УДК 517.9+517.4

Математический анализ в спектральной теории

Чанкаев М. Х., Шабат А. Б. (Карачаевск, КЧГУ)

§ 1. Введение в анализ

1.1. Показательная функция и логарифм.

Начнем с "бинома Ньютона", который запишем в виде

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} x^m + \cdots + x^n.$$

Формула [1]для коэффициентов указанного многочлена по степеням x

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} := \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}, \tag{1}$$

и ее обобщения на значения $n \notin \mathbb{Z}_+$(см. ниже) часто используется в различных областях математики. Исходя из вида первого члена nx формулы (1) и определения производной как предела отношения, получаем

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} = nx^{n-1} + \ldots \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad \frac{d^2}{dx^2}x^n = n(n-1)x^{n-2}, \ldots$$

Убедимся, что полученные формулы можно заменить следующим определением, обобщающим бином Ньютона:

Определение 1. *Степенной* называется непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $x = 1$ функция $f(x)$ такая, что $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f(1) = 1$. Значение $f'(1) = \alpha$ производной в точке $x = 1$ определяет ее *степень.*

[1]самостоятельное доказательство этой формулы помогает, как правило, овладеть методом индукции

Действительно, дифференцируя тождество $f(xy) = f(x)f(y)$ по переменной y, получаем:

$$f'(xy)x = f(x)f'(y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\alpha}{x}f(x) \Rightarrow f''(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2}f(x), \ldots$$

Таким образом значение в точке $x = 1$ всех производных степенной функции $f(x)$ выражается через $\alpha = f'(1)$.

Мы можем найти значения $f(x)$ при $x \neq 1$, если воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \tfrac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots = \tag{2}$$
$$= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}.$$

В случае степенной функции $a = 1$ и подстановка в (2), найденных выше производных функции $f(x)$, приводит к степенному ряду с коэффициентами вида (1). Так, например, при $\alpha = 1/2$ мы получаем

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k,$$
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}, \quad |x| < 1.$$

Вопрос о сходимости этого степенного ряда решается сравнением с известным рядом

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Напомним (см. [2], глава 2), что из сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ в точке $x_0 \neq a$ следует сходимость, как самого ряда, так и рядов, полученных из него почленным дифференцированием в "круге" $|x-a| < |x_0-a|$. Достаточным для сходимости на всей оси рассматриваемого степенного ряда, является условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0. \tag{3}$$

При выполнении условия (3) сумма степенного ряда является гладкой (т.е. бесконечно дифференцируемой) функцией на всей вещественной оси.

Задачи 1.1.

1. Доказать справедливость формулы Тейлора (2) для многочленов.
2. Проверить, что бином Ньютона эквивалентен формуле
$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{y^{n-j}x^j}{(n-j)!\; j!} \tag{4}$$
3. Доказать теорему Лейбница, о сходимости знакочередующегося ряда $S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \lim S_n$, $S_n := \sum_0^n a_k$ с монотонно убывающими членами $a_n \searrow 0$. Рассмотреть знак разности $S - S_n$.

Следующее определение является для нас главным при изучении элементарных функций:

Определение 2. Будем называть функцию $f(x),\ x \in \mathbb{Z}$ *показательной*, если она непрерывно дифференцируема и удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(0) = 1. \tag{5}$$

Используя функциональное уравнение, находим

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f(x)\ \lim_{y\to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ f'(x) = \lambda f(x), \quad \lambda := f'(0).$$

Повторное дифференцирование добавляет степень λ и формула Тейлора (2) при $a = 0$ дает, таким образом, представление показательной функции в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j, \quad c_j = \frac{\lambda^j}{j!}, \quad \frac{c_{j+1}}{c_j} = \frac{\lambda}{j+1} \to 0, \ j \to \infty. \tag{6}$$

Этот ряд сходится (абсолютно) при всех x и, так как абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно, мы получаем

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} c_j x^j c_k y^k \right) =$$
$$= 1 + \lambda(x+y) + \lambda^2 \frac{(x+y)^2}{2!} + \cdots = f(x+y),$$

сгруппировав соответствующим образом слагаемые, полученные при перемножении этих рядов. Функциональное уравнение (5) следует таким образом из формулы (4). Мы показали тем самым, что явная формула (6) может заменить определение 2 (ср. [2], глава 8) и, что показательная функция действительно существует. С другой стороны формула (5) выставляет на первый план важные свойства, характерные для показательной функции. Например, записав (5) в виде $f(x)f(-x) = f(0) = 1$ мы заключаем, что $f(x) > 0$ для всех x.

За счет растяжения независимой переменной x можно положить $\lambda = 1$ и ввести более привычное обозначение $f(x) = e^x$ для соответствующей показательной функции

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ \Rightarrow \ e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{7}$$

Предложение 1. *Число $e = e^1$, определенное формулой* (7), *иррационально.*

◀ Используя формулу (7) находим

$$e - \sum_0^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \leq$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right] = \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

Иррациональность числа e докажем методом от противного [2]. Пусть $e = p/q$. Выбрав $n = q$ получаем

$$q! \cdot (e - \sum_0^q \frac{1}{k!}) \leq \frac{1}{q}, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Остается заметить, что при $e = p/q$ левая часть является здесь целым числом большим или равном 1, вопреки правой части указанного неравенства. ▶

Определение 3. Логарифм $\log(x)$, $x > 0$ определяется как интеграл:

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{s} ds, \quad \log'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

В силу очевидного неравенства

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Leftrightarrow x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x}, \quad x > 0,$$

показательная функция (7), являясь строго возрастающей, стремится к нулю на $-\infty$ и обращается в плюс бесконечность при $x \to \infty$. Область значений монотонной функции $f(x) = e^x \; : \; x \mapsto t$ совпадает, следовательно, с положительной частью $\mathbb{Z}_+$ вещественной оси.

Теорема 1. *Логарифмическая функция* $g(t) = \log(t)$ *является обратной к показательной* (7) *и удовлетворяет функциональному уравнению* $g(t \cdot \tau) = g(t) + g(\tau),\ t,\ \tau > 0.$

◀ Формулу $g'(t) = t^{-1}$ можно вывести продифференцировав тождество $(f \circ g)(t) = t$. Очевидно $g(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(0) = 1$. Для вывода функционального уравнения для функции $g(t),\ t > 0$ обозначим

$$x = g(t), \quad y = g(\tau) \;\Leftrightarrow\; t = f(x), \quad \tau = f(y).$$

Тогда, в силу (5),

$$\begin{aligned} t \cdot \tau = f(x) \cdot f(y) = f(x+y) = f[g(t) + g(\tau)] \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; g(t \cdot \tau) = (g \circ f)[g(t) + g(\tau)] = g(t) + g(\tau). \end{aligned}$$

▶

Возвращаясь к привычным обозначениям $\log t := g(t)$ мы имеем:

$$\log t = \int_1^t \frac{1}{s} ds,\ t > 0 \;\Rightarrow\; \log \frac{t_2}{t_1} = \log t_2 - \log t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{s} ds. \tag{8}$$

Заметив, что при целом $n > 0$ эта формула дает

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{s} ds \le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1},$$

оценим при $n \to \infty$ разность

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n := \gamma_n > 0 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \gamma_n - \gamma_{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{s} ds - \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-s)ds}{(n+1)(n+s)}. \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемая последовательность монотонно убывает и существует предел[2]

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma, \qquad (\gamma \approx 0.5711). \tag{9}$$

[2]называемый числом Эйлера

Теорема 1 позволяет также переписать формулу (6) для произвольной показательной функции в более удобном для приложений виде

$$t^x = e^{x \log t} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(x \log t)^j}{j!}, \quad t > 0. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что при фиксированном x соответствующая функция $f(t) = t^x,\ t > 0$ удовлетворяет всем требованиям предъявлемым к степенным функциям (см. задачу ниже).

Задачи 1.2.

1. Исходя из формулы (10) найти производные функции t^x, по переменной t (при фиксированом x) и по x, при фиксированом t.
2. Доказать, что $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.
3. Доказать сходимость рядов $\sum_1^{\infty} a_n$ при $a_n = n^{-2}$ и $a_n = (-1)^n n^{-1}$.

1.2. Формула Эйлера и число π.

Дальнейшие приложения показательной функции связаны с обобщением степенного ряда (6) и заменой $\lambda \in \mathbb{Z}$ квадратной матрицей $N \times N$, составленной из вещественных чисел. Эта замена приводит к степенному ряду

$$e^{A \cdot t} \stackrel{\text{def}}{=} E + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \ldots, \tag{11}$$
$$E = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1), \quad A = (a_{ij}) \in L_N(\mathbb{Z}),$$

определяющему **матричную экспоненту**. Основные свойства показательной функции, включая сходимость при всех $t \in \mathbb{Z}$ степенного ряда, переносятся и на матричную экспоненту (11) (см. [1] и задачи в конце раздела).

В интересующем нас здесь случае на матрицу $A \in L_2(\mathbb{Z})$ в формуле (11) накладываются следующие дополнительные условия

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{11} = a_{22}. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что матрицы вида (12) можно складывать и перемножать. Более того, сопоставив матрице A вида (12) комплексное число $z(A) = a_{11} + ia_{21}$ мы находим, что

$$z(A \cdot B) = z(A) \cdot z(B), \quad z(A + B) = z(A) + z(B).$$

Это соответствие является взаимно однозначным и формулу $||A|| = |z(A)| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$ можно использовать в качестве нормы матрицы (12).

Пример 1. При $z = i$ имеем $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$ и формула (11) дает

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^2 = -E, \quad e^{A \cdot t} = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots)E + (t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots)A,$$

или, что то же самое,

$$e^{it} = 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - i\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots = x(t) + iy(t), \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Дифференцируя этот степенной ряд получаем

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \tag{14}$$
$$x(0) = 1,\ y(0) = 0 \ \Rightarrow \ x^2(t) + y^2(t) = 1.$$

Таким образом, движение точки $z(t) = x(t) + iy(t) = e^{it}$ по комплексной плоскости происходит, в отличие от рассмотреннного ранее вещественного случая $x(t) = e^t$, по окружности с постоянной угловой скоростью. Такое движение, очевидно является периодическим и его период обозначается 2π. Из дифференциальных уравнений (14) мы находим,

$$\frac{dx}{dt} = -y = \pm\sqrt{1-x^2} \ \Rightarrow \ dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

и, таким образом

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1. \tag{15}$$

Полученная формула для π дополняет очевидную связь числа e с показательной функцией.

Приняв формулу Эйлера (13) за определение тригонометрических функций $\cos t = x(t)$ и $\sin t = y(t)$ мы можем теперь расширить область определения этих функций положив при $z = x + iy$

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \ \Rightarrow \ \cos z + i\sin z = e^{iz}. \tag{16}$$

В качестве определения обобщенной показательной функции здесь используется формула (11) при $t = 1$:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z = x + iy. \tag{17}$$

Сравнив эту формулу с формулой (7) можно заметить, что степенной ряд (17) получен аналитическим продолжением ряда (7) с вещественных значений переменной x и на комплексные $z = x+iy$. Этим же свойством обладают, очевидно, и функции (16). Так, например, из (16) и ряда (17) для e^{iz} мы получаем степенной ряд

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots,$$

который является аналитическим продолжением с вещественной оси соответствующей формулы из примера 1.6. Формулы связывающие эти функции на вещественной оси остаются в силе при аналитическом продолжении (см. [5]). Например, при любых комплексных значениях аргументов

$$e^{a+b} = e^a\ e^b, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \quad e^{z+2i\pi} = e^z. \tag{18}$$

В силу первой из этих формул, выражающей основное свойство показательных функций, имеем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \ \Rightarrow\ |e^z| = e^x \neq 0$$

и ,следовательно, уравнение $e^z = a \in \mathbb{C}$ разрешимо относительно z при любом ненулевом $a \in \mathbb{C}$.

Одно из применений обсуждаемых формул связано с корнями из единицы и задачей об извлечении корня степени n:

$$z^n = a, \quad z = re^{i\varphi} = x + iy, \quad a = \rho e^{i\alpha}.$$

Эта задача имеет ровно n различных решений [3]. При $a = 1$ задача сводится, в силу формулы Эйлера, к делению круга на n равных частей:

$$\lambda_j = e^{2ij\pi/n}, \quad j = 1,\ 2, \ldots, n \ \Rightarrow\ \lambda_j^n = 1, \quad \forall j. \tag{19}$$

Например, при $n = 3$ эта формула дает

$$\lambda_1 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \lambda_1^2, \quad \lambda_3 = 1.$$

В общем случае один из корней z_1 из a определяется формулой $z_1 = \rho^{1/n}e^{i\alpha/n}$, а остальные $n-1$ получаются умножением z_1 на корни из единицы (19).

Задачи 1.3.

1. Пусть $f(x) \ : \mathbb{Z} \ni x \mapsto L_2(\mathbb{Z})$ матричная экспонента (11). Доказать, что $f(x_1)\cdot f(x_2) = f(x_2)\cdot f(x_1) = f(x_1+x_2)$ и, что $f'(x) = Af(x) = f(x)A$

[3]кратные корни многочлена $f(x)$ соответствуют уравнениям $f(a) = f'(a) = 0$

2. Получить тригонометрические выражения для $\sin\alpha \pm \sin\beta$ и $\cos\alpha \pm \cos\beta$ исходя из формул Эйлера.

3. Проверить, что сумма корней из единицы (19) равна нулю.

1.3. Теория пределов и выпуклые функции.

Расстояние в метрическом пространстве X вводится при помощи функции $\rho \ : \ X \times X \mapsto \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющей следующим условиям

$$\begin{aligned} \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z), \\ \rho(x,y) = \rho(y,x), \\ \rho(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ y = x. \end{aligned} \tag{20}$$

Это позволяет определить стандартным образом предельные точки и замыкание множества $X' \subset X$ и ввести важное для определения непрерывности понятие открытого подмножества в X [4]. Метрическое пространство называется *полным*, если любая *фундаментальная* последовательность $x_n \in X$ является сходящейся:

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \ n, \ m > n'(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \exists \ \hat{x} \in X : \ \rho(x_n, \hat{x}) \to 0, \ n \to \infty.$$

Структура метрического пространства X зависит от выбора функции $\rho(x,y)$ и, в случае вещественной оси $X = \mathbb{Z}$, наряду с обычным расстоянием $|x-y|$ мы можем положить $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$, где $f(x)$ строго монотонная вещественная функция $x \in \mathbb{Z}$. При этом неравенство треугольника из формулы (20) сводится, если обозначить $f(x) - f(y) = a, \ f(y) - f(z) = b$, к легко проверяемому неравенству $|a| + |b| \geq |a - b|$. Таким образом, изменив $\rho(x,y)$, мы можем превратить интервал $0 < x < 1$ в полное метрическое пространство, выбрав монотоную функцию $f(x)$ так, чтобы

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = \infty.$$

[4] в дополнение к Рудину [2] рекомендуется использовать [12]

Для евклидова пространства X с положительно определенным скалярным произведением $(x,\ y)$ и нормой $|x| = \sqrt{(x,\ x)}$, мы имеем $|a| + |b| \geq |a - b|$ и, следовательно, функция $\rho(x, y) = |x - y|$ удовлетворяет неравенству треугольника (20). В частности, в случае $X = \mathbb{Z}^N$ мы имеем

$$(x,\ y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_N y_N,$$
$$|x| = \sqrt{(x,\ x)} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}.$$

Другой более экономный способ измерения расстояний в $\mathbb{Z}^n$, указан в задачах 1.8, ниже.

1.3.1. Принцип сжимающих отображений. Классическая *теорема о неподвижной точке* (Bohl, 1904; Brouwer, 1910) утверждает, что непрерывное отображение $f\ :\ \ \mathbb{Z}^N \ \rightarrow\ \mathbb{Z}^N$, переводящее замкнутый единичный шар в себя, обязательно имеет в этом шаре неподвижную точку $f(x) = x$. Эта теорема имеет много приложений в нелинейных задачах. Из этой теоремы следует, например, существование неподвижной точки у непрерывного отображения $f\ :\ \ \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}^N$, обладающего свойством: $x = \alpha f(x),\ \alpha \in [0, 1] \ \Rightarrow\ |x| < m$, где $m-$ некоторое фиксированое число [5]. Действительно, чтобы убедиться в этом, можно ограничиться случаем $m < 1$ и рассмотреть вместо $f(x)$ вспомогательную функцию

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq 1 \\ f(x)/|f(x)|, & |f(x)| \geq 1, \end{cases}$$

которая переводит единичный шар $|x| \leq 1$ в себя. В силу теоремы о неподвижной точке существует точка $\hat{x},\ |\hat{x}| \leq 1$ такая, что $\widetilde{f}(\hat{x}) = \hat{x}$. Если $|f(\hat{x})| \leq 1$ то точка $\hat{x}$ является неподвижной точкой исходного отображения $f(\hat{x}) = \hat{x}$, если же $|f(\hat{x})| > 1$, то $\hat{x} = f(\hat{x})/|f(\hat{x})| \ \Rightarrow\ |\hat{x}| = 1$, что противоречит условию:

$$x = \alpha f(x),\ \alpha \in [0, 1] \ \Rightarrow\ |x| < 1.$$

[5] т.е. заранее известна априорная оценка искомого решения уравнения $x = \alpha f(x)$

Доказательство топологической теоремы Брауэра о неподвижной точке не входит в наши планы и мы ограничимся сильно упрощенным вариантом, в который предполагается, что рассматриваемое отображение, действующее в полном метрическом пространстве X не только непрерывно, но и удовлетворяет условию Липшица

$$\rho(f(x), f(y)) < \mu\ \rho(x, y), \quad \forall\ x,\ y \in X. \tag{21}$$

В случае $\mu < 1$ отображение называется *сжимающим* и неподвижная точка $\hat{x}$ находится методом итераций (последовательных приближений) (см. задачи ниже):

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_0 \in X\ \Rightarrow\ \rho(\hat{x}, x_n) \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}\,\rho(x_1, x_0). \tag{22}$$

Отметим, что в отличие от общей теоремы о неподвижной точке, этот метод дает конструктивный алгоритм построения приближенного решения уравнения $x = f(x)$. В афинно-линейном случае:

$$f(x) = Ax + h, \quad x,\ h\ \in \mathbb{Z}^N, \qquad A = (a_{ij}) \in L_N(\mathbb{Z})$$

роль константы Липшица μ играет операторная норма $||A||$ квадратной $N \times N$ матрицы A:

$$||f(x) - f(y)|| = ||A(x-y)|| \leq ||A|| \cdot ||x-y||, \quad ||A|| := \sup \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Нетрудно проверить (см. Приложение, Теорема 19), что при $||A|| < 1$ основная формула (22) принципа сжимающих отображений эквивалентна следующей формуле для обратной матрицы:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^n + \ldots\ .$$

В качестве иллюстрации довольно широких возможностей применения принципа сжимающих отображений (22) к нелинейным задачам приведем следующий пример.

Теорема 2. *Пусть V евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и $A\ : V \to V$ нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим двум условиям*

$$||A(u)-A(v)|| \leq m\ ||u-v||, \quad (A(u)-A(v),\ u-v) \geq m_1\ ||u-v||^2.$$

Тогда при любом $w \in V$ уравнение $A(u) = w$ однозначно разрешимо и к нему применим метод последовательных приближений.

◀ Оценим константу Липшица для вспомогательного отображения $f(u) = u + \alpha(w - A(u)),\ \alpha > 0$. Имеем

$$||f(u) - f(v)||^2 = ||u - v||^2 - 2\alpha\,(A(u) - A(v),\ u - v) + \\ + ||A(u) - A(v)||^2 \leq \mu(\alpha)\ ||u - v||^2,$$

где $\mu(a) = 1 - 2\alpha\ m_1 + \alpha^2 m^2,\ \mu(0) = 1,\ \mu'(0) < 0$. Таким образом $\mu(\alpha) < 1$ при достаточно малых α. Поэтому к вспомогательному отображению $f(u)$ применим принцип сжимающих отображений. Остается заметить, что исходное уравнение $A(u) = w$ эквивалентно уравнению $f(u) = u$. ▶

Задачи 1.4.

1. Проверить, что функция $\rho(x, y) = \max_i\ |x_i - y_i|,\ x,\ y \in \mathbb{Z}^N$ удовлетворяет условиям (20).

2. Доказать, что *частичные пределы* (см. [2]) последовательности в $\mathbb{Z}^n$ образуют замкнутое множество.

3. Доказать, что для последовательности c_n положительных чисел

$$\limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad \liminf \sqrt[n]{c_n} \geq \liminf \frac{c_{n+1}}{c_n}. \quad (23)$$

4. Доказать, что для непрерывного отображения $f(z)$ окружности в прямую существует пара диаметрально противоположных точек z и $z^* = ze^{i\pi}$ таких, что $f(z) = f(z^*)$.

5. Найти предел итераций $4y_{n+1} = 1 - xy_n^2(x),\ |x| < 4$ при $y_0(x) \equiv 0$.
6. Используя индукцию, доказать оценку (22) для отображения (21) с константой $\mu < 1$.
7. Пусть $f,\ g:\ X \to X$, где X полное метрическое метрическое пространство, удовлетворяют условию Липшица с константой $\mu < 1$. Тогда для неподвижных точек x_f, x_g этих отображений справедливо неравенство
$$\rho(x_f, x_g) \le (1-\mu)^{-1} \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

1.3.2. Правило Лопиталя. Иоганну Бернулли (1667-1748) принадлежит один из первых учебников по анализу. В этом учебнике была указана формула, которой мы пользуемся при раскрытии неопределенностей вида 0/0 и ∞/∞:
$$A = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \Rightarrow\ \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \tag{24}$$
Обсудим ее доказательство, ограничившись случаем 0/0 [6]:

Теорема 3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и непрерывны на его замыкании $[a,b]$. Пусть существует предел $f'(x)/g'(x)$ при $x \to b$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся при этом к нулю. Тогда, при дополнительном условии $g'(x) \ne 0,\ a < x < b$ справедлива формула* (24).

◀ Рассмотрим на отрезке $[\alpha, b],\ a \le \alpha < b$ вспомогательную функцию $h(x)$, принимающую одинаковые значения в концах отрезка, и являющуюся линейной комбинацией рассматриваемых функций $f(x)$ и $g(x)$:
$$h(x) = [g(\alpha) - g(b)]\, f(x) - [f(\alpha) - f(b)]\, g(x),$$
$$h(\alpha) = h(b) = g(\alpha)f(b) - f(\alpha)g(b).$$

[6] доказательство в случае ∞/∞ см. [2], стр. 119

Применив теорему Ролля получаем, учитывая, что $f(b) = g(b) = 0$

$$h'(\xi) = 0, \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad \alpha < \xi < b.$$

Устремляя в полученном равенстве $\alpha \to b$ получаем (24). ▶

Пример 2. Рассмотрим поведение при $\tau \to 0$ следующей суммы:

$$M_\tau = M_\tau(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_1^n \alpha_j x_j^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}}, \tag{25}$$

$$\sum \alpha_j = 1, \ \alpha_j > 0, \quad x_j > 0; \quad \tau > 0.$$

В частности, при $\tau = 1$ эта сумма $M_1 = \sum \alpha_j x_j$ дает взвешенное среднее положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$. Логарифмируя (25) находим (см. теорема 1), что

$$\log M_\tau = \frac{\log \sigma(\tau)}{\tau}, \quad \sigma \equiv \sum_1^n \alpha_j x_j^\tau, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = \sum \alpha_j x_j^\tau \log x_j. \tag{26}$$

Так как

$$\sigma(\tau) \to \sum_1^n \alpha_j = 1, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} \to \sum \alpha_j \log x_j, \quad \tau \to 0,$$

мы получаем, применив правило Лопиталя:

$$\lim_{\tau \to 0} \log M_\tau = \sum \alpha_j \log x_j \ \Rightarrow \ M_0 := \lim_{\tau \to 0} M_\tau = \prod x_j^{\alpha_j},$$

что совпадает с средне-геометрическим рассматриваемого набора положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ при $\alpha_j = 1/n$.

Дальнейшее развитие идеи использованной при доказательстве теоремы 3 связано с понятием выпуклых функций (этот материал понадобится только в §3.4 при изучении гамма-функции и его при первом чтении можно пропустить):

Определение 4. Кусочно-непрерывная функция $f(x)$, заданная на интервале вещественной оси, называется выпуклой (выпуклость направлена вниз), если неубывающей функцией x является разностное отношение $\varphi(x, x') := (f(x) - f(x'))/(x - x')$, или, что эквивалентно, выполняется условие

$$\frac{\varphi(x_1, x_3) - \varphi(x_2, x_3)}{x_1 - x_2} \geq 0.$$

Переписав это условие монотонности в терминах исходной функции $f(x)$ мы получаем неравенство, которое должно выполняться при любом расположении точек $x_1,\ x_2,\ x_3$:

$$\frac{x_1(f^3 - f^2) + x_2(f^1 - f^3) + x_3(f^2 - f^1)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)} \geq 0, \quad f^j := f(x_j). \quad (27)$$

Для гладкой функции $f(x)$, не обязательно выпуклой, указанную формулу (27), можно использовать в качестве разностного аналога второй производной. Действительно, функция

$$F(x) = x(f^2 - f^3) + x_2(f^3 - f(x)) +$$
$$+ x_3(f(x) - f^2) - C(x - x_2)(x_2 - x_3)(x - x_3),$$

где

$$C = \frac{x_1(f^3 - f^2) + x_2(f^1 - f^3) + x_3(f^2 - f^1)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)},$$

обращается в нуль в трех точках $x_1,\ x_2$ и x_3. В силу теоремы Ролля, ее первая производная обращается в нуль в двух точках:

$$F'(x) = f_2 - f_1 + (x_1 - x_2)[f'(x) - C(2x - x_1 - x_2) = 0, \quad x = x_1',\ x_2',$$

и, следовательно, в некоторой промежуточной точке

$$C = \frac{1}{2} f''(\xi).$$

Мы доказали, таким образом, что для гладкой функции $f(x)$ разностный критерий выпуклости (27) эквивалентен условию монотонности $f'' \geq 0$ ее первой производной. С другой стороны для доказательства выпуклости предела $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ последовательности выпуклых функций $f_n(x)$ удобней обратиться к исходному определению. Очевидно также, что сумма выпуклых функций также удовлетворяет условию (27) и это остается справедливым для суммы сходящегося ряда.

Одно из приложений теории выпуклых функций связано с обобщенными средними (25), рассмотренными в примере 1.11.

Теорема 4. *При возрастании $\tau > 0$ среднее M_τ неубывает.*

◀ Дифференцируя (25) при $\tau > 0$ получаем (см. (26))

$$\tau^2\sigma\frac{d\log M_\tau}{d\tau} = \tau^2\sigma\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\tau}\log\sigma\right) = \sum_1^n \alpha_j x_j^\tau \log x_j^\tau - \sigma\log\sigma. \quad (28)$$

Обозначим $y_j = x_j^\tau$ и перепишем правую часть этой формулы в виде

$$\sum \alpha_j f(y_j) - f(\sum \alpha_j y_j), \quad f(y) = y\log y.$$

Так как $f''(y) > 0,\ y > 0$, то для доказательства Леммы можно воспользоваться следующим свойством выпуклых функций:

$$\sum_1^n \alpha_j f(y_j) \geq f\left(\sum_1^n \alpha_j y_j\right), \quad \sum \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0 \qquad (29)$$

Доказательство неравенства (29) заключается в суммировании по j следующих соотношений

$$\bar{y} = \sum_1^n \alpha_j y_j \;\Rightarrow\; f(y_j) = f(\bar{y}) + (y_j - \bar{y})f'(\bar{y}) + \frac{1}{2}(y_j - \bar{y})^2 f''(\xi_j)$$

. ▶

При изучении гамма-функции в §3 нам понадобится следующий "утонченный" вариант условия выпуклости.

Определение 5. Гладкая положительная функция f, заданная на интервале вещественной оси, называется логарифмически выпуклой, если

$$(\log f)_{xx} = \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2} \geq 0, \quad f(x) > 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ ac \geq b^2, \quad (a = f_{xx},\ b = f_x,\ c = f > 0).$$

Заметив, что

$$a_1c_1 \geq b_1^2, \quad a_2c_2 \geq b_2^2 \ \Rightarrow \ (a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \geq (b_1 + b_2)^2$$

мы находим, что логарифмически выпуклые функции можно как перемножать, так и складывать.

Замечание. Учитывая логарифмическую выпуклость интегральной суммы в случае

$$F(x) = \int_0^\alpha \varphi(t)t^x dt, \quad \alpha > 0, \quad x > -1 \tag{30}$$

можно доказать, используя предельный переход, что эта функция является логарифмически выпуклой при любой положительной и непрерывной функции $\varphi(t)$.

Задачи 1.5. на пределы, ряды.

1. Зорич, том 1, Глава 3,§ 1 и Упр.; Глава 5,§ 5 Около 30 стр.
2. Демидович: (25)–49,51,52,53*,57,59,60-62,68-71. (23)

§ 2. Функции многих переменных.

В отличие от функций одной переменной в случае многих переменных приходится как правило иметь дело с отображениями $\mathbb{Z}^N \mapsto \mathbb{Z}^{N'}$ (в типичной ситуации $N' = N$). Примером здесь являются различные отображения $\mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$, связанные с переходом на плоскости из одной системы координат в другую. Если не оговорено противное, рассматриваемые функции $f\ : \mathbb{Z}^N \mapsto \mathbb{Z}^{N'}$ предполагаются непрерывными вместе с их частными производными, которые определяются, естественно, как предел соответствующих разностных отношений:

$$D_i f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} \in \mathbb{Z}^{N'}, \quad i = 1,\ 2\dots, N. \tag{31}$$

Здесь e_i обозначает $i-$тый базисный вектор в $\mathbb{Z}^N$, имеющий координату с номером i равную 1.

Определение 6. *Производной отображения* $f\ : \mathbb{Z}^N \ni x \to y \in \mathbb{Z}^{N'}$ мы называем $N' \times N$ матрицу $f'(x)$, столбцами которой являются частные производные (31):

$$f' = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \dots & D_N f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_{N'} & D_2 f_{N'} & \dots & D_N f_{N'} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Строки матрицы $f'(x)$ получаются в результате замены нелинейных функций $y_j = f_j(x),\ j = 1,\dots,N'$, составляющих отображение $f(x) = (f_1(x),\dots,f_{N'}(x))^\intercal$, линейными:

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_{N'} \end{bmatrix} = f'(x) \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_N \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ dy_j = df_j = D_1 f_j(x) dx_1 + \dots + D_N f_j(x) dx_N.$$

Эта процедура “отбрасывания квадратов малых величин” называется линеаризацией отображения.

Теорема 5. *Пусть отображение* $y = f(x)$ *имеет непрерывную производную* (32)*. Тогда*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+ha) - f(x)}{h} = f'(x)\ a, \quad a \in \mathbb{Z}^N. \tag{33}$$

◀ Предположим для простоты, что $N = 2$. Тогда $a = a_1e_1 + a_2e_2$ и

$$f(x_1 + ha_1, x_2 + ha_2) - f(x_1, x_2) =$$
$$\int_{x_1}^{x_1+ha_1} D_1 f(t, x_2)dt + \int_{x_2}^{x_2+ha_2} D_2 f(x_1 + ha_1, \tau)d\tau.$$

При вычислении предела (33) мы можем заменить подынтегральные выражения на $D_1f(x_1, x_2)$ и $D_2f(x_1, x_2)$, соответственно, в силу непрерывности обеих частных производных в точке $x = (x_1, x_2)$. ▶

Непосредственное применение формулы (33) для дифференцирования функции $\widetilde{f}(t) := f(\alpha + ta),\ 0 \le t \le 1$ приводит к следующему аналогу одномерной формулы конечных приращений:

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_0^1 f'(\alpha + ta)\ adt, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}^N, \quad a = \beta - \alpha. \quad (34)$$

Фундаментальная формула для производной *композиции* отображений $h = g \circ f :\ x \to y \to z$ имеет в матричных обозначениях следующий вид:

$$dz = h'(z)dx, \quad h'(z) = g'(y)f'(x), \quad y = f(x),\ z = g(f(x)). \quad (35)$$

Для линейных функций эта формула устанавливает, известное из линейной алгебры соответствие, между произведением матриц и композицией отображений. При перенесении доказательства с линейного на нелинейный случай трудностей не возникает и мы отсылаем здесь читателя к учебнику [2], теорема 9.12. Приведенный выше вывод формулы конечных приращений (34), можно рассматривать как частный случай этой общей формулы дифференцирования (35).

При $N = N'$ обратимость отбражения $y = f(x)$ в окрестности точки $a \in \mathbb{Z}^N$, $\det f'(a) \ne 0$ выводится из разрешимости задачи в линейном приближении:

$$dy = f'(a)dx \ \Leftrightarrow \ dx = Ady, \quad A = [f'(a)]^{-1}$$

и принципа сжимающих отображений из §1.3. Обратное отбражение $x = \varphi(y)$ определяется при этом в небольшом шаре $B(b, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке $b = f(a)$. Для простоты мы будем в нижеследующей теореме о локальной разрешимости уравнения $y = f(x)$ полагать $a = b = 0$ и $f'(0) = E$. Отметим, в этой связи, что из формулы (35) следует, что $\widetilde{f}'(a) = E$ для "подправленного" отображения $\widetilde{f} = A \circ f$, так что общий случай приводится к рассматриваемому ниже в теореме очевидными преобразованиями.

Теорема 6. *Пусть $F(x, y) := y + x - f(x)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = E$ и выбрано число $\lambda :\ 0 < \lambda < 1$. Подберем радиус r шара $U = B(0, r)$ так, чтобы в этом шаре $||f'(x) - E|| < \lambda$ и обозначим через $V = B(0, \rho)$ шар радиуса $\rho := r(1 - \lambda) < r$. Тогда*
1) отображение F переводит $U \times V$ в шар U
2) существует единственное отображение $\varphi :\ V \mapsto U$ такое что

$$F(\varphi(y), y) = y + \varphi(y) - (f \circ \varphi)(y) = \varphi(y) \ \Leftrightarrow\ y = (f \circ \varphi)(y). \quad (36)$$

◀ В силу выбора радиуса r шара U, при любых $x,\ x'$ из этого шара имеет место оценка (см. задачи 2*)

$$|F(x, y) - F(x', y)| \leq \lambda |x' - x|, \quad |x|,\ |x'| \leq r \qquad (37)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &|F(0, y)| = |y| \leq (1 - \lambda) r \qquad \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \quad |F(x, y)| = |F(x, y) - F(0, y) + F(0, y)| \leq \\ &\quad \leq \lambda r + (1 - \lambda) r = r \end{aligned}$$

и, следовательно, первое из утверждений теоремы доказано.

При любом эаданном $y \in V$ отображение $F(x, y) = y + x - f(x)$ действует из U в U и является сжимающим в силу (37). Неподвижная точка $\varphi(y)$ единственна в силу принципа сжимающих отображений. Рассмотрим последовательность метода итераций

$$\varphi_n(y) \in U, \quad \varphi_{n+1}(y) = F[\varphi_n(y), y], \quad \varphi_0(y) = 0$$

Используя индукцию, проверяем (ср. задачи 2.10), что

$$|\varphi_{n+m}(y) - \varphi_n(y)| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} r(1-\lambda) = r\lambda^n.$$

Таким образом доказано, что последовательность функций $\varphi_n(y),\ y \in V$ равномерно сходится к непрерывной функции $\varphi(y)$, удовлетворяющей уравнению (36). ▶

2.1. Многомерные интегралы.

Вопрос об интегрировании по произвольной области $\Omega \subset \mathbb{Z}^N$ заданной функции $f(x),\ x \in \Omega$ решается в некотором смысле следующей формулой:

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\hat\Omega} f(\varphi(y))|\det\varphi'(y)|dy. \tag{38}$$

Участвующее в этой формуле вспомогательное отображение $\varphi : \hat\Omega \to \Omega$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие точек данной области Ω с точками области $\hat\Omega$, предполагаемой достаточно простой (многомерный куб, например).

Пример 3. Пользуясь формулой (38), легко доказать, что квадрат объема параллелепипеда:

$$\Omega = P(a_1, a_2, \ldots, a_N) := \left\{ x = \sum_1^N y_i a_i, \quad 0 \leq y_i \leq 1 \right\} \tag{39}$$

натянутого на векторы $a_1,\ a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{Z}^N$, равен определителю $N \times N$ матрицы с элементами $\alpha_{ij} = (a_i, a_j)$[7], равными скалярным произведениям этих векторов. Ограничимся для простоты случаем $N = 3$, детально исследованным с геометрической точки зрения в §2.4 книги Э. Винберга [1]; общий случай обсуждается там в §5.4.

[7]эта матрица называется матрицей Грама (1850-1916)

Нужное нам линейное отображение единичного куба на параллелепипед дает формула (39)

$$x = Ay, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3); \tag{40}$$

так что вектору a_i соответствует здесь $i-$столбец матрицы A. Так как объем единичного куба равен единице, непосредственное применение формулы (38) дает нам $\mathrm{vol}\,\Omega = |\det A|$. Остается заметить, что

$$(\det A)^2 = \det(A^{\intercal} A) = \det(\alpha_{ij}), \quad \alpha_{ij} = a_i^{\intercal} \cdot a_j,$$

где $A^{\intercal}-$транспонированная по отношению к A матрица, строки которой совпадают с соответствующими столбцами исходной матрицы.

Пример 4. В случае интегрирования по кругу $B(0, a)$ радиуса a, введение полярных координат:

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix}$$

и применение формулы (38) дают

$$\int_{B(0,a)} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

Последний интеграл можно свести к повторному.

В дополнение к этим двум примерам отметим, что стандартные интегральные суммы при $N \geq 2$ не позволяют как правило вычислить интеграл с достаточной точностью и, что вопрос о построении эффективных алгоритмов для практического вычисления многомерных интегралов (в отличие от одномерных) остается до настоящего времени открытым. Разбиение области интегрирования на более простые части и использование формулы (38) упираются прежде всего в трудно формализуемую задачу о структуре границы $\partial\Omega$ "типичной" области интегрирования $\Omega \subset \mathbb{Z}^N,\ N \geq 3$. Необходимость уточнения, используемых в этой задаче понятий была осознана уже в конце 19 века (см.[12]).

Наиболее привлекательным, с теоретической точки зрения, здесь является случай плоскости $\mathbb{Z}^2$, промежуточный в некотором смысле, между $N = 1$ и общим случаем с $N \geq 3$.

Определение 7. *Жордановой кривой* $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ называется гомеоморфный образ единичной окружности S^1. Жорданова кривая, состоящая из конечного числа прямолинейных отезков называется жордановым многоугольником.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Жордана Жорданов многоугольник* Γ *разделяет плоскость* $\mathbb{Z}^2$ *на два связных открытых множества* Ω_i *и* Ω_e*, (одно из которых* Ω_i *ограничено), с общей границей* Γ.

Связность области $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$ означает, что любые две точки этого открытого множества можно соединить путем, полностью лежащем в Ω; в случае выпуклой области, в качестве этого пути выступает прямолинейный отрезок.

Аналогичное лемме Жордана утверждение для жордановой кривой общего вида носит название теоремы Жордана [8]. При этом принято считать, что для наблюдателя в Ω_i движение по кривой Γ происходит в направлении против часовой стрелки при увеличении параметра t. Область Ω_e остается при этом справа. В следующем разделе будут указаны дополнительные условия при которых, интегрирование по внутренней области Ω_i, сводится к одномерному интегралу по кривой Γ, ограничивающей Ω_i.

[8] ее доказательство, как показано в учебнике [12], удается свести к сформулированной выше лемме

Так как, по определению, жорданова кривая Γ задается непрерывным и взаимно однозначным отображением
$f : S^1 \to \Gamma \subset \mathbb{Z}^2$, можно, предположив, что соответствующее отображение $\mathbb{Z} \supset [0, 2\pi) \mapsto \Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ непрерывно дифференцируемо, определить интеграл по куску $\Gamma(a, b)$ с концами a и b формулой аналогичной (38):

$$\int_{\Gamma(a,b)} u(x) d\sigma(x) := \int_{\alpha}^{\beta} (u \circ f)(t) |f'(t)| dt, \tag{41}$$

где

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t)) \in \mathbb{Z}^2, \qquad |f'| = \sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}.$$

Проверим, что конкретный выбор параметризации здесь роли не играет. Если $g(\tau),\ \alpha_1 \le \tau \le \beta_1$-другая параметризация, рассматриваемого куска кривой $\Gamma(a, b)$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u \circ f)(t) |f'(t)| dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (u \circ g)(\tau) |g'(\tau)| d\tau, \tag{42}$$

так как здесь существует гладкая монотонная функция $t = \varphi(\tau),\ \varphi' > 0$, такая что

$$g(\tau) = f(\varphi(\tau)), \quad g' = f'\varphi', \quad |g'|(\tau) = \varphi'(\tau) |f'(\varphi(\tau))|.$$

Равенство (42), обеспечивающее независимость определения интеграла по кривой (41) от конкретного выбора параметризации, следует теперь из формул (35) и (38).

Приведем в заключение формулы для элементов объема dv и длины дуги $d\sigma$ из формул (38) и (41), соответственно

$$dv = |\det \varphi'(y)| dy, \quad d\sigma = |\varphi'(t)| dt. \tag{43}$$

Глядя на эти довольно похожие формулы можно надеяться, что и формула для элемента площади поверхности произвольной размерности должна иметь аналогичную структуру (см. ниже).

2.1.1. Обобщенная формула Ньютона-Лейбница.

В одномерном случае интересующая нас формула

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{44}$$

показывает в каком смысле операция интегрирования является обратной к дифференцированию. Обсудим кратко различные варианты $N-$мерного аналога этой формулы Ньютона-Лейбница [9]. Простейших из этих вариантов записывается в следующем виде:

$$\int_\Omega D_i u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)n_i d\sigma. \tag{45}$$

Здесь $D_i f$- частная производная (31) функции f, вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ - вектор единичной внешней нормали к границе,- элемент площади которой обозначен через $d\sigma$. Вопрос о построении нормали к поверхности в $\mathbb{Z}^N$, заданной уравнением $f(x) = 0$, решается в следующей цепочке формул:

$$f(x) = 0, \quad df = Df \cdot dx \;\Rightarrow\; \mathbf{n} = \pm\frac{Df}{|Df|}, \qquad Df := (D_1 f, \ldots, D_N f) \in \mathbb{Z}^N. \tag{46}$$

Следовательно, нуждается в формуле (45) в определении только элемент площади $d\sigma$.

Ориентируясь на формулы (43) постулируем

Определение 8. Для поверхности в $\mathbb{Z}^3$, заданной параметрическими уравнениями $\mathbb{Z}^3 \ni x = f(t),\ t \in \mathbb{Z}^2$ элемент площади $d\sigma$ в (44) определяется следующей формулой аналогичной (43):

$$d\sigma = \sqrt{\det(A^\intercal A)}\, dt_1 dt_2, \quad A = f'(t), \quad dx = Adt \tag{47}$$

.

[9] оставив запутанные вопросы обоснования солидным учебникам типа [3]

Заметим, что, обозначив столбцы матрицы A через $a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}^3$, мы можем переписать(ср. (40)) формулу (47), используя матрицу Грама:

$$G = A^\intercal A = \begin{bmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{bmatrix} \tag{48}$$

. Нетрудно установить положительность $\det G > 0$ определителя этой матрицы Грама (см. [1]).

Таким образом, единообразная форма "элемента площади", включающая в себя как обе формулы (43) так и (47), имеет следующий вид

$$d\sigma = \sqrt{\det G}\ dt, \quad G = (\alpha_{ij}), \quad \alpha_{ij} = (a_i, a_j). \tag{49}$$

Здесь вектора $a_1,\ \dots$ являются столбцами производной $\varphi'(t)$[10], отображения, задающего "параметризацию поверхности".

Довольно часто формулу (45) называют *теоремой о дивергенции* или формулой Гаусса- Остроградского и переписывают ее в векторном виде

$$\int_\Omega \mathrm{div}\ \mathbf{v}(x)dx = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}, \mathbf{n})d\sigma, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} = D_1 v_1 + \dots + D_N v_N.$$

Здесь $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \sum v_i n_i$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{Z}^N$. Выбрав в этой формуле $\mathbf{v}(x) = (x_1, \dots, x_N) = \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N$, мы получаем простую связь объема с "потоком" вектора $\mathbf{x}$ через поверхность тела:

$$\mathrm{vol}\ \Omega = \frac{1}{N} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x}, \mathbf{n})d\sigma. \tag{50}$$

Например, эта формула связывает объем шара с площадью сферы его ограничивающей.

Формула Стокса.

[10] см. 32

Приведем еще одно приложение формулы (45):

$$\int_\Gamma (\mathbf{n}, \operatorname{curl}\, \mathbf{v}) dS = \int_\gamma (\tau, \mathbf{v}) ds, \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \gamma = \partial\Gamma. \quad (51)$$

Здесь τ-единичный касательный вектор к жордановой кривой γ ограничивающий кусок параметризованной поверхности $\Gamma \subset \mathbb{Z}^3$ и

$$\operatorname{curl}\, \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} D \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} D_2(v_3) - D_3(v_2) \\ D_3(v_1) - D_1(v_3) \\ D_1(v_2) - D_2(v_1) \end{pmatrix}$$

Словесная формулировка, соответствующая формуле Стокса (51), такова: поток ротора ($\operatorname{curl}\, \mathbf{v}$) через кусок поверхности Γ равен циркуляции векторного поля $\mathbf{v}$ по его границе γ. Хотя формула Стокса и является следствием общей формулы (45), для ее выполнения нужно позаботиться о выборе направления интегрирования на кривой γ, зависящей от выбора направления нормали к поверхности $\Gamma \subset \mathbb{Z}^3$ ориентации.

2.1.2. Стереографическая проекция.

Пусть S^{N-1} единичная сфера в $N-$мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ с координатами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$. Выпустим из "северного полюса" луч и найдем проекцию точки $\mathbf{x} \in S^{N-1}$ на экваториальной плоскости. Записав уравнение прямой, проходящей через полюс и точку $\mathbf{x}$ в виде

$$\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x}^0 + t\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0, 1) \Rightarrow y_N = 1 - t + t\, x_N,$$

и определив параметр t из уравнения $y_N = 0$ мы получаем искомые координаты точки $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{N-1}, 0)$ на экваториальной плоскости:

$$y_1 = \frac{x_1}{1 - x_N}\ , \dots,\ y_{N-1} = \frac{x_{N-1}}{1 - x_N} \Rightarrow\ |y|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N-1} y_j^2 = \frac{1 + x_N}{1 - x_N}. \quad (52)$$

Легко видеть, что это преобразование $S^{N-1} \ni \mathbf{x} \to \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N-1}$ обратимо и, что справедливы формулы

$$x_1 = \frac{2y_1}{|y|^2+1}\,, \ldots,\ x_{N-1} = \frac{2y_{N-1}}{|y|^2+1},\quad x_N = \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}. \tag{53}$$

Дифференцирование этих формул позволяет ввести в рассмотрение якобиан J отображения (53), который представляет собой матрицу с N строками и $N-1$ столбцами:

$$d\mathbf{x} = Jd\mathbf{y},$$

$$J = \frac{2}{(|y|^2+1)^2}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1+|y|^2-2y_1^2 & -2y_2y_1 & -2y_3y_1 & \ldots & -2y_{N-1}y_1 \\ -2y_1y_2 & 1+|y|^2-2y_2^2 & -2y_3y_2 & \ldots & -2y_{N-1}y_2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & & \ldots \\ -2y_1y_{N-1} & -2y_2y_{N-1} & -2y_3y_{N-1} & \ldots & 1+|y|^2-2y_{N-1}^2 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 & \ldots & 2y_{N-1} \end{pmatrix}$$

Столбцы этой матрицы вместе с нормалью к S^{N-1} образуют ортог. репер (ср. [3], т.2, стр. 313-316). При $N = 3$ и единичной сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ используют стереографическую проекцию:

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},\quad x_1 + ix_2 = \frac{2z}{1 + z\bar{z}}.$$

Плоскость $\mathbb{C}$ с координатами $z = x + iy$ рассекает здесь единичную сферу S^2 по экватору, откуда следует, что верхняя и нижняя полусферы проицируются, соответственно, на внешность и внутренность единичного круга $B = B(0,1) \subset \mathbb{C}$, и, что обратное преобразование имеет указанный в формуле (52) вид. Северный полюс $(0,0,1)$ заменяет теперь бесконечно удаленную точку $z-$плоскости.

Дифференцирование второй из формул (52) приводит нас к якобиану отображения $\mathbb{C}$ с координатами $z = x + iy$ в единичную сферу S^2. Столбцами якобиана являются следующие два вектора,

$$a_1 = \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}\left(1+y^2-x^2,\ -2xy,\ 2x\right)^{\mathsf{T}},$$

$$a_2 = \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}\left(-2xy,\ 1+x^2-y^2,\ 2y\right)^{\mathsf{T}},$$

образующие, вместе с нормалью к сфере, тройку взаимно ортогоральных векторов. Используя общую формулу (48) для элемента площади, мы получаем таким образом, что

$$d\sigma = \frac{4dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

2.2. Преобразование Радона.

В прикладных задачах часто важны не особенности графика функции $f(x)$, изучаемые в анализе, а ее интегральные характеристики. С одной из таких задач мы познакомимся в этом параграфе, но сначала, в качестве предисловия, мы проиллюстрируем эту "интегральную" точку зрения на функцию следующим примером. Выбрав $C_0^\infty(\mathbb{Z})$ в качестве вспомогательного пространства "пробных функций", сопоставим функции $f(x),\ x \in \mathbb{Z}$ функционал:

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{Z}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{Z}), \tag{54}$$

действующий в бесконечномерном пространстве гладких финитных функций. Этот функционал $F(\varphi) =< f,\ \varphi >$ играет в пространстве функций роль скалярного произведения, а пространство пробных функций может меняться в зависимости от рассматриваемой задачи[11]. Предположим для определенности, что рассматриваемая функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и сравним функционал (54) со следующим

$$F_1(\varphi) = -\int_{\mathbb{Z}} f(x)\varphi'(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}). \tag{55}$$

[11]например, в главе 4 пробными функциями служат экспоненты $\exp i\xi x,\ \xi \in \mathbb{Z}$

Так как любая функция φ из $C_0^\infty(\mathbb{Z})$ равна нулю вне некоторого, (зависящего от φ) отрезка, то область интегрирования в формуле (54) конечна. При $f \in C^1(\mathbb{Z})$ из формулы $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$ следует, что

$$F_1(\varphi) = -\int_{\mathbb{Z}} (f\varphi)'dx + \int_{\mathbb{Z}} f'\varphi dx = \int_{\mathbb{Z}} f'\varphi dx.$$

При помощи указанной формулы (55) можно найти обобщенную производную **любой** кусочно-непрерывной функции $f(x)$. Это обобщение оказывается полезным во многих вопросах. и позволяет, например, обосновать законность почленного дифференцирования равномерно сходящегося ряда, члены которого являются монотонными непрерывными функциями (теорема Фубини). В качестве другого примера найдем производную ступенчаиой функции:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; F_1(\varphi) = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Таким образом, несмотря на очевидные трудности с обычной производной, соответствующий функционал $F_1 : \; \varphi \mapsto \varphi(0)$ решает задачу дифференцирования ступенчатой функции[12].

Один из вариантов многомерного аналога формулы (44), выражающей значения функции $f(x)$ через интеграл от ее производной f' основан на преобразовании Радона. В двумерном случае $N = 2$ интегрирование производится по прямым, параметризация которых задается следующим естественным способом:

$$x_1(t) = -t\sin\alpha + p\cos\alpha, \quad x_2(t) = t\cos\alpha + p\sin\alpha, \quad -\infty < t < \infty. \tag{56}$$

Здесь $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \; \sin\alpha)$ вектор единичной нормали к прямой, а число p фиксирует расстояние этой прямой $x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha -$

[12]этот функционал носит имя Дирака и обозначается $\delta(x)$

$p = 0$ от начала координат. Интегрируя, с учетом формулы (49), функцию $f(x),\ x \in \mathbb{Z}^2$ по прямым (56) находим

$$\check{f}(\alpha, p) := \int_{-\infty}^{\infty} f[x_1(t), x_2(t)]dt, \quad (\alpha, p) \in \mathbb{Z}^2. \tag{57}$$

Полученная таким образом новая функция, от двух независимых переменных, $\check{f}(\alpha, p)$ называется *преобразованием Радона* исходной функции $f = f(x_1, x_2)$.

Обращение преобразования Радона в $\mathbb{Z}^2$ основано на следующей лемме:

Лемма 2. *Пусть функция $f(x_1, x_2) = g(|x|)$ зависит только от расстояния $r = |x|$. Тогда*

$$f(0,0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\hat{g}'(p)}{p}dp, \quad \hat{g}(p) \stackrel{\text{def}}{=} 2\int_{|p|}^{\infty} \frac{g(r)rdr}{\sqrt{r^2 - p^2}} = \check{f}(\alpha, p). \tag{58}$$

◀ *Схема доказательства.* Формулы (56), (57) дают

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 = t^2 + p^2, \quad \check{f}(\alpha, p) = 2\int_0^{\infty} g(\sqrt{t^2 + p^2}\ )dt.$$

Заменив переменную интегрирования получаем последнюю из доказываемых формул (58). Обозначив $p^2 = z$ эту формулу можно записать, в виде интегрального уравнения типа свертки на плуоси $\mathbb{Z}_+$:

$$\int_z^{\infty} A(z' - z)u(z')dz' = h(z),\ z \geq 0, \quad u(z) = g(\sqrt{z}),\ h(z) = \hat{g}(\sqrt{z}) \tag{59}$$

Функция $h(z),\ z \geq 0$ здесь является заданной а $u(z),\ z \geq 0$- искомой. При $A(t) = 1/\sqrt{t}$ это интегральное уравнение Абеля решается явно и его решение записывается в виде

$$u(z) = \int_z^{\infty} B(z' - z)u(z')dz',$$

(см §4.* и последнюю из задач 2.1, ниже).▶

Формула (58), выражающая значение функции в нуле, через интеграл от производной ее преобразования Радона и, напоминающая в некотором смысле классическую формулу (44), имеет много приложений. Как происходит обобщение формулы (58) на случай функций $f(x_1, x_2)$ общего вида объясняется в книге [13], где обсуждаются и другие интересные вопросы, связанные с преобразованием Радона. Идея обобщения сводится к замене функции $f(x_1, x_2)$ ее "усреднением"

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$$

и исследованием простой связи их преобразований Радона.

Обсудим кратко преобразование Радона для функций трех независимых переменных. Интегрирование в этом случае производится по плоскостям в $\mathbb{Z}^3$. По аналогии с двумерным случаем мы фиксируем единичную нормаль $\omega \in \mathbb{Z}^3$ к плоскости, и записываем параметризацию плоскости $x\omega - p = 0,\ |\omega| = 1$ в следующем виде (ср. (56)):

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + p\omega, \quad a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot \omega = a_2 \cdot \omega = 0, \quad |a_j| = 1.$$

Другими словами, мы выбираем ортогональные к ω вектора a_1 и a_2 так, чтобы формула (49) была максимально простой $d\sigma = dt_1 dt_2$ и определяем *преобразование Радона в* $\mathbb{Z}^3$ следующей формулой[13]

$$\check{f}(\omega, p) = \int_{\mathbb{Z}^2} f[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]dt_1 dt_2. \tag{60}$$

Для функций $f(x) = g(|x|)$, зависящих только от расстояния $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ формула (60) и интегрирование в полярных координатах (см. пример 2.4) дают

$$\check{f}(\omega, p) = \int_{\mathbb{Z}^2} g(\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + p^2})\ dt_1 dt_2 = 2\pi \int_{|p|}^{\infty} g(r) r dr := \hat{g}(p).$$

[13]можно проверить, что это определение не зависит от конкретного выбора векторов a_1 и a_2

Дифференцируя интеграл с переменным нижним пределом, получаем

$$g(r) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\hat{g}'(r)}{r}, \quad f(0,0,0) = -\frac{1}{2\pi}\hat{g}''(0).$$

Интересно, что полученная формула обращения преобразования Радона в случае $\mathbb{Z}^3$ оказывается существенно проще чем в двумерном случае.

Замечание. Используя формулу $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ из §3.3 можно проверить, что решение φ интегрального уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a; \qquad 0 < \alpha < 1$$

определяется из соотношения

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Эта формула была получена Н.Абелем в 1823г.

Задачи 2.1.

1. Вычислить, перейдя в полярные координаты, следующий двумерный интеграл:

$$\int_{\mathbb{Z}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2.$$

2. Для отображения $f: \mathbb{Z}^N \mapsto \mathbb{Z}^{N'}$ непрерывно дифференцируемого в шаре $B = B(a,r)$, используя формулу конечных приращений (34), доказать, что

$$||f'(x)|| \le \lambda, \ x \in B \ \Rightarrow \ |f(\hat{x}) - f(x)| \le \lambda|\hat{x} - x|, \quad \hat{x}, \ x \in B.$$

3. Проверить, что вектора a_1, a_2 из формулы (48) лежат в касательной плоскости к поверхности $x = f(t_1, t_2)$ и выразить единичную нормаль к поверхности через эти вектора.

4. Интегрируя по частям при помощи формулы (45) вывести тождество Грина
$$\int_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega}(vu_n - uv_n)d\sigma$$
для произвольных гладких функций $u,\ v$ в $\mathbb{Z}^2$. Здесь $n = (n_1,\ n_2)$-единичная внешняя нормаль, $\partial_n = n_1D_1 + n_2D_2$ дифференцирование по направлению нормали и $\Delta = D_1^2 + D_2^2$-оператор Лапласа.

5. Проверить, что
$$\int_x^\infty A(x'-x)\left(\int_{x'}^\infty B(x''-x')u(x'')dx''\right)dx' =$$
$$\int_x^\infty C(x''-x)u(x'')dx'', \quad C(z) = \int_0^z A(z-z')B(z')dz'.$$

6. Пусть $\hat{f}(k) := \int_0^\infty f(x)e^{-kx}dx$, тогда для функции $C(x),\ x > 0$ из предыдущей задачи $\hat{C}(k) = \hat{A}(k)\hat{B}(k)$ (нужно доказать эту теорему о свертке).

2.3.Квадрики.

Кривые второго порядка в $\mathbb{Z}^2$, описывают многообразие решений следующего уравнения с вещественными коэффициентами:
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0. \qquad (61)$$
Эти кривые включают в себя, как известно, эллипс, гиперболу и параболу. Для определения типа кривой достаточно разложить квадратичную форму в уравнении (61) в произведение линейных сомножителей
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)(\beta_1x_1 + \beta_2x_2).$$
При $a_{11} \neq 0$ для этого нужно решить квадратное уравнение $a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0$, а при $a_{11} = 0$ один из сомножителей совпадает с x_2.

В случае вещественных корней $\lambda_1 \neq \lambda_2$ уравнение (61) записывается в виде

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta) = \gamma. \tag{62}$$

При $\gamma \neq 0$ эти сомножители определяют асимптоты соответствующих гипербол. Вырождение $\lambda_1 = \lambda_2$ затруднений не вызывает и приводит к параболам.

В случае комплексных корней $\lambda_1,\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ мы получаем:

$$(x_1 + \alpha x_2)(x_1 + \bar{\alpha} x_2) = (x_1 + \alpha_1 x_2)^2 + (\alpha_2 x_2)^2, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2.$$

Соответствующее уравнение (61), за счет подходящего выбора масштаба и сдвига начала координат в центр "фигуры" переписывается в виде

$$(x_1 + \varepsilon x_2)^2 + x_2^2 = \pm 1 \tag{63}$$

Отметим, что в случае -1 рассматриваемое уравнение (61) вообще не имеет решений. Случай 1 при $\varepsilon = 0$ приводит к окружности, а при $\varepsilon \neq 0$- к эллипсу.

В общем случае $\mathbb{Z}^N$ мы будем считать заданной *афинно-квадратичную* функцию

$$A(x) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c. \tag{64}$$

Отметим, что вид функции (64) определяется обращением в нуль всех производных третьего порядка от функции $A(x)$, точно также как афинно-линейные функции $f(x) = \sum c_i x_i + c_0$ соответствуют обращению в нуль вторых производных.

Определение 9. *Квадрикой* $X(A) \subset \mathbb{Z}^N$ называется геометрическое место точек в которых $A(x) = 0$.

Полагая $x = 0$ в формуле (64) мы получаем $A(0) = c$. Аналогичную интерпретацию допускают и остальные слагаемые этой формулы и, в силу 32, например , $A'(0) = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$. Очевидно, что все производные третьего порядка от функции $A(x)$ равны нулю тождественно и, таким образом, мы имеем.

Предложение 2. *Функция A $\mathbb{Z}^N \mapsto \mathbb{Z}$ является афинно-квадратичной в том и только в том случае, когда ее разложение Тейлора в окрестности любой точки $x = a$ обрывается на членах второго порядка, а матрица $A'' = (a_{ij})$, $a_{ij} := D_i D_j(A)$, составленная из вторых производных, является постоянной.*

Подстановка $x \to x + a$ в формулу (64) дает

$$A(a + x) = (A''x, x) + (x, b + 2A''a) + c + (b, a) + (A''a, a) \qquad (65)$$

где (. ,.) обозначает скалярное произведение в $\mathbb{Z}^N$. Эта формула показывает как меняются Тейлоровские коэффициенты при сдвиге начала отсчета в точку a. В частности, для того, чтобы коэффициенты не изменялись, нужно выполнение двух условий:

$$A''a = 0, \quad (b, a) = 0, \qquad (a \neq 0) \qquad (66)$$

При выполнении этих условий, число независимых переменных в формуле (64) можно уменьшить, переходом в подходящую систему координат, сделав a одним из векторов базиса. Соответствующие квадрики называются *цилиндрическими* (см. [1], §7.4).

Определение 10. Точка a называется *центром* квадрики $X(A) \subset \mathbb{Z}^N$, если $A(a + x) = A(a - x)$. Если при этом $A(a) = 0$, то точка a называется *вершиной* квадрики.

Из определения 10 следует, что тейлоровское разложение (65) функции $A(x)$ в окрестности центра не содержит линейных членов. При невырожденной матрице A'' положение центра a находится единственным образом из уравнения $A''a = -\frac{1}{2}b$. Нетрудно доказать, что любая прямая, проходящая через две точки a и b квадрики, полностью лежит на квадрике, если одна из них, например a, совпадает с вершиной квадрики $X(A)$. В силу задачи

2.15(N 2), достаточно для этого указать третью точку пересечения $b' = a - (b - a)$ прямой и квадрики.

Отметим, что в книге [1], §7.4 доказывается следующее существенное, с общей алгебраической точки зрения, утверждение:

Теорема 7. *Две различные афинно-квадратичные функции $A_1(x)$ и $A_2(x)$ определяют одну и ту же квадрику тогда и только тогда, когда они пропорциональны.*

В цитируемой выше книге Э.Винберга рассматривается также задача о классификации нецилиндрических квадрик, основанной на приведении симметричной матрицы A'' к диагональному виду ортогональными преобразованиями. Шесть различных квадрик в $\mathbb{Z}^3$ изображены там же на рис. 15.

Принцип максимума.

Рассмотрим вопрос об оценках гладких функций из $C^2(\Omega) \bigcap C^0(\bar{\Omega})$ через их граничные значения при помощи дифференциальных неравенств, включающих вторые произвольные (ср. §1.3). Напомним, что старшие производные функции $u(x),\ x \in \mathbb{Z}^N$ определяются как результат повторного дифференцирования первых производных (31) и таким образом, по определению, множество производных второго порядка $D^2(u)$ при $N = 2$ состоит из следующих четырех функций:

$$
\begin{gathered}
D_1^2(u) := D_1(D_1(u)), \quad D_1D_2(u) := D_1(D_2(u)), \\
D_2D_1(u) := D_2(D_1(u)), \quad D_2^2(u) := D_2(D_2(u))
\end{gathered}
$$

. Через $C^k(\Omega),\ k > 0$ обозначается множество функций непрерывных в области Ω вместе со всеми своими производными до порядка k.

Теорема 8. *Пусть $u \in C^2(\Omega)$. Тогда $D_i(D_ju) = D_j(D_iu)$.*

◀ Для простоты ограничимся двумерным случаем. Выберем в качестве области интегрирования произвольный прямоугольник

$A \subset \Omega$ с вершинами a, b, c, d идущими друг за другом против часовой стрелки. Применив дважды обобщенную формулу Ньютона-Лейбница (45), находим

$$\int_A D_1(D_2u)dx_1dx_2 = \int_b^c D_2udx_2 - \int_a^d D_2(u)\,dx_2 = u(c) - u(b) - u(d) + u(a),$$

$$\int_A D_2(D_1u)dx_1dx_2 = \int_d^c D_1udx_1 - \int_a^b D_1(u)\,dx_1 = u(c) - u(d) - u(b) + u(a).$$

В силу произвольности прямоугольника отсюда следует, что $D_1(D_2u) = D_2(D_1u)$ ►.

Рассматриваемые дифференциальные неравенства формулируются в терминах *дифференциального оператора* L второго порядка, удовлетворяющего следующему ослабленному условию *эллиптичности*:

$$L(u) := \sum_{ij} a_{ij}D_iD_j(u) + \sum_i b_iD_i(u), \quad \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \forall\, x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Коэффициенты оператора мы предполагаем непрерывными в замыкании рассматриваемой области и на его старшие коэффициенты a_{ij} накладывается условие невырожденности:

$$\lambda(x) = \max_{|\xi|^2=1} \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0 > 0. \tag{67}$$

При $N = 2$ типичными для приложений следующей теоремы примерами операторов вида (67) являются

$$L(u) = D_1^2(u) + D_2^2(u) \quad \text{и} \quad L(u) = D_1^2(u) + D_2(u).$$

Теорема 9. *Пусть функция* $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^0(\bar{\Omega})$, *где* Ω *ограниченная область в* $\mathbb{Z}^N$, *удовлетворяет в этой области дифференциальному неравенству* $L(u) \geq 0$, *(*$L(u) \leq 0$*), где оператор* L *удовлетворяет условиям* (67) *и* (67). *Тогда максимум (минимум) функции* u *в* $\bar{\Omega}$ *достигается на границе* $\partial\Omega$*:*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right). \tag{68}$$

◀ Заметим сначала, что при $L(u) > 0$ функция u не может иметь максимумов во внутренних точках Ω, так как в точке максимума $a \in \Omega$ должны выполняться условия (см. ниже лемма 3)

$$Du(a) = (D_1 u, \dots, D_N u)(a) = 0, \quad \sum_{ij} a_{ij}(x) D_i D_j u(a) \le 0. \quad (69)$$

Таким образом в этом случае максимум функции u в $\bar{\Omega}$ достигается на границе и выполняется условие (68). При $L(u) \ge 0$ введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$v_(x) = e^{\gamma(\xi,x)}, \quad L(v) = v(x)\left[\gamma^2 \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j + \gamma \sum_i b_i(x)\xi_i\right],$$

где вектор ξ, $|\xi| = 1$ выбран так, чтобы выполнялось неравенство (67). В силу непрерывности коэффициенты b_i ограничены в $\bar{\Omega}$ и, поэтому $L(v) > 0$ при достаточно большом γ. Для функции $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$ при любом $\varepsilon > 0$ выполняется равенство (68), т.к. $Lu_\varepsilon > 0$. Предельный переход $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u$ завершает доказательство теоремы в случае $L(u) \ge 0$. ▶.

Лемма 3. *Пусть функция $u(x)$, $x \in \mathbb{Z}^N$ имеет локальный максимум в нуле. Тогда $Du(0) = 0$, а квадратичная форма $U(x) = \sum u_{ij}x_ix_j$, $u_{ij} := D_iD_ju(0)$ удовлетворяет условию $U(x) \le 0$ и приводится ортогональным преобразованием $y = Ax$ к виду $U(x) = \sum \lambda_i y_i^2$.*

Эллиптические координаты. (Эйлер, 1760).

Рассмотрим семейство кривых второго порядка зависящее от параметра $\lambda \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{x_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - a_2} = 1, \quad a_1 < a_2.$$

При $a_1 < \lambda < a_2$ знаменатели в этой формуле имеют разный знак, а при $a_2 < \lambda$ оба положительны. Соответствующие кривые являются, соответственно, гиперболами и эллипсами.

Замечание. Известное геометрическое определение эллипса с фокусами $(-\alpha, 0)$ и $(\alpha, 0)$ дает:

$$\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2}+\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}=2\beta \ \Leftrightarrow\ x^2/a^2+y^2/b^2=1$$
$$a^2=\beta^2,\ b^2=\beta^2-\alpha^2.$$

"Эллиптические координаты" вводятся посредством следующего отображения полуполосы

$$a_1<\lambda_1<a_2<\lambda_2<\infty \tag{70}$$

в плоскости (λ_1, λ_2) на первый квадрант плоскости $(y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2)$:

$$x_1^2=\frac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)}{a_2-a_1},\quad x_2^2=\frac{(a_2-\lambda_1)(a_2-\lambda_2)}{a_1-a_2}. \tag{71}$$

Обратное отображение $(x_1, x_2) := \mathbf{x} \mapsto \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ сводится к решению квадратного уравнения

$$\lambda^2+p(\mathbf{x})\lambda+q(\mathbf{x})=0 \ \Leftrightarrow\ A(\lambda)=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)+x_1^2(a_2-\lambda)+x_2^2(a_1-\lambda)=0.$$

Корни (λ_1, λ_2) этого квадратного уравнения вещественны и удовлетворяют условиям (70), так как

$$\lambda=a_2 \ \Rightarrow\ A(a_2)=x_2^2(a_1-a_2)<0, \qquad \lambda=a_1 \ \Rightarrow\ A(a_1)=x_1^2(a_2-a_1)>0.$$

Остается заметить, что пара линейных уравнений $A(\lambda_1) = A(\lambda_2) = 0$ относительно $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2$ и формулы (71) эквивалентны.

Предложение 3. *Пусть $(x_1, x_2) = \mathbf{x}$ произвольная точка вещественной плоскости и (λ_1, λ_2) корни соответствующего квадратного уравнения $A(\lambda) = 0$. Тогда в точке $\mathbf{x}$, принадлежащей двум кривым,:*

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1-a_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_1-a_2}=1,\quad \textit{(гипербола)};\ \frac{x_1^2}{\lambda_2-a_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_2-a_2}=1,\quad \textit{(эллипс)}.$$

нормали к этим кривым ортогональны.

◀ Общая формула

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \;\Rightarrow\; dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0$$

показывает, что в качестве нормали можно брать вектор градиента соответствующей функции F. Скалярное произведение $< N_1, N_2 >$ нормалей к кривым (72) дает

$$< N_1, N_2 >= \frac{x_1^2}{(\lambda_1 - a_1)(\lambda_2 - a_1)} + \frac{x_2^2}{(\lambda_1 - a_2)(\lambda_2 - a_2)}.$$

Сравнение с разностью левых частей двух уравнений в формуле (72) доказывает что $< N_1, N_2 >= 0$. ▶

При фиксированном λ_2 и изменении λ_1 в интервале $a_1 < \lambda_1 < a_2$ переменные $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$ меняются на отрезке прямой, соответствующем части эллипса расположенной в первом квадранте.

Обобщение эллиптических координат на трехмерный случай и их приложение к задаче о геодезических на эллипсоиде можно считать одним из главных достижений Якоби:

$$\frac{x_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{x_3^2}{\lambda - a_3} = 1, \quad a_1 < \lambda_1 < a_2 < \lambda_2 < a_3 < \lambda_3 < \infty$$

Задачи 2.2.

1. Привести к каноническому виду уравнение эллипса $(x_1 + \varepsilon x_2)^2 + x_2^2 = 1$.

2. Доказать, что любая прямая в $\mathbb{Z}^N$, либо целиком принадлежит квадрике, либо имеет с ней не более двух точек пересечения.

3. Проверить, что билинейная симметричная функция $\alpha(x, y)$ в $\mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N$ и соответствующая ей квадратичная функция $q(x) =$

$\alpha(x, x)$ связаны формулой

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right],$$
$$\alpha(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j,$$
$$a_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$$

4. В обозначениях предыдущей задачи доказать, что максимум и минимум квадратичной функции $q(x)$ на единичной сфере $\sum x_i^2 = 1$ являются собственными значениями матрицы (a_{ij}).

5. Вывести и сравнить формулы для длины дуги эллипса, используя две различные параметризации этой кривой: 1) угловые координаты: $x = x(t) = (x_1(t) = a\cos t,\ x_2(t) = b\sin t),\ t \in [0, 2\pi)$, (см. [4], № 2453);
   2) эллиптические координаты (72).

§ 3. Комплексный анализ.

Определение 11. Гладкое отображение $f(\mathbf{x}) : \ \mathbb{Z}^\mathbf{2} \to \mathbb{Z}^\mathbf{2}$ называется *голоморфной функцией* в области $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$, если для любой точки $\mathbf{x^0} \in \boldsymbol{\Omega}$ в линейном приближении это отображение имеет следующий вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x^0}) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x^0}) + \cdots = \mathbf{f}(\mathbf{x^0}) + \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{z} - \mathbf{z^0}) + \ldots,$$
$$z = x_1 + ix_2, \quad z^0 = x_1^0 + ix_2^0.$$

Здесь 2×2 матрица $A = f'(\mathbf{x^0})$ (матрица Якоби) имеет специальный вид:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = a + ib. \tag{72}$$

и матричное произведение в левой части формулы соответствует умножению на комплексное число $a + ib \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} \in \mathbb{C}$. Произведение двух матриц (ср. (12)) указанного вида имеет ту же структуру

(72). Поэтому композиция голоморфных функций $f \circ g$ снова является голоморфной в силу теоремы о перемножении якобианов

$$(f \circ g)' = f' \times g', \quad f,\ g:\ \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2.$$

Теорема 10. *Коши-Римана. Условия голоморфности эквивалентны следующим уравнениям в частных производных*

$$f = u{+}iv, \quad f_x{+}if_y = 0, \quad u_x = v_y,\ u_y = -v_x\ \Rightarrow\ \Delta u \stackrel{\text{def}}{=} u_{xx}{+}u_{yy} = 0 \tag{73}$$

◀ Сравнив матрицу Якоби отображения $f(\mathbf{x})\ :\ \ \mathbb{Z}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{Z}^{\mathbf{2}}$ с матрицей (72) получаем

$$f' \equiv \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \blacktriangleright.$$

Нетрудно проверить (см. ниже (88), что вследствие уравнений (73) квадратичные члены формулы Тейлора также можно записать в виде перемножения комплексных чисел:

$$b_{11}(x_1{-}x_1^0)^2{+}2b_{12}(x_1{-}x_1^0)(x_2{-}x_2^0){+}b_{22}(x_2{-}x_2^0)^2 = (\alpha{+}i\beta)(z{-}z^0)^2.$$

3.1. Голоморфные отображения.

Изучение свойств, имеющего многочисленные приложения отображения $\mathbb{C} \ni z \to w \in \mathbb{C}$, задаваемого формулой

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0 \tag{74}$$

связано с именем Мобиуса (Mobius $\sim$ 1820). Частные случаи этой формулы определяют следующие три отображения называемые сдвигом, растяжением и инверсией, соответственно,:

$$w = z + z_0, \quad w = \lambda z, \quad wz = 1. \tag{75}$$

Нетрудно проверить, что композиция этих отображений порождает дробно-линейные отображения общего вида (74). Записав формулу (74) в более симметричном виде

$$(cw - a)(cz + d) = bc - ad, \quad c \neq 0,$$

отметим, что преобразование обратимо и, что обратная функция $z(w)$ представима в виде (74). В частном случае $c = 0$, мы имеем дело с обратимым преобразованием в $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad a_1 + ia_2 \stackrel{\text{def}}{=} a/d, \quad b_1 + ib_2 \stackrel{\text{def}}{=} b/d.$$

Для того чтобы построить дробно-линейное отображение (74) можно задать образы w_i, $i = 1, 2, 3$ трех точек z_i, $i = 1, 2, 3$ исходной плоскости z. Действительно, формула

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

при любом выборе $\alpha \in \mathbb{C}$ задает дробно-линейное отображение, переводящее точки z_i, $i = 1, 2$ в w_i, $i = 1, 2$. Подставив в эту формулу z_3 мы получаем уравнение для α:

$$\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \alpha \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Окончательную формулу можно теперь записать в следующем виде

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \tag{76}$$

Для того, чтобы убедиться в единственности полученного решения (76) можно было бы начать с вытекающей из (74), формулы:

$$\frac{w - w_1}{z - z_1} = \frac{ad - bc}{(cz + d)(cz_1 + d)},$$

и проверить далее, что

$$ad - bc = (w_1 - w_2)(w_1 - w_3)(w_2 - w_3)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3).$$

Заметив, что три точки на плоскости определяют окружность (или прямую) рассмотрим дробно-линейное отображение [14], переводящее единичный круг $B(0, 1)$ в себя. Пусть точка $z_1 = re^{i\alpha} \in$

[14] легко доказать, что окружность переходит в окружность или прямую при отображениях (75)

$B(0,1)$ переходит при этом отображении в начало координат. Введем в рассмотрение вторую точку z_2 "зеркально" симметричную z_1 относительно единичной окружности:

$$z_2 = \frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{r} e^{i\alpha}$$

и рассмотрим значения голоморфной функции

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} c, \quad c \in \mathbb{C}$$

на единичной окружности $z = e^{i\varphi}$. Имеем

$$|w| = |c||z - z_1|/|z - z_2|, \quad |z - z_1|^2 = 1 - 2r\cos(\varphi - \alpha) + r^2,$$
$$r^2|z - z_2|^2 = |z - z_1|^2$$

и, следовательно, искомое преобразование записывается в виде

$$w = e^{i\gamma} \frac{z - z_1}{z\bar{z}_1 - 1}, \quad |z_1| < 1 \tag{77}$$

3.1.1. Теорема Римана.

Одно из впечатляющих приложений теории аналитических функций связано с возможностью построения взаимно-однозначного отображения на единичный круг области, ограниченной произвольной замкнутой кривой Жордана

$$\mathbb{C} \ni \Gamma = \{w = w(z),\ z = e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi < 2\pi\}. \tag{78}$$

Ориентируясь на §2.1 мы будем обозначать ограниченную область с границей (78) через $\Omega = \Omega_i$. Обратное отображение задается при этом сходящимся в единичном круге $B = B(0,1)$ степенным рядом

$$w = f(z) = f_0 + \sum_1^\infty f_j z^j, \quad f_0 = f(0) \stackrel{\text{def}}{=} w_0 \in \Omega. \tag{79}$$

Нетрудно доказать, что, в силу голоморфности, образ единичного круга $\Omega' = f(B)$ является открытым и связным множеством и, что, из взаимной-однозначности отображения следует, что производная функции (79) не может иметь нулей внутри круга. Последнее условие ($f'(z) \neq 0$ при $|z| < 1$) не гарантирует единственность прообразов точек из области значений, т.к. является локальным условием, и *областью однолистности* голоморфной функции называют область в которой взаимно-однозначность отображения не нарушается. Взаимно-однозначные голоморфные отображения принято также называть *конформными*.

Теорема Римана утверждает, что для построения обратного к (79) отображения $z = g(w)$, $w \in \Omega$, $g(w_0) = 0$ достаточно рассмотреть задачу о максимуме функционала $|g'(w_0)|$, $w_0 = f(0)$ в классе ограниченных в области Ω, голоморфных функций $|g(w)| \leq 1$, удовлетворяющих в этой области дополнительному условию однолистности. Доказательство разрешимости этой вариационной задачи можно найти в учебниках (см., например, [15]). Там же можно найти доказательство единственности решения с точностью до тривиального сомножителя $\widetilde{g}(w) = e^{i\gamma} g(w)$ (ср. формулу (77)).

Замечание. Довольно сложным является вопрос о поведении решений, указанной выше вариационной задачи, на границе области однолистности Ω. В общем случае жордановой кривой (78) Каратеодори доказал непрерывность рассматриваемого решения в замыкании области Ω. Другими словами решение вариационной задачи Римана дает наряду с отображением соответствующих областей $\Omega \to B$, также некоторую специальную параметризацию исходной жордановой кривой (78). Можно доказать, что при этом для выделения единственного решения достаточно, в дополнение к условию $g(w_0) = 0$ задать образ $z_1 = g(w_1)$, $w_1 \in \Gamma$ одной из точек на границе рассматриваемой области. Из теоремы Каратеодори следует также, что обратное отображение $f: \ B \to \Omega$, представимое степенным рядом (79), непрерывно в замыкании круга $|z| \le 1$ и, что для теоремы единственности достаточно фиксировать значения этой функции $f(z_j) = w_j \in \Gamma, \ j = 1, \ 2, \ 3$ в трех произвольных точках окружности $|z| = 1$. Нужно однако при этом согласовать нумерацию и направление обхода на жордановой кривой (78)

$$w_1 \mapsto w_2 \mapsto w_3 \ \Leftrightarrow \ z_1 \mapsto z_2 \mapsto z_3$$

с направлением обхода единичной окружности. Обычно нумерация выбирается так, чтобы соответствующая область однолистности оставалась в обоих случаях слева при переходе от $i \to i+1$.

Для практических целей при построении отображений часто оказывается удобней использовать вместо единичного круга верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Дробно-линейные отображения, связывающие эту "каноническую" область с единичным кругом $|w| < 1$ имеют следующий вид

$$w = \frac{z-i}{z+i} \ \Leftrightarrow \ z = i\frac{1+w}{1-w}, \qquad (w = 0 \quad \text{при} \quad z = i). \tag{80}$$

Точке $w = e^{i\varphi}$ единичной окружности отвечает здесь точка $z = x = -\operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\varphi)$ вещественной оси и при увеличении угла φ от нуля до π точки w и z пробегают, двигаясь в положительном направлении, верхнюю часть окружности и отрицательную полуось, соответственно. Рассматриваемые области остаются в обоих случаях слева от наблюдателя. При дальнейшем увеличении угла φ от π до 2π точки w и z пробегают, соответственно, нижнюю половину окружности и положительную полуось. Точка $w = 1$ находится при этом в однозначном соответствии с "точкой" $z = \infty$, в том смысле, что окрестности этих точек переходят друг в друга при дробно-линейных преобразованиях (80).

Пример 5. Для построения конформного отображения первого квадранта комплексной $w-$плоскости на верхнюю полуплоскость

$\operatorname{Im} z > 0$ используют степенную функцию $z = w^2$. Положительная полуось остается при этом на месте, а вертикальная полуось переходит в отрицательную часть вещественной оси. Аналогично строится конформное отображение произвольного угла с вершиной в начале координат на полуплоскость. В предельном случае функция $z = \sqrt{w}$ отображает $w-$плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси на верхнюю полуплоскость и при $z = \sqrt{|w|}e^{i\varphi/2}$ нижний берег этого разреза с $\varphi = 2\pi$ переходит в отрицательную часть вещественной оси плоскости z.

Пример 6. Показательная функция $w = e^z = e^x \cdot e^{iy}$ является периодической с периодом $2i\pi$ и выбрав в качестве области однолистности полосу $0 < y < 2\pi,\ y = \operatorname{Im} z$ мы находим, что образ полосы совпадает с $w-$плоскостью с разрезом вдоль положительной части вещественной оси. Вертикальные отрезки $0 < y < 2\pi,\ x = x_0$ переходят при этом в окружности радиуса $r = e^{x_0}$ с одной выброшенной точкой, а горизонтальные прямые $-\infty < x < \infty,\ y = y_0$ в лучи, выходящие из начала координат под углом $\varphi = y_0$ к вещественной оси. Другими словами при отображении $w = e^z$ декартова система координат преобразуется в полярную. Отметим, что производная показательной функции не имеет нулей в конечной части плоскости и, следовательно, рассматриваемое отображение локально обратимо.

Переход в теореме Римана к неограниченным областям требует использования наряду с обычными координатами комплексной плоскости координаты, связанные с ее бесконечно удаленной точкой. Объединив эти две системы координат, комплексную $z-$плоскость заменяют единичной сферой $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ и используют стереографическую проекцию:

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \quad x_1 + ix_2 = \frac{2z}{1 + z\bar{z}}. \tag{81}$$

Плоскость $\mathbb{C}$ с координатами $z = x+iy$ рассекает здесь единичную сферу S^2 по экватору, а точки $X = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ и $(x, y, 0) \in \mathbb{C}$, объемлющего трехмерного пространства, соединены лучом, выпущенным из северного полюса $X_0 = (0,0,1)$ сферы. Для вывода формул (52) нужно записать уравнение этого луча в виде

$$\xi = (1-t)X_0 + tX \Leftrightarrow \ \xi_1 = tx_1,\ \xi_2 = tx_2,\ \xi_3 = 1 - t + tx_3.$$

Полагая здесь $1/t = x_3 - 1$ мы находим точку пересечения луча с экватериальной плоскостью $\xi_3 = 0$, что дает первую из рассматриваемых формул. Пользуясь теперь уравнением единичной сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ мы получаем

$$z\bar{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1+x_3}{1-x_3},$$

откуда следует, что верхняя и нижняя полусферы проецируются, соответственно, на внешность и внутренность единичного круга $B = B(0,1) \subset \mathbb{C}$, и, что обратное преобразование имеет указанный в формуле (52) вид. Северный полюс $(0,0,1)$ заменяет теперь бесконечно удаленную точку $z-$плоскости. Отметим еще, что противоположная точка сферы $-(x_1, x_2, x_3)$ проектируется в точку $-1/\bar{z}$ и, что специальным дробно-линейным преобразованиям плоскости $\mathbb{C}$ с матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \ \Rightarrow \ w = \frac{az+b}{-\bar{b}z + \bar{a}} \qquad (82)$$

соответствуют вращения сферы S^2. При $b = 0$ ось вращения соединяет полюса сферы, а при $b \neq 0$ проходит через две неподвижные точки преобразовния (82), которые являются корнями квадратного уравнения $(a - bz)(\bar{a} + bz) = 1$.

3.2. Задача Дирихле.

Определение 12. Однородными гармоническими многочленами степени n называются вещественная и мнимая части голоморфной (в силу "бинома Ньютона") функции z^n

При помощи гармонических многочленов можно решить следующую задачу для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{83}$$

в случае $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$. Переходя к полярным координатам

$$z = x + iy = re^{i\theta} \;\Rightarrow\; z^n = r^n e^{in\theta}$$

мы получаем 2π периодическую функцию $\varphi \circ e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{Z}$ заданную на вещественной оси. Гармонические многочлены на границе круга определяют таким образом "базис"

$$e^{int}, n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,\ t \in \mathbb{Z} \tag{84}$$

в пространстве 2π периодических функций. Линейная оболочка этих периодических функций порождает пространство функций представимых в виде (ряды Фурье):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \;\Rightarrow\; c_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad (c_{-n} = \overline{c_n}) \tag{85}$$

Рассматривая гладкие функции и интегрируя по частям получаем

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right| = \frac{1}{n^2}\left|\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}dt\right| \le \frac{\text{const}}{n^2}.$$

Ряд Фурье гладкой 2π периодической функции $f(t)$ сходится и в случае $c_{-n} = \bar{c}_n$ мы имеем

$$f(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{-\infty}^{1} c_n e^{int} = c_0 + 2\,\mathrm{Re}\sum_1^{\infty} c_n e^{int}$$

Легко проверить теперь, что степенной ряд,

$$u(x,y) = c_0 + 2\,\mathrm{Re}\sum_1^{\infty} c_n z^n, \quad |z| \le 1, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)e^{-in\theta}d\theta \tag{86}$$

дает решение задачи (83). Действительно...

В случае $\Omega = B(0,R) = \{x^2+y^2 < R^2\}$ формула для c_n содержит в знаменателе степень радиуса R. Отсюда следует самым непосредственным образом **Теорема** сформулированная Лиувиллем и доказанная сразу после этого Коши.

гармоническая функция в $\mathbb{Z}^2$ постоянна, если она ограничена.

Следствием полученной формулы (86) является также **Теорема о среднем:**

$$u(0,0) = \frac{1}{r^2\pi}\int_{B(0,r)} u(x,y)dxdy.$$

Из этой очень интересной теоремы в свою очередь следует принцип максимума который гласит:
если гармоническая функция достигает максимума во внутренней точке, то она постоянна.

Единственность решения задачи (83) следует из принципа максимума...

Теорема о полноте системы функций (84), *использованная ??* при выводе формулы (86), доказана будет в следующем разделе §3. На языке обобщенных функций это доказательство сводится к проверке короткой формулы:

$$D_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} e^{ikx} \;\Rightarrow\; \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)f(x)dx \to f(0), \quad n\to\infty. \quad (87)$$

Замечание. Естественно переписать формулу (86) в следующем виде

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = c_0 + 2\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

. Учитывая простые уравнения (73), связывающие функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ мы видим, что задача Дирихле позволяет восстановить голоморфную функцию по известным значениям ее вещественной части на границе области определения. Другой пример:

уравнение Лапласа в полярных координатах дает

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0 \;\Rightarrow\; u = \ln r \quad v(x,y) = ...$$

Замечание. Уравнение Лапласа описывает установившееся распределение температур и задача Дирихле (83) позволяет найти распределение тепла в помещении, если известно положение печки. Фурье начинал при этом не с круга, а с прямоугольника. Роль гармонических полиномов в этом "помещении" играют вещественная и мнимая части показательной функции $f(z) = e^{\lambda(x+iy)}$ при подходящем выборе λ (нужно не забывать об ортогональности и полноте см. §3).

3.3. Интегралы типа Коши. Теория вычетов.

Исходя из представления комплексных чисел матрицами (12) мы выбрали в качестве исходного (понятного и "химику") определения голоморфных функций $f(\mathbf{x}) :\ \mathbb{Z}^\mathbf{2} \to \mathbb{Z}^\mathbf{2}$ **Опр. 1**, которое сводится к условиям Коши-Римана (73).

В силу Замечания 1 выше, следующее представление голоморфных в круге $B(0,R)$ радиуса R функций является следствием (86):

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n, \quad z \in B(0,R), \quad c_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z)|_{z=0}, \qquad (88)$$

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y).$$

Это приводит нас к **Опр. 2**, использованному нами ранее для определения показательной функции:

$\boxed{\textit{функция } f(z),\ z \in \mathbb{Z}^2 \textit{ голоморфна, если ее ряд Тейлора}}$

$\boxed{\text{можно записать в виде (88)}}$

Это определение представляется достаточно удобным. Его легко запомнить и оно позволяет использовать весь накопленный нами опыт обращения с функциями одной переменной и их рядами Тейлора.

Используя новое определение можно теперь ввести в рассмотрение также *первообразную*, которая строится посредством "обычного интегрирования" ряда (88). Эта первообразная, вместе с Формулой Ньютона-Лейбница [15] приводят нас теперь к третьему определению (для физиков-теоретиков) голоморфности:

функция $f(z),\ z \in \Omega$ голоморфна в области Ω, если равен нулю интеграл:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0, \quad z = z(t), \quad dz = z'(t)dt = (x'(t) + iy'(t))dt. \quad (89)$$

по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана Γ, целиком лежащей в Ω (вместе с подобластью ею ограниченной).

◀ Для доказательства (89) можно выразить $x'(t)$ и $y'(t)$ через компоненты нормали $N = (y'(t), -x'(t))$ и свести интеграл по контуру Γ к интегралу по области ограниченной Γ, пользуясь обобщенной формулой Ньютона-Лейбница. ▶

На этом *критерии голоморфности* основана теория многозначных функций, и важное понятие аналитического продолжения. Причина многозначности видна на примере функции $\log(z)$, для нахождения значения которой при комплексных значениях z требуется вычисление интеграла от dz/z. По определению полагаем

$$\log(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{but one has to notice that} \quad (90)$$

$$\int_{\partial\Omega} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & z_0 \in \Omega,\ n \neq -1,\ (z_0 \notin \Omega) \\ 2\ i\pi, & n = -1, z_0 \in \Omega \end{cases}$$

Таким образом, начиная с $\log(z) = 0,\ z = 1$ при обходе точки $z = 0$ значение $\log(z)$ в той же точке $z = 1$ приобретает допол-

[15]заметим, что в формуле (45) в рассматриваемом случае $ds = |x'(t) + iy'(t)|dt$

нительно к исходному значению $\pm 2i\pi$. Хотелось бы кратко обсудить свойства так определенной функции $\log(z)$. Во-первых, при вещественном $z = x$ дифференцирование интеграла по верхнему пределу дает:

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \text{монотонность при } x \in \mathbb{Z}$$

Равенство нулю интеграла (89) носит название *Теоремы Коши.* Рассмотрим многочисленные приложения этой теоремы. Во первых, для голоморфной в области Ω функции $f(z)$ Теорема Коши и формула (90) дают

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}dz, \quad a \in \Omega. \tag{91}$$

Действительно, обозначим через Ω' область Ω с вырезанным кружком $B(a,r)$ радиуса r с центром в точке a. Функция $\varphi(z) = (z-a)^{-1}f(z)$ голоморфна в области Ω' и Теорема Коши дает:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}dz + \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0 \tag{92}$$

Остается вспомнить формулу (90), в силу которой

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a}dz = \pm 2i\pi f(a), \tag{93}$$

в зависимости от направления обхода границы круга $B(a,r)$. Заменив второй из интегралов в формуле (92) на (93) мы получаем очевидно (91).

Интеграл (91) позволяет существенно расширить область применимости формулы Тейлора (88).

Теорема 11. *Голоморфная в кольце $R_1 < |z| < R_2$ функция $f(z)$ представима в виде сходящегося* ряда Лорана*:*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad R_1 < |z| < R_2. \tag{94}$$

Коэффициенты этого ряда однозначно определяются функцией $f(z)$.

◀ Для доказательства теоремы сузим кольцо $R_1 < |z| < R_2$ и применим формулу (91) к области $\Omega = \{\rho_1 < |z| < \rho_2$, где $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=\rho_1} \frac{f(t)}{z-t} dt + \frac{1}{2i\pi} \int_{|\tau|=\rho_2} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \rho_1 < |z| < \rho_2. \tag{95}$$

Подинтегральные выражения представимы в виде следующих сходящихся степенных рядов

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-t/z} = \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{t^j}{z^j}\right),$$

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - z/\tau} = \frac{1}{\tau} \left(1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{z^k}{\tau^k}\right), \quad \rho_1 < |z| < \rho_2.$$

▶

При $R_1 = 0$ мы имеем функцию с изолированной особенностью (особая точка). Теорема 3.2 приводит к следующей классификации таких особых точек голоморфных функций:
особенность называется *полюсом*, если ряд Лорана обрывается и $c_n = 0$ при $n \simeq -\infty$. В противном случае особенность называется *существенной*. Если ряд Лорана обрывается в обоих направлениях, рассматриваемая функция является рациональной. Вообще говоря, изолированные особенности могут иметь точки накопления; для мероморфных функций (отношение целых) это запрещено.

Задача о скачке.

Сопоставление полученной формулы (91), известной под названием “интеграл Коши”, с полученным ранее решением задачи Дирихле в круге (см. выше Замечание) 1) приводит нас к вопросу о том какую задачу решает интеграл Коши при произвольной функции $f(z)$ под знаком интеграла. Точнее
Пусть Γ замкнутая жорданова кривая и Ω_i (Ω_e) обозначают внутреннюю (внешнюю) области на которые она разделяет плоскость. Рассмотрим значения интеграла в каждой из этих областей:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} \Phi_i(z), & z \in \Omega_i \\ \Phi_e(z), & z \in \Omega_e \end{cases} . \tag{96}$$

Теорема 12. *Пусть на гладкой жордановой кривой* Γ *задана произвольная непрерывная с ненулевым показателем Гельдера функция* $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma),\ \alpha > 0$. *Тогда интеграл типа Коши* (96) *дает решение задачи о паре голоморфных функций* $\Phi_i \in C(\bar\Omega_i)$ *и, соответственно* $\Phi_e \in C(\bar\Omega_e)$ *таких, что*

$$\Phi_i(\zeta) - \Phi_e(\zeta) = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad \Phi_e(\infty) = 0. \tag{97}$$

Решение этой задачи единственно.

Аналитичность функций Φ_i и, соответственно, Φ_e в соответствующих областях следует из законности дифференцирования под знаком интеграла в формуле (96) и первого из определений голоморфности. Детальное обсуждение вопросов связанных с поведением этих функций при подходе к точкам кривой Γ можно найти в широко известной (включая Северный Кавказ) книге Гахова,[16] "Краевые задачи." Для доказательства единственности решения задачи о скачке нужно рассмотреть разность двух решений, предполагаемых различными и применить теорему Лиувилля. Голоморфность этой разности в окрестности кривой Γ доказывается ссылкой на третье определение.

[16]Федор Дм. Гахов жил и работал в Черкесске, Казани и Ростове.

Замечание. В случае $\Omega_i = \{x^2 + y^2 < 1\}$ для решения задачи (97) достаточно разложить, заданную на единичной окружности гладкую функцию φ в ряд Фурье:

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{-\infty}^{1} c_n e^{int} \Rightarrow \Phi_i(z) = c_0 + \sum_{\infty}^{1} c_n z^n,$$

$$\Phi_e(z) = -\sum_{-\infty}^{1} c_n z^n.$$

Однако, в отличие от задачи Дирихле, вид (96) решения задачи (97) не зависит от выбора кривой Γ и, на первый взгляд, задача о скачке кажется существенно проще чем задача Дирихле. Тем не менее и та и другая задачи одинаковы важны с точки зрения их многообразных приложений. Аналогом интеграла (96) типа Коши для гармонических функций является следующий интеграл по кривой Γ

$$\int_\Gamma \log|\zeta - z|\varphi(\zeta)dS_\zeta = \begin{cases} \Phi_i(z), & z \in \Omega_i \\ \Phi_e(z), & z \in \Omega_e \end{cases},$$

носящий название потенциала простого слоя.

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \quad \text{число нулей функции } f(z), \quad z \in \Omega$$

Много интересных интегралов вычислено при помощи теории вычетов в Титчмарше.

3.4. Гамма-функция Эйлера.

При изучении гамма-функции мы будем исходить из, восходящего к Эйлеру, определения $\Gamma(x)$ в виде следующего интеграла:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \ x > 0 \tag{98}$$

Интегрируя по частям при помощи формулы

$$\frac{d}{dt}t^x = \frac{d}{dt}e^{x\log t} = \frac{x}{t}t^x = xt^{x-1}$$

мы получаем функциональное уравнение $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Так как $\Gamma(1) = 1$ отсюда следует, что $\Gamma(n) = (n-1)!$. Само по себе функциональное уравнение $f(x+1) = xf(x)$, позволяет, однако, произвольно менять значения функции на отрезке $0 < x \leq 1$. Покажем, следуя [6], что задача об интерполяции целочисленной функции $f(n) = (n-1)!$, удовлетворяющей рассматриваемому функциональному уравнению, решается однозначно при дополнительном требование логарифмической выпуклости (см. определение 1.6).

Лемма 4. *Пусть вещественная, логарифмически выпуклая функция $f(x)$, гладкая на полуоси $0 < x < \infty$, удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+1) = xf(x)$, $f(1) = 1$. Тогда*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x), \quad \Gamma_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad 0 < x \leq 1 \tag{99}$$

◀ Функциональное уравнение позволяет позволяет вычислить функцию $f(x)$ при всех $x > 0$ по известным ее значениям на полуинтервале $0 < x \leq 1$:

$$f(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)xf(x) \ \Rightarrow\ f(n) = (n-1)! \quad n = 2,\, 3, \ldots$$

Условие логарифмической выпуклости и формула (27) дают при $2 \leq n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{-1} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{x} \leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{1},$$
$$0 < x \leq 1,$$

или, что тоже самое,

$$x\log(n-1) + \log(n-1)! \leq \log f(x+n) \leq x\log n + \log(n-1)!.$$

Окончательно, используя приведенную выше формулу для $f(x+n)$, получаем

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(x+n-1)\cdots(x+1)x} \le f(x) \le \frac{n^x(n-1)!}{(x+n-1)\cdots(x+1)x}, \quad 0 < x \le 1.$$

Учитывая, что рассматриваемая функция $f(x)$ не зависит от нашего выбора числа n, мы, заменив в левой части полученного неравенства n на $n+1$, перепишем его в виде

$$\Gamma_n(x) \le f(x) \le \frac{x+n}{n}\,\Gamma_n(x).$$

Отсюда следует утверждение леммы.▶

Теорема 13. *Функция* $1/\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$ *является целой аналитической функцией комплексного переменного и допускает следующее представление:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}(1+\frac{z}{j})e^{-z/j},\ \gamma = \Gamma'(1)\ \Rightarrow\ \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(z+j)^2} = (\log\Gamma(z))''. \tag{100}$$

Сокращенное доказательство. Справедливость первой из формул (100) на полуинтервале $0 < x \le 1$ следует из леммы 4 и логарифмической выпуклости интеграла (98), определяющего гамма-функцию (ср. формулу (30)). Нужно при этом заменить $\log n$ в формуле (99) $e^{x\log n} = n^x$, используя сходящуюся к $\log n$ последовательность (9):

$$\sum_1^n \frac{1}{k} - \log n \to \gamma > 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

После этого формула для $\Gamma_n(z)$ принимает следующий вид

$$\Gamma_n(z) = \exp[\,z(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n})\,]\,\frac{1}{z}\cdot\frac{e^{\frac{z}{1}}}{1+\frac{z}{1}}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+\frac{z}{2}}\cdots\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}}. \tag{101}$$

Вопросы сходимости бесконечного произведения при комплексных значениях z и обоснование законности дифференцирования полученной формулы для $1/\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$ проблем не вызывают (см. [3]). ►

Рассмотрим теперь связь гамма-функции с так называемым интегралом Эйлера:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > 0,\ y > 0,$$

который называют также бета-функцией. Заменив x на $x+1$, мы получаем, как и в случае (98), функциональное уравнение

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y), \quad B(1,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}dt = \frac{1}{y}\,. \tag{102}$$

Для интегрирования по частям можно воспользоваться в данном случае формулой

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t)^y t^x\right] = \frac{d}{dt}\left[(1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right] =$$
$$-(x+y)(1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x + \frac{x}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}(1-t)^{x+y}.$$

Теорема 14. *При $x,\ y > 0$ справедлива следующая формула Эйлера*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{103}$$

◄ Бета-функция $B(x,y)$ и $\Gamma(x+y)$ являются при фиксированном $y > 0$ логарифмически выпуклыми функциями по переменной x (см. формулу (30)). Их произведение также обладает этим свойством и, применив формулу (102), мы находим

$$f(x) = B(x,y)\Gamma(x+y) \ \Rightarrow\ f(x+1) = x\, f(x), \quad f(1) = \Gamma(y).$$

Из доказательства леммы 4 следует, что логарифмически выпуклая функция $f(x)$ определяется этими условиями однозначно. Отсюда следует справедливость формулы Эйлера (103) при $0 < x \leq 1$. Для продолжения формулы на другие значения $x > 0$ можно использовать функциональное уравнение (102).▶

Опираясь на лемму 4 нетрудно также получить формулу Лежандра:

$$\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}) = \sqrt{\pi}\ 2^{1-x}\ \Gamma(x), \quad x > 0. \tag{104}$$

Действительно, для логарифмически выпуклой функции $f(x) = 2^x\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2})$, имеем

$$f(x+1) = 2^{x+1}\Gamma(\frac{x+1}{2})\Gamma(\frac{x}{2}+1) = xf(x) \ \Rightarrow\ f(x) = f(1)\Gamma(x).$$

Для доказательства формулы (104) таким образом, остается воспользоваться равенством $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, (см. задачу 3, ниже), позволяющим вычислять значения гамма-функции при полуцелых значениях аргумента.

В качестве приложения теоремы 13 к теории целых функций отметим, что из формулы Вейерштрасса (100) следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{1}{\Gamma(-z)} = -z^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}).$$

Учитывая равенство

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) \tag{105}$$

полученную формулу можно переписать в следующем виде

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{z\ \pi}{\sin(z\ \pi)}.$$

Задачи 3.1.

1. Проверить непосредственно, что уравнение окружности инвариантно относительно дробно-линейных отображений (75).
2. Выбрав подходящим образом точки z_j и w_j в формуле (74), найти общий вид дробно-линейного отображения круга $B(0,1)$ на верхнюю полуплоскость.
3. Пусть отображение $z \mapsto w = p + iq$ удовлетворяет условию *квазиконформности*:
$$p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \le 2K(p_x q_y - p_y q_x), \quad K \ge 1$$
Доказать, что при $K = 1$ выполняются условия $p_x = q_y,\ p_y = -q_x$.
4. Вычислить $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, используя тригонометрическую форму интеграла Эйлера
$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2x-1}(\cos\varphi)^{2y-1} d\varphi, \quad (t = \sin^2\varphi).$$
5. Найти сумму ряда $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+j)^2}$.

§ 4. Ряды Фурье.

Для иллюстрации общей идеи использования условий ортогональности обратимся к линейной алгебре и рассмотрим систему n уравнений относительно n компонент вектора $x = (x_1, x_2, \ldots,\ x_n) \in \mathbb{Z}^n$:
$$(a_1, x) = \beta_1, \quad (a_2, x) = \beta_2, \quad \ldots \quad, (a_n, x) = \beta_n.$$
Здесь $(a, x) := \sum a_j x_j$ обозначает скалярное произведение в *евклидовом* [17] пространстве $\mathbb{Z}^n$, а вектора $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}),\ i =$

[17] в эрмитовом случае [1] роль скалярного произведения в $\mathbb{C}^n$ играет $(a, x) : = \sum a_j \bar{x}_j$

$1, 2, \ldots, n$, задают строки матрицы $A = (a_{ij})$ коэффициентов рассматриваемой линейной алгебраической системы уравнений. Если эти вектора удовлетворяют условиям взаимной ортогональности:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}) = 0, \quad i_1 \neq i_2, \tag{106}$$

то, представив искомый вектор x в виде $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$ мы находим коэффициенты $\alpha_j = \beta_j / (a_j, a_j)$ этого ортогонального разложения, минуя трудоемкую процедуру вычисления обратной матрицы A^{-1}.

Замечание. Если условие (106) не выполняется для данной системы a_i из n линейно независимых векторов в $\mathbb{Z}^n$, то ее нужно заменить ортогональной системой векторов следующего вида (ортогонализация Грама-Шмидта):

$$a_1' = a_1, \;\; a_2' = a_2 + \beta_{21} a_1', \;\; a_3' = a_3 + \beta_{31} a_1' + \beta_{32} a_2', \; \ldots \;, \; a_n' = a_n + \sum_{i<n} \beta_{ni} a_i'.$$

Элементы треугольной матрицы (β_{ki}) последовательно определяются при этом условиями ортогональности:

$$0 = (a_1', a_2') = (a_1', a_2) + \beta_{21}(a_1', a_1'), \quad 0 = (a_1', a_3') = (a_1', a_3) + \beta_{31}(a_1', a_1'), \ldots$$

4.1. Вопросы сходимости.

Вопрос о выборе ортогонального базиса из экспонент $e^{i\lambda x}, \; \lambda \in \mathbb{Z}$ в бесконечномерном пространстве функций $f(x), \; x \in \mathbb{Z}$ не имеет однозначного решения и ряды Фурье являются здесь лишь простейшим, но важным с разных точек зрения, вариантом. Как правило функции предполагаются далее *кусочно-непрерывными*, что гарантирует их интегрируемость (по Риману). Кусочная непрерывность означает для любого ограниченного интервала вещественной оси, существование конечного разбиения на подотрезках которого функция является непрерывной. Роль скалярного произведения $(f, \; g)$ играет теперь интеграл по конечному или бесконечному интервалу вещественной оси:

$$(f,\ g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\bar{g}(x)dx. \tag{107}$$

Полагая $g(x) = \exp ix\lambda$ мы формулируем следующее утверждение довольно общего характера:

Теорема 15. *Римана-Лебега. Преобразование Фурье* $\hat{f}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{Z}$ *интегрируемой функции* $f \in L^1(\mathbb{Z})$ *является непрерывной функцией* λ *стремящейся к нулю на бесконечности:*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)e^{-ix\lambda}dx \to\ 0, \quad |\lambda| \to \infty. \tag{108}$$

◀ Сокращенное доказательство. Для характеристической функции отрезка $f(x) = 1,\ a \le x \le b$ утверждение теоремы следует из явной формулы

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b} e^{-ix\lambda}dx = \frac{i(1-e^{i\lambda(b-a)})}{2\pi\lambda}e^{-i\lambda b}$$

Для кусочно-непрерывных функций рассматриваемых на конечном отрезке, возможность приближения кусочно-постоянными доказывается в анализе ссылкой на понятие равномерной непрерывности.▶

Замечание. Функция e^{-kx^2} обладает рядом замечательных свойств (ср. [3], т.2, стр.555). В частности, в квантовой механике, оказываются важными ее дифференциальные свойства:

$$f(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2) \ \Rightarrow\ f'(x) = -xf(x), \quad (Lf = 2f,\ L := x^2 - D^2)$$

Нетрудно доказать далее, используя указанное дифференциальное уравнение и интеграл, вычисленный в задаче 2.10.1 , что

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\lambda^2/2} \tag{109}$$

Очевидно это означает, что рассматриваемая функция инвариантна относительно преобразования Фурье.

В теории рядов Фурье функции предполагаются заданными на отрезке $[0,\ 2\pi]$ и продолженными посредством условия периодичности $f(x\pm 2\pi) = f(x)$ на всю ось[18]. В этом периодическом случае можно ограничиться, как будет сейчас показано, счетным набором экспонент и *коэффициентами Фурье* $\hat{f}_n = \hat{f}(n)$, задающими значения функции $\hat{f}(\lambda)$ только при целочисленных значениях аргумента. Вопрос сводится к доказательству сходимости, построенных таким образом тригонометрических многочленов к **исходной**, а не какой нибудь другой периодической функции $f(x)$:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad \widetilde{f}_n(x) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx} \ \Rightarrow\ \widetilde{f}_n(x) \to f(x).$$

Поменяв порядок интегрирования и суммирования получаем

$$\widetilde{f}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} e^{ikx}\int_0^{2\pi} f(x')e^{-ikx'}dx' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x')\sum_{-n}^{n} e^{ik(x-x')}dx' = \int_0^{2\pi} f(x')D_n(x-x')dx',$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(nt+t/2)}{sin(t/2)} \ \Rightarrow\ D_n(-t) = D_n(t).$$

Так как полученное *ядро Дирихле* $D_n(t)$ является, как и исходная функция, $2\pi-$периодической

$$\widetilde{f}_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x')D_n(x'-x)dx' = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x')D_n(x'-x)dx' = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt. \tag{110}$$

[18] при таком продолжении возникают разрывы в концах отрезка, если $f(2\pi) \neq f(0)$

Заметим еще, что

$$\lim_{t\to 0} D_n(t) = \frac{2n+1}{2\pi}, \quad \int_0^{2\pi} D_n(t)dt = 1.$$

Из Теоремы Римана-Лебега можно вывести

Лемма 5. *Пусть кусочно-непрерывная функция* $2\pi-$*периодическая функция* $f(x)$ *удовлетворяет в окрестности нуля условию* $|f(x) - f(0)| \le \mathrm{const}\,|x|$. *Тогда*

$$f(0) - \frac{1}{2\pi}\int f(t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int [f(0) - f(t)]D_n(t)dt \to\ 0 \quad \textit{при}\, n \to \infty$$

◀ Обозначим $\varphi(t) = f(0) - f(t)$, разобьем интеграл на три части и покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) \varphi(t)D_n(t)dt = 0.$$

При заданном $\varepsilon > 0$ выбором δ добиваемся сначала, чтобы средний интеграл не превосходил $\varepsilon/3$. Далее за счет выбора n_0, применив Теорему 3.2, добиваемся, чтобы крайние интегралы при $n > n_0$ допускали оценку $\varepsilon/3$.▶

Если $2\pi-$периодическая функция $f(x)$ является не только кусочно-непрерывной, но и обладает кусочно-непрерывной первой производной, то из Леммы 5 следует поточечная сходимость к $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, всюду за исключением конечного множества точек разрыва, тригонометрических многочленов (110).

При дальнейшем обсуждение поточечной сходимости рядов Фурье можно следовать [3], том 2, глава 18, §2 (стр. 630-632), см. тамже стр. 646-648 (изоперим. неравенство).

Более “прогрессивный” взгляд на ряды Фурье связан с расширением понятия интегрируемости и со следующей теоремой:

Теорема 16. *Преобразование Фурье сохраняет скалярное произведение* (107) *(и переводит свертку в произведение).*

В случае рядов Фурье эта теорема формулируется в виде равенства

$$\int_0^{2\pi} f(x)\bar{g}(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}\hat{f}_k\int_0^{2\pi} e^{ikx}\bar{g}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}\hat{f}_k\bar{\hat{g}}_k = \sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_k\bar{\hat{g}}_k. \tag{111}$$

Мы предполагали здесь для простоты, что периодические функции $f, g \in C^2_{2\pi}$. Это обеспечивает нужные для равномерной сходимости рядов Фурье оценки коэффициентов фурье $\hat{f}_k$ и $\hat{g}_k$. ►

Задача о наилучшем приближении обсуждается в учебнике Рудин (стр. 206-215). Парсеваль (1799) по-видимому был здесь одним из первых исследователей.

4.1. Метод разделения переменных.

Фурье (1822) разработал достаточно общую схему разделения переменных. Рассмотрим для начала задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0; \quad u\big|_{t=0} = f(x), \tag{112}$$

предполагая, что функция $f(x)$ приближается суммой периодических функций, но период у разных функций разный. Очевидно

$$f(x) = e^{ix\xi},\ u(x,t) = e^{ix\xi}T(t)\ \Rightarrow\ \dot{T} = -\xi^2 T; \quad u(x,t) = e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{i\alpha x}e^{i\beta x}dx \to\ 0, \quad (b-a)\to\infty.$$

Используя наводящие соображения и формулу (109) из замечания 4.3 мы приходим к классическому представлению решений задачи Коши (112) для уравнения теплопроводности:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)f(y)dy, \quad K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t\pi}}\exp(\frac{-x^2}{4t}). \tag{113}$$

Для его обоснования достаточно доказать следующее общее утверждение

Лемма 6. *Пусть неотрицательная функция* $K(x,t), \ x \in \mathbb{Z}, \ t > 0$ *удовлетворяет при любом* $\varepsilon > 0$ *условиям:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dx = 1, \quad \lim_{t\to 0}\int_{|x|> \ \varepsilon} K(x,t)dx = 0.$$

Тогда для любой кусочно непрерывной и ограниченной на всей прямой функции $f(x), \ x \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)f(x)dx = f(0),$$

если функция $f(x)$ *непрерывна в точке* $x = 0$.

◀

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)f(x)dx - f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)[f(x) - f(0)]dx =$$
$$\int_{|x|> \ \varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots$$

▶

Таким образом мы получили

Теорема 17. *Пусть функция* $f(x), \ x \in \mathbb{Z}$ *удовлетворяет условиям леммы 6. Тогда формула* (113) *дает решение задачи Коши* (112) *и*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

В оригинальной работе 1822 года Фурье, применил метод разделение переменных к уравнению теплопроводности на отрезке $[0,b]$ (можно думать, что это “стержень”):

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < b; \quad u = T(t)X(x) \ \Rightarrow \ \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda, \qquad (114)$$
$$u = \sum c_j \ e^{\lambda_j t} X_j(x)$$

Выбор собственных функций $X_j(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $X'' = \lambda X$, зависит от краевых условий в точках $x = 0$ и $x = b$. Нетрудно проверить, что при нулевых краевых условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=b} = 0 \Rightarrow \text{ собственные значения } \lambda_j < 0 \quad \text{и} \quad \int_0^b X_j(x)X_k(x)dx = 0.$$

Ортогональность собственных функций X_j позволяет, при заданных начальных условиях, найти коэффициенты Фурье c_j в формуле (114). Как отмечал и сам Фурье, в такой формулировке метод разделения переменных применим к достаточно широкому кругу задач. К этому кругу задач несомненно относится и рассмотренная ранее задача Дирихле в круге (см. (86)) для уравнения Лапласа.

Задачи. 4.1.

1. Применить ортогонализацию Грама-Шмидта к последовательности функций $1,\ x,\ x^2,\ x^3$, используя в качестве скалярного произведения (f, g) интеграл $\int_0^a f(x)g(x)dx$.
2. Проверить, что
$$\sum_1^\infty \frac{sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$$
3. Вывести из формулы (109) следующее тождество
$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{Z}^N} \exp(-\alpha|x|^2)e^{i(y,x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(\frac{-|y|^2}{4\alpha}\right).$$

§ 5. Приложения.

5.1. Элементы спектральной теории.

Алгеброй A называется векторное пространство, на котором задана дополнительная операция умножения, т.е. билинейное отображение $A \times A \to A$ такое, что $a(bc) = (ab)c$. Нормированная алгебра снабжается: $||\cdot||$ такой что $||ab|| \le ||a||||b||$. Непрерывность умножения в такой алгебре следует из неравенства:

$$||ab - a'b'|| \le ||a||\ ||b - b'|| + ||a - a'||\ ||b'||.$$

Если в A есть единица 1 (т.е. $a1 = 1a = a$), причем $||1|| = 1$, то алгебра называется унитальной. *Полная* нормир. алгебра называется банаховой. Алгеброй порожденной множеством $S \subset A$ называется пересечение всех подалгебр, содержащих S.

Пример 7. Пусть $X-$нормированное векторное пространство. Обозначим через $B(X)$ множество всех ограниченных линейных отображений (операторов) из X в себя и определим умножение формулой $(u, v) \to u \circ v$ а в качестве нормы выберем операторную норму:

$$||u|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||u(x)||}{||x||} = \sup_{||x|| \le 1} ||u(x)||$$

Пример 8. Элементами *дисковой алгебры* являются "скалярные"аналитические функции в единичном круге, непрерывные в его замыкании. Умножение и сложение в этой алгебре поточечные, а норма определяется как верхняя грань модуля.

Теорема 18. *Пусть A-унитальная банахова алгебра. Тогда множество Inv(A) открыто в A и отображение $a \to a^{-1}$ дифференцируемо на Inv(A). Если любой ненулевой элемент обратим, то $A = \mathbb{C}1$.*

◀ Пусть $\sigma(a) = \varnothing$. Тогда

$$|\lambda| \ge 2||a|| \Rightarrow ||(1-\lambda^{-1}a)^{-1}-1|| \le 2||\lambda^{-1}a|| < 1 \Rightarrow ||(a-\lambda)^{-1}|| < ||a||^{-1}...$$

▶

Определение 13. Гомоморфизмом алгебры A в алгебру B называется такое линейное отображение $\varphi : \ A \to B$, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (его ядро-идеал, а образ подалгебра). Гомоморфизм наз. унитальным, если унитальны алгебры A и B и $\varphi(1) = 1$.

Пример 9. Если $I-$ идеал в A, то факторотображение $\pi : \ A \to A/I$ является гомоморфизмом.

Рассмотрим унитальный гомоморфизм алгебры многочленов $\mathbb{C}[z] \to A$ при котором $A \ni a \to p(a)$.

Определение 14. Спектром элемента $a \in A$ наз. множество $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \big| \ \lambda 1 - a \notin \mathrm{Inv(A)}\}$.

Если $1 \notin A$ мы определяем $\sigma_A(a) := \sigma_{\widetilde{A}}(a)$, где $\widetilde{A}$ определено ниже (см. Задачи в конце раздела) .

Теорема 19. *Пусть a элемент унитальной алгебры A и* $\sigma(a) \neq \varnothing$. *Тогда* $p \in \mathbb{C}[z] \ \Rightarrow \ \sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. *Если A унит. банах. и* $||a|| < 1$, *то* $1 - a \in$ *Inv(A), причем*

$$(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \cdots = \sum_0^\infty a^n.$$

Определение 15. Линейный оператор $p : \ X \to X$ наз. идемпотентом, если $p^2 = p$. При этом $X = \mathrm{Ker}(p)A \bigoplus p(X)$

Пусть u линейное отображение векторного пространства X в Y. Линейное отображение $v : \ Y \to X$ наз. псевдообратным, если $u \circ v \circ u = u$...

Рассмотрим особые точки матрично-значной аналитической функции, так называемой *резольвенты* $R(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1}$, связанной с матрицей $A \in L_N(K)$. Иногда нам удобнее будет иметь дело с оператором $\hat{A}$, определяемым матрицей A. Напомним соответствующие формулы [1], pp 214...

Матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ линейного пространства V называется матрица $A = (a_{ij}) \in L_N(K)$

$$\hat{A}\ e_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} e_i \ \Leftrightarrow\ (\hat{A}e_1, \dots, \hat{A}e_N) = (e_1, \dots, e_N)A$$

При замене базиса матрица оператора $\hat{A}$ преобразуется следующим образом

$$(e'_1, \dots, e'_N) = (e_1, \dots, e_N)C \ \Rightarrow\ A' = C^{-1}A\ C$$

Нетрудно проверить, что при больших по модулю $\lambda \in \mathbb{C}$ резольвента $R(\lambda)$ представима в виде сходящегося степенного ряда по обратным степеням λ

$$R(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(E + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \dots\right), \quad |\lambda| > \rho. \quad (115)$$

Линейное подпространство $U \subset K^n$ наз. инвариантным относительно оператора $\hat{A}$, если $\hat{A}U \subset U$:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad (116)$$

Величина ρ называтся спектральным радиусом линейного оператора связанного с A. Нетрудно понять, что особенности, возникающих при аналитическом продолжении ряда (115) внутрь круга $B(0, \rho)$ связаны со спектром. Например, применив формулу (115) к собственному вектору матрицы A получаем

$$Ae = \mu e \ \Rightarrow\ R(\lambda)e = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \dots\right)e = \frac{1}{\lambda - \mu}e.$$

С другой стороны из формул линейной алгебры следует, что элементы рассматриваемой матрицы $R(\lambda)$ являются рациональными голоморфными функциями λ и, что полюса резольвенты совпадают с нулями *характеристического многочлена* матрицы A

$$\det R(\lambda) = \det(\lambda - A) = \lambda^N + \dots + (-1)^N \det A. \quad (117)$$

Напомним, что линейный оператор P в постранстве V называется проектором, если $P^2 = P$:

$$\mathrm{Ker}(E-P) = U, \quad \mathrm{Ker}(P) = W \;\Rightarrow\; V = U \bigoplus W, \quad P(u+v) = u.$$

При этом [2], p.157 $P+Q-$проектор, if $PQ = QP$.

Теорема 20. *Резольвента удовлетворяет матричному уравнению Риккати $R' + R^2 = 0$. Особые точки резольвенты являются полюсами. Вычеты в этих полюсах являются проекторами и в случае* общего положения, *когда нули характеристического многочлена* (117) *являются простыми*

$$R(\lambda) = \sum_1^N \frac{P_j}{\lambda - \lambda_j}, \quad P_j^2 = P_j, \quad P_j P_k = P_k P_j = 0\; (k \neq j), \quad \sum P_j = E.$$

◀ Докажем сначала, что значения резольвенты в различных точках перестановочны друг с другом. Из определения резольвенты имеем

$$(\lambda_1 - A)R(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - A)(\lambda_2 - A)^{-1} = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_2) + E.$$

Следовательно

$$\frac{R(\lambda_2) - R(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} = R(\lambda_2)R(\lambda_1) = R(\lambda_1)R(\lambda_2).$$

Переходя здесь к пределу получаем

$$\frac{dR}{d\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{R(\lambda+\varepsilon) - R(\lambda)}{\varepsilon} = -R(\lambda)^2 ... \qquad (118)$$

Подставив в полученное матричное уравнение Риккати (118) ряд Лорана убеждаемся, что "в случае общего положения" вычеты обладают свойствами проектора. ▶

$$ZR = E, \quad R' + R^2 = 0, \quad Z'R + ZR' = Z'R - ZR^2 = (Z' - E)R = 0,$$
$$Z' = E, \quad Z = \lambda - A.$$

Интересно отметить, что матричное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах:

$$\dot{J} = JA(t)J + B(tJ + JC(t) + D(t), \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} B & D \\ -A & -C \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad J = x_1 x_2^{-1}$$

Задачи. 5.1.

Проверить корректность следующих определений.

1. *Унитализация* $\widetilde{A}$ алгебры A опр. как вект. пр-во $\widetilde{A} = A \bigoplus \mathbb{C}$. При этом
$$(a, \lambda)(b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \ ||a + \lambda|| := ||a|| + |\lambda|.$$
2. Пусть I замкнутый идеал в нормированной алгебре A. Норма в факторалгебре A/I определяется формулой
$$||a + I|| = \inf_{b \in I} ||a + b||, \quad ((a + I)(a' + I) := aa' + I)\,.$$

5.2. Об одной интерполяционной задаче.

Рассмотрим задачу о построении регулярной на бесконечности рациональной функции $R(k)$:

$$R(k) = \frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_n}{k^n + b_1 k^{n-1} + b_2 k^{n-2} + \cdots + b_n}, \quad R(\infty) = 1 \tag{119}$$

с заданными значениями $R_j = R(k_j)$ в $2n$ различных точках $k = k_j$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Эта интерполяционная задача возникает в обратной спектральной задаче для одномерного оператора Шредингера $L = u(x) - D^2$, причем узлы интерполяции определяют собственные значения соответствующего оператора L. Учитывая эти приложения, будет предполагаться, что множество точек k_j, $j = 1, \ldots, 2n$ инвариантно относительно инволюции $k \to -k$ и, что выполняются условия

$$R(-k_j)R(k_j) = 1, \quad \forall\, k_j. \tag{120}$$

Решение задачи (119), (120) будем называть *симметричным*, если числитель и знаменатель рассматриваемой рациональной функции $R = P/Q$ связаны формулой $Q(k) = P(-k)(-1)^n$.

Пример 10. . При $n = 2$ решение (119) интерполяционной задачи является симметричным в том и только в том случае, если коэффициенты многочленов $P(k)$ и $Q(k)$ связаны соотношениями $a_1 + b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0$. С другой стороны, полагая $\alpha_1 = a_1 + b_1,\ \alpha_2 = a_2 - b_2$ мы находим, учитывая условия (120), что

$$\begin{cases} P(k_i) = R_i Q(k_i) \\ Q(-k_i) = R_i P(-k_i) \end{cases} \quad \Rightarrow \ \alpha_1(1-R_i)k_i + \alpha_2(1+R_i) = 0, \quad i = 1,\ 2.$$

Равенство нулю определителя этой системы линейных уравнений относительно $\alpha_1,\ \alpha_2$ дает

$$(R_1 + \varepsilon)(R_2 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon^2, \quad \varepsilon = \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}. \tag{121}$$

Если заданные значения (R_1, R_2) лежат на этой особой кривой (121) то, как нетрудно проверить, решение интерполяционной задачи неединственно, если не требовать его симметричности.

В связи со свойствами спектра оператора Шредингера $L = u(x) - D^2$ с вещественным потенциалом $u(x)$, исчезающим на бесконечности (см. например [10]), мы накладываем в дальнейшем следующие дополнительные условия на данные рассматриваемой интерполяционной задачи:

$$k_1 > k_2 > \ldots, > k_n > 0; \quad R(k_j) = (-1)^{j+1}\, r_j, \quad r_j > 0 \quad j = 1, \ldots,\ n \tag{122}$$

Для симметричных решений интерполяционная задача сводится к линейной алгебраической системе уравнений для определения коэффициентов $a_1, \ldots,\ a_n$ многочлена $P(k)$, которую можно представить в следующем виде (ср. [9]):

$$\begin{cases} \frac{a_1}{k_1} + A_1\frac{a_2}{k_1^2} + \frac{a_3}{k_1^3} + \dots + A_1 = 0 \\ A_2\frac{a_1}{k_2} + \frac{a_2}{k_2^2} + A_2\frac{a_3}{k_2^3} + \dots + 1 = 0 \\ \frac{a_1}{k_3} + A_3\frac{a_2}{k_3^2} + \frac{a_3}{k_3^3} + \dots + A_3 = 0 \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \end{cases}, \tag{123}$$

где

$$A_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1-r_j}{1+r_j}, \quad r_j > 0 \ \Rightarrow\ -1 < A_j < 1, \quad \forall j. \tag{124}$$

Лемма 7. *([9]). Пусть выполнены условия (124). Тогда определитель $\Delta(A_1, \dots, A_n)$ системы (123) линейных уравнений относительно n неизвестных $a_1, \dots, a_n$ не равен нулю и допускает следующую оценку:*

$$\Delta(A_1, \dots, A_n) > \frac{1}{k_1 \cdots k_N} \prod_{i>j} \left(\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_j}\right) > 0. \tag{125}$$

► Так как детерминант $\Delta(A_1, \dots, A_N)$ является линейной функцией от переменных A_j, то его минимальное значение в выпуклой области (124) достигается на ее границе. Очевидно эта граница состоит из наборов переменных вида $A_j = \varepsilon_j,\ \varepsilon_j = \pm 1$. Таким образом

$$\Delta > \det \begin{pmatrix} k_1^{-1} & \varepsilon_1 k_1^{-2} & k_1^{-3} & \dots \\ \varepsilon_2 k_2^{-1} & k_2^{-2} & \varepsilon_2 k_2^{-3} & \dots \\ k_3^{-1} & \varepsilon_3 k_3^{-2} & k_3^{-3} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon_j^2 = 1$, то определитель Δ_ε сводится к определителю Вандермонда:

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_4 \cdots}{k_1 \cdots k_N} \det \begin{pmatrix} 1 & (\varepsilon_1 k_1)^{-1} & (\varepsilon_1 k_1)^{-2} & \dots \\ 1 & (\varepsilon_2 k_2)^{-1} & (\varepsilon_2 k_2)^{-2} & \dots \\ 1 & (\varepsilon_3 k_3)^{-1} & (\varepsilon_3 k_3)^{-2} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и мы получаем

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_4\cdots}{k_1\cdots k_N}\prod_{j<i}\left(\frac{1}{\varepsilon_i k_i}-\frac{1}{\varepsilon_j k_j}\right) = \frac{\varepsilon_2^2\varepsilon_4^2\cdots}{k_1\cdots k_N}\prod_{j<i}\left(\frac{1}{k_i}-\frac{1}{\varepsilon_i\varepsilon_j k_j}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{k_1\cdots k_N}\prod_{j<i}\left(\frac{1}{k_i}-\frac{1}{k_j}\right).$$

Лемма доказана. ∎

Замечание. Представляет интерес исследование предельного перехода $n\to\infty,\ k_n\to 0$ в линейной алгебраической системе (123). Случай геометрической прогрессии $k_n = q^n,\ 0<q<1$ рассматривался в работах [10], [11].

В обратной задаче рассеяния коэффициенты $R(k_j)(-1)^{j+1}\ r_j$ зависят от дополнительного параметра x:

$$A_j = \frac{1-r_j}{1+r_j} = \frac{e^{y_j}-e^{-y_j}}{e^{y_j}+e^{-y_j}} = \tanh y_j, \quad r_j = e^{-2y_j}, \quad y_j = k_j x+\beta_j,\ \beta_j\in\mathbb{Z}. \tag{126}$$

Решение $R = P/Q$ интерполяционной задачи (119) определяет при этом пару функций

$$\psi^+(k,x) = e^{kx}P(k,x), \quad \psi^-(k,x) = e^{-kx}Q(k,x), \tag{127}$$

являющихся решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка $\psi'' = U(x,k)\psi$, в силу следующей теоремы.

Теорема 21. *Пусть выполнены условия (124), (126). Тогда для симметричных решений интерполяционной задачи вронскиан функций* (127) *не зависит от x и выражается следующей формулой:*

$$<\psi^+,\ \psi^->= \left[\begin{array}{cc}\psi^+ & \psi^- \\ (\psi^+)' & (\psi^-)'\end{array}\right] = -2k\prod_{j=1}^{n}(k^2-k_j^2) \stackrel{\text{def}}{=} w(k).$$

$\blacktriangleright$: Из формул (126) следует, что при $k = k_j$ коэффициент пропорциональности функций (127) не зависит от параметра x:

$$\frac{\psi^+(k_j, x)}{\psi^-(k_j, x)} = (-1)^{j+1} r_j(x) e^{2k_j x}.$$

Заметив, что $Q(0, x) = (-1)^n P(0, x)$ мы находим $2n + 1$ значений $k = \pm k_j,\ 0$ являющихся нулями вронскиана $< \psi^+,\ \psi^- >$. Так как вронскиан этих функций (127) является многочленом от k степени $2n+1$ со старшим коэффициентом равным -2 то указанные выше нули полностью его определяют.$\blacksquare$

Из условия $Q(k) = P(-k)(-1)^n$ следует, что произведение $G = PQ$ является четной функцией от k и, следовательно, представляет собой многочлен степени n от переменной $\lambda = k^2$. Таким образом:

$$G(x, \lambda) = P(x, k) Q(x, k) = \psi^+ \psi^- = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \gamma_i(x)), \quad \lambda = k^2. \tag{128}$$

Существенную роль играет в дальнейшем следующее дифференциальное уравнение третьего порядка

$$D^3(\phi) = (4UD + 2U_x)(\phi), \quad D \equiv \frac{d}{dx}. \tag{129}$$

из следующей классической (ср. [7]) леммы.

Лемма 8. *Пусть ψ_1 , ψ_2 линейно независимые решения уравнения $\psi_{xx} = U\psi$. Тогда функция $\varphi = \psi_1 / \psi_2$ удовлетворяет уравнению $\{\varphi_x, x\} = U$ с производной Шварца*

$$\{f,\ x\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{4} \frac{f_x^2}{f^2} - \frac{1}{2} \frac{f_{xx}}{f} \tag{130}$$

а произведения $\phi_1 = \psi_1^2, \quad \phi_2 = \psi_2^2, \quad \phi_3 = \psi_1 \psi_2$ образуют базис решений уравнения третьего порядка (129).

◀ Прямое вычисление вронскиана трех функций $\phi_1 = \psi_1^2$, $\phi_2 = \psi_2^2$, $\phi_3 = \psi_1\psi_2$ дает

$$W = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' \end{vmatrix} = (\psi_1\psi_{2,x} - \psi_2\psi_{1,x})^3 = w^3.$$

Следовательно, $W = \text{const} \neq 0$ и функции ϕ_i линейно независимы.

Нетрудно проверить, что

$$\frac{w}{\phi_3} = f_2 - f_1, \quad \frac{\phi_{3,x}}{\phi_3} = f_2 + f_1, \tag{131}$$

и, следовательно

$$f_1 = \frac{\phi_{3,x} - w}{2\phi_3}, \quad f_2 = \frac{\phi_{3,x} + w}{2\phi_3}.$$

Дифференцирование любой из этих формул и уравнение Риккати $f_j' + f_j^2 = U,\ j = 1,\ 2$ дают

$$4U(x)\Phi^2 + \Phi_x^2 - 2\Phi\Phi_{xx} = w^2, \qquad \Phi \equiv \psi_1\psi_2 \tag{132}$$

где $w =< \psi_1, \psi_2 >$. Уравнение (129) является, как нетрудно проверить следствием (132). ▶

В силу формулы (132) многочлен (128) удовлетворяет уравнению

$$4U\,G^2 + G_x^2 - 2G\,G_{xx} = w^2 = 4\lambda \left(\prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j) \right)^2 \stackrel{\text{def}}{=} K(\lambda), \quad (\lambda = k^2,\ \lambda_j = k_j^2), \tag{133}$$

где мы учли вид вронскиана $w(k)$, указанный в Теореме 21 Сравнив степени многочленов от λ в левой и правой части этого уравнения мы находим, что $U(x, \lambda) = u(x) - \lambda$. Таким образом мы получили

Следствие 1. *Формулы* (132). *Функции* (127), *построенные по решению интерполяционной задачи, являются решениями линейного уравнения Шредингера:*

$$\psi'' = (u(x) - \lambda)\psi, \qquad (\psi = \psi^{\pm}(k, x),\ k^2 = \lambda). \tag{134}$$

Можно доказать, что справедлива следующая теорема [8]:

Теорема 22. *Пусть выполнены условия (122), (126) и* $\lambda_j = k_j^2$. *Тогда*
i) корни $\gamma_i(x)$ *многочлена (128) от* λ *являются простыми и удовлетворяют условиям:*

$$0 \le \gamma_n < \lambda_n \le \gamma_{n-1} < \lambda_{n-1} \le \cdots < \lambda_2 \le \gamma_1 < \lambda_1 \tag{135}$$

ii) потенциал уравнения (134) *выражается через корни многочлена (128) формулой*

$$u(x) = 2\sum_1^n (\gamma_i(x) - \lambda_i) \tag{136}$$

Очевидным следствием этой теоремы является точная и не зависящая от n оценка потенциала линейного уравнения Шредигера (134):

$$-2\lambda_1 \le u(x) < 0, \quad \forall x.$$

Дальнейшие обобщения этой оценки можно найти в цитированной выше работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002.

[2] *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1966.

[3] *Зорич В. А.* Математический анализ. том 1,2; М.: МЦНМО, 1998.

[4] *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М: 1972.

[5] *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

[6] *Артин Э.* Введение в теорию гамма-функции. М.: Мир, 2009.

[7] *Drach U.* Sur l'integration par quadratures de l'equation differentielle $y'' = [\varphi(x) + h]\ y$". // Compt. Rend. Acad. Sci. 1919. V. 168. P. 337–340.

[8] *Шабат А. Б.* О потенциалах с нулевым коэффициентом отражения. Динамика Сплошной Среды. // Инст. Гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск. 1970. Т. 5. С. 130–145.

[9] *Адлер В. Э.* О $N-$солитонном решении уравнения Кортевега-де Фриза. // Asymtotic methods in Math. Phys. Уфа. 1989.

[10] *Дегасперис А., Шабат А. Б.* Построение безотражательных потенциалов с бесконечным дискретным спектром. // ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 230–247.

[11] *Чанкаев М. Х., Шабат А. Б.* Об одной нелинейной задаче на собственные значения. // ТМФ. 2008. Т. 157. № 2. С. 175–187.

[12] *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. М.: 1983.

[13] *Гельфанд И., Гиндикин С., Граев М.* Избранные задачи интегральной геометрии. М.: 2007.

[14] *Мёрфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.:1997.

[15] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: 1989.