z}_k)|^p d^2(\tilde{z}_k, \partial G) w(d(\tilde{z}_k, \partial G)) \leqslant c_9 \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p w(d(\tilde{z}_k, \partial G)) d\mu(z)$$

Так как в районе Q_k^* $d(\tilde{z}_k, \partial G)$ и $d(z, \partial G)$ эквивалентны и, следовательно, эквивалентны $w(d(\tilde{z}_k, \partial G))$ и $w(d(z, \partial G))$, поэтому получаем неравенство

$$|f(\tilde{z}_k)|^p d^2(\tilde{z}_k, \partial G) w(d(\tilde{z}_k, \partial G)) \leqslant c_{10} \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p w(d(z, \partial G)) d\mu(z)$$

Учитывая, что из системы $\{Q_k^*\}$ можно выделить конечную подсистему, покрывающую всю область G, то

$$\int\limits_G |f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z) w(d(z)) d\mu \leqslant c_{11} \sum_k \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p w(d(z, \partial G)) d\mu \leqslant$$
$$\leqslant c_{12} \int\limits_G |f(z)|^p w(d(z, \partial G)) d\mu.$$

Теорема доказана. При этом оценка снизу справедлива для произвольных областей.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358 “Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики”, а также РФФИ (грант 10-01-00233-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Известия РАН. Серия математическая. Т. 68. № 1. 2004. С. 5–42

[2] *Abuzyarova N. F., Isaev K. P., Yulmukhametov R. S.* Equivalence of norms of analytic functions on the exterior of a convex domain. Geometric function theory, boundary value problems and their applications. Proceedings of the international scientific conference, Kazan, Russia, March 18– 24, 2002. Kazan: Kazanskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Tr. Mat. Tsentra im. N. I. Lobachevskogo 14, 39-49 (2002). MSC2000: *30H05 46E15

[3] *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций // М. Мир, 1973. 342 с.

[4] *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных // М.: Наука, 971–432 с.

[5] *Ткаченко Н. М.* Об оценках производной аналитической функции в L^p– весовых пространствах //Вестник Брянского государственного университета: Естественные и точные науки. – Брянск: РИО БГУ, 2006. – № 4. – С.194-197.

[6] *Ткаченко Н. М.* Весовые L^p - оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Саратов 2009.

[7] *Tkachenko N. M., Shamoyan F. A.* The Hardy – Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary//Журн. матем. физ., анал., геом., 5:2 (2009), 192-–210

УДК 519.63

СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И ДИФФУЗИОННЫХ ПОЛЕЙ В КУСОЧНО-АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Бикбаева А. Р.

Стерлитамак, Стерлитамакский филиал БашГУ

Введение

Изучение закономерностей распространения в пространстве нестационарных температурных и диффузионных полей в областях сложной геометрической формы, с анизотропией физических свойств сред их наполняющих, тесно связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка алгоритмов решения подобного типа задач и программ расчета данных полей имеет практическое значение для областей экспериментальной физики, техники и технологии, требующих высокоточных расчетов для оптимизации процессов, выбора параметров исследуемых областей, сред и источников поля. В данной работе, в продолжение результатов работ [1,2], обсуждаются результаты вычислительных экспериментов и вычислительные аспекты алгоритма численного расчета нестационарных физических полей применительно к задачам диффузии и теплопроводности.

Постановка задачи и способ решения

Пусть область исследования $\Omega \subset R^3$ может быть представлена в виде $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$ – объединения подобластей Ω_i, каждая из которых заполнена анизотропным по теплопроводности (диффузии) веществом с постоянным симметричным тензором анизотропии σ_i. Обозначим через $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{M} \Gamma_j$ – внешнюю границу области Ω, а через γ_i и Γ_j, соответственно, внутренние и внешние границы областей Ω_i.

Процессы распространения тепла или диффузионного переноса вещества в области Ω описываются скалярными полями, математические модели которых представляются начально-краевыми задачами математической физики вида:

$$div(\sigma_i \overline{\nabla} U_i(P,t)) - a_i U_i(P,t) - b_i^2 \frac{\partial U_i(P,t)}{\partial t} = -f_i(P,t), \quad P \in \Omega_i, i = \overline{1,N}; \tag{1}$$

$$U_i(P,t) - U_j(P,t)|_{\gamma_i \bigcap \gamma_j} = 0, \quad (\sigma_i \overline{\nabla} U_i(P,t), n) - (\sigma_j \overline{\nabla} U_j(P,t), n)|_{\gamma_i \bigcap \gamma_j} = 0, i = \overline{1,N}, \quad j \in J_i = \{j | j = \overline{1, i-1}; \gamma_i \bigcap \gamma_j \neq \varnothing\}; \tag{2}$$

$$\alpha_j(P)(\sigma_i \overline{\nabla} U_j(P,t), n) - \beta_j(P) U_j(P,t)|_{P \in \Gamma_j} = \psi_j(P,t), \quad |\alpha_j(P)| + |\beta_j(P)| \neq 0, i = i_1, i_2, ..., i_k, k \leq N; \tag{3}$$

$$U_m(P,t) \to 0, P \to \infty, m = m_1, m_2, ..., m_n, n \leq N; \tag{4}$$

$$U_i(P,0) = 0, i = \overline{1,N}. \tag{5}$$

Здесь $f_i(P,t)$ – функции интенсивности источников/стоков поля в подобластях Ω_i; a_i, b_i – постоянные в Ω_i числовые коэффициенты; $U(P,t)$ – искомая скалярная функция поля. Переменная $t \geq 0$ – время. Условия (2) – есть условия непрерывности искомой функции $U(P,t)$ и плотности потока $(\sigma_i \overline{\nabla} U_i(P,t), n)$ на внутренних границах контакта сред с различными тензорами σ, здесь n – вектор нормали к границе γ. На внешних границах области Ω будем рассматривать граничные условия третьего рода, которые в частных (в зависимости от функций $\alpha(P)$ и $\beta(P)$ могут иметь вид граничных условий первого или второго рода. Начальные условия (5) взяты однородными, поскольку без ограничения общности можно считать задачу сформулированной для отклонений от некоторого начального состояния значений поля. Условие (4) описывает поведение решения на бесконечно удаленных границах в неограниченных подобластях области Ω.

В дальнейшем будем считать, что поле возбуждается точечным источником переменной интенсивности $I(t)$, расположенным в точке A области Ω, т.е. $f(t) = I(t)\delta(P - A)$. Все встречающиеся в задаче функции будем считать достаточно гладкими для использования формул интегральных представлений и интегральных уравнений, а также имеющими необходимый порядок затухания на бесконечности для обеспечения применимости интегрального преобразования Лапласа.

Применим к задаче (1)–(5) способ решения, описанный в работе [1], используя интегральное преобразование Лапласа [3] $U^{\omega}(P) = \int\limits_0^{\infty} U(P,t) e^{-\omega t} dt$, с формулой обращения

$$U(P,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty}U^{\omega}(P)e^{\omega t}d\omega, Re\omega=\omega_0. \tag{6}$$

Получим однопараметрическое (по ω) семейство краевых задач:

$$\begin{gathered}div(\sigma_i\overline{\nabla}U_i^{\omega}(P))-k_iU_i^{\omega}(P)=-I(t)\delta(P-A),\\ P\in\Omega_i, i=\overline{1,N};\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}U_i^{\omega}(P)-U_j^{\omega}(P)|_{\gamma_i\bigcap\gamma_j}=0,\\ (\sigma_i\overline{\nabla}U_i^{\omega}(P),n)-(\sigma_j\overline{\nabla}U_j^{\omega}(P),n)|_{\gamma_i\bigcap\gamma_j}=0, i=\overline{1,N}, j\in J_i;\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\alpha_i(P)(\sigma_i\overline{\nabla}U_i^{\omega}(P),n)-\beta_i(P)U_i^{\omega}(P)|_{P\in\Gamma_i}=\psi_i^{\omega}(P),\\ |\alpha_i(P)|+|\beta_i(P)|\neq 0, i=i_1,i_2,...,i_k, k\leq N;\end{gathered} \tag{9}$$

$$U_m^{\omega}(P)\to 0, P\to\infty, m=m_1,m_2,...,m_n, n\leq N, \tag{10}$$

в подобластях Ω_i с симметричными эллиптическими операторами $H[U_i^{\omega}(P)]\equiv div(\sigma_i\overline{\nabla}U_i^{\omega}(P))-k_iU_i^{\omega}(P)$, $k_i=a_i+\omega b_i^2$.

Интегральное представление решения задачи $(7)-(10)$ имеет вид [1]:

$$\begin{gathered}\beta\cdot U^{\omega}(P)=\sum_{i=N_1+1}^{N}\sum_{j\in J_i}\int\limits_{\gamma_i\bigcap\gamma_j}U_i^{\omega}(Q)((\sigma_j-\sigma_i)\overline{\nabla}G(P,Q),n_Q)d\gamma_{i_Q}+\\ +I^{\omega}\cdot G(P,Q)+\sum_{l1}\int\limits_{\Gamma_{l1}}\frac{\psi_{l1}^{\omega}(Q)}{\beta_{l1}(Q)}(\sigma_{l1}\overline{\nabla}G(P,Q),n_Q)d\Gamma_{l1Q}+\\ +\sum_{l2}\int\limits_{\Gamma_{l2}}\frac{\psi_{l2}^{\omega}(Q)}{\alpha_{l2}(Q)}G(P,Q)d\Gamma_{l2Q}.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь$\beta=\begin{cases}1, & P\notin\Gamma\\ 1/2, & P\in\Gamma\end{cases}$; $l1$ – номера участков внешней границы Γ, на которых заданы условия первого рода, $l2$ – номера участков внешней границы с условиями второго или третьего рода; $G(P,Q)$ – функция Грина – функция точечного источника поля единичной интенсивности во вмещающем пространстве, состоящем из N_1 подобластей $(N_1\leq N)$.

Граничные значения функции $U_i^{\omega}(Q)$ находятся как решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$U^\omega(P) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \sum_{j\in J_i} \int\limits_{\gamma_i \bigcap \gamma_j} U_i^\omega(Q)((\sigma_j - \sigma_i)\overline{\nabla} G(P,Q), n_Q)d\gamma_{i_Q} =$$

$$+I^\omega \cdot G(P,Q) + \sum_{l1} \int\limits_{\Gamma_{l1}} \frac{\psi_{l1}^\omega(Q)}{\beta_{l1}(Q)}(\sigma_{l1}\overline{\nabla} G(P,Q), n_Q)d\Gamma_{l1Q}+ \qquad (12)$$

$$+\sum_{l2} \int\limits_{\Gamma_{l2}} \frac{\psi_{l2}^\omega(Q)}{\alpha_{l2}(Q)} G(P,Q)d\Gamma_{l2Q},$$

где $P \in \gamma_l, l \in J_k, k = \overline{N_1+1, N}, Q \in \gamma_j, j \in J_i, i = \overline{N_1+1, N}$. В (11) и (12) n_Q – вектор внешней нормали в точке Q, направленный на внутренних границах γ_i в среду с меньшим, чем i номером.

Обращение преобразования Лапласа (6) программно реализуется с помощью обобщенных квадратурных формул наивысшей степени точности [4] вида:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} f(p)dp \approx \sum_{k=1}^{N_L} A_k f(p_k), s > 0, \qquad (13)$$

где узлы p_k и коэффициенты A_k выбираются из условий точности формулы (6) для набора функций $f(p) = p^{-am}, m = \overline{0, 2N_L - 1}$. Это равносильно выполнению равенств

$$\sum_{k=1}^{N_L} A_k p_k^{-am} = \frac{1}{\Gamma(s+am)}, m = \overline{0, 2N_L - 1},$$

где узлы являются корнями многочлена $R_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{N_L}(x - p_k^{-a})$, определяемые однозначно из условий ортогональности:

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} R_n(p^{-s}) p^{-am} dp = 0, m = \overline{0, N_L - 1}.$$

Способ решения распространяется и на кусочно-постоянные однородные среды, тензор анизотропии которых имеет вид диагональной матрицы с одинаковыми значениями на диагонали.

Вычислительный эксперимент

В качестве апробации предлагаемого вычислительного алгоритма рассмотрена задача расчета температурного поля $U(P,t)$ ограниченного однородного цилиндра высоты $2h$ и радиуса R при отсутствии внутренних источников тепла. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial U(P,t)}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U(P,t)}{\partial r})+\frac{\partial^2 U(P,t)}{\partial z^2}, P(r,z); \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(P,t)}{\partial z}|_{z=h}&=-\frac{\alpha_1}{\lambda}(U(P,t)|_{z=h}-U_h),\\ \frac{\partial U(P,t)}{\partial r}|_{r=R}&=-\frac{\alpha_2}{\lambda}(U(P,t)|_{r=R}-U_R);\end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial U(P,t)}{\partial z}|_{z=0}=0, \frac{\partial U(P,t)}{\partial r}|_{r=0}=0; \quad (16)$$

$$U(P,0)=U_0=const. \quad (17)$$

Здесь $a=\frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности, λ, c, ρ – теплопроводность, удельная теплоемкость и плотность среды, заполняющей цилиндр, соответственно. Начальное температурное распределение будем считать заданным равномерно с температурой U_0.В начальный момент времени поверхности оснований цилиндра начинают обмениваться теплом по закону Ньютона со средой постоянной температуры $U_h \neq U_0$; также по закону Ньютона происходит теплообмен боковой поверхности со средой температуры $U_R \neq U_h \neq U_0$; α_1, α_2 – соответствующие коэффициенты теплообмена.

Аналитическое решение задачи (14)-(16) известно [5]:

$$\begin{aligned}U(P,t)=U_R+(U_h-U_R)\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^{(2)}J_0(\mu_n\frac{r}{R})ch\mu_n\frac{z}{R}}{\frac{\mu_n k}{Bi_h}sh\mu_n k+ch\mu_n k}+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_n^{(2)}A_m^{(1)}[(U_h-U_R)\mu_n^2-(U_h-U_0)(\mu_n^2+\frac{\lambda_m^2}{k^2})]\times\\ \times\{(\mu_n^2+\frac{\lambda_m^2}{k^2})\}^{-1}\times J_0(\mu_n\frac{r}{R})\times\cos\lambda_m\frac{z}{h}\times\exp[-(\frac{\mu_n^2}{R^2}+\frac{\lambda_m^2}{h^2})at],\end{aligned} \quad (18)$$

где μ_n - корни характеристического уравнения $\frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)}=\frac{\mu_n}{Bi_R}$, λ_m - корни характеристического уравнения $ctg\lambda_m=\frac{1}{Bi_h}\lambda_m, Bi_h=\frac{\alpha_1 h}{\lambda}$,
$Bi_R=\frac{\alpha_2 R}{\lambda}, k=\frac{h}{R}, A_n^{(2)}=\frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n[J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n)]}, A_m^{(1)}=\frac{2\sin\lambda_m}{\lambda_m+\sin\lambda_m\cos\lambda_m}$.

Сравнительный анализ результатов аналитического (по формуле (18)) и численного (с помощью программного модуля, реализующего предлагаемый способ вычислений) решений задачи приведен в табл. 1. Вычисления проводились в точке $P(10$ м, 10 м$)$ при следующих значениях параметров: $U_0 = 293$ K, $U_h = 400$ K,
$U_R = 1000$ K, $a = 1.25 \times 10^{-5}$ м^2/с, $R = 50$ м, $h = 50$ м, $\lambda = 46,5$ Вт/(м·K).

Таблица 1: Сравнение решений

t, c	Аналитическое решение, K	Численное решение, K	Абсолютная погрешность, K	Относительная погрешность,%
1	293.000296	293.000016	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$9.56 \cdot 10^{-7}$
2	293.000342	293.000032	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-6}$
3	293.000388	293.000048	$3.40 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-7}$
4	293.000435	293.000064	$3.71 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-7}$
5	293.000481	293.000080	$4.01 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-7}$
6	293.000527	293.000096	$4.31 \cdot 10^{-4}$	$1.47 \cdot 10^{-7}$
7	293.000573	293.000112	$4.61 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-7}$
8	293.000619	293.000128	$4.91 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-7}$

Вычислительным экспериментом (рис.1) были определены верхние пределы сумм в формулах аналитического решения: при значениях $n = m = 18$ погрешность вычислений достаточно мала. Тонкой сплошной линией на графике показана линия экспоненциального тренда абсолютной погрешности.

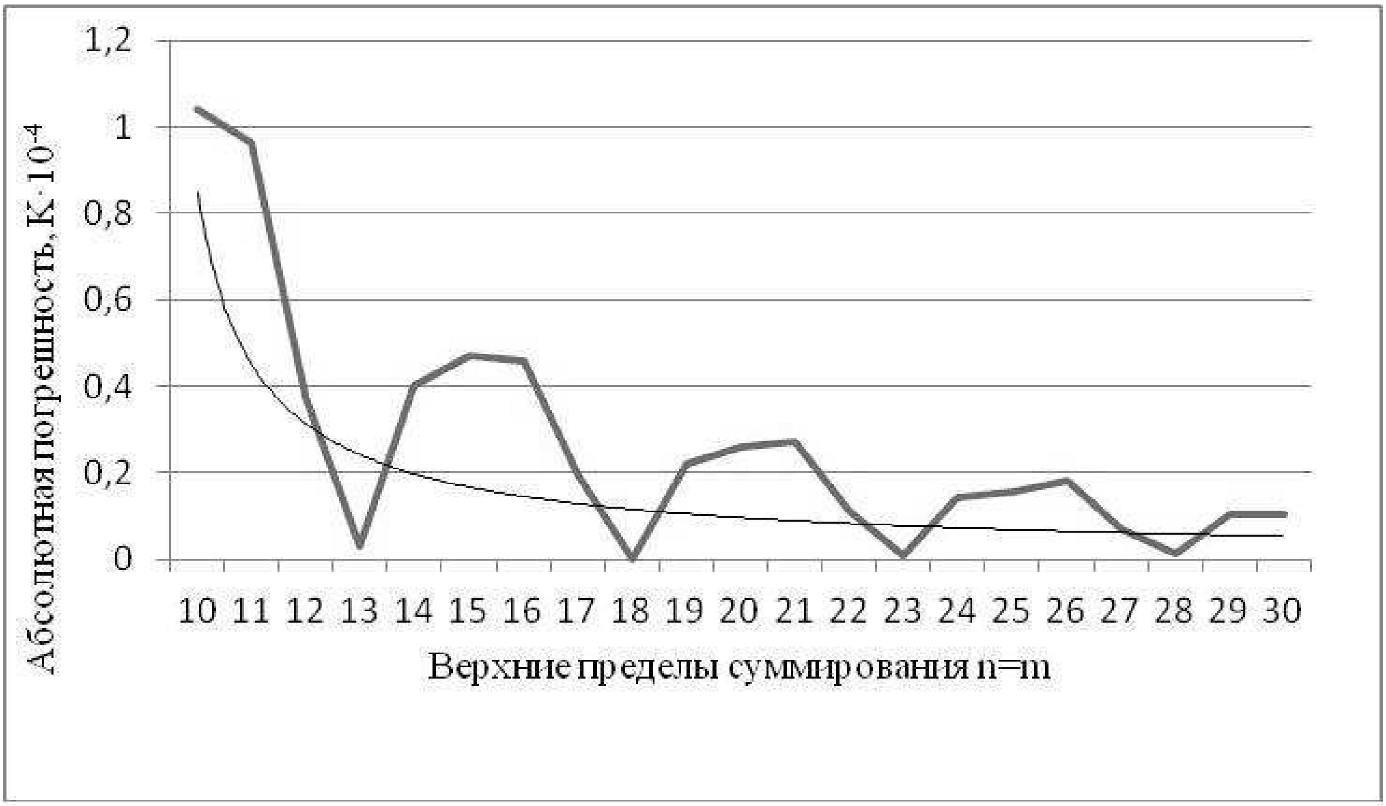


Рис. 1: График зависимости абсолютной погрешности вычислений от значений верхних пределов суммирования.

Количество верных цифр K_ν в мантиссе вычисляемого разработанным программным модулем результата численного обращения преобразования Лапласа по обобщенным формулам наивысшей степени точности (13), в зависимости от числа узлов N_L квадратурной формулы, приведено в табл. 2.

Таблица 2: Зависимость количество верных цифр в мантиссе результата обращения преобразования Лапласа от числа узлов интегрирования.

N_L	3	4	5
K_ν	8	13	19

Заключение

Предложен способ вычисления нестационарных температурных и диффузионных полей в кусочно-постоянных анизотропных и однородных средах. Разработано программное средство, реализующее построенный алгоритм решения. Апробация способа решения проведена при расчете температуры нагрева однородного ограниченного кругового цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Кризский В. Н.* О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть I. Стационарные поля. // Вестник Башкирского университета. 2009. Т. 14. № 3. С. 726–730.

[2] *Кризский В. Н.* О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля. // Вестник Башкирского университета. 2009. Т. 14. № 4. С. 1302–1306.

[3] *Дёч Г.* Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

[4] *Матвеева Т. А.* Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. С.-П., 2003. 117 с.

[5] *Козлов В. П.* Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Мн.: Наука и техника, 1986. 392 с.

УДК 517.946

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Вильданова В. Ф.,Мукминов Ф. Х.
Уфа, БГПУ им.М.Акмуллы, ИМ с ВЦ УНЦ РАН

Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ линейное уравнение второго порядка:

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} + (c_i u)_{x_i}) - d(t,x)u. \qquad (1)$$

На элементы симметрической матрицы $\{a_{ij}\}$ наложено следующее условие: существует положительная непрерывная в D функция $s(t,x)$ такая, что для любого вектора $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ и почти всех $(t,x) \in D$ справедливы неравенства:

$$(y,y)_{A(t)} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) y_i y_j \geq s^2(t,x)|y|^2. \qquad (2)$$

Скалярные произведения $(\cdot,\cdot)_{A(t)}$ предполагаются эквивалентными: найдется число C такое, что

$$C^{-1}|y|_{A(0)} \leq |y|_{A(t)} \leq C|y|_{A(0)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, |y|^2_{A(t)} = (y,y)_{A(t)}. \qquad (3)$$

Неравенство выполняется при почти всех $x \in \Omega$ и $t \in [0,T]$, причем постоянная C не зависит от x. Предполагается также, что выполняются неравенства

$$0 \leq d(t,x) \leq Cd(0,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega. \qquad (4)$$

Все коэффициенты уравнения предполагаются интегрируемыми по любому ограниченному подмножеству D. На измеримые младшие коэффициенты наложены ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i(t,x) - c_i(t,x))^2 \leq s^2(t,x)d(t,x). \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2(t,x) + c_i^2(t,x) \le C^2 s(t,x)(d(t,x)+1). \tag{6}$$

На боковой границе цилиндра D заданы краевые условия первого и третьего типа:

$$u(t,x)\Big|_{\Gamma_1} = 0; \qquad \Big(\frac{\partial u}{\partial N} + \sum_{i=1}^{n} n_i c_i u\Big)\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{7}$$

Здесь $\Gamma_1 \subset \Gamma = (0,\infty) \times \partial\Omega$ — произвольное замкнутое подмножество боковой границы цилиндра Γ и Γ_2 — дополнение к нему $\Gamma_2 = \Gamma \backslash \Gamma_1$; $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} n_j$. Начальная функция

$$u(0,x) = \varphi(x) \in L_{2,lc}(\Omega), \tag{8}$$

предполагается квадратично суммируемой по любому ограниченному подмножеству $Q \subset \Omega$.

Работа посвящена доказательству единственности решения задачи (1), (7), (8) в неограниченной области Ω.

Пусть $\sigma(x)$ — локально липшицевая положительная функция с ограниченными связными поверхностями уровня, и множества $\{x|\sigma(x) < r\}$ гомеоморфны шару. Будем предполагать выполненным неравенство

$$(c, \nabla\sigma) \le 0, \quad (t,x) \in D^T. \tag{9}$$

Положим $s_c(r) = \sup\{|\nabla\sigma|_{A(t)}|\,(t,x) \in D^T,\, \sigma(x) = r\}$. Вообще говоря, функция $s_c(r)$ может принять значение бесконечность на множестве положительной меры.

Потребуется ещё одно условие

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{s_c(r)} = \infty. \tag{10}$$

Положим также $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid \sigma(x) < r\}$, $D_\rho^{T,r} = (0,T) \times (\Omega(r) \backslash \Omega(\rho))$, (индекс $\rho = 0$ будет опускаться).

Теорема 1. *Пусть $u(t,x)$ – решение в D^T задачи (1), (7) с начальным условием*

$$u(0,x) = 0. \tag{11}$$

Пусть выполнены условия (9),(10). Если существует такая монотонно неубывающая на полуоси $[1,\infty)$ положительная функция $h(r)$, что инте-

грал

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h(r)s_c(r)} = \infty \tag{12}$$

расходится и для всех $r \geq 1$

$$\|u\|_{D^{T,r}} \leq \exp(f(r)h(r)), \tag{13}$$

где $f(r) = \int\limits_1^r \frac{d\tau}{s_c(\tau)}$, *то* $u(t,x) \equiv 0$ *в* D^T.

Классы единственности, выделяемые условием (13), зависят не только от коэффициентов уравнения (1), но также и от выбора функции σ. Поэтому максимально широкий класс единственности может получиться лишь при определенном соотношении между коэффициентами уравнения и этой функцией.

При некоторых соотношениях между функцией $\sigma(x)$ и матрицей $A(t,x)$ построены примеры неединственности решения задачи (1), (7), (8) , подтверждающие точность классов единственности, приведенных в теореме.

Отметим, что неконструктивные анизотропные классы единственности были получены в работе [1] для классического решения параболического уравнения методом барьеров.

§ 1. **Обобщенное решение задачи**

Введем следующие обозначения: $D_a^b = (a,b) \times \Omega$, $D^T = D_0^T$,

$$(u,w)_{A,d} = \int\limits_{D^T} [(\nabla u, \nabla w)_{A(0)} + d(0,x)uw]dxdt.$$

Через $\|u\|_{D^T}$ будем обозначать норму в $L_2(D^T)$. На множестве сужений на D^T функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\Gamma_1)$ определим норму $\|u\|^2_{H^{0,1}(D^T)} = \|u\|^2_{D^T} + (u,u)_{A,d}$. Пополнение этого линейного нормированного пространства обозначим $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$. Через $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}_{lc}(D^T;\Gamma_1)$ обозначим пространство функций, при каждом $r > 0$ совпадающих в $D^{T,r}$ с некоторой функцией из пространства $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$.

Обобщенным решением задачи (1), (7), (8) в D^T будем называть функцию $u(t,x) \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}_{lc}(D^T;\Gamma_1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{D^T} \left(-uv_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (c_i u v_{x_i} - b_i u_{x_i} v) + duv \right) dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \varphi(x) v(0,x) dx, \tag{14}$$

для любой функции $v(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma_1)$ такой, что $v(T,x) = 0$.

Заменив в (14), функцию v на v_{-h}, $v \in C_0^\infty(D^T)$, нетрудно получить тождество

$$\int\limits_{D^T} \left[(u_h)_t v + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} + \sum_{i=1}^n ((c_i u)_h v_{x_i} - (b_i u_{x_i})_h v) + (du)_h v \right] dxdt = 0, \tag{15}$$

которое будет справедливо также и для функций $v(t,x) \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$ равных нулю при $t > T - \delta$, $\delta > 0$, и при $|x| > R$ для какого либо R.

§ 2. **Доказательство теоремы 1**

Предложение 1. *Пусть $\varphi(x) = 0,\ x \in \Omega(R)$, и $u(t,x)$ – решение задачи (1), (7), (8) и скалярное произведение $(\nabla\sigma, c) \le 0$ в D^T. Тогда для всех $t > 0$, $r \in (0, R]$ справедливо неравенство*

$$H^{t,r}(u) \le \exp\left(1 - 2\kappa_1 t^{-1} \Big(\int\limits_r^R \frac{d\tau}{s_c(\tau)} \Big)^2 \right) \max_{\tau \in [0,t]} H^{\tau,R}(u), \tag{16}$$

где $H^{t,r}(u) = \int\limits_{\Omega(r)} u^2(x,t) dx, \kappa_1 = 1/(16e^2)$.

Доказательство. Пусть $r \le R$, $\xi(\lambda, r, \rho)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная единице при $\lambda \le r - \rho$ и нулю при $\lambda \ge r$. В оставшемся интервале она удовлетворяет условию $\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = -1/(z s_c(\lambda))$, где параметр z находится из условия $\xi(r-\rho, r, \rho) = 1 : z = \int\limits_{r-\rho}^{r} \frac{d\lambda}{s_c(\lambda)}$. Подставим в тождество (15) $v = \eta u, \eta(x) = \xi^2(\sigma(x), r, \rho)$. Благодаря условию (9), устанавливаем, что $\frac{\partial \eta}{\partial c} \ge 0$. Тогда, в силу условия $\eta\varphi \equiv 0$, используя (5), для любого $r > \rho > 0$ нетрудно получить неравенства

$$\int\limits_{\Omega} \eta u^2(T,x) dx + 2 \int\limits_{D^T} \left[\sum_{i,j=1}^n \eta a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + d u^2 \eta \right] dxdt \le$$

$$\le 2 \int\limits_{D^T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dxdt + 2 \int\limits_{D^T} \sum_{i=1}^n \eta |c_i - b_i| |u u_{x_i}| dxdt - 2 \int\limits_{D^T} u^2 \frac{\partial \eta}{\partial c} dxdt$$

$$\leq 2 \int\limits_{D^T} (\varepsilon \xi^2 |\nabla u|^2_{A(t)} + \varepsilon^{-1} u^2 |\nabla \xi|^2_{A(t)} + s\sqrt{d}|u\nabla u|\eta) dxdt$$

Преобразуя последнее при $\varepsilon = 1/2$, будем иметь $\int\limits_{\Omega} \xi^2 u^2(T,x)dx \leq 4 \int\limits_{D^T} u^2 |\nabla \xi|^2_{A(t)} dxdt$. Используя вид функции ξ, нетрудно получить неравенство $\int\limits_{\Omega(r-\rho)} u^2(t,x)dx \leq \frac{4}{z^2} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega(r)\setminus\Omega(r-\rho)} u^2 dxdt$. Запишем последнее, используя функцию H:

$$H^{t,r-\rho}(u) \leq \frac{4}{z^2} \int\limits_0^t H^{\tau,r}(u) d\tau. \tag{17}$$

Неравенство (17) будем применять индуктивно для последовательности r_i, $i = 0, 1, 2, ...k$, $r_0 = R$, $r_{i+1} = r_i - \rho_i$, числа ρ_i выбираются так, чтобы $z = \int\limits_{r_{i+1}}^{r_i} \frac{d\tau}{s_c(\tau)}$. Число z выберем ниже. Учитывая, что $H^{t,r}(u) \leq A = \max\limits_{\tau \in [0,t]} H^{\tau,R}(u)$, будем иметь $H^{t,r_1}(u) = H^{t,r_0-\rho_0}(u) = \frac{4At}{z^2}$. Далее индукцией по k установим неравенство

$$H^{t,r_k}(u) \leq \frac{A4^k t^k}{z^{2k} k!}. \tag{18}$$

Пользуясь неравенством Стирлинга, из (18) нетрудно получить

$$H^{t,r_k}(u) \leq \frac{A4^k e^k t^k}{\sqrt{2\pi k} z^{2k} k^k} \leq Ae^{-k \ln \frac{z^2 k}{4et}}. \tag{19}$$

Число k будем выбирать так, чтобы $4e^2 t \leq \ z^2 k \leq 8e^2 t$. Тогда из (19) следует, что $H^{t,r_k}(u) \leq Ae^{-k}$. Для пары чисел r, R выстроим последовательность r_i так, чтобы $r_k = r$ и число z будет определяться из нижеследующего равенства $zk = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \int\limits_{r_{i+1}}^{r_i} \frac{d\lambda}{s_c(\lambda)} = \int\limits_r^R \frac{d\lambda}{s_c(\lambda)} = I$. Далее $I^2 = z^2 k^2 \leq 8e^2 tk$. В качестве k выбираем наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству. Тогда $k \geq \frac{I^2}{8e^2 t}$, $z^2 k^2 > 8e^2 t(k-1)$, и $z^2 k > 4e^2 t$ при $k \geq 2$. Таким образом, неравенство (16) установлено для $k \geq 2$. При $k = 1$ оно тривиально.

Следствие. *Пусть $u(t,x)$ — обобщенное решение задачи (1), (7), (8) в D^T, $T \leq 1$. Тогда существуют постоянные $\overline{C}$, $\widetilde{M}$ такие, что для всех $t \in (0,T]$, $r \in [0,R)$, справедливо неравенство*

$$H^{t,r}(u) \leq 12 \exp\left(-2\kappa_1 t^{-1} (\int\limits_r^R \frac{d\lambda}{s_c(\lambda)})^2\right) \max_{\tau\in[0,t]} H^{\tau,R}(u) + 14\|\varphi\|^2_{\Omega(R)}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $v(t,x)$ — решение задачи (1), (7), (8) в с начальной функцией $\varphi(x)\chi_{\Omega(R)} \in L_2(\Omega)$, где $\chi_{\Omega(R)}$ — характеристическая функция множества $\Omega(R)$. Для $v(t,x)$ из (15) при $\eta = 1$ с помощью (5) нетрудно установить неравенство

$$\|v(t)\|^2 + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + dv^2) dx dt \leq \|\varphi\|^2_{\Omega(R)}. \qquad (21)$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|^2_{\Omega(R)} \geq \max_{\tau\in[0,t]} H^{\tau,R}(v), \quad t \in (0,T]. \qquad (22)$$

Функция $w(t,x) = u(t,x) - v(t,x)$ удовлетворяет условию предложения 1, следовательно для $t \in (0,T],\ r \in [0,R)$ имеем

$$H^{t,r}(u) \leq 2H^{t,r}(w) + 2H^{t,r}(v) \leq$$

$$\leq 4\exp\left(1 - 2\kappa_1 t^{-1} (\int\limits_r^R \frac{d\tau}{s_c(\tau)})^2\right) \left\{\max_{\tau\in[0,t]} H^{\tau,R}(u) + \max_{\tau\in[0,t]} H^{\tau,R}(v)\right\} + 2H^{t,R}(v).$$

Используя (22), из последнего соотношения выводим неравенство (20).

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное $t \in (0,T]$. Возьмем произвольное $R_0 > 1$ и оценим $\|u(t)\|^2_{\Omega(R_0)}$ следующим образом. Рассмотрим последовательность R_k такую, что $f(R_k) = 2^k f(R_0)$. Положим

$$\Delta t_k = \frac{\kappa_1}{4} \frac{f(R_k)}{h(R_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (23)$$

В силу монотонности функции $h(r)$ и условия (12), имеем

$$\sum_{k=1}^p \Delta t_k = \frac{\kappa_1}{4} \sum_{k=1}^p \frac{\int\limits_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{dr}{s_c(r)}}{h(R_k)} \geq \frac{\kappa_1}{4} \int\limits_{R_1}^{R_{p+1}} \frac{dr}{h(r)s_c(r)} \to \infty \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Следовательно, при любом выборе числа R_0 найдется такой номер p, что

$$\sum_{k=1}^{p+1} \Delta t_k \geq t. \qquad (24)$$

Пусть $p = p(R_0)$ — наименьший из номеров p, удовлетворяющих неравенству (24), так что $\sum\limits_{k=1}^p \Delta t_k < t$. Переопределим Δt_{p+1} равенством

$$\Delta t_{p+1} = t - \sum_{k=1}^p \Delta t_k \leq \frac{\kappa_1}{4} \frac{f(R_{p+1})}{h(R_{p+1})}. \qquad (25)$$

Определим убывающую последовательность времен $t_0 = t$, $t_1 = t_0 - \Delta t_1$, $t_2 = t_1 - \Delta t_2, \dots, t_p = t_{p-1} - \Delta t_p = 0$. Очевидно, ввиду (23), (25), справедливы неравенства

$$\frac{\frac{\kappa_1}{2}(f(R_k))^2}{\Delta t_k} \geq 2f(R_k)h(R_k), \quad k = \overline{1, p+1}. \tag{26}$$

Из (17) и (13) выводим

$$\|u(t)\|^2_{\Omega(R_{k-1})} \leq \widehat{M} \exp(f(R_k)h(R_k)), \quad t \in (0, T], \quad k \geq 1, \tag{27}$$

где

$$\widehat{M} = 4\Big(\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} \frac{d\rho}{s_c(\rho)}\Big)^{-2} = 16(f(R_k))^{-2} \leq 16(f(R_1))^{-2} \equiv M/12.$$

Рассматривая функцию $u(t,x)$ как решение задачи для уравнения (1) с начальными данными при $t = t_1$, с помощью неравенства (20) и определения последовательности R_k, выводим соотношение

$$\|u(t_0)\|^2_{\Omega(R_0)} \leq 12 \exp\left(-2\kappa_1 \frac{\left(\frac{f(R_1)}{2}\right)^2}{\triangle t_1}\right) \max_{t \in [t_1, t_0]} \|u(t)\|^2_{\Omega(R_1)} + 14\|u(t_1)\|^2_{\Omega(R_1)}.$$

Воспользуемся неравенствами (26), (27):

$$\begin{aligned}\|u(t_0)\|^2_{\Omega(R_0)} \leq M \exp\left(f(R_1)h(R_1)) - \kappa_1 \frac{f^2(R_1)}{2\triangle t_1}\right) + 14\|u(t_1)\|^2_{\Omega(R_1)} \leq \\ \leq M \exp\left(-f(R_1)h(R_1)\right) + 14\|u(t_1)\|^2_{\Omega(R_1)}.\end{aligned} \tag{28}$$

Совершенно аналогично выводятся неравенства при $k = \overline{2, p}$

$$\|u(t_1)\|^2_{\Omega(R_1)} \leq M \exp\left(-f(R_2)h(R_2)\right) + 14\|u(t_2)\|^2_{\Omega(R_2)},$$

$$\|u(t_{k-1})\|^2_{\Omega(R_{k-1})} \leq M \exp\left(-f(R_k)h(R_k)\right) + 14\|u(t_k)\|^2_{\Omega(R_k)}. \tag{29}$$

Поскольку $t_{p+1} = 0$, то применяя (26), (27), находим, что

$$\|u(t_p)\|^2_{\Omega(R_p)} \leq M \exp\left(-f(R_{p+1})h(R_{p+1}))\right).$$

Помножив (29), $k = \overline{1, p+1}$, на 14^{k-1} и складывая, получим при $R_0 \geq 1$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{\Omega(R_0)} \leq M \left\{\exp\left(-f(R_1)h(R_1)\right) + \ldots + 14^p \exp\left(-f(R_{p+1})h(R_{p+1})\right)\right\} \leq \\ \leq C(f(R_1))^{-2} \left\{\exp\left(-f(R_1)h(R_1)\right) \ldots + 14^p \exp\left(-2^p f(R_1)h(R_1)\right)\right\}.\end{aligned}$$

Итак, установлено, что монотонно неубывающая неотрицательная функция $\|u(t)\|^2_{\Omega(R_0)}$ от аргумента R_0, как сумма сходящегося ряда, стремится к нулю при $R_0 \to \infty$. Следовательно, $\|u(t)\|^2_{\Omega(R_0)} = 0$ при любом $R_0 > 0$. Ввиду произвольности $t \in (0, T]$, решение $u(t, x) = 0$ в D^T.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Камынин Л. И.* О единственности решения первой краевой задачи в неограниченной области для параболического уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24 № 9. С. 1331–1345.

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

Воронова Ю. Г.

г. Уфа, Уфимский государственный авиационный технический университет

Введение

В работе рассматривается задача Гурса:

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

$$u(x, 0, \tau) = \phi(x, \tau), \;\; u(0, y, \tau) = \psi(y, \tau), \tag{2}$$

где краевые условия зависят от параметра τ.

Для построения точного решения задачи (1), (2) использован алгоритм, предложенный в работе [1]. В данной статье рассматривалась зависимость решения задачи Гурса для экспоненциальной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x \partial y} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik} e^{u^k} = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{3}$$

$$u^i(x, y) - ln\left(\tau_i \phi^i(x) \bar{\phi}^i(y)\right) = 0 \;\; \text{при} \;\; xy = 0, \tag{4}$$

a_{ik}–элементы матрицы Картана простой алгебры Ли,
от параметров $\tau_1, \ldots, \tau_r$, входящих в краевые условия (4). Данная задача сводится к замкнутой системе с конечным числом динамических переменных.

В данной работе приведена общая схема построения решения задачи (1), (2), путем сведения к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примеров построено точное решение задачи Гурса для двух уравнений:

$$u_{xy} = e^u, \quad u_{xy} = e^u u_y.$$

§ 1. **Общая схема решения задачи Гурса**

Приведем схему решения задачи Гурса (1), (2). Для этого продифференцируем (1), (2) по параметру τ и введем обозначение:

$$v(x,y,\tau) = u_\tau(x,y,\tau). \tag{5}$$

Тогда функция (5) есть решение следующей краевой задачи

$$v_{xy} = f_u v + f_{u_x} v_x + f_{u_y} v_y, \tag{6}$$

$$v(x,0,\tau) = \phi_\tau(x,\tau), \tag{7}$$

$$v(0,y,\tau) = \psi_\tau(y,\tau). \tag{8}$$

Уравнение (6) представляет собой линейное гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Будем считать, что существуют такие $n, m \in Z$, что инварианты Лапласа [2] данного уравнения $h_n = h_{-m-1} = 0$. Тогда решение уравнения (6) можно представить в виде (см., например [2]):

$$v(x,y) = e^{-\int\limits_0^x b(t,y)dt} \frac{1}{h} D \frac{1}{h_1} D \dots \frac{1}{h_{n-1}} D \left(e^{-\int\limits_0^y a_n(x,t)dt + \int\limits_0^x b(t,y)dt} X(x) \right) +$$

$$+ e^{-\int\limits_0^y a(x,t)dt} \frac{1}{h_{-1}} \bar{D} \frac{1}{h_{-2}} \bar{D} \dots \frac{1}{h_{-m}} \bar{D} \left(e^{-\int\limits_0^x b_{-m-1}(t,y)dt + \int\limits_0^y a(x,t)dt} Y(y) \right), \tag{9}$$

здесь D, $\bar{D}$-операторы полного дифференцирования по x, y соответственно, $a = -f_{u_x}$, $b = -f_{u_y}$, а функции $X(x)$, $Y(y)$-произвольные.

Решение краевой задачи (6)-(8) ищется в виде

$$v(x,y) = e^{-\int\limits_0^x b(t,y)dt} \frac{1}{h} D \frac{1}{h_1} D \dots \frac{1}{h_{n-1}} D \left(e^{-\int\limits_0^y a_n(x,t)dt + \int\limits_0^x b(t,y)dt} X(x) \right). \tag{10}$$

Для того чтобы определить функцию $X(x)$ необходимо в выражении (10) последовательно положить $x = 0$ и $y = 0$, и воспользоваться условиями (7), (8). Таким образом решение краевой задачи (6)-(8) будет представимо в виде

$$v(x,y) = \Phi(x,y,u,u_1,\dots,u_n,\tau). \tag{11}$$

Аналогично, решение задачи (6)-(8) можно искать используя решение

$$v(x,y) = e^{-\int\limits_0^y a(x,t)dt} \frac{1}{h_{-1}} \bar{D} \dots \frac{1}{h_{-m}} \bar{D} \left(e^{-\int\limits_0^x b_{-m-1}(t,y)dt + \int\limits_0^y a(x,t)dt} Y(y) \right).$$

В этом случае решение краевой задачи будет иметь следующий вид:

$$v(x,y) = \bar{\Phi}(x,y,u,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,\tau). \tag{12}$$

Далее приравняем полученные решения (11) и (12), а v заменим в силу формулы (5):

$$u_\tau = \Phi(x,y,u,u_1,\ldots,u_n,\tau) = \bar{\Phi}(x,y,u,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,\tau). \tag{13}$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений на переменные

$$u,u_1,\ldots,u_n,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,$$

продифференцируем уравнение (11) n раз по x:

$$\begin{array}{rcc}
(u_1)_\tau &=& D\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_x + \bar{\Phi}_u u_1 + \bar{\Phi}_{\bar{u}_1} f + \ldots + \bar{\Phi}_{\bar{u}_m}\bar{D}^{m-1} f,\\
(u_2)_\tau &=& D^2\bar{\Phi}(x,y,u,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,\tau),\\
\vdots && \vdots\\
(u_n)_\tau &=& D^n\bar{\Phi}(x,y,u,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,\tau).
\end{array}$$

Теперь продифференцируем уравнение (13) m раз по y:

$$\begin{array}{rcc}
(\bar{u}_1)_\tau &=& \bar{D}\Phi = \Phi_y + \Phi_u \bar{u}_1 + \Phi_{u_1} f + \ldots + \Phi_{u_n} D^{n-1} f,\\
(\bar{u}_2)_\tau &=& \bar{D}^2\Phi(x,y,u,u_1,\ldots,u_n,\tau),\\
\vdots && \vdots\\
(\bar{u}_m)_\tau &=& \bar{D}^m\Phi(x,y,u,u_1,\ldots,u_n,\tau).
\end{array}$$

В итоге получили замкнутую систему уравнений относительно переменных

$$u,u_1,\ldots,u_n,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,$$

а именно

$$\left\{\begin{array}{rcc}
u_\tau &=& \Phi(x,y,u,u_1,\ldots,u_n,\tau) = \bar{\Phi}(x,y,u,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,\tau),\\
(u_1)_\tau &=& \bar{\Phi}_x + \bar{\Phi}_u u_1 + \bar{\Phi}_{\bar{u}_1} f + \ldots + \bar{\Phi}_{\bar{u}_m}\bar{D}^{m-1} f,\\
(u_2)_\tau &=& D^2\bar{\Phi}(x,y,u,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,\tau),\\
\vdots && \vdots\\
(u_n)_\tau &=& D^n\bar{\Phi}(x,y,u,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,\tau),\\
(\bar{u}_1)_\tau &=& \Phi_y + \Phi_u \bar{u}_1 + \Phi_{u_1} f + \ldots + \Phi_{u_n} D^{n-1} f,\\
(\bar{u}_2)_\tau &=& \bar{D}^2\Phi(x,y,u,u_1,\ldots,u_n,\tau),\\
\vdots && \vdots\\
(\bar{u}_m)_\tau &=& \bar{D}^m\Phi(x,y,u,u_1,\ldots,u_n,\tau).
\end{array}\right. \tag{14}$$

Решение системы уравнений (14) задает решение задачи Гурса (1), (2).

В качестве примеров, реализуем данный алгоритм для двух уравнений, обладающих интегралами первого и второго порядка.

§ 2. Уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$

Рассмотрим более подробно краевую задачу

$$u_{xy} = e^u, \tag{15}$$

$$u(x,y) - ln\left(\tau\phi(x)\bar{\phi}(y)\right) = 0 \ \text{ при } \ xy = 0. \tag{16}$$

Для уравнения Лиувилля (15) замкнутая динамическая система (14)(см. [1]), имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \tau\frac{\partial u}{\partial \tau} = \psi'(x) + u_x\psi(x) = \bar{\psi}'(y) + u_y\bar{\psi}(y), \\ \tau\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = e^u\bar{\psi}(y), \\ \tau\frac{\partial u_y}{\partial \tau} = e^u\psi(x), \end{cases} \tag{17}$$

здесь

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(x)}\int_0^x \phi(t)dt, \ \ \bar{\psi}(y) = \frac{1}{\bar{\phi}(y)}\int_0^y \bar{\phi}(t)dt, \tag{18}$$

$$\psi(0) \ = \bar{\psi}(0) \ = 0, \ \ \psi'(0) \ = \ \bar{\psi}'(0) \ = \ 1. \tag{19}$$

Для того чтобы решить данную систему уравнений, продифференцируем второе уравнение системы (17) по τ и заменим $e^u\bar{\psi}(y)$ на $\tau\frac{\partial u_x}{\partial \tau}$, а выражение u_τ на $\frac{\psi' + u_x\psi}{\tau}$, полученное из первого уравнения системы (17), тогда имеем

$$\left(\tau\frac{\partial u_x}{\partial \tau}\right)'_\tau = (u_x)'_\tau\psi' + u_x(u_x)'_\tau\psi.$$

Интегрируя по τ последнее равенство, получим:

$$\tau(u_x)'_\tau = u_x\psi' + \frac{1}{2}u_x^2\psi + C_1(x,y), \tag{20}$$

здесь $C_1(x,y)$–произвольная функция.
Теперь положим в уравнение (20) $u_x = P + A$, где функцию $A(x,y)$ выберем таким образом, что:

$$\frac{1}{2}\psi A^2 + A\psi' + C_1 = 0.$$

Тогда уравнение (20) перепишется в виде:

$$\tau P'_\tau = \frac{1}{2}\psi P^2 + P(\psi' + A\psi). \tag{21}$$

Уравнение (21) является уравнением Бернулли, решение которого записывается в виде

$$P = \frac{2(\psi' + A\psi)\tau^{\psi' + A\psi}}{C_2(x,y) - \psi\tau^{\psi' + A\psi}},$$

здесь $C_2(x,y)$–произвольная функция. Теперь учитывая, что $u_x = P + A$, будем иметь

$$u_x = \frac{2(\psi' + A\psi)\tau^{\psi'+A\psi}}{C_2(x,y) - \psi\tau^{\psi'+A\psi}} + A. \tag{22}$$

Далее, для того чтобы найти функцию u, проинтегрируем первое уравнение системы (17) по τ, где u_x определяется из формулы (22). Получим

$$u = \ln\left(\frac{C_3\tau^{\psi'+A\psi}}{(C_2 - \psi\tau^{\psi'+A\psi})^2}\right), \tag{23}$$

здесь $C_3 = C_3(x,y)$–произвольная функция.
Теперь подставим найденные выражение для u и u_x, а именно (23) и (22), во второе уравнение системы (17). Получим соотношение на функции C_2 и C_3:

$$C_3 = \frac{2(\psi' + A\psi)^2}{\bar{\psi}}C_2.$$

С учетом этого, выражение (23) перепишется в виде

$$u = \ln\left(\frac{2C_2(\psi' + A\psi)^2\tau^{\psi'+A\psi}}{\bar{\psi}(C_2 - \psi\tau^{\psi'+A\psi})^2}\right). \tag{24}$$

Далее, воспользуемся тем фактом, что u_x есть производная u по x. Продифференцируем (24) по x и приравняем к выражению (22) для u_x. Получим следующие соотношения:

$$(\psi' + A\psi)'_x = 0,\ \ \frac{(C_2)'_x}{C_2} = -A.$$

Теперь продифференцируем равенство (24) по y и подставим данное соотношение в третье уравнение системы (17). Откуда следует, что

$$A'_y = 0,\ \ \frac{(C_2)'_y}{C_2} = -\frac{\psi' + A\psi}{\bar{\psi}}$$

и

$$u_y = \frac{(\psi' + A\psi)(C_2 + \psi\tau^{\psi'+A\psi})}{\bar{\psi}(C_2 - \psi\tau^{\psi'+A\psi})} - \frac{\bar{\psi}'}{\bar{\psi}}. \tag{25}$$

Далее, имеем $\psi' + A\psi = const$, а с учетом (19), получаем, что $\psi' + A\psi = 1$. Тогда выражение (24) перепишется в виде

$$u = \ln\left(\frac{2C_2\tau}{\bar{\psi}(C_2 - \psi\tau)^2}\right), \tag{26}$$

где функция $C_2(x,y)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{(C_2)'_x}{C_2} = \frac{\psi'}{\psi} - \frac{1}{\psi}, \\ \frac{(C_2)'_y}{C_2} = -\frac{1}{\bar{\psi}}. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений найдем C_2, а функции $\psi(x)$, $\bar{\psi}(y)$ заменим в силу формул (18), тогда получим

$$C_2(x,y) = C\left(\int\limits_0^x \phi(t)dt \int\limits_0^y \bar{\phi}(t)dt\right)^{-1} \psi(x).$$

Подставим найденную функцию $C_2(x,y)$ в решение u (26) и, учитывая формулы (18), получим следующее решение

$$u = \ln\left(\frac{4\tau\phi(x)\bar{\phi}(y)}{\left(2 - \tau\int\limits_0^x \phi(t)dt \int\limits_0^y \bar{\phi}(t)dt\right)^2}\right). \tag{27}$$

Формула (27) задает решение задачи Гурса (15), (16).

§ 3. **Уравнение** $u_{xy} = e^u u_y$

Рассмотрим задачу Гурса для уравнения

$$u_{xy} = e^u u_y, \tag{28}$$

$$u(x,y) - ln\left(\tau\phi(x)\bar{\phi}(y)\right) = 0 \quad \text{при} \quad xy = 0. \tag{29}$$

В работе [3] приведена формула для симметрий уравнения (28), а именно

$$f = (D + u_x)W(x) + u_y\bar{W}(y).$$

Тогда динамическая система для задачи (28), (29) (см. (14)) имеет следующий вид

$$\begin{cases} \tau\frac{\partial u}{\partial \tau} = (D + u_x)\psi = u_y\bar{\psi}, \\ \tau\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = e^u u_y\bar{\psi}, \\ \tau\frac{\partial u_y}{\partial \tau} = e^u u_y\psi. \end{cases} \tag{30}$$

Вначале решим первое уравнение системы (30):

$$\psi'(x) + u_x\psi(x) = u_y\bar{\psi}(y),$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно неизвестной $u(x,y)$. Решение данного уравнения записывается в виде

$$u = \ln f'_x(x,\tau) + \Phi\left(f(x,\tau) + \bar{f}(y,\tau), \tau\right). \tag{31}$$

где Φ-произвольная функция, а

$$f'(x) = \frac{1}{\psi(x)}, \quad \bar{f}'(y) = \frac{1}{\bar{\psi}(y)}.$$

Далее необходимо найти вид функции Φ, для этого подставим u из формулы (31) в исходное уравнение (28), получим

$$\Phi'' = e^{\Phi}\Phi'.$$

Данное уравнение легко интегрируется, в результате имеем

$$\Phi = \ln\left(\frac{\alpha(\tau)e^{\alpha(\tau)f+\alpha(\tau)\bar{f}+\beta(\tau)}}{1 - e^{\alpha(\tau)f+\alpha(\tau)\bar{f}+\beta(\tau)}}\right),$$

здесь $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$-произвольные функции. Тогда функция u, с учетом (31), примет вид

$$u = \ln\left(\frac{f'_x\alpha(\tau)e^{\alpha(\tau)f+\alpha(\tau)\bar{f}+\beta(\tau)}}{1 - e^{\alpha(\tau)f+\alpha(\tau)\bar{f}+\beta(\tau)}}\right). \tag{32}$$

Для того, чтобы определить функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, воспользуемся краевыми условиями (29). А именно, в решение (32) положим $x = 0$ и выразим функцию $\bar{f}(y,\tau)$, получим:

$$\bar{f}(y,\tau) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\tau\phi(0)\bar{\phi}(y)}{f'_x(0,\tau)\alpha + \tau\phi(0)\bar{\phi}(y)}\right) - f(0,\tau) - \frac{\beta}{\alpha}. \tag{33}$$

Далее положим в выражение (32) $y = 0$ и, с учетом (29), имеем

$$\tau\phi(x)\bar{\phi}(0) = \ln\left(\frac{f'_x(x,\tau)\alpha e^{\alpha f(x,\tau)+\alpha\bar{f}(0,\tau)+\beta}}{1 - e^{\alpha f(x,\tau)+\alpha\bar{f}(0,\tau)+\beta}}\right). \tag{34}$$

Обозначим через $X(x,\tau) = e^{\alpha f(x,\tau)}$, тогда соотношение (34) можно записать в виде:

$$X'_x(x,\tau) + \tau\phi(x)\bar{\phi}(0)X(x,\tau) = e^{-\alpha\bar{f}(0,\tau)-\beta}\tau\phi(x)\bar{\phi}(0).$$

Данное уравнение представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого представимо в виде

$$f(x,\tau) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(e^{-\alpha\bar{f}(0,\tau)-\beta} + \left[e^{\alpha f(0,\tau)} - e^{-\alpha\bar{f}(0,\tau)-\beta}\right]e^{-\tau\bar{\phi}(0)\int\limits_0^x\phi(t)dt}\right). \tag{35}$$

Далее из формулы (35) найдем $f'_x(0,\tau)$ и подставим в выражение (33), получим

$$\bar{f}(y,\tau)=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\bar{\phi}(y)}{\bar{\phi}(y)-\bar{\phi}(0)+\bar{\phi}(0)e^{-\alpha\bar{f}(0,\tau)-\alpha f(0,\tau)-\beta}}\right)-f(0,\tau)-\frac{\beta}{\alpha}. \quad (36)$$

Теперь подставим найденные функции f и $\bar{f}$ из соотношений (35) и (36) в решение (32), и после несложных преобразований, функция u примет следующий вид

$$u(x,y,\tau)=\ln\left(\frac{\tau\phi(x)\bar{\phi}(y)\bar{\phi}(0)}{\bar{\phi}(y)-(\bar{\phi}(y)-\bar{\phi}(0))e^{\tau\bar{\phi}(0)\int\limits_0^x\phi(t)dt}}\right).$$

Последняя формула является решением задачи Гурса (28), (29).

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 8499, а также РФФИ (грант 11-01-97005-р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лезнов А. Н., Шабат А. Б.* Условия обрыва рядов теории возмущений // Интегрируемые системы БФАН СССР. Уфа. 1982. С. 34–44.

[2] *Жибер А. В., Соколов В. В.* Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу: Учебное пособие/БГУ - Уфа. 1996. С. 56.

[3] *Гареева Н. В., Жибер А. В.* Интегралы второго порядка гиперболических уравнений и эволюционные уравнения // Труды международной конференции. г.Орел. 1996. С. 39–42.

УДК 517

ЗАДАЧА О ДВУХ ИНВАРИАНТАХ

Габиев Р. А.
Карачаевск, КЧГУ им. У.Д.Алиева

Введение

Одним из наиболее знаменитых примеров точно интегрируемого нелинейного уравнения в частных производных является уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = \exp u. \tag{1}$$

Как известно, уравнение Лиувилля обладает интегралами

$$\omega = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2, \quad \bar{\omega} = u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2.$$

Последнее означает, что функция ω на любом решении $u(x, y)$ уравнения (1) не зависит от y, а функция $\bar{\omega}$ – от x.

На сегодняшний день существуют различные определения точно интегрируемых уравнений лиувиллевского типа. Одно из определений основано на понятии x- и y-интегралов. Функция $W(u, u_x, u_{xx}, ...)$, зависящая от u и конечного числа производных u по переменной x, называется x-интегралом уравнения

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y), \tag{2}$$

если $D_y(W) = 0$. Аналогично, функция $\bar{W}(u, u_y, u_{yy}, ...)$, зависящая от u и конечного числа производных u по y, называется y-интегралом уравнения (2), если $D_x(\bar{W}) = 0$. Уравнение (2) принято называть точно интегрируемым уравнением лиувиллевского типа, если оно обладает нетривиальными x- и y-интегралами.

Исследованием уравнений

$$u_{xy} = g(x, y, u, u_x, u_y), \tag{3}$$

обладающих интегралами второго порядка занимался Гурса [1,2]. Список Гурса был дополнен в [3] двумя уравнениями, допускающими интегралы третьего порядка. Вессио [4,5], используя оригинальный алгебраический подход, получил список Гурса и нашел решения каждого уравнения из этого списка.

Что касается, современных исследований, в работе [6] описаны все уравнения (3), обладающие интегралами порядка не выше второго. Жибер и Соколов [7] выбрав другое (эквивалентное) определение точно интегрируемых уравнений лиувиллевского типа вида (3), провели полную классификацию таких уравнений.

§ 1. **Задача о двух инвариантах**

В связи с работой [8] возникла задача о совместности двух интегралов:

$$D_yA(u, u_x, u_{xx}) = 0, \quad D_xB(u, u_y, u_{yy}) = 0. \tag{4}$$

Симметричный случай $x \leftrightarrow y$ интересен в первую очередь.
Рассмотрим более простой случай

$$D_yA(u_x, u_{xx}) = 0, \quad D_xB(u_y, u_{yy}) = 0. \tag{5}$$

Тогда уравнения (5) запишутся в виде:

$$u_{xxy} = a(u_x, u_{xx})u_{xy}, \quad u_{xyy} = b(u_y, u_{yy})u_{xy}; \quad a = -\frac{A_{u_x}}{A_{u_{xx}}}, \quad b = -\frac{B_{u_y}}{B_{u_{yy}}}. \tag{6}$$

Продифференцируем первое из них по y, а второе по x и обозначив функции $a = a(p, q)$, $b = b(p, q)$ имеем

$$\begin{aligned} u_{xxyy} &= (a_p u_{xy} + a_q a u_{xy})u_{xy} + abu_{xy} \\ u_{xxyy} &= (b_p u_{xy} + b_q b u_{xy})u_{xy} + abu_{xy} \end{aligned} \tag{7}$$

Откуда получаем уравнение $a_p - b_p + a_q \cdot a - b_q \cdot b = 0$ или

$$a_p + a \cdot a_q = b_p + b \cdot b_q = \varepsilon = \text{const}\,. \tag{8}$$

Переходя от квазилинейных уравнений к линейным отметим, что эти функции $a = a(p, q)$ и $b = b(p, q)$ можно найти решив линейное уравнение в частных производных. Возможны два случая $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \neq 0$.

§ 2. **Случай** $\varepsilon = 0$

Принимая $Z(p, q, a) = 0$ за решение уравнения (8) в неявной форме в случае $\varepsilon = 0$ нам надо решить уравнение

$$Z_p + aZ_q = 0.$$

Первыми интегралами соответствующей системы обыкновенных уравнений будут $Z_1 = a$ и $Z_2 = ap - q$. А решением будет

$$Z(a, ap - q) = 0.$$

Имеют место следующие частные случаи.

1. Случай $ap - q = 0$. Имеем $a = \frac{q}{p} = -\frac{A_p}{A_q}$; $pA_p + qA_q = 0$. Решая последнее уравнение имеем
$$A = F(\frac{q}{p}). \tag{9}$$
где F-есть любая непрерывно дифференцируемая функция.

2. Случай $a + (ap - q) = 0$. Имеем $a = \frac{q}{p+1} = -\frac{A_p}{A_q}$; $(p+1)A_p + qA_q = 0$.
$$A = F(\frac{q}{p+1}). \tag{10}$$

3. Случай $a^2 + (ap - q)^2 = 0$. Имеем $(1 + p^2)a^2 + (-2pq)a + q^2 = 0$; $a = \frac{q(p \pm i)}{1+p^2} = -\frac{A_p}{A_q}$; $A_p \frac{1+p^2}{p \pm i} + qA_q = 0$.
$$A = F(\ln \frac{q}{\sqrt{1+p^2}} \pm i \cdot \arctan p). \tag{11}$$

4. Случай $(ap - q) + 1 = 0$. Имеем $a = \frac{q-1}{p} = -\frac{A_p}{A_q}$; $pA_p + (q-1)A_q = 0$.
$$A = F(\frac{q-1}{p}). \tag{12}$$

5. Случай $(ap - q) - 1 = 0$.
$$A = F(\frac{q+1}{p}). \tag{13}$$

6. Случай $a - (ap - q) = 0$.
$$A = F(\frac{q}{p-1}). \tag{14}$$

§ 3. **Случай** $\varepsilon \neq 0$

Имеем уравнение
$$Z_p + aZ_q + \varepsilon Z_a = 0.$$
Первыми интегралами соответствующей системы обыкновенных уравнений будут $Z_1 = a - \varepsilon p$ и $Z_2 = a^2 - 2\varepsilon q$. Решением уравнения будет
$$Z(a - \varepsilon p, a^2 - 2\varepsilon q) = 0.$$
Имеют место следующие частные случаи.

1. Случай $Z_1 = 0$, т.е. $a - \varepsilon p = 0$. Тогда имеем $a = \varepsilon p = -\frac{A_p}{A_q}$; $\varepsilon p A_q + A_p = 0$.
$$A = F(q - \frac{\varepsilon}{2}p^2). \tag{15}$$
Это частное решение приводит нас к уравнению Лиувилля:
пусть $u_{xy} = \exp v$, тогда $v_x = a(u_x, u_{xx}) = \varepsilon u_x, v_y = b(u_y, u_{yy}) = \varepsilon u_y$ и
$$v = \varepsilon u + \mathrm{const},$$
$$v_{xy} = \varepsilon u_{xy} = \varepsilon \exp v.$$

2. Случай $Z_2 = 0$, т.е. $a^2 - 2\varepsilon q = 0$. Тогда имеем $a = \pm\sqrt{2\varepsilon q} = -\frac{A_p}{A_q}$; $A_p \pm A_q\sqrt{2\varepsilon q} = 0$.
$$A = F(p \pm \sqrt{\frac{2q}{\varepsilon}}). \tag{16}$$
$$\begin{cases} a = \pm\sqrt{2\varepsilon u_{xx}} \\ b = \pm\sqrt{2\varepsilon u_{yy}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xy} = e^v \\ v_x^2 + v_y^2 = 2\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) \end{cases}$$

3. Случай $Z_2 = Z_1^2$, т.е. $a^2 - 2\varepsilon q = (a - \varepsilon p)^2$. Тогда имеем $a = \frac{\varepsilon}{2}p + \frac{q}{p} = -\frac{A_p}{A_q}$;
$$A = F(\frac{q}{p} - \frac{\varepsilon}{2}p). \tag{17}$$
$$\begin{cases} a = v_x = \frac{\varepsilon}{2}u_x + \frac{u_{xx}}{u_x} \\ b = v_y = \frac{\varepsilon}{2}u_y + \frac{u_{yy}}{u_y} \end{cases}.$$

4. Случай $Z_2 - 2Z_1 = 0$, т.е. $(a^2 - 2\varepsilon q) - 2(a - \varepsilon p) = 0$. Тогда имеем $a = 1 \pm \sqrt{1 - 2\varepsilon(p - q)} = -\frac{A_p}{A_q}$;
$$A = F(p \pm \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1 + 2\varepsilon(q - p)}). \tag{18}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Goursat E.* Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre á deux variables indépendantes. Vols. I. II. Hermann, Paris, 1896, 1898.

[2] *Goursat E.* Sur quelques équations du second order qui admettent une transformation de Bäclund // Bull. Soc. Math. France. 1921. V. 49. P. 1–65.

[3] *Lainé M. E.* Sur une équation de la forme $s = p\varphi(x, y, z, q)$ integrable par la méthode de Darboux // Compes rendus. 1926. V. 183. P. 1254–1256.

[4] *Vessiot E.* Sur les équations aux dérivées partielles du second order, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, integrable par la méthode de Darboux // J. Math. pure appl. 1939. V. 18. P. 1–61.

[5] *Vessiot E.* Sur les équations aux dérivées partielles du second order, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, integrable par la méthode de Darboux // J. Math. pure appl. 1942. V. 21. P. 1–66.

[6] *Гареева Н. В., Жибер А. В.* Интегралы второго порядка гиперболических уравнений и эволюционные уравнения // Труды международной конференции "Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений". Орел, ОГУ. 1996. С. 39–42.

[7] *Жибер А. В., Соколов В. В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. // УМН. 2001. Т. 56. вып. 1. С. 63–106.

[8] *V. E. Adler, A. B. Shabat* Towards the theory of integrable hyperbolic equations of third order // J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 395207

УДК 517.938

НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Гадыльшин Т. Р.
Уфа, УГАТУ

Введение

В работе рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\gamma x - \tau y + y(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = 1 + \tau x - \gamma y - x(x^2 + y^2) \end{cases},$$

где $\tau > 0$, $\gamma \geqslant 0$. В дальнейшем будет удобно пользоваться записью этой системы и в полярных координатах:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \sin\varphi - \gamma r \\ r\left(\frac{d\varphi}{dt} + r^2 - \tau\right) = \cos\varphi \end{cases}, \tag{1}$$

§ 1. Случай $\gamma = 0$

В случае $\gamma = 0$ система (1) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \sin\varphi \\ r\left(\frac{d\varphi}{dt} + r^2 - \tau\right) = \cos\varphi \end{cases}, \tag{2}$$

а неподвижные точки системы (2) определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ r\left(r^2 - \tau\right) = \cos\varphi \end{cases},$$

которая, в свою очередь, распадается на две системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ r\left(r^2 - \tau\right) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

и

$$\begin{cases} \varphi = \pi \\ r\left(r^2 - \tau\right) = -1 \end{cases}. \tag{4}$$

Из анализа второго уравнения в (3) следует, что оно имеет только один положительный корень r_0, причем,

$$r_0 > \sqrt{\frac{\tau}{3}}. \tag{5}$$

Из анализа второго уравнения в (4) следует, что у этого уравнения, если

$$\tau < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \tag{6}$$

то положительных корней нет, а если

$$\tau > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \tag{7}$$

то существует два положительных корня r_1 и r_2, причем,

$$r_1 < \sqrt{\frac{\tau}{3}} < r_2. \tag{8}$$

Таким образом, получили, что справедлива следующая

Лемма 1. *Если τ удовлетворяет неравенству (6), то система уравнений (2) имеет единственную неподвижную точку $(r_0, 0)$, где для r_0 справедливо неравенство (5), а если τ удовлетворяет неравенству (7), то система уравнения (2) имеет три неподвижные точки $(r_0, 0)$, (r_1, π) и (r_2, π), где для r_i справедливы неравенства (5) и (8).*

Точка $(r_2, 0)$ является седлом линеаризованной системы для (2). Поэтому она является седловой точкой и для (2).

Однако, точки $(r_0, 0)$ и (r_1, π) для соответствующих линеаризованных систем уравнений являются центрами. Поэтому линеаризация (2) в этих точках не позволяет выяснить устойчивость точек $(r_0, 0)$ и (r_1, π) для системы (2). Для выяснения этого вопроса используются функции Ляпунова, которые для системы уравнений (2) в этих точках имеют вид

$$I_i(r, \varphi) = \frac{r^4}{4} - \frac{\tau r^2}{2} - \cos\varphi - \left(\frac{r_i^4}{4} - \frac{\tau r_i^2}{2} - (-1)^i\right) C_i.$$

Так как в силу (5) и (8) функции $I_0(r, \varphi)$ и $I_1(r, \varphi)$ достигают строгий локальный минимум в точках $(r_0, 0)$ и (r_1, π) соответственно, то эти точки являются устойчивыми (см., например, [1]).

В итоге получили справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Неподвижная точка (r_2, π) системы уравнений (2) является неустойчивой (седлом), а неподвижные точки $(r_0, 0)$ и (r_1, π) этой системы — устойчивыми (фокусами или центрами).*

§ 2. **Случай** $\gamma > 0$

В случае, когда $\gamma > 0$ неподвижные точки автономной системы уравнений (1) определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin\varphi = \gamma r \\ \cos\varphi = r\left(r^2 - \tau\right) \end{cases}. \tag{9}$$

Из анализа этой системы следует

Лемма 2. *Система (1) имеет три неподвижные точки, если*

$$\begin{cases} 9 - 8\tau\gamma^2 > 0 \\ \delta_-(\gamma,\tau) < 8\gamma^6 < \delta_+(\gamma,\tau) \end{cases},$$

где

$$\delta_\pm(\gamma,\tau) := 12\tau\gamma^2 - 8(\tau\gamma^2)^2 - (9 - 8\tau\gamma^2)(3 \mp \sqrt{9 - 8\tau\gamma^2}).$$

Если же

$$\begin{cases} 9 - 8\tau\gamma^2 > 0 \\ 8\gamma^6 < \delta_-(\gamma,\tau) \end{cases}, \ \text{или} \ \begin{cases} 9 - 8\tau\gamma^2 > 0 \\ 8\gamma^6 > \delta_+(\gamma,\tau) \end{cases}, \ \text{или} \ 9 - 8\tau\gamma^2 < 0,$$

то система уравнений (1) имеет одну неподвижную точку.

Пусть (r_0, φ_0) – неподвижная точка системы уравнений (1). Линеаризуя эту систему в точке (r_0, φ_0), получаем:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\gamma(r - r_0) + \cos\varphi_0(\varphi - \varphi_0) \\ \frac{d\varphi}{dt} = \left(-\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} - 2r_0\right)(r - r_0) - \frac{\sin\varphi_0}{r_0}(\varphi - \varphi_0) \end{cases}. \tag{10}$$

Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} -\gamma & \cos\varphi_0 \\ -\dfrac{\cos\varphi_0}{r_0^2} - 2r_0 & -\dfrac{\sin\varphi_0}{r_0} \end{pmatrix}$$

равны

$$\lambda = \left(-\gamma \pm \sqrt{-\cos\varphi_0\left(\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} + 2r_0\right)}\right) \tag{11}$$

Обозначим

$$\alpha = \gamma^{-3}, \qquad \beta = \tau\gamma^2, \qquad U = \alpha^{-\frac{1}{3}} r, \qquad V = (r^3 - \alpha^{\frac{2}{3}}\beta r). \tag{12}$$

В этих обозначениях равенство (11) в силу (9) имеет вид

$$\begin{aligned} &\lambda = \alpha^{-\frac{1}{3}} \left(-1 \pm \sqrt{D(V_0, U_0, \alpha)}\right), \\ &D(V, U, \alpha) := -V \left(\frac{V}{U^2} + 2\alpha U\right), \end{aligned} \tag{13}$$

а сама система (9) эквивалентна системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} U^2 + V^2 = 1 \\ V = \alpha(U^3 - \beta U) \\ 0 < U \leqslant 1 \end{array} \right. . \tag{14}$$

Если (r_0, φ_0) – единственная неподвижная точка автономной системы (1), то в силу (14) получаем следующие цепочки:

$$\begin{aligned} \beta < 1 \;\Rightarrow\; V_0 > 0 \;\Rightarrow\; D(V_0, U_0, \alpha) < 0; \\ \beta = 1 \;\Rightarrow\; V_0 = 0 \;\Rightarrow\; D(V_0, U_0, \alpha) = 0; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \beta > 1,\, V_0 < -2\alpha U_0^3 \;\Rightarrow\; D(V_0, U_0, \alpha) < 0; \\ \beta > 1,\, V_0 = -2\alpha U_0^3 \;\Rightarrow\; D(V_0, U_0, \alpha) = 0; \\ \beta > 1,\, V_0 > -2\alpha U_0^3 \;\Rightarrow\; D(V_0, U_0, \alpha) > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда и из (13) вытекает

Лемма 3. *Если (r_0, φ_0) – единственная неподвижная точка автономной системы (1), то для линеаризованной системы (10) она является устойчивым фокусом, если $\beta > 1$, а $V_0 < -2\alpha U_0^3$ или $\beta < 1$, устойчивым вырожденным узлом, если $\beta > 1$, а $V_0 = -2\alpha U_0^3$ или $\beta = 1$, устойчивым узлом, если $\beta > 1$, $V_0 > -2\alpha U_0^3$ и $D(V_0, U_0, \alpha) < 1$, и седлом, если $\beta > 1$, $V_0 > -2\alpha U_0^3$ и $D(V_0, U_0, \alpha) > 1$.*

Из (12) и лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Если*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau\gamma^2 \leqslant 1 \\ 8\gamma^6 < \delta_-(\gamma, \tau) \end{array} \right. ,$$

то система уравнений (1) имеет одну неподвижную точку, причем, если $\tau\gamma^2 < 1$, то эта точка является устойчивым фокусом, а если $\tau\gamma^2 = 1$, то она является либо устойчивым фокусом, либо устойчивым узлом.

На плоскости (τ, γ) обозначим через $\mathcal{D}$ множество на котором автономная система имеет единственную неподвижную точку (см., лемму 2), а через σ_1 – пересечение кривой $\tau = \gamma^{-2}$ с $\mathcal{D}$. На этой кривой в силу (13) и

(15) мнимая часть λ обращается в нуль. Найдем другие кривые из $\mathcal{D}$, на которых мнимая часть λ также обращается в нуль. Для этого в силу (13) и (16) необходимо и достаточно при $\beta = \tau\gamma^2 > 1$ дополнить систему (14) уравнением

$$V = -2\alpha U^3. \tag{17}$$

Исключая U, V в (14), (17) и возвращаясь к переменным τ γ, получаем, что существует еще одна кривая σ_2, на которой мнимая часть λ обращается в нуль, и она определяется как пересечение кривой

$$\gamma = \sqrt{\frac{3}{\tau} - \frac{4}{9}\tau}$$

и $\mathcal{D}$.

Из определения кривых σ_1 и σ_2 следует, что они не пересекаются. Обозначим

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \cap \left\{(\tau, \gamma) : \sqrt{\frac{1}{\tau}} < \gamma < \sqrt{\frac{3}{\tau} - \frac{4}{9}\tau}\right\}, \quad \mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \backslash \overline{\mathcal{D}_2}.$$

Из теорем 2 и 1 и определения $\mathcal{D}_i$ последовательно вытекают пункты следующей теоремы.

Теорема 3. *Для всех $(\tau, \gamma) \in \mathcal{D}_1$ единственная неподвижная точка системы уравнений (1) является устойчивым фокусом.*

Для всех $(\tau, \gamma) \in \mathcal{D}_2$ близких к σ_1 единственная неподвижная точка системы уравнений (1) является устойчивым узлом.

Для всех $(\tau, \gamma) \in \mathcal{D}_2$ близких к σ_2 единственная неподвижная точка системы уравнений (1) является устойчивым узлом.

Для всех $(\tau, \gamma) \in \sigma_1 \cup \sigma_2$ единственная неподвижная точка системы уравнений (1) является устойчивым узлом.

Для всех $(\tau, \gamma) \in \mathcal{D}_2$ единственная неподвижная точка системы уравнений (1) не является фокусом.

Автор признателен Л.А. Калякину за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

УДК 517.53

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КРИТЕРИИ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ КЛАССА КАРЛЕМАНА В УГЛЕ

Гайсин Р. А.
Уфа, БашГУ

Введение

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$— последовательность положительных чисел, $\Delta_\gamma = \left\{z : |argz| < \frac{\pi}{2\gamma}\right\}$ $(1 < \gamma < \infty)$ — угол, $H(\Delta_\gamma, M_n)$ — класс аналитических в Δ_γ функций f, удовлетворяющих оценкам

$$\sup_{z\in\Delta_\gamma} |f^{(n)}(z)| \leq C_f M_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ называется квазианалитическим в точке $z = 0$, если из того, что $f \in H(\Delta_\gamma, M_n)$ и $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ следует, что $f \equiv 0$.

Пусть $\{M_n\}$— логарифмически выпуклая последовательность, то есть выполняется условие: $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Нетрудно показать, что в этом случае класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} = \infty$. Оказывается, в случае, когда последовательность $\{M_n\}^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$ является регулярной в смысле Е.М.Дынькина, класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^d \ln\ln h_*(r)dr = \infty, \qquad h_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{M_n^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} r^n}.$$

В терминах функции следа аналог первого утверждения ранее был известен как теорема Р.Салинаса. Второе утверждение при выполнении того же билогарифмического условия (при $\gamma = +\infty$) для отрезка ранее было доказано Е.М.Дынькиным.

§ 1. История вопроса и постановка задач

Пусть G — некоторая область комплексной плоскости, $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Некоторые из чисел M_n могут быть равны $+\infty$, но предполагается, что существует бесконечное число конечных M_n. Через $H(G, M_n)$ обозначим класс функций, аналитических в области G и удовлетворяющих условиям:

$$\sup_{z\in G}|f^{(n)}(z)| \leq C_f M_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Класс $H(G, M_n)$ называется квазианалитическим в точке $z_0 \in \bar{G}$, если из того, что $f \in H(G, M_n)$ и $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ следует, что $f \equiv 0$.

Р.Салинасом в 1955 году доказана следующая

ТЕОРЕМА [1]. *Пусть*

$$\Delta_\gamma = \{z : |argz| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\} \qquad (1 < \gamma < \infty).$$

Класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ является квазианалитическим в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}} dr = +\infty.$$

Здесь $T(r) = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ — функция следа последовательности $\{M_n\}$.

Необходимое и достаточное условие квазианалитичности класса $H(K, M_n)$, где K-круг, в 1965 году было получено Б. И. Коренблюмом [2]. Критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в граничной точке произвольной выпуклой области D, установлен Р. С. Юлмухаметовым [3, теорема 4.4.2].

Теорема Юлмухаметова, как и теоремы Салинаса и Коренблюма, доказана в терминах функции $T(r)$. Возникает задача: для каких областей достаточно общего вида (необязательно ограниченных, выпуклых и односвязных) и для каких последовательностей $\{M_n\}$ условия квазианалитичности допускают переформулировку в терминах билогарифмического интеграла Левинсона?

Цель настоящей статьи — получить ответ на этот вопрос в случае угла Δ_γ.

§ 2. Некоторые факты и вспомогательные утверждения

Справедлива следующая

Лемма 1. *Логарифмически выпуклая последовательность $\{M_n\}$ полностью определяется функцией следа $T(r)$, причем*

$$M_n = \sup_{r\geq 0} \frac{r^n}{T(r)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Из определения функции $T(r)$ следует, что

$$M_n \geq \frac{r^n}{T(r)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поскольку левая часть данной оценки не зависит от r, то для всех $n \geq 0$ выполняются оценки

$$M_n \geq \sup_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)}. \tag{1}$$

Но из условия логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$ следует, что

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} \leq \frac{M_{n+1}}{M_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем $r_n = \frac{M_{n+1}}{M_n}$ и покажем, верны равенства

$$T(r_n) = \sup_{k \geq 0} \frac{r_n^k}{M_k} = \frac{r_n^n}{M_n}.$$

Действительно, так как $T(r_n) \geq \frac{r_n^n}{M_n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то достаточно показать, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены оценки

$$\frac{r_n^n}{M_n} \geq \frac{r_n^k}{M_k}. \tag{2}$$

Если учесть выбранное значение $r = r_n$, то оценки (2) запишутся в виде

$$\frac{1}{M_n}\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^n \geq \frac{1}{M_k}\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^k,$$

что равносильно тому, что

$$\frac{M_k}{M_n} \geq \left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^{k-n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, при каждом фиксированном значении n осталось убедиться в справедливости последних оценок.

Пусть, сначала, $k > n$. Тогда из логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$ имеем:

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \leq \frac{M_{n+2}}{M_{n+1}} \leq \frac{M_{n+3}}{M_{n+2}} \leq \ldots \leq \frac{M_k}{M_{k-1}} \qquad (k = n+1, n+2, \ldots).$$

Следовательно, перемножая эти оценки, получаем, что

$$\frac{M_{n+1}}{M_n}\frac{M_{n+2}}{M_{n+1}}\frac{M_{n+3}}{M_{n+2}} \ldots \frac{M_k}{M_{k-1}} \geq \left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^{k-n} \qquad (k = n+1, n+2, \ldots).$$

Отсюда видно, что для всех $k \geq n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\frac{M_k}{M_n} \geq \left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^{k-n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

что и требовалось.

Случай $k < n$ рассматривается аналогично. Таким образом, действительно имеют место равенства

$$M_n = \frac{r_n^n}{T(r^n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Если учесть оценки (1) и равенства (3), то по определению точной верхней грани получаем требуемые равенства

$$M_n = \sup_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Лемма 1 доказана.

Пусть $\{M_n\}$ - логарифмически выпуклая последовательность. Наша задача — переформулировать критерий квазианалитичности Р.Салинаса в угле Δ_γ

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}} dr = +\infty$$

в терминах самой последовательности $\{M_n\}$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{a^\alpha}^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}} \qquad (\alpha > 1).$$

При замене $s = r^{\frac{1}{\alpha}}$ он перейдет в выражение

$$\alpha \int\limits_a^\infty \frac{\ln T(s^\alpha)}{s^2} ds.$$

Рассмотрим теперь величину

$$T_*(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n^{\frac{1}{\alpha}}},$$

которая является функцией следа последовательности $\{M_n^{\frac{1}{\alpha}}\}$. Тогда, очевидно, имеем

$$T_*(r) = \sup_{n \geq 0} \left[\frac{r^{n\alpha}}{M_n}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = [T(r^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Так как
$$\ln T_*(r) = \frac{1}{\alpha} \ln T(r^\alpha),$$
то интеграл
$$\int_a^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^2} dr \tag{4}$$
сходится или расходится одновременно с интегралом
$$\int_a^\infty \frac{\ln T(r^\alpha)}{r^2} dr.$$
Далее, поскольку последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла, то
$$\left[M_n^2\right]^{\frac{1}{\alpha}} \le M_{n-1}^{\frac{1}{\alpha}} M_{n+1}^{\frac{1}{\alpha}},$$
то есть последовательность $\{M_n^*\}$, где $M_n^* = M_n^{\frac{1}{\alpha}}$, также логарифмически выпукла. Следовательно, по известной теореме Данжуа-Карлемана [4, с.104] интеграл (4) сходится или расходится одновременно с рядом
$$\sum_{n=0}^\infty \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$
Таким образом, для логарифмически выпуклой последовательности $\{M_n\}$ справедлива (см. также в [4],с. 55–56)

Лемма 2. *Следующие три условия эквивалентны:*

1) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}} dr = \infty$, *где* $T(r) = \sup\limits_{n \ge 0} \frac{r^n}{M_n}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^\infty \left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \infty$;

3) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{\alpha}}} = \infty$, *где* $\beta_n = \inf\limits_{k \ge n} M_k^{\frac{1}{k}}$.

Лемма 2 позволяет переформулировать теорему Салинаса о квазианалитичности класса Карлемана $H(\Delta_\gamma, M_n)$ в угле Δ_γ в других эквивалентных формах, явно связанных с заданной последовательностью $\{M_n\}$. Таким образом, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\{M_n\}$ *- логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел* M_n $(n \ge 0)$. *Для того, чтобы класс* $H(\Delta_\gamma, M_n)$ *был квазианалитическим в точке* $z = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из эквивалентных условий:*

1) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}} dr = \infty$, *где* $T(r) = \sup\limits_{n \ge 0} \frac{r^n}{M_n}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}=\infty;$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}=\infty,$ *где* $\beta_n=\inf\limits_{k\geq n}M_k^{\frac{1}{k}}.$

Действительно, теорема 1 есть следствие теоремы Салинаса и леммы 2. Чтобы убедиться в этом, достаточно в лемме 2 положить $\frac{1}{\alpha}=\frac{\gamma}{1+\gamma}$ (так как $1<\gamma<\infty$, то, очевидно, $1<\alpha<2$).

§ 3. **Билогарифмическое условие квазианалитичности для класса** $H(\Delta_\gamma, M_n)$

Следуя работе [5], введем в рассмотрение присоединенную последовательность $\{m_n\}$, где $m_n=\frac{M_n}{n!}$. Здесь $\{M_n\}$ - любая положительная последовательность чисел. Теперь дополнительно предположим, что последовательность $\{M_n\}$ подчинена следующим требованиям:

$a) m_n^2\leq m_{n-1}m_{n+1} \qquad (n\geq 1);$

$b) \sup\limits_n\left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}}<\infty;$

$c) m_n^{\frac{1}{n}}\to\infty, n\to\infty.$

Если выполнены условия a)-c), то последовательность $\{M_n\}$ называется регулярной. Условие a)— это условие логарифмической выпуклости последовательности $\{m_n\}$. Отметим также, что из условия b) вытекает замкнутость класса $C\{M_n\}$ относительно операции дифференцирования. Из условия c) следует, что класс Карлемана $C\{M_n\}$ содержит и аналитические функции. Далее из условия a) следует, что и сама последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла (это проверяется непосредственно). Поэтому согласно теореме Данжуа-Карлемана эквивалентны условия:

$a) \int\limits_1^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}dr=\infty; \qquad b) \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M_n}{M_{n+1}}=\infty.$

Для регулярной последовательности $\{M_n\}$, как показал Е.М.Дынькин [5], условие b) (следовательно, и условие a)) равносильно тому, что

$$\int\limits_0^d \ln\ln h(r)dr=+\infty, \tag{5}$$

где $h(r)=\omega(\frac{1}{r}),\ \omega(r)=\sup\limits_{n\geq 0}\frac{r^n}{m_n}$ — так называемый ассоциированный вес, а величина $d>0$ выбрана так, что $h(d)\geq e$ (условие (5) называется билогарифмическим условием или условием Левинсона). Здесь

$$h(r)=\sup_{n\geq 0}\frac{1}{m_nr^n}, \qquad m_n=\frac{M_n}{n!}, \qquad r>0.$$

Ясно, что $h(r)$ — убывающая функция, $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = \infty$. Поскольку последовательность $\{m_n\}$ логарифмически выпукла, то имеет место обратное представление:

$$m_n = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n h(r)} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Имея в виду сказанное выше, перепишем условие типа Салинаса

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}} dr = \infty \qquad (\frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma}{1+\gamma},\ 1 < \gamma < \infty)$$

в терминах функции $h(r)$. Действительно, из доказательства леммы 2 видно, что интеграл

$$\int\limits_{a^\alpha}^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}} dr$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_a^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^2} dr,$$

где

$$T_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n^{\frac{1}{\alpha}}}$$

— функция следа последовательности $M_n^* = M_n^{\frac{1}{\alpha}}$ $(1 < \alpha < 2)$. Предположим, что последовательность $\{M_n^*\}$ регулярна для всех $\alpha \in (1, 2)$. Тогда последний интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_0^d \ln\ln h_*(r) dr,$$

где функция $h_*(r)$ определяется через последовательность $\{M_n^*\}$:

$$h_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{m_n^* r^n}, \qquad m_n* = \frac{M_n^*}{n!} = \frac{M_n^{\frac{1}{\alpha}}}{n!}.$$

Таким образом, имеем

$$h_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{r^n M_n^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad 1 < \alpha < 2.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть последовательность* $\{M_n\}$ $(n \geq 0)$ *положительных чисел* M_n *такова, что измененная последовательность* $\{M_n^*\}$, $M_n^* = M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$ $(1 < \gamma < \infty)$, *является регулярной. Тогда класс* $H(\Delta_\gamma, M_n)$ *квазианалитичен в точке* $z = 0$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие Левинсона*

$$\int_0^d \ln \ln h_*(r) dr = +\infty.$$

Здесь

$$h_*(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} r^n}, \qquad 1 < \gamma < \infty.$$

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Р. С. Юлмухаметову за постановку задач и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Salinas R. B.* Functions with null moments // Rev. Acad. Ciencias. Madrid. 1955. P. 331–368.

[2] *Коренблюм Б. И.* Квазианалитические классы функций в круге // Доклады АН СССР. 1965. Т. 164. № 1. С. 36–39.

[3] *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций и применения. Дисс. ... докт. физ.-мат наук. Уфа: 1986–197с.

[4] *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М.: ИЛ, 1955.–268с.

[5] *Дынькин Е. М.* Функции с заданной оценкой $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ и теорема Н. Левинсона // Матем. сб. 1972. Т. 89(131). № 2. С. 182–190.

УДК 517.91+514.763.8+514.8

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ТИПА I ИЗ СПРАВОЧНИКА Э.КАМКЕ

Еникеева Р. В, Имаева Е. А., Картак В. В.
Уфа, БашГУ

Введение

Обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$y'' = P(x,y) + 3\,Q(x,y)y' + 3\,R(x,y)y'^2 + S(x,y)y'^3, \qquad (1)$$

имеющие постоянный инвариант Картана I_1 были рассмотрены в работе [1]. Формула для вычисления инварианта I_1 через коэффициенты уравнения (1) содержится в работе [2]. В зависимости от значения этого инварианта уравнения относятся к одному из четырех типов:

Тип	канонический вид	инвариант I_1
I	$y'' = e^y + t(x)y + s(x)$	$3/5$
II	$y'' = -\ln y + t(x)y + s(x)$	$-9/10$
III	$y'' = y(\ln y - 1) + t(x)y + s(x)$	$-12/5$
IV	$y'' = \frac{y^{C+2}}{(C+1)(C+2)} + t(x)y + s(x)$	$3(C+5)/(5C)$,
		$C \neq 0,\ -1,\ -2,\ -5$

Здесь $t(x)$, $s(x)$ произвольные функции. Для каждого типа в работе [1] канонический вид уравнений уточняется, в зависимости от значений дополнительных инвариантов уравнения.

В работе [3] в качестве иллюстрирующего примера были найдены все уравнения из справочника Э.Камке [4], относящиеся к типам I-IV. Это 73 уравнения из 205 уравнений, имеющих вид(1).

Данная статья посвящена анализу уравнений типа I из справочника Э.Камке. Для каждого найден уточненный канонический вид и точечное преобразование, приводящее его к этому виду.

Уравнения типа I

Уравнения типа I в зависимости от значений дополнительных инвариантов J_3, J_6, J_1, K делятся на следующие подтипы:

Подтип	J_3	J_6	J_1	K	Каноническая форма
I.1	0	0	–	0	$y'' = e^y$
I.2	$\neq$ const	J_3	–	0	$y'' = e^y + 1$
I.3	$\neq$ const	$\neq J_3$, $\neq$ const	const$=a$	0	$y'' = e^y + y + a$
I.4	$\neq$ const	J_3	–	const$=k \neq 0$	$y'' = e^y + \frac{4}{kx^2}$
I.5	$\neq$ const	J_3	–	$\neq$ const	$y'' = e^y + s(x)$, $s(x) \neq$ const
I.6	$\neq$ const	$\neq J_3$, $\neq$ const	$\neq$ const	$\neq$ const	$y'' = e^y + t(x)y+$, $+s(x)$, $t(x) \neq 0$

Здесь дополнительные инварианты J_3, J_6, J, J_1, J_9, K определяются через базовые инварианты I_3, I_6, I_9. Формулы для вычисления базовых инвариантов содержатся в работе [2].

$$J_3 = 15I_3 - 1, \qquad J_6 = 5I_6, \qquad J = \frac{J_3}{J_3 - J_6},$$
$$J_1 = J + \ln\left(\frac{J_3}{J}\right), \qquad J_9 = 1875I_9, \qquad K = \frac{J_9}{J_3^3}.$$

Подтипы I.1-I.4 задают классы эквивалентности уравнений типа I относительно общих невырожденных точечных замен переменных: все уравнения подтипа I.1 эквивалентны, все уравнения подтипа I.2 эквивалентны, все уравнения подтипа I.3 с одинаковым значением инварианта $J_1 = a$ эквивалентны, все уравнения подтипа I.4 с одинаковым значением инварианта $K = k$ эквивалентны.

Уравнения типа I из справочника Э.Камке

Из 73 уравнений справочника [3] с постоянным инвариантом Картана I_1

были выбраны все уравнения типа I:

$$
\begin{array}{ll}
6.14 & y'' = e^y \\
6.28 & y'' = -ay' - be^y + 2a, \quad b \neq 0 \\
6.75 & y'' = -\dfrac{2}{x}y' - e^y \\
6.76 & y'' = -\dfrac{a}{x}y' - be^y, \quad b \neq 0 \\
6.77 & y'' = -\dfrac{a}{x}y' - bx^{4-2a}e^y, \quad b \neq 0 \\
6.83 & y'' = -\dfrac{a(e^y - 1)}{x^2}, \quad a \neq 0 \\
6.110 & y'' = \dfrac{y'^2}{y} - \dfrac{1}{y} \\
6.111 & y'' = \dfrac{y'^2}{y} + \dfrac{1}{y} \\
6.118 & y'' = \dfrac{y'^2}{y} - ay' - by^2 + 2ay, \quad b \neq 0 \\
6.126 & y'' = -\dfrac{a(y'^2 + 1)}{y}, \quad a = -1 \\
6.127 & y'' = -\dfrac{ay'^2}{y} - by^2, \quad a = -1 \\
6.165 & y'' = -\dfrac{by'^2}{ay} - \dfrac{c_4y^4 + c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0}{ay}, \ a = -b \neq 0, \\
 & \quad c_1 = c_2 = c_4 = 0, \ (c_0 = 0 \;\&\; c_3 \neq 0) \text{ or } (c_3 = 0 \;\&\; c_0 \neq 0), \\
6.172 & xyy'' - xy'^2 + ayy' + bxy^3 = 0, \quad b \neq 0
\end{array}
$$

Вот как они распределились по подтипам. В таблице приведена замена переменных, которая приводит уравнение к каноническому виду, записанному в „волнистых“ переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$.

Таблица распределения уравнений по подтипам:

No.	параметры	тип	замена	K
6.14		I.1		0
6.28	$a=0$, $b\neq 0$	I.1	$x=-\frac{\tilde{x}}{\sqrt{-b}}$, $y=\tilde{y}$	0
6.28	$a=-1$, $b\neq 0$	I.1	$x=ln\tilde{x}$, $y=\tilde{y}+ln(-\frac{\tilde{x}^2}{b})$	0
6.28	$a\neq -1,\, 0$, $b\neq 0$	I.4	$x=-\frac{ln(a\tilde{x})}{a}$, $y=\tilde{y}+ln(-\frac{a^2\tilde{x}^2}{b})$	$\frac{2a}{a+1}$
6.75		I.4	$x=-\frac{1}{\tilde{x}}$, $y=\tilde{y}+\ln(-\tilde{x}^2)$	1
6.76	$a\neq 0,\, 1$ $b\neq 0$	I.4	$x=\tilde{x}^{\frac{1}{1-a}}$, $y=\tilde{y}+ln(-\frac{(1-a)^2}{b}\tilde{x}^{-2a})$	$\frac{2(a-1)}{a}$
6.76	$a=0$ $b\neq 0$	I.1	$x=\frac{\tilde{x}}{\sqrt{-b}}$, $y=\tilde{y}$	0
6.76	$a=1$ $b\neq 0$	I.1	$x=e^{\tilde{x}}$, $y=\tilde{y}-2\tilde{x}-ln(-b)$	0
6.77	$a=1$ $b\neq 0$	I.1	$x=e^{\tilde{x}}$, $y=\tilde{y}-ln(-b)-4\tilde{x}$	0
6.77	$a\neq 1$ $b\neq 0$	I.4	$x=\tilde{x}^{\frac{1}{1-a}}$, $y=\tilde{y}+\frac{4}{a-1}\ln\tilde{x}$	$a-1$
6.83	$a=-2$	I.1	$x=\tilde{x}$, $y=\tilde{y}+ln(\frac{\tilde{x}^2}{2})$	0
6.83	$a\neq -2$	I.4	$x=\tilde{x}$, $y=\tilde{y}+ln(-\frac{\tilde{x}^2}{a})$	$\frac{4}{a+2}$
6.110		I.1	$x=\tilde{x}$, $y=\sqrt{2}e^{-\frac{\tilde{y}}{2}}$	0
6.111		I.1	$x=\tilde{x}$, $y=\sqrt{-2}e^{-\frac{\tilde{y}}{2}}$	0

No.	параметры	тип	замена	K
6.118	$a=0$ $b\neq 0$	I.1	$x=\tilde{x}$, $y=-\frac{e^{\tilde{y}}}{b}$	0
6.118	$a=-1$ $b\neq 0$	I.1	$x=\ln\tilde{x}$, $y=-e^{\tilde{y}}\frac{\tilde{x}^2}{b}$	0
6.118	$a\neq -1,\, 0$ $b\neq 0$	I.4	$x=-\frac{\ln\tilde{x}}{a}$, $y=-e^{\tilde{y}}\frac{a^2\tilde{x}^2}{4b}$	$\frac{2a}{a+1}$
6.126	$a=-1$	I.1	$x=\tilde{x}$, $y=\sqrt{-2}e^{-\frac{\tilde{y}}{2}}$	0
6.127	$a=-1$ $b\neq 0$	I.1	$x=\tilde{x}$, $y=-\frac{e^{\tilde{y}}}{b}$	0
6.165	$c_0=c_1=c_2=c_4=0$ $a=-b,\, c_3\neq 0$	I.1	$x=\tilde{x}\sqrt{\frac{b}{c_3}}$, $y=e^{\tilde{y}}$	0
6.165	$c_3=c_1=c_2=c_4=0$ $a=-b,\, b,\, c_0\neq 0$	I.1	$x=\tilde{x}\sqrt{-\frac{b}{2c_0}}$, $y=e^{-\frac{\tilde{y}}{2}}$	0
6.172	$a=0$ $b\neq 0$	I.1	$x=\tilde{x}$, $y=-\frac{e^{\tilde{y}}}{b}$	0
6.172	$a=1$ $b\neq 0$	I.1	$x=e^{\tilde{x}}$, $y=-\frac{e^{\tilde{y}-2\tilde{x}}}{b}$	0
6.172	$a\neq 0,\, 1$ $b\neq 0$	I.4	$x=\frac{(a-1)\tilde{x}^{1/(1-a)}}{\sqrt{b}}$, $y=-\tilde{x}^{\frac{2a}{a-1}}e^{\tilde{y}}$	$\frac{2(a-1)}{a}$

Всего из 24 уравнений (с учетом различных значений параметров) 7 уравнений имеют подтип I.4, остальные 17 уравнений имеют подтип I.1.

Выводы

Таким образом, все подходящие уравнения из справочника Э.Камке [3], имеют подтип I.1 либо I.4. Интересно, что другие возможные типы уравнений в справочнике не представлены.

Для уравнений подтипа I.1 все базовые инварианты есть константы. В работе [2] доказано, что в этом случае уравнение обладает двумерной алгеброй точечных симметрий. Следовательно, все такие уравнения интегрируются. В качестве канонической формы выбрано уравнение

$$\tilde{y}''=e^{\tilde{y}}.$$

Это есть уравнение Пенлеве III с тремя нулевыми параметрами (из четырех возможных).

Для уравнений подтипа I.4 все базовые инварианты функционально зависимы. Это можно легко проверить по результатам работы [1]: в специальной системе координат $J_3 = s(x)e^{-y}$, $J_6 = J_3$, $J_9 = (s'(x))^2 e^{-3y}$, $K = (s'(x))^2/s^3(x) = k = const$. Тогда $I_3 = (J_3+1)/15$, $I_6 = J_6/5 = J_3/5$, $I_9 = J_9/1875 = kJ_3^3/1875$. Согласно работе [2] такие уравнения обладают одномерной алгеброй точечных симметрий. Тогда их порядок можно понизить и свести к дифференциальным уравнениям первого порядка. Каноническая форма таких уравнений:

$$\tilde{y}'' = e^{\tilde{y}} + \frac{4}{k\tilde{x}^2}.$$

Ожидается, что при некоторых значениях параметра k можно будет найти разрешимые случаи аналогично тому, как это сделано для уравнения Эмдена-Фаулера в работе [5].

В заключение отметим, что уравнения Типа II в справочнике [3] не представлены. Уравнений Типа III нашлось всего два.

Работа выполнена при поддержке гранта правительства РФ по договору №11.G34.31.0042.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Kartak V. V.* Equivalence classes of the second order ODEs with the constant Cartan invariant // Journal of Nonlinear Math. Physics. V.18(4). 2011. P. 613-640. See also preprint at LANL arXiv:1106.6124v1 [nlin.SI].

[2] *Sharipov R. A.* Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,y'^2 + S\,y'^3$ // Electronic archive at LANL. (Math$\dot{\text{D}}$G #9802027, 1998). 1–35.

[3] *Картак В. В., Розит А. П., Юрьева А. М.* Примеры ОДУ второго порядка с постоянным инвариантом Картана // Материалы Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. Том 1. Математика. Уфа. РИЦ БашГУ. 2011. С. 50-55.

[4] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Москва. Наука. 1976.

[5] *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. //Москва. Физматлит. 2001.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЖИВАЕМОСТИ ПАЦИЕНТОВ С ДИАГНОЗОМ «ОСТРЫЙ КОРОНАРНЫЙ СИНДРОМ»

Зубаирова И.Р., Лакман И.А., Суяргулова Д.Р., Травникова Е.О.
УГАТУ

В последние десятилетия статистика служит вспомогательным средством получения научных знаний не только в прикладных науках, но и в клинической медицине, что привело к появлению биометрии.

Современные учреждения здравоохранения в последнее время все чаще применяют методы биометрии в своей повседневной деятельности, как для постановки диагноза, так и для оптимизации лечебных мероприятий.

Целью проводимого исследования является оценка зависимости выживаемости больных, госпитализированных в городскую многопрофильную клиническую больницу с диагнозом «острый коронарный синдром» (ОКС), от дозировки назначенных медикаментов с целью оптимизации лечебных мероприятий.

Задачами исследования являются выявление зависимости смертности пациентов от выбранных медицинских показателей, построение прогнозной модели и анализ полученных результатов.

В результате клинического анализа были получены более 1000 историй болезней пациентов с диагнозом «коронарный синдром» в отделениях интенсивной терапии и реанимации кардиологического отделения городской клинической больницы №21 города Уфы, а также данные о назначении пациентам медикаментозного лечения, в частности дозировки лекарственного средства «Эгилок», которое снижает частоту сердечных сокращений. Постановка задачи, а также все данные о пациентах и назначениях были получены в ходе консультаций с врачами-кардиологами указанного выше медицинского учреждения. Из-за специфичности исходных данных (показатель смертности представляют собой бинарный ряд, а доза лекарственного средства может быть только одна) для решения поставленной задачи была выбрана модель с дискретными зависимыми переменными (бинарная модель).

$y_i = G(\beta_i x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, где $G(Z)$ – S-образная функция распределения.

$\beta_i x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} = x_i^T \beta$ так что $G(\beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} = G(x_i^T \beta)$. Мы предполагаем, что при фиксированных значениях объясняющих переменных в n наблюдениях случайные ошибки $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ статистически независимы и $E(\varepsilon_i | x_i) = 0$.

Существует 3 вида функции $G(Z)$:

1. $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ - - функция стандартного нормального распределения $N(0,1)$ (пробит-модель);
2. $\Lambda(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$ - функция стандартного логистического распределения (логит-модель);
3. $G(z) = 1 - e^{-e^z}$- функция стандартного распределения экстремальных значений (минимума) I-го типа (распределение Гомпертца, гомпит-модель).

В ходе постановки задачи мы выяснили, что лекарственное средство «Эгилок» назначают пациентам только в четырех разных дозах: 25, 50, 75 и 100 мг. Мы разбили всю совокупность на кластеры в зависимости от дозировки и построили пробит-, логит- и гомпит-модели. В результате переменные, соответствующие дозировкам в размере 75 и 100 мг, оказались незначимы по всем трем построенным моделям, и мы исключили их из исследования. По итогам анализа, наилучшие результаты дала гомпит-модель:

Dependent Variable: DEATH
Method: ML - Binary Extreme Value (Quadratic hill climbing)
Date: 09/25/12 Time: 14:38
Sample: 1 675
Included observations: 675
Convergence achieved after 3 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
EGILOK25	-1.234574	0.086305	-14.30479	0.0000
EGILOK50	-1.193781	0.094055	-12.69235	0.0000

Mean dependent var	0.031111	S.D. dependent var	0.173747
S.E. of regression	0.206391	Akaike info criterion	0.361107
Sum squared resid	28.66798	Schwarz criterion	0.374484
Log likelihood	-119.8736	Hannan-Quinn criter.	0.366287
Avg. log likelihood	-0.177591		

Obs with Dep=0	654	Total obs	675
Obs with Dep=1	21		

Опишем результаты:

- все коэффициенты при факторах с $Prob$ <0,05. Это говорит о статистической значимости коэффициентов;

- величина стандартной ошибки регрессии $S.E.ofRegression$ равна 0,206;
- значение функции максимального правдоподобия $LogLikelihood$ равно -119,8736;
- величины статистик по информационным критериям Акаики, Шварца и Ханнана-Куина равны 0,36, 0,37 и 0,366 соответственно.

Полученная модель является адекватной и статистически значимой.

$$F = -e^{-e^{-1.234574*Egilok25-1.193781*Egilok50}}$$

Оба фактора вносят существенный вклад в конечный результат

Оценка маржинального эффекта

Поскольку модель множественного выбора с неупорядоченными альтернативами является нелинейной моделью, то оцененные коэффициенты имеют другую интерпретацию, по сравнению с коэффициентами в линейной модели. Все эти модели имеют вид:

$$y_i = G(\beta_i x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}) + \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n$$

при этом:

$$P\{y_i = 1|x_i\} = E(y_i|x_i) = G(x_i^T \beta)$$

Пусть k-я объясняющая переменная является непрерывной переменной. Тогда предельный эффект ($marginaleffect$) этой переменной определяется как производная $\frac{\partial P\{y_i=1x_i\}}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial P\{x_i^T \beta\}}{\partial x_{ik}}$ и, в отличие от линейной модели, этот эффект зависит от значений объясняющих переменных для i-го субъекта $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$.

В таблице, представленной ниже, показаны маржинальные эффекты каждого из факторов, включенных в модель:

Фактор	Коэффициент	Маржинальный эффект
Elilok25	-1.234574	-0,20405
Elilok50	-1.193781	-0,15635

Маржинальный эффект показывает, насколько изменится конечный результат при изменении одного из показателей на единицу. Так наибольший маржинальный эффект у показателя $Egilok25$, -20,4

Список литературы

[1] И.Р. Зубаирова, Д.Р. Суяргулова, Е.О. Травникова, И.А. Лакман. Моделирование выживаемости пациентов с диагнозом «Острый каронарный синдром»// Интеллектуальные технологии обработки информации и управления. Том 1. – Уфа: АРКАИМ, 2012.- С. 62-64

[2] А.Ф. Мифтахова, Е.О. Травникова, В.В. Балихин, М.Э. Еникеева, Н.Ш. Загидуллин. Влияние ритма сердца на прогноз жизни при нестабильной стенокардии

[3] Носко В.П., Эконометрика для начинающих (Дополнительные главы). – М.: ИЭПП, 2005. С. 379.

[4] Aldrich J.H., F.D. Nelson (1984) Linear Probability, Logit, and Probit Models. Beverly Hills: Sage.

[5] Hosmer D.W., S. Lemeshow (1989) Applied Logistic Regression. Wiley, New York.

[6] Цыплаков А. А. Некоторые эконометрические методы. Метод максимального правдоподобия в эконометрии. Учебное пособие.

УДК 544.4

АНАЛИЗ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ СЕРОВОДОРОДА С УЧЕТОМ АДСОРБЦИИ КИСЛОРОДА И СЕРОВОДОРОДА

Исмагилова А. С., Магадиева Л. Р.
Уфа, БашГУ,Уфа, ИНК РАН

Введение

Изучение сложных химических реакций приводит к схемам с большим числом промежуточных веществ, которые невозможно подвергнуть анализу в ходе реакции. Таким образом, возникает значительная степень неопределенности при оценивании параметров математических моделей кинетики сложных реакций [1]. Более того, важно знать, какие из кинетических констант однозначно определяются по заданной структуре эксперимента, а какие определяются только в виде функциональных комбинаций, а также число независимых комбинаций и каков их явный вид.

Цель настоящей работы – исследование однозначности решения обратных задач химической кинетики в условиях, определяемых наличием погрешности экперимента на примере механизма реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции кислорода и сероводорода.

В данной работе исследован механизм реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции кислорода и сероводорода. С помощью метода определения числа и вида независимых параметрических функций (НПФ) констант [2] показано, что доступная экспериментальная информация в рассматриваемом механизме реакции позволяет определить не девять искомых кинетических констант, а только четыре их независимые параметрические функции, представляющие комбинации констант.

При решении подобного рода задач возникают сложности технического характера, которые нарастают при увеличении размерности схем. Ведутся работы по созданию математического обеспечения для компьютерного анализа идентифицируемости, имеются предварительные результаты.

Авторы признательны профессору Спиваку С.И. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 1. **Анализ идентифицируемости параметров математической модели**

Кинетичесская модель может быть представлена в виде

$$\frac{da}{dt} = f(a, k),$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ – вектор концентраций веществ, $k = (k_1, \ldots, k_s)$ – вектор кинетических констант, $f = (f_1, f_2)$ – выписываются в соответствии с законом действующих масс.

Если измеряются концентрации части веществ, то вектор концентрации можно разбить на два подвектора:

$$a = (x', y),$$

где $x' = (x'_1, \ldots, x'_{n_1})$ и $y = (y_1, \ldots, y_{n_2})$ соответствуют измеряемым и неизмеряемым веществам, $n_1 + n_2 = n$.

Концентрация неизмеряемых веществ определяется из некоторых дополнительных соотношений. Система кинетических уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x', y, k); \\ f_2(x', y, k) = 0; \\ x'(0) = x'_0. \end{cases} \tag{1}$$

Погрешность ε рассматривается как дополнительный параметр, который не входит в систему уравнений, а входит в x.

Достаточно рассматреть ситуацию, когда

$$x' = x\,(1 + \varepsilon)\,, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где ε_1 – предельная допустимая погрешность измерения.

Идея состоит в том, что ε входит в вектор определяемых параметров, который будет иметь вид:

$$k' = k'(k, \varepsilon) = (k_1, \ldots, k_s;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

В этом случае задача имеет бесконечное множество решений, определения констант не имеет смысла. Тогда решается задача определения вида НПФ, для которых локальная неидентифицируемость будет устранена.

Тогда достаточно исследовать матрицу

$$U = \left(\frac{\partial f_1}{\partial k'}\right) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial k'}\right) \tag{2}$$

явный вид которой определяется правыми частями системы (1).

Из этого следует существование ненулевой матрицы A, зависящей только от k и ε, такой что $U \cdot A \equiv 0$. Если эта матрица найдена, то базис независимых частных решений системы

$$\frac{\partial \rho}{\partial k'} \cdot A = 0,$$

где $\rho_1(k,\varepsilon),\ldots,\rho_m(k,\varepsilon)$ – система НПФ, m – число линейно независимых столбцов матрицы Якоби.

§ 2. Механизм реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции кислорода и сероводорода

Рассмотрим нелинейный относительно неизмеряемых веществ механизм реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции кислорода и сероводорода.

1)$O_2 + 2\,[K] \rightleftarrows 2\,[KO]$
2)$H_2S + [K] \rightleftarrows [KH_2S]$
3)$O_2 + 2\,[KH_2S] \to 2H_2O + [K] + [KS_2]$
4)$H_2S + [KO] \to H_2O + [KS]$
5) $[KO] + [KH_2S] \to H_2O + [KS] + [K]$
6)$2\,[KS] \to [K] + [KS_2]$
7) $[KS_2] \to S_2 + [K]$

Через $[X_1, X_2, X_3, X_4] = [O_2, H_2S, H_2O, S_2]$ обозначим исходные вещества и продукты реакции, через $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5] = [K, KO, KH_2S, KS_2KS]$ – промежуточные вещества.

1)$X_1 + 2Y_1 \rightleftarrows 2Y_2$
2)$X_2 + Y_1 \rightleftarrows Y_3$
3)$X_1 + 2Y_3 \to 2X_3 + Y_1 + Y_4$
4)$X_2 + Y_2 \to X_3 + Y_5$
5)$Y_2 + Y_3 \to X_3 + Y_5 + Y_1$
6)$2Y_5 \to Y_1 + Y_4$
7)$Y_4 \to X_4 + Y_1$

Скорость системы реакций $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{pmatrix}^T$, где

$w_1 = k_1 x_1' y_1^2 - k_{10} y_2^2$, $w_2 = k_2 x_2' y_1 - k_{20} y_3$, $w_3 = k_3 x_1' y_3^2$,$w_4 = k_4 x_2' y_2$, $w_5 = k_5 y_2 y_3$, $w_6 = k_6 y_5^2$, $w_7 = k_7 y_4$ – скорости элементарных стадий,

здесь k_i, k_{i0} – константы прямой и обратной скоростей реакций соответственно, $(1 \leqslant i \leqslant 7)$,

x_m $(1 \leqslant m \leqslant 4)$, y_n $(1 \leqslant n \leqslant 5)$ – концентрации измеряемых и неизмеряемых веществ соответственно.

Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = -w_1 - w_3,\ \frac{dx_2}{dt} = -w_2 - w_4,\ \frac{dx_3}{dt} = 2w_3 + w_4 + w_5,\ \frac{dx_4}{dt} = w_7,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -2w_1 - w_2 + w_3 + w_5 + w_6 + w_7,\ \frac{dy_2}{dt} = 2w_1 - w_4 - w_5,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = w_2 - 2w_3 - w_5,\ \frac{dy_4}{dt} = w_3 + w_6 - w_7,\ \frac{dy_5}{dt} = w_4 + w_5 - 2w_6,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = const.$$

Выпишем матрицы, входящие в выражение для U:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial k'}\right) = \begin{pmatrix} -x_1'y_1^2 & 0 & -x_1'y_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2^2 & 0 \\ 0 & -x_2'y_1 & 0 & -x_2'y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 2x_1'y_3^2 & x_2'y_2 & y_2y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}\right) = \begin{pmatrix} -k_1x_1y_1^2 - k_3x_1y_3^2 & 0 \\ 0 & -k_2x_2y_1 - k_4x_2y_2 \\ 2k_3x_1y_3^2 & k_4x_2y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} -2k_1x_1'y_1 & 2k_{10}y_2 & -2k_3x_1'y_3 & 0 & 0 \\ -k_2x_2' & -k_4x_2' & k_20 & 0 & 0 \\ 0 & k_4x_2' + k_5y_3 & 4k_3x_1'y_3 + k_5y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial k'}\right) = \begin{pmatrix} -2x_1'y_1^2 & -x_2'y_1 & -x_1'y_3^2 & 0 & y_2y_3 & y_5^2 & y_4 & 2y_2^2 & y_3 \\ 2x_1'y_1^2 & 0 & 0 & -x_2'y_2 & -y_2y_3 & 0 & 0 & -2y_2^2 & 0 \\ 0 & x_2'y_1 & -x_1'y_3^2 & 0 & -y_2y_3 & 0 & 0 & 0 & -y_3 \\ 0 & 0 & x_1'y_3^2 & 0 & 0 & y_5^2 & -y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2'y_2 & y_2y_3 & -2y_5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon}\right) = \begin{pmatrix} -2k_1x_1y_1^2 - k_3x_1y_3^2 & -k_2x_2y_1 \\ 2k_1x_1y_1^2 & -k_4x_2y_2 \\ -2k_3x_1y_3^2 & k_2x_2y_1 \\ k_3x_1y_3^2 & 0 \\ 0 & k_4x_2y_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4k_1x_1'y_1 & -4k_{10}y_2 - k_4x_2' - k_5y_3 & -k_5y_2 \\ k_2x_2' & -k_5y_3 & k_{20} - 4k_3x_1'y_3 - k_5y_2 \\ 0 & 0 & 2k_3x_1'y_3 \\ 0 & k_4x_2' + k_5y_3 & k_5y_2 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_7 & 2k_6y_5 \\ 0 & -4k_6y_5 \end{matrix}\right)$$

Матрица U имеет размерность (4×11). Ее элементы u_{ij} выглядят следующим образом.

$u_{11} = x_1' y_1^2 \left[-1 - \frac{2}{\Delta} \left(-2k_1 x_1' y_1 A_{21} + 2k_{10} y_2 A_{22} - 2k_3 x_1' y_3 A_{23}\right)\right]$,
$u_{21} = -x_1' y_1^2 \frac{2}{\Delta} \left(-k_2 x_2' A_{21} - k_4 x_2' A_{22} + k_{20} A_{23}\right)$,
$u_{31} = -x_1' y_1^2 \frac{2}{\Delta} \left[\left(k_4 x_2' + k_5 y_3\right) A_{22} + \left(4k_3 x_1' y_3 + k_5 y_2\right) A_{23}\right]$,
$u_{41} = -x_1' y_1^2 \frac{2}{\Delta} k_7 A_{24}$,
$u_{12} = -x_2' y_1 \frac{1}{\Delta} \left(-2k_1 x_1' y_1 A_{31} + 2k_{10} y_2 A_{32} - 2k_3 x_1' y_3 A_{33}\right)$,
$u_{22} = -x_2' y_1 \left[1 + \frac{1}{\Delta} \left(k_2 x_2' A_{31} - k_4 x_2' A_{32} + k_{20} A_{33}\right)\right]$,
$u_{32} = -x_2' y_1 \frac{1}{\Delta} \left[\left(k_4 x_2' + k_5 y_3\right) A_{32} + \left(4k_3 x_1' y_3 + k_5 y_2\right) A_{33}\right]$,
$u_{42} = -x_2' y_1 \frac{1}{\Delta} k_7 A_{34}$,
$u_{13} = -x_1' y_3^2 [1 + \frac{1}{\Delta}(-2k_1 x_1' y_1 \left(A_{41} - A_{31}\right) + 2k_{10} y_2 \left(A_{42} - A_{32}\right) -$
$-2k_3 x_1' y_3 \left(A_{43} - A_{33}\right))]$,
$u_{23} = -x_1' y_3^2 \frac{1}{\Delta} \left[-k_2 x_2' \left(A_{41} - A_{31}\right) - k_4 x_2' \left(A_{42} - A_{32}\right) + k_{20} \left(A_{43} - A_{33}\right)\right]$,
$u_{33} = x_1' y_3^2 [2 - \frac{1}{\Delta}((k_4 x_2' + k_5 y_3) \left(A_{42} - A_{32}\right) +$
$+ \left(4k_3 x_1' y_3 + k_5 y_2\right) \left(A_{43} - A_{33}\right))]$,
$u_{43} = -x_1' y_3^2 \frac{1}{\Delta} k_7 \left(A_{44} - A_{34}\right)$,
$u_{14} = -x_2' y_2 \frac{1}{\Delta} [-2k_1 x_1' y_1 \left(A_{51} - A_{21}\right) + 2k_{10} y_2 \left(A_{52} - A_{22}\right) -$
$-2k_3 x_1' y_3 \left(A_{53} - A_{23}\right)]$,
$u_{24} = -x_2' y_2 [1 + \frac{1}{\Delta} (-k_2 x_2' (A_{51} - A_{21}) - k_4 x_2' \left(A_{52} - A_{22}\right) +$
$+k_{20} \left(A_{53} - A_{23}\right)]$,
$u_{34} = x_2' y_2 [1 - \frac{1}{\Delta}((k_4 x_2' + k_5 y_3) \left(A_{52} - A_{22}\right) +$
$+ \left(4k_3 x_1' y_3 + k_5 y2\right) \left(A_{53} - A_{23}\right))]$,
$u_{44} = -x_2' y_2 \frac{1}{\Delta} k_7 (A_{54} - A_{24})$,
$u_{15} = -y_2 y_3 \frac{1}{\Delta} [-2k_1 x_1' y_1 \left(A_{51} - A_{21} - A_{31}\right) + 2k_{10} y_2 \left(A_{52} - A_{22} - A_{32}\right) -$
$-2k_3 x_1' y_3 \left(A_{53} - A_{23} - A_{33}\right)]$,
$u_{25} = y_2 y_3 \frac{1}{\Delta} [-k_2 x_2' \left(A_{51} - A_{21} - A_{31}\right) - k_4 x_2' \left(A_{52} - A_{22} - A_{32}\right) +$
$+k_{20} \left(A_{53} - A_{23} - A_{33}\right)]$,
$u_{35} = y_2 y_3 [1 - \frac{1}{\Delta}((A_{52} - A_{22} - A_{32}) \left(k_4 x_2' + k_5 y_3\right) +$
$+ \left(A_{53} - A_{23} - A_{33}\right) \left(4k_3 x_1' y_3 + k_5 y_2\right))]$,
$u_{45} = -y_2 y_3 \frac{1}{\Delta} k_7 \left(A_{54} - A_{24} - A_{34}\right)$,
$u_{16} = -y_5^2 \frac{1}{\Delta} [-2k_1 x_1' y_1 \left(A_{41} - 2A_{51}\right) + 2k_{10} y_2 \left(A_{42} - 2A_{52}\right) -$
$-2k_3 x_1' y_3 \left(A_{43} - 2A_{53}\right)]$,
$u_{26} = -y_5^2 \frac{1}{\Delta} [-k_2 x_1' \left(A_{41} - 2A_{51}\right) - k_4 x_2' \left(A_{42} - 2A_{52}\right) +$
$+k_{20} \left(A_{43} - 2A_{53}\right)]$,

$u_{36} = -y_5^2\frac{1}{\Delta}[(k_4x_2' + k_5y_3)(A_{42} - 2A_{52}) +$
$+ (4k_3x_1'y_3 + k_5y_2)(A_{43} - 2A_{53})],$
$u_{46} = -y_5^2\frac{1}{\Delta}k_7(A_{44} - 2A_{54}),$
$u_{17} = y_4\frac{1}{\Delta}(2k_1x_1'y_1A_{41} + 2k_{10}y_2A_{42} - 2k_3x_1'y_3A_{43}),$
$u_{27} = y_4\frac{1}{\Delta}(-k_2x_2'A_{41} - k_4x_2'A_{42} + k_{20}A_{43}),$
$u_{37} = y_4\frac{1}{\Delta}[A_{42}(k_4x_2' + k_5y_3) + A_{43}(4k_3x_1'y_3 + k_5y_2)],$
$u_{47} = y_4\left(1 + \frac{1}{\Delta}k_7A_{44}\right),$
$u_{18} = y_2^2\left[1 + \frac{2}{\Delta}(-2k_1x_1'y_1A_{21} + 2k_{10}y_2A_{22} - 2k_3x_1'y_3A_{23})\right],$
$u_{28} = y_2^2\frac{2}{\Delta}(-k_2x_2'A_{21} - k_4x_2'A_{22} + k_{20}A_{23}),$
$u_{38} = y_2^2\frac{2}{\Delta}[A_{22}(k_4x_2' + k_5y_3) + A_{23}(4k_3x_1'y_3 + k_5y_2)],$
$u_{48} = y_2^2\frac{2}{\Delta}k_7A_{24},$
$u_{19} = y_3\frac{1}{\Delta}(-2k_1x_1'y_1A_{31} + 2k_{10}y_2A_{32} - 2k_3x_1'y_3A_{33}),$
$u_{29} = y_3\left[1 + \frac{1}{\Delta}(-k_2x_2'A_{31} - k_4x_2'A_{32} + k_{20}A_{33})\right],$
$u_{39} = y_3\frac{1}{\Delta}[A_{32}(k_4x_2' + k_5y_3) + A_{33}(4k_3x_1'y_3 + k_5y_2)],$
$u_{49} = y_3\frac{1}{\Delta}k_7A_{34},$
$u_{1,10} = \frac{k_1u_{11}+k_3u_{13}}{1+\varepsilon_1}, \quad u_{2,10} = \frac{k_1u_{21}+k_3u_{23}}{1+\varepsilon_1},$
$u_{3,10} = \frac{k_1u_{31}+k_3u_{33}}{1+\varepsilon_1}, \quad u_{4,10} = \frac{k_1u_{41}+k_3u_{43}}{1+\varepsilon_1},$
$u_{1,11} = \frac{k_4u_{14}+k_2u_{12}}{1+\varepsilon_2}, \quad u_{2,11} = \frac{k_4u_{24}+k_2u_{22}}{1+\varepsilon_2},$
$u_{3,11} = \frac{k_4u_{34}+k_2u_{32}}{1+\varepsilon_2}, \quad u_{4,11} = \frac{k_4u_{44}+k_2u_{42}}{1+\varepsilon_2},$
где A_{ij}, $(1 \leqslant i \leqslant 4,\ 1 \leqslant j \leqslant 11)$ – алгебраические дополнения матрицы $\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)$.

Матрица связей A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+\varepsilon_2) \end{pmatrix}$$

Получим два уравнения:

$$k_1\frac{\partial \rho_1}{\partial k_1} + k_{10}\frac{\partial \rho_1}{\partial k_{10}} = 0,$$

$$k_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial k_2} + k_{20} \frac{\partial \rho_2}{\partial k_{20}} = 0,$$

$$k_1 \frac{\partial \rho_3}{\partial k_1} + k_3 \frac{\partial \rho_3}{\partial k_3} - (1 + \varepsilon_1) \frac{\partial \rho_3}{\partial \varepsilon_1} = 0,$$

$$k_2 \frac{\partial \rho_4}{\partial k_2} + k_4 \frac{\partial \rho_4}{\partial k_4} - (1 + \varepsilon_2) \frac{\partial \rho_4}{\partial \varepsilon_2} = 0,$$

частное решение которых можно представить системой

$$\rho_1 = \frac{k_1 + k_{10}}{k_1 k_{10}}, \quad \rho_2 = \frac{k_2 + k_{20}}{k_2 k_{20}},$$

$$\rho_3 = \frac{k_1 + k_3}{k_1 k_3 (1 + \varepsilon_1)}, \quad \rho_4 = \frac{k_2 + k_4}{k_2 k_4 (1 + \varepsilon_2)}.$$

Таким образом, в механизме реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции кислорода и сероводорода можно определить четыре независимые НПФ. Первые две функции в точности такие же, когда предполагается отсутствие погрешности в концентрациях исходных веществ. Зависимость от ε отражается в последних двух функциях.

Работа выполнена в рамках исследований по Российскому фонду фундаментальных исследований, проект № 11-01-97020.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Спивак С.И., Исмагилова А.С.* Математические модели химической кинетики: Учебное пособие. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2010. – 98 с.

[2] *Спивак С.И., Исмагилова А.С.* Информативность кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики // Журнал Средневолжского математического общества. 2009. Т.11. №2. С.131-136.

УДК 514.7

НОРМАЛИ К ПОВЕРХНОСТИ ВДОЛЬ ЛИНИИ КРИВИЗНЫ

Камалова И.Р., Юрьев В.А.
Уфа, БашГУ

Постановка задачи

Нормали к поверхности вдоль линии кривизны.

Найдем условие того, что линейчатая поверхность является развертывающейся поверхностью. Возьмем кривую $\vec{r}$ (s) вдоль которой отложен единичный вектор $\vec{m}$

$$\vec{R}(s,t) = \vec{r}(s) + t * \vec{m}(s), \tag{1}$$

Найдем вектор нормали. Для этого продифференцируем радиус-вектор поверхности $\vec{R}(s,t)$ по s и t.

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial s} = \vec{r'}(s) + t * \vec{m}'(s), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \vec{m}'(s). \tag{3}$$

Тогда вектор нормали будет:

$$\vec{N}(s,t) = [\vec{r'}(s), \vec{m}(s)] + t * [\vec{m'}(s), \vec{m}(s)] \tag{4}$$

Развертывающаяся поверхность характеризуется тем, что вектор нормали не меняет своего направления. Дадим определение развертывающейся поверхности.

Определение 1. Огибающие семейства плоскостей называются развертывающимися поверхностями.

Лемма 1. *(о векторе постоянного направления).Коллинеарность вектора и его производной необходима и достаточна для того, чтобы этот вектор сохранял неизменным свое направление.*

Продифференцируем $\vec{N}(s,t)$ по t :

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = [\vec{m}', \vec{m}] \tag{5}$$

Если $\vec{R}(s,t)$ развертывающаяся поверхность, то вектор $\vec{N}(s,t)$ не меняет своего направления в зависимости от t, то есть должно быть векторное произведение $[\vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}] = 0$ (по лемме 1).

Найдем векторное произведение:

$$[\vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}] = [[\vec{r'}, \vec{m}] + t * [\vec{m'}, \vec{m}], [\vec{m'}, \vec{m}]] = [[\vec{r'}, \vec{m}], [\vec{m'}, \vec{m}]] + t * [[\vec{m'}, \vec{m}], [\vec{m'}, \vec{m}]] =$$

$$= |[[\vec{m'}, \vec{m}], [\vec{m'}, \vec{m}]] = 0, [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c})| =$$
$$[[\vec{r'}, \vec{m}], [\vec{m'}, \vec{m}]] =$$
$$= \vec{m}(\vec{r'}, \vec{m'}, \vec{m}) - \vec{r'}(\vec{m}, \vec{m'}, \vec{m}) = \vec{m}(\vec{r'}, \vec{m'}, \vec{m}) = 0,$$

$\vec{m}$ - не нулевой вектор, тогда условие необходимое и достаточное для того, что вектор $\vec{m}$ образует развертывающуюся поверхность вдоль кривой $\vec{r}(s)$:

$$(\vec{r'}, \vec{m'}, \vec{m}) = 0 \tag{6}$$

Нормаль и линии кривизны на поверхности характеризуются условием

$$[d\vec{n}, \tau] = 0 \tag{7}$$

это есть условие экстремальности нормальной кривизны, тогда

$$(\vec{n}, \vec{n'}, \vec{r'}) = 0 \tag{8}$$

Полагая $\vec{n} = \vec{m}$ делаем вывод: нормаль к линии кривизны образует развертывающуюся поверхность. Обратно(из определения).

Определение 2.

Линия кривизны это линия, где нормальная кривизна принимает экстремальное значение.

$$(\vec{r''}, \vec{n}) = k_n, \tag{9}$$

экстремаль

$$(\vec{r''}, \vec{n}) + (\vec{r'}, \vec{n'}) = 0,$$
$$k_n = -(\vec{r'}, \vec{n'}),$$
$$k_n = -|\vec{r'}| * |\vec{n'}| * \cos(\alpha),$$

k_n будет экстремальным, когда $\cos(\alpha) = \pm 1$.

То есть,когда векторы $\vec{r'}$ и $\vec{n'}$ коллинеарны.

Таким образом условие характеризующее линию кривизны на поверхности будет

$$(\vec{n}, \vec{n'}, \vec{r'}) = 0, \tag{10}$$

Это же условие справедливо и не для единичного вектора нормали вдоль линии

$$(\vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds}, \frac{d\vec{r}}{ds}) = 0, \tag{11}$$

Пусть дана поверхность

$$r = r(u, v), \tag{12}$$

где аргумент u есть аргумент линии кривизны на поверхности, v параметр семейства линий.

Таким образом на поверхности имеем семейство линий кривизны зависящих от параметра v.

Пусть $\vec{N}(u, v)$ нормаль к поверхности (12), тогда вдоль u линии, то есть линией кривизны выполняется условие

$$(\vec{N}, \frac{d\vec{N}}{du}, \frac{d\vec{r}}{du}) = 0 \tag{13}$$

Найдем огибающую нормалей вдоль этой линии. Уравнение нормалей имеет вид:

$$\vec{R}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) + t * \vec{N}(u, v) \tag{14}$$

Вдоль огибающей этих нормалей касательный вектор огибающей должен быть коллинеарен $\vec{N}(u, v)$.

Пусть $\vec{R}(u, v, t(u)) = \vec{\rho}(u, v)$ огибающая этих нормалей.

$$[\frac{\partial\vec{\rho}(u, v)}{\partial u}, \vec{N}(u, v)] = 0 \tag{15}$$

Найдем $\frac{\partial\vec{\rho}(u,v)}{\partial u}$

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial u} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial\vec{t}}{\partial u} * \vec{N}(u, v) + t * \frac{\partial\vec{N}}{\partial u}$$

Подставляя в (15) получим :

$$[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \vec{N}] + t * [\frac{\partial\vec{N}}{\partial u}, \vec{N}] = 0 \tag{16}$$

Решим это уравнение векторным способом . В силу (13) запишем

$$\frac{\partial\vec{N}}{\partial u} = \alpha * \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \beta * \vec{N},$$

где

$$\alpha = \frac{(\vec{N}_u, \vec{r}_u)}{\vec{r}_u^2}; \beta = \frac{(\vec{N}_u, \vec{N})}{\vec{N}^2}$$

Найденное значение подставляем в (16)

$$[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\vec{N}]+t*[\alpha*\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}+\beta*\vec{N},\vec{N}]=0$$

или

$$[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\vec{N}]+t*\alpha*[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\vec{N}]=0,$$

то есть запишем

$$(1+t*\alpha)*[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\vec{N}]=0$$

Так как векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{N}$ не коллинеарны на поверхности, то $1+t*\alpha=0$

$$\vec{t}(u)=-\frac{\vec{r}_u^2}{(\vec{N}_u,\vec{r}_u)}$$

То есть мы нашли "расстояние"от точки поверхности до огибающей нормалей.

$$\vec{\rho}(u,v)=\vec{r}(u,v)+\vec{t}(u,v)*\vec{N}(u,v),$$

$$\vec{\rho}(u,v)=\vec{r}(u,v)-\frac{\vec{r}_u^2}{(\vec{N}_u,\vec{r}_u)}*\vec{N}(u,v)$$

или учитывая, что

$$\frac{(\vec{N}_u,\vec{r}_u)}{|\vec{N}_u|}=-b_{11}(u,v);\vec{r}_u^2=g_{11}(u,v),$$

где $g_{11}(u,v),b_{11}(u,v)$ коэффициенты первой и второй квадратичной форм соответственно.

Окончательно запишем

$$\vec{\rho}(u,v)=\vec{r}(u,v)+\frac{g_{11}(u,v)}{b_{11}(u,v)}*\vec{n}(u,v) \tag{17}$$

это и есть огибающая поверхность семейства всех нормалей $\vec{N}(u,v)$к поверхности $\vec{r}(u,v)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии.//-Москва:Гос.изд-во физико математической лит-ры,1958-244 с.

[2] *Щербаков Р. Н.* Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.// - Томск, 1971-236 с.

[3] *Фиников С.П.* Дифференциальная геомтерия.// - Москва:Изд-во Моск.ун-та, 1961.

УДК 517.9

ПОЛНЫЙ СПИСОК ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА ИЗ СПРАВОЧНИКА Э.КАМКЕ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЯМ ПЕНЛЕВЕ I И II

Картак В. В., Тошмуродова Д. Р., Юрьева А. М.
Уфа, БашГУ

Введение

Перед нами была поставлена задача составления полного списка ОДУ второго порядка из справочника по дифференциальным уравнениям Э. Камке [1], эквивалентных уравнениям Пенлеве I и Пенлеве II относительно точечных замен переменных

$$PI: \qquad y'' = 6y^2 + x, \qquad\qquad PII: \qquad y'' = 2y^3 + xy + a. \tag{1}$$

Критерий эквивалентности приведен в статье В. Картак [2]. Согласно терминологии Р. Шарипова, составившего классификацию ОДУ второго порядка [3], уравнение Пенлеве I относится к седьмому случаю промежуточного вырождения, а уравнение Пенлеве II – к первому случаю с базовыми инвариантами $I_1 = 18/5$, $I_2 = 0$, подробнее см. работу [4].

В работе С. Тимофеевой [5] была проведена классификация всех уравнений вида

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3 \tag{2}$$

из справочника [1] в соответствии с работой [3]. Оказалось, что к седьмому случаю промежуточного вырождения относятся 7 уравнений (6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.21, 6.23). К первому случаю промежуточного вырождения с дополнительными условиями $I_1 = 18/5$, $I_2 = 0$ относятся 13 уравнений (6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.24, 6.91, 6.140, 6.141, 6.142, 6.143, 6.145, 6.148). Также этому случаю относятся 12 уравнений, зависящих от параметров, для которых условие $I_1 = 18/5$ выполнено при некоторых специальных значениях этих параметров (6.11 $n = 3$, 6.12 $n = 1$, $a \neq 0$, 6.26 $n = 3$, $b \neq 0$, 6.27 $n = 3$, $b \neq 0$, 6.58 $b = 3$, $c = 0$, $k \neq 0$ или $b = 3$, $c = 3$, $k \neq 0$, 6.73 $n = 3$, 6.74 $n = 3$, $a \neq 0$, 6.82 $n = 3$, $a \neq 0$, 6.96 $n = 3$, $a \neq 0$, 6.102 $n = -2$, 6.126 $a = -2$, 6.127 $a = -1/2$). (Здесь использовались также результаты работы [6]). Вместе они составляют список уравнений, для которых выполнены *необходимые* условия эквивалентности их уравнениям (1).

В данной работе уравнения из этого списка были проверены на выполнение *достаточных* условий. По итогам проверки был составлен список уравнений, эквивалентных уравнениям Пенлеве I (всего 2 уравнения) и Пенлеве II (всего 5 уравнений), также получены в явном виде замены, приводящие эти уравнения к каноническому виду (1).

§ 1. **Список уравнений, для которых выполнены необходимые условия эквивалентности**

Список уравнений из справочника [1], для которых выполнены необходимые условия эквивалентности уравнению Пенлеве I (1):

6.1 $\quad y'' = y^2$

6.2 $\quad y'' = 6y^2$

6.3 $\quad y'' = 6y^2 + x$ уравнение Пенлеве I

6.4 $\quad y'' = 6y^2 - 4y$

6.5 $\quad y'' = -ay^2 - bx - c, \quad a \neq 0$

6.21 $\quad y'' = 3y' + y^2 + 2y$

6.23 $\quad y'' = -5ay' + 6y^2 - 6a^2y, \quad a \neq 0$

Список уравнений из справочника [1], для которых выполнены необходимые условия эквивалентности уравнению Пенлеве II (1):

6.6 $\quad y'' = 2y^3 + xy + a$ уравнение Пенлеве II

6.7 $\quad y'' = ay^3,\ a \neq 0$

6.8 $\quad y'' = 2a^2y^3 - 2abxy + b,\ a \neq 0$

6.9 $\quad y'' = -ay^3 - bxy - cy - d,\ a \neq 0$

6.10 $\quad y'' = -ay^3 - by^2 - cy - d,\ a,\ b \neq 0$

6.24 $\quad y'' = -3ay' + 2y^3 - 2a^3y$

6.91 $\quad y'' = -\dfrac{ay^3}{9x^2} - \dfrac{2y}{9x^2},\ a \neq 0$

6.140 $\quad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + 4y^2$

6.141 $\quad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + 4y^2 + 2y$

6.142 $\quad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + 4y^2 + 2xy$

6.143 $\quad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} - \dfrac{ay^2}{2} - \dfrac{by}{2},\ a \neq 0$

6.145 $\quad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} - \dfrac{ay^2}{2} - \dfrac{bxy}{2},\ a \neq 0$

6.148 $\quad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} - \dfrac{3fy'}{2} + 4y^2 - (f' + f^2)y,\ f = f(x)$

Список уравнений из справочника [1], для которых выполнены необходимые условия эквивалентности уравнению Пенлеве II (1) при специальных значениях параметров:

6.11 $\quad y'' = -ax^m y^n, \quad n = 3$ уравнение Эмдена-Фаулера

6.12 $\quad y'' = -(n+1)a^{2n}y^{2n+1} + y, \quad n = 1,\ a \neq 0$

6.26 $\quad y'' = -ay' - by^n - \dfrac{a^2-1}{4}y, \quad n = 3,\ b \neq 0$

6.27 $\quad y'' = -ay' - bx^m y^n, \quad n = 3,\ b \neq 0$

6.58 $\quad y'' = kx^a y^b y'^c, \quad b = 3,\ (c = 0)$ или $(c = 3),\ k \neq 0$

6.73 $\quad y'' = -\dfrac{2}{x}y' + y^n, \quad n = 3$

6.74 $\quad y'' = -\dfrac{2}{x}y' - ax^{m-1}y^n, \quad n = 3,\ a \neq 0$

6.82 $\quad y'' = a\dfrac{y^n - y}{x^2}, \quad n = 3,\ a \neq 0$

6.96 $\quad y'' = -\dfrac{a^2 y^n}{x^4}, \quad n = 3,\ a \neq 0$

6.102 $\quad y'' = \dfrac{y^{\frac{2n+1}{n+1}}}{x^{\frac{n}{n+1}}}, \quad n = -2$

6.126 $\quad y'' = -\dfrac{a(y'^2+1)}{y}, \quad a = -2$

6.127 $\quad y'' = -\dfrac{ay'^2}{y} - by^2, \quad a = -\dfrac{1}{2},\ b \neq 0$

§ 2. **Полный список уравнений, эквивалентных уравнениям Пенлеве I и II**

Критерий эквивалентности содержится в следующих двух теоремах, доказательство см. [2]. Здесь I_1, I_2, J, I_6 и I_9 - инварианты (инварианты I_1 и I_2 разные в Теореме 1 и в Теореме 2), F, Ω, N, W, V, Θ, L_1 псевдоинварианты, $(B,\ -A)$ - псевдовекторное поле. Формулы для их вычислений через коэффициенты уравнения (2) содержатся в работах [2], [3].

Теорема 1. *Уравнение вида (2) эквивалентно уравнению Пенлеве I (1) относительно точечных замен переменных тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1) $F = 0$, но $A \neq 0$ или $B \neq 0$, 2) $\Omega = 0$, 3) $N = 0$, 4) $W = 0$, 5) $V = 0$, 6) $\Theta \neq 0$, 7) $L_1 \neq 0$, 8) инварианты I_1 и I_2 функционально не зависимы. Замена переменных задается формулой*

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt[5]{12I_1}}, \qquad \tilde{y} = \pm\frac{\sqrt{I_2}}{\sqrt[5]{12^3}\,\sqrt[10]{I_1}}.$$

Условиям Теоремы 1 удовлетворяют уравнения 6.3 (само уравнение Пенлеве I) и уравнение 6.5 при $b \neq 0$. Последнее уравнение линейной заменой переменных приводится к каноническому виду:

$$\tilde{x} = \frac{a^{\frac{1}{5}}(bx+c)}{6^{\frac{1}{5}}b^{\frac{4}{5}}}, \quad \tilde{y} = \frac{a^{\frac{3}{5}}y}{6^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} \quad \rightarrow \quad \tilde{y}'' = 6\tilde{y}^2 + \tilde{x}.$$

Теорема 2. *Произвольное уравнение вида (2) эквивалентно уравнению Пенлеве II (1) с параметром $a = \pm J = const$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства 1) $F = 0$, но $A \neq 0$ или $B \neq 0$, 2) $\Omega = 0$ (что равносильно $I_2 = 0$), 3) $M \neq 0$, 4) $I_1 = 18/5$, 5) инварианты I_6 и I_9 функционально не зависимы. Явный вид замены переменных задается формулой*

$$\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt[6]{2500I_9}}, \qquad \tilde{x} = \frac{5I_6}{\sqrt[6]{2500I_9}} - \frac{3}{2}J\sqrt[6]{2500I_9}.$$

Условиям Теоремы 2 удовлетворяют уравнения 6.6 (само уравнение Пенлеве II), уравнения 6.8 при $b \neq 0$, 6.9 при $b \neq 0$, 6.142, 6.145 при $b \neq 0$. Из уравнений второго списка подходит только уравнение 6.27 при $m \neq 0$, $b \neq 0$, для него $\tilde{a} = J = 0$.

6.8 $\quad \tilde{a} = \frac{1}{2},\ \tilde{x} = -(2ab)^{\frac{1}{3}}x,\ \tilde{y} = \frac{a^{\frac{2}{3}}y}{(2b)^{\frac{1}{3}}} \quad \rightarrow \quad \tilde{y}'' = 2\tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{a}$

6.9 $\quad \tilde{a} = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{-2b^2}},\ \tilde{x} = \frac{bx+c}{(-b^2)^{\frac{1}{3}}},\ \tilde{y} = \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{2}(-b^2)^{\frac{1}{6}}}$

6.142 $\quad \tilde{a} = 0,\ \tilde{x} = x,\ \tilde{y} = \sqrt{y} \quad \rightarrow \quad \tilde{y}'' = 2\tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y}$

6.145 $\quad \tilde{a} = 0,\ \tilde{x} = \frac{bx}{2^{\frac{1}{3}}(-b^2)^{\frac{1}{3}}},\ \tilde{y} = \frac{\sqrt{ay}}{2^{\frac{7}{6}}(-b^2)^{\frac{1}{6}}}$

6.27 $$\tilde{x} = \frac{8a^2x^2 + 2max - 6m - m^2}{2^{\frac{4}{3}}(8a^3x^3 - 6ma^2x^2 - 3am(m+3)x + m(m+3)(m+6))^{\frac{2}{3}}},$$

$$\tilde{y} = \frac{3y\sqrt{b}(-x)^{\frac{m+2}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}(8a^3x^3 - 6ma^2x^2 - 3am(m+3)x + m(m+3)(m+6))^{\frac{1}{3}}}$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358 "Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики".

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Москва. Наука. 1976.

[2] *Картак В. В.* Явное решение проблемы эквивалентности для некоторых уравнений Пенлеве // Уфимский математический журнал. Т.1. № 3. С. 46–56.

[3] *Sharipov R. A.* Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,{y'}^2 + S\,{y'}^3$ // Electronic archive at LANL. (Math$\dot{\text{D}}$G #9802027, 1998). 1–35.

[4] *Kartak V. V.* Point classification of the second order ODE's by Ruslan Sharipov and its application to Painleve equations // Electronic archive at LANL. arXiv:1204.0174. 2012. Pp. 1–14.

[5] *Тимофеева С.В.* Тестирование и обработка результатов программного модуля „Классификатор“ на базе данных ОДУ второго порядка из справочника Э.Камке // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании. Тезисы докладов Международной школы-конференции. Уфа. РИЦ БашГУ. 2012. С. 221.

[6] *Картак В.В., Розит А.П., Юрьева А.М.* Примеры ОДУ второго порядка с постоянным инвариантом Картана // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании. Материалы Международной школы-конференции. Т.1. Математика. Уфа. РИЦ БашГУ. 2011. С. 50-54.

УДК 517.956

ВОЗМУЩЕНИЕ КРАТНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ПРИ ПЕРФОРАЦИИ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

Кожевников Д. В.
Уфа, БГПУ им.М.Акмуллы

§ 1. **Постановка задачи и основное утверждение**

Пусть Ω – ограниченная область, лежащая в верхней полуплоскости, ее граница Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, $\Gamma_2 \in C^\infty$ и в окрестности концов отрезка Γ_1 совпадает с прямыми $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$, B — двумерная область, симметричная относительно оси Ox_2 и лежащая в круге радиуса $a < \frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\partial B \in C^\infty$. Обозначим $\varepsilon := \frac{1}{2N+1}$, где $1 \ll N \in \mathbb{N}$, $B_\varepsilon^j := \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon := \bigcup\limits_j B_\varepsilon^j$, $\Gamma_\varepsilon := \partial B_\varepsilon$, $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$.

Следующее утверждение было доказано в [1].

Лемма 1. *Пусть кратность собственного значения λ_0 задачи*

$$-\Delta u_0 = \lambda_0 u_0 \ \text{ в } \Omega, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \Gamma_2, \qquad u_0 = 0 \ \text{ на } \Gamma_1 \tag{1}$$

равна p. Тогда есть ровно p собственных значений задачи

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{ в } \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{ на } \Gamma_\varepsilon. \tag{2}$$

(с учетом кратности) сходящихся к λ_0, при $\varepsilon \to 0$.

Здесь и всюду далее ν — вектор внешней нормали.

В [2] были построены двучленная асимптотика собственного значения возмущенной краевой задачи (2), сходящегося к простому собственному значению λ_0 предельной краевой задачи (1).

В настоящей работе рассматривается случай, когда кратность λ_0 равна n. Пусть $u_0^{(l)}$ $(l = 1, ..., n)$ собственные функции задачи (1), соответствующие λ_0 и ортонормированные в $L_2(\Omega)$. То есть

$$\int\limits_\Omega (u_0^{(i)})^2 \, dx = 1, \quad \int\limits_\Omega u_0^{(i)} u_0^{(j)} \, dx = 0, \quad i \neq j. \tag{3}$$

Легко заметить, что собственные функции могут быть выбраны с учетом дополнительного условия ортогональности на Γ_1:

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial \nu} \frac{\partial u_0^{(j)}}{\partial \nu} \, ds = 0, \quad i \neq j. \tag{4}$$

Для упрощения изложения также будем считать, что

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 \neq \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u_0^{(j)}}{\partial x_2} \right)^2 dx_1, \quad i \neq j. \tag{5}$$

Пусть $\Pi = \{\xi : -\frac{1}{2} < \xi_1 < \frac{1}{2},\ \xi_2 > 0\}$ — полуполоса, $\gamma = \{\xi : -\frac{1}{2} < \xi_1 < \frac{1}{2},\ \xi_2 = 0\}$. Следующая лемма была доказана в [2].

Лемма 2. *Краевая задача*

$$\begin{cases} \Delta_\xi X = 0 \text{ в } \Pi \backslash \overline{B}, \\ \quad X = 0 \text{ на } \partial B, \qquad \dfrac{\partial X}{\partial \xi_2} = 0 \text{ на } \gamma, \qquad \dfrac{\partial X}{\partial \xi_1} = 0 \text{ при } \xi_1 = \pm \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет чётное по ξ_1 решение с асимптотикой

$$\begin{aligned} X(\xi) &= \xi_2 + C(B) + O(e^{-2\pi \xi_2}) \quad \text{при} \quad \xi_2 \to +\infty, \\ C(B) &= \int\limits_{\Pi \backslash \overline{B}} |\nabla Y|^2 d\xi + |F| > 0, \quad Y(\xi) = X(\xi) - \xi_2. \end{aligned}$$

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть кратность собственного значения λ_0 задачи (1) равна n, функции $u_0^{(l)}$ выбраны в соответствии с (4) и выполнено условие (5). Тогда асимптотики собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ задачи (2), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$ имеют вид:*

$$\lambda_\varepsilon^{(l)} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(l)} + o\left(\varepsilon^{\frac{3}{2} - \sigma}\right) \;\; \text{для любого } \sigma > 0, \tag{6}$$

$$\lambda_1^{(l)} = -C(B) \int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial \nu} \right)^2 ds, \tag{7}$$

а для собственных функций $u_\varepsilon^{(l)}$ имеет место сходимость:

$$\left\| u_\varepsilon^{(l)} - u_0^{(l)} \right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \to 0 \;\; \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{8}$$

Замечание. Из равенств (7), (6), (4), в частности, следует, что все собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ являются простыми. Отметим также, что в [1] было доказано лишь то, что из любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ можно выделить подпоследовательность ε_{k_m} такую, что

$$\left\| u_{\varepsilon_{k_m}}^{(l)} - u_*^{(l)} \right\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon_{k_m}})} \to 0 \ \text{ при } k_m \to \infty,$$

где $u_*^{(l)}$ – ортонормированные собственные функции задачи (1), соответствующие λ_0, которые зависят от выбора как последовательности, так и от выбора подпоследовательности. Из теоремы же следует, что при условии (4) имеет место сходимость (8).

§ 2. **Построение асимптотик**

Для построения асимптотики собственных значений, сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$, и асимптотики соответствующих собственных функций будем использовать метод согласования асимптотических разложений (см. [3], а также [2]). Асимптотику собственного значения будем искать в виде:

$$\lambda_\varepsilon^{(l)} \approx \widehat{\lambda}_\varepsilon^{(l)} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(l)}, \tag{9}$$

а асимптотику соответствующей собственной функции вне малой окрестности участка границы Γ_1 в виде:

$$u_\varepsilon^{(l)}(x) \approx \widehat{u}_\varepsilon^{(l)}(x) = u_0^{(l)}(x) + \varepsilon u_1^{(l)}(x). \tag{10}$$

В силу краевой задачи (1) справедливо равенство

$$u_0^{(l)}(x) = \alpha_0^{(l)}(x_1)x_2 + O(x_2^3) \quad \text{при } x_2 \to 0, \tag{11}$$

$$\alpha_0^{(l)}(x_1) = \frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial x_2}(x_1, 0) \in C^\infty \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \tag{12}$$

$$\frac{d^{2j+1}\alpha_0^{(l)}}{dx_1^{2j+1}} \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Будем искать $u_1^{(l)}(x)$ такими, чтобы они удовлетворяли задачам

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{(l)} = \lambda_0 u_1^{(l)} + \lambda_1^{(l)} u_0^{(l)} \ \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \Gamma_2, \quad u_1^{(l)} = \alpha_1^{(l)}(x_1) \ \text{ на } \Gamma_1, \end{cases} \tag{13}$$

где $\alpha_1^{(l)}(x_1)$, — пока неизвестные (произвольные) функции.

Замечание. Уравнения задачи (13) и граничные условия вне Γ_1 получаются подстановкой сумм (9) и (10) в задачу (1) и формальным приравниванием коэффициентов при степени ε первого порядка.

Замечание. Внешним разложением (10) мы будем пользоваться вне некоторой малой окрестности Γ_1, поэтому выбираются граничные условия на Γ_1 пока произвольными.

Из граничных условий (13) вытекает, что

$$u_1^{(l)}(x) = \alpha_1^{(l)}(x_1) + O(x_2), \quad \text{при } x_2 \to 0. \tag{14}$$

В [4] показано, что условие разрешимости для краевой задачи (13) в силу (3), (4) имеет вид:

$$\lambda_1^{(l)} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_1^{(l)}(x_1) \frac{\partial u_0^{(l)}(x_1,0)}{\partial \nu}\, dx_1, \quad l = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Поскольку функция $\widehat{u}_\varepsilon^{(l)}(x)$ не удовлетворяет требуемым в задаче (2) граничным условиям на Γ_1 и Γ_ε, то в малой окрестности границы Γ_1 будем строить другое приближение функции $u_\varepsilon^{(l)}(x)$.

Из (10), (11) и (14) следует, что

$$\widehat{u}_\varepsilon^{(l)}(x) = \alpha_0^{(l)}(x_1)x_2 + \varepsilon\alpha_1^{(l)}(x_1) + O(x_2^3 + \varepsilon x_2) \quad \text{при } x_2 \to 0.$$

Сделав в этом равенстве замену $\xi_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$, получаем, что

$$\widehat{u}_\varepsilon^{(l)}(x) = \varepsilon V_1^{(l)}(\xi; x_1) + O\left(\varepsilon^3\xi_2^3 + \varepsilon^2\xi_2\right) \quad \text{при} \quad x_2 = \varepsilon\xi_2 \to 0, \tag{16}$$

$$V_1^{(l)} = \alpha_0^{(l)}(x_1)\xi_2 + \alpha_1^{(l)}(x_1). \tag{17}$$

Следуя методу согласования асимптотических разложений, заключаем, что внутреннее разложение должно иметь структуру

$$u_\varepsilon^{(l)}(x) \approx \widehat{v}_\varepsilon^{(l)}(x) = \varepsilon v_1^{(l)}(\xi; x_1), \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{18}$$

$$v_1(\xi; x_1) \sim V_1(\xi_2; x_1) \quad \text{при} \quad \xi_2 \to +\infty. \tag{19}$$

Переписав уравнение и граничные условия в координатах ξ, подставив (18) и (9) в (2) и собрав члены при минимальной степени ε , получаем задачу на $v_1^{(l)}$:

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_1^{(l)} = 0 \quad \text{в} \ \Pi \backslash \overline{B}, \\ v_1^{(l)} = 0 \quad \text{на} \ \partial B, \quad \dfrac{\partial v_1^{(l)}}{\partial \xi_2} = 0 \quad \text{на} \ \gamma, \\ \dfrac{\partial v_1^{(l)}}{\partial \xi_1}(\xi; \pm\dfrac{1}{2}) = 0 \quad \text{при} \ \xi_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{20}$$

В силу леммы 2 функция

$$v_1^{(l)}(\xi; x_1) = \alpha_0^{(l)}(x_1) X(\xi) \tag{21}$$

является 1-периодическим по ξ_1 решением задачи (20), имеющим асимптотику вида

$$v_1^{(l)}(\xi; x_1) = \alpha_0^{(l)}(x_1)(\xi_2 + C(B)) + O(e^{-2\pi\xi_2}) \ \text{при} \ \xi_2 \to +\infty.$$

Поэтому, полагая

$$\alpha_1^{(l)}(x_1) = C(B)\alpha_0^{(l)}(x_1), \tag{22}$$

получим, что $v_1^{(l)}$ определенная как (21) удовлетворяет (19) и (17).

И, наконец, из (15), (22) и (12) следует (7).

Обоснование построенной асимптотики аналогично [2], [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гадыльшин Р. Р., Королева Ю. О. Чечкин Г. А.* О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 665–677.

[2] *Гадыльшин Р. Р., Королева Ю. О. Чечкин Г. А.* Об асимптотике простого собственного значения краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. // Диф. ур. 2011. Т. 47. № 6. С. 822–831.

[3] *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

[4] *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "лёгких" концентрированных масс. Двумерный случай. // Изв. РАН. Серия матем. 2005. Т. 69. № 4. С. 161–204.

[5] *Amirat Y., Chechkin G. A., Gadyl'shin R. R.* Asymptotic aproximation of eigenelements of the Dirichlet problem for the Laplacian in Domain in a domain with shoots // Mathematical Methods in the Applied Scienses. 2010. V. 33 . P. 811–830.

УДК 517.9

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ I

Костригина О. С.
Уфа, УГАТУ

Введение

В работе рассматриваются кольца Ли характеристических векторных полей уравнения Пенлевé I

$$u_{yy} = 6u^2 + y. \tag{1}$$

Для определения характеристического кольца Ли обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрим гиперболическую систему уравнений (см. [1])

$$u^i_{xy} = F^i(x, y, u, u_x, u_y), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; u = (u^1, u^2, \ldots, u^n). \tag{2}$$

Введем набор независимых переменных $u_1 = u_x, \; \bar{u}_1 = u_y, \; u_2 = u_{xx}, \; \bar{u}_2 = u_{yy}, \ldots$ и обозначим через $\bar{D}(D)$ — оператор полного дифференцирования по переменной y (x).

Определение 3. Функция $\omega = \omega(x, y, u, u_1, \ldots, u_m)$ называется $x-$интегралом $m-$го порядка системы уравнений (2), если $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial u^i_m} \right)^2 \neq 0$ и $\bar{D}\omega = 0$. Аналогично, $\bar{\omega} = \bar{\omega}(x, y, u, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p)$ – $y-$интеграл $p-$го порядка системы уравнений (2), если $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{u}^i_p} \right)^2 \neq 0$ и $D\bar{\omega} = 0$.

Обозначим через $\Im$ пространство локально аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа переменных $x, y, \bar{u}_1, u, u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$. Оператор $\bar{D}$ на функциях из $\Im$ действует по правилу

$$\bar{D} = \bar{u}^i_2 X_i + X_{n+1},$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_1}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}^i_1 \frac{\partial}{\partial u^i} + F^i \frac{\partial}{\partial u^i_1} + D(F^i) \frac{\partial}{\partial u^i_2} + \ldots + D^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial u^i_k} + \ldots.$$

$X-$характеристическое кольцо Ли уравнений (2) есть кольцо A, порожденное векторными полями $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Аналогично определяется $y-$характеристическое кольцо Ли $\bar{A}$.

Отметим, что понятие характеристического векторного поля для гиперболических уравнений впервые ввел в рассмотрение Э.Гурса в работе [2].

Обозначим через L_n – линейное пространство коммутаторов образующих длины n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Например, L_1 – линейная оболочка векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ а L_2 порождается операторами $X_{ij} = [X_i, X_j]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$ и т.д. Тогда $x-$кольцо представимо в виде $A = \sum_{i=1}^{\infty} L_i$. Для $y-$характеристического кольца $\bar{A}$ имеем представление $\bar{A} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{L}_i$.

В статье [3] была высказана гипотеза о том, что размерности линейных пространств L_i ($\bar{L}_i$) для интегрируемых уравнений растут очень медленно. В дальнейшем эта гипотеза была подтверждена многочисленными примерами интегрируемых непрерывных и дискретных моделей. Свойство минимальности роста кольца стало рассматриваться в качестве классификационного критерия для интегрируемых уравнений. Из работы [4] следует, что это свойство кольца является столь же универсальным свойством интегрируемых уравнений, как наличие бесконечной иерархии высших симметрий.

Понятие характеристического кольца Ли для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_y^i = f^i(x, y, u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; u = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \tag{3}$$

было введено в статье [5]. В этой работе были предложены два определения характеристического кольца системы (3). Для того чтобы привести первое из этих определений, предположим, что решение u зависит от параметра x. Тогда дифференцированием по параметру x уравнений (3) получим систему уравнений

$$u_{xy}^i = f_x^i + f_{u^k}^i u_x^k, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

$x-$ и $y-$характеристические кольца Ли гиперболической системы уравнений (4) называются характеристическими кольцами исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3).

Другой способ определения характеристического кольца системы (3) основан на замене

$$u^i = \frac{\partial p^i}{\partial x}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

при которой система уравнений (3) принимает вид

$$p_{xy}^i = f^i(x, y, p_x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; p = (p^1, p^2, \ldots, p^n). \tag{5}$$

В этом случае x и $y-$характеристические кольца гиперболической системы (5) будем считать кольцами Ли системы дифференциальных уравнений (3).

В настоящей работе исследуются характеристические кольца Ли систем уравнений (4) и (5), соответствующие уравнению Пенлевé I. Показано, что эти кольца Ли являются кольцами медленного роста. А именно, для системы (4) размерность $y-$кольца равна четырем, а для $x-$кольца показано, что $dimL_1 = 3,\ dimL_k = 1,\ k = 2,3,4,5,6,\ dim\sum_{i=1}^{6} L_i = 8$. Для системы уравнений (5), соответствующей уравнению Пенлевé I, показано, что размерность $x-$кольца равна трем, а для $y-$кольца справедливы формулы $dim\bar{L}_1 = 3,\ dim\bar{L}_n = n,\ n = 2,3,4;\ dim\bar{L}_5 \leq 5$.

Кольца Ли уравнения Пенлевé I

Запишем уравнение (1) в виде следующей системы

$$u_y = v, \quad v_y = 6u^2 + y.$$

Тогда соответствующие гиперболические системы уравнений (4) и (5) примут вид

$$u_{xy} = v_x, \quad v_{xy} = 12uu_x \tag{6}$$

и

$$p_{xy} = q_x, \quad q_{xy} = 6p_x^2 + y\ (u = p_x, \quad v = q_x). \tag{7}$$

$Y-$характеристическое кольцо системы (6) порождается операторами

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u_1},\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial v_1},$$

$$Y_3 = u_1\left(\frac{\partial}{\partial u} + 12u\frac{\partial}{\partial \bar{v}_1} + 12u\frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} + 12\bar{u}_1\frac{\partial}{\partial \bar{v}_2} + \ldots\right) + \\ + v_1\left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} + 12u\frac{\partial}{\partial \bar{v}_2} + \ldots\right).$$

Ясно, что $Y_3 = u_1Y_{13} + v_1Y_{23}$ и операторы $Y_1,\ Y_2,\ Y_{13},\ Y_{23}$ образуют базис $y-$ характеристического кольца. Таким образом, размерность $y-$кольца равна 4. При этом система уравнений (6) имеет два $y-$интеграла первого порядка:

$$\bar{\omega} = \bar{u}_1 - v,\ \bar{w} = \bar{v}_1 - 6u^2.$$

Рассмотрим $x-$характеристическое кольцо. Оператор полного дифференцирования по переменной y в пространстве функций зависящих от набора переменных $u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ имеет вид

$$\bar{D} = \bar{u}_1X_1 + \bar{v}_1X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial v},$$
$$X_3 = \left(v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots \right) +$$
$$+12 \left(u u_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + (u u_2 + u_1^2) \frac{\partial}{\partial v_2} + (u u_3 + 3 u_1 u_2) \frac{\partial}{\partial v_3} + \ldots \right).$$

Поскольку операторы D и $\bar{D}$ коммутируют, то имеем

$$\begin{gathered}[\bar{D}, D] F(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots) = \\ = (D(\bar{u}_1 X_1 + \bar{v}_1 X_2 + X_3) - (\bar{u}_1 X_1 + \bar{v}_1 X_2 + X_3) D) F = \\ = (\bar{u}_1 [X, X_1] + \bar{v}_1 [X, X_2] + [X, X_3] + v_1 X_1 + 12 u u_1 X_2) F = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $X-$это оператор полного дифференцирования по переменной x в пространстве функций зависящих от переменных $u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$

$$X = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + v_1 \frac{\partial}{\partial v} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial v_1} + \ldots.$$

Для оператора X справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть векторное поле Z имеет вид*

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\delta_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \epsilon_i \frac{\partial}{\partial v_i} \right),$$

$$\delta_i = \delta_i(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{n_i}, v_{n_i}),\ \epsilon_i = \epsilon_i(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{k_i}, v_{k_i}).$$

Тогда равенство $[X, Z] = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $Z = 0$.

Из (8) следуют соотношения

$$[X, X_1] = 0,\ [X, X_2] = 0,\ [X, X_3] = -v_1 X_1 - 12 u u_1 X_2. \tag{9}$$

Легко видеть, что размерность линейного пространства L_1 ($L_1 = L \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$) равна трем.

Так как коэффициенты векторного поля X_3 не зависят от переменной v, то коммутатор $X_{23} = 0$. А коммутатор X_{13} имеет вид

$$X_{13} = 12 \left(u_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial v_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial v_3} + u_4 \frac{\partial}{\partial v_4} + \ldots \right).$$

Таким образом $dim L_2 = 1$. При этом

$$[X, X_{13}] = -[X_3, [X, X_1]] + [X_1, [X, X_3]],$$

или учитывая (9) будем иметь

$$[X, X_{13}] = [X_1, -v_1X_1 - 12uu_1X_2],$$

то есть

$$[X, X_{13}] = -12u_1X_2. \tag{10}$$

Из вида операторов $X_1,\ X_2,\ X_3$ и X_{13} следует, что коммутаторы X_{113} и X_{213} нулевые, а коммутатор X_{313} имеет вид

$$X_{313} = 12\left(v_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial v_2} + \dots\right) - 12\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots\right).$$

Учитывая формулы (9), (10) получаем

$$\begin{gathered}[X, X_{313}] = -[X_{13}, [X, X_3]] + [X_3, [X, X_{13}]] = \\ = -[X_{13}, -v_1X_1 - 12uu_1X_2] + [X_3, -12u_1X_2],\end{gathered}$$

или

$$[X, X_{313}] = 12u_1X_1 - 12v_1X_2. \tag{11}$$

Покажем, что операторы $X_3,\ X_{13}$ и X_{313} линейно независимы. Действительно, если они являются линейно зависимыми, то существуют функции $\alpha,\ \beta$ переменных $u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots$ такие, что $X_{313} = \alpha X_3 + \beta X_{13}$. Последнее равенство, в силу леммы 1, эквивалентно следующему

$$[X, X_{313}] = X(\alpha)X_3 + X(\beta)X_{13} + \alpha[X, X_3] + \beta[X, X_{13}].$$

Или, учитывая (9), (10), (11) имеем

$$12u_1X_1 - 12v_1X_2 = X(\alpha)X_3 + X(\beta)X_{13} + \alpha(-v_1X_1 - 12uu_1X_2) + \beta(-12u_1X_2).$$

Приравнивая коэффициенты при независимых операторах X_1 и X_3, получаем систему уравнений

$$X(\alpha) = 0,\ 12u_1 = -v_1\alpha.$$

Из первого равенства следует, что $\alpha = const$. Последнее протеворечит второму уравнению. Следовательно, операторы $X_3,\ X_{13}$ и X_{313} линейно независимы и $dim L_3 = 1$.

Линейное пространство L_4 порождается операторами $X_{1313},\ X_{2313}$ и X_{3313}. При этом, нетрудно видеть, что $X_{1313} = X_{2313} = 0$, а коммутатор X_{3313} имеет вид

$$X_{3313} = -24v_1\frac{\partial}{\partial u_1} + 288uu_1\frac{\partial}{\partial v_1} + \dots.$$

Используя формулы (9), (11), находим

$$[X, X_{3313}] = -[X_{313}, [X, X_3]] + [X_3, [X, X_{313}]] =$$
$$= -[X_{313}, -v_1 X_1 - 12uu_1 X_2] + [X_3, 12u_1 X_1 - 12v_1 X_2],$$

следовательно

$$[X, X_{3313}] = 24v_1 X_1 - 288uu_1 X_2 - 12u_1 X_{13}. \qquad (12)$$

Покажем, что операторы $X_3,\ X_{13},\ X_{313}$ и X_{3313} линейно независимы. Предположим от противного, что $X_{3313} = \alpha X_3 + \beta X_{13} + \delta X_{313}$, где $\alpha,\ \beta,\ \delta$ есть функции переменных $u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$. Согласно лемме 1 и формулам (9) - (12), имеем

$$24v_1 X_1 - 288uu_1 X_2 - 12u_1 X_{13} = X(\alpha) X_3 + X(\beta) X_{13} + X(\delta) X_{313} +$$
$$+\alpha(-v_1 X_1 - 12uu_1 X_2) + \beta(-12u_1 X_2) + \delta(12u_1 X_1 - 12v_1 X_2).$$

Приравнивая в полученном соотношении коэффициенты при операторах $X_3,\ X_{313},\ X_1$ и $X_2,\ X_{13}$, получаем

$$X(\alpha) = 0,\ X(\delta) = 0,\ \ 24v_1 = -v_1\alpha + 12u_1\delta,$$
$$-288uu_1 = -12uu_1\alpha - 12u_1\beta - 12v_1\delta,\ -12u_1 = X(\beta).$$

Из первых трех уравнений следует, что $\alpha = -24,\ \delta = 0$. Подставляя найденные значения α и δ в четвертое уравнение, находим, что $\beta = 48u$. Последнее протеворечит условию $-12u_1 = X(\beta)$. Следовательно $dim L_4 = 1$.

Пространство L_5 есть линейная оболочка коммутаторов X_{13313}, X_{23313}, X_{33313}, $[X_{13}, X_{313}]$. Используя тождество Якоби а также формулы (10) - (12), можно показать справедливость следующих формул

$$[X, X_{13313}] = -288u_1 X_2,\ [X, X_{23313}] = 0,\ [X, [X_{13}, X_{313}]] = -288u_1 X_2.$$

Тогда, в силу леммы 1 и равенства (10), получаем

$$X_{13313} = 24X_{13},\ X_{23313} = 0,\ [X_{13}, X_{313}] = 24X_{13}.$$

В свою очередь, для оператора X_{33313} имеем

$$[X, X_{33313}] = -[X_{3313}, [X, X_3]] + [X_3, [X, X_{3313}]] =$$
$$= -[X_{3313}, -v_1 X_1 - 12uu_1 X_2] + [X_3, 24v_1 X_1 - 288uu_1 X_2 - 12u_1 X_{13}].$$

Преобразуя последнее уравнение приходим к равенству

$$[X, X_{33313}] = 576uu_1 X_1 - 576uv_1 X_2 - 60v_1 X_{13} - 12u_1 X_{313},$$

с помощью которого получаем, что операторы $X_3,\ X_{13},\ X_{313},\ X_{3313}$ и X_{33313} линейно независимы и следовательно $dimL_5 = 1$.

Наконец, рассмотрим пространство L_6, котороеророждается операторами $X_{133313}, X_{233313}, X_{333313}, [X_{13}, X_{3313}]$. Нетрудно проверить справедливость следующих формул

$$X_{233313} = 0,\ X_{133313} = 48X_{313},\ [X_{13}, X_{3313}] = 24X_{313},$$
$$[X, X_{333313}] = 1152uv_1X_1 + 6912u^2u_1X_2-$$
$$-1296uu_1X_{13} - 120v_1X_{313} - 12u_1X_{3313}.$$

Как и выше, можно доказать, что операторы $X_3,\ X_{13},\ X_{313},\ X_{3313}$ и X_{333313} являются линейно независимыми и $dimL_6 = 1$.

Таким образом, мы показали, что

$$dimL_k = 1,\ k = 2, 3, 4, 5, 6;\ \ dim\sum_{i=1}^{n} L_i = 8,\ n = 6.$$

По-видимому, последние формулы справедливы для любого k и n, а именно

$$dimL_k = 1,\ k \geq 2;\ \ dim\sum_{i=1}^{n} L_i = n + 2,$$

и $x-$кольцо системы уравнений (6) является кольцом медленного роста.

Для системы (7) $x-$характеристическое кольцо Ли порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial p},\ \ X_2 = \frac{\partial}{\partial q},\ \ X_3 = \frac{\partial}{\partial y} + q_1\frac{\partial}{\partial p_1} + (6p_1^2 + y)\frac{\partial}{\partial q_1} + \dots .$$

Поскольку $[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$, то размерность $x-$кольца равна трем. При этом $x-$интегралы $\omega = \omega(y, p_1, q_1)$ и $w = w(y, p_1, q_1)$ определяются из уравнения в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + q_1\frac{\partial}{\partial p_1} + (6p_1^2 + y)\frac{\partial}{\partial q_1}\right) F = 0.$$

Отметим, что $\omega = const$ и $w = const$ задают интегралы исходного уравнения (1).

$Y-$характеристическое кольцо Ли системы уравнений (7) задается векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial p_1},\ \ Y_2 = \frac{\partial}{\partial q_1},$$
$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + p_1\frac{\partial}{\partial p} + q_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1} + (6p_1^2 + y)\frac{\partial}{\partial \lambda_2} + (12p_1q_1 + 1)\frac{\partial}{\partial \lambda_3} + \dots ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{p}_i} + \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{i-1}},\ i = 1, 2, \ldots.$$

Легко видеть, что векторные поля $Y_1,\ [Y_1, Y_3],\ [Y_1, [Y_1, Y_3]], [Y_1, [Y_1, [Y_1, Y_3]]], \ldots$ линейно независимы и следовательно $y-$кольцо бесконечномерно.

Для $y-$кольца системы уравнений (7) показано, что $dim\bar{L}_1 = 3,\ dim\bar{L}_n = n,\ n = 2, 3, 4;\ dim\bar{L}_5 \leq 5$. По-видимому, можно сделать предположение о справедливости следующих формул

$$dim\bar{L}_k \leq k,\ k \geq 6,\quad dim\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{L}_i\right) \leq \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 2.$$

Таким образом, $y-$кольцо системы (7) является кольцом медленного роста.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 8499, а также РФФИ (грант 11-01-97005-р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *O. S. Kostrigina and A. V. Zhiber* Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic systems of equations // J. Math. Phys. 52, 033503 (2011); doi:10.1063/1.3559134 (32 pages).

[2] *Goursat E.* Recherches sur quelques *é*quations aux d*é*riv*é*es partielles du second ordre, Annales de la facult*é* des Sciences de I'Universit*é* de Toulouse 2^e s*é*rie, tome 1, n^0 1 (1899) p.31-78.

[3] *Жибер А.В., Муртазина Р.Д.* Характеристические алгебры Ли для уравнения $u_{xy} = f(u, u_x)$ //ФПМ. Гамильтоновы и лагранжевы системы. Алгебры Ли. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 65 - 78.

[4] *Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристические кольца Ли и интегрируемые модели математической физики // Уфимский математический журнал. – 2012 – Том 4. – № 3. – С. 17 - 85.

[5] *Гюрсер М., Жибер А.В., Хабибуллин И.Т.* Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал. – 2012 – Том 4. – № 1. – С. 53 - 62.

УДК 517

ОЦЕНКА ВТОРОЙ ПОПРАВКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА КВАДРАТЕ

Нугаева И. Г., Уразбаева Э. Р., Фазуллин З. Ю.

Уфа, БашГУ

Введение

В настоящей работе изучается вопрос об оценке второй поправки теории возмущений для ограниченного возмущения задачи Дирихле оператора Лапласа на квадрате $K = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Рассмотрим оператор $H = H_0 + V$, где $H_0 = -\Delta$ - оператор Лапласа, V - оператор умножения на ограниченную измеримую вещественную функцию из класса $W_2^2[K]$, H_0 - невозмущенный оператор. $\{\lambda_s\}_{s=1}^{+\infty}$ - собственные числа оператора Лапласа, занумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей,$\{\bar{\lambda}_s\}_{s=1}^{+\infty}$ - собственные значения, пронумерованные без учета кратностей, такие что $\bar{\lambda}_s < \bar{\lambda}_{s+1}$. $\{f_s\}_{s=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис из собственных функций оператора Лапласа. Через $\{\mu_s\}_{s=1}^{+\infty}$ обозначим собственные числа оператора $H = H_0 + V$, занумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей.

Хорошо известно [3], что :

$$\lambda_s = \lambda_{km} = k^2 + m^2,$$

$$f_s(x_1, x_2) = f_{km}(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \sin kx_1 \cdot \sin mx_2, \qquad k, m = 1, 2...$$

причем для собственных чисел оператора H при $n \gg 1$ справедлива формула [2]:

$$\mu_n = \lambda_n + (Vf_n, f_n) + \alpha_n + \beta_n,$$

где α_n - вторая поправка теории возмущений и согласно [1]

$$\alpha_n = \sum_{s \neq n} \frac{SpP_n V P_s V P_n}{\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}_s} = \sum_{j=1}^{\nu_n} \sum_{\lambda_{km} \neq \lambda_{k_j m_j}} \frac{|Vf_{km} f_{k_j m_j}|^2}{\lambda_{km} - \lambda_{k_j m_j}},$$

$$\lambda_{k_1 m_1} = ... = \lambda_{k_j m_j} = \bar{\lambda}_n$$

где $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение в $L^2(K)$, P_n - проекторы на собственные подпространства, соответствующие собственному значению $\bar{\lambda}_n$ кратности ν_n.

§ 1. **Оценка второй поправки теории возмущений**

Основным результатом этой работы является

Теорема 1. *Пусть* $V(x_1, x_2) \in W_2^2(K)$ *и* $\|V\| \leq \frac{1}{2}$, *тогда при* $n \gg 1$ *справедлива следующая оценка:*

$$\alpha_n = O(\frac{\nu_n}{\bar{\lambda}_n}),$$

где ν_n *- кратность* $\bar{\lambda}_n$

Доказательство. Поскольку

$$(Vf_{km}f_{k_jm_j}) = \int_0^\pi \int_0^\pi V(x_1, x_2)(\cos(k-k_j)x_1 - \cos(k+k_j)x_1) \times$$

$$\times(\cos(m-m_j)x_2 - \cos(m+m_j)x_2)dx_1dx_2).$$

Раскрывая скобки правой части последнего соотношения получим интегралы вида:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi V(x_1, x_2)\cos(k \pm k_j)x_1 \cos(m \pm m_j)x_2 dx_1dx_2$$

Если $V \in W_2^2(K)$, то оценим интегралы, в которых есть хотя бы один плюс в аргумента косинуса. Применяя интегрирование по частям дважды по переменным x_1 и x_2, получим:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi V(x_1, x_2)\cos(k + k_j)x_1 \cos(m \pm m_j)x_2 dx_1dx_2 =$$

$$= O(\frac{1}{(m \pm m_j)^2(k+k_j)^2})$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi V(x_1, x_2)\cos(k - k_j)x_1 \cos(m + m_j)x_2 dx_1dx_2 =$$

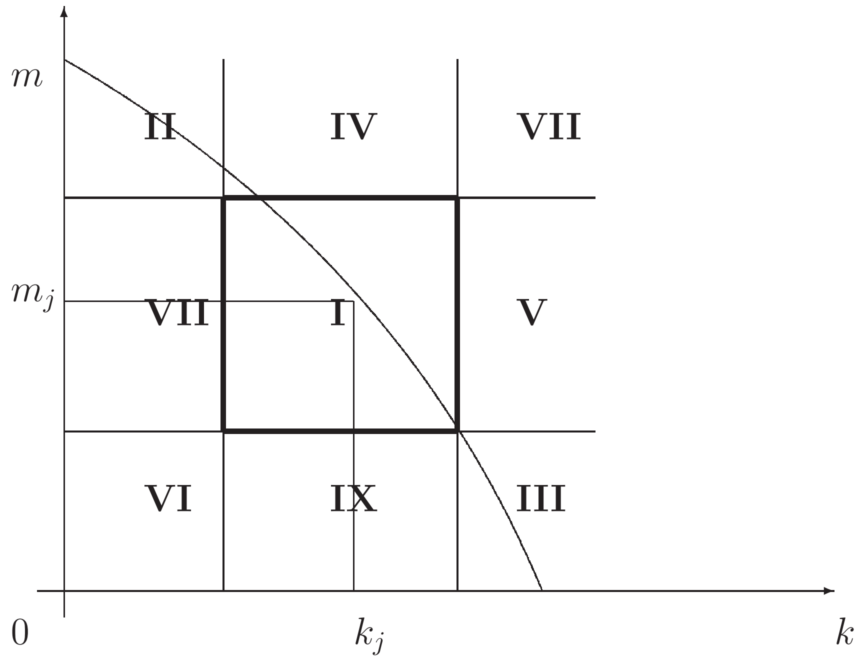
$$= O(\frac{1}{(m + m_j)^2(k-k_j)^2})$$

Следовательно, при $\bar{\lambda}_n = \lambda_{k_j m_j} \gg 1$ для α_n главным членом является следующее выражение, которое обозначим через $\alpha_n^{'}$:

$$\alpha_n^{'} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\nu_n} \sum \sum_{\lambda_{km} \neq \lambda_{k_j m_j}} \frac{(\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi V(x_1,x_2)\cos(k-k_j)x_1 \cos(m-m_j)x_2 dx_1 dx_2)^2}{(k-k_j)(k+k_j)+(m-m_j)(m+m_j)},$$

.

Для оценки $\alpha_n^{'}$ разобьем область $\{(k,m)|k \geq 1, m \geq 1\}$ на девять областей, учитывая, что по условию $\bar{\lambda}_n = \lambda_{k_j m_j} \gg 1$, $j = 1...\nu_n$, $|k-k_j| = \left[k_j^\delta\right]$, где $0 < \delta < 1$, $|m-m_j| = \left[m_j^\gamma\right]$, где $0 < \gamma < 1$.



I) Оценим в области I. Для этого обозначим: $k - k_j = l$, $\qquad m - m_j = q$, тогда

$$k + k_j = l + 2k_j, \qquad m + m_j = q + 2m_j$$

$$a_{m-m_j k-k_j} = a_{ql} = (\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi V(x_1,x_2)\cos lx_1 \cos qx_2 dx_1 dx_2)^2$$

Здесь

$$\alpha_n^{'} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{k=k_j-[k_j^\delta]}^{k_j+[k_j^\delta]} \sum_{m=m_j-[m_j^\gamma]}^{m_j+[m_j^\gamma]} \frac{a_{ql}}{(k-k_j)(k+k_j)+(m-m_j)(m+m_j)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^4}\sum_{q=1}^{[m_j^\gamma]}\sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} a_{ql}[\frac{1}{l(l+2k_j)+q(q+2m_j)} + \frac{1}{l(l+2k_j)-q(-q+2m_j)} -$$

$$-\frac{1}{l(l-2k_j)-q(q+2m_j)} - \frac{1}{l(-l+2k_j)+q(-q+2m_j)}].$$

Рассмотрим первое и четвертое слагаемые в квадратных скобках:

$$\frac{1}{l(l+2k_j)+q(q+2m_j)} - \frac{1}{l(-l+2k_j)+q(-q+2m_j)} =$$

$$= \frac{1}{2k_jl(1+\frac{l}{2k_j})+2m_jq(1+\frac{q}{2m_j})} - \frac{1}{2k_jl(1-\frac{l}{2k_j})+2m_jq(1-\frac{q}{2m_j})}$$

Обозначим:

$$\frac{l}{2k_j} = x, \qquad \frac{l}{2m_j} = y$$

Тогда получим функцию от двух переменных:

$$f(x,y) = \frac{1}{2k_jl(1+x)+2m_jq(1+y)} - \frac{1}{2k_jl(1-x)+2m_jq(1-y)}.$$

Заметим, что $f(0,0)=0$. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2k_jl}{(2k_jl(1+x)+2m_jq(1+y))^2} + \frac{-2k_jl}{(2k_jl(1-x)+2m_jq(1-y))^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2k_jq}{(2k_jl(1+x)+2m_jq(1+y))^2} + \frac{-2k_jq}{(2k_jl(1-x)+2m_jq(1-y))^2}$$

Используя формулу Тейлора, имеем:

$$f(x,y) = \frac{-4k_jlx-4m_jqy}{(2k_jl+2m_jq)^2} + O(\frac{1}{(2k_jl+2m_jq)^3})$$

Аналогично рассматривая второе и третье слагаемые, получим функцию двух переменных:

$$g(x,y) = \frac{1}{2k_jl(1+x)-2m_jq(1-y)} - \frac{1}{2k_jl(1-x)-2m_jq(1+y)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2k_jl}{(2k_jl(1+x)-2m_jq(1-y))^2} + \frac{-2k_jl}{(2k_jl(1-x)-2m_jq(1+y))^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2k_jq}{(2k_jl(1+x)-2m_jq(1-y))^2} + \frac{-2k_jq}{(2k_jl(1-x)+2m_jq(1+y))^2}$$

$$g(x,y) = \frac{-4k_jlx-4m_jqy}{(2k_jl-2m_jq)^2} + O(\frac{1}{(2k_jl-2m_jq)^3})$$

Тогда для главного члена асимптотики $\alpha_n^{'}$ получим:

$$\alpha_n^{''} = \frac{-2}{\pi^4} \sum_{q=1}^{[m_j^\gamma]} \sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} a_{ql} [\frac{l^2+q^2}{(2k_j l + 2m_j q)^2} + \frac{l^2+q_2}{(2k_j l - 2m_j q)^2}].$$

Теперь рассмотрим

$$a_{ql} = (\int_0^\pi \int_0^\pi V(x_1, x_2) \cos lx_1 \cos qx_2 dx_1 dx_2)^2$$

Интегрируем по частям по переменным x_1 и x_2 и устанавливаем оценку:

$$a_{ql} \leq \frac{C}{l^2 q^2}.$$

$$\alpha_n^{''} \leq \sum_{q=1}^{[m_j^\gamma]} \sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} \frac{C}{l^2 q^2} [\frac{l^2+q^2}{(2k_j l + 2m_j q)^2} + \frac{l^2+q^2}{(2k_j l - 2m_j q)^2}].$$

Поскольку k_j и m_j целые числа, можем записать $k_j = Mm_j$, где $M \in \mathbb{Q}$ и $M > 0$. Таким образом рассмотрим три случая:

1) $M \gg 1$, то есть $k_j \gg m_j$;

2) $M \ll 1$, то есть $k_j \ll m_j$;

3) $a \leq M \leq b$ (то есть M ограничено).

$$1) \alpha_n^{''} \leq -\sum_{q=1}^{[m_j^\gamma]} \sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} \frac{C}{l^2 q^2} [\frac{l^2+q^2}{4k_j^2 (l + \frac{m_j}{k_j} q)^2} + \frac{l^2+q^2}{4k_j^2 (l - \frac{m_j}{k_j} q)^2}] \leq \frac{C}{k_j^2}$$

Аналогично рассматриваем второй и третий случаи:

$$2) \alpha_n^{''} \leq -\sum_{q=1}^{[m_j^\gamma]} \sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} \frac{C}{l^2 q^2} [\frac{l^2+q^2}{4m_j^2 (q + \frac{k_j}{m_j} l)^2} + \frac{l^2+q^2}{4m_j^2 (q - \frac{k_j}{m_j} l)^2}] \leq \frac{C}{m_j^2}$$

$$3) \alpha_n^{''} \leq -\sum_{q=1}^{[m_j^\gamma]} \sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} \frac{C}{l^2 q^2} [\frac{l^2+q^2}{(2k_j l + 2m_j q)^2} + \frac{l^2+q^2}{(2k_j l - 2m_j q)^2}] =\leq \frac{C_1}{m_j^2},$$

где

$$C_1 = C \frac{a^2+1}{a^2-1},$$

при условии, что $a \neq \pm 1$.

II)Теперь оценим области II, сохраняя прежние обозначения.

Здесь:

$$\alpha_n^{'} \leq \sum_{k=1}^{k_j-[k_j^{\delta}]} \sum_{m=m_j+[m_j^{\gamma}]}^{\infty} (\frac{C}{(k-k_j)^4(m-m_j)^4} \times$$

$$\times \frac{1}{(k-k_j)(k+k_j)+(m-m_j)(m+m_j)}) \leq$$

$$\leq \frac{k_j-[k_j^{\delta}]}{[k_j^{\delta}]} \sum_{q=[m_j^{\gamma}]}^{\infty} \frac{C}{q^4(-[k_j^{\delta}](k_j+1)+q(q+2m_j))} \leq$$

$$\leq \frac{C}{m_j^{1+4\gamma-\varepsilon}} \leq \frac{C}{m_j^2},$$

при $\gamma \geq \frac{1+\varepsilon}{4}$ поскольку для этой области $k_j \ll m_j$.

III)Область III симметрична области II, поэтому оценка будет аналогичной:

$$\alpha_n^{'} \leq \frac{C}{k_j^{1+4\delta-\varepsilon}} \leq \frac{C}{k_j^2},$$

при $\delta \geq \frac{1+\varepsilon}{4}$

IV)В области IV перейдем к переменным q и l и получим

$$\alpha_n^{'} \leq \sum_{l=1}^{[k_j^{\delta}]} \sum_{q=[m_j^{\gamma}]}^{\infty} \frac{C}{l^2q^2} [\frac{1}{l(l+2k_j)+q(q+2m_j)} +$$

$$+ \frac{1}{-l(-l+2k_j)+q(q+2m_j)}]$$

Возможны три случая:

1) $M \gg 1$, то есть $k_j \gg m_j$;

2) $M \ll 1$, то есть $k_j \ll m_j$;

3) $a \leq M \leq b$ (то есть M ограничено).

$$1)\alpha_n^{'} \leq \sum_{l=1}^{[k_j^{\delta}]} \sum_{q=[m_j^{\gamma}]}^{\infty} \frac{C}{l^2q^2} [\frac{1}{l^2+q^2+2k_j(l+\frac{1}{M}q)} +$$

$$+ \frac{1}{l^2+q^2+2k_j(-l+\frac{1}{M}q)}] \leq \frac{C_1}{k_j^2}$$

$$2)\alpha_n^{'} \leq \sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} \sum_{q=[m_j^\gamma]}^{\infty} \frac{C}{l^2q^2}[\frac{1}{l^2+q^2+2m_j(q+Ml)}+$$

$$+\frac{1}{l^2+q^2+2m_j(q-Ml)}] \leq \frac{C_1}{m_j^2}$$

$$3)\alpha_n^{'} \leq \sum_{l=1}^{[k_j^\delta]} \sum_{q=[m_j^\gamma]}^{\infty} \frac{C}{l^2q^2}[\frac{1}{l^2+q^2+2m_j(q+Ml)}+$$

$$+\frac{1}{l^2+q^2+2m_j(q-Ml)}] \leq \frac{C_1}{m_j^2}$$

V) В области V оцениваем аналогично области IV:

1)

$$\alpha_n^{'} \leq \frac{C(1+[k_j^\delta]^2)}{m_j^2-(1+[k_j^\delta]^2)^2}(1-\frac{1}{[m_j^\gamma]})\frac{1}{[k_j^\delta]} \leq \frac{C_1}{m_j^2}$$

2)

$$\alpha_n^{'} \leq \frac{C(1+[k_j^\delta]^2)}{k_j^2[k_j^\delta]^2-(1+[k_j^\delta]^2)^2}(1-\frac{1}{[m_j^\gamma]})\frac{1}{[k_j^\delta]} \leq \frac{C_1}{k_j^2}$$

3)

$$\alpha_n^{'} \leq \frac{C(2+2[k_j^\delta]^2+4k_ja)}{(1+[k_j^\delta]^2+2k_ja)^2-4k_j^2[k_j^\delta]^2}(1-\frac{1}{[m_j^\gamma]})\frac{1}{[k_j^\delta]} \leq \frac{C_1}{k_j^2}$$

VI)В области VI

$$\alpha_n^{'} \leq \sum_{k=1}^{k_j-[k_j^\delta]} \sum_{m=1}^{m_j-[m_j^\gamma]} \frac{C}{(k-k_j)^4(m-m_j)^4}\times$$

$$\times\frac{1}{(k-k_j)(k+k_j)+(m-m_j)(m+m_j)} \leq$$

$$\leq \frac{C(m_j-[m_j^\gamma])(k_j-[k_j^\delta])}{[m_j^{4\gamma}][k_j^{4\delta}](-[k_j^\delta]k_j-[m_j^\gamma]m_j)}$$

1)

$$\alpha_n^{'} \leq \frac{C([m_j^\gamma]-m_j)}{[m_j^{4\gamma}][k_j^{5\delta}]} \leq \frac{C}{k_j^2},$$

при $\delta \geq \frac{2}{5}$

2)

$$\alpha_n^{'} \leq \frac{C([k_j^{\delta}] - k_j)}{[k_j^{4\delta}][m_j^{5\gamma}]} \leq \frac{C}{m_j^2},$$

при $\gamma \geq \frac{2}{5}$

3)

$$\alpha_n^{'} \leq \frac{C_1}{m_j^2}$$

при $5\delta + 3\gamma \geq 2$ или $3\delta + 5\gamma \geq 2$.

Аналогичные оценки получим для областей VII, VIII и IX.

Исходя из всех оценок для каждой из областей мы заключаем, что

$$\alpha_n \leq O(\frac{\nu_n}{\bar{\lambda}_n}),$$

где ν_n - кратность $\bar{\lambda}_n$.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358 “Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики”.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Математический сборник 2005 Т.196 №12 С. 123-157

[2] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики // Т. 4. Анализ операторов. Пер. с англ. - М.: Мир, 1982.

[3] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики //Наука, 1977.

УДК 517

ФОРМУЛА СЛЕДОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ В НУЛЕ

Нуртдинов Р. Р.
Уфа, БашГУ

Введение

В работе рассматривается спектральная задача на отрезке $[0, \pi]$ второго порядка

$$-y^{''}(r) + \left(\frac{\nu - 1/4}{r^2}\right) y(r) = \lambda y(r), 0 < r \leq \pi$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} y^{'}(r) = hy(\pi), \\ y(r) \approx r^{\nu + \frac{1}{4}} \end{cases}$$

В первой части получена асимптотика спектра этого оператора, во второй-формула регуляризованного следа через резольвенту.

Формула регуляризованного следа подобных операторов, в частности дифференциальных операторов 6-го порядка, ранее была рассмотрена Садовничим В.А.

§ 1. **Асимптотика спектра дифференциального оператора второго порядка на отрезке**

Рассматривается спектральная задача на отрезке $[0, \pi]$

$$-y^{''}(r) + (\frac{\nu - 1/4}{r^2}) y(r) = \lambda y(r), 0 < r \leq \pi, \quad (\mathbf{1})$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} y^{'}(r) = hy(\pi), \\ y(r) \approx r^{\nu + \frac{1}{4}} \end{cases} \quad (\mathbf{2})$$

где $h-$фиксированное число из $\mathbb{R}, V$-оператор умножения на функцию из $L^2[0, \pi]$.

Определим оператор L_0, порожденный в $L^2\,[0, \pi]$ дифференциальным выражением.

Общее решение уравнения $L_0y{=}\lambda y$ при $\lambda > 0$ имеет вид:

$$y\,(r) = C_1\sqrt{r}I_\nu(\sqrt{\lambda}r) + C_2\sqrt{r}Y_\nu(\sqrt{\lambda}r), \tag{3}$$

Из граничных условий (2) находим, что $C_2 = 0$ тогда остается

$$y(r) = C_1\sqrt{r}I_\nu(\sqrt{\lambda}r)$$

Спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора L_0 определяется из уравнения:

$$y^{'}(\pi,\lambda) = hy(\pi,\lambda).$$

Равенство будет иметь вид:

$$\frac{I_\nu(\sqrt{\lambda}\pi)}{2\sqrt{\pi}} + \sqrt{\pi}I_\nu^{'}(\sqrt{\lambda}\pi)\sqrt{\lambda} = h\sqrt{\pi}I_\nu(\sqrt{\lambda}\pi),$$

$$\frac{1}{2}I_\nu(\sqrt{\lambda}\pi) + \pi I_\nu^{'}(\sqrt{\lambda}\pi)\sqrt{\lambda} = h\pi I_\nu(\sqrt{\lambda}\pi).$$

Сделаем замену $z = \sqrt{\lambda}\pi$

$$\frac{1}{2}I_\nu(z) + zI_\nu^{'}(z) = h\pi I_\nu(z) \tag{4}$$

Используем асимптотические разложения функций $I_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ ([2], с.222):

$$I_\nu(z) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[cos(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})U_\nu^1(z) - sin(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})U_\nu^2(z)\right] \tag{5}$$

$$Y_\nu(z) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[sin(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})U_\nu^1(z) - cos(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})U_\nu^2(z)\right] \tag{6}$$

где

$$U_\nu^1(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,2m)}{(2z)^{2m}} \tag{7}$$

$$U_\nu^2(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}} \tag{8}$$

$$(\nu,m) = \frac{\Gamma(\nu+m+\frac{1}{2})}{m!\Gamma(\nu-m+\frac{1}{2})} = \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-1^2)...(4\nu^2-(2m-1)^2)}{m!2^{2m}},$$

$((\nu,1)=1)$.

Для оценки (4) нам нужно найти асимптотические представления функций $I_\nu^{'}(z)$:

$$I_\nu^{'}(z)=-\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[cos(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})U_\nu^1(z)-sin(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})U_\nu^2(z)\right]+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[cos(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\left(U_\nu^1(z)\right)^{'}-sin(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})U_\nu^2(z)\right]-$$

$$-\left[cos(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})U_\nu^1(z)-sin(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})U_\nu^2(z)\right]$$

подставляя $I_\nu(z)$и $I_\nu^{'}(z)$ в (4) решаем равенство.
Получаем

$$tg\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{(\nu,1)}{2z}-\frac{h\pi}{z}-\frac{(\nu,2)+2(\nu,1)+2h\pi(\nu,1)}{8}\left(\frac{(\nu,1)}{2}+h\pi\right)+$$

$$+\frac{4(\nu,2)+(\nu,3)+2h\pi(\nu,1)}{8}\frac{1}{z^3}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\qquad(9)$$

Делаем замену

$$z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi n+\alpha_n$$

$$z=\pi n+\frac{(1+2\nu)\pi}{4}+\alpha_n$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\pi n}\left(1+\frac{1+2\nu}{4n\pi}\pi+\frac{\alpha_n}{\pi n}\right)^{-1}=\frac{1}{\pi n}\left(1-\frac{1+2\nu}{4n}\right),\beta_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$tg\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=tg\left(\pi n+\beta_n\right).$$

Собственное число будет:

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\underbrace{a_0+\frac{a_{-1}}{n}+\frac{a_{-2}}{n}+\Upsilon_n}_{b_n},\Upsilon_n=O\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

$$b_n^2 = a_0^2 + \frac{2a_0 a_{-1}}{n} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\lambda_n = n^2 + 2a_0 n + (2a_{-1} + a_0^2) + \frac{2\left(a_0 a_{-1} + a_{-2}\right)}{n} + \alpha_n, \alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)n, a_{-1} = -\frac{2\pi + \nu^2 - \frac{1}{4}}{2\pi^2}, a_{-2} = \frac{(2\nu+1)(2h + \nu^2 - \frac{1}{4})}{8\pi^2}$$

$$\lambda_n = n^2 + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)n + \frac{\pi^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - 8\pi - 4\nu^2}{4\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{10}$$

Лемма 1. Ядро резольвенты $R_0(-\lambda) = (L_0 + \lambda)^{-1}$ оператора L_0 имеет вид:

$$R_0(r, t, -\lambda) = G(r, t, -\lambda) + g(r, t, -\lambda),$$

где

$$G(r, t, -\lambda) = \frac{\pi}{2}\begin{cases} Q_1(r, \lambda)Q_2(t, \lambda), t \le r, \\ Q_2(t, \lambda)Q_1(r, \lambda), t > r \end{cases}$$

$$g(r, t, -\lambda) = -\frac{\pi}{2}\frac{Q_2'(\pi, \lambda) - hQ_2(\pi, \lambda)}{Q_1'(\pi, \lambda) - hQ_2(\pi, \lambda)}Q_2(r, \lambda)Q_1(t, \lambda)$$

Доказательство.

Решениями уравнения

$$-y''(r) + \left(\frac{\nu - 1/4}{r^2}\right)y(r) = \lambda y(r)$$

будут функция,

$$\begin{cases} Q_1(r, \lambda) = C_1\sqrt{r}I_\nu(\sqrt{\lambda}r) \\ Q_2(r, \lambda) = C_2\sqrt{r}K_\nu(\sqrt{\lambda}r) \end{cases}, \tag{11}$$

где $I_\nu(\sqrt{\lambda}r)$ - модифицированная функция Бесселя, $K_\nu(\sqrt{\lambda}r)$ - функция Макдонольда.

Функция

$$f(r,\lambda)=\int_0^\pi G(r,t,-\lambda)h(t)dt,(h(r)\in L^2[0,\pi]),$$

удовлетворяет неоднородному уравнению

$$L_0y(r)-\lambda y(r)=hr \tag{12}$$

и условию

$$f(0,\lambda)=0.$$

Находя первую и вторую производные функции $f(r,\lambda)$ получаем общее решение уравнения (12)

$$Q(r,t)=f(r,\lambda)+C_1Q_1(r,\lambda)+C_2Q_2(r,\lambda).$$

Из граничных условий (2) получаем, что $C_2=0$, тогда

$$Q(r,t)=f(r,\lambda)+C_1Q_1(r,\lambda)$$

Постоянную C_1 найдем из условий $y^{'}(\pi)=hy(\pi)$

$$Q^{'}(r,\lambda)=f^{'}(r,\lambda)+C_1Q_1^{'}(r,\lambda)$$

$$f^{'}(\pi,\lambda)+C_1Q_1^{'}(\pi,\lambda)=h\left[f(\pi,\lambda)+C_1Q_1(\pi,\lambda)\right] \tag{13}$$

$$C_1=\frac{hf(\pi,\lambda)-f^{'}(\pi,\lambda)}{Q_1^{'}(\pi,\lambda)-hQ_1(\pi,\lambda)}$$

Отметим, что

$$f(\pi,\lambda)=\frac{\pi}{2}Q_2(\pi,\lambda)\int_0^\pi Q_1(t,\lambda)h(t)dt$$

$$f^{'}(\pi,\lambda)=\frac{\pi}{2}Q_2^{'}(\pi,\lambda)\int_0^\pi Q_1(t,\lambda)h(t)dt$$

тогда

$$C_1=-\frac{\pi}{2}\frac{Q_2^{'}(\pi,\lambda)-hQ_2(\pi,\lambda)}{Q_1^{'}(\pi,\lambda)-hQ_2(\pi,\lambda)}\int_0^\pi Q_1(t,\lambda)h(t)dt$$

Отсюда получаем представление ядра $R_0(r,t,-\lambda)$ резольвенты $R_0(-\lambda)$. Лемма доказана.

§ 2. **Формула регуляризованного следа дифференциального уравнения второго порядка**

Для ядерного интегрального оператора справедливо формула:

$$(R_0(-\lambda)h)(r) = \int_0^\pi R_0(r,t,-\lambda)h(t)dt \Rightarrow trR_0(-\lambda) = \int_0^\pi R_0(r,r,-\lambda)dr$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n+\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a_1n+a_0+\alpha_n+\lambda} = \frac{b_0}{\sqrt{\lambda}}+\frac{b_1}{\lambda}+\frac{b_2}{\sqrt{\lambda^3}}+\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n}{\lambda^2}+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)$$

где

$$b_0 = \frac{\pi}{2}, b_1 = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{2}, b_2 = \frac{(\nu+\frac{1}{2})^2+1}{4\pi}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n+\lambda} = \int_0^\pi R_0(r,r,-\lambda)dr \tag{14}$$

Вычисляем

$$trR_0(-\lambda) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi Q_1(r,\lambda)Q_2(r,\lambda)dr - \alpha(\lambda)\int_0^\pi Q_1(r,\lambda)Q_1(r,\lambda)dr$$

$$trR_0(-\lambda) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi rI_\nu(\sqrt{\lambda}r)K_\nu(\sqrt{\lambda}r)dr - \alpha(\lambda)\int_0^\pi rI_\nu^2(\sqrt{\lambda}r)dr \tag{15}$$

где

$$\alpha(\lambda) = \frac{\pi}{2}\frac{K'_\nu(\sqrt{\lambda}\pi) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(h-\frac{1}{2\pi})K_\nu(\sqrt{\lambda}\pi)}{I'_\nu(\sqrt{\lambda}\pi) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(h-\frac{1}{2\pi})I_\nu(\sqrt{\lambda}\pi)}, \lambda >> 1$$

Вычисляя равенства под номером (15) и используя асимптотические разложения модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда, в конечном итоге получаем такой ряд:

$$\frac{m_1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{m_2}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_3}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)$$

Приравнивая наши полученные результаты, находим формулу следа для нашего уравнения:

$$\frac{b_0}{\sqrt{\lambda}}+\frac{b_1}{\lambda}+\frac{b_2}{\sqrt{\lambda^3}}+\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n}{\lambda^2}+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)=\frac{m_1}{\sqrt{\lambda}}+\frac{m_2}{\lambda^{\frac{3}{2}}}+\frac{m_3}{\lambda^2}+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лебедев Н.Н.*Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента. // Специальные функции и их приложения. 1963. Издание второе, переработанное и дополненное. С.153-158.

[2] *Ватсон Г.Н.*Асимптотические разложения Бесселевых функций. //Теория Бесселевых функций. 1949. Часть первая. Перевод со 2-го английского издания В.С. Бермана. С.222-231.

[3] *Муртазин Х.Х., Садовничий В.А., Тулькубаев Р.З.*Асимптотика спектра и формула следов для дифференциальных операторов с неограниченными коэффициентами. // Доклады академии наук, 2007, том 416, №6, С. 740-744.

[4] *Садовничий В.А.*О некоторых тождествах для собственных чисел сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Соотношение для нулей функции Бесселя. // Вестник МГУ. Сер.1.Математика, механика. 1971. №3. С. 77-86.

[5] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.*Интегральные представления функций. // Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Издание 4-ое переработанное при участие Ю.В. Геронимуса, М.Ю. Цейтлина С.972-979.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ СВОЙСТВА

Павленко В. А.
Уфа, БГАУ

Введение.

В данной работе рассматривается компактное многообразие X с отмеченным подмногообразием X^0. Предполагается, что X^0 представимо в виде объединения конечного числа гладких подмногообразий, (которые будут называться гранями), пересекающихся трансверсально (такие подмногообразия мы называем стратифицированными). На данных многообразиях будет введён специальный класс интегральных операторов.Одним из основных результатов работы является построение алгебры данных операторов.

С помощью этой алгебры можно исследовать эллиптические уравнения на компактном многообразии, вырождающиеся на гладком подмногообразии. Такой подход к исследованию вырождающихся эллиптических уравнений является обобщением b-исчисления, развитого Мельроузом [1] (см. также [2]). Похожими проблемами занимались Б.Ю. Стернин, В.Е. Шаталов и М.В. Коровина. Основное отличие заключается в том, что они строили алгебру операторов в пространстве Соболева.

Автор благодарен Ю.А. Кордюкову за постановку задачи и полезные обсуждения.

§ 1. **Конормальные функции и плотности.**

Данный параграф посвящен определению конормальных функций и плотностей на произвольном многообразии X с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0. Ниже будут приведены "грубые"определения в связи с ограниченностью объёма. Подробные определения даны в других статьях. (см. [3], [4]).

Определение 1. Индексным множеством называется любое множество $E \subset \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{Q}_1$ обозначает подмножество рациональных чисел, представимых в виде несократимой дроби с нечетным знаменателем, а $\mathbb{N}_0$ обозначает подмножество целых неотрицательных чисел. При этом на E накладываются условия. Подробно см. [3], [4].

Определение 2. Скажем, что на стратифицированном подмногообразии X^0 задано индексное семейство $\mathcal{E}$, если любой его грани поставлено в соответствие индексное множество.

Определение 3. Пусть X — гладкое компактное многообразие и X^0 — его стратифицированное подмногообразие.

Конормальной функцией u, заданной на многообразии X, называется функция, которая является гладкой на $X \setminus X^0$, а на подходе к X^0 допускает аисмптотическое разложение вида:

$$u(x, x^0) \sim \sum_{(z,p)\in\mathcal{E}} a_{z,p}(x^0) x^z \ln|x|$$

Класс конормальных функций на многообразии X обозначим через $\mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0)$.

Определение 4. s-плотностью на многообразии X называется функция, заданная на картах данного многообразия, причём при переходе от одной карты к другой, данная функция умножается на модуль якобиана перехода в степени s.

Исходя из этого определения, s-плотность можно записать в виде: $\mu(x) = u(x)|dx|^s$.

Определение 5. Конормальной s-плотностью называется плотность, записанная в виде: $\mu(x, x^0) = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|^s$, где u — конормальная функция.

Класс конормальных s-плотностей на многообразии X обозначим через $\mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, \Omega_X)$.

§ 3. **Относительные интегральные операторы**

В данном разделе строится алгебра относительных интегральных операторов на многообразии с отмеченным подмногообразием.

Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия, такие что: $\dim X = n$; $\dim Y = m$. X^0, Y^0 — гладкие подмногообразия коразмерности 1.

Заметим, что подмногообразие $\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}$ — стратифицированное подмногообразие многообразия $X \times Y$ с гранями $\{X^0 \times Y\}$;$\{X \times Y^0\}$.

Будем рассматривать операторы:

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}}),$$

действие которых на полуплотность $\mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой:

$$A\mu = \int\limits_Y k_A \mu. \tag{1}$$

Здесь полуплотность $k_A \in C^\infty\bigg((X\times Y)\setminus(\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}), \Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y}\bigg)$ является ядром данного оператора.

Если ядро k_A записать в виде $k_A = K_A(x,y)|dxdy|^{\frac{1}{2}}$, плотность μ записать в виде $\mu = u(y)|dy|^{\frac{1}{2}}$, то получим, что выражение (1) согласуется со стандартным выражением интегрального оператора.

Определение 6. Интегральный оператор A называется относительным интегральным оператором, если его ядро k_A является конормальной полуплотностью на многообразии $X\times Y$ со стратифицированным подмногообразием $\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}$.

Теорема 1. *Относительный интегральный оператор A, задаваемый ядром $k_A \in \mathcal{A}^{(\mathcal{E}_X,\mathcal{E}_Y)}_{phg}\bigg(X\times Y, \{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y}\bigg)$, продолжается до оператора*

$$A : \mathcal{A}^{\mathcal{F}_Y}_{phg}(Y, Y^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_Y) \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}_X}_{phg}(X, X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_X);$$

при условии, что выполнено условие $\inf(\mathcal{E}_Y + \mathcal{F}_Y) > 0$.

Очевидно, что если A, B — относительные интегральные операторы, то $\alpha A + \beta B$ — тоже относительный интегральный оператор.

Пусть заданы 3 гладких компактных многообразия X, Y, Z, такие что: $\dim X = n$; $\dim Y = m$; $\dim Z = k$. X^0, Y^0, Z^0 — гладкие подмногообразия коразмерности 1.

Пусть заданы относительные интегральные операторы A и B с ядрами:

$$k_A \in A^{\mathcal{E}_X,\mathcal{G}_Y}_{phg}(X\times Y, \{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y}),$$

$$k_B \in A^{\mathcal{F}_Y,\mathcal{H}_Z}_{phg}(Y\times Z, \{Z^0\times Y\}\cup\{Z\times Y^0\}, \Omega^{\frac{1}{2}}_{Y\times Z}),$$

соответственно. Предположим, что выполнено условие: $\inf(\mathcal{G}_Y + \mathcal{F}_Y) > 0$. Тогда определена их композиция $C = A\circ B$.

$$k_C = \int\limits_Y k_A k_B. \tag{2}$$

Если ядра k_A и k_B записать в виде $k_A = K_A(x,y)|dxdy|^{\frac{1}{2}}$, $k_B = K_B(y,z)|dydz|^{\frac{1}{2}}$, то получим, что выражение (2) согласуется со стандартным выражением композиции интегральных операторов.

Теорема 2. *Если A, B — произвольные относительные интегральные операторы с ядрами:*

$$k_A \in A_{phg}^{\mathcal{E}_X,\mathcal{G}_Y}(X\times Y, \{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}, \Omega_{X\times Y}^{\frac{1}{2}}),$$

$$k_B \in A_{phg}^{\mathcal{F}_Y,\mathcal{H}_Z}(Y\times Z, \{Z^0\times Y\}\cup\{Z\times Y^0\}, \Omega_{Y\times Z}^{\frac{1}{2}}),$$

то их композиция $C = A\circ B$ — тоже относительный интегральный оператор при выполнении условия на индексное семейство: $\inf(\mathcal{G}_Y+\mathcal{F}_Y) > 0$.

Таким образом, алгебра относительных интегральных операторов построена.

§ 4. **Относительный интеграл**

Пусть μ — конормальная относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ плотность, заданная на компактном многообразии X с выделенным гладким подмногообразием X^0 коразмерности 1. Пусть $\inf\mathcal{E} \geq 0$, причём если $(0,q) \in \mathcal{E}$, то $q = 0$.На многообразии X зададим риманову метрику $g_X(p)$ и трубчатую окрестность U подмногообразия X^0. Так как риманова метрика задана, то определено расстояние от точки $p\in X$ до подмногообразия X^0, которое обозначим через: $dist(p, X^0)$. Предположим, что $supp\mu(x,x^0) = [-L, L]$. Относительный интеграл плотности μ по X определяется формулой

$$\int\limits_X^r \mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_{\substack{X\\|x|>\varepsilon}} \mu + 2\ln\varepsilon \int\limits_{X^0} \mu\Big|_{X^0}\Bigg),$$

где r — определяющая функция подмногообразия X^0, причём $r(p) = dist(p, X^0) = x$; $p = (x, x^0)$.

Определение 7. Раздутем многообразия X^2 называется многообразие X_b^2, которое получается из многообразия X^2 вырезанием подмногообразия ${X^0}^2$ и подклейкой на вырезанное место множество проективных прямых.

Определение 8. Гиперотносительный интегральный оператор — это интегральный оператор, заданный на раздутом многообразии, и его ядро является конормальной функцией.

Определение 9. Относительным следом гиперотносительного интегрального оператора $A \in \Psi^{-\infty}(X, X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ с ядром k_A называется число:

$$\text{r-Tr}(A) = \int\limits_X^{r(x)} k_A \Big|_{\Delta},$$

где Δ — диагональ многообразия X^2, x — определяющая функция X^0.

Замечание. Определение класса $\Psi^{-\infty}(X, X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ см. в [1].

Теорема 3. *Если $A \in \Psi^{-\infty}(X, X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ и $B \in \Psi^{-\infty}(X, X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ — гиперотносительные интегральные операторы, заданные на многообразии X, то:*

$$\text{r-Tr}([A, B]) \neq 0$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-01-00519-а

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Melrose R. B.* The Atiyah-Patodi-Singer index theorem. Research Notes in Mathematics, 4. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993

[2] *Grieser D.* Basics of the b-calculus. *Approaches to singular analysis (Berlin, 1999)*, 30-84, Oper. Theory Adv. Appl., 125, Birkhauser, Basel, 2001.

[3] *Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2011. – Т. 44. – С. 232–234.*

[4] *Сборник трудов международной школы - конференции для студентов, аспирантов и молодых учёных „Фундаментальная математика и её приложения в естествознании“ –Уфа: Изд-во РИЦ БашГУ, 2009. – Т. 1. – С. 311-320*

УДК 517.9

ЯДРО ОСНОВНЫХ АЛГЕБР ЛИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ГАЗОВЗВЕСИ

Панов А. В.
Челябинск, ЧелГУ

Введение

Работа посвящена исследованию симметрийных свойств [1] одной системы уравнений в частных производных, описывающей механику газовзвеси. А именно, она моделирует подавление неконтролируемой детонации горючего газа инертными частицами (метод гашения) [2].

Процесс гашения волны детонации дискретными частицами может протекать по-разному, в зависимости от концентрации, плотности и размеров частиц, а также других параметров системы. Данный процесс описывается системой уравнений механики гетерогенных сред взаимопроникающих континуумов в двухскоростном приближении. Первым континуумом выступает смесь реагирующих газов и продуктов их воспламенения и горения, вторым континуумом – мелкие частицы инертного вещества. Функциональным параметром системы является давление смеси, зависящее от плотностей фаз.

Теоретические исследования данной системы были проведены, главным образом, в одномерном и двумерном случаях (см. [2] и ссылки там же). Однако, они не касались ее групповых свойств.

Главная гипотеза, используемая при теоретическом описании течений газовзвесей, состоит в предположении о том, что среда в целом и её компоненты являются сплошными. Также, предполагается, что:
- размеры включений дисперсной фазы значительно превосходят молекулярно-кинетические размеры в несущей фазе и в то же время значительно меньше характерных макромасштабов среды;
- газовзвесь является достаточно разреженной, чтобы не учитывать взаимодействие частиц между собой;
- вязкие эффекты проявляются только во взаимодействии между газом и частицами;
- температура частиц по всему ее объему постоянна вследствие высокой теплопроводности материала частиц;
- энергией и эффектами, связанными с хаотическим движением частиц,

можно пренебречь;
- течение является нестационарным;
- тепловыми эффектами пренебрегаем;
- процессы дробления, слипания и образования новых дисперсных частиц отсутствуют, частицы состоят из несжимаемого материала;
- в качестве несущей газовой среды выступает горючий газ, который воспламеняется по достижении некоторой критической температуры;
- состав газа предполагается однокомпонентным.

Ранее [3, 4] данная система была исследована в случае пространства независимых переменных $\mathbb{R}^2_{(t,\,x)}$: было найдено ядро основных алгебр Ли, доказано, что система не имеет дополнительных симметрий при любой функции давления, найдена оптимальная система подалгебр ядра основных алгебр Ли, осуществлен поиск инвариантных и частично инвариантных решений системы. В данной работе найдено ядро основных алгебр Ли данной системы в случае пространства независимых переменных $\mathbb{R}^4_{(t,\,x,\,y,\,z)}$.

§ 1. **Ядро основных алгебр Ли**

Рассматривается система уравнений

$$\frac{d\rho}{dt_1} + \rho \mathrm{div}\, \vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d\sigma}{dt_2} + \sigma \mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \tag{2}$$

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt_1} + m_1 \nabla P(\rho,\sigma) = -\frac{\sigma}{\tau}(\vec{u}-\vec{v}), \tag{3}$$

$$\sigma\frac{d\vec{v}}{dt_2} + m_2 \nabla P(\rho,\sigma) = \frac{\sigma}{\tau}(\vec{u}-\vec{v}), \tag{4}$$

описывающая механику смеси газа и мелких частиц в пространстве. Здесь $\vec{u} = (ux, uy, uz)$ – вектор скорости газа, $\vec{v} = (vx, vy, vz)$ – вектор скорости частиц, ρ – плотность газа, σ – плотность частиц, P – давление смеси, $m_2 = \dfrac{\sigma}{b}$ – объемная коцентрация частиц, b – абсолютная плотность частиц, $m_1 = 1 - m_2$ – объемная коцентрация газа, $\dfrac{d}{dt_1} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla$, $\dfrac{d}{dt_2} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla$.

Оператор группы преобразований ищется в виде

$$X = \theta\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial z} + UXC\frac{\partial}{\partial ux} + UYC\frac{\partial}{\partial uy} +$$

$$+UZC\frac{\partial}{\partial uz} + VXC\frac{\partial}{\partial vx} + VYC\frac{\partial}{\partial vy} + VZC\frac{\partial}{\partial vz} + RC\frac{\partial}{\partial \rho} + SC\frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Все коэффициенты оператора зависят от вектора $(t, x, y, z, ux, uy, uz, vx, vy, vz, \rho, \sigma)$.

Продолжение данного оператора на пространство 1-струй, действие продолженного оператора на систему уравнений, сужение на многообразие полученных уравнений и приведение подобных осуществлялось в среде Maple. Из определяющих уравнений, полученных средствами Maple, и произвольности параметра P следует, что $RC = 0$, $SC = 0$, $\theta = \theta(t)$, $\xi = \xi(t,x,y,z)$, $\eta = \eta(t,x,y,z)$, $\omega = \omega(t,x,y,z)$, $UXC = UXC(t,x,y,z,ux,uy,uz)$, $UYC = UYC(t,x,y,z,ux,uy,uz)$, $UZC = UZC(t,x,y,z,ux,uy,uz)$, $VXC = VXC(t,x,y,z,vx,vy,vz)$, $VYC = VYC(t,x,y,z,vx,vy,vz)$, $VZC = VZC(t,x,y,z,vx,vy,vz)$.
Кроме того, остались уравнения

$$UXC_{ux} + \theta_t - \xi_x = 0, \tag{5}$$

$$UYC_{uy} + \theta_t - \eta_y = 0, \tag{6}$$

$$UZC_{uz} + \theta_t - \omega_z = 0, \tag{7}$$

$$UXC_{uy} - \xi_y = 0, \tag{8}$$

$$UXC_{uz} - \xi_z = 0, \tag{9}$$

$$UYC_{ux} - \eta_x = 0, \tag{10}$$

$$UYC_{uz} - \eta_z = 0, \tag{11}$$

$$UZC_{ux} - \omega_x = 0, \tag{12}$$

$$UZC_{uy} - \omega_y = 0, \tag{13}$$

$$UXC = \xi_t - ux\theta_t + ux\xi_x + uy\xi_y + uz\xi_z, \tag{14}$$

$$UYC = \eta_t - uy\theta_t + ux\eta_x + uy\eta_y + uz\eta_z, \tag{15}$$

$$UZC = \omega_t - uz\theta_t + ux\omega_x + uy\omega_y + uz\omega_z, \tag{16}$$

$$UXC_x + UYC_y + UZC_z = 0, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\frac{\sigma}{\tau}(UXC - VXC) + \rho\,(uxUXC_x + uyUXC_y + uzUXC_z + \\ + UXC_t) + \frac{\sigma}{\tau}\,(\theta_t - UXC_{ux})\,(ux - vx) - \frac{\sigma}{\tau}UXC_{uy}(uy - vy) - \\ -\frac{\sigma}{\tau}UXC_{uz}(uz - vz) = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

$$UXC_{uy} + \eta_x = 0, \tag{19}$$

$$UXC_{uz} + \omega_x = 0, \tag{20}$$

$$\theta_t - \xi_x - UXC_{ux} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\sigma}{\tau}(UYC - VYC) + \rho\left(uxUYC_x + uyUYC_y + uzUYC_z + \right.$$

$$\left. + UYC_t\right) + \frac{\sigma}{\tau}\left(\theta_t - UYC_{uy}\right)(uy - vy) - \frac{\sigma}{\tau}UYC_{ux}(ux - vx) -$$

$$-\frac{\sigma}{\tau}UYC_{uz}(uz - vz) = 0, \tag{22}$$

$$UYC_{ux} + \xi_y = 0, \tag{23}$$

$$UYC_{uz} + \omega_y = 0, \tag{24}$$

$$\theta_t - \eta_y - UYC_{uy} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\sigma}{\tau}(UZC - VZC) + \rho\left(uxUZC_x + uyUZC_y + uzUZC_z + \right.$$

$$\left. + UZC_t\right) + \frac{\sigma}{\tau}\left(\theta_t - UZC_{uz}\right)(uz - vz) - \frac{\sigma}{\tau}UZC_{ux}(ux - vx) -$$

$$-\frac{\sigma}{\tau}UZC_{uy}(uy - vy) = 0, \tag{26}$$

$$UZC_{ux} + \xi_z = 0, \tag{27}$$

$$UZC_{uy} + \eta_z = 0, \tag{28}$$

$$\theta_t - \omega_z - UZC_{uz} = 0, \tag{29}$$

$$VXC_{vx} + \theta_t - \xi_x = 0, \tag{30}$$

$$VYC_{vy} + \theta_t - \eta_y = 0, \tag{31}$$

$$VZC_{vz} + \theta_t - \omega_z = 0, \tag{32}$$

$$VXC_{vy} - \xi_y = 0, \tag{33}$$

$$VXC_{vz} - \xi_z = 0, \tag{34}$$

$$VYC_{vx} - \eta_x = 0, \tag{35}$$

$$VYC_{vz} - \eta_z = 0, \tag{36}$$

$$VZC_{vx} - \omega_x = 0, \tag{37}$$

$$VZC_{vy} - \omega_y = 0, \tag{38}$$

$$VXC = \xi_t - vx\theta_t + vx\xi_x + vy\xi_y + vz\xi_z, \tag{39}$$

$$VYC = \eta_t - vy\theta_t + vx\eta_x + vy\eta_y + vz\eta_z, \tag{40}$$

$$VZC = \omega_t - vz\theta_t + vx\omega_x + vy\omega_y + vz\omega_z, \tag{41}$$

$$VXC_x + VYC_y + VZC_z = 0, \tag{42}$$

$$\frac{\sigma}{\tau}(UXC - VXC) + \rho\left(vxVXC_x + vyVXC_y + vzVXC_z + \right.$$

$$+VXC_t) + \frac{\sigma}{\tau}\left(\theta_t - VXC_{vx}\right)(ux - vx) - \frac{\sigma}{\tau}VXC_{vy}(uy - vy) -$$

$$-\frac{\sigma}{\tau}VXC_{vz}(uz - vz) = 0, \quad (43)$$

$$VXC_{vy} + \eta_x = 0, \quad (44)$$

$$VXC_{vz} + \omega_x = 0, \quad (45)$$

$$\theta_t - \xi_x - VXC_{vx} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\sigma}{\tau}(UYC - VYC) + \rho\left(vxVYC_x + vyVYC_y + vzVYC_z +\right.$$

$$\left.+VYC_t\right) + \frac{\sigma}{\tau}\left(\theta_t - VYC_{vy}\right)(uy - vy) - \frac{\sigma}{\tau}VYC_{vx}(ux - vx) -$$

$$-\frac{\sigma}{\tau}VYC_{vz}(uz - vz) = 0, \quad (47)$$

$$VYC_{vx} + \xi_y = 0, \quad (48)$$

$$VYC_{vz} + \omega_y = 0, \quad (49)$$

$$\theta_t - \eta_y - VYC_{vy} = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\sigma}{\tau}(UZC - VZC) + \rho\left(vxVZC_x + vyVZC_y + vzVZC_z +\right.$$

$$\left.+VZC_t\right) + \frac{\sigma}{\tau}\left(\theta_t - VZC_{vz}\right)(uz - vz) - \frac{\sigma}{\tau}VZC_{vx}(ux - vx) -$$

$$-\frac{\sigma}{\tau}VZC_{vy}(uy - vy) = 0, \quad (51)$$

$$VZC_{vx} + \xi_z = 0, \quad (52)$$

$$VZC_{vy} + \eta_z = 0, \quad (53)$$

$$\theta_t - \omega_z - VZC_{vz} = 0. \quad (54)$$

Видно, что уравнения для функций VXC, VYC, VZC идентичны уравнениям для функций UXC, UYC, UZC. Решим систему (5) – (29). Складывая уравнения (5) и (21), получим $\theta_t = \xi_x$. Так же из уравнений (6) и (25) получим $\theta_t = \eta_y$, из уравнения (7) и (29) получим $\theta_t = \omega_z$. Подставляя (14) и (39) в (18) и приводя подобные при σ, uy, uz, получим, что производные $\xi_x = 0$, $\xi_{tt} = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\xi_{zz} = 0$, $\xi_{ty} = 0$, $\xi_{tz} = 0$, $\xi_{yz} = 0$. Таким образом, функция ξ есть многочлен первой степени от переменных t, y, z. Функция θ есть константа. Далее, подставив (15) и (40) в (22), учитывая $\theta_t = \eta_y = 0$ и приводя подобные при ux, uz, получим $\eta_{tt} = 0$, $\eta_{zz} = 0$, $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{tz} = 0$, $\eta_{tx} = 0$, $\eta_{xz} = 0$. Таким образом, функция η есть многочлен первой степени от переменных t, x, z. Так же, подставив (16) и (41) в (26), найдем, что ω есть многочлен первой степени от переменных t, x, y. Итак, получены выражения $\theta = c$, $\xi = a_1 t + a_3 y + a_4 z + a_5$, $\eta = b_1 t + b_2 x + b_4 z + b_5$,

$\omega = c_1 t + c_2 x + c_3 y + c_5$. Учитывая выражения для UXC, UYC, UZC из (14) – (16), получим

$$UXC = a_1 + a_3 uy + a_4 uz,$$

$$UYC = b_1 + b_2 ux + b_4 uz,$$

$$UZC = c_1 + c_2 ux + c_3 uy.$$

Остались уравнения (17), (19), (20), (23), (24), (27), (28). Уравнение (17) следует из других уравнений. Из уравнений (19), (20), (23), (24), (27), (28) получим

$$\eta_x + \xi_y = 0,\ \omega_x + \xi_z = 0,\ \omega_y + \eta_z = 0.$$

После подстановки в эти уравнения выражений для ξ, η, ω получим равенства $b_2 = -a_3$, $a_4 = -c_2$, $c_3 = -b_4$. Подставив в формулы (39), (40), (41) выражения для ξ, η, ω, найдем VXC, VYC, VZC. Итак, после переобозначений $b_2 = d, a_4 = e, c_3 = f$, решение определяющей системы уравнений можно записать в виде

$$\theta = c,$$

$$\xi = a_1 t - dy + ez + a_5,$$

$$\eta = b_1 t + dx - fz + b_5,$$

$$\omega = c_1 t - ex + fy + c_5,$$

$$UXC = a_1 - duy + euz,$$

$$UYC = b_1 + dux - fuz,$$

$$UZC = c_1 - eux + fuy,$$

$$VXC = a_1 - dvy + evz,$$

$$VYC = b_1 + dvx - fvz,$$

$$VZC = c_1 - evx + fvy,$$

$$RC = 0,$$

$$SC = 0.$$

Теорема 1. *Базис ядра основных алгебр Ли системы уравнений* (1) – (4) *состоит из операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_5 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ux} + \frac{\partial}{\partial vx},$$

$$X_6 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial uy} + \frac{\partial}{\partial vy},\ X_7 = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial uz} + \frac{\partial}{\partial vz},$$

$$X_8 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - uy\frac{\partial}{\partial ux} + ux\frac{\partial}{\partial uy} - vy\frac{\partial}{\partial vx} + vx\frac{\partial}{\partial vy},$$
$$X_9 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + uz\frac{\partial}{\partial ux} - ux\frac{\partial}{\partial uz} + vz\frac{\partial}{\partial vx} - vx\frac{\partial}{\partial vz},$$
$$X_{10} = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} - uz\frac{\partial}{\partial uy} + uy\frac{\partial}{\partial uz} - vz\frac{\partial}{\partial vy} + vy\frac{\partial}{\partial vz}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] *Федоров А. В, Фомин П. А., Фомин В. М., Тропин Д. А., Чен Дж. -Р.* Физико - математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011.

[3] *Панов А. В.* Групповая классификация системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 13. С. 38–48.

[4] *Федоров В. Е., Панов А. В.* Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челябинского гос. университета. Физика. 2011. Вып. 11. С. 65–69.

УДК 517.518.85

О ТЕОРЕМЕ ОТСЧЕТОВ ПО КОСИНУСАМ НА ОТРЕЗКЕ

Полушкина О.В.
Саратов, НИУ СГУ им. Чернышевского, Россия

Впервые синк – приближения появились в работах Плейна [3]. Позднее Борель [4] и Уиттекер [5] ввели понятие кардинальной фунции и усеченной кардинальной функции, сужения на отрезок $[0, \pi]$ которых выглядит следующим образом:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n}) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n})$$

А.Ю. Трыниным совместно с В.П. Скляровым опубликована [2]. Мой результат основан на статье [1], в которой получена оценка погрешности аппроксимации функций, допускающих для некоторого положительного ε аналитическое продолжение с отрезком $[0, \pi]$ на круг $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \varepsilon\}$ интерполяционным оператором по синкам.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ – аналитическая в круге $K = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2\}$ и непрерывная вплоть до границы функция, тогда найдутся такие абсолютная константа $C_0 > 0$ и натуральное N, что для всех $n \geq N$ и $x \in (0, \pi)$*

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{C_0 \|f\| |\cos nx|}{n(\pi/2 - |x - \pi/2|)} \tag{1}$$

где $\|f\| = max_{x \in K}|f(x)|$

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\Big) \frac{\cos nx}{(-1)^k\, n\, (x - (\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}))} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}) \frac{\sin(nx - (k\pi + \pi/2))}{nx - (k\pi + \pi/2)} \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n \in N$. При каждом натуральном n оценим уклонение оператора L_n от интерполируемой функции с помощью обобщения формулы Эрмита. В качестве контура интегрирования возьмем окружность Γ с центром в точке $\pi/2$ и радиуса $\pi/2$.

$$|L_n(f,x) - f(x)| \le \frac{\|f\| |\cos nx|}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \Big| \frac{d\xi}{(\xi - x)\cos n\xi} \Big| \tag{3}$$

Сделаем замену $\xi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e^{i\varphi}$, оценим сверху интеграл в (3):

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \Big| \frac{d\xi}{(\xi - x)\cos n\xi} \Big| \le$$

$$\le \frac{1}{4} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{|e^{i\varphi}|\, d\varphi}{|\cos\frac{n\pi}{2}\cos(\frac{n\pi}{2}e^{i\varphi}) - \sin\frac{n\pi}{2}\sin(\frac{n\pi}{2}e^{i\varphi})||\frac{\pi}{2}e^{i\varphi} - (x - \frac{\pi}{2})|} \tag{4}$$

Когда φ пробегает отрезок от 0 до 2π, значение $\frac{\pi}{2} e^{i\varphi} - (x - \frac{\pi}{2})$ описывает окружность радиуса $\pi/2$ с центром в точке $x - \pi/2$. Так как $x \in (0, \pi)$, то

$$\min_{\varphi \in [0,2\pi]} \Big| \frac{\pi}{2} e^{i\varphi} - (x - \frac{\pi}{2}) \Big| = \frac{\pi}{2} - \Big| x - \frac{\pi}{2} \Big|$$

Следовательно, из (3) и (4) получаем оценку

$$|L_n(f,x) - f(x)| \le \frac{|\cos nx|}{4} \frac{\|f\|}{\frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|} \times$$
$$\times \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{|\cos\frac{n\pi}{2}\cos(\frac{n\pi}{2}e^{i\varphi}) - \sin\frac{n\pi}{2}\sin(\frac{n\pi}{2}e^{i\varphi})|}$$

В зависимости от четности n оценка распадается на два случая. Обозначим

$$\chi_n(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{|\sin(\frac{\pi n}{2} e^{i\varphi})|} & \text{при } n \text{ нечетных,} \\ \frac{1}{|\cos(\frac{\pi n}{2} e^{i\varphi})|} & \text{при } n \text{ четных,} \end{cases}$$

тогда

$$|L_n(f,x) - f(x)| \le \frac{|\cos nx|}{4} \frac{\|f\|}{\frac{\pi}{2} - |(x - \frac{\pi}{2})|} \int\limits_{0}^{2\pi} \chi_n(\varphi) d\varphi \tag{5}$$

Рассмотрим случай $n = 2m + 1,\ m = 0, 1, 2 \ldots$. Пусть $A > 2$, обозначим

$$\delta_m = \frac{1}{8(m + \frac{1}{2})} \ln \frac{A}{A - 2}.$$

Выберем m_0 настолько большим, чтобы $\delta_m \in [0, \pi/2]$ для любого натурального $m > m_0$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \chi_{2m+1}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\, e^{i\varphi}\right)\right|} \leq$$

$$\leq 4 \int_0^{\delta_m} \frac{d\varphi}{|\sin(\pi(m+\frac{1}{2})\cos\varphi)|} + 4 \int_{\delta_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{|\operatorname{sh}\pi(m+\frac{1}{2})\sin\varphi|} \tag{6}$$

В силу первого замечательного предела найдется такое натуральное m_1, $m_1 \geq m_0$, что справедливо неравенство для любых $m \geq m_1$ и $\varphi \in [0, \delta_m]$

$$|\sin(\pi(m+1/2)\cos\varphi)| \geq 1/2$$

Нетрудно проверить, что если

$$\varphi \geq \delta_m = \frac{1}{8(m+\frac{1}{2})} \ln \frac{A}{A-2}\,,\ \ A > 2,$$

то

$$\operatorname{sh}(\pi(m+1/2)\sin\varphi) \geq \frac{e^{\pi(m+\frac{1}{2})\sin\varphi}}{A}$$

Следовательно, для второго интеграла (6) имеем неравенство

$$\int_{\delta_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\operatorname{sh}(\pi(m+\frac{1}{2})\sin\varphi)} \leq \frac{1}{2(m+\frac{1}{2})}(A-2)^{1/4}A^{3/4}.$$

Отсюда, а также из $(4), (5), (6)$ для любого $x \in (0, \pi)$ и нечетного $n > n_0 = 2m_1 + 1$ получаем $|L_n(f,x) - f(x)| \leq$

$$\leq \frac{|\cos nx| \|f\|}{\frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|} \Big(\frac{1}{8}\ \ln \frac{A}{A-2} + (A-2)^{1/4}A^{3/4}\Big) \tag{7}$$

Для случая четного $n = 2m, m = 0, 1, 2\dots$.

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \frac{|\cos nx| \|f\|}{n\left(\frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|\right)} \Big(\frac{1}{4} \ln \frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)}\Big)$$

Объединяя эту оценку с (7), получим (1), где C_0 можно определить из равенства

$$\min_{A>2} \max \Big(\Big(\frac{1}{4} \ln \frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)}\Big), \\ \Big(\frac{1}{8} \ln \frac{A}{A-2} + (A-2)^{1/4} A^{3/4}\Big)\Big) = C_0$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Трынин А. Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке. // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 10 С. 141 – 158

[2] *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval. // Sampl. Theory Signal Image Process. 2008 P. 263 – 270

[3] *G.A.A.Plana.* Sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernoulliens á exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites. // Mem. Acad. Sci. Torino (1). 1820. P. 403 – 418.

[4] *É.Borel.* Sur I'interpolation. // C. R . Math. Acad. Sci. Paris. 1897. P. 673 – 676.

[5] *E.T.Whittaker.* On the functions which are represented by the expansions of the interpolation – theory. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1914 - 1915. P. 181 – 194.

УДК 515.574

О СУЖЕНИИ ПОТЕНЦИАЛОВ ЙЕНСЕНА НА ПРОКОЛОТУЮ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ОСЬ

Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б.
Уфа, БашГУ

Введение

Как обычно, $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ обозначают одновременно множества натуральных, вещественных, комплексных чисел и их геометри-ческие интерпретации; $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$. Кроме того, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \Im z > 0\}$ и $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \colon \Im z < 0\}$ — соответственно открытые верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $\mathbb{C}_\pm := \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_+$; $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — сфера Римана; $\mathbb{D}$ — открытый единичный круг с центром в нуле. Для подмножества $S \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\overline{S}$ и ∂S обозначаем соответственно его замыкание и границу в $\mathbb{C}_\infty$; $\complement_A S$ — дополнение S до множества $A \subset \mathbb{C}_\infty$, включающего в себя S. Через $C_0^\infty(S)$ обозначаем пространство всех финитных на S функций ψ, т. е. с носителем $\operatorname{supp}\psi \subset S$, бесконечно дифференцируемых на S относительно евклидовой топологии, индуцированной с $\mathbb{C}$.

Если Ω – область в $\mathbb{C}_\infty$, то через $SH(\Omega)$ и $Har(\Omega)$ обозначаем классы соответственно субгармонических и гармонических функций на Ω. Функция $SH(\Omega)$ называется субгармонической, если выполнены следующие свойства: $-\infty \leq SH(\Omega) < +\infty$ в Ω; $SH(\Omega)$ полунепрерывна сверху в Ω; для любой точки $x_0 \in \Omega$ существует сколь угодно малое положительное число r, такое, что

$$SH(x_0) \leq \tfrac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{D(x_0,r)} SH(x) d\sigma(x),$$

где $d\sigma(x)$ - элемент площади поверхности $D(x_0, r)$, $D(x_0, r)$ - окружность, $c_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$. Функция $Har(\Omega)$ называется гармонической, если $Har(\Omega) \in C^2$ и $\nabla^2 Har(\Omega) = 0$. Для $S \subset \mathbb{C}$ классы $C^m_{\mathbb{R}}(S)$ и $C^m_{\mathbb{C}}(S)$, где $m \in 0 \cup \mathbb{N} \cup \infty$, — пространства непрерывных вещественнозначных и соответственно комплекснозначных m раз непрерывно дифференцируемых функций относительно евклидовой топологии, индуцированной с $\mathbb{C}_\infty$. Верхний индекс $m = 0$ (непрерывные функции) или нижний индекс $\mathbb{R}$ часто опускаем.

Положительность всюду понимается нестрого как ≥ 0. Аналогичное соглашение — для отрицательности: ≤ 0. Так же нестрого понимается *возрастание* и *убывание*. Так, функция $\phi \colon I \to [-\infty, +\infty]$, $I \subset [-\infty, +\infty]$, *возрастающая* (соответственно *убывающая*), если для любых $x_1, x_2 \in I$ неравенство $x_1 \leq x_2$ влечет за собой *нестрогое* неравенство $\phi(x_1) \leq \phi(x_2)$ (соответственно $\phi(x_1) \geq \phi(x_2)$).

Для функции или отображения f на множестве $A \supset S$ через $f \Big|_S$ обозначаем сужение f на подмножество S. Для $a \in [-\infty, +\infty]$ или функции $f\colon A \to [-\infty, +\infty]$, как обычно, полагаем $a^+ := \max\{0, a\}$ и $f^+\colon a \mapsto \bigl(f(a)\bigr)^+$, $a \in A$. Для $b \in [-\infty, +\infty]$ пишем также $f \equiv b$ или $f \not\equiv b$, если соответственно $f(a) \equiv b$ при всех $a \in A$ или $f(a) \neq b$ для некоторого $a \in A$.

Напомним, что для функции $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\phi\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, *прямое преобразование Гильберта* Hil определяется интегралом

$$(\mathrm{Hil}\,\phi)(x) := \frac{1}{\pi}\, PV \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\phi(t)}{x-t} dt, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

где $PV \int$ обозначает главное значение интеграла в смысле Коши. Такая функция$(\mathrm{Hil}\,p)(x)$ определена почти для всех $x \in \mathbb{R}$. *Обратное преобразование Гильберта* отличается только знаком

$$(\mathrm{Hil}^{-1}\phi)(x) := \frac{1}{\pi}\, PV \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\phi(t)}{t-x} dt = -(\mathrm{Hil}\,\phi)(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Классы $R\mathcal{P}_0^m$ основных, или тестовых, функций

Всюду далее *рассматриваем только случай*

$$\boxed{m \in \bigl(\mathbb{N} \setminus \{1\}\bigr) \cup \{\infty\}.} \tag{3}$$

Определение 4. Подкласс RP_0^m *положительных непрерывных функций*

$$\phi\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [0, +\infty), \quad Z_\phi := \bigl\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon \phi(x) = 0\bigr\}, \tag{4}$$

с сужением на $\mathbb{R} \setminus \bigl(\{0\} \cup Z_\phi\bigr)$ из класса

$$C^m\Bigl(\mathbb{R} \setminus \bigl(\{0\} \cup Z_\phi\bigr)\Bigr), \tag{5}$$

для которых одновременно выполнены

- *условие финитности*

$$\phi(x) \equiv 0, \quad |x| \geq R_\phi > 0, \tag{6}$$

где $R_\phi > 0$ — постоянная, зависящая от ϕ;

- *условие полунормировки* в нуле

$$\limsup_{0\neq x\to 0} \frac{\phi(x)}{-\log|x|} \leq 1; \tag{7}$$

- *сопряженное условие положительности* для $x \in \mathbb{R} \setminus \bigl(\{0\} \cup Z_\phi\bigr)$ выглядит как

$$(-\operatorname{Hil}\phi)'(x) := \frac{1}{\pi}\, PV \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\phi(t)-\phi(x)}{(t-x)^2} dt \geq 0, \tag{8}$$

  а последнее неравенство после замены переменных можно записать в форме

$$(-\operatorname{Hil}\phi)'(x) = \frac{1}{\pi}\, PV \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)-2\phi(x)}{t^2} dt \geq 0. \tag{9}$$

Сопряженные условия положительности (8)–(9) эквивалентны *возрастанию обратного преобразования Гильберта*

$$\operatorname{Hil}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t-x} dt = (-\operatorname{Hil}\phi)(x) \tag{10}$$

отдельно на каждом открытом интервале, являющимся связной компонентой дополнения $\complement_{\mathbb{R}}\bigl(\{0\} \cup Z_\phi\bigr)$ замкнутого множества $\{0\} \cup Z_\phi$ до $\mathbb{R}$.

Здесь левые части можно заменить на обратное преобразование Гильберта производной ϕ' функции ϕ за счет известного тождества

$$(-\operatorname{Hil}\phi)'(x) \equiv (-\operatorname{Hil}\phi')(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{11}$$

если производная ϕ' принадлежит некоторому $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, или если рассматривать производные и преобразование Гильберта в смысле теории распределений (обобщенных функций) [§ 3.3, 1].

Для $\lambda \in \mathbb{C}_\pm := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *интеграл Пуассона* $\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi$ функции $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, определяется как

$$(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi)(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Im\lambda|}{(t-\Re\lambda)^2 + (\Im\lambda)^2}\, \phi(t)dt, \quad \Im\lambda \neq 0. \tag{12}$$

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ полагаем

$$(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi)(\lambda) := \phi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{13}$$

Интеграл Пуассона из (12) — гармоническая функция на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Определения (12) и (13) вместе определяют *преобразование Пуассона* $\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}$.

Определение 5. *Функция V^{ϕ} — положительная субгармоническая в проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ее сужение $V^{\phi}\Big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ совпадает с функцией ϕ, функция V^{ϕ} удовлетворяет условию полунормировки в нуле*

$$\limsup_{\zeta\to 0} \frac{V^{\phi}(\zeta)}{-\log|\zeta|} \le 1 \tag{14}$$

и с постоянной R_{ϕ} из условия финитности (6) *имеем оценку*

$$V^{\phi}(\zeta) \le \text{const}\left|\Im\frac{1}{\zeta}\right|, \quad |\zeta| \ge 2R_{\phi}. \tag{15}$$

Определение 6. Субгармоническую в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функцию V будем называть потенциалом Йенсена (с полюсом в точке 0) если выполнены следующие три условия:

1. $V(\varsigma) \ge 0$ при $\varsigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (положительность);
2. Существует компакт $K \subset \mathbb{C}$, для которого $V \equiv 0$ на $\mathbb{C} \setminus K$ (финитность);
3. $$\limsup_{0\ne\varsigma\to 0} \frac{V(\varsigma)}{-\log|\varsigma|} \le 1; \tag{16}$$

Сужение потенциалов Йенсена на проколотую вещественную ось

Теорема 1. Если V - потенциал Йенсена, и сужение $\varphi := V|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ из класса $C^m(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ при некотором $m \in (\mathbb{N}\setminus\{1\}) \cup \{\infty\}$, то $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$ и

$$V^{\varphi} := \left(P_{\mathbb{C}_\pm}\varphi\right)(\varsigma) \ge V(\varsigma),\ \varsigma \ne 0. \tag{17}$$

Доказательство. Условия положительности, финитности и полунормировки в нуле из определения класов $R\mathcal{P}_0^m$ выполнены по Определению 3 потенциалов Йенсена. Функция V^{φ} непрерывна на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и гармоническая в $\mathbb{C}_\pm$. Так как потенциал Йенсена V субгармоничен в $\mathbb{C}_\pm$, а его сужение на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ совпадает с граничными значениями функции V^{φ} на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, то V^{φ} мажорирует V на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, т.е. выполнено (17). Следовательно, для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ среднее по кругу $x_0 + r\mathbb{D}, r < |x_0|$, от функции V^{φ} не меньше среднегопо тому же кругу от потенциала V, что в силу субгармоничности потенциала Йенсена V больше или равно $\varphi(x_0) = V^{\varphi}(x_0)$.

Следовательно, функция V^{φ} субгармоническая в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теперь можно проверить условие возрастания обратного преобразования Гильберта – $H\varphi$ отдельно на каждом открытом интервале - связной компоненте дополнения замкнутого множества Z_{φ} до $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ в форме сопряженного условия положительности (9). Для этого будем пользоваться теорией распределений (обобщенных функций).

Пусть, как и выше, $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, r достаточно мало, а $\psi_0 \in C_0^{\infty}(x_0-r, x_0+r)$ – положительная функция; $D_+ := (x_0 + r) \cap \mathbb{C}_+$ и $D_- := (x_0 + r) \cap \mathbb{C}_-$ – верхний и нижний открытые полукруги; Δ - оператор Лапласса; $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_+^{in}}$ и $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_-^{in}}$ – оператор дифференциирования по внутренней нормали на границах $\partial D_{\pm}$.

Лемма 1. Пусть в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ задана дважды непрерывно дифференциируемая кривая Σ и пусть с одной стороны от Σ в окрестности z_0 (т.е. в некоторой компоненте множества $(z_0+r\mathbb{D})\cap(\mathbb{D}\setminus\Sigma)$ при достаточно малом r) задана гармоническая функция V, имеющая в каждой точке z границы $\partial((z_0+r\mathbb{D})\cap\Sigma)$ предел $\lim_{\varsigma\to z} V(\varsigma) = \psi(z)$, причем функция ψ на Σ дважды непрерывно дифференциируема. Тогда градиент $gradV$ имеет конечный предел в каждой точке границы $\partial((z_0 + r\mathbb{D}) \cap \Sigma)$ и может быть непрерывно продолжен на $(z_0 + r\mathbb{D}) \cap \Sigma$.

По Лемме 1 сужения функции V^{φ} на замыкания $\bar{D}_+$ и $\bar{D}_-$ принадлежат классу C^1, а на D_+ D_- принадлежит классу C^1, а на D_+ и D_- даже бесконечно дифференциируемые как гармонические. Выпишем вторую формулу Грина в этих полукругах для положительного приложения $\psi \in C_0^{\infty}(x_0+r\mathbb{D})$ функции $\psi_0 = \psi \mid_{(x_0-r,x_0+r)}$ и функции V^{φ}:

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(V^{\varphi}(t)\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}_+^{in}}(t) - \psi(t)\frac{\partial V^{\varphi}}{\partial\vec{n}_+^{in}}(t) \right) dt = \int\int_{D_+} (\psi\Delta V^{\varphi} - V^{\varphi}\Delta\psi)\, dx\, dy \tag{18}$$

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(V^{\varphi}(t)\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}_-^{in}}(t) - \psi(t)\frac{\partial V^{\varphi}}{\partial\vec{n}_-^{in}}(t) \right) dt = \int\int_{D_+} (\psi\Delta V^{\varphi} - V^{\varphi}\Delta\psi)\, dx\, dy \tag{19}$$

В силу гладкости функции ψ и противоположной направленности нормалей n_+^{in} и n_-^{in} справедливо тождество

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}_+^{in}}(t) + \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}_-^{in}}(t) = \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}_+^{in}}(t) + \frac{\partial\psi}{(-\partial\vec{n}_+^{in})}(t) \equiv 0,\ t \in (x_0 - r,\ x_0 + r) \tag{20}$$

Гармоничность функции V^φ в $\mathbb{C}_\pm$ влечет за собой тождество $V^\varphi(\varsigma) \equiv 0$ на $D_+ \cup D_-$. Последнее вместе с (20) последнее после сложения (18) с (19) дает равенство

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} \psi(t) \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_+^{in}}(t) + \frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_-^{in}}(t) \right) dt = \int\int_{x_0+r\mathbb{D}} V^\varphi \Delta\psi dx\, dy \qquad (21)$$

где правая часть положительна ввиду субгармоничности функции V^φ в $x_0+r\mathbb{D}$ при подходе с точки зрения теории распределений. Таким образом, из (21) следует

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_+^{in}}(t) + \frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_+^{in}}(t) \geq 0,\ t \in \mathbb{R} \setminus 0 \qquad (22)$$

В силу произвола в выборе $x_0 \in \mathbb{R} \setminus 0$ и положительной функции $\psi \in C_0^\infty(x_0 + r\mathbb{D})$. Но сумма производных по нормали из (22) уже вычислена и равна главному значению интеграла в смысле Коши из (8). Таким образом выполнено сопряженное условие положительности (8), а функция φ принадлежит классу $R\mathcal{P}_0^m$. □

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358 «Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики».

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Уфа, РИЦ БашГУ, 2011.

[2] *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.

[3] *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984 С. 26–27.

[4] *Брело М.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980 С. 9–18.

УДК 517.956

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ С МАЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Черданцева К. И.
Уфа, БашГУ

§ 1. **Постановка задачи**

Пусть $n \geqslant 3$, Ω и ω — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно дифференцируемыми границами, начало координат лежит в Ω и ω, $a_{ij}(x), a(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\alpha_1 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \qquad \alpha_1 > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$

$$H := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a(x).$$

Обозначим $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$. Здесь и далее $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр.

В работе [1] было доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть λ_0 – собственное значение кратности N краевой задачи*

$$H\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \qquad \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Тогда, к собственному значению λ_0 сходится N собственных значений (с учетом совокупной кратности) краевой задачи

$$H\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \qquad \psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon. \tag{2}$$

В работе [2] при $n = 2$ и $n = 3$ для $H = -\Delta$ были построены полные асимптотические разложения минимальных собственных значений краевой задачи (2). В настоящей работе методом согласования асимптотических разложений [3], [4], [5] построены полные асимптотики собственных значений возмущенной задачи (2) как в простом, так и в двукратном случае для H с переменными коэффициентами.

§ 2. **Основные утверждения**

Не ограничивающего общности, будем считать, что $a_{ij}(0) = \delta_i^j$, где δ_i^j – символ Кронекера.

Прежде, чем перейти к формулировке основных теорем, введем некоторые обозначения. Здесь и всюду далее, $|S_n|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $d(n) = 0$ при нечетных n и $d(n) = 1$ при четных n.

В работе доказаны три следующих теоремы.

Теорема 1. *Пусть λ_0 – простое собственное значение краевой задачи (1), ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция.*

Тогда, если $\psi_0(0) \neq 0$, то собственное значение λ_ε возмущенной краевой задачи (2), сходящееся к λ_0, имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{i+n-2,0}$$
$$+ d(n)\varepsilon^{2(n-2)} \ln \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=(n-2)p}^{\infty} \varepsilon^i \ln^p \varepsilon \lambda_{i+2(n-2),p+1},$$

где

$$\lambda_{n-2,0} = -c(\omega) \, |S_n| \, (n-2)\psi_0^2(0),$$

$$\lambda_{(p+1)(n-2),p} = -c^{p+1}(\omega) A^p(n) \, |S_n| \, (n-2)\psi_0^2(0),$$

$c(\omega) > 0$ – гармоническая емкость области ω, а $A(n)$ — постоянные, которые зависят только от n, a_{ij} и a.

Заметим, что если $\partial\omega = S_n$, то $c(\omega) = 1$, а если $H = -\Delta$, то

$$A(n) = -\lambda_0^{\frac{n}{2}-1} \left((n-2)!!(n-4)!!\right)^{-1}.$$

Обозначим через $\widetilde{z}_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ гармонические в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}$ функции, удовлетворяющие на $\partial\omega$ граничным условиям $\widetilde{z}_0 = 1$, $\widetilde{z}_q = x_q$ при $q = 1, ..., n$. При $r \to \infty$ они имеют следующие асимптотики

$$\widetilde{z}_m = c_{m,0} r^{-n+2} + \sum_{p=1}^{n} c_{m,p} x_p r^{-n} + O\left(r^{-n}\right), \quad m = 0, ..., n,$$

где $c_{m,p}$ – постоянные.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.*

Тогда, если $\psi_0(0) = 0$, *то собственное значение* λ_ε *задачи (2), сходящееся к* λ_0, *имеет асимптотику*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^n \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{i+n,0} + d(n)\varepsilon^{2(n-1)} \ln\varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=(n-2)p}^{\infty} \varepsilon^i \ln^p \varepsilon \lambda_{i+2(n-1),p+1},$$

где

$$\lambda_{n,0} = -|S_n|\,\nabla\psi_0(0)C_p(\omega)\nabla\psi_0(0),$$
$$\lambda_{(p+1)(n-2)+2,p} = -|S_n|\,A^p(n)\nabla\psi_0(0)C_p(\omega)\nabla\psi_0(0).$$

$C_p(\omega)$ — $n\times n$-*матрица с компонентами* $c_{m,q}$ *при* $p = 0$ *и с компонентами* $c^{p-1}(\omega)c_{m,0}c_{0,q}$ *при* $p \geqslant 1$.

Если λ_0 – двукратное собственное значение предельной краевой задачи (1), то из леммы 1 вытекает, что для сходящихся к λ_0 собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2)}$ возмущенной задачи (2) возможны следующие случаи: либо это два простых собственных значения, либо это одно двукратное собственное значение, либо для разных ε имеет место один из этих вариантов. И даже, если к λ_0 сходится два простых собственных значения $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2)}$, то нельзя утверждать, что соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственные функция $\psi_\varepsilon^{(j)}$, продолженные нулем в ω_ε, имеют предел в $L_2(\Omega)$. Результаты [1] лишь гарантируют, что из любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_m} \to 0$ такую, что на ней имеет место сходимость $\psi_\varepsilon^{(j)} \to \psi_0^{(j)}$ в $L_2(\Omega)$, где $\psi_0^{(j)}$ – ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи (1), соответствующие λ_0. Однако, эти пределы, вообще говоря, могут меняться в зависимости как от выбора последовательности $\{\varepsilon_k\}$, так и от выбора подпоследовательности $\{\varepsilon_{k_m}\}$.

В работе рассматривается случай наиболее общего положения:

$$|\psi_0^{(1)}(0)| + |\psi_0^{(2)}(0)| \neq 0. \tag{3}$$

Тогда, очевидно, эти собственные функции можно выбрать так, что

$$\psi_0^{(1)}(0) \neq 0, \qquad \psi_0^{(2)}(0) = 0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть* λ_0 *– двукратное собственное значение задачи (1),* $\psi_0^{(1)}$ *и* $\psi_0^{(2)}$ *– соответствующие ортонормированные в* $L_2(\Omega)$ *собственные* *функции, удовлетворяющие условию (3) и выбранные в соответствии с (4).*

Тогда существуют два простых собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2)}$ задачи (2), сходящиеся к λ_0, и они имеют асимптотики

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} = \lambda_0 + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{i+n-2,0}^{(1)} + d(n)\varepsilon^{2(n-2)} \ln \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=(n-2)p}^{\infty} \varepsilon^i \ln^p \varepsilon \lambda_{i+2(n-2),p+1}^{(1)},$$

$$\lambda_\varepsilon^{(2)} = \lambda_0 + \varepsilon^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_{i+n,0}^{(2)} + d(n)\varepsilon^{2(n-2)+2} \ln \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=(n-2)p}^{\infty} \varepsilon^i \ln^p \varepsilon \lambda_{i+2(n-2)+2,p+1}^{(2)},$$

где

$$\lambda_{n-2,0}^{(1)} = -c(\omega)\left|S_n\right|(n-2)\left(\psi_0^{(1)}(0)\right)^2,$$
$$\lambda_{(p+1)(n-2),p}^{(1)} = -c^{p+1}(\omega)A^p(n)\left|S_n\right|(n-2)\left(\psi_0^{(1)}(0)\right)^2,$$

$$\lambda_{n,0}^{(2)} = -\left|S_n\right| \nabla\psi_0^{(2)}(0)\widetilde{C}_p(\omega)\nabla\psi_0^{(2)}(0),$$
$$\lambda_{(p+1)(n-2)+2,p}^{(2)} = -\left|S_n\right| \nabla\psi_0^{(2)}(0)\widetilde{A}(n)\widetilde{C}_p(\omega)\nabla\psi_0^{(2)}(0),$$

$\widetilde{C}_p(\omega)$ – $n \times n$-матрица с компонентами

$$c_{m,q} - \frac{c_{m,0}c_{0,q}}{c(\omega)}, \quad p=0, \qquad (-1)^p c_{m,0} c_{0,q}^{p+1}\left(1 - \frac{1}{c(\omega)}\right), \quad p \geqslant 1,$$

$\widetilde{A}(n) = (A_1^q(n), \dots, A_n^q(n))$, $A_i(n)$ – постоянные, которые зависят только от n, a_{ij} и a.

Для соответствующих собственных функций нормированных в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ (и продолженные нулем в ω_ε) имеет место сходимость

$$\left\|\psi_\varepsilon^{(j)} - \psi_0^{(j)}\right\|_{L_2(\Omega} \to 0 \ \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Заметим, что если $H = -\Delta$, то $A_i(n) = -\lambda_0^{\frac{n}{2}}\left(n!!(n-2)!!\right)^{-1} x_i$.

Из теоремы, в частности, следует, что если выполнено условие (3), то двукратное собственное значение λ_0 при рассматриваемом возмущении расщепляется на два простых собственных значения, а соответствующие собственные функции сходятся к собственным функциям задачи (1), выбранным в соответствии с (4).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта 12-01-00445).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гадыльшин Р. Р.* Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений // Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988, с. 4–16.

[2] *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 2. С. 347-371.

[3] *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач // Наука, М., 1989.

[4] *Гадыльшин Р. Р.* Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задачи для оператора Лапласа // Современная математика и ее приложения. Т.5. 2003. С. 3–32.

[5] *Бикметов А.Р., Гадыльшин Р. Р.* Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n-мерной области // Уфимский матем. журнал. Т.4. 2012, № 2. С. 28–64.

УДК 517.916

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛАПЛАСИАНА В КРУГЕ С ЧАСТОЙ СМЕНОЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Шарапов Т. Ф.
Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы

§ 1. **Постановка задачи и формулировка результатов.**

Краевые эллиптические задачи с часто чередующимся типом граничных условий возникают в различных приложениях, например, при исследовании собственных значений часто закрепленной мембраны, в задачах нефтехимии и в других областях. Отметим труды в этой области таких ученых, как Д. И. Борисов, Р. Р. Гадыльшин, Г. А. Чечкин. В настоящей работе рассматривается краевая задача для оператора Лапласа в круге с часто и периодически чередующимся типом граничных условий.

Пусть $x = (x_1, x_2)$ - декартовы координаты, (r, θ) - полярные координаты, $\varepsilon = 2N^{-1}$ - малый параметр, $N \gg 1$ целое число, D - круг с центром в начале координат и радиусом равным единице, ∂D - граница круга D. Обозначим через $\Gamma_\varepsilon = \partial D \backslash \overline{\gamma_\varepsilon}$, где γ_ε объединение N открытых непересекающихся лежащих на ∂D дуг, длиной $2\varepsilon\eta$ каждая $(0 < \eta < \pi/2)$, расположенных так, что любая из этих дуг получается из соседней поворотом на $\varepsilon\pi$ относительно начала координат. При задании на γ_ε граничное условие Дирихле, а на Γ_ε - граничное условие Неймана, будем понимать случай часто и периодически чередующимся типом граничных условий.

Нашей целью является построение асимптотики решения при $\varepsilon \to 0$ следующей задачи:

$$\begin{cases} -\Delta_x u_\varepsilon - \lambda u_\varepsilon = f, \ x \in D, \\ u_\varepsilon\big|_{r=1} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\right|_{r=1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\lambda < 0$ - некоторое фиксированное число, $f \in C_0^\infty(\bar{D})$ - заданная функция.

В этой работе на основе метода пограничного слоя будет формально построена асимптотика. Базовой идеей данного построения является использование пограничного слоя в окрестности границы ∂D с целью удовлетворения граничных условий задачи (1).

Теорема 1. *Формальное асимптотическое разложение решения задачи* (1) *имеет вид:*

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) + \chi(r) u_\varepsilon^{mid}(\xi,\theta,\eta),$$

где $\chi(r)$ — *бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при* $r > \frac{2}{3}$ *и нулю при* $r < \frac{1}{3}$,

$$u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x,\eta)$$

$$u_\varepsilon^{mid}(\xi,\theta,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \upsilon_i(\xi,\theta,\eta),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \left(\dfrac{\theta}{\varepsilon}, \dfrac{1-r}{\varepsilon}\right)$.

Функции $\upsilon_1(\xi), \upsilon_2(\xi)$ найдены как решения некоторых краевых задач.

§ 2. **Формальное построение асимптотик.**

Асимптотику решения задачи (1) будем искать в виде суммы внешнего разложения и пограничного слоя:

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) + u_\varepsilon^{mid}(\xi,\theta,\eta), \tag{2}$$

где внешнее разложение строим в виде:

$$u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x,\eta). \tag{3}$$

Подставив разложение (3) в уравнении задачи (1), получим уравнения на $u_0(x)$

$$(-\Delta_x - \lambda) u_0(x) = f, \ x \in D \tag{4}$$

и на $u_i(x,\eta)$ при $i \geq 1$

$$(-\Delta_x - \lambda)(\varepsilon u_1(x,\eta) + \varepsilon^2 u_2(x,\eta) + \varepsilon^3 u_3(x,\eta) + ...) = 0, \ x \in D \tag{5}$$

где (4) и (5) есть уравнения на коэффициенты асимптотики.

Пограничный слой ищем в виде

$$u_\varepsilon^{mid}(\xi,\theta,\eta) = \upsilon_0(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \upsilon_i(\xi,\theta,\eta). \tag{6}$$

Обозначим: $\Pi = \{\xi : -\pi/2 < \xi_1 < \pi/2,\ \xi_2 > 0\}$, $\Gamma^\eta = O\xi_1 \backslash \overline{\gamma^\eta}$, где γ^η-объединение интервалов на прямой $\xi_2 = 0$, получающихся из интервала $(-\eta, \eta)$ сдвигами, кратными π. Через Ψ обозначим класс четных, π- периодических по переменной ξ_1 экспоненциально убывающих вместе с производными при $\xi_2 \to +\infty$, $\Psi_0^\pm = \Psi^\pm \cap L_2(\Pi)$, $\Psi_1^\pm = \Psi^\pm \cap W_2^1(\Pi)$.

В переменных ξ оператор Лапласа выглядит следующим образом:

$$\Delta_\xi = \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} - \frac{1}{1-\varepsilon\xi_2}\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \frac{1}{(1-\varepsilon\xi_2)^2}\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}. \tag{7}$$

Теперь раскладывая $\dfrac{1}{1-\varepsilon\xi_2}$ и $\dfrac{1}{(1-\varepsilon\xi_2)^2}$ в уравнении (7) в ряд Тейлора и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε (в уравнении с ε^{i-2}, а в граничных условиях - ε^{i-1} и ε^i), получаем задачи на υ_0 :

$$\begin{cases} \Delta_\xi \upsilon_0 = 0,\ \xi_2 > 0, \\ \upsilon_0 \mid_{\xi_2=0} = -u_0 \mid_{r=1}, \\ \left.\dfrac{\partial \upsilon_0}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

и на υ_n при $n \geq 1$:

$$\Delta_\xi \upsilon_n = F_n = \sum_{i=1}^{n-1}(\xi_2^{i-1}\frac{\partial}{\partial\xi_2} - (i+1)\xi_2^i\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + 2i\xi_2^{i-1}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\theta})\upsilon_{n-i}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-2}(\lambda + i\xi_2^{i-1}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2})\upsilon_{n-(i+1)},\ \xi_2 > 0, \tag{9}$$

$$\upsilon_n \mid_{\xi_2=0} = -u_n \mid_{r=1}, \quad \left.\frac{\partial \upsilon_n}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = \left.\frac{\partial u_{n-1}}{\partial r}\right|_{r=1}. \tag{10}$$

Обозначим $X(\xi,\eta) = \operatorname{Re}\ln\left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z + \sin^2\eta}\right) - \xi_2$, $\quad Y(\xi,\eta) = X(\xi,\eta) + \xi_2 + \ln\sin\eta$. В работе [2] указано, что $X \in \Psi_1^+$ - гармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$X = \ln\sin\eta, \quad \xi\in\gamma^\eta, \quad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma^\eta \tag{11}$$

и имеющая асимптотику

$$X(\xi,\eta) = \xi_2 - \ln\sin\eta + O(e^{-\xi_2}), \quad \xi_2 \to \infty.$$

Следующая лемма была доказана в работе [2].

Лемма 1. *Пусть $F \in \Psi_0$, υ- решение задачи*

$$\Delta_\xi \upsilon = F, \qquad \xi_2 > 0, \qquad \upsilon = A, \quad \xi \in \gamma^\eta, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_2} = B, \quad \xi \in \Gamma^\eta. \tag{12}$$

Тогда $\upsilon \in \Psi_1$ если и только если

$$\int\limits_{\Pi} Y F d\xi = \pi(A + B \ln \sin \eta). \tag{13}$$

Рассмотрим задачу (8). Так как $F_0 = 0$ и $B_0 = 0$, то подставляя эти значения в формулу (13), получим $\upsilon_0 \mid_{\xi_2=0} = 0$. Следовательно задача (8) имеет единственное решение $\upsilon_0 = 0$ поэтому члена υ_0 не должно быть в разложении (6).

Равенство $\upsilon_0 \mid_{\xi_2=0} = 0$ в силу задачи (8) влечет краевое условие

$$u_0 = 0, \quad x \in \partial D. \tag{14}$$

Получим задачу на u_0 :

$$\begin{cases} (-\Delta_x - \lambda) u_0(x) = f, \ x \in D, \\ u_0 = 0, \quad x \in \partial D. \end{cases} \tag{15}$$

Выпишем задачу для $j = 1$ учитывая, что $\upsilon_0 = 0$:

$$\begin{cases} \Delta_\xi \upsilon_1 = 0, \ \xi_2 > 0, \\ \upsilon_1 \mid_{\xi_2=0} = -u_1 \mid_{r=1}, \\ \left.\dfrac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = \left.\dfrac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=1}. \end{cases} \tag{16}$$

Применим лемму для (16), получим:

$$\upsilon_1 \mid_{\xi_2=0} = -\left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=1} \ln \sin \eta. \tag{17}$$

С учетом гармоничности функции $X(\xi, \eta)$ и граничных условий (11) заключаем, что решение задачи (16) имеет вид

$$\upsilon_1 = -\left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=1} X(\xi, \eta). \tag{18}$$

Обозначим $\left.\dfrac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=1} = \alpha_0(\theta)$.

Равенство (17) в силу задачи (16) влечет краевое условие

$$u_1 = \alpha_0(\theta) \ln \sin \eta, \quad x \in \partial D. \tag{19}$$

Получим задачу на u_1 :

$$\begin{cases} (-\Delta_x - \lambda)u_1(x,\eta) = 0, \ x \in D, \\ u_1 = \alpha_0(\theta)\ln\sin\eta, \quad x \in \partial D. \end{cases} \tag{20}$$

Выпишем задачу для $j = 2$:

$$\begin{cases} \Delta_\xi \upsilon_2 = \dfrac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_2} - 2\xi_2 \dfrac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial \xi_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial \xi_1 \partial \theta}, \ \xi_2 > 0, \\ \upsilon_2 \mid_{\xi_2=0} = -u_2 \mid_{r=1}, \\ \left.\dfrac{\partial \upsilon_2}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=1}. \end{cases} \tag{21}$$

Подставляя $\upsilon_1 = -\alpha_0(\theta)X(\xi,\eta)$ в правую часть уравнения задачи (21), применим лемму для задачи на υ_2, при этом зная, что фунции $X \in \Psi_1^+$ и $Y \in \Psi_1^+$, получим:

$$\upsilon_2 \mid_{\xi_2=0} = -\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=1} \ln\sin\eta. \tag{22}$$

Равенство (22) в силу задачи (21) влечет краевое условие

$$u_2 = \left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=1} \ln\sin\eta, \quad x \in \partial D. \tag{23}$$

Получим задачу на u_2 :

$$\begin{cases} (-\Delta_x - \lambda)u_2(x,\eta) = 0, \ x \in D, \\ u_2 = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=1} \ln\sin\eta, \quad x \in \partial D. \end{cases} \tag{24}$$

Решение задачи (21) имеет вид

$$\upsilon_2 = \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_2} + \tilde{\upsilon_2}(\xi,\theta), \tag{25}$$

где

$$\Delta_\xi \tilde{\upsilon_2}(\xi,\theta) = 2\frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial \xi_1 \partial \theta}$$

и

$$\tilde{\upsilon_2}(\xi,\theta) \mid_{\xi_2=0} = -\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=1} \ln\sin\eta.$$

Дальнейшие построения коэффициентов υ_i задач (24) и (15) проводятся индуктивно.

Для функций $\upsilon_i (i \geq 2)$ решения задач (9), (10) имеют вид

$$\upsilon_i = \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial \upsilon_{i-1}}{\partial \xi_2} + \tilde{\upsilon}_i(\xi, \theta, \eta),$$

причем

$$\Delta_\xi \tilde{\upsilon}_i(\xi, \theta, \eta) = \sum_{k=1}^{i-1} \left(\xi_2^k \frac{\partial}{\partial \xi_2} - (k+1)\xi_2^{k+1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) \upsilon_{i-k}$$

$$- \sum_{k=1}^{i} \left(2k\xi_2^{k-1} \frac{\partial^2 \upsilon_{i-(k+1)}}{\partial \xi_1 \partial \theta} \right) - \sum_{k=1}^{i-1} \left(\lambda + k\xi_2^{k-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \upsilon_{i-k},\ \xi_2 > 0,$$

Теорема 2. *Существуют ряды* (3), (6) *такие, что*

1. *коэффициенты* $u_i \in C^\infty(\overline{D})$ *являются решениями задач* (4), (5);
2. *для задач* (9) *и* (10) *получено выражения вида* (17), (22);
3. *Для функций* $\upsilon_i (i \geq 2)$ *решения задач* (9), (10) *имеют вид*

$$\upsilon_i = \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial \upsilon_{i-1}}{\partial \xi_2} + \tilde{\upsilon}_i(\xi, \theta, \eta),$$

где

$$\Delta_\xi \tilde{\upsilon}_i(\xi, \theta, \eta) = \sum_{k=1}^{i-1} \left(\xi_2^k \frac{\partial}{\partial \xi_2} - (k+1)\xi_2^{k+1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) \upsilon_{i-k}$$

$$- \sum_{k=1}^{i} \left(2k\xi_2^{k-1} \frac{\partial^2 \upsilon_{i-(k+1)}}{\partial \xi_1 \partial \theta} \right) - \sum_{k=1}^{i-1} \left(\lambda + k\xi_2^{k-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \upsilon_{i-k},\ \xi_2 > 0;$$

4. *на первые коэффициенты асимптотики внешнего разложения выписаны задачи;*

На этом заканчивается построение членов по степеням ε.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Борисов Д. И.* Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий. // Прикладная математика и механика, 2002. С. 36-52.

[2] *Гадыльшин Р. Р.* Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны. // Алгебра и анализ Том 10, (1998), вып. 1.

УДК 517.956

О СМЕНЕ ТИПА ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА

Шишкина Е. А.
Уфа, БГПУ им.М.Акмуллы

§ 1. **Постановка задачи**

Пусть Ω – круг единичного радиуса центром в начале координат, $\Gamma := \partial\Omega$, $x = (x_1, x_2)$ и (r, φ) – декартовы и полярные координаты соответственно, $x_0^{(j)}$ точки с полярными координатами $(r, \varphi) = (1, c_j)$, где $j = \overline{1, N}$, N – фиксированное натуральное число, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $\gamma_{\varepsilon,j} := \{x \in \Gamma :\ \varepsilon a_j < \varphi - c_j < \varepsilon b_j\}$, $\gamma_\varepsilon := \bigcup\limits_{j=1}^{N} \gamma_{\varepsilon,j}$, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \backslash \overline{\gamma_\varepsilon}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $c_1 = 0$.

В работе методом согласования асимптотических разложений [1], [2], [3] строятся полные асимптотически по малому параметру ε собственных значений λ^ε краевой задачи:

$$\begin{gathered} -\Delta\psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \psi^\varepsilon, \quad x \in \Omega, \\ \psi^\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon. \end{gathered} \tag{1}$$

§ 2. **Основные утверждения**

Из [4] следует, что при $\varepsilon \to 0$ собственные значения краевой задачи (1) сходятся к собственным значениям краевой задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \Omega, \qquad \psi_0 = 0, \quad x \in \Gamma \tag{2}$$

с учетом совокупной кратности.

В свою очередь, хорошо известно, что задача (2) имеет либо простые собственные значения, совпадающие с квадратами нулей функции Бесселя нулевого порядка $\mathcal{J}_0(z)$, либо двукратные собственные значения, совпадающие с квадратами нулей функции Бесселя m-ого порядка $\mathcal{J}_m(z)$, $m \geqslant 1$. Известно, что нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи (2), соответствующие простому собственному значению λ_0, имеют вид

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\mathcal{J}_0'(\sqrt{\lambda_0}) \right)^{-1} \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0} r),$$

а ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, соответствующие двукратному собственному значению, имеют вид

$$\mathfrak{J}_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\mathcal{J}'_m\left(\sqrt{\lambda_0}\right)\right)^{-1} \mathcal{J}_m\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\cos m\varphi,$$
$$\mathfrak{J}_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\mathcal{J}'_m\left(\sqrt{\lambda_0}\right)\right)^{-1} \mathcal{J}_m\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\sin m\varphi.$$

Обозначим через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы с координатами a_j и b_j, соответственно.

Из [4] следует, что, если ψ_0 – нормированная собственная функции, соответствующая простому собственному значению λ_0 краевой задачи (2), ψ^ε – нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению λ^ε краевой задачи (2), сходящемуся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$, то $\psi^\varepsilon \to \psi_0$ в $L_2(\Omega)$.

В работе доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Собственное значение λ^ε краевой задачи (2), сходящееся к простому собственному значению λ_0 краевой задачи (1), имеет асимптотику*

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon\, \lambda_{i+2,k},$$

где

$$\lambda_{2,0} = -\frac{\lambda_0}{2}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2,$$
$$\lambda_{2+2k,k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+1} (-\lambda_0)^{k+1} |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^{2(k+1)}, \quad k \geqslant 1.$$

Пусть теперь λ_0 двукратное собственное значение краевой задачи (1). Тогда из [4] вытекает, что для сходящихся к λ_0 собственных значений краевой задачи (1) возможны следующие ситуации: либо это два простых собственных значения, либо это одно двукратное собственное значение, либо для разных ε имеет место один из этих вариантов. И даже, если к λ_0 сходится два простых собственных значения $\lambda^{\varepsilon,(1)}$ и $\lambda^{\varepsilon,(2)}$ краевой задачи (1), то нельзя утверждать, что соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функция $\psi^{\varepsilon,(n)}$ имеют предел. Из [4] следует, что из любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_m} \to 0$ такую, что на ней имеет место сходимость $\psi^{\varepsilon,(n)} \to \psi_0^{(n)}$ в $L_2(\Omega)$, где $\psi_0^{(n)}$ – ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции краевой задачи (2), соответствующие λ_0. Однако, эти пределы, вообще говоря, могут меняться в зависимости от выбора подпоследовательности $\varepsilon_{k_m} \to 0$.

Всюду далее критическим будем называть случай, когда при фиксированном числе m имеют место равенства $\sin m\varphi_j = 0$ для всех $j = \overline{1, N}$. В частности критическим является случай $N = 1$ (при принятом выше соглашении, что $c_1 = 0$).

Теорема 2. *Пусть λ_0 – двукратное собственное значение предельной краевой задачи (2), являющееся квадратом нуля функции $\mathcal{J}_m$.*

Тогда собственные значения $\lambda^{\varepsilon,(1)}$, $\lambda^{\varepsilon,(2)}$ возмущенной краевой задачи (1), сходящиеся к λ_0, являются простыми и имеют асимптотики

$$\lambda^{\varepsilon,(n)} = \lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \, \lambda_{i+2,k}^{(n)},$$

где

$$\lambda_{2,0}^{(n)} = -\frac{\lambda_0}{4} \left(|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 + (-1)^{n+1} \mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right),$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^4 - 4 \sum_{i \neq k} (a_i - b_i)^2 (a_k - b_k)^2 \sin^2 m(c_i - c_k)},$$

в некритическом случае и асимптотики

$$\lambda^{\varepsilon,(1)} = \lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \, \lambda_{i+2,k}^{(1)},$$

$$\lambda^{\varepsilon,(2)} = \lambda_0 + \varepsilon^4 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{4}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \, \lambda_{i+4,k}^{(2)}$$

где

$$\lambda_{2,0}^{(1)} = -\frac{\lambda_0}{2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$$

в критическом случае.

Соответствующие собственные функции $\psi^{\varepsilon,(n)}$ сходятся к $\psi_0^{(n)}$ в $L_2(\Omega)$, где

$$\psi_0^{(n)}(x) = \alpha_{n1} \mathfrak{J}_1(x) + \alpha_{n2} \mathfrak{J}_2(x), \tag{3}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+k^2}}, \qquad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = \sqrt{\frac{1}{1+k^2}},$$
$$k = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \cos 2c_j + \sqrt{\left(\sum\limits_{j=1}^{N} \sin 2c_j\right)^2 + \left(\sum\limits_{j=1}^{N} \cos 2c_j\right)^2}}{\sum\limits_{j=1}^{N} \sin 2c_j}. \tag{4}$$

Из теоремы, в частности, следует, что в случае когда λ_0 двукратное собственное значение задачи (2), при рассматриваемом возмущении оно расщепляется на два простых собственных значения, а соответствующие собственные функции сходятся к собственным функциям задачи (2), выбранным в соответствии с (3), (4).

Заметим, что двучленная асимптотика минимального собственного значения в случае $N = 1$, $-a_1 = b_1$ была построена в [5].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта 12-01-00445).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. М. Ильин* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач // М. Наука, 1989.

[2] *Р. Р. Гадыльшин* Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задачи для оператора Лапласа // Современная математика и ее приложения т.5, 2003 г., с. 3–32.

[3] *А. Р. Бикметов, Р. Р. Гадыльшин* Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n-мерной области // Уфимский математический журнал т. 4, № 2, 2012 г., с. 28–64.

[4] *Р. Р. Гадыльшин* Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, БНЦ УрО АН СССР, 1988 г., с. 4–16.

[5] *Р. Р. Гадыльшин, Е.А. Шишкина* О неравенствах Фридрихса для круга// Труды Института математики и механики УрО РАН т. 18, № 2, 2012 г., с. 48-61.

УДК 658.15

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ БЮДЖЕТОМ ДВИЖЕНИЯ ДЕНЕЖНЫХ СРЕДСТВ

Фабарисова А. И.
Уфа, УГАТУ

Управление бюджетом движения денежных средств – это важный инструмент финансового менеджмента предприятия, позволяющий прогнозировать и контролировать денежные потоки, возможные «кассовые разрывы», что, в конечном счете, сказывается на платежеспособности и финансовой устойчивости предприятия. Главной задачей бюджетирования является выработка эффективных и обоснованных управленческих решений, что требует обработки и анализа больших объемов информации.

В результате исследования существующего процесса управления бюджетом движения денежных средств на ОАО «УМПО» было выявлено, что процесс бюджетирования имеет некоторые существенные недостатки. Расчеты и сведение бюджета движения денежных средств осуществляется с помощью стандартных офисных приложений, которые не дают экономисту возможности оперативно осуществить анализ формирования той или иной статьи бюджета в точности до определенного центра финансовой ответственности. Используемые программные средства ограничивают специалиста в работе, так как приходится большую часть времени заниматься контролем за корректностью данных и ручным переносом из одного файла в другой. Кроме того, отсутствует единое информационное пространство для планирования бюджета и анализа его исполнения.

Детальное обследование существующих процессов бюджетирования с использованием методики системного проектирования позволило выделить следующие проблемы: - проблема информационного обмена, связанная с бумажной передачей данных; - отсутствие детализации информации по центрам финансовой ответственности; - отсутствие возможностей для сценарного планирования бюджета.

Для решения перечисленных проблем в ОАО «УМПО» требуется внедрение информационной системы бюджетирования. На российском рынке представлено немалое количество программных продуктов для автоматизации бюджетирования, выбор оптимального варианта осуществлялся методом анализа иерархий. Результат расчетов показал целесообразность приобретения дополнительного модуля «Управление производственным предприятием» в системе программ 1С:Предприятие 8. Внедрение данной системы позволит автоматизировать процесс сбора данных из бюджетов центров финансовой ответственности и операционных бюджетов путем подключения отдела бюджетирования к единому серверу и к единой базе данных. Кроме того, внедренная ИС бюджетирования позволит экономистам предприятия проводить сценарный анализ при планировании бюджета, так как в системе 1С:Предприятие 8 возможно использование нескольких вариантов финансовых планов.

Процесс бюджетирования в 1С:Предприятие 8 начинается с планирования бюджетов поступлений и платежей центров финансовой ответственности, которые формируются на основе данных из документов «План продаж», «План закупок» или «План движения денежных средств». Данные передаются в подсистему бюджетирования с использованием документа «Расчет по модели бюджетирования». В документе указывается сценарий планирования, источник данных для расчета, в качестве параметров для расчета указываются статьи оборотов по бюджетам, в которые будет занесена плановая информация. Сводный бюджет движения денежных средств, консолидирующий информацию бюджетов более низкого уровня, формируется в системе автоматически. Кроме того, в системе происходит автоматический расчет налоговых платежей с последующим отражением в соответствующей бюджетной статье. Реализован механизм установления лимитов и целевых значений по оборотам бюджета. Это значит, что при установке ограничения на затраты для определенного центра финансовой ответственности, сотрудники отдела не смогут спланировать расход сверх установленного лимита.

Система 1С:Предприятие 8 объединяет центры финансовой ответственности с отделом бюджетирования, однако не все подразделения осуществляют свою работу в 1С. На предприятии внедрена ERP-система BAAN, которая имеет сервер базы данных, и для того, чтобы организовать единое информационное пространство процесса бюджетирования, предлагается осуществить подключение сервера 1С к серверу BAAN.

Расчет экономической эффективности, с учетом затрат на создание информационной системы и ее внедрение, показал выгодность проекта, в частности внутренняя норма доходности равна 17,7%, а расчетный срок окупаемости капитальных вложений составляет чуть больше года. Внедрение информационной системы управления бюджетом движения денежных средств в отделе бюджетирования позволит сократить временные затраты при осуществлении исследуемого процесса, сократить потери от неправильно принятых решений и качественно повысить уровень планирования бюджета.