ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО “БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ”
ГОУ ВПО “БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.АКМУЛЛЫ”

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

Труды Международной школы-конференции
для студентов, аспирантов и молодых ученых

Т.8. Зеркина А.В., Картак В.В.
Многомерная геометрия и линейная алгебра

Уфа
РИЦ БашГУ
2010

УДК 517.9
ББК 22.15
З57

Издано при финансовой поддержке БашГУ, а также РФФИ (проект 10-01-06828-моб_г).

Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании. Труды Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. Т.8. Зеркина А.В., Картак В.В. Многомерная геометрия и линейная алгебра.

Расширенный курс лекций по базовому курсу “Многомерная геометрия и линейная алгебра” для студентов естественнонаучных специальностей университета.

Оглавление

Предисловие.

Курс "Многомерная геометрия и линейная алгебра (МГЛА)" является базовым университетским курсом, рассчитанным на 1 семестр, а также важной составной частью трехсеместрового курса "Геометрия" педагогического университета. Для того, чтобы понять его в полной мере, необходимо знание и свободное оперирование основными понятиями дисциплин "Аналитическая геометрия" (см. [10]) и "Высшая алгебра"(см. [11]), поэтому в университете он входит в программу обучения студентов во втором семестре первого курса.

Эта книга представляет собой собранный и обработанный курс лекций, прочитанный старшим преподавателем кафедры высшей алгебры и геометрии БГУ Зеркиной А.В. Главной отличительной особенностью книги является не только простота и доходчивость изложения, но также отсутствие избыточной информации, "перегружающей" курс. Желающих более глубоко разобраться в предмете можно отослать к работам [1]–[9]. Курс лекций дополнен многочисленными иллюстрирующими примерами и рисунками, позволяющими лучше понять изложенный материал.

Авторы выражают благодарность профессору Юлмухаметову Р.С. за идею написания книги, рецензентам профессору Султанаеву Я.Т. и профессору Мухачевой Э.А. за полезные замечания по содержанию книги. Особая благодарность профессору Гадыльшину Р.Р. за интерес, проявленный к работе, а также сотрудникам кафедры высшей алгебры и геометрии БГУ доценту Юрьеву В.А. и ассистенту Муфтахову А.В. за полезные рекомендации и помощь в работе над рукописью.

Лекция 1.

... и вообще что есть пространство, если
не отсутствие в каждой точке тела...
И.Бродский

Линейное (векторное) пространство.

Пусть имеется множество M. Упорядоченная пара элементов из этого множества будет являться элементом декартового произведения множества M на себя: $M \times M = M^2$.

Определение 1.1. *Говорят, что на M определена алгебраическая операция, если задано отображение $f : M^2 \to M$.* Это значит, что любой паре элементов $x, y \in M$, соответствует элемент $z = f(x, y)$, также принадлежащий M.

$$(x; y) \to z = f(x, y) \in M.$$

Определение 1.2. *Множество V элементов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ... называется линейным или векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, если на V определены:*

1) алгебраическая операция „+ “, называемая сложением,

2) произведение $\alpha\mathbf{x} \in V$, $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\quad \forall\, \mathbf{x} \in V$,

а также $\forall\, \mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$, $\quad \forall\, \alpha$, $\beta \in \mathbb{K}$ выполняются следующие 8 аксиом (аксиомы линейного пространства):

1°. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

2°. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

3°. существует *нулевой элемент* $\mathbf{0} \in V$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\quad \forall\, \mathbf{x} \in V$.

4°. $\forall\, \mathbf{x} \in V$ существует *противоположный элемент* $-\mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

5°. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\qquad 1 \in \mathbb{K}$.

6°. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$.

7°. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.

8°. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

Первые четыре аксиомы 1° – 4° определяют на V абелеву группу по сложению („+“). Под полем $\mathbb{K}$ понимают обычно поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 1.3. *Элементы векторного поля V называются векторами.*

Заметим, что множество V может иметь любую природу, поэтому векторами в силу определения (1.3) могут быть объекты любой природы, не обязательно векторы, понимаемые как направленные отрезки. Более того, предстоит доказать, что геометрические векторы образуют линейное векторное пространство. Также и операция сложения вообще говоря не является известной операцией сложения двух чисел, а может быть любой алгебраической операцией (умножение, композиция, и т.д.) двух элементов из V.

Пример 1.1. Числовые поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Пример 1.2. Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Пример 1.3. Множество геометрических векторов (направленных отрезков) $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, ...

Пример 1.4. Рассмотрим множество решений однородной системы линейных уравнений в случае $r < n$ (r – ранг матрицы системы, n – число неизвестных). Если $\mathbf{e_1} = (x_1, \quad x_2, \quad \ldots x_n)$, $\mathbf{e_2} = (y_1, \quad y_2, \quad \ldots y_n)$ – решения, то их линейная комбинация $\alpha\mathbf{e_1} + \beta\mathbf{e_2}$ – тоже решение системы. Аксиомы 1° – 8° выполняются, значит множество решений однородной системы линейных уравнений есть векторное пространство.

Пример 1.5. Нулевое пространство.

Пример 1.6. Множество матриц размеров $m \times n$. Сумма двух таких матриц и произведение матрицы на число есть снова матрица размеров $m \times n$:

$$\begin{aligned}&(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij})\\ &\lambda\,(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})\end{aligned}$$

Все восемь аксиом 1° – 8° выполняются, значит это множество есть векторное пространство.

Пример 1.7. Пространство непрерывных функций на $[a, b]$.

Пример 1.8. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ с алгебраической операцией сложения:

$$\begin{aligned}\forall \quad &\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n),\\ &\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_n + y_n),\end{aligned}$$

и с операцией умножения на число: $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots,\ \lambda x_n)$, есть линейное пространство.

Пример 1.9. Рассмотрим арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, на котором алгебраическая операция определена стандартно:

$$\begin{aligned}\forall \quad &\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n),\\ &\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_n + y_n),\end{aligned}$$

а операцию умножения на число определена следующим образом: $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$. Тогда это множество не является линейным пространством, т.к. не выполняется аксиома 7°. Остальные аксиомы 1°– 6° и 8° верны.

Справедливы следующие следствия из аксиом:

1°. Единственность нуля.

◄ Предположим, что в V имеются два нулевых элемента $\mathbf{0_1}$ и $\mathbf{0_2}$. Тогда по аксиоме 3° справедливы равенства $\mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} = \mathbf{0_2}$ и $\mathbf{0_2} + \mathbf{0_1} = \mathbf{0_1}$. В силу аксиомы 1° : $\mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} = \mathbf{0_2} + \mathbf{0_1}$, откуда $\mathbf{0_2} = \mathbf{0_1}$. ►

2° Единственность противоположного элемента.

◀ Пусть у элемента $\mathbf{x}$ найдется два противоположных элемента: $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, тогда, в силу аксиомы 4° : $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{z}=\mathbf{0}$. Воспользуемся аксиомами 1° и 2° : $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}= =\mathbf{y}+(\mathbf{x}+\mathbf{z})=\mathbf{y}+\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{z}+(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{z}+\mathbf{0}$, значит $\mathbf{z}=\mathbf{y}$. ▶

3° Для $\forall\,\mathbf{x}\in V$ верно равенство $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

◀ Действительно, $\forall\,\mathbf{x}$ в силу аксиом 3° и 1° $0\mathbf{x}= 0\mathbf{x}+\mathbf{0}= 0\mathbf{x}+\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=$ (применим аксиомы 7° и 1°) $=(0+1)\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$. ▶

4° Для $\forall\ \mathbf{x}\in V$ справедливо равенство $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$, где $(-1)\in\mathbb{K}$, $-\mathbf{x}\in V$.

◀ Найдем сумму $\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}=$ (по аксиомам 7° и 1°) $=(1-1)\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (следовательно по аксиоме 4°) $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$. ▶

5° $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\mathbf{0}\in V$, $\alpha\in\mathbb{K}$. (Вообще $\alpha\mathbf{a}=\mathbf{0}\Rightarrow\ \alpha=0$ или $\mathbf{a}=\mathbf{0}$).

◀ Воспользуемся следствием 3° и аксиомой 6°, тогда $\alpha\mathbf{0}=\alpha(0\mathbf{x})=(\alpha 0)\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$. ▶

В линейном пространстве определена операция вычитания.

Определение 1.4. *Вектор* $\mathbf{x}$ *называется* *разностью* *векторов* $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{z}$, *если* $\mathbf{x}+\mathbf{z}=\mathbf{y}$.

Разность векторов записывается так: $\mathbf{x}=\mathbf{y}-\mathbf{z}$. Нетрудно заметить, что вычитание есть алгебраическая операция.

Утверждение 1.1. *Разность для векторов* $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{z}$ *единственна.*
◀ 1) Докажем существование. Пусть $\mathbf{x}=\mathbf{y}+(-1)\mathbf{z}$. Тогда действительно $\mathbf{x}+\mathbf{z}=\mathbf{y}+(-1)\mathbf{z}+\mathbf{z}=\mathbf{y}+(-1+1)\mathbf{z}= =\mathbf{y}+0\mathbf{z}=\mathbf{y}$ и по определению (1.4) вектор $\mathbf{x}$ есть разность векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$. При доказательстве мы воспользовались аксиомами 2°, 3°, 5°, 7° и свойством 3°.

2) Докажем единственность. Пусть $\mathbf{x_1} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ и $\mathbf{x_2} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$, тогда $\mathbf{x_1} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$ и $\mathbf{x_2} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$, значит $\mathbf{x_1} + \mathbf{z} = \mathbf{x_2} + \mathbf{z}$. Откуда $\mathbf{x_1} + \mathbf{z} + (-\mathbf{z}) = \mathbf{x_2} + \mathbf{z} + (-\mathbf{z})$. Значит $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2}$, т.к. операция сложения однозначна. ▶

Если ты идешь, то мы идем в одну сторону -
Другой стороны просто нет...
Б.Гребенщиков

Линейная зависимость и независимость векторов.

Пусть дано некоторое конечное число элементов линейного пространства V : $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots \mathbf{v_n}$ и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – произвольные числа [1] из $\mathbb{K}$.

Определение 1.5. *Всякий элемент* $\mathbf{x} \in V$, *представимый в виде* $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{v_n}$ *называется линейной комбинацией элементов* $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots \mathbf{v_n}$, λ_i *– коэффициент линейной комбинации.*

Определение 1.6. *Линейная комбинация называется тривиальной, если все* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ *и называется нетривиальной, если среди чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *найдется хотя бы одно* $\lambda_k \neq 0, \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$.

Определение 1.7. *Система векторов* $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots$, $\mathbf{v_n}$ *называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов системы, равная* $\mathbf{0}$. *Иначе говоря,* $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ *при условии, что найдется хотя бы одно* $\lambda_k \neq 0, \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$.

Определение 1.8. *Система векторов* $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots$, $\mathbf{v_n}$ *называется линейно независимой, если* $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ **лишь** *в случае* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

[1] вообще говоря, произвольные элементы поля $\mathbb{K}$

Заметим, что **любая** линейная комбинация векторов $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ обращается в $\mathbf{0}$: $\lambda_1\mathbf{v_1}+\lambda_2\mathbf{v_2}+\ldots+\lambda_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ при условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Поэтому в определении 1.8 ключевую роль играет слово **лишь** (только, в единственном случае, ...)

Утверждение 1.2. *Система векторов, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

◀ $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $\lambda \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ▶

Утверждение 1.3. *Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.*

◀ Пусть в системе векторов $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$, первые k векторов $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_k}$, линейно зависимы. (Если это не так, мы всегда можем добиться этого, просто перенумеровав вектора системы.) Следовательно найдутся такие числа α_1, α_2, ... α_k, не все равные нулю, что $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}$. В линейной комбинации $\lambda_1\mathbf{v_1}+\lambda_2\mathbf{v_2}+\ldots+\lambda_n\mathbf{v_n}$ мы положим $\lambda_i = \alpha_i, \quad i \leqslant k$ и $\lambda_i = 0, \quad k < i \leqslant n$, тогда она обратится в $\mathbf{0}$. При этом не все из $\lambda_i = 0$. Значит вектора $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ линейно зависимы. ▶

Следствие 1. *Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.*

Лемма 1.1. Критерий линейной зависимости векторов. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.*

◀ **Необходимость.** Так как система векторов $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ линейно зависима, в линейной комбинации $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ найдется хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$. Пусть для определенности это λ_1. Тогда $\mathbf{v_1} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v_2} - \ldots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{v_n}$.

Достаточность. Без ограничения общности можно считать, что вектор $\mathbf{v_1}$ является линейной комбинацией остальных векторов системы: $\mathbf{v_1} = \alpha_2\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{v_n}$. Тогда линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{v_n}$ обращается в ноль если положить

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\alpha_2,\ \ldots,\ \lambda_n = -\alpha_n$. Т.о. система векторов является линейно зависимой, т.к. по крайней мере $\lambda_1 \neq 0$. ▶

Утверждение 1.4. *Пусть* $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \ldots,\ \mathbf{v_k}$, *– некоторые векторы из* V. *И пусть каждый из векторов* $\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \ldots,\ \mathbf{u_n}$ *является линейной комбинацией этих векторов:*

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{u_1} & = & \alpha_{11}\mathbf{v_1} + \alpha_{12}\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_{1k}\mathbf{v_k}, \\
\mathbf{u_2} & = & \alpha_{21}\mathbf{v_1} + \alpha_{22}\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_{2k}\mathbf{v_k}, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{u_n} & = & \alpha_{n1}\mathbf{v_1} + \alpha_{n2}\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_{nk}\mathbf{v_k}.
\end{array}$$

Тогда любой вектор $\mathbf{w}$ *вида*
$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_k\mathbf{v_k} + \mu_1\mathbf{u_1} + \mu_2\mathbf{u_2} + \ldots + \mu_n\mathbf{u_n}$
линейно выражается через $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \ldots,\ \mathbf{v_k}$.

◀ Подставим в выражение для $\mathbf{w}$ вместо $\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \ldots,\ \mathbf{u_n}$ их разложения по векторам $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \ldots,\ \mathbf{v_k}$ и сгруппируем коэффициенты при $\mathbf{v_i}\quad (0 < i \leqslant k)$.

$$\begin{array}{l}
\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_k\mathbf{v_k} + \mu_1\mathbf{u_1} + \mu_2\mathbf{u_2} + \ldots + \mu_n\mathbf{u_n} = \\
= \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_k\mathbf{v_k} + \\
+\mu_1\left(\alpha_{11}\mathbf{v_1} + \alpha_{12}\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_{1k}\mathbf{v_k}\right) + \\
+\mu_2\left(\alpha_{21}\mathbf{v_1} + \alpha_{22}\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_{2k}\mathbf{v_k}\right) + \ldots + \\
+\mu_n\left(\alpha_{n1}\mathbf{v_1} + \alpha_{n2}\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_{nk}\mathbf{v_k}\right) = \\
= \left(\lambda_1 + \mu_1\alpha_{11} + \mu_2\alpha_{21} + \ldots + \mu_n\alpha_{n1}\right)\mathbf{v_1} + \\
+\left(\lambda_2 + \mu_1\alpha_{12} + \mu_2\alpha_{22} + \ldots + \mu_n\alpha_{n2}\right)\mathbf{v_2} + \ldots + \\
+\left(\lambda_1 + \mu_1\alpha_{1k} + \mu_2\alpha_{2k} + \ldots + \mu_n\alpha_{nk}\right)\mathbf{v_n}.
\end{array}$$

Мы получили разложение вектора $\mathbf{w}$ по $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \ldots,\ \mathbf{v_k}$. ▶

Чем больше пустоты
Тем свободнее движение
Дао дэ цзин

Аксиома размерности.

Аксиома размерности. *Для каждого векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ $\exists\, n \in \mathbb{N}_\circ$ такое, что существует по крайней мере одна система из n линейно независимых векторов, а любая система из $n+1$ вектора линейно зависима.*

Определение 1.9. *Такое векторное пространство V называется <u>$n-$мерным,</u> n – <u>размерность</u> пространства V.*

Размерность пространства V обозначают: $dimV = n$ или V_n.

Определение 1.10. *Любая система из n линейно независимых векторов $n-$мерного векторного пространства называется <u>базисом</u> этого пространства.*

Базис обычно обозначают $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\ldots$, $\mathbf{e_n}$ или $\{\mathbf{e_i}\}$, $\quad i = \overline{1,n}$.

Базис пространства V_n всегда состоит ровно из n векторов.

Пример 1.10. Нулевое пространство является 0-мерным линейным пространством, т.к. оно состоит только из одного $\mathbf{0}$ вектора, который по утверждению 1.2 линейно зависим. Базиса в этом пространстве нет.

Пример 1.11. Пространство $\mathbb{R}^n$ есть $n-$мерное векторное пространство. Канонический базис в нем: $\mathbf{e_1} = (1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e_2} = (0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $\mathbf{e_n} = (0,0,\ldots,1)$.

Пример 1.12. Пространство матриц размеров $m \times n$ есть

$mn-$мерное линейное пространство. Канонический базис:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$E_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots \; E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 1.13. Пространство многочленов Re^n степени не выше n $P_n(t)$ есть $(n+1)$-мерное линейное пространство. Канонический базис: $1,\ t,\ t^2,\ \dots,\ t^n$.

Определение 1.11. *Существуют линейные пространства, в которых не выполняется аксиома размерности. Такие пространства называют бесконечномерными линейными пространствами.*

Иными словами, в бесконечномерном линейном пространстве для любого сколь угодно большого числа K найдется ровно K линейно независимых векторов.

Пример 1.14. Пространство всех многочленов Re – бесконечномерное линейное пространство. Базисом в этом пространстве служат многочлены $1,\ t,\ t^2,\ \dots,\ t^k,\ \dots$.

Отметим еще раз, что выбор базиса в линейном пространстве осуществляется далеко не единственным образом. Базис называется каноническим в том смысле, он наиболее „простой“ и „удобный“.

Лекция 2.

Координаты вектора в данном базисе.

Пусть $\{\mathbf{e_i}\}$, $i = \overline{1, n}$ – базис в V_n. Тогда $\forall\ \mathbf{x} \in V_n$ система векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{e_1}$, $\ldots$, $\mathbf{e_n}$ линейно зависима. Составим их линейную комбинацию $\lambda\mathbf{x}+\lambda_1\mathbf{e_1}+\ldots+\lambda_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0}$. Докажем, что $\lambda \neq 0$: ◀ предположим, что $\lambda = 0$, но тогда $\lambda_1\mathbf{e_1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0}$ и хотя бы один из $\lambda_i \neq 0$, что противоречит тому, что $\mathbf{e_i}$ линейно независимы. ▶

Значит, наше предположение неверно, тогда справедливо разложение

$$\mathbf{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{e_1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\mathbf{e_n}, \text{или} \quad \mathbf{x} = x^1\mathbf{e_1} + \ldots + x^n\mathbf{e_n},$$

где $(x^1, \ldots, x^n)$– координаты вектора $\mathbf{x}$ в данном базисе. Сокращенная форма записи этого соотношения будет следующая:

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}X, \quad \text{где} \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})\,. \tag{2.1}$$

Другая форма записи разложения вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i\mathbf{e_i} \tag{2.3}$$

Докажем, что такое разложение единственно:
◀ действительно, пусть для некоторого вектора $\mathbf{x}$ кроме разложения (2.3) справедливо разложение $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} y^i\mathbf{e_i}$, тогда $\mathbf{0} =$

$\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)\mathbf{e_i}$. Линейная независимость векторов $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$ означает равенство нулю каждого из коэффициентов $x^i - y^i = 0$, $i = \overline{1, n}$. ▶

Пример 2.1. Рассмотрим $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ со стандартным базисом $\mathbf{e_1} = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \ldots, \mathbf{e_n} = (0,\ 0,\ \ldots,\ 1)$. Линейная комбинация $\lambda_1 \mathbf{e_1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e_n} = \mathbf{0}$ только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. В координатном виде эта линейная комбинация запишется так: $(\lambda_1,\ 0,\ \ldots,\ 0) + \ldots + (0,\ 0,\ \ldots,\ \lambda_n) = \mathbf{0}$, или $(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n) = (0,\ \ldots,\ 0)$. Значит, все $\lambda_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$.

Следствие 2. *Задание базиса определяет взаимнооднозначное отображение V_n на $\mathbb{R}^n$.*

Операции над векторами в координатах.

Если

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e_i}, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y^i \mathbf{e_i},$$

то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (x^i + y^i)\mathbf{e_i}, \quad \alpha\mathbf{x} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x^i)\mathbf{e_i}.$$

При сложении векторов соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

Пусть $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\ldots$, $\mathbf{a_s}$ – произвольная система векторов пространства V_n и $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ – некоторый базис в этом пространстве, тогда

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{a_1} & = & a_{11}\mathbf{e_1} + \ldots + a_{1n}\mathbf{e_n} \\
\mathbf{a_2} & = & a_{21}\mathbf{e_1} + \ldots + a_{2n}\mathbf{e_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{a_s} & = & a_{s1}\mathbf{e_1} + \ldots + a_{sn}\mathbf{e_n}
\end{array} \tag{2.4}$$

Наряду с векторами 2.4 рассмотрим матрицу A, образованную их координатами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

Теорема 2.1. *Число линейно независимых векторов (2.4) равно рангу матрицы A.*

◀ Предположим, что между векторами (2.4) имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_s \mathbf{a_s} = \mathbf{0}. \tag{2.5}$$

или

$$\alpha_1(a_{11}\mathbf{e_1} + \ldots + a_{1n}\mathbf{e_n}) + \ldots + \alpha_s(a_{s1}\mathbf{e_1} + \ldots + a_{sn}\mathbf{e_n}) = \mathbf{0}. \tag{2.6}$$

Иначе говоря, между строками матрицы A имеется линейная зависимость с теми же коэффициентами $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$. Справедливо также и обратное утверждение: если имеет место (2.6), то верно и утверждение (2.5).

Таким образом ранг системы векторов $\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \ldots,\ \mathbf{a_s}$ совпадает с рангом матрицы A и наоборот. ▶

Аналогичные рассуждения можно провести, взяв не всю систему векторов (2.4), а какую-нибудь ее подсистему и соответствующую ей подсистему строк матрицы A, т.е. те ее строки, в которых выписаны координаты векторов выбранной подсистемы. Поэтому подсистема векторв из системы (2.4) линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима соответствующая подсистема строк матрицы A. Значит, максимальное число линейно независимых векторов системы (2.4) совпадает с максимальным числом линейно независимых строк матрицы A.

Если число векторов в системе (2.4) равно n, то матрица A становится квадратной.

Следствие 3. *В $n-$мерном пространстве система из n векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда* $\det A = 0$. *Или $rank A < n$.*

Изоморфизм линейных пространств.

Пусть даны два линейных пространства V и V' и между ними установлено взаимно однозначное соответствие, т.е.

а) каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ соответствует некоторый вектор $\mathbf{x}' \in V'$;

б) разные векторы из V имеют разные образы в V';

в) образы элементов из V заполняют все V'.

Определение 2.1. *Пространства V и V' называются линейно изоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие с соблюдением условий*

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})' = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' \quad (\alpha\mathbf{x})' = \alpha\mathbf{x}' \tag{2.7}$$

Т.е. при линейном изоморфизме образ суммы равен сумме образов, а образ произведения вектора на число равен произведению его образа на это же число.

Алгебраические и геометрические свойства линейно изоморфных пространств совершенно тождественны.

Теорема 2.2. *Все $n-$мерные линейные пространства изоморфны.*

◀ Пусть даны два векторных $n-$мерных пространства V и V' над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. Выберем произвольный базис в каждом из них: $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n} \in V$ и $\mathbf{e_1}', \ldots, \mathbf{e_n}' \in V'$. Пусть $\mathbf{x}$ – какой-либо элемент из V. Разложим его по базису: $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$. Поставим в соответствие элементу $\mathbf{x}$ какой-либо элемент $\mathbf{x}' \in V'$ так, что $\mathbf{x}' = x^1\mathbf{e}_1' + \ldots + x^n\mathbf{e}_n'$. Так как разложение вектора по базису единственно, то такое соответствие взаимнооднозначно. Проверим выполнение условий изоморфизма:

а) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})' = (x^1+y^1)\mathbf{e}_1' + \ldots + (x^n+y^n)\mathbf{e}_n' = x^1\mathbf{e}_1' + \ldots + x^n\mathbf{e}_n' + y^1\mathbf{e}_1' + \ldots + y^n\mathbf{e}_n' = \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$;

б) $(\alpha\mathbf{x}') = \alpha x^1\mathbf{e}_1' + \ldots + \alpha x^n\mathbf{e}_n' = \alpha(x^1\mathbf{e}_1' + \ldots + x^n\mathbf{e}_n') = \alpha\mathbf{x}'$.

Здесь мы использовали тот факт, что изоморфизм есть отношение эквивалентности в множестве линейных пространств. ▶

Теорема 2.3. *Линейное пространство, изоморфное $n-$ мерному, само является $n-$ мерным.*

◀ Пусть дано $n-$мерное линейное пространство V и пусть V' – пространство, изоморфное V. Докажем сначала, что при линейном изоморфизме образом нулевого элемента $\mathbf{0} \in V$ является нулевой элемент пространства V'. Возьмем произвольный элемент $\mathbf{x}' \in V'$ и его прообраз $\mathbf{x} \in V$. Так как $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} + \mathbf{0})'$, но по определению изоморфизма $(\mathbf{x} + \mathbf{0})' = \mathbf{x}' + \mathbf{0}'$, и значит $\mathbf{x}' + \mathbf{0}' = \mathbf{x}'$. Поэтому образ $\mathbf{0}'$ элемента $\mathbf{0}$ есть нулевой элемент пространства V'.

Если мы возьмем теперь в V независимую систему векторов, то их образы будут независимыми векторами в V'. Пусть $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\ldots$, $\mathbf{a_s}$ – независимая система векторов пространства V. Рассмотрим соотношение

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1' + \ldots + \alpha_s \mathbf{a}_s' = \mathbf{0}'. \tag{2.8}$$

По определению изоморфизма равенство (2.8) можно переписать так:

$$(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_s \mathbf{a}_s)' = \mathbf{0}'. \tag{2.9}$$

Так как $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$, то

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_s \mathbf{a}_s = \mathbf{0}. \tag{2.10}$$

Известно, что векторы $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\ldots$, $\mathbf{a_s}$ линейно независимы в V, значит $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$. Таким образом из (2.9) и (2.10) следует (2.8), а это значит, что векторы $\mathbf{a}_1'$, $\mathbf{a}_2'$, $\ldots$, $\mathbf{a}_s'$ независимы в V'. Так как V – n-мерное пространство, в нем найдется n линейно независимых векторов. Их образы в V' также независимы. Тогда размерность V' не меньше, чем n. Меняя местами V и V' в этом рассуждении получим, что размерность V не меньше чем размерность V'. Поэтому их размерности совпадают. ▶

Следствие 4. *Конечномерные пространства различных размерностей не изоморфны.*

Следствие 5. *Бесконечномерное пространство не изоморфно никакому конечномерному пространству.*

Подпространство линейного пространства.

Определение 2.2. *Подмножество $V_k \subset V_n$ линейного пространства над полем $\mathbb{K}$ называется* <u>*подпространством*</u>*, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V_k \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_k$

б) $\forall \mathbf{x} \in V_k$ *и* $\lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda\mathbf{x} \in V_k$.

Пример 2.2. Из определения следует, что V_n само является подпространством.

Пример 2.3. Нулевое пространство $\{\mathbf{0}\}$ есть подпространство любого пространства.

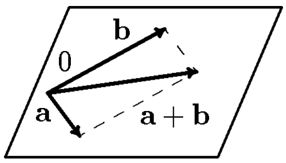

Рис. 2.1.

Пример 2.4. Плоскость, проходящая через начало координат, есть двумерное пространство.

Пример 2.5. Прямая, проходящая через начало координат, есть одномерное пространство.

Теорема 2.4. *Любое подпространство V_k векторного пространства V_n само есть векторное пространство над тем же полем.*

◀ По определению подпространства действие операций сложения и умножения на число не выводит за пределы V_k. Аксиомы 1°, 2°, 5° – 8° заведомо выполнены, так как выполняются для всех элементов V_k. Поэтому проверим выполнение аксиом 3° и 4°. Так как $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in V_k$, применяя первое условие определения подпространства, получим $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) \in V_k$.

Таким образом все восемь аксиом выполнены. ▶

Лекция 3.

Подпространство векторного пространства.

Теорема 3.1. *Пересечение любой конечной совокупности подпространств данного линейного пространства V тоже является линейным пространством.*

◀ Пусть даны два подпространства V_1 и V_2. Введем обозначение $V_3 = V_1 \cap V_2$. Докажем теперь, что V_3 – подпространство. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V_1$ и $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V_2$. Это значит, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$ и $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_2$. Следовательно, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_3$. Аналогично доказывается для операции умножения вектора на число: $\alpha\mathbf{x} \in V_1$ и $\alpha\mathbf{x} \in V_2$, значит $\alpha\mathbf{x} \in V_3$. Поэтому V_3 удовлетворяет определению подпространства. ▶

Пересечение двух подпространств не может быть пустым. $\mathbf{0} \in V_1$, $\mathbf{0} \in V_2$, поэтому $\mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$. (См. пример 2.3).

Линейная оболочка.

Пусть в линейном пространстве V дана система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_k$.

Определение 3.1. *Множество всевозможных линейных комбинаций вида $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k$ называется* <u>*линейной оболочкой*</u> *данной системы векторов и обозначается либо $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, либо $< \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_k >$. Иногда говорят, что линейная оболочка $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$* <u>*натянута*</u> *на векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_k$.*

Теорема 3.2. *Линейная оболочка любой системы векторов является линейным подпространством в пространстве V.*

◀ Возьмем из $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ произвольные векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k \in L$, $\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_k\mathbf{a}_k \in L$, откуда $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$, и $\alpha\mathbf{x} \in L$. ▶

Линейная оболочка может совпадать со всем пространством.

Сумма подпространств.

Пусть в линейном векторном пространстве V даны два подпространства V_1 и V_2. Обозначим через $V_3 = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in V_1,\ \mathbf{x}_2 \in V_2\}$.

Теорема 3.3. *Введенное таким образом множество V_3 есть линейное пространство.*

◀

Пусть $\mathbf{x} \in V_3$ и $\mathbf{y} \in V_3$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1 \in V_1$, а $\mathbf{x}_2,\ \mathbf{y}_2 \in V_2$. Тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2)$, причем $\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \in V_1$, а $\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \in V_2$. Кроме того $\alpha\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$, где $\alpha\mathbf{x}_1 \in V_1$, $\alpha\mathbf{x}_2 \in V_2$.

▶

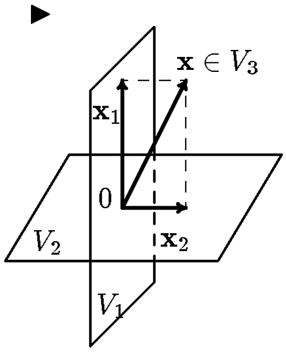

Рис. 3.1.

Определение 3.2. *Подпространство V_3 называется <u>суммой</u> подпространств и обозначается $V_3 = V_1 + V_2$.*

В сумме подпространств можно рассматривать любое число слагаемых. На рис. 3.1. V_1 и V_2 двумерны, V_3 – трехмерно.

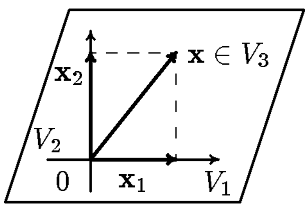

Рис. 3.2.

Определение 3.3. *Если для $\forall\ \mathbf{x} \in V_3$ разложение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ единственно, $\mathbf{x}_1 \in V_1$, $\mathbf{x}_2 \in V_2$, то сумма называется <u>прямой</u> и обозначается $V_3 = V_1 \oplus V_2$.*

На рис. 3.2. $V_3 = V_1 \oplus V_2$ – прямая сумма двух одномерных подпространств. И разложение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ – единственно.

Лемма 3.1. *В $n-$мерном пространстве всякую независимую систему векторов, состоящую из k векторов ($k < n$), можно дополнить до базиса.*

◀ Пусть $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_k$ – независимая система векторов в V_n, причем $k < n$. Тогда найдется по крайней мере один вектор $\mathbf{e}_{k+1}$, такой, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}$ – также линейно независимая система. Если бы такого вектора не было, то любой вектор из V_n можно было бы выразить через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$, что противоречит тому, что $k < n$.

Если $k+1 < n$, то рассуждения можно повторить и добавить к системе еще один вектор, не нарушая линейной независимости. Так будем продолжать до тех пор, пока число векторов в системе не достигнет n, т.е. система векторов превратится в базис. ▶

Теорема 3.4. *Пусть в линейном пространстве V имеются подпространства V_k и V_l, размерности которых соответственно равны k и l. Если их пересечение имеет размерность p, то размерность их суммы $V_k + V_l$ равна $m = k + l - p$.*

◀ Выберем в пространстве $V_p = V_k \cap V_l$ базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$. Тогда $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p \in V_k$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p \in V_l$. Так как эти векторы линейно независимы, их можно принять за первые p базисных векторов подпространства V_k, а остальные базисные векторы этого подпространства обозначим $\mathbf{b}_{p+1}, \mathbf{b}_{p+2}, \ldots \mathbf{b}_k$ (см. лемму). Ни один из этих векторов не принадлежит V_l, т.к. в противном случае этот вектор принадлежал бы $V_k \cap V_l$ и представлял собой линейную комбинацию базисных векторов пересечения пространств и вся система была бы линейно зависимой.

Аналогично дополним векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ до базиса в подпространстве V_l. Обозначим их $\mathbf{c}_{p+1}, \mathbf{c}_{p+2}, \ldots, \mathbf{c}_l$. Эти векторы принадлежат V_l, но не принадлежат V_k.

Если доказать, что система векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p, \mathbf{b}_{p+1}, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_{p+1}, \ldots \mathbf{c}_l \qquad (3.1)$$

будет линейно независимой и будет базисом в $V_k + V_l$, тогда обозначим $dim(V_k + V_l) = m$. Найдем число векторов в (3.1): $p + (k - p) + (l - p) = k + l - p = m$, откуда:

$$k + l = p + m, \quad dim V_k + dim V_l = dim(V_k \cap V_l) + dim(V_k + V_l). \qquad (3.2)$$

Докажем методом от противного, что векторы (3.1) действительно линейно независимы. Пусть существует нетривиальная линейная зависимость

$$\begin{aligned}\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_p\mathbf{a}_p \quad &+\beta_{p+1}\mathbf{b}_{p+1}+\ldots+\beta_k\mathbf{b}_k+\\ &+\gamma_{k+1}\mathbf{c}_{p+1}+\ldots+\gamma_l\mathbf{c}_l=\mathbf{0}\end{aligned}\,. \tag{3.3}$$

Тогда вектор $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_p\mathbf{a}_p+\beta_{p+1}\mathbf{b}_{p+1}+\ldots+\beta_k\mathbf{b}_k=-(\gamma_{k+1}\mathbf{c}_{p+1}+\ldots+\gamma_l\mathbf{c}_l)$ принадлежит обоим подпространствам V_k и V_l, а значит и их пересечению V_p, но тогда он должен выражаться через базисные векторы $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_p$. Т.е. $\mathbf{a}=\tau_1\mathbf{a}_1+\ldots+\tau_p\mathbf{a}_p$. Отсюда, пользуясь единственностью разложения вектора $\mathbf{a}$ по базису подпространства V_k, получаем: $\tau_i=\alpha_i,\quad i=\overline{1,k},\quad \beta_{k+1}=\beta_{k+2}=\ldots=\beta_p=0$, а тогда из равенства (3.3) следует, что $\alpha_1\mathbf{a}+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_p\mathbf{a}_p+\gamma_{k+1}\mathbf{c}_{p+1}+\ldots+\gamma_l\mathbf{c}_l=\mathbf{0}$. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_p,\ \mathbf{c}_{p+1},\ \ldots,\ \mathbf{c}_l$ следует, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0;\quad \gamma_{k=1}=\ldots=\gamma_l=0$.

Т.о. векторы (3.1) действительно линейно независимы и образуют базис пространства $V_m=V_k+V_l$.

Мы доказали, (3.2), что сумма размерности двух подпространств равна размерности их суммы, сложенной с размерностью пересечения. ▶

Так в четырехмерном пространстве V_4 два двумерных подпространства V_2 и V_2 могут

1°. пересекаться по нулевому вектору, тогда их сумма совпадает со всем пространством и равенство (3.2) примет вид $2+2=0+4$.

2°. пересекаться по прямой, тогда равенство (3.2) примет вид $2+2=1+3$.

3°. совпадать, $2+2=2+2$.

Теорема 3.5. *Если $V_1\cap V_2=\{0\}$, то сумма V_1 и V_2 будет прямой, т.е. $V_1\oplus V_2=V_3$.*

◀ Пусть $V_1\cap V_2=\{0\}$, докажем, что разложение вектора $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ единственное, $\mathbf{x}_1\in V_1,\ \mathbf{x}_2\in V_2,\ \mathbf{x}\in V_3$. Пусть есть другое разложение данного вектора $\mathbf{x}=\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2,\ \mathbf{y}_1\in V_1,\ y_2\in V_2$. Тогда $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, или $\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1=\mathbf{y}_2-\mathbf{x}_2$. Левая часть равенства есть вектор из пространства V_1, правая часть – из V_2, поэтому это есть нулевой вектор. Значит, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$. ▶

Пример 3.1. Множество Λ всех квадратных матриц n порядка есть векторное пространство размерности n^2. Множество Λ_{sim} всех симметрических матриц $n-$порядка есть подпространство этого пространства размерности $\frac{n(n+1)}{2}$. Множество Λ_{skew} всех кососимметрических матриц $n-$порядка также есть подпространство пространства Λ размерности $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ясно, что $\Lambda = \Lambda_{sim} \oplus \Lambda_{skew}$, т.к. только нулевая матрица является одновременно симметрической и кососимметрической.

Любую квадратную матрицу можно разложить на симметрическую и кососимметрическую составляющие.

$$A = \frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Лекция 4.

Задание подпространства с помощью системы линейных однородных уравнений.

Пусть в векторном пространстве выбран базис $\{\mathrm{e}_i\}$, $i = \overline{1,n}$, тогда $\forall$ $\mathbf{x} \in V_n$ справедливо разложение $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$, где x_1, x_2, $\ldots$, x_n – координаты вектора в данном базисе. Рассмотрим следующую систему $n-$линейных однородных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Пусть ранг матрицы системы будет r, $(r < n)$. Известно, что система (4.1) имеет в этом случае бесконечное множество решений, из которых ровно $n - r$ линейно независимых, их называют <u>фундаментальной системой решений</u>.

Решения системы (4.1) мы можем рассматривать как координаты вектора. Тогда фундаментальной системе решений соответствуют векторы $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_{n-r}$. Общее решение $\mathbf{x}$ является линейной комбинацией $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{n-r}\mathbf{b}_{n-r}$, то есть вектор $\mathbf{x}$ принадлежит линейной оболочке векторов $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_{n-r}$, которая является векторным подпространством $n-$мерного векторного пространства. Таким образом, если в V_n задан базис, то любое его подпространство размерности k можно задать с помощью некоторой системы линейных однородных уравнений ранга $r = n - k$.

Если $k = 0$, то $r = n$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Пример 4.1. Дано четырехмерное пространство

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ rangA = 2.$$

Найдем общее решение

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = -x_1 - 2x_2 \\ x_3 + x_4 = -2x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \\ x_4 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений, которая состоит из $n - r = 4 - 2 = 2$ решений.

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	0	-3	-1	$\mathbf{b}_1$
0	2	-3	1	$\mathbf{b}_2$

Преобразование базисов векторного пространства.

Пусть в V_n задан базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = \overline{1,n}$ и $\forall\, \mathbf{x} \in V_n$ справедливо разложение $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$. Запишем это разложение в матричном виде:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = EX \tag{4.2}$$

Выберем некоторый новый базис $\{\mathbf{e}'_i\}$, $i=\overline{1,n}$, базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=\overline{1,n}$ назовем старым базисом.

Векторы нового базиса можно раздожить по векторам старого базиса:

$$\mathbf{e}'_i=\sum_{i=1}^{n}P_{ik}\mathbf{e}_k, \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{e}'_1 & = & P_{11}\mathbf{e}_1+P_{12}\mathbf{e}_2+\ldots+P_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 & = & P_{21}\mathbf{e}_1+P_{22}\mathbf{e}_2+\ldots+P_{2n}\mathbf{e}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{e}'_n & = & P_{n1}\mathbf{e}_1+P_{n2}\mathbf{e}_2+\ldots+P_{nn}\mathbf{e}_n \end{array} \tag{4.4}$$

Коэффициенты разложения (4.4) образуют квадратную матрицу

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Матрица P называется матрицей перехода от старого базиса к новому. Столбцы матрицы перехода являются координатами новых базисных векторов в старом базисе.

Теорема 4.1. *Для того, чтобы векторы* $\{\mathbf{e}'_i\}$, $i=\overline{1,n}$ *образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы* $rang P=n$, *т.е.* $det(P)\neq 0$.

◀ **Необходимость.** Если $\{\mathbf{e}'_i\}$ – базис, значит столбцы матрицы P линейно независимы, поэтому $det(P)\neq 0$.

Достаточность. Если матрица P не вырожденная, то ее столбцы линейно независимы, тогда и векторы (4.3) линейно независимы, следовательно, они образуют базис пространства V_n. ▶

В векторном пространстве V_n существует столько базисов, сколько мы можем составить невырожденных матриц $n-$го порядка.

Если в V_n фиксирован некоторый базис, то любой другой базис взаимнооднозначно определяется своей матрицей перехода. Систему (4.3) можно записать в матричной символике

$$E'=EP \tag{4.6}$$

Преобразование координат вектора при преобразовании базиса.

В векторном пространстве V_n заданы старый базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=\overline{1,n}$ и новый базис $\{\mathbf{e}'_i\}$, $i=\overline{1,n}$. Вектор $\mathbf{x} \in V_n$ раскладывается по обоим базисам.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = EX \tag{4.7}$$

$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n = E'X' \tag{4.8}$$

Откуда $EX = E'X'$. Т.к. $E' = EP$, получаем $EX = EPX'$. Тогда, в силу единственности разложения вектора по базису,

$X' = P^{-1}X$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Произведение преобразований базисов и группа квадратных матриц.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=\overline{1,n}$ - базис в V_n определяет взаимнооднозначное отображение этого пространства на арифметическое пространство. Если $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=\overline{1,n}$ старый базис и $\{\mathbf{e}'_i\}$, $i=\overline{1,n}$ новый базис, $\mathbf{x}$ - некоторый вектор из V_n, то существует связь

$$E' = EP, \quad X = PX'. \tag{4.9}$$

Пусть мы имеем еще один базис $\{\mathbf{e}''_i\}$, $i=\overline{1,n}$. Т.е. базис $\{\mathbf{e}_i\}$ преобразуется в базис $\{\mathbf{e}'_i\}$, а базис $\{\mathbf{e}'_i\}$ в базис $\{\mathbf{e}''_i\}$. Встает вопрос, как непосредственно перейти от $\{\mathbf{e}_i\}$ к $\{\mathbf{e}''_i\}$.

В матричной форме записи $E' = EP$, $E'' = E'Q$, где P и Q матрицы перехода. Тогда $E'' = (EP)Q = E(PQ)$.

Теорема 4.2. *Матрица произведения преобразований базисов преобразуется с помощью произведению матриц перехода.*

Если в третьем базисе координаты вектора $\mathbf{x} = x''_1\mathbf{e}''_1 + x''_2\mathbf{e}''_2 + \ldots + x''_n\mathbf{e}''_n$ или $X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ \ldots \\ x''_n \end{pmatrix}$, тогда

$$X = PX', \quad X' = QX'', \quad X = (PQ)X''.$$

Множество матриц замкнуто относительно операции умножения, произведение матриц ассоциативно, существует единичная матрица и каждая невырожденная матрица имеет обратную, поэтому множество всех невырожденных матриц n порядка над полем $\mathbb{R}$ образует группу по операции умножения. Т.к.

Лемма 4.1. *Множество преобразований базисов векторного пространства над полем* $\mathbb{R}$ *образует группу, изоморфную группе невырожденных квадратных матриц.*

◀ Это очевидно, т.к.

а) каждому преобразованию базисов взаимнооднозначно соответствует невырожденная матрица;

б) произведению преобразований базиса соответствует произведение матриц.

▶

Лекция 5.

Мысль о пространстве рождает "ах",
оперу, взгляд в лорнет.
В цифрах есть нечто, чего в словах
даже крикнув их нет...
И.Бродский

Аффинное пространство.

Пусть имеются векторное пространство V_n и множество элементов, которые мы будем называть точками, причем каждой упорядоченной паре точек M и N поставим в соответствие некоторый вектор $\mathbf{x} \in V_n$. (Разным парам точек может ставится в соответствие один и тот же вектор). Будем писать $\vec{MN} = \mathbf{x}$.

Потребуем, чтобы соответствие между точками и векторами обладает следующими свойствами:

а) для любой точки M и каждого вектора $\mathbf{x}$ найдется одна и только одна такая точка N, что $\vec{MN} = \mathbf{x}$;

б) для любых трех точек M, N, P $\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$.

Все точки и все векторы, описанные выше, образуют аффинное пространство.

Аффинное пространство называется $n-$мерным, если $n-$мерно соответствующее векторное пространство.

Следствие 6. *Если* $\vec{MN} = \vec{AP}$, *то* $\vec{MA} = \vec{NP}$.
◀ Это вытекает из равенства $\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AP}$. ▶

Следствие 7. *Вектор, у которого начало и конец совпадают, является нулевым.*
◀ $\vec{MN} + \vec{NM} = \vec{MM}$, значит $\vec{MM} = \mathbf{0}$. ▶

Следствие 8. *Вектор* $\vec{NM}$ *является противоположным к вектору* $\vec{MN}$.
◀ $\vec{MN} + \vec{NM} = \vec{MM} = \mathbf{0}$. ▶

Введение координат в аффинном пространстве.

В $n-$мерном аффинном пространстве A_n координаты точек вводятся следующим образом. Выберем какую-нибудь точку O в качестве начала координат. Тогда $\forall\ \mathbf{x} \in A_n$ найдется единственная точка X, такая, что $\vec{OX} = \mathbf{x}$. Так устанавливается взаимно-однозначное соответствие между всеми точками и всеми векторами A_n. Точке X соответствует радиус-вектор $\vec{OX}$.

Система координат в A_n определяется точкой отсчета O и системой линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n$. $\{O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ – репер A_n. Тогда $\forall\, \mathbf{x} \in A_n$ будет определяться строкой своих координат $\vec{OX} = \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Каждой точке из A_n будет однозначно сопоставлена строка из n чисел – координат этой точки. Точке O соответствует набор $(0, \ldots, 0)$, т.е. нулевой вектор. Если $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ – две точки A_n, то ввиду равенства $\vec{OX} + \vec{XY} = \vec{OY}$ будет верно следующее равенство $\vec{XY} = \vec{OY} - \vec{OX} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Все аффинные пространства одной и той же размерности, аналогично векторным пространствам, устроены в некотором смысле одинаково, если заданы над одним и тем же полем.

Переход к новой системе координат.

Выбор репера в аффинном пространстве произволен, поэтому естественным образом возникает вопрос, как преобразуются аффинные координаты при переходе от одного репера к другому.

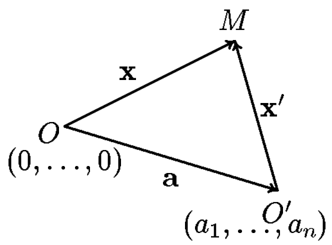

Рис. 5.1.

1°. Будем менять начало отсчета. $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{a}$, откуда $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Тогда $(x'_1, \ \ldots, \ x'_n) = (x_1, \ \ldots, \ x_n) - (a_1, \ \ldots, \ a_n)$. Или $x'_i = x_i - a_i, \ i = \overline{1,n}$. Т.е. новые координаты получаются, если из старых координат вычесть координаты нового начала в старой системе координат.

2°. Пусть теперь начало отсчета не меняется, но в векторном пространстве V_n, соответствующем A_n, выбирается новый базис с матрицей перехода P. Т.е $\{\mathbf{e}_i\}$ – старый базис, а $\{\mathbf{e}'_i\}$ – новый базис. $\mathbf{e}'_i = P_{i1}\mathbf{e}_1 + P_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + P_{in}\mathbf{e}_n, \ i = \overline{1,n}$.

Так как координаты точки X – это, по определению, координаты вектора $\vec{OX}$, то $X = PX'$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\mathbf{x} = \vec{OX}$ в старой системе координат, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\vec{OX'}$ в новой системе координат, $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}$.

3°. Если меняются и начало отсчета и базисные векторы. Т.е. даны два репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_i\}$. $\vec{OM} = \mathbf{x}, \quad \vec{OO'} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}' = \vec{OM}$.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \ \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i, \ \mathbf{x}' = \sum_{k=1}^{n} x'_k\mathbf{e}'_k, \ \mathbf{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} P_{ki}\mathbf{e}_i$$

и тогда

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \mathbf{e}'_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ki} \mathbf{e}_i x'_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i .$$

Приравнивая одноименные коэффициенты, получим

$$X = PX' + A, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

K-мерные плоскости в аффинном пространстве.

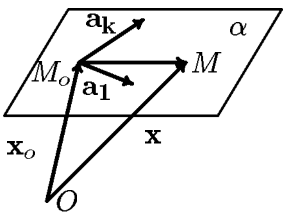

Рис. 5.2.

Пусть в A_n выбрана система координат $\{O, \mathbf{e}_i\}$. Пусть начало отсчета точка O, тогда $\mathbf{x}_o = \vec{OM_o}$, $\vec{OM} = \mathbf{x}$ и $\vec{M_oM}$. Рассмотрим все точки M такие, что $\vec{M_oM} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k$ и назовем множество таких точек <u>k-мерной плоскостью</u>. Тогда $\mathbf{x} - \mathbf{x}_o = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) есть уравнение $k-$мерной плоскости в векторно-параметрическом виде.

Уравнение плоскости можно определить и как систему линейных уравнений, вообще говоря не однородных. Исключив из (5.1) параметры $t_1, \ldots, t_k$, получим

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Пусть ранг матрицы коэффициентов равен r, тогда $k = n - r$.

Определение $k-$мерной плоскости можно дать и как множество точек из A_n, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (5.2).

Одномерные плоскости называются прямыми, а $(n-1)$-мерные плоскости – гиперплоскостями. Очевидно, что каждую гиперплоскость можно задать одним уравнением ($r=1$, $k=n-1$)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

В обычном трехмерном пространстве гиперплоскости – это обычные плоскости, а на плоскости гиперплоскости – это прямые.

Если система уравнений (5.1) однородна, то плоскость проходит через начало координат.

Рассмотрим плоскость α_o, проходящую через начало координат. Если все векторы отложены от начала координат, то те векторы, концы которых принадлежат этой плоскости α_o, образуют подпространство. В противном случае (если плоскость α не проходит через начало координат), множество таких векторов образует $k-$мерное линейное многообразие. Это многообразие получается, если ко всем векторам $k-$мерного подпространства прибавить один и тот же вектор $\mathbf{a}$. Можно сказать, что $k-$мерная плоскость α получается из α_o параллельным переносом на вектор $\mathbf{a}$. И в этом случае можно говорить, что α и α_o параллельны.

Пример 5.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,1,0,-1)$, $B(2,-1,3,3)$, $C(1,-1,1,5)$, $D(0,0,3,-1)$.

Решение. Выясним размерность плоскости. Для этого вычислим ранг матрицы, составленной из координат векторов $\vec{AB} = (1,-2,3,4)$, $\vec{AC} = (0,-2,1,6)$, $\vec{AD} = (-1,-1,3,0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rangA = 3$. Поэтому эта трехмерная плоскость есть гиперплоскость в четырехмерном пространстве.

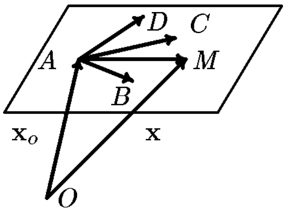

Рис. 5.3.

Найдем ее уравнение.

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_o = t_1\vec{AB} + t_z\vec{AC} + t_3\vec{AD}.$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + t_1\vec{AB} + t_z\vec{AC} + t_3\vec{AD}.$$

Запишем это уравнение в координатах:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Или

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 1 + t_1 - t_3 \\ x_2 & = & 1 - 2t_1 - 2t_2 - t_3 \\ x_3 & = & 3t_1 + t_2 + 3t_3 \\ x_4 & = & -1 + 4t_1 + 6t_2 \end{array} \right.$$

Исключая из системы уравнений параметры $t_1; t_2,\ t_3,\ t_4$, получим уравнение $2x_1 - 32x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 21 = 0$.

Уравнение гиперплоскости можно получить и по-другому. Векторы $\vec{AM}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ линейно зависимы, а следовательно, равен нулю следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 & x_3 & x_4 + 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и приводя подобные слагаемые, получим такое же уравнение $2x_1 - 32x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 21 = 0$.

Лекция 6.

Евклидово пространство.

Определение 6.1. *Говорят, что в вещественном векторном пространстве V_n задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V_n$ поставлено в соответствие число $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ так, что выполнены следующие условия:*

1°. *для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;*

2°. *для каждого вектора $\mathbf{x}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;*

3°. *для любых трех векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$;*

4°. *для любого вектора $\mathbf{x}$ скалярный квадрат $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, и, из равенства $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ следует $\mathbf{x} = 0$.*

Условия 1°–3° называются аксиомами скалярного умножения. Пространство V называется в этом случае пространством со скалярным произведением.

Если пространство со скалярным произведением удовлетворяет условиям 1°–4°, то оно называется евклидовым векторным пространством.

Пример 6.1. Пусть в $n-$мерном векторном пространстве V зафиксирован определенный базис, тогда скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ можно определить равенством

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \tag{6.1}$$

Все условия 1°–4° выполняются.

Определение 6.2. *Длиной или модулем или нормой вектора $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.*

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ которых равно нулю, называются ортогональными. В этом случае будем писать $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Лемма 6.1. *В любом пространстве со скалярным произведением справедлива "Теорема Пифагора." Если векторы* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *ортогональны, то* $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$.

◀ Действительно, если $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, то, ввиду условий 1^o–3^o
$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{x}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) =$
$= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$. ▶

Лемма 6.2. *В любом евклидовом пространстве справедливо неравенство Коши-Буняковского: для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *из* V $|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$.

◀ Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда для вектора $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}$ по условию 4^o имеем неравенство: $(\mathbf{z},\mathbf{z}) = (\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y},\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}) \geqslant 0$, из которого, ввиду условий 1^o–3^o, получаем $(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y},\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) - 2\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \alpha^2(\mathbf{y},\mathbf{y}) \geqslant 0$, или $|\mathbf{x}|^2 - 2\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \alpha^2|\mathbf{y}|^2 \geqslant 0$. Это есть квадратный трехчлен относительно α. Т.к. он должен быть неотрицательным при всех значениях α, то он не может иметь двух различных вещественных корней и, значит, его дискриминант неположителен: $(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 \leqslant 0$, откуда $|(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$. Что и требовалось доказать. ▶

Если $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$, то $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} = 0$, и векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны: $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$.

Можно определить угол φ между ненулевыми векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $-|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \leqslant (\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ или $-1 \leqslant \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \leqslant 1$. Так как $|\cos\varphi| \leqslant 1$, то $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$.

Лемма 6.3. *В евклидовом пространстве справедливо так называемое неравенство треугольника: для любых двух векторов* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$ $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

◀ Используем неравенство Коши-Буняковского: $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2 \leqslant |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2$, откуда $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$. ▶

Равенство $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ выполняется, если $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ (векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны), или если один из векторов нулевой. (Заметим, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору, поэтому можно считать, что равенство достигается когда векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны).

Ортонормированный базис.

Определение 6.3. *Базис* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ *евклидова пространства* V *называется* *ортогональным, если* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0$, *при* $i \neq k$. *Если, кроме того, все* $|\mathbf{e}_i| = 1$, *то базис называется* *ортонормированным.*

Лемма 6.4. *Система попарно ортогональных и отличных от нуля векторов линейно независима.*

◀ Пусть векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_m$ попарно ортогональны: $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = 0$ при $i \neq k$, и отличны от нуля. Предположим, что $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$, умножим это равенство скалярно на $\mathbf{x}_i$: $\alpha_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i) + \alpha_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_i) + \ldots + \alpha_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) + \ldots + \alpha_m(\mathbf{x}_m, x_i) = 0$, откуда, поскольку $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = 0$ при $i \neq k$ и $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) \neq 0$ при $i = k$ для $i = \overline{1, m}$, вытекает, что $\alpha_i = 0$ при всех $i = \overline{1, m}$. ▶

Теорема 6.1. *Во всяком евклидовом пространстве* V *имеются ортонормированные базисы.*

◀ Пусть $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\ldots$, $\mathbf{g}_n$ – произвольный базис пространства V. Положим $\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_1$ и $\mathbf{f}_2 = \mathbf{g}_2 + \alpha\mathbf{f}_1$, причем α подберем так, чтобы векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ были ортогональны: $(\mathbf{g}_2 + \alpha\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) = (\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_1) + \alpha(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) = 0$. Значит $\alpha = -\frac{(\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_1)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)}$. Так как $\mathbf{f}_1 \neq 0$, значит, знаменатель $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) \neq 0$. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ полученный вектор $\mathbf{f}_2$ ненулевой.

Допустим теперь, что попарно ортогональные и отличные от нуля векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_{k-1}$ уже найдены. Положим $\mathbf{f}_k = \mathbf{g}_k + \lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_1\mathbf{f}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}\mathbf{f}_{k-1}$ и подберем числа λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ так, чтобы вектор $\mathbf{f}_k$ был ортогонален к $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_{k-1}$. Для этого нужно, чтобы выполнялись равенства $(\varphi_k, \mathbf{f}_i) = (\mathbf{g}_k, \mathbf{f}_i) + \lambda_1(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) = 0$ при $i = \overline{1, k-1}$, откуда $\lambda_i = \frac{(\mathbf{g}_k, \mathbf{f}_i)}{(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i)}$. Знаменатель дроби $(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) \neq 0$, так как векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_{k-1}$ по предположению ненулевые.

Так как исходные векторы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k$ линейно независимы, то и полученный вектор $\mathbf{f}_k$ тоже будет ненулевым.

Это построение мы будем продолжать до тех пор, пока не найдем последний (ненулевой) вектор $\mathbf{f}_n = \mathbf{g}_n + \beta_1\mathbf{f}_1 + \beta_2\mathbf{f}_2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{f}_{n-1}$, ортогональный всем предыдущим векторам $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-1}$. В силу последней леммы векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ линейно независимы и, значит, образуют ортогональный базис. Если теперь каждый из базисных векторов пронормировать, то получится ортонормированный базис, образованный векторами $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{|\mathbf{f}_1|}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}, \dots, \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{f}_n}{|\mathbf{f}_n|}$.

Заметим, что если первые k векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k$ были попарно ортогональны, то $\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{f}_k = \mathbf{g}_k$, а, кроме того, если они были единичными, то $\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{e}_k = \mathbf{g}_k$. ▶

Применяемый способ получения ортонормированной системы векторов из заданной линейно независимой системы называется процессом ортогонализации по Граму-Шмидту.

Замечание. *Если* V_1 *подпространство* V *и* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ – *ортонормированный базис* V_1, *то векторы* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ *можно включить в ортонормированный базис всего пространства.*

◀ Для доказательства достаточно дополнить $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ до базиса пространства V и произвести ортогонализацию полученного множества векторов, начиная с $\mathbf{e}_{k+1}$. ▶

Пример 6.2. $\mathbf{g}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{g}_2 = (2,1,0,1)$.

> **Решение.** $\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_1$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{g}_2 + \alpha\mathbf{f}_1$. Умножим последнее равенство скалярно на $\mathbf{f}_1$: $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_1) + \alpha(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)$. Откуда $\alpha = -\frac{(\mathbf{g}_2,\mathbf{f}_1)}{(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_1)} = -\frac{4}{4} = -1$. Тогда $\mathbf{f}_2 = \mathbf{g}_2 - \mathbf{f}_1 = (2,1,0,1) - (1,1,1,1) = (1,0,-1,0) согласно формуле$ (6.1).

Найдем выражение скалярного произведения векторов в координатах. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ – ортонормированный базис. $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^n y_k\mathbf{e}_k$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i, \sum_{k=1}^n y_k\mathbf{e}_k) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, так как $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0$, если $i \neq k$ и $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 1$, если $i = k$.

Определение 6.4. *Два подпространства V_1 и V_2 евклидова пространства V называются взаимно ортогональными, если каждый вектор из V_1 ортогонален каждому вектору из V_2 ($V_1 \perp V_2$).*

Пример 6.3. В обычном трехмерном пространстве плоскость α, проходящая через начало координат и перпендикулярная к ней прямая l, тоже проходящая через начало координат, ортогональны, т.е. $\alpha \perp l$.

Но если взять две взаимно перпендикулярные в смысле элементарной геометрии плоскости α_1 и α_2, то они не будут перпендикулярны в смысле последнего определения.

Теорема 6.2. *Для того, чтобы подпространства V_1 и V_2 были взаимно ортогональными, необходимо и достаточно. чтобы все базисные векторы одного пространства были ортогональны всем базисным векторам другого пространства.*

◀ **Необходимость.** Пусть $V_1 \perp V_2$. Из определения следует, что любой вектор из V_1 ортогонален любому вектору из V_2, а значит каждый базисный вектор из V_1 ортогонален любому базисному вектору из V_2.

Достаточность. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_k$ – базис V_1, а $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_m$ - базис V_2, причем $(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = 0$ для всех $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$. Надо доказать, что тогда $V_1 \perp V_2$.

Пусть $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{y} \in V_2$, тогда $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{f}_1 + \ldots + y_m\mathbf{f}_m$. Найдем $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k, y_1\mathbf{f}_1 + \ldots + y_m\mathbf{f}_m) = x_1y_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1) + \ldots + x_1y_m(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_m) + \ldots + x_ky_m(\mathbf{e}_k, \mathbf{f}_m) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_iy_j(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = 0$. Каждое из скалярных произведений, входящих в последнюю сумму, рано нулю $(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = 0$, значит, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ и векторы $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

В силу произвольности выбора векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ $V_1 \perp V_2$. ▶

Лекция 7.

Теорема 7.1. *Два взаимно ортогональных подпространства пересекаются только по нулевому вектору.*

◀ Пусть $V_1 \perp V_2$ и $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$, то $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{x} \in V_2$. Но тогда $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, значит $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ▶

Пусть V_1 – подпространство евклидова пространства V. Выберем в V_1 ортонормированный базис $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_r$ и дополним его до ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_{r+1},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ всего пространства. Векторы $\mathbf{e}_{r+1},\ \mathbf{e}_{r+2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ образуют $(n-r)$-мерное подпространство V_2, очевидно, ортогональное V_1.

Лемма 7.1. $\forall\, \mathbf{x} \in V$, *ортогональный* V_1, *принадлежит* V_2.

◀ Действительно, если вектор $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ ортогонален V_1, то $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = x_i = 0$ при $i = \overline{1, r}$ и, значит, $\mathbf{x} = x_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in V_2$. ▶

Определение 7.1. *Подпространство* V_2, *образованное всевозможными векторами из* V, *ортогональными ко всем векторам из* V_1, *называется ортогональным дополнением* V_1. *Это подпространство обозначается* $V_1^{\perp}$.

Ортогональное дополнение r-мерного подпространства $(n-r)$-мерно. Ясно, что $(V_1^{\perp})^{\perp} = V_1$.

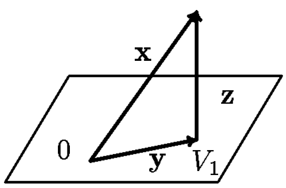

Рис. 7.1.

Подпространства V_1 и $V_1^{\perp}$ порождают все V и пересекаются по $\{\mathbf{0}\}$. $V_1 \oplus V_1^{\perp} = V$, поэтому каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно представить в виде суммы двух векторов, а именно $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in V_1$ и $\mathbf{z} \in V_1^{\perp}$. Такое разложение единственное.

Определение 7.2. *Вектор* $\mathbf{y}$ *называется ортогональной проекцией вектора* $\mathbf{x}$ *на подпространство* V_1.

Можно найти и угол между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством V_1. Это есть угол между вектором $\mathbf{x}$ и проекцией $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{x}$ на

V_1, т.е.

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} = \frac{(\mathbf{y}+\mathbf{z},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} = \frac{(\mathbf{y},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} = \frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} = \frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}.$$

Евклидово (точечно-векторное) пространство.

Пусть даны A_n – аффинное пространство и V_n – соответствующее ему векторное пространство, в котором введена евклидова метрика, т.е. задано скалярное произведение. В пространстве A_n можно определить расстояние между двумя точками M и N, полагая его равным модулю вектора $\vec{MN}$ и угол $\angle MPN$, полагая его рвным углу между векторами $\vec{PM}$ и $\vec{PN}$.

Определение 7.3. *Пространство A_n с введенной в нем таким образом метрикой называется евклидовым пространством.* (Ранее введенное пространство называлось евклидово векторное пространство).

Таким образом $n-$мерное евклидово пространство может быть определено с помощью следующих пяти групп аксиом:

1°. Аксиомы сложения векторов (4 аксиомы).

2°. Аксиомы умножения вектора на число (4 аксиомы).

3°. Аксиома размерности (1 аксиома).

4°. Аксиомы, связывающие векторы и точки (3 аксиомы).

5°. Аксиомы скалярного умножения (4 аксиомы).

Пусть задана $k-$мерная плоскость V_1, проходящая через начало координат.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Пусть точка $x = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$, тогда вектор $\mathbf{x} = \vec{OX} = \mathbf{y}+\mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in V_1$ и $\mathbf{z} \in V_1^{\perp}$.

Определение 7.4. *Длина вектора* $|\mathbf{z}|$ *называется* <u>*расстоянием*</u> *точки* x *от подпространства* V_1.

Пусть теперь задана произвольная $k-$мерная плоскость α.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{7.2}$$

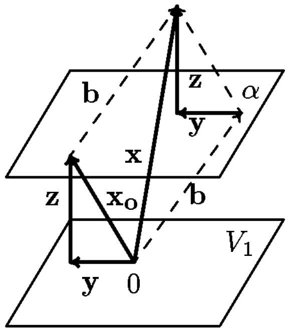

Рис. 7.2.

Эта плоскость α получается из соответствующего ей подпространства V_1, определяемого системой (7.1), параллельным переносом на некоторый вектор $\mathbf{b}$. Расстояние от точки x до $k-$мерной плоскости (7.2) естественно считать равным расстоянию от точки x_o до подпространства V_1, т.е. длину вектора $\mathbf{z}$.

Пусть в евклидовом пространстве выбрана ортонормированная система координат и дано уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c, \tag{7.3}$$

коэффициенты a_1, a_2, $\ldots$, a_n одновременно не равны нулю. Это уравнение определяет гиперплоскость, которая получается из подпространства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0. \tag{7.4}$$

Гиперплоскость α_o, проходящая через начало координат, переносится на некоторый вектор $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, координаты которого удовлетворяют уравнению (7.3), т.е.

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = c. \tag{7.5}$$

Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, то можно (7.5) переписать в виде

$$\mathbf{ab} = c. \tag{7.6}$$

Вектор $\mathbf{a}$ ортогонален подпространству (7.4), т.к. для каждого вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V_1$ $\mathbf{ax} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$.

Пусть $M = \pm|\mathbf{a}| = \pm\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. Выберем такой знак, чтобы $\frac{c}{M} = P \geqslant 0$. Если $c = 0$, то знак может быть выбран произвольно. Уравнение

$$\frac{a_1}{M}x_1 + \frac{a_2}{M}x_2 + \dots + \frac{a_n}{M}x_n - \frac{c}{M} = 0$$

– нормальное уравнение гиперплоскости. Вектор $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{M}}$ является единичным вектором, коллинеарным $\mathbf{a}$, и значит, ортогональным V_1. Пусть дана точка $X(x_o^1, \dots, x_o^n)$, требуется найти расстояние точки X до гиперплоскости α.

Это значит, что $\vec{OX} = \vec{OX_o} + \mathbf{b}$, $\vec{OX_o} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in \alpha_o$, а $\mathbf{z} \perp \alpha_o$. Тогда искомое расстояние равно $|\mathbf{z}|$. Но $\mathbf{z} \perp \alpha_o$ как и $\mathbf{a} \perp \alpha_o$, значит $\mathbf{z}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, следовательно, существует такое число λ, что $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$, тогда $|\mathbf{z}| = |\lambda|$. Итак, $\vec{OX} = \mathbf{y} + \mathbf{z} + \mathbf{b}$, $\vec{OX} = \mathbf{y} + \lambda\mathbf{n} + \mathbf{b}$. Умножим это равенство скалярно на $\mathbf{n}$, получим, что $(\vec{OX}, \mathbf{n}) = (\mathbf{y}, \mathbf{n}) + \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + (\mathbf{b}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = 0$, $\mathbf{n}^2 = 1$, $(\mathbf{bn}) = (\mathbf{b}, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{M}}) = \frac{c}{M}$. Следовательно $(\vec{OX}, \mathbf{n}) = \lambda + \frac{c}{M}$, откуда $\lambda = (\vec{OX}, \mathbf{n}) - \frac{c}{M}$. Тогда

$$(\vec{OX}, \mathbf{n}) = x_o^1\frac{a_1}{M} + \dots + x_o^n\frac{a_n}{M}.$$

В этом мире страшных форм
наше дело – сторона.
Мы для них подножный корм,
многоточье, два зерна...
И.Бродский

Линейные и билинейные формы.

Пусть V_n- векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.
Определение 7.5. *Отображение $f\ :\ V_n \longrightarrow \mathbb{R}$ называется линейной формой, если для $\forall\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \in V_n,\ \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются следующие два условия:*

а) $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$;

б) $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$.

Это отображение определено на всем векторном пространстве, значения принимает из $\mathbb{R}$.

Линейную форму принято обозначать в виде $f(\mathbf{x}) = \mathbf{ax}$. Символ $\mathbf{a}$ определяет линейную форму независимо от аргумента, т.е. обозначает линейную форму как элемент нового множества. Запись $\mathbf{ax}$ удобна в том отношении, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{ax}_1 + \mathbf{ax}_2$$
$$\mathbf{a}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{ax}$$

Выберем в пространстве V_n базис $\{\mathbf{e}_i\}$. Тогда вектор $\mathbf{x}$ мы можем разложить по этому базису: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i x_i = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Тогда $\mathbf{ax} = \mathbf{a}(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{ae}_1 + \ldots + x_n\mathbf{ae}_n$. Обозначим $\alpha_i = \mathbf{ae}_i$. Упорядоченный набор таких чисел называется коэффициентами линейной формы

$$\mathbf{ax} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n. \tag{7.7}$$

Значение линейной формы равно сумме произведений ее коэффициентов на соответствующие координаты вектора. Введем матрицустроку $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, тогда

$$\mathbf{ax} = AX = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Выясним, как преобразуются коэффициенты линейной формы при преобразовании базиса. Координаты вектора $\mathbf{x} \in V_n$ преобразуются по формуле $X = PX'$, где P – матрица перехода от старого базиса к новому, X – матрица-столбец координат вектора в старом базисе, X' – матрица-столбец координат вектора в новом базисе. Тогда действия линейной формы $\mathbf{a}$ на $\mathbf{x}$ в старом и новом базисе запишутся в виде $\mathbf{ax} = AX$ и $\mathbf{ax} = A'X'$. Учитывая, что $X = PX'$, получаем $AX = APX' = A'X'$, значит $A' = AP$ или

$$A = A'P^{-1}.$$

Закон преобразования коэффициентов, выраженный данной формулой, обеспечивает инвариантность значений функции, которая в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ задается формулой $\mathbf{ax} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$.

Лекция 8.

Теорема 8.1. *Множество всех линейных форм, заданных в пространстве V, представляет собой линейное пространство.*

◄ Докажем, что сумма произвольных линейных форм $\mathbf{ax}$ и $\mathbf{bx}$ также является линейной формой. Пусть $\mathbf{cx} = \mathbf{ax} + \mathbf{bx}$, тогда справедливы равенства

а) $\mathbf{c}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{ax}+\mathbf{bx}+\mathbf{ay}+\mathbf{by} = \mathbf{cx}+\mathbf{cy}$;

б) $\mathbf{c}(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{ax} + \lambda\mathbf{bx} = \lambda(\mathbf{ax}+\mathbf{bx}) = \lambda\mathbf{cx}$.

Линейность суммы доказана. Покажем теперь, что если линейную форму умножить на α, то получим линейную форму.

Пусть $\mathbf{cx} = \lambda\mathbf{ax}$, тогда

а) $\mathbf{c}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{ax} + \lambda\mathbf{ay} = \lambda(\mathbf{ax}+\mathbf{ay}) = \mathbf{cx}+\mathbf{cy}$;

б) $\mathbf{c}(\alpha\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{a}(\alpha\mathbf{x}) = \lambda\alpha\mathbf{a}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{c}\mathbf{x}$.

Значит $\lambda\mathbf{a}\mathbf{x}$ – линейная форма. Все 8 аксиом векторного пространства выполняются, поэтому множество линейных форм есть векторное пространство. ▶

Определение 8.1. *Пространство линейных форм называется сопряженным или дуальным пространством V и обозначается V^*.*

Теорема 8.2. *Если данное векторное пространство $n-$мерное, то сопряженное ему пространство также $n-$мерно.*

◀ Действительно, если в векторном пространстве V задан базис $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Тогда произвольный элемент $\mathbf{a}$ из V^* есть линейная форма $\mathbf{a}\mathbf{x} = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где $a_i = \mathbf{a}(\mathbf{e}_1)$, $i = \overline{1,n}$ определяются однозначно заданием набора коэффициентов $(a_1,\ \ldots,\ a_n)$. Этот набор можно рассматривать как вектор из координатного пространства размерности n. При сложении линейных форм и умножении их на число соответственно складываются и умножаются на число их коэффициенты. Поэтому в данном случае V^* изоморфно координатному пространству размерности n.

Определение 8.2. *Элементы пространства V^* называются ковекторами.*

Определение 8.3. *Множество ковекторов $(\theta^1,\ \ldots,\ \theta^n)$ называется сопряженным (дуальным, двойственным) базисом по отношению к прямому базису $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$, если*

$$\theta^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases},$$

и δ^i_j есть символ Кронекера-Капелли.

Для каждого прямого базиса существует единственный сопряженный ему базис.

Следующие линейные формы являются линейно независимыми,

$$\theta^1 = (1, \ \ldots, \ 0) \quad \ldots \quad \theta^n = (0, \ \ldots, \ 1).$$

Любую линейную форму $\mathbf{a} = (a_1, \ \ldots, \ a_n)$ можно разложить по этим линейным формам: $\mathbf{a} = a_1\theta^1 + \ldots + a_n\theta^n$. Координаты разложения любого ковекторра по дуальному базису совпадают с его компонентами, т.к. $a_i = \mathbf{a}(\mathbf{e}_i)$.

Пример 8.1. Найти значение ковектора $\mathbf{a} = (1, \ 2, \ 3)$ на векторе $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\mathbf{ax} = (1, \ 2, \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

Определение 8.4. *Тензором валентности (p, q) называется полилинейная функция, зависящая от p векторных и q ковекторных аргументов $F(x_1, \ldots, x_p, \ a^1, \ldots, a^q)$.*

Полилинейность означает линейность функции по каждому аргументу.

а) Ковектор – это тензор валентности $(1, 0)$;

б) вектор – это тензор валентности $(0, 1)$.

Геометрический смысл линейных форм.

Используем аффинное пространство. Будем считать, что значения функции $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ в точке A равно ее значению на векторе $\mathbf{x} = \vec{OA}$, тем самым функция $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ будет определена в аффинном пространстве.

а) Множество точек, в которых линейная функция $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ принимает постоянное значение, представляет собой гиперплоскость.

б) Всякая гиперплоскость представляет собой геометрическое место точек, в которых некоторая линейная форма сохраняет постоянное значение.

в) Гиперплоскости, соответствующие разным значениям данной линейной функции $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ параллельны.

г) Гиперплоскость, на которой $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0$ проходит через начало координат.

Билинейные формы.

Определение 8.5. *Числовая функция $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ двух аргументов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V_n$ является <u>билинейной</u>, если она линейна по каждому аргументу.*

а) $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(x_1, \mathbf{y}) + A(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \quad A(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda A(\mathbf{x}, \mathbf{y});$

б) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \quad A(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda A(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ – элементы V_n, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тензор линейности $(2, 0)$ называется билинейной формой, зависящей от двух аргументов. Найдем выражение билинейной формы в координатах. Пусть в пространстве V_n задан базис $\mathbf{e}_1$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ и пусть $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, $\quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$. Тогда $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$, где коэффициенты $a_{ik} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$ зависят от базиса и не зависят от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Матрица $A = (a_{ik})$ называется матрицей этой билинейной формы.

В частности, скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляется билинейной формой $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i y_k$, где $g_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$.

Билинейную форму $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно рассматривать как матричное произведение, т.е. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T A Y$, где Y – матрица-столбец координат вектора $\mathbf{y}$, X^T – матрица-строка координат вектора $\mathbf{x}$, A – матрица билинейной формы.

Найдем, как изменяется матрица билинейной формы при переходе к новому базису. Пусть в старом базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$,

$$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k = X^TAY. \tag{8.1}$$

В новом базисе

$$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik}x'_iy'_k = X'^TA'Y'. \tag{8.2}$$

Матрицу перехода от старого базиса к новому обозначим через P, тогда $X = PX'$ и $Y = PY'$. Подставим эти выражения в (8.1). Получим, что

$$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = X^TAY = (PX')^TAPY' = X^TP^TAPY'. \tag{8.3}$$

Сравнивая (8.2) и (8.3), получаем

$$A' = P^TAP. \tag{8.4}$$

Замечание. *Т.к. матрица перехода P (и, значит, P^T) является невырожденной, то ранг матрицы A' равен рангу матрицы A. Т.о. ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса и может быть поэтому назван рангом самой билинейной формы.*

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \ & \textstyle\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_2y_n + \ldots + \\ & + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n \end{aligned}$$

Матрица этой билинейной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 8.6. *Билинейная форма называется симметрической, если ее матрица симметрическая:* $A = A^T$.

Пример 8.2. Скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве есть симметрическая билинейная форма.

Определение 8.7. *Билинейная форма называется кососимметрической, если ее матрица кососимметрическая:* $A = -A^T$.

Пусть $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – произвольная билинейная форма, тогда

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}(A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + A(\mathbf{y}, \mathbf{x})) && \text{– симметрическая,} \\ C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}(A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - A(\mathbf{y}, \mathbf{x})) && \text{– кососимметрическая} \end{aligned}$$

билинейная форма. Но тогда

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + C(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Каждую билинейную форму можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической билинейных форм.

Пространство билинейных форм Λ можно представить в виде прямой суммы пространства симметрических билинейных форм Λ_{sym} и пространства кососимметрических билинейных форм Λ_{skew}. Размерность пространства $\dim(\Lambda_{sym}) = \frac{n(n+1)}{2}$, размерность пространства $\dim(\Lambda_{skew}) = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim(\Lambda) = n^2$.

Лекция 9.

Квадратичные формы.

Определение 9.1. *Если в симметрической билинейной форме* $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *положить* $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, *то получиться квадратичная форма* $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

При этом матрица A квадратичной формы по определению есть симметрическая матрица.

Пусть в векторном пространстве V_n задан базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, тогда $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ и $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = A(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, x_1\mathbf{e}_1 +$

$\ldots + x_n\mathbf{e}_n) = X^TAX$. Матрица квадратичной формы при замене базиса меняется по закону $A' = P^TAP$, причем матрица A – симметрическая.

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \quad a_{11}x_1^2 + \underbrace{a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1}_{2a_{12}x_1x_2} + a_{22}x_2^2 + \ldots + \\ + a_{nn}x_n^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Пример 9.1.

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 10x_1x_3 - 12x_2x_3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & -6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$f(\mathbf{x}) = X^TAX = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & -6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Определение 9.2. *Говорят, что* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *<u>сопряжены</u> между собой, если* $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V_n$.

Это отношение симметрично, т.к. тогда и $A(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0$.

Пример 9.2. Ортогональные векторы евклидова пространства сопряжены, т.к. $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Определение 9.3. *Вектор* $\mathbf{x} \in V_n$ *называется <u>самосопряженным</u>, если* $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$.

Если ранг матрицы квадратичной формы равен $r = n$, то эта форма нызывается <u>невырожденной</u>, если $r < n$, то <u>вырожденной</u>. При замене базиса ранг квадратичной формы не меняется.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Определение 9.4. *Квадратичная форма* $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ *или* $f(\mathbf{x})$ *имеет <u>канонический вид</u> по отношению к базису* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, *если* *векторы этого базиса взаимно сопряжены между собой, т.е.* $a_{ij} = \mathbf{a}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, $i \neq j$ *и матрица квадратичной формы, приведенной к каноническому виду будет диагональной.*

Если ранг квадратичной формы $r < n$, тогда число отличных от нуля диагональных элементов в матрице квадратичной формы, приведенной к каноническому виду, будет равно r.

Метод Лагранжа.

Пусть $f(\mathbf{x})$ – некоторая квадратичная форма, определенная на V_n над $\mathbb{R}$. Выберем некоторый базис, тогда

$$f(\mathbf{x}) = X^T AX. \tag{9.1}$$

Требуется найти в векторном пространстве новый базис, в котором матрица квадратичной формы имела бы диагональный вид, векторы нового базиса должны быть попарно сопряжены между собой.

Итак, $f(\mathbf{x}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Метод Лагранжа может быть применен тогда и только тогда, когда коэффициент при квадрате какой-нибудь переменной отличен от нуля.

Без ограничения общности считаем, что $a_{11} \neq 0$. Любую квадратичную форму можно привести к сумме квадратов переменных.

Обозначим через

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 & = & x_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & = & x_n \end{array} \right. \tag{9.2}$$

и преобразуем $f(\mathbf{x})$. Составим разность $f(\mathbf{x}) - \frac{1}{a_{11}}y_1^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n(n-1)}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 = g(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ – квадратичная форма, которая зависит уже только от $(n-1)$ координаты $x_2, \ldots, x_n$.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + g(\mathbf{x}) \tag{9.3}$$

В результате этого преобразования в квадратичной форме выделился квадрат переменной y_1.

Преобразование координат можно записать в матричном виде

$$Y = AX, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0.$$

Квадратичную форму (9.2) можно преобразовать по такому же принципу до тех пор, пока не выделятся квадраты переменных.

Пример 9.3. Привести к сумме квадратов $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2$.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad Y = AX.$$

Тогда $f - y_1^2 = f - (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 = 2x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$. Обозначим $g(\mathbf{x}) = 2x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$, получим $f = y_1^2 + g$ или $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_2y_3 - y_3^2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= 2y_2 + y_3 \\ z_3 &= x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad Z = BY.$$

$f - \frac{1}{2}z_2^2 = f - \frac{1}{2}(2y_2 + y_3)^2 = y_1^2 - \frac{3}{2}y_3^2$, или

$$f = z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{3}{2}z_3^2 \quad \text{канонический вид } f$$

Матрица квадратичной формы в каноническом виде:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Формулы преобразования: $Z = BAX$ или $X = A^{-1}B^{-1}Z$.

Рассмотрим случай, когда все коэффициенты при квадратах равны нулю. Без ограничения общности можно считать, что $a_{12} \neq 0$ и

$$\begin{cases} x_1 & = & y_1 + y_2 \\ x_2 & = & y_1 - y_2 \\ x_3 & = & y_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & y_n \end{cases}$$

Эта запись есть не что иное как переход к новому базису

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 & = & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 & = & \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 & = & \mathbf{e}_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{e}_n & = & \mathbf{e}_n \end{cases}$$

с матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $-2 \neq 0$. При этом произведение $x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2$ и в этом случае применим метод Лагранжа.

Пример 9.4. Привести к сумме квадратов $f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{cases}$$

$$f = (y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1+y_2)y_3+(y_1-y_2)y_3 = y_1^2-y_2^2+2y_1y_3.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} z_1 &= y_1 + y_3 \\ z_2 &= y_2 \\ z_3 &= y_3 \end{cases}$$

$$f - z_1^2 = f - (y_1 + y_3)^2 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 - y_1^2 - y_3^2 - 2y_1y_3 = -y_2^2 - y_3^2, \qquad f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Мы доказали, что если в векторном пространстве задана произвольная квадратичная форма, то в V_n можно найти такой базис, в котором форма приводится к сумме квадратов:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n', \tag{9.4}$$

где x_1', x_2', $\ldots$, x_n' – координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе. Коэффициенты a_i могут быть как положительными, так и отрицательными, некоторые из них могут равняться нулю (если данная квадратичная форма вырожденна).

Приведение квадратичной формы к нормальному виду.

Определение 9.5. *Квадратичная форма имеет нормальный вид, если ее матрица диагональна и все отличные от нуля элементы, стоящие на главной диагонали, равны* ± 1. Если мы получили форму вида (9.4), то, сделав еще одну подстановку $\sqrt{|a_i|}x'_i = z_i$, если $a_i \neq 0$ и $x'_j = z_j$, если $a_j = 0$, приведем квадратичную форму к виду

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm \ldots \pm z_m^2.$$

После перенумерации базисных векторов, квадратичная форма станет следующей:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2,$$

где r – ранг. Ранг не зависит от выбора базиса.

Лекция 10.

Он знает, где минус,
Он хочет узнать, где плюс...
Б.Гребенщиков

Закон инерции квадратичных форм.

Теорема 10.1. *Если квадратичная форма приводится к сумме квадратов в двух различных базисах, то число положительных членов и число отрицательных членов в обоих случаях одно и то же.*

◀ Предположим, что в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ квадратичная форма имеет вид

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2, \tag{10.1}$$

где x_i – координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. В базисе $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = {x'_1}^2 + \ldots + {x'_k}^2 - {x'_{k+1}}^2 - \ldots - {x'_{k+m}}^2, \tag{10.2}$$

x'_i – координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе.

Пусть, например, $p > k$. Рассмотрим в пространстве V подпространство V_1, порожденное векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ и V_2, порожденное векторами $\mathbf{e}'_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Так как сумма их размерностей $p+(n-k) = n+p-k > n$, то их пересечение имеет ненулевую размерность, т.е. существует вектор $\mathbf{x} \neq 0 \in V_1 \cap V_2$. Этот вектор можно представить как в виде $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{e}_p$, так и в виде $\mathbf{x} = \beta_{k+1}\mathbf{e}'_{k+1} + \ldots + \beta_n \mathbf{e}'_n$. Для вектора $\mathbf{x}$ по формуле (10.1) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 > 0$, т.к. хотя бы одно $\alpha_1 \neq 0$; в то же время по формуле (10.2) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\beta_{k+1}^2 - \ldots - \beta_{k+m}^2 \leqslant 0$. (Последнее неравенство нестрогое, потому что возможно, что $k+m<n$).

Мы пришли к противоречию, откуда следует, что $p \leqslant k$. Аналогично получается $p \geqslant k$. Значит $p=k$. Т.к. $q=r-p$, $m=r-k$, значит $q=m$. ▶

Ясно, что $p+q=r$.

Определение 10.1. *Разность $p-q$ называется сигнатурой квадратичной формы $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$, p – положительный, q – отрицательный индексы инерции.*

Квадратичная форма определяется по своему рангу и сигнатуре с точностью до знака.

Метод Якоби.

Пусть

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \ldots + \\ &+ a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$\ldots,\ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ \ldots,\ \Delta_n = \det A$$

Существует преобразование координат, при котором квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ будет иметь канонический вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n^2. \tag{10.4}$$

Матрица этой формы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}.$$

при условии, что $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \ldots,\ \Delta_n \neq 0$.

При этих предположениях ищется специальный базис такой, что

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' &= p_{11}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2' &= p_{21}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3' &= p_{31}\mathbf{e}_1 + p_{32}\mathbf{e}_2 + p_{33}\mathbf{e}_3 \\ \ldots & \ldots\ \ldots \\ \mathbf{e}_n' &= p_{n1}\mathbf{e}_1 + p_{n2}\mathbf{e}_2 + \ldots + p_{nn}\mathbf{e}_n \end{cases} \tag{10.5}$$

Для того, чтобы квадратичную форму (10.3) привести к каноническому виду, достаточно для любого k $(1 < k \leqslant n)$ обеспечить условия $A(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k') = a_{ik}' = 0$ при $i = \overline{1, k-1}$. Тогда $a_{ki}' = 0$ в силу симметричности матрицы квадратичной формы. Отличными от нуля окажутся лишь коэфициенты при квадратах числовых аргументов, т.е. $A(\mathbf{e}_k', \mathbf{e}_k') \neq 0$, и $A(\mathbf{e}_k', \mathbf{e}_k') = 1$.

В самом деле

$$\begin{aligned} &A(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k') = A(p_{i1}\mathbf{e}_1 + p_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + p_{ii}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \\ &= p_{i1}A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_k) + p_{i2}A(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_k) + \ldots + p_{ii}A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k') = \delta_{ik}.$$

При $k = 1$ остается только $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1') = 1$, из которого получим

$$A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1') = A(\mathbf{e}_1, p_{11}\mathbf{e}_1) = p_{11}A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = p_{11}a_{11} = 1,$$

$$p_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{\Delta_1} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1},\ a_{11} \neq 0.$$

Применим метод математической индукции. Допустим, что все коэффициенты, входящие в первые $k-1$ строк формулы (10.5), уже определены. Надо найти коэффициенты строки с номером k этой формулы. Запишем условия

$$A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_k) = 0,\ A(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_k) = 0,\ \ldots,\ A(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}'_k) = 0,\ A(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}'_k) = 1. \tag{10.6}$$

Отсюда, используя (10.5), получим для искомых коэффициентов систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}p_{k1} + a_{12}p_{k2} + \ldots + a_{1k}p_{kk} & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{k-1,1}p_{k-1,1} + a_{k-1,2}p_{k-2,2} + \ldots + a_{k-1,k}p_{k-1,k} & = & 0 \\ a_{k1}p_{k1} + a_{k2}p_{k2} + \ldots + a_{kk}p_{kk} & = & 1 \end{array}\right. \tag{10.7}$$

Определитель системы (10.5) совпадает с Δ_k и $\Delta_k \neq 0$ из-за начального предположения. Поэтому существует единственное решение этой системы $p_{k1},\ p_{k2},\ \ldots,\ p_{kk}$.

Остается проверить, что построенное преобразование невырожденно. Применим правило Крамера, получим

$$p_{kk} = \frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,k-1} & 0 \\ a_{k1} & \ldots & a_{k,k-1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Используя треугольную структуру матрицы преобразования (10.5), найдем определитель Δ этой матрицы.

$$\Delta = p_{11}p_{22}\ldots p_{nn} = \frac{\Delta_o}{\Delta_1}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n}.$$

Т.о. $\Delta \neq 0$, значит, преобразование (10.7) неварожденно.

Теперь можно определить и коэффициенты квадратичной формы в новом базисе $\mathbf{e}'_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n$. Достаточно вычислить лишь диагональные коэффициенты, т.к. остальные заведомо равны 0. Получим, что

$$a'_{kk} = \mathbf{a}(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_k) = \mathbf{a}(p_{k1}\mathbf{e}_1 + \ldots + p_{kk}\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_k) = p_{kk}\mathbf{a}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}'_k) = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$$

и

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n^2.$$

Пример 10.1. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$.

Решение. $\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 2; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = -20.$

$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}{x'_1}^2 + {x'_2}^2 - \frac{1}{10}{x'_3}^2.$

Лекция 11.

Определение 11.1. *Квадратичная форма называется строго положительной, если* $f(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall\ \mathbf{x} \neq 0$ *и называется строго отрицательной, если* $f(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall\ \mathbf{x} \neq 0$.

Пример 11.1.

1° $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ в V_3 строго положительно определена;

2° $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ в V_3 строго отрицательно определена;

3° $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ в V_3 не строго положительно определена;

4° $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$ в V_3 не строго отрицательно определена.

Укажем несколько свойств положительно определенных форм.

а) Если $f(\mathbf{x})$ является положительно определенной, то $a_{ii} > 0$ при всех $i = \overline{1, n}$.

◀ $a_{ii} = \mathbf{a}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i) > 0$ ▶

Замечание. *Это условие не является достаточным. Квадратичная форма* $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 1000x_1x_2 + x_2^2$ *не является положительно определенной, хотя* $a_{11} = 1 > 0$, $a_{22} = 1 > 0$, *но на векторе* $\mathbf{x}(-1, 1)$ *форма принимает отрицательное значение.*

б) Если форма $f(\mathbf{x})$ положительно определена, то определитель ее матрицы положителен, $\Delta = \det A > 0$.

◀ Приведем квадратичную форму $f(\mathbf{x})$ к каноническому виду: $f(\mathbf{x}) = a'_{11}{x'_1}^2 + a'_{22}{x'_2}^2 + \ldots + a'_{nn}{x'_n}^2$. По доказанному все $a'_{ii} > 0$, тогда $\Delta' = a'_{11} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} > 0$. При замене базиса матрица квадратичной формы меняется по закону $A' = P^T AP$, откуда $\Delta' = \Delta \cdot (\det P)^2 > 0$. ▶

Замечание. *Это условие не является достаточным. Квадратичная форма* $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$ *имеет*

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, *но* $f(\mathbf{x}) \leqslant 0$ *при всех* $\mathbf{x}$.

в) В $n-$мерном пространстве любая положительно определенная форма имеет полный ранг.

◀ Это очевидно, т.к. $\Delta \neq 0$. ▶

Теорема 11.1. Критерий Сильвестра. *Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно. чтобы все главные миноры матрицы квадратичной формы были положительными.*

◀ **Необходимость.** Пусть $f(\mathbf{x})$ положительно определена, т.е. для любого $\mathbf{x} \neq 0$ $f(\mathbf{x}) > 0$. Выберем произвольный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n$ и построим линейную оболочку $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$. Будем рассматривать квадратичную форму на подпространстве $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = V_n$. Если $\mathbf{x} \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, то $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in V_n$ и $f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Все остальные члены, в коэффициентах которых хотя бы один из двух индексов больше k, исчезают за счет нулевых значений координат.

Форма $f(\mathbf{x})$ на подпространстве $L(\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_k)$ будет положительно определенной, т.к. она положительно определена на всем пространстве. Поэтому определитель формы $f(\mathbf{x})$, рассматриваемой на $L(\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_k)$, положителен

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,$$

но Δ_k – главный минор порядка k матрицы квадратичной формы $f(\mathbf{x})$. Индекс k может принимать значения 1, 2, ..., n. Тем самым доказано, что все главные миноры матрицы квадратичной формы строго больше нуля.

Достаточность. Известно, что все $\Delta_k > 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби, тогда имеем:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2.$$

Если $\mathbf{x} \neq 0$, то хотя бы одна из координат $x_i' \neq 0$ и, следовательно $f(\mathbf{x}) > 0$. Теорема доказана. ▶

Евклидово пространство может быть определено и с помощью квадратичной формы.

Определение 11.2. *Скалярным произведением* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *называется функция, удовлетворяющая свойствам:*

а) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *симметричность;*

б) линейность по каждому аргументу;

в) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, *если* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ – норма вектора. Скалярное произведение порождает нормированное пространство.

Если в E_n (евклидовом пространстве) задан базис $\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$, пусть

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y^j \mathbf{e}_j, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j g_{ij}.$$

g_{ij} – компонента метрического тензора.

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма в виде матрицы Грама $g_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Свойства матрицы Грама.

а) симметричность $g_{ij} = g_{ji}$;

б) невырожденность $\det G \neq 0$.

Применение матрицы Грама к решению задач.

Пример 11.2. Найти расстояние от $k-$мерной плоскости до точки M_1.

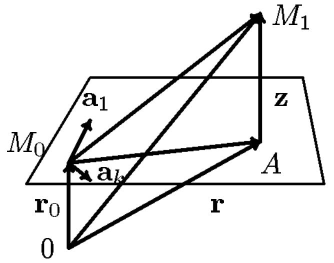

Рис. 11.1.

Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ образуют базис $k-$мерной плоскости.

$d = |\vec{AM_1}| = ||\mathbf{z}||$,

$\vec{M_oM_1} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$,

$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k + \mathbf{z}$.

Заметим, что

$$d^2 = \frac{\det G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k,\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)}{\det G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)}.$$

$$\det G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k,\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1) & \ldots & (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k) & (\mathbf{a}_k, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1) & \ldots & (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_k) & (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \end{vmatrix}.$$

Подставив вместо $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{a}_k+\mathbf{z}$ и учитывая, что $(\mathbf{a}_i,\mathbf{z})=0$, получим

$$\det G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)=$$

$$\left|\begin{array}{c|c} G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k) & \begin{array}{c}(\mathbf{a}_1,\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{a}_k+\mathbf{z})\\ \ldots\\ (\mathbf{a}_k,\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{a}_k+\mathbf{z})\end{array}\\ \hdashline (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\mathbf{a}_1)\ldots(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\mathbf{a}_k) & (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\end{array}\right|$$

$$+\left|\begin{array}{c|c} G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k) & \begin{array}{c}0\\ \ldots\\ 0\end{array}\\ \hdashline A & |\mathbf{z}|^2\end{array}\right|=$$

$$=||\mathbf{z}||^2\det G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k).$$

Откуда получаем

$$||\mathbf{z}||^2=\frac{\det G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r0})}{\det G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)}.$$

Пример 11.3.

$$V^2=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1^2 & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_n)\\ (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1) & \mathbf{a}_2^2 & \ldots & (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_2) & \ldots & \mathbf{a}_n^2\end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл определителя Грама – квадрат объема параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Лекция 12.

Ортогональная матрица.

Если в E_n заданы два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}'_i\}$, тогда $E' = EP$, где P - матрица перехода.

Рассмотрим $\mathbf{x} \in E_n$ и $\mathbf{y} \in E_n$. В ортонормированных базисах скалярное произведение есть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T Y$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X'^T Y'$, где $X = PX'$ и $Y = PY'$. Тогда $(PX')^T PY' = X'^T P^T PY'$, откуда

$$P^T P = E. \qquad (12.1)$$

Определение 12.1. *Квадратная матрица, удовлетворяющая условию (12.1), называется* <u>*ортогональной*</u>*.*

Свойства ортогональной матрицы.

а) $P^{-1} = P^T$;

б) $(\det P)^2 = 1$.

◀ Т.к. $\det(P^T P) = \det E = 1$. Тогда $(\det P)^2 = 1$,

$\det P = 1$ или $\det P = -1$. ▶

Определение 12.2. *Ортогональная матрица называется* <u>*собственной*</u>*, если ее определитель равен 1 и* <u>*несобственной*</u>*, если ее определитель равен -1.*

в) Сумма произведений элементов двух различных столбцов ортогональной матрицы равна 0, а сумма произведений элементов двух одинаковых столбцов равна 1.

◀

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Каждый столбец матрицы P есть координаты новых базисных векторов в старом базисе. Если взять i и j столбцы этой матрицы, то получим координаты $\mathbf{e}'_i = (p_{i1},\ p_{i2},\ \ldots,\ p_{in})$ и $\mathbf{e}'_j = (p_{j1},\ p_{j2},\ \ldots,\ p_{jn})$. По условию новый базис ортонормированный, значит $(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}$. ▶

Теорема 12.1. *Множество всех ортогональных матриц n-го порядка образуют группу, которая называется ортогональной группой и обозначается $O(n)$.*

◀ Надо проверить выполняемость всех аксиом группы относительно операции умножения матриц. Пусть P, Q – ортогональные матрицы, т.е. $P^T P = Q^T Q = E$.

Докажем, что PQ – ортогональная матрица. Для этого найдем $(PQ)^T PQ = Q^T P^T PQ = Q^T EQ + Q^T Q = E$, т.е. PQ – ортогональная матрица. Единичная матрица является ортогональной. Обратная матрица для ортогональной матрицы также является ортогональной. Умножение матриц подчиняется ассоциативному закону. Итак, $O(n)$ – группа по операции умножения. ▶

Теорема 12.2. *Множество всех собственных ортогональных матриц есть специальная ортогональная группа, которая обозначается $SO(n)$. Эта группа есть подгруппа $O(n)$.*

◀ Надо доказать, что если P, $Q \in SO(n)$, то $PQ \in SO(n)$. $\det P = \det Q = 1$, значит $\det(PQ) = 1$. Все остальные аксиомы группы выполняются. ▶

Множество всех несобственных ортогональных матриц группы $O(n)$ группу не образуют.

Пример 12.1. Найти собственную ортогональную матрицу в случае $n = 2$.

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 &= p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{12}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 &= p_{21}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Так как $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$, справедливы следующие уравнения: $p_{11}^2 + p_{12}^2 = 1$, $p_{21}^2 + p_{22}^2 = 1$. Значит можно сделать следующую замену переменных: $p_{11} = \cos\varphi$, $p_{12} = \sin\varphi$, $p_{21} = \cos\psi$, $p_{22} = \sin\psi$.

В силу равенства $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$, $\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = 0$ или $\cos(\varphi - \psi) = 0$, $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Собственная ортогональная матрица зависит от угла поворота.

Линейные операторы.

Определение 12.3. *Говорят, что в векторном пространстве V_n задан* <u>*оператор*</u> *или* <u>*преобразование*</u> $\hat{A}$*, если каждому вектору* $\mathbf{x} \in V_n$ *поставлен в соответствие определенный вектор* $\hat{A}(\mathbf{x}) \in V_n$ *или, как мы чаще будем писать,*

$$\hat{A} : V_n \to V_n, \quad \mathbf{x} \in V_n, \quad \hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \in V_n.$$

Оператор $\hat{A}$ называется <u>линейным</u>, если для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из V_n и произвольного числа $\lambda \in \mathbb{K}$

1°. $\hat{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{A}\mathbf{y}$;

2°. $\hat{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\hat{A}\mathbf{x}$.

Вектор $\hat{A}\mathbf{x}$ – <u>образ</u> вектора $\mathbf{x}$, а вектор $\mathbf{x}$ – <u>прообраз</u> вектора $\mathbf{y}$ при преобразовании $\hat{A}$.

Выберем в пространстве V_n базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Тогда если $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, то в силу линейности оператора $\hat{A}$ имеем $\hat{A}\mathbf{e}_1, \hat{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \hat{A}\mathbf{e}_n \in V_n$. Тогда

$$\hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\hat{A}\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\hat{A}\mathbf{e}_n. \tag{12.2}$$

Но т.к. $\hat{A}\mathbf{e}_i \in V_n$, то векторы $\hat{A}\mathbf{e}_i$ можно разложить по базисным векторам.

$$\begin{array}{rcl} \hat{A}\mathbf{e}_1 & = & a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n \\ \hat{A}\mathbf{e}_2 & = & a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{2n}\mathbf{e}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{A}\mathbf{e}_n & = & a_{n1}\mathbf{e}_1 + a_{n2}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n \end{array}$$

Тогда равенство (12.2) имеет вид

$$\begin{array}{l}\hat{A}\mathbf{x}=x_1(a_{11}\mathbf{e}_1+a_{12}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{1n}\mathbf{e}_n)+x_2(a_{21}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+\ldots+\\ +a_{2n}\mathbf{e}_n)+\ldots+x_n(a_{n1}\mathbf{e}_1+a_{n2}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{nn}\mathbf{e}_n)\end{array}. \tag{12.3}$$

Если $\hat{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\ldots+y_n\mathbf{e}_n$, тогда

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{n1}x_n\\ y_2 & = & a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{n2}x_n\\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n & = & a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\end{array}\right. \tag{12.4}$$

В матричном виде это соотношение запишется так:

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}, \quad Y=AX. \tag{12.5}$$

Каждому линейному оператору $\hat{A}$ в данном базисе $\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ отвечает матрица A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}, \tag{12.6}$$

каждый столбец которой образован коэффициентами разложения вектора $\hat{A}\mathbf{e}_i$ по базису $\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$, при этом коэффициенты разложения (12.5) координат вектора $\hat{A}\mathbf{x}$ по координатам вектора $\mathbf{x}$ образуют строки матрицы A.

Если в $n-$мерном векторном пространстве V_n задан базис, то не только любому линейному оператору $\hat{A}$ отвечает определенная матрица A, но справедливо и обратное утверждение: каждая квадратная матрица A порядка n может рассматриваться как матрица некоторого линейного оператора.

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса.

Пусть в V_n $\{\mathbf{e}_i\}$ – старый базис и $\{\mathbf{e}'_i\}$ – новый базис, где $i = 1, \ldots, n$. P – матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда $X = PX'$, $Y = PY'$, где $\mathbf{x} \in V_n$ и $\mathbf{y} \in V_n$. Кроме того $Y = AX$ в старом базисе и $Y' = A'X'$ в новом базисе. Тогда $PY' = APX'$, $Y' = P^{-1}APX'$. Сравнивая два последних выражения, получим

$$A' = P^{-1}AP. \tag{12.7}$$

Структура множества линейных операторов линейного пространства V_n.

На множестве операторов можно ввести две операции: "сложения" и "умножения" операторов.

Операция "сложения" $\hat{A}$ и $\hat{B}$ обозначается $\hat{A}+\hat{B}$ и понимается как оператор, который действует по закону $(\hat{A}+\hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x}$ $\forall\, \mathbf{x} \in V_n$.

Операция "умножения" двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ выполняется по правилу $(\hat{B}\hat{A})\mathbf{x} = \hat{B}(\hat{A}\mathbf{x}) \quad \forall\ \mathbf{x} \in V_n$ и определяет произведение операторов. Т.е. перемножение двух операторов состоит в последовательном их применении.

Роль нулевого оператора выполняет оператор $\hat{O}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{x} \in V_n$. Он ведет себя как $\mathbf{0}$ на множестве всех операторов: $(\hat{A}+\hat{O})\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{O}\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \mathbf{0} = \hat{A}\mathbf{x}$.

$(-\hat{A})\mathbf{x} = -(\hat{A}\mathbf{x})$ будет противоположным оператором. Умножение операторов ассоциативно, и выполняется дистрибутивный закон $\hat{B}(\hat{A}_1+\hat{A}_2) = \hat{B}\hat{A}_1+\hat{B}\hat{A}_2$ $\hat{B}(\hat{A}_1+\hat{A}_2)\mathbf{x} = (\hat{B}\hat{A}_1)\mathbf{x}+(\hat{B}\hat{A}_2)\mathbf{x} = (\hat{B}\hat{A}_1 + \hat{B}\hat{A}_2)\mathbf{x}$.

Итак, множество всех линейных операторов образует кольцо, которое называется кольцом эндоморфизмов векторного пространства.

Ясно, что $\hat{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. При этом если $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ только для $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то оператор называется невырожденным, если же найдется такой вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, что $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то оператор $\hat{A}$ – вырожденный. В первом случае матрица линейного оператора невырожденная, а во втором случае вырожденная.

Определение 12.4. *Ядром линейного оператора $\hat{A}$ называется множество всех векторов* $\mathbf{x}$ *пространства V_n таких, что* $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $Ker\hat{A} = \{\mathbf{x} \in V_n \mid \hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Определение 12.5. *Образом линейного оператора $\hat{A}$ называется множество векторов* $\mathbf{y}$ *пространства V_n.*

$Im\hat{A} = \{\mathbf{y} \in V_n \mid \exists\, \mathbf{x} \in V_n :\ \hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

Лемма 12.1. *$Ker\hat{A}$ и $Im\hat{A}$ являются подпространствами V_n.*

◀ Если $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \in Ker\hat{A}$, то $\hat{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $\hat{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Ясно, что $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 \in Ker\hat{A}$ и $\alpha\mathbf{x}_1 \in Ker\hat{A}$. $\hat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \hat{A}\mathbf{x}_1 + \hat{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. $\hat{A}(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha\hat{A}\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Т.о. $Ker\hat{A}$ – подпространство V_n.

Аналогично если $\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2 \in Im\hat{A}$, то $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in Im\hat{A}$ и $\alpha\mathbf{y}_1 \in Im\hat{A}$. Действительно, $\exists\, x_1 :\ \mathbf{y}_1 = \hat{A}\mathbf{x}_1$ и $\exists\, x_2 :\ \mathbf{y}_2 = \hat{A}\mathbf{x}_2$. Тогда $\hat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in Im\hat{A}$ и $\hat{A}(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha\hat{A}\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{y}_1 \in Im\hat{A}$. ▶

Пусть $dimIm\hat{A} = r$, тогда $dimKer\hat{A} = n - r$ – дефект линейного преобразования. $dimIm\hat{A} + dimKer\hat{A} = n$. $V_n = ker\hat{A} + V_1$, где V_1 – подпространство, натянутое на те базисные векторы, образы которых являются базисом образа.

Пример 12.2. В V_3 рассмотрим ортогональное проектирование вектора на плоскость XOY. $\hat{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $\hat{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, $\hat{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad dimIm\hat{A} = 2, \quad dimKer\hat{A} = 1.$$

Лекция 13.

Инвариантные подпространства.

Пусть V_1 – подпространство векторного пространства V_n и $\hat{A}$ – линейный оператор в V_n. Образ $\hat{A}\mathbf{x}$ вектора $\mathbf{x} \in V_1$, вообще говоря, не обязан принадлежать V_1.

Определение 13.1. *Подпространство V_1 пространства V_n называется* <u>*инвариантным*</u> *относительно линейного оператора $\hat{A}$, если $\forall\, \mathbf{x} \in V_1$, $\hat{A}\mathbf{x} \in V_1$. (Иными словами $\hat{A}V_1 \subseteq V_1$.)*

Пример 13.1. Пусть $\hat{A}$ – поворот вокруг оси OZ обычного трехмерного пространства, тогда инвариантными подпространствами будут: во-первых, плоскость XOY, во-вторых, ось OZ.

Пример 13.2. Пусть $\hat{A}$ – ортогональное проектирование того же пространства V_3 на плоскость XOY, то инвариантными подпространствами будут: плоскость XOY; все плоскости, проходящие через ось OZ; сама ось OZ и все прямые, проходящие через начало координат и лежащие в плоскости XOY.

Пример 13.3. В пространстве P_n многочленов степени не выше n подпространства P_k при всех k, $0 \leqslant k \leqslant n$, инвариантны относительно оператора дифференцирования.

Пример 13.4. В любом пространстве каждое подпространство инвариантно относительно тождественного и нулевого операторов.

Пример 13.5. В любом пространстве само пространство V_n и его подпространство, состоящее из одного нулевого вектора $\{\mathbf{0}\}$, инвариантны относительно любого линейного оператора.

Утверждение 13.1. *Пересечение и сумма подпространств, инвариантных относительно линейного оператора $\hat{A}$, инвариантны относительно $\hat{A}$.*

◀ Пусть V_1 и V_2 – инвариантны относительно $\hat{A}$ и $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$, тогда $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{x} \in V_2$, а значит $\hat{A}\mathbf{x} \in V_1$ и $\hat{A}\mathbf{x} \in V_2$, т.е. $\hat{A}\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$.

С другой стороны, если $\mathbf{x} \in V_1 + V_2$, то $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, где $\mathbf{u} \in V_1$ и $\mathbf{v} \in V_2$, но тогда $\hat{A}\mathbf{u} \in V_1$, $\hat{A}\mathbf{v} \in V_2$ и $\hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{u} + \hat{A}\mathbf{v} \in V_1 + V_2$. ▶

Теорема 13.1. *Если $\hat{A}$ – невырожденный линейный оператор и V_1 – подпространство, инвариантное относительно $\hat{A}$, то V_1 инвариантно и относительно $\hat{A}^{-1}$.*

◀ Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – базис подпространства V_1, тогда векторы $\hat{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \hat{A}\mathbf{e}_k$ тоже принадлежат V_1 (т.к. V_1 подпространство, инвариантное относительно $\hat{A}$) и линейно независимы, значит, они тоже образуют базис V_1. Таким образом произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$ представляется в виде $\mathbf{x} = \alpha_1\hat{A}\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_k\hat{A}\mathbf{e}_k$, но тогда $\hat{A}^{-1}\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{e}_k$ тоже принадлежит V_1. ▶

Пусть $\hat{A}$ – произвольный линейный оператор, действующий в $n-$мерном пространстве V_1. Предположим, что пространство V распадается в прямую сумму своих подпространств V_1 и V_2, инвариантных относительно $\hat{A}$, $V = V_1 \oplus V_2$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – базис подпространства V_1, и $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ – базис подпространства V_2. Тогда имеют место равенства

$$\left.\begin{array}{rcl} \hat{A}\mathbf{e}_1 & = & a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{1k}\mathbf{e}_k \\ \hat{A}\mathbf{e}_2 & = & a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{2k}\mathbf{e}_k \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{A}\mathbf{e}_k & = & a_{k1}\mathbf{e}_1 + a_{k2}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{kk}\mathbf{e}_k \end{array}\right\} \in V_1$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \hat{A}\mathbf{e}_{k+1} & = & a_{k+1,1}\mathbf{e}_{k+1} + a_{k+1,2}\mathbf{e}_{k+2} + \ldots + a_{k+1,n}\mathbf{e}_n \\ \hat{A}\mathbf{e}_{k+2} & = & a_{k+2,1}\mathbf{e}_{k+1} + a_{k+2,2}\mathbf{e}_{k+2} + \ldots + a_{k+2,n}\mathbf{e}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{A}\mathbf{e}_n & = & a_{n1}\mathbf{e}_{k+1} + a_{n2}\mathbf{e}_{k+2} + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n \end{array}\right\} \in V_2$$

т.к. $\hat{A}\mathbf{e}_i \in V_1$ при $i = 1, \ldots, k$ и $\hat{A}\mathbf{e}_r \in V_2$ при $r = k+1, \ldots, n$. Тогда матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ всего пространства имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{k1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & \ldots & a_{k2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & 0 & \ldots & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+2,k+1} & \ldots & a_{k+2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

Т.о. матрица A "распадается на клетки":

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & | & O \\ --- & | & --- \\ O & | & A_2 \end{pmatrix}, \tag{13.1}$$

где A_1 размеров $k \times k$ – матрица оператора $\hat{A}$ в V_1, а A_2 размеров $(n-k)\times(n-k)$ – матрица оператора $\hat{A}$ в V_2, а прямоугольные матрицы O состоят из нулей.

Т.о., зная матрицы A_1 и A_2 оператора $\hat{A}$ в инвариантных подпространствах V_1 и V_2, можно составить из них матрицу A оператора $\hat{A}$ во всем пространстве V_n.

Верно и обратное утверждение. Если матрица A в некотором базисе имеет "клеточный" вид (13.1), то пространство V_n распадается в прямую сумму инвариантных относительно $\hat{A}$ подпространств V_1 и V_2.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Пусть дано V_n и линейный оператор $\hat{A}$ в V_n. Будем рассматривать одномерные инвариантные подпространства. Пусть V_1 – такое подпространство и $\mathbf{x} \in V_1$ (где $\mathbf{x} \neq 0$), тогда $\hat{A}\mathbf{x} \in V_1$, и значит, $\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $\mathbf{y}$ – любой другой вектор из V_1, то $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ и $\hat{A}\mathbf{y} = \hat{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\hat{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{y}$.

Определение 13.2. *Вектор* $\mathbf{x} \neq 0$ *называется* *собственным вектором* *линейного оператора* $\hat{A}$, *если найдется число* λ, *что* $\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. *Такое* λ *называется* *собственным значением* *оператора* $\hat{A}$ *(матрицы* A*).*

Т.к. V_1 – одномерное подпространство V, значит каждый ненулевой вектор из V является собственным вектором оператора $\hat{A}$, причем отвечающим одним и тем же собственным значениям.

Опишем процедуру нахождения собственных чисел и собственных значений оператора $\hat{A}$.

Соотношение

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{13.2}$$

запишем в матричном виде

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda E)X = 0 \tag{13.3}$$

и в координатах

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots(a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{13.4}$$

Координаты собственного вектора удовлетворяют системе линейных однородных уравнений. Эта система должна иметь ненулевое решение, т.к. собственный вектор отличен от нуля. Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{13.5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{13.6}$$

Уравнение (13.5) или (13.6) называется характеристическим уравнением линейного оператора. Левая часть называется характеристическим многочленом линейного оператора. Собственные числа есть корни характеристического многочлена.

Пример 13.6. Симметрия.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & x_2 \\ y_2 & = & x_1 \end{array} \right. \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm 1$$

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным числам:

а)

$$\lambda = 1 \quad (A-E)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Тогда $-x_1 + x_2 = 0$, $x_1 = x_2$. Собственный вектор имеет координаты $(1,1)$.

б)

$$\lambda = 1 \quad (A+E)X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Тогда $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 = x_2$. Собственный вектор имеет координаты $(1,-1)$.

Теорема 13.2. *Характеристический многочлен линейного оператора есть его инвариант.*

◀ Матрица линейного оператора при замене базиса меняется по закону $A' = P^{-1}AP$. Пусть $\varphi(A) = \det(A - \lambda E)$ – характеристический многочлен в старом базисе. Тогда в новом базисе он запишется следующим образом: $\varphi'(A) = \det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda EP) = \det(P^{-1}(A-\lambda E)P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det P = \det(A - \lambda E) = \varphi(A)$. ▶

Рассмотрим частный случай при $n = 2$. $\det(A - \lambda E) = 0$, значит

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Распишем последнее равенство: $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$. $\lambda^2 - \lambda(\underbrace{a_{11} + a_{22}}_{trA}) + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\det A} = 0$.

При $n = 3$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + trA\lambda^2 -$$

$$-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det A = 0$$

В общем случае получим многочлен порядка n. Характеристический многочлен имеет вид

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n,$$

где $\alpha_1 = trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ след матрицы A и $\varphi(0) = \alpha_n = detA$ определитель матрицы A.

Для того, чтобы оператор был невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(0) \neq 0$, т.е. оператор не имел бы нулевых собственных значений.

Ранг, определитель, след матрицы есть инварианты относительно замены базиса.

Лекция 14.

Теорема 14.1. *Собственные векторы, соответствующие двум различным собственным значениям, линейно независимы.*

◀ Пусть λ_1 и λ_2 собственные значения и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Для λ_1 существует собственный вектор такой, что $\hat{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$. Аналогично $\hat{A}\mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{y}$. Надо доказать, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимые векторы, т.е. $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ лишь в случае $\alpha = \beta = 0$. $\hat{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, $\alpha\lambda_1\mathbf{x} + \beta\lambda_2\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Решим систему

$$\begin{cases} \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} & = & \mathbf{0} \\ \lambda_1\alpha\mathbf{x} + \lambda_2\beta\mathbf{y} & = & \mathbf{0} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на λ_1 и вычтем из него второе уравнение системы, получим $\lambda_1\beta\mathbf{y} - \lambda_2\beta\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \beta(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{y} = \mathbf{0}$, но $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathbf{y}$ – собственный вектор, следовательно, он не нулевой, поэтому $\beta = 0$.

Аналогично можно доказать, что $\alpha = 0$, для этого первое уравнение системы умножим на λ_2 и вычтем из него второе уравнение системы. Итак, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы. ▶

Пусть линейный оператор $\hat{A}$ имеет n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ с собственными значениями, соответственно равными $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ (которые вообще говоря не все различны). Векторы $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ примем за базисные векторы, тогда ввиду равенств $\hat{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ матрица оператора A примет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Т.е. матрица приводится к диагональному виду.

Верно и обратное утверждение: если матрица A линейного оператора $\hat{A}$ в некотором базисе имеет диагональный вид, то все векторы этого базиса являются собственными векторами оператора $\hat{A}$.

Однако далеко не каждый линейный оператор в $n-$мерном пространстве имеет n линейно независимых собственных векторов.

Теорема 14.2. *Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

◀ Для доказательства используем метод математической индукции. Для одного вектора $\mathbf{x}$ утверждение очевидно, т.к. по определению $\mathbf{x}$ – собственный вектор, а поэтому отличен от $\mathbf{0}$, значит из равенства $\alpha\mathbf{x} = 0$ следует $\alpha = 0$.

Пусть данное утверждение справедливо для $n = k - 1$ собственных векторов $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_{k-1}$ и предположим, что k собственных векторов $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_k$, отвечающих попарно различным собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$, линейно зависимы:

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k = 0 \tag{14.1}$$

Применим к (14.1) оператор $\hat{A}$:

$$\alpha_1\hat{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\hat{A}\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\hat{A}\mathbf{x}_k = 0 \tag{14.2}$$

или

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\mathbf{x}_k = 0 \tag{14.3}$$

Умножим равенство (14.1) на $\lambda_k \neq 0$ и вычтем из него (14.3), получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underbrace{(\lambda_k - \lambda_k)}_{=0}\mathbf{x}_k = 0 \quad (14.4)$$

Но $\lambda_1 \neq \lambda_k$, $\ldots$, $\lambda_{k-1} \neq \lambda_k$, все $\mathbf{x}_1$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{k-1}$ – собственные векторы, значит по предположению индукции они линейно независимы, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$, а тогда из (14.1) следует, что и $\alpha_k = 0$, тогда векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_k$ линейно независимы. ▶

Таким образом, если линейный оператор $\hat{A}$ имеет n попарно различных собственных значений λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы, и матрица этого оператора в соответствующем базисе имеет диагональный вид.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Так будет, если характеристический многочлен оператора $\hat{A}$ имеет n попарно различных корней. Отметим, однако, что к такому виду приводится матрица далеко не всякого линейного оператора.

Пример 14.1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0.$$

Значит, $\lambda = 2$ – собственное значение кратности 2. Найдем собственный вектор, отвечающий найденному собственному значению,

$$(A - \lambda E)X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x - 2 = 0$ и собственный вектор имеет вид $\mathbf{x} = (1, 0)$. Этот вектор не образует базис, значит исходная матрица не приводится к диагональному виду.

Возникает вопрос, существует ли какой-то другой достаточно простой вид, к которому можно привести матрицу всякого линейного оператора. В комплексном пространстве таким "простейшим, каноническим" видом принято считать жорданову форму матрицы.

In optima forma.

Жорданова форма матрицы.

Определение 14.1. *Жордановой клеткой порядка k называется квадратная матрица вида*

$$A_{\lambda_\circ} = \begin{pmatrix} \lambda_\circ & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_\circ & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\circ \end{pmatrix}, \tag{14.5}$$

в которой на главной диагонали стоит одно и тоже число $\lambda_\circ$, над главной диагональю всюду 1, а остальные элементы 0.

Порядок жордановой клетки может быть равен и 1, в этом случае клетка имеет простейший вид $A_{\lambda_\circ} = (\lambda_\circ)$.

Характеристический многочлен жордановой клетки равен $(\lambda_\circ - \lambda)^k$. Жорданова клетка имеет одно собственное значение $\lambda_\circ$ кратности k, все собственные векторы будут коллинеарными.

Так как характеристический многочлен инвариантен относительно замены базиса, то матрица оператора $A_{\lambda_\circ}$ ни в каком базисе не приводится к диагональному виду.

Определение 14.2. *Жордановой матрицей называется матри-*

ца вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & | & O & | & \ldots & | & O \\ -- & & -- & & -- & & -- \\ O & | & A_{\lambda_2} & | & \ldots & | & O \\ -- & & -- & & -- & & -- \\ \ldots & | & \ldots & | & \ldots & | & \ldots \\ -- & & -- & & -- & & -- \\ O & | & O & | & \ldots & | & A_{\lambda_s} \end{pmatrix}, \qquad (14.6)$$

где A_{λ_k}, $k = 1, 2, \ldots, s$ – *жордановы клетки, вообще говоря, разных порядков, а все остальные клетки этой матрицы нулевые. Числа* λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_s – *собственные значения, среди которых могут быть и повторяющиеся, оператора* $\hat{A}$ *с матрицей* A .

Пример 14.2. Пусть матрица линейного оператора в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$ имеет две жордановы клетки

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

одну третьего порядка и одну второго порядка. Числа λ_1 и λ_2 – собственные значения оператора A. Характеристический многочлен равен $(\lambda_1 - \lambda)^3(\lambda_2 - \lambda)^2 = 0$. Имеем $\hat{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1$, $\hat{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \lambda_1\mathbf{e}_2$, $\hat{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + \lambda_2\mathbf{e}_3$, $\hat{A}\mathbf{e}_4 = \lambda_2\mathbf{e}_4$, $\hat{A}\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_4 + \lambda_2\mathbf{e}_5$.

Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_4$ являются собственными векторами оператора $\hat{A}$, соответствующими собственным значениям λ_1 и λ_2.

Пример 14.3. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 & | & 0 \\ - & - & | & - & | & - \\ 0 & 0 & | & 2 & | & 0 \\ - & - & | & - & | & - \\ 0 & 0 & | & 0 & \lambda_2 & \end{pmatrix}.$$

имеет 3 жордановы клетки. Одну клетку второго порядка, отвечающую $\lambda_1 = 2$ и две клетки первого порядка, отвечающие $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 0$.

Лекция 15.

Операторный многочлен.

Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор. Возьмем некоторый вектор $\mathbf{x}$ и подействуем на него оператором $\hat{A}$, получим вообще говоря новый вектор $\mathbf{y}_1 = \hat{A}\mathbf{x}$ – образ вектора $\mathbf{x}$. Теперь найдем образ вектора $\mathbf{y}_1$: $\mathbf{y}_2 = \hat{A}\mathbf{y}_1$. Продолжим эту процедуру, получим цепочку векторов:

$$\begin{array}{l} \mathbf{y}_1 = \hat{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_2 = \hat{A}\mathbf{y}_1 = \hat{A}(\hat{A}\mathbf{x}) = \hat{A}^2 = \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_3 = \hat{A}\mathbf{y}_2 = \hat{A}(\hat{A}^2\mathbf{x}) = \hat{A}^3\mathbf{x}, \quad ,\ldots, \mathbf{y}_n = \hat{A}(\hat{A}^{n-1}\mathbf{x}) = \hat{A}^n\mathbf{x} \end{array}.$$

В матричном виде $AX = Y_1$, $AY_1 = A(AX) = A^2(X)$. Степени линейного оператора соответствует таже степень его матрицы.

$\hat{A}^n = \hat{A}(\hat{A}^{n-1})$, $\hat{A}^0 = \hat{E}$, под $\hat{E}$ здесь и далее понимаем тождественный оператор.

Возьмем произвольный многочлен $\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ и рассмотрим линейный оператор $\phi(\hat{A}) = a_0\hat{E} + a_1\hat{A} + a_2\hat{A}^2 + \ldots + a_n\hat{A}^n$. Такой линейный оператор называется операторным многочленом.

Так как множество всех многочленов есть коммутативное кольцо, то и множество всех операторных многочленов есть коммутативное кольцо. В частности, отсюда следует, что $\phi(\hat{A})\hat{A} = \hat{A}\phi(\hat{A})$ для любого многочлена $\phi(t)$. Коммутативность кольца операторных многочленов исключительно важна в последующей теории.

Теорема 15.1. *Область значений операторного многочлена есть инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$.*

◀ Пусть $\phi(\hat{A})$ – операторный многочлен. Область значений операторного многочлена $T = \{\mathbf{x} \in V_n \mid \exists\ \mathbf{y} \in V_n : \mathbf{x} = \phi(\hat{A})\mathbf{y}\}$. Т.е.

$\mathbf{x} \in T$ и следовательно $\mathbf{x} = \phi(\hat{A})\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y} \in V_n$. В силу перестановочности $\hat{A}$ и $\phi(\hat{A})$ имеем $\hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}\phi(\hat{A})\mathbf{y} = \phi(\hat{A})(\hat{A}\mathbf{y})$. $\hat{A}\mathbf{y} \in V_n$, следовательно вектор $\hat{A}\mathbf{x}$ – образ вектора $\mathbf{x} \in V_n$ есть результат применения оператора $\phi(\hat{A})$ к вектору $\hat{A}\mathbf{y} \in V_n$, т.е. $\hat{A}\mathbf{x} \in T$. Значит множество всех векторов $\{\hat{A}\mathbf{x}\}$ представляет собой область значений операторного многочлена. ▶

Теорема 15.2. *Ядро операторного многочлена* $Ker\phi(\hat{A})$ *является инвариантным подпространством относительно оператора* $\hat{A}$.

◀ Если $\phi(\hat{A})\mathbf{x} = 0$, значит $\mathbf{x} \in Ker\phi(\hat{A})$. Если $\mathbf{x} \in Ker\phi(\hat{A})$, то $\phi(\hat{A})\hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}(\phi(\hat{A})\mathbf{x}) = \hat{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Значит $\hat{A}\mathbf{x} \in Ker\phi(\hat{A})$. ▶

Теорема 15.3. Гамильтона-Кэли. *Всякий линейный оператор* $\hat{A}$ *является корнем своего характеристического многочлена* $\varphi(\lambda)$, *т.е.* $\varphi(\hat{A}) = 0$ *или в матричном виде* $\varphi(A) = 0$.

◀ Пусть есть линейный оператор $\hat{A}$ с матрицей A,

$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Надо доказать, что $\varphi(\hat{A}) = 0$.

Возьмем $\mathbf{x} \in V_n$ и рассмотрим систему векторов $\mathbf{x}$, $\hat{A}\mathbf{x}$, $\hat{A}^2\mathbf{x}$, $\ldots$, $\hat{A}^n\mathbf{x}$. Имеем $(n+1)$ вектор, значит эта система линейно зависима, следовательно существуют числа α_0, α_1, $\ldots$, α_n, одновременно не равные нулю, такие, что

$\alpha_0\hat{A}^n\mathbf{x} + \alpha_1\hat{A}^{n-1}\mathbf{x} + \alpha_2\hat{A}^{n-1}\mathbf{x} + \ldots + \alpha_{n-1}\hat{A}\mathbf{x} + \alpha_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$. На основании того, что $\hat{A}$ – линейный оператор, это равенство можно записать в виде $(\alpha_0\hat{A}^n + \alpha_1\hat{a}^{n-1} + \alpha_2\hat{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\hat{A} + \alpha_n\hat{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. По определению нулевого оператора заключаем, что $\alpha_0\hat{A}^n + \alpha_1\hat{a}^{n-1} + \alpha_2\hat{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\hat{A} + \alpha_n\hat{E} = O$. Последнее равенство говорит о том, что $\hat{A}$ является корнем некоторого многочлена ненулевой степени $\phi(\hat{A}) = 0$.

Рассмотрим матрицу $(A - \lambda E)$ и возьмем матрицу B, присоединенную к ней. Известно, что $(A - \lambda E)B = B(A - \lambda E) = E\det(A - \lambda E)$. Для того, чтобы получить матрицу B, надо протранспонировать матрицу $(A - \lambda E)$, а потом для каждого элемента найти алгебраическое дополнение. $B = (b_{ij})$ – многочлены степени не больше $(n-1)$ относительно λ, т.е. $b_{ij} = b_{ij}^0 + b_{ij}^1\lambda + \ldots + b_{ij}^{n-1}\lambda^{n-1}$.

Например

$$B=\begin{pmatrix} 1+\lambda & 2+\lambda+\lambda^2 \\ \lambda^2 & 1+\lambda+2\lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\lambda^2 = B^0+B^1\lambda+B^2\lambda^2.$$

В общем случае $B=B^0+B^1\lambda+B^2\lambda^2+\ldots+B^{n-1}\lambda^{n-1}$.

$B(A-\lambda E)=E\det(A-\lambda E)$.

Значит $(B^0+B^1\lambda+B^2\lambda^2+\ldots+B^{n-1}\lambda^{n-1})(A-\lambda E)=((-1)^n\lambda^n+J_1\lambda^{n-1}+J_2\lambda^{n-2}+\ldots+J_n)E$, где J_k – соответствующий коэффициент характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$, следовательно

$$\begin{cases} B^0A & = & J_nE & | \ E=A^0 \\ B^1A-B^0E & = & J_{n-1}E & | \ A^1 \\ B^2A-B^1E & = & J_{n-2}E & | \ A^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ \ \ldots \\ -B^{n-1}E & = & E(-1)^n & | \ A^n \end{cases}$$

Тогда $0=(-1)^nA^n+J_1A^{n-1}+\ldots+J_nA^0$.

$(-1)^nA^n+J_1A^{n-1}+\ldots+J_nE=0$.

Итак, доказано, что $\varphi(\hat{A})=0$ или $\varphi(A)=0$. ▶

Теорема 15.4. *Если характеристический многочлен линейного оператора* $\hat{A}$ *представляет собой* $\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\cdot\varphi_2(\lambda)$, *где* $\varphi_1(\lambda)$ *и* $\varphi_2(\lambda)$ *взаимно простые многочлены, то*

а) $V_n=V_k\oplus V_{n-k}$, *где* V_k *– ядро линейного оператора* $\varphi_1(\lambda)$, *а* V_{n-k} *– ядро линейного оператора* $\varphi_2(\lambda)$.

б) Подпространства V_k *и* V_{n-k} *являются инвариантными подпространствами относительно* $\hat{A}$.

◀ Из того, что $\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\cdot\varphi_2(\lambda)$ следует, что $\varphi(\hat{A})=\varphi_1(\hat{A})\cdot\varphi_2(\hat{A})\Rightarrow\varphi(A)=\varphi_1(A)\cdot\varphi_2(A)$. Каждому характеристическому многочлену соответствует операторный многочлен и для матрицы линейного оператора имеет место последнее равенство. Приведем здесь условное (не строгое) доказательство.

На основании теоремы Гамильтона-Кэли получаем $\varphi_1(A)\cdot\varphi_2(A)=0$. Это равенство показывает, что квадратная матрица $\varphi(\lambda)$ является произведением матриц $\varphi_1(A)$ и $\varphi_2(A)$ и ясно, что перемножаемые матрицы вырождены. Рассмотрим следующие системы уравнений:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(\hat{A})\mathbf{x}=0 & \varphi_1(A)\mathbf{x}=0 \\ \varphi_2(\hat{A})\mathbf{x}=0 & \varphi_2(A)\mathbf{x}=0 \end{array}$$

Эти системы уравнений имеют ненулевые решения, т.е. каждая из этих систем определяет некоторое подпространство пространства V_n. Эти подпространства являются соответственно ядрами линейных операторов $\varphi_1(A)$ и $\varphi_2(A)$. Пусть это подпространства V_k и V_l.

Покажем, что все пространство V_n является прямой суммой V_k и V_l. Т.к. $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ взаимно просты, то существуют $\rho_1(\lambda)$ и $\rho_2(\lambda)$ такие, что выполняется условие $\rho_1(\lambda)\varphi_1(\lambda)+\rho_2(\lambda)\varphi_2(\lambda)=1$. Подобное равенство имеет место и для операторных многочленов $\rho_1(\hat{A})\varphi_1(\hat{A})+\rho_2(\hat{A})\varphi_2(\hat{A})=\hat{E}$.

Пусть $\mathbf{x}\in V_n$, подействуем на этот вектор линейным оператором, стоящим в правой части последнего равенства, получим

$$\underbrace{\rho_1(\hat{A})\varphi_1(\hat{A})\mathbf{x}}_{=\mathbf{x}_2}+\underbrace{\rho_2(\hat{A})\varphi_2(\hat{A})\mathbf{x}}_{=\mathbf{x}_1}=\hat{E}\mathbf{x}=\mathbf{x}\in V_n.$$

Докажем, что $\mathbf{x}_2\in V_l$, т.е. $\varphi_2(\hat{A})\mathbf{x}_2=0$.

Рассмотрим $\varphi_2(\hat{A})\mathbf{x}_2 = \varphi_2(\hat{A})(\rho_1(\hat{A})\varphi_1(\lambda)\mathbf{x}) = \rho_1(\hat{A})(\varphi_2(\hat{A})\varphi_1(\hat{A})\mathbf{x})=\rho_1(\hat{A})O\mathbf{x}=0 \Rightarrow \mathbf{x}_2\in V_l$. Аналогично $\mathbf{x}_1\in V_k$.

Т.о. для $\forall\ \mathbf{x}\in V_n$ $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_2\in V_l$, $\mathbf{x}_1\in V_k$, значит $V_n=V_k+V_l$. Остается показать, что эта сумма прямая.

Пусть $\mathbf{x}\in V_k\cap V_l$. Действуя на него тем же линейным оператором $\rho_1(\hat{A})\varphi_1(\hat{A})\mathbf{x}+\rho_2(\hat{A})\varphi_2(\hat{A})\mathbf{x}=\mathbf{x}$, но $\rho_1(\hat{A})\varphi_1(\hat{A})\mathbf{x}=0$, т.к. $\mathbf{x}\in V_k$, $\rho_2(\hat{A})\varphi_2(\hat{A})\mathbf{x}=0$, т.к. $\mathbf{x}\in V_l$. Т.о. $V_k\cap V_l=\{\mathbf{0}\}$, значит $V_n=V_k\oplus V_l$ и $l=n-k$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. $\varphi(\hat{A})\mathbf{x}=0$. Ядро операторного многочлена есть инвариантное подпространство относительно $\hat{A}$, значит V_k и V_{n-k} инвариантные подространства, т.к. каждое из них есть ядро линейного оператора $\varphi_1(A)$ и $\varphi_2(A)$ соответственно. $dimV_k = k$ и $dimV_l = n - k$. $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ или $A = A_1 + A_2$. ▶

Замечание. *Нетрудно показать, что линейный оператор $\hat{A}$ определяет в каждом из этих подпространств линейный оператор, характеристический многочлен которого $\varphi_1(\lambda)$ в V_k и $\varphi_2(\lambda)$ в V_{n-k}.*

Пример 15.1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda E) = \left| \begin{array}{rr|rr} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2.$$

Пространство можно разбить в прямую сумму подпространств, из которых одно ядро $(\hat{A} + \hat{E})^2\mathbf{x} = 0$ и другое $(\hat{A} - \hat{E})^2\mathbf{x} = 0$. Найдем

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A + E)^2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{cases} 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$$

Но x_1 и x_2 свободные неизвестные, а значит

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	0	0	$\mathbf{a_1}$
0	1	0	0	$\mathbf{a_2}$

Аналогично находятся

$$(A-E)=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2\\ 4 & -6 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(A-E)^2\mathbf{x}=\begin{pmatrix} -12 & 16 & 12 & -16\\ -16 & 20 & 16 & -20\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}=0.$$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2-3x_3+4x_4 &= 0\\ 4x_1-5x_2-4x_3+5x_4 &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1-x_3 &= 0\\ x_2-x_4 &= 0 \end{cases}.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	1	0	$\mathbf{b_1}$
0	1	0	1	$\mathbf{b_2}$

Лекция 16.

Зри в корень.
К.Прутков.

Корневые подпространства линейного оператора.

В V_n задан $\hat{A}$ и характеристический многочлен выглядит следующим образом $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$ (это всегда возможно для $V_n(\mathbb{C})$.) Корни характеристического многочлена кратные, кратностей $k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_s$, причем k_1+k_2+

$\ldots + k_s = n$. Характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ разлагается на взаимно простые многочлены от λ, которые обозначим через $\varphi_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, каждому из них соответствует операторный многочлен $\varphi_i(\hat{A}) = (\hat{A} - \lambda_i\hat{E})^{k_i}$.

Определение 16.1. *Ядро линейного оператора $(\hat{A} - \lambda_i\hat{E})^{k_i}$ называется корневым подпространством линейного оператора, соответствующем собственному значению λ_i.*

Если характеристический многочлен имеет s различных корней, то в V_n существует s корневых пространств линейного оператора. На основании предыдущих рассуждений все эти подпространства инвариантные подпространства относительно линейного оператора $\hat{A}$ и V_n – их прямая сумма $V_k = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \ldots \oplus V_{k_s}$. Размерности этих подпространств будут равны соответственно k_1, k_2, $\ldots$, k_s, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$ и матрица оператора приводится к клеточному виду

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & A_s \end{array}\right)$$

Остается только найти способ выбора базиса в каждом из корневых пространств, в котором матрицы A_i будут иметь наиболее простой вид.

Замечание. *Пространство V_k есть прямая сумма пространств V_{k_1}, V_{k_2}, $\ldots$, V_{k_s}, $V_k = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \ldots \oplus V_{k_s}$, если любой вектор $\mathbf{x} \in V_k$ единственным образом раскладывается в сумму $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k_1} + \mathbf{x}_{k_2} + \ldots + \mathbf{x}_{k_s}$, где $\mathbf{x}_{k_1} \in V_{k_1}$, $\mathbf{x}_{k_2} \in V_{k_2}$, $\ldots, \mathbf{x}_{k_s} \in V_{k_s}$.*

Определение 16.2. *Вектор $\mathbf{x} \neq 0$, принадлежащий корневому подпространству V_{k_i} называется корневым вектором, соответствующем λ_i.*

$$(\hat{A} - \lambda_i\hat{E})^{k_i}\mathbf{x} = 0. \tag{16.1}$$

Исходя из определения, корневой вектор удовлетворяет (16.1). В матричном виде это равенство запишется следующем образом:

$(A-\lambda_i E)^{k_i} X = 0$. Оно представляет из себя систему линейных однородных уравнений относительно координат вектора $\mathbf{x}$.

Последнее равенство иногда может выполняться и в случае, когда $h < k_i$: $(A-\lambda_i E)^h X = 0$.

Определение 16.3. *Говорят, что корневой вектор* <u>*имеет высоту* h</u>*, если* $(A-\lambda_i E)^h X = 0$ *и при этом* $(A-\lambda_i E)^{h-1} X \neq 0$*, то* $\mathbf{x}$ *–* <u>*вектор высоты* h</u>*,* h *– максимальная высота вектора.*

Если $\mathbf{x}$ – собственный вектор, то $(A-\lambda E)\mathbf{x} = 0$. Значит собственный вектор линейного оператора имеет высоту 1.

Можно показать, что если высота корневого вектора равна h, то в корневом подпространстве есть векторы всех высот от 1 до h. Далее будем работать в корневом подпространстве, определяемом равенством (16.1), в котором высота корневого вектора равна h.

Теорема 16.1. *Два корневых вектора, принадлежащие одному корневому подпространству и имеющие различные высоты, линейно независимы.*

◀ Пусть $\mathbf{x}$ – вектор высоты h, это значит $(A-\lambda_i E)^h X = 0$ и $\mathbf{y}$ – вектор высоты h', т.е. $(A-\lambda_i E)^{h'} Y = 0$. Пусть $h > h'$. Составим линейную комбинацию $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} = 0$, подействуем на нее оператором $(A-\lambda_i E)^{h'}$, получим $\alpha(A-\lambda_i E)^{h'}\mathbf{x}+\beta(A-\lambda_i E)^{h'}\mathbf{y} = 0$, значит $\alpha(A-\lambda_i E)^{h'}\mathbf{x} = 0$. Так как высота h больше h', то $(A-\lambda_i E)^{h'}\mathbf{x} \neq 0$ и значит $\alpha = 0$, следовательно $\beta\mathbf{y} = 0$ и $\mathbf{y} \neq 0$, тогда $\beta = 0$, следовательно векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы. ▶

Теорема 16.2. *Если* $\mathbf{x}$ *– корневой вектор высоты* h*, то корневое подпространство содержит векторы высот* $h-1$*,* $h-2$*,* $\ldots$*,* 1*.*

◀ Рассмотрим вектор $\mathbf{x}$ высоты h и составим для него цепочку векторов по следующему правилу: $\mathbf{x}_1 = (A-\lambda_i E)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2 = (A-\lambda_i E)\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 = (A-\lambda_i E)\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{h-1} = (A-\lambda_i E)\mathbf{x}_{h-2}$.

Определим высоты векторов цепочки: $(A-\lambda_i E)^{h-1}\mathbf{x}_1 = (A-\lambda - iE)^h\mathbf{x} = 0$, $(A-\lambda_i E)^{h-2}\mathbf{x}_1 = (A-\lambda_i E)^{h-1}\mathbf{x} \neq 0$, тогда $\mathbf{x}_1$ – вектор высоты $h-1$. Аналогично вектор $\mathbf{x}_2$ имеет высоту $h-2$, вектор $\mathbf{x}_3$ – высоту $h-3$ и т.д. Вектор $\mathbf{x}_{h-1}$ имеет высоту 1. ▶

Т.к. корневые векторы, имеющие различные высоты, линейно независимы, (здесь следует обобщить теорему 16.1 на случай произвольного конечного количества векторов), следовательно, они образуют базис.

Канонический базис корневого пространства.

Рассмотрим подпространство V_{k_i}, которое определяется из условия $(\hat{A}-\lambda_i\hat{E})^{k_i}\mathbf{x}=0$. Рассмотрим случай, когда максимальная высота корневого вектора равна k_i. Базисные векторы этого подпространства обозначим через $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{k_i}$. Пусть $\mathbf{x}$ имеет высоту k_i, т.е. $(\hat{A}-\lambda_i\hat{E})^{k_i}\mathbf{x}=0$, а $(\hat{A}-\lambda_i\hat{E})^{k_i-1}\mathbf{x}\neq 0$. Возьмем за вектор $\mathbf{e}_{k_i}=\mathbf{x}$, за вектор $\mathbf{e}_{k_i-1}=(\hat{A}-\lambda_i\hat{E})\mathbf{e}_{k_i}$, причем высота этого вектора будет k_i-1, $\mathbf{e}_{k_i-2}=(\hat{A}-\lambda_i\hat{E})\mathbf{e}_{k_i-1}$. И т.д., пока не получим вектор $\mathbf{e}_1=(\hat{A}-\lambda_i\hat{E})\mathbf{e}_2$. Вектор $\mathbf{e}_1$ удовлетворяет уравнению $(\hat{A}-\lambda_i\hat{E})\mathbf{e}_1=0$.

Построенные векторы линейно независимы, т.к. они имеют разные высоты. Запишем матрицу A_i линейного оператора $\hat{A}$ в этом базисе. Для этого найдем образы базисных векторов: $\hat{A}\mathbf{e}_1=\lambda_i\mathbf{e}_1$, $\hat{A}\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_1+\lambda_i\mathbf{e}_2$, $\hat{A}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2+\lambda_i\mathbf{e}_3$, $\ldots$, $\hat{A}\mathbf{e}_{k_i-1}=\mathbf{e}_{k_i-2}+\lambda_i\mathbf{e}_{k_i-1}$, $\hat{A}\mathbf{e}_{k_i}=\mathbf{e}_{k_i-1}+\lambda_i\mathbf{e}_{k_i}$. Значит матрица A_i в базисе $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{k_i}$ будет выглядеть следующим образом:

$$A_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Такая матрица называется <u>жордановой клеткой</u>. Т.к. все пространство представляет собой прямую сумму корневых подпространств, $V_n=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus\ldots\oplus V_{k_s}$, V_{k_i} – корневые подпространства, то матрица линейного оператора $\hat{A}$ будет следующей:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & | & O & | & \dots & | & O \\ -- & | & -- & | & -- & | & -- \\ O & | & A_2 & | & \dots & | & O \\ -- & | & -- & | & -- & | & -- \\ O & | & O & | & \dots & | & A_s \end{pmatrix}.$$

Пример 16.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Решение. Найдем собственные значения:

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

$(\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$, откуда $\varphi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Нетрудно проверить, что собственные векторы, отвечающие этим собственным числам, базис не образуют.

Рассмотрим корневое подпространство, отвечающее $\lambda = 1$. $(A-E)^2 X = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -12 & 16 & 12 & -16 \\ -16 & 20 & 16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_4 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	1	0	$\mathbf{a}_1$
0	1	0	1	$\mathbf{a}_2$

$\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ – корневые векторы.

Максимальная высота вектора $\mathbf{a_1}$ может быть равна 2, но для этого должно выполняться условие $(\hat{A}-\hat{E})\mathbf{a_1} \neq 0$. Проверим:

$$(\hat{A}-\hat{E})\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Итак, базисный вектор

$\mathbf{e_2} = \mathbf{a_1}$, а $\mathbf{e_1} = (\hat{A}-\hat{E})\mathbf{e_2}$.

Рассмотрим корневое подпространствл, отвечающее $\lambda = -1$. $(A+E)^2X = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 12x_3 - 8x_4 & = & 0 \\ 4x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_4 & = & 2x_3 \end{array} \right.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	0	0	$\mathbf{b_1}$
0	1	0	0	$\mathbf{b_2}$

$\mathbf{b_1}$ и $\mathbf{b_2}$ – корневые векторы.

Построим канонический базис: высота вектора $\mathbf{b_1}$ может быть равна 2, но для этого должно выполняться условие $(\hat{A}+\hat{E})\mathbf{b_1} \neq 0$. Проверим:

$$(\hat{A}+\hat{E})\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Значит $\mathbf{b_1}$ имеет высоту 2. Итак, базисный вектор

$\mathbf{e_4} = \mathbf{b_1}$, а $\mathbf{e_3} = (\hat{A} + \hat{E})\mathbf{e_4}$.

Значит

$$A_{\lambda_i} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Проверим, что это действительно так: $A_{\lambda_i} = P^{-1}AP$, где P – матрица перехода.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лекция 17.

Единое разделяется надвое,
Два порождают три,
Три порождают множество...
Дао де цзин

Классификация линейных операторов.

Вследствии инвариантности характеристического многочлена корневые подпространства линейного оператора инвариантны, а значит инвариантны и высоты корневых векторов. Пользуясь этим свойством, можно классифицировать линейные операторы, относя к одному классу те линейные операторы, которые имеют одинаковую жорданову форму своих матриц. Перечисляя всевозможные канонические виды матриц мы тем самым перечислим все классы этих линейных операторов.

Пространство размерности 2.

1°. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Собственные векторы образуют базис и матрица приводится к диагональному виду $A_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ тип $[1,1]$

2°. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

а) высота вектора $h = 1$, матрица диагонального вида $A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, тип $[1,1]$

б) высота вектора $h = 2$. $A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ тип $[2]$

Пространство размерности 3.

1°. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$. Все собственные числа различны. Собственные векторы образуют базис и матрица оператора приводится к диагональному виду $A_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ тип $[1,1,1]$

2°. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

а) высота корневого вектора $h = 1$, матрица диагонального вида $A_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ тип $[1,1,1]$

б) высота вектора $h = 2$. $A_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & | & 0 \\ 0 & \lambda_1 & | & 0 \\ -- & -- & | & -- \\ 0 & 0 & | & \lambda_3 \end{pmatrix}$,

тип $[2, 1]$

3°. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

а) $A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & | & 0 \\ 0 & \lambda & | & 0 \\ -- & -- & | & -- \\ 0 & 0 & | & \lambda \end{pmatrix}$ тип $[2, 1]$

б) нашелся корневой вектор высоты 3 $A_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

тип $[3]$

Линейные операторы в евклидовом пространстве.

Определение 17.1. *Линейный оператор $\hat{A}$, отображающий векторное пространство V_n в числовое поле $\mathbb{R}$, называется* *линейным функционалом* *или линейной функцией.*

Т.о., если $\hat{A}$ – линейный функционал, то для любого вектора $\mathbf{x} \in V_n$ определено $\hat{A}(\mathbf{x})$ из основного поля $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, так что выполнены условия

1°. $\hat{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \hat{A}(\mathbf{x}) + \hat{A}(\mathbf{y})$;

2°. $\hat{A}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \hat{A}(\mathbf{x})$, $\quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n$, $\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ – базис в V_n. Тогда произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_n$ раскладывается по этому базису: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Значит

$$\hat{A}(\mathbf{x}) = \hat{A}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) =$$
$$x_1\hat{A}\mathbf{e}_1 + x_2\hat{A}\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\hat{A}\mathbf{e}_n = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n, \tag{17.1}$$

где $\hat{A}(\mathbf{e}_i) = a_i$. Т.о. при фиксированном базисе линейный функционал представляется линейной формой, т.е. выражением (17.1). Если пространство V_n – евклидово, а базис $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ – ортонормированный, то $\hat{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$ – скалярное произведение вектора $\mathbf{x} \in V_n$ и некоторого вектора $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, зависящего только от $\hat{A}$ (но не от $\mathbf{x}$!). Верно и обратное, если в евклидовом пространстве V_n задан вектор $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, то $\hat{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$ – скалярное произведение вектора $\mathbf{x} \in V_n$ и вектора $\mathbf{a}$ – является линейной функцией.

Сопряженный оператор в евклидовом пространстве.

Определение 17.2. *Оператор $\hat{A}^*$ называется сопряженным оператору $\hat{A}$, если для всех векторов* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *из евклидова пространства E_n выполняется соотношение* $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$.

Теорема 17.1. *Для любого оператора $\hat{A}$ существует единственный сопряженный оператор $\hat{A}^*$.*

◀ Пусть A– матрица линейного оператора в ортонормированном базисе пространства E_n.

$$(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Y^T A X, \tag{17.2}$$

$$(\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y}) = (A^* Y)^T X = Y^T (A^*)^T X. \tag{17.3}$$

Сравнивая последние два выражения, получим: $A = (A^*)^T$ или $A^T = A^*$.

Т.о. для каждого линейного оператора $\hat{A}$ в E_n существует и притом единственный сопряженный ему линейный оператор $\hat{A}^*$, матрица которого в любом ортонормированном базисе является транспонированной, если оператор определен над полем $\mathbb{R}$, и транспонированной и комплексно-сопряженной, если оператор определен над полем $\mathbb{C}$, матрицей оператора $\hat{A}$. ▶

Лемма 17.1. *Если* $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\hat{B}\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$, *то* $\hat{A} = \hat{B}$.

◀ Действительно, $(\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y}) - (\hat{B}\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x} - \hat{B}\mathbf{x},\mathbf{y}) = ((\hat{A} - \hat{B})\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Возьмем $\mathbf{y} = (\hat{A}-\hat{B})\mathbf{x}$, тогда $((\hat{A}-\hat{B})\mathbf{x},(\hat{A}-\hat{B})\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow (\hat{A}-\hat{B})\mathbf{x} \Rightarrow \hat{A}-\hat{B} = O$. Т.о. $\hat{A} = \hat{B}$. ▶

Свойства оператора, сопряженного данному.

1°. $\hat{E}^* = \hat{E}$.

2°. $(\hat{A}^*)^* = \hat{A}$.

3°. $(\hat{A}+\hat{B})^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$.

◀ Действительно, $(\mathbf{x},(\hat{A}+\hat{B})^*\mathbf{y}) = ((\hat{A}+\hat{B})\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x}+\hat{B}\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\hat{B}\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\hat{A}^*\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\hat{B}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x},(\hat{A}^*+\hat{B}^*)\mathbf{y})$. ▶

4°. $(\hat{A}\hat{B})^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$.

◀ Действительно, $(\mathbf{x},(\hat{A}\hat{B})^*\mathbf{y}) = ((\hat{A}\hat{B})\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\hat{A}(\hat{B}\mathbf{x}),\mathbf{y}) = (\hat{B}\mathbf{x},\hat{A}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\hat{B}^*(\hat{A}^*)\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\hat{B}^*\hat{A}^*\mathbf{y})$. ▶

5°. Если существует $\hat{A}^{-1}$, то $(\hat{A}^{-1})^* = (\hat{A}^*)^{-1}$.

◀ Т.к. $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$ и $(\hat{A}\hat{A}^{-1})^* = \hat{E}^*$ или по свойству 4° $(\hat{A}^{-1})^*\hat{A}^* = \hat{E}$ или $(\hat{A}^*)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^*$. ▶

6°. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $(\alpha\hat{A})^* = \alpha\hat{A}^*$; если $\alpha \in \mathbb{C}$, то $(\alpha\hat{A})^* = \overline{\alpha}\hat{A}^*$.

7°. Если подпространство $E_1 \subseteq E_n$ инвариантно относительно $\hat{A}$, то $E_1^{\perp}$ инвариантно относительно $\hat{A}^*$.

◀ Пусть $\mathbf{x} \in E_1$, $\mathbf{y} \in E_1^{\perp}$, тогда $\hat{A}\mathbf{x} \in E_1$, т.к. E_1 – инвариантное подпространство и $(\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ или $(\mathbf{x},\hat{A}^*\mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. и $\hat{A}^*y \in E_1^{\perp}$. ▶

8°. Характеристический многочлен оператора $\hat{A}^*$ совпадает с характеристическим многочленом оператора $\hat{A}$.

◀ $\varphi^*(\lambda) = \det(\hat{A}^* - \lambda\hat{E}) = \det(\hat{A}^T - \lambda\hat{E}) = \det(\hat{A}^T - \lambda\hat{E}^T) = \det(\hat{A} - \lambda\hat{E})^T = \det(\hat{A} - \lambda\hat{E}) = \varphi(\lambda)$. ▶

Симметрические (самосопряженные) линейные операторы.

Определение 17.3. *Оператор $\hat{A}$ называется симметрическим или самосопряженным, если $\hat{A}^* = \hat{A}$.*

В этом случае в ортонормированном базисе матрица оператора будет симметрической, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ или $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y})$ или $A^T = A$.

Если $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = 0$, то векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются сопряженными относительно линейного оператора.

Свойства самосопряженного оператора.

1°. Тождественный оператор является самосопряженным
$\hat{E}^* = \hat{E}$.

2°. Если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ самосопряженные операторы, то $\hat{A} + \hat{B}$ – самосопряженный оператор.

◀ $\hat{A}^* = \hat{A}$, $\hat{B}^* = \hat{B}$, тогда $(\hat{A} + \hat{B})^* = \hat{A}^* + \hat{B}^* = \hat{A} + \hat{B}$. ▶

3°. Если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ самосопряженные операторы, то $\hat{A}\hat{B}$ – самосопряженный оператор.

◀ Действительно, $\hat{A}^* = \hat{A}$, $\hat{B}^* = \hat{B}$. Тогда $(\hat{A}\hat{B})^* = \hat{B}^*\hat{A}^* = \hat{B}\hat{A}$. ▶

Т.о. свойство будет выполнено, если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ перестановочны: $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.

Теорема 17.2. *Для того, чтобы произведение самосопряженных операторов было самосопряженным оператором, необходимо и достаточно. чтобы эти операторы были перестановочны (коммутировали) между собой.*

4°. Оператор, обратный к невырожденному самосопряженному оператору, яаляется самосопряженным.

◀ Т.к. $\hat{A}^* = \hat{A}$, значит $(\hat{A}^{-1})^* = (\hat{A}^*)^{-1} = \hat{A}^{-1}$. ▶

5°. Если $\hat{A}$ - самосопряженный оператор, то $\alpha\hat{A}$ – самосопряженный оператор.

6°. Если $\hat{A}$ - самосопряженный оператор и подпространство $E_1 \subseteq E_n$ инвариантно относительно $\hat{A}$, то $E_1^{\perp}$ инвариантно относительно $\hat{A}$.

◄ Действительно, $E_1^{\perp}$ инвариантно относительно $\hat{A}^*$, но т.к. $\hat{A}^* = \hat{A}$, значит $E_1^{\perp}$ инвариантно относительно $\hat{A}$. ►

Лекция 18.

Свойства собственных векторов и собственных значений самосопряженного оператора.

Теорема 18.1. *Все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора $\hat{A}$ – вещественны.*

◄ Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексный корень характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ самосопряженного оператора $\hat{A}$, тогда $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ – тоже корень $\varphi(\lambda)$.

Тогда у собственного вектора $\mathbf{e}$, отвечающего λ, координаты являются комплексными числами, а у вектора $\overline{\mathbf{e}}$ координаты будут сопряженными для координат вектора $\mathbf{e}$.

Известно, что λ и $\overline{\lambda}$ – различные собственные значения, тогда соответствующие им собственные векторы будут линейно независимы и ортогональны в E_n. Получаем $(\mathbf{e}, \overline{\mathbf{e}}) = 0$, где $\mathbf{e} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\overline{\mathbf{e}} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n})$. Тогда $(\mathbf{e}, \overline{\mathbf{e}}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \ldots + z_n\overline{z_n} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 0$. Это равенство говорит о том, что вектор $\mathbf{e} = 0$, что невозможно, т.к. $\mathbf{e}$ – собственный вектор.

Предположение о том, что λ – комплексный корень оказалось неверным, значит все корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ вещественны. ►

Теорема 18.2. *Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям ортогональны и сопряжены между собой.*

◀ Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_j$ – два различных собственных значения, соотвестствующие им собственные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ удовлетворяют условиям $\hat{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$ и $\hat{A}\mathbf{e}_j = \lambda_j\mathbf{e}_j$. Умножим первое равенство скалярно на $\mathbf{e}_j$, а второе – на $\mathbf{e}_i$ и вычтем из первого равенства второе, получим:

$$(\mathbf{e_j}, \hat{A}\mathbf{e}_i) = \lambda_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$
$$(\mathbf{e}_i, \hat{A}\mathbf{e}_j) = \lambda_j(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i).$$

И $(\mathbf{e}_i, \hat{A}\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \hat{A}\mathbf{e}_i)$ (по определению самосопряженного преобразования), поэтому векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ сопряжены. Откуда $0 = (\lambda_i - \lambda_j)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, значит $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, поэтому $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$, значит векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ ортогональны, $i, j = \overline{1, n}$. ▶

Теорема 18.3. *Существует такой ортонормированный базис, в котором матрица самосопряженного линейного оператора имеет диагональный вид.*

◀ Доказательство прямо следует из доказанных ранее теорем. Если собственные значения самосопряженного оператора различны, тогда существует базис из собственных векторов, в котором матрица оператора будет иметь диагональный вид. ▶

Ортогональные операторы.

Определение 18.1. *Линейный оператор $\hat{A}$ в евклидовом пространстве E_n называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})\ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$.*

При ортогональном преобразовании $(\mathbf{x}, \hat{E}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*(\hat{A}\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, (\hat{A}^*\hat{A})\mathbf{y})$. Сравнивая начало и конец выражения, получим: $\hat{E} = \hat{A}^*\hat{A}$, тогда $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$ или в матричном виде $A^T = A^{-1}$. Условие $A^T = A^{-1}$ является необходимым и достаточным условием ортогональности оператора $\hat{A}$ в ортонормированном базисе.

Свойства ортогональных операторов.

1°. $\hat{E}$ – ортогональный оператор.

2°. Произведение двух ортогональных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ является ортогональным оператором $\hat{A}\hat{B}$.

◀ $((\hat{A}\hat{B})\mathbf{x}, (\hat{A}\hat{B})\mathbf{y}) = (\hat{A}(\hat{B}\mathbf{x}), \hat{A}(\hat{B}\mathbf{y})) = (\hat{B}\mathbf{x}, \hat{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. ▶

3°. Оператор, обратный ортогональному оператору, является ортогональным.

◀ Если $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$, то $(\hat{A}^{-1})^* = (\hat{A}^*)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A}$). ▶

4°. Если $\hat{A}$ – ортогональный оператор, то $\alpha\hat{A}$ – тоже ортогональный оператор в том и только в том случае, когда $\alpha = \pm 1$.

◀ $(\alpha\hat{A}\mathbf{x}, \alpha\hat{A}\mathbf{y}) = \alpha^2(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = \alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\Leftrightarrow$

$\alpha^2 = 1$, значит $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. ▶

Ортогональное преобразование переводит ортогональный базис в ортогональный. Верно и обратное утверждение: если преобразование переводит ортогональный базис в ортогональный, то оно является ортогональным преобразованием. Матрица называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$.

Теорема 18.4. *Собственные значения ортогонального оператора равны* ± 1.

◀ Пусть $\hat{A}$ – ортогональный оператор, λ – некоторое его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, соответствующий λ. Тогда $(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$. $\lambda^2 = 1$, значит $\lambda = \pm 1$. ▶

Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве.

Если E_n – евклидово пространство, в котором выбраны два ортонормированных базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots,$ $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2, \ldots,$ $\mathbf{e}'_n$, $P =$

(p_{ij}) – матрица перехода от первого базиса ко второму. Тогда P – ортогональная матрица.

Пусть теперь в E_n выбран ортонормированный базис $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots,\ \mathbf{e}_n$ и пусть в нем дана билинейная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$, которая в этом базисе представлена в виде $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ или в матричном виде $A(X,Y) = Y^T AX$. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$ с той же матрицей A в том же базисе $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots,\ \mathbf{e}_n$.

При переходе к новому базису $\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2, \ldots,\ \mathbf{e}'_n$ матрица билинейной формы преобразуется по правилу $A'_1 = P^T AP$, а матрица линейного оператора – $A'_2 = P^{-1}AP$. Т.е. эти матрицы вообще говоря не одинаковы. Однако, если оба базиса ортонормированные, то матрица перехода P ортогональна, значит $P^{-1} = P^T$ и матрица билинейной формы совпадает с матрицей линейного оператора $A'_1 = A'_2 = A'$.

Т.о. в E_n любой билинейной форме соответствует вполне определенный линейный оператор (имеющий ту же матрицу в любом ортонормированном базисе). Если $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – симметрическая билинейная форма, то соответствующий линейный оператор $\hat{A}$ будет самосопряженным. Уже доказано, что матрица самосопряженного оператора в некотором ортонормированном базисе приводится к диагональному виду, где на главной диагонали стоят собственные числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$. При этом квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ приводится к сумме квадратов, т.е. имеет канонический вид.

Пример 18.1. $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 66x^2 - 24xy + 59y^2$.

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 66-\lambda & 12 \\ 12 & 59-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 125\lambda + 3750.$$

Тогда $\lambda_1 = 75,\ \lambda_2 = 50.\ A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 75{x'_1}^2 + 50{x'_2}^2$.

Лекция 19.

Кривое не может сделаться прямым,
и чего нет, того нельзя сосчитать...
Книга Экклесиаста

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Пусть в E_2 задана прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим уравнение второй степени

$$f(x,y) = \underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{A(\mathbf{x},\mathbf{x})=X^TAX} + \underbrace{2b_1x + 2b_2y}_{2B^TX} + c = 0 \qquad (19.1)$$

Тогда это уравнение можно переписать в виде

$$f(x,y) = X^TAX + 2B^TX + C, \quad \text{где}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (19.1), называются линией (кривой) второго порядка или квадрикой.

При некоторых частных значениях коэффициентов уравнение (19.1) будет уравнением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, параболы $y^2=2px$, пары прямых, а может оказаться и пустым множеством.

Обозначим через $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ единичные векторы, направленные по осям координат. Группу старших членов уравнения (19.1)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \qquad (19.2)$$

можно рассматривать как квадратичную форму от координат x, y вектора $\mathbf{x} = (x, y)$. Эта квадратичная форма в некотором базисе $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ приводится к сумме квадратов

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2, \qquad (19.3)$$

где λ_1 и λ_2 – собственные значения линейного оператора $\hat{A}$ с матрицей A, а e_1' и e_2' – соответствующие собственные векторы. $\hat{A}\mathrm{e}_1' = \lambda_1\mathrm{e}_1'$, $\hat{A}\mathrm{e}_2' = \lambda_2\mathrm{e}_2'$. Можно взять за e_1' и e_2' векторы, которые получаются из e_1 и e_2 поворотом вокруг т.$O(0,0)$ против часовой стрелки на угол ψ, тогда

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}_1' &=& \cos\psi\cdot\mathrm{e}_1+\sin\psi\cdot\mathrm{e}_2 \\ \mathrm{e}_2' &=& -\sin\psi\cdot\mathrm{e}_1+\cos\psi\cdot\mathrm{e}_2 \end{array}\right., \text{ но тогда } X = PX', \text{ т.е.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ откуда}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x'\cos\psi+y'\sin\psi \\ y &=& -x'\sin\psi+y'\cos\psi \end{array}\right. . \tag{19.4}$$

Подставим (19.4) в (19.1) с учетом (19.3), получим

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0, \tag{19.5}$$

где b_1', b_2', c' – некоторые новые коэффициенты. Эта операция называется <u>отнесением кривой к главным осям</u>.

λ_1 и λ_2 – собственные значения, удовлетворяющие уравнению

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{19.6}$$

$\varphi(\lambda) = \lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Собственные значения λ_1 и λ_2 вещественны, т.к. оператор $\hat{A}$ – симметрический. Произведение $\lambda_1\lambda_2$ равно свободному члену $\varphi(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta$, т.е. $\lambda_1\lambda_2 = \delta = \varphi(0)$. С другой стороны матрица квадратичной формы приводится к виду $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и $\delta' = \lambda_1\lambda_2$ – инвариант.

Рассмотрим два случая.

1°. $\delta = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Тогда исходная кривая называется <u>центральной</u> кривой. Преобразуем уравнение (19.6) следующим образом:

$$\lambda_1(x'^2+\frac{2b_1'}{\lambda_1}x+\frac{b_1'^2}{\lambda_1^2})+\lambda_2(y'^2+\frac{2b_2'}{\lambda_2}y+\frac{b_2'^2}{\lambda_2^2})+c'-\frac{b_1'^2}{\lambda_1^2}-\frac{b_2'^2}{\lambda_2^2}=0$$

$$\lambda_1(x' + \frac{b_1'}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2'}{\lambda_2})^2 + c'' = 0. \qquad (19.7)$$

Сделаем замену $x'' = x' + \frac{b_1'}{\lambda_1}$, $y'' = y' + \frac{b_2'}{\lambda_2}$. Эта замена отвечает переносу начала координат в точку $(-\frac{b_1'}{\lambda_1}, -\frac{b_2'}{\lambda_2})$. Уравнение (19.7) приводится к виду

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c'' = 0. \qquad (19.8)$$

а) Предположим сначала, что $\delta > 0$.

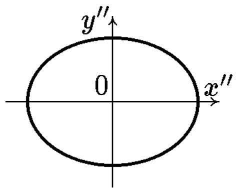

Рис. 19.1.

В этом случае геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению (19.8), представляет собой эллипс, если знак c'' противоположен знаку λ_1; одну точку, если $c'' = 0$ и пустое множество, если знак c'' совпадает со знаком λ_1.

б) Пусть теперь $\delta < 0$.

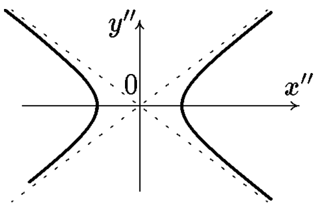

Рис. 19.2.

В этом случае геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению (19.8), представляет собой гиперболу, если $c'' \neq 0$ и пару пересекающихся прямых, если $c'' = 0$.

Начало координат есть центр симметрии.

2°. $\delta = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_2 \neq 0$. Тогда уравнение (19.6) приводится к виду

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1' x' + 2b_2' y' + c' = 0. \qquad (19.9)$$

а) Если $b_1' \neq 0$, то, выделив полный квадрат, получаем,

$$\lambda_2(y' + \frac{b_2'}{\lambda_2})^2 + 2b_1'(x' + \frac{c'}{2b_1'} - \frac{b_2'^2}{2\lambda_2^2 b_1'}) = 0.$$

После переноса начала координат

$$\begin{cases} x'' &= x' + \frac{c'}{2b_1'} - \frac{{b_2'}^2}{2\lambda_2^2 b_1'} \\ y'' &= y' + \frac{b_2'}{\lambda_2} \end{cases},$$

получим

$$\lambda_2 y''^2 + 2b_1' x'' = 0.$$

Это уравнение параболы.

б) Если $b_1' = 0$, то (19.9) приводится к виду

$$\lambda_2 (y' + \frac{b_2'}{\lambda_2})^2 + c' - \frac{{b_2'}^2}{\lambda_2^2} = 0.$$

После переноса начала координат

$$\begin{cases} x'' &= x' \\ y'' &= y' + \frac{b_2'}{\lambda_2} \end{cases},$$

получим

$$\lambda_2 y''^2 + ''' = 0, \quad \text{где } c''' = c' - \frac{{b_2'}^2}{\lambda_2^2}.$$

Это пара параллельных прямых, если $c'''\lambda_2 < 0$; пара совпадающих прямых если $c''' = 0$ и пустое множество если $c'''\lambda_2 > 0$.

Инварианты кривой второго порядка.

Теорема 19.1. *Для кривой второго порядка величины*

$$s = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$$

являются инвариантами относительно преобразований координат, и уравнение приводится к виду

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \qquad \textit{или } \lambda_2 {y''}^2 \pm 2x''\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}} = 0.$$

◀ Первоначально рассмотрим параллельный перенос кривой в точку с координатами $O_1(\alpha,\beta)$: $\begin{cases} x &= x'+\alpha \\ y &= y'+\beta \end{cases}$, подставим эти выражения в (19.1), получим

$$\begin{array}{l} a_{11}(x'+\alpha)^2 + 2a_{12}(x'+\alpha)(y'+\beta)+ \\ +a_{22}(y'+\beta)^2 + 2b_1(x'+\alpha) + 2b_2(y'+\beta) + c = 0 \end{array}, \quad \text{или}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y' + 2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + b_1)x' + 2(a_{12}\alpha + \\ a_{22}\beta + b_2)y' + (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2b_1\alpha + 2b_2\beta + c) = 0 \end{array}. \tag{19.10}$$

Видим, что группа старших членов не изменилась, отсюда следует инвариантность величин $s = a_{11}+a_{22}$ и $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$. Заметим, что коэффициент при x' равен $2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + b_1) = f_x(\alpha,\beta)$ – частной производной по x от левой части уравнения (19.1), взятой при $x=\alpha$ и $y=\beta$. Коэффициент при y' равен $f_y(\alpha,\beta)$, а свободный член равен $f(\alpha,\beta)$. Таким образом преобразованное уравнение (19.1) примет вид

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + f_x(\alpha,\beta)x' + f_y(\alpha,\beta)y' + f(\alpha,\ b) = 0.$$

Для уравнения (19.10) определитель

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + b_1 \\ --- & --- & ----------- \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + b_2 \\ --- & --- & ----------- \\ a_{11}\alpha + a_{12}\beta + & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + & a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + \\ +b_1 & +b_2 & +2b_1\alpha + 2b_2\beta + c \end{array} \right|.$$

Вычтем из последней строки этого определителя первую, умноженную на α и вторую, умноженную на β, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + b_2 \\ b_1 & b_2 & b_1\alpha + b_2\beta + c \end{vmatrix}.$$

Проделаем такие же операции над столбцами полученного определителя, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = \Delta.$$

Т.о. инвариантность Δ при переносах начала координат доказана.

Далее, при повороте осей координат на угол ψ мы переходим от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, значит матрица квадратичной формы $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ преобразуется так же как матрица линейного оператора. Но для линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ коэффициенты характеристического многочлена $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda^2 - s\lambda + \delta$ не зависят от выбора базиса. Этим доказана инвариантность s и δ при поворотах координатных осей. Аналогично доказывается инвариантность Δ.

Если кривая центральная $\delta \neq 0$, то уравнение (19.1) приводится к виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c = 0$, где λ_1 и λ_2 – собственные числа линейного оператора $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Но для последнего уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 c,$$

$$c=\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{\Delta}{\delta},\qquad \text{т.к.}\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2.$$

Т.о. уравнение (19.1) приводится к виду $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$. Если $\delta>0$ и $\Delta\neq 0$, то кривая – эллипс или "мнимый эллипс." Если $\delta>0$ и $\Delta=0$, то кривая представляет собой точку. Если $\delta<0$, значит λ_1 и λ_2 разных знаков, то кривая является гиперболой при $\Delta\neq 0$ и распадается на пару пересекающихся прямых при $\Delta=0$.

Для параболы, уравнение которой приведено к виду $\lambda_2 y''^2+2b_1x''=0$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ b_1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-b_1^2\lambda_2 \quad \text{и } b_1=\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}}$$

и уравнение параболы будет иметь вид

$$\lambda_2 y^2\pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}}x=0,\ \Delta\neq 0,\ \delta=0.$$

В случае пары параллельных прямых (различных, совпадающих или "мнимых") $\Delta=0$ и уравнение имеет вид $\lambda_2 y^2+c=0$. ▶

$\delta>0$, кривая эллиптич. типа	$\Delta\neq 0$	$\delta\Delta<0$ эллипс
		$\delta\Delta>0$ "мнимый эллипс"
	$\Delta=0$	точка, пара пересекающихся в этой точке "мнимых прямых"
$\delta<0$, кривая гиперболич. типа	$\Delta\neq 0$	гипербола
	$\Delta=0$	пара пересекающихся прямых
$\delta=0$, кривая параболич. типа	$\Delta\neq 0$	парабола
	$\Delta=0$	пара параллельных прямых (различных, совпад., "мнимых")

Из таблицы видно, что кривая второго порядка распадается на пару прямых в том и только в том случае, когда $\Delta=0$.

Пример 19.1. Определить тип кривой $3x^2-2xy+3y^2+2x-4y+1=0$, привести кривую к каноническому виду.

Решение.

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0,$$

значит данная кривая эллиптического типа.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,\ s = 3 + 3 = 6,$$

$\Delta = -18 < 0$, значит это эллипс.

Найдем его канонический вид. $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$. Откуда $3 - \lambda = \pm 1$, $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 2$. Тогда уравнение имеет вид $4x^2 + 2y^2 - \frac{3}{8} = 0$. Значит $4x'^2 + 2y'^2 = \frac{3}{8}$, $\frac{32}{3}x'^2 + \frac{16}{3}y'^2 = 1$. Полуоси $a = \sqrt{\frac{3}{32}}$, $b = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Базис:

1) $\lambda_1 = 4$, $(A - 4E)\mathbf{x} = 0$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$x + y = 0$, $\mathbf{a}_1 = (1, -1)$.

2) $\lambda_2 = 2$, $(A - 2E)\mathbf{x} = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$x - y = 0$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1)$.

Пронормируем полученные векторы:

$\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. P – ортогональная матрица перехода.

Лекция 20.

Определение центра и главных осей центральной кривой. Отыскание вершины и оси параболы.

Рассмотрим случай $\Delta \neq 0$, при этом кривая не распадается на пару прямых. Пусть дано общее уравнение кривой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad a_{12} \neq 0. \qquad (20.1)$$

Найдем собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ приводится к сумме квадратов $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, а уравнение (20.1) – к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c' = 0 \qquad (20.2)$$

Собственные векторы $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ найдем как решения уравнения $(A - \lambda E)X = 0$ или

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 & = & 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)y_1 & = & 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 & = & 0 \\ a_{12}x_2 + (a_{22} - \lambda_2)y_2 & = & 0 \end{array} \right., \qquad (20.3)$$

где (x_1, y_1) – координаты $\mathbf{e}_1'$, а (x_2, y_2) – координаты $\mathbf{e}_2'$. Т.о. направление главных осей найдено.

Т.к. $\det(A - \lambda E) = 0$, то из систем (20.3) берем только по одному уравнению

$$\begin{array}{rcl} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 & = & 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 & = & 0 \end{array}.$$

Следовательно для $\mathbf{e}_1' = (x_1, y_1)$ $k_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$, а для $\mathbf{e}_2' = (x_2, y_2)$ $k_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$. k_1 – угловой коэффициент для новой оси OX, соответствующей λ_1 и k_2 – для новой оси OY, соответствующей λ_2.

Теперь достаточно только перенести начало координат, тогда уравнение (20.1) приведется к каноническому виду. Предположим, что $\delta \neq 0$, значит кривая центральная. Для того, чтобы найти центр кривой, т.е. начала новой системы координат, надо перенести начало координат в точку (α, β): $\begin{cases} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{cases}$. Тогда уравнение примет вид (см. прошлую лекцию)

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + f_x(\alpha, \beta)x' + f_y(\alpha, \beta)y' + f(\alpha,\ b) = 0.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f_x(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \\ \frac{1}{2}f_y(x, y) &= a_{12}x + a_{22}y + b_2 = 0 \end{cases}. \tag{20.4}$$

Т.к. определитель системы $\delta \neq 0$ по предположению, следовательно эта система имеет единственное решение (α, β). Если перенести начало координат в точку (α, β), то в уравнении кривой исчезнут члены с первыми степенями x', y', поэтому новое начало координат будет центром кривой. Т.о. центр центральной кривой второго порядка определяется из системы (20.4).

Несложно теперь написать уравнения главных осей, т.к. они проходят через точку (α, β).

Рассмотрим теперь нецентральную кривую второго порядка, для нее $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$. Значит эта кривая – парабола. Без ограничения общности можем считать, что собственные значения параболы $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, $k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} == \frac{a_{11}}{a_{12}}$ для оси OX, соответствующей λ_1 и $k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$ для оси OY, соответствующей λ_2.

Новое начало координат, т.е. вершину параболы (α, β), можно найти следующим образом. Для параболы $y^2 = 2px$ ось OY является касательной в вершине. Новая ось OY в старых координатных осях имеет угловой коэффициент $k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$, который совпадает с производной y_x в вершине параболы. Для того, чтобы найти y_x, продифференцируем уравнение (20.1) по x, считая y функцией от x, получим $f_x(x, y) + f_y(x, y)y_x = 0$ или подробнее

$(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + (a_{12}x + a_{22}y + b_2)y_x = 0$. Откуда

$$y_x = -\frac{a_{11}x + a_{12}y + b_1}{a_{12}x + a_{22}y + b_2}.$$

Следовательно в вершине (α, β) параболы

$$k_2 = -\frac{a_{11}\alpha + a_{12}\beta + b_1}{a_{12}\alpha + a_{22}\beta + b_2}, \quad \text{откуда}$$

$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + b_1) + k_2(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + b_2) = 0$, или $f_x(\alpha, \beta) + k_2 f_y(\alpha, \beta) = 0$. Т.о. координаты (α, β) можно найти, решив систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_x(\alpha,\beta) + k_2 f_y(\alpha,\beta) & = & 0 \\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c & = & 0 \end{array} \right. .$$

Выясним геометрический смысл уравнения $f_x(\alpha, \beta) + k_2 f_y(\alpha, \beta) = 0$. В более подробной форме записи оно выглядит $(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + k_2(a_{12}x + a_{22}y + b_2) = 0$. Это прямая, принадлежащая пучку прямых, определяемому прямыми $a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0$ и $a_{12}x + a_{22}y + b_2 = 0$. Угловые коэффициенты этих прямых $-\frac{a_{11}}{a_{12}}$ и $-\frac{a_{12}}{a_{22}}$ равны между собой, т.к. $\delta = 0$ $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}})$. И равны k_1, следовательно эти прямые параллельны новой оси OX. Значит, и прямая $f_x(\alpha, \beta) + k_2 f_y(\alpha, \beta) = 0$ тоже параллельна новой оси OX. Но т.к. она проходит через вершину, значит это ось симметрии параболы, ее главный диаметр.

Пример 20.1. (Окончание примера 19.1). Найти центр кривой $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Решение.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - y + 1 & = & 0 \\ -x + 3y - 2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - y & = & -1 \\ -x + 3y & = & -2 \end{array} \right. .$$

Решая систему, найдем $x = -\frac{1}{8}$, $y = \frac{5}{8}$. Итак, новое начало координат находится в точке $(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{8} \\ y & = & -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{5}{8} \end{array} \right.$$

Лекция 21.

Пример 21.1. Исследовать кривую $x^2-2xy+y^2+4x-6y+1=0$.

Решение.

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Эта кривая – парабола. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. $(1-\lambda)^2-1=0$, $1-\lambda=\pm 1$. Значит $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $b_1=\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Каноническое уравнение $y'^2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x'$.

Найдем $k_1=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{1}{-1}=1$, $k_2=-\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}=\frac{2-1}{-1}=-1$.

Найдем координаты вершины

$$\begin{cases} (a_{11}x+a_{12}y+b_1)+k_2(a_{12}x+a_{22}y+b_2) & = & 0 \\ a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c & = & 0 \end{cases}.$$

В нашем случае

$$\begin{cases} (x-y+2)-(-x+y-3) & = & 0 \\ x^2-2xy+y^2+4x-6y+1 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-2y+5 & = & 0 \\ x^2-2xy+y^2+4x-6y+1 & = & 0 \end{cases}.$$

Решим эту систему уравнений, подставляя $x=y-\frac{5}{2}$ во второе уравнение, тогда получим $\begin{cases} x & = & -\frac{31}{8} \\ y & = & -\frac{11}{8} \end{cases}$

Вершина $(-\frac{31}{8},-\frac{11}{8})$.

Найдем ось симметрии $x-y+2+x-y+3=0$. Откуда $2x-2y+5=0$ – ось OX. Новая ось OY: $y-y_0=k(x-x_0)$, $y+\frac{11}{8}=-1(x+\frac{31}{8})$, значит новая ось OY будет иметь уравнение $4x+4y+21=0$.

Ибо конец дела лучше начала его...
Книга Экклесиаста

Исследование общего уравнения поверхности второго порядка.

Общее уравнение поверхности второго порядка выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ &+ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \end{aligned} . \tag{21.1}$$

Рассмотрим квадратичную форму от трех переменных

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

В некотором, также ортонормированном базисе, она приводится к сумме квадратов $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. При этом уравнение (21.1) примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1' x' + 2b_2' y' + 2b_3' z' + c' = 0. \tag{21.2}$$

Без ограничения общности возможны три случая:

а) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0.$

б) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0.$

в) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0.$

1°. Рассмотрим первый случай. Уравнение (21.1) приводится к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad \text{где}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}.$$

Эта поверхность центральная. Центр определяется из решения системы трех уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f_x &= 0 \\ \frac{1}{2}f_y &= 0 \\ \frac{1}{2}f_z &= 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 &= 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3 &= 0 \end{cases}$$

В этом случае если

а) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,\ \frac{\Delta}{\delta} < 0$, эллипсоид;

б) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0,\ \frac{\Delta}{\delta} < 0$, однополостной гиперболоид;

в) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0,\ \frac{\Delta}{\delta} < 0$, двуполостной гиперболоид;

г) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0,\ \frac{\Delta}{\delta} < 0$, "мнимый эллипсоид" – пустое множество;

д) $\delta = 0,\ \Delta \neq 0$ и все λ_i одного знака, "мнимый конус" – точка;

е) $\delta = 0,\ \Delta \neq 0$ и λ_i разных знаков, конус.

2°. Если $\lambda_3 = 0$, тогда уравнение (21.1) примет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2b_3 z'' + c' = 0.$$

Имеем два подслучая

а) если $b_3 = 0$, поверхность цилиндрическая;

б) если $b_3 \neq 0$, параболоид, уравнение можно привести к виду

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2b_3 z'' = 0.$$

– если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, эллиптический параболоид;

– если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, гиперболический параболоид;

3°. Если $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 \neq 0$, тогда уравнение (21.1) можно привести к виду

$$\lambda_1 x'^2 + 2b_2 y' + 2b_3 z' + c = 0.$$

а) если $b_2 = 0,\ b_3 = 0$, пара параллельных плоскостей

- если $\lambda_1 c < 0$, различные плоскости;
- если $c = 0$, совпадающие плоскости;
- если $\lambda_1 c > 0$, "мнимые плоскости" – пустое множество;

б) если $b_2 \neq 0$ или $b_3 \neq 0$, параболический цилиндр

$$\lambda_1 x''^2 + 2b_2'' y'' = 0.$$

Инварианты поверхности второго рода:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},\\
&s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\\
&\delta, \quad \text{и } \Delta.
\end{aligned}$$

С точностью до знака это коэффициенты характеристического уравнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] Шарипов.Р.А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии., Изд.-е. БашГУ, Уфа 1998.

[2] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, Изд-во "Наука", Москва, 1985.

[3] Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, Изд-во "Наука", Москва, 1987.

[4] Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия, Изд-во "Наука", Москва, 1986.

[5] Гельфанд И.М., Лекции по линейной алгебре, Изд-во "Наука", Москва, 1971.

[6] Постников М.М. Лекции по геометрии, семестр 2, Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, Изд-во "Наука", Москва, 1979.

[7] Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра, Изд-во "Наука", Москва, 1985.

[8] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, Изд-во "Наука", Москва, 1970.

[9] Курош А.Г., Курс высшей алгебры, Изд-во "Наука", Москва, 1975.

[10] Зеркина А.В., Аналитическая геометрия, Уфа, Изд.-е БашГУ, 1999.

[11] Галимов И.С., Высшая алгебра, Уфа, Изд.-е БашГУ, 1999.

[12] Карпов А.В., Муфтахов А.В., Цыганов Ш.И., Теоремы и задачи линейной алгебры, Уфа, Изд-во БашГУ, 1995.

Научное издание

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

Труды Международной школы-конференции
для студентов, аспирантов и молодых ученых

Т.8. Зеркина А.В., Картак В.В.
Многомерная геометрия и линейная алгебра

*Печатается с оригиналов,
представленных авторами*

*Лицензия на издательскую деятельность
ЛР №021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать 27.11.2010. Формат 60x84/16.
Усл.печ.л. 6,2. Уч.-изд.л. 7,1.
Тираж 250 экз. Изд. №206. Заказ 40а.
Цена договорная

*Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г.Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г.Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ПРИМЕЧАНИЙ

ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ АДРЕСОВ