[85] Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. 1973. V. 133, № 4. P. 301–312.

[86] Janke E., Emde F., Lösch F. Tafeln höherer funktionen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Stuttgart. 1960.

Министерство образования и науки РФ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Башкирский государственный университет»

Э. Н. Ахметвалиева, А. М. Ахтямов

ПРОБЛЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ПРОИЗВОДНЫМ ЦЕПОЧКАМ КЕЛДЫША

Международная школа-конференция для студентов,
аспирантов и молодых учёных
«Фундаментальная математика и её приложения в естествознании»

Сборник трудов. Том VII

Уфа
РИЦ БашГУ
2010

УДК 51+330.101(030)
ББК 65.01(92)
А 95

Книга издана при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-06828_моб_г) и за счет внебюджетных средств БашГУ

Ахметвалиева Э. Н., Ахтямов А. М. **Проблема вычисления коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша**: Монография. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2010. — 140 с.

В работе приводятся методы решения проблемы вычисления коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша для широкого класса граничных задач. Исследуются возможности численного исследования соответствующих задач.

Для специалистов по спектральной теории дифференциальных операторов, преподавателей, научных работников, аспирантов и магистрантов.

[74] Kamke E., "Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen," 9. Auflage, 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, Stuttgrt, 1977.

[75] Lankaster P. Theory of matrices. New York–London: Academic Press, 1969.

[76] Levin A. V., Vibration of disks // Journal of technical physics, V. 7, No. 17, 1739–1753 (1937).

[77] Levin B. Ya. Distribution of Zeros of Entire Functions. American Mathematical Society. Providence. 1980. 524 P.

[78] Lions J.–L. // SIAM Rev. 1988. V. 30, №2. P. 1–68.

[79] Marchenko V. A. Sturm-Liouville Operators and their Applications. Kiev: Naukova Dumka. 1977; English transl., Birkhäuser, Basel, 1986. xii+367 pp.

[80] Naimark M. A. Linear Differential Operators. 2nd ed., Nauka, Moscow, 1969 (English translation of 1st ed:, Parts I, II: Ungar. New York, 1967, 1968).

[81] Postnikov M. M., Linear Algebra and Differential Geometry. Moscow: MIR, 1982. p. 319.

[82] Seeley R. Interpolation in L^p with boundary conditions // Studia Math. 1972. V. 44. P. 47–60.

[83] Tamarkin J. D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Z. 1928. Vol. 27. P. 1–54.

[84] Tolstov G. P. Forier series. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962.

Anniversary of Ivan G. Petrovskii: Book of abstracts. Moscow: Moscow Universary Press, 2001. C. 30–31.

[65] Akhtyamov A. M. Calculating the Coefficients of Expansion in Derived Keldysh Chains for an Elliptic Problem with Parameter in the Boundary Condition // Mathematical Notes. 2001. Vol. 69. Issu 3-4. P. 567–570.

[66] Akhtyamov A. M. On coefficients of eigenfunction expansions for boundary-value problems with parameter in boundary conditions // Mathematical Notes. 2001. Vol. 75. Issu 3. P. 362–374.

[67] Atkinson F. V. Diskrete and continuous boundary value problems. Academic Press. 1963.

[68] Birhoff G. D. Boundary value and expantion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 373–395.

[69] Birhoff G. D. On the asymptotic character of the certain linear differential equations containg parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 219–231.

[70] Collatz L. Eigenwertaufgaben mit techneschen Anwendungen. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest and Porting K.– G, 1963.

[71] Coddington E. A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGraw-hill book company. 1955.

[72] Dunford N., Schwartz J. Linear Operators, II. Spectral Theory. New York: Interscience Publishers. 1963.

[73] Hinton D. B. An expantion theorem for an eigenvalue parameter in boundary condition // Quart. J. Math. Oxford. 1979. V. 30, № 2. P. 33–42.

Оглавление

[57] Шкред А. В. О линеаризации спектральных задач с параметром в граничном условии и свойствах производных цепочек М.В. Келдыша. Матем. заметки. Т. 46. Вып. 4. 1989. С. 99–109.

[58] Якубов С.Я. Кратная полнота по М.В. Келдышу корневых функций эллиптических краевых задач с полиномиальным спектральным параметром // Изв. АН СССР. Серия матем. Т. 50. №2, 1986. С. 425–432.

[59] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы).- М.: Наука,1968.

—

[60] Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. pure appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147.

[61] Akhtyamov A. M. Calculation of coefficients of expansions in derived chains of a spectral problem // Mathematical Notes. 1992. Vol. 51. No. 5-6. P. 618–619.

[62] Akhtyamov A. M. On elliptic problems with an eigenvalue parameter in boundary conditions // International Conference dedicated to 150th birthday of Sofia Kovalevskaya. St. Peterburg: EIMI, 2000. P. 5–6.

[63] Akhtyamov A. M. On the coefficients of expansions in eigenfunctions of a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions // Russian Math. 2000. Vol. 44. №. 2. P. 11–16.

[64] Akhtyamov A.M. On the coefficients of eigenfunctions-series expansion for problems with an eigenvalue parameter in boundary conditions // International Conference “Differential Equations and Related Topics”, dedicated to the Centenary

[48] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

[49] Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.

[50] Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград. 1917.

[51] Темирбулатов Н.С. Спектральная задача, связанная с P_1–приближением по сферическим гармоникам для нестационарного односкоростного уравнения переноса // Матем. заметки. 1996. Т. 59. Вып. 3. С. 472–476.

[52] Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 230 с.

[53] Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М.: ИЛ, 1960. 278 с.

[54] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

[55] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара им.И.Г.Петровского. 1983. N 9. С. 190–229.

[56] Шкаликов А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи связанные с ними // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1989. N 14. С. 140–224.

Глава 1

Введение

1.1 Задачи, приводящие к коэффициентной проблеме

Рассмотрим две краевые задачи, которые, как правило, не рассматриваются в справочниках (см., например, [19]). Причина этого связана с тем, теория их решения до сих пор недостаточно разработана.

Рассмотрим сначала краевую задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня, находящегося в среде без сопротивления, оба конца которого испытывают сопротивление, пропорциональное скорости. Если ось Ox направлена вдоль стержня и за характеристическую функцию принято смещение $u = u(x,t)$ вдоль оси x поперечного сечения, абсцисса которого в равновесном состоянии равна x (иными словами, в момент времени t абсцисса этого сечения равна $\overline{x} = x + u(x,t)$ тока в проводе), то рассматриваемая задача имеет вид

$$u_{tt} = a^2\, u_{xx}, \quad a^2 = E/\rho_0, \qquad \text{при } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\left.\begin{array}{r} E\,S\,u_x(0,t) + k\ u_t(0,t) = 0, \\ E\,S\,u_x(l,t) - k\,u_t(l,t) = 0, \end{array}\right\} \qquad \text{при } 0 < t < +\infty,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad i_x(x,0) = F(x), \qquad \text{при } 0 < x < l$$

(см. [17, сс. 16,166]). Здесь E — модуль упругости, S — площадь поперечного сечения, k — коэффициент сопротивления трения для концов стержня.

Рассмотрим теперь вторую задачу. Задача определения силы тока $i(x,t)$ в проводе, концы которого заземлены через сосредоточенные сопротивления, имеет следующий вид:

$$i_{xx} = C\,L\,i_{tt} + G\,R\,i, \qquad \text{при } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\left.\begin{aligned} i_x(0,t) - C\,R_0^{(1)}\,i_t(0,t) - G\,R_0^{(1)}\,i(0,t) = 0,\\ i_x(l,t) + C\,R_0^{(2)}\,i_t(l,t) + G\,R_0^{(2)}\,i(l,t) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{при } 0 < t < +\infty,$$

$$i(x,0) = \varphi(x), \quad i_x(x,0) = (-R\,\varphi(x) - f'(x))/L, \qquad \text{при } 0 < x < l$$

(см. [17, сс. 21,176]). Здесь $i = i(x,t)$ — сила тока в проводе; L, C, G, R — соответственно коэффициент самоиндукции, емкость, утечка и сопротивление, рассчитанные на единицу длины провода; $R_0^{(1)}$, $R_0^{(2)}$ — сосредоточенные сопротивления соответственно на левом и правом конце провода; $\varphi(x)$ и $f(x)$ — соответственно сила тока и напряжение в начальный момент времени.

Особенность обеих задач в том, что граничные условия содержат значение самой неизвестной функции и значение ее первой производной по времени.

Можно привести много других краевых задач такого вида. Эти задачи, как правило, не рассматриваются в справочниках. Связано это с тем, что хотя рассматриваемые задачи допускают разделение переменных по времени, соответствующие спектральные задачи не тривиальны для аналитического и численного решения, как может показаться на первый взгляд. Первая трудность для решения соответствующих спектральных задач в том, что они не являются самосопряженными. Однако, если ранее несамосопряженность задачи была серьезным препятствием, то сегодня в связи с развитием теории несамосопряженных операторов эта трудность вполне преодолима. Вторая, более серьезная трудность соответствующих спектральных задач, связана с нарушением минимальности цепочек собственных функций в пространстве $L_2 \times L_2$ (см. [55, с. 191]). Система цепочек собственных функций оказывается

[36] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию (Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М.: Наука, 1970. 672 с.

[37] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Некоторые граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

[38] Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения Киев: Наукова думка. 1977.

[39] Мелешко С. В., Покорный Ю. В. Об одной вибрационной краевой задаче // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1466–1467.

[40] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука. 1976. 526 с.

[41] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[42] Никифоров А. В., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. Изд-е 2-е. М.: Наука, 1984. 344 с.

[43] Оразов М. Б., Шкаликов А. А. Об n-кратной базисности собственных функций некоторых регулярных краевых задач // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17. № 3. С. 626–639.

[44] Радзиевский Г. В. Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // УМН. 1982. Т. 37. Вып. 2. С. 81–145.

[45] Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964.

[46] Расулов М. Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку: Элм, 1989. 328 с.

[47] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. 488 с.

[25] Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И. О спектральной задаче из теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности // ДАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 451–454.

[26] Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С.11–14.

[27] Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // УМН. 1971. Т. 26, N 4. С. 15–41.

[28] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

[29] Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.

[30] Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. К теории самосопряженных квадратичных пучков операторов // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1983. № 6. С. 40–51.

[31] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. — 768 с.

[32] Крылов А. Н. Некоторые замечания о крешерах и индикаторах. Известия Академии наук. С.-Петербург. 1909. 6 серия. Т. 3. № 15. С. 623–654.

[33] Кузьмин Р. В. Дифектация судовых механизмов. М.: Транспорт, 1967. 174 с.

[34] Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. М.: Наука. 1982. 272 с.

[35] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

переполненной в пространстве $L_2 \times L_2$. Получается, что нельзя произвольную функцию из $L_2 \times L_2$ разложить в ряд по цепочкам собственных функций по норме пространства $L_2 \times L_2$. Ряды по цепочкам собственных функций сходятся в пространстве $L_2 \times L_2$, но не к тем функциям, к которым хотелось бы.

Математиками было найдено два метода преодоления этой трудности. Первый метод, предложенный А. А. Шкаликовым [55] состоял в том, чтобы рассматривать разложения по цепочкам собственных функций соответствующих спектральных задач не в пространстве $L_2 \times L_2$, а в других пространствах, в которых бы соответствующие цепочки были бы не только полны, но и минимальны и образовывали бы базис. Во втором методе рассматривались ряды по цепочкам собственных функций по норме пространства $L_2 \times L_2$, но при этом исключались лишние цепочки (см., например, [25]).

Нас будет интересовать только первый метод решения и мы не будем касаться второго метода. В 1983 году в работе А. А. Шкаликова [55] для широкого класса задач с полиномиальн- ым вхождением параметра в краевые условия были получены теоремы о разложимости произвольных функций в ряды по цепочкам собственных функций. Разложения проводились в специальных гильбертовых пространствах. Однако коэффициенты c_{kh} разложе- ния функции в ряд по цепочкам собственных функций в этой работе не были найдены. Эта задача, важная для предъявления аналитического и численного решений, оставалась не решенной.

1.2 Обозначения

Будем считать далее, что в рассматриваемых декартовых произведениях гильбертовых пространств введено скалярное произведение, равное соответствующей сумме скалярных произведений перемножаемых пространств. Для удобства чтения приводим список основных обозначений, используемых в главе.

$\mathbb{C}$ — пространство комплексных чисел.

L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций, заданных на отрезке $[0,1]$.

W_2^k — соболевское пространство функций на отрезке $[0,1]$ (т.е. совокупность всех функций $y(x)$, таких что $y^{(k)}(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ при $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, а $y^{(n)}(x)$ принадлежит пространству L_2).

$\mathcal{W}_2^0$ — пространство $W_2^1 \times L_2$.

$\mathcal{W}_2^r$ — пространство $W_2^{n-1+r} \times \cdots \times W_2^{r+1} \times W_2^r$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ —пространство $(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m$.

y, z, v, g — элементы пространств L_2 и W_2^k.

$\mathbf{y}, \mathbf{z}$ — элементы пространства $L_2 \times \mathbb{C}^n$.

$\widetilde{\mathbf{v}}, \widetilde{\mathbf{z}}$ — элементы пространства $\mathcal{W}_2^0 = W_2^1 \times L_2$ или $\mathcal{W}_2^k$.

$\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{z}}$ — элементы пространства $(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m$.

1.3 Предварительные сведения и определения

Приведем необходимые в дальнейшем определения. Определения эти почерптнуты из работ М.В. Келдыша [27], М.А. Наймарка [41] и А.А. Шкаликова [55], Х.Трибель [54].

Сопряженная краевая задача

Рассмотрим краевую задачу

$$l(y,l) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\lambda)\, y = 0, \qquad (1.1)$$

$$U_j(y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{jk}(\lambda)\, y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)\, y^{(k)}(1) \right) = 0, \qquad (1.2)$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

[15] Ахтямов А. М. О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша для одной эллиптической задачи с параметром в граничном условии // Математические заметки. 2001. Том 69. Вып. 4. С. 622–624.

[16] Ахтямов А. М. О коэффициентах разложений по собственным функциям краевых задач с параметром в граничных условиях // Математические заметки. 2004. Т. 75. Вып. 4. С. 493–506.

[17] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике: Учебное пособие, 3-е изд. М.: Наука. 1980. 688 с.

[18] Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. 184 с.

[19] *Вибрации* в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[20] Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек.- Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.

[21] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1965.

[22] Губреев Г. М., Пивоварчик В. Н. Спектральный анализ задачи Редже с параметрами // Функц. анализ и его приложения. 1997. № 1. С. 70–74.

[23] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

[24] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и иженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.

ционные уравнения: Дис. канд. физико-матем. наук. М., 1992. 135 с.

[9] Ахтямов А. М. О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам одной спектральной задачи // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 137–139.

[10] Ахтямов А. М. Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов и соответствующие эволюционные уравнения: Дис. канд. физико-матем. наук. — М., 1992. — 135 с.

[11] Ахтямов А. М. Вычисление коэффициентов разложениий для спектральной задачи из теории параболо–гиперболического уравнения теплопроводности // Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы: Сб. науч. тр.: В 2 ч. / Отв. ред. К. Б. Сабитов (Междунар. науч. конф. 22–25 сентября 1998 г.) Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 1998. Ч. 1. С. 10–12.

[12] Ахтямов А. М. О коэффициентах разложений по собственным функциям краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях // Известия вузов. Математика. 2000. № 2. С. 13–18.

[13] Ахтямов А. М. О сопряженной системе к производным цепочкам Келдыша одной эллиптической задачи // Дифференцiальнi та iнтегральнi рiвняння. Мiжнар. конф., Одеса, 12–14 верес., 2000. Одеса. 2000, с. 16–17.

[14] Ахтямов А. М. О сопряженном операторе и сопряженной системе для несамосопряженной эллиптической задачи. Материалы международного семинара-совещания "Методы функционального анализа и теории функций в различных задачах математической физики" / Ответственный редактор Р. С. Сакс. Уфа: БашГУ, ИМВЦ УНЦ РАН, 2000. С. 11–14.

где $p_s(x,\lambda) = \sum_{\nu=s}^{n} p_{\nu s}(x)\lambda^{\nu}$, $p_{ss}(x) = \mathrm{const}$, $s = 1, 2, \ldots, n$, $p_{nn} \neq 0$, $p_{\nu s}(x)$ — достаточно гладкие функции, а $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ — произвольные полиномы от λ.

Дифференциальное выражение вида

$$l^*(y,\lambda) = (-1)^n y^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{p_1(x,\overline{\lambda})}\, y\right)^{(n-1)} + \cdots + \left(\overline{p_n(x,\overline{\lambda})}\, y\right)$$

будем называть сопряженным к дифференциальному выражению $l(y,\lambda)$.

Предположим, что при каждом фиксированном λ краевые условия линейно независимы. Тогда определенным образом (см. [41]) могут быть построены n линейных форм $V_1(y,\lambda), \ldots, V_n(y,\lambda)$, которые называют сопряженными к формам $U_1(y,\lambda), \ldots, U_n(y,\lambda)$. Краевая задача, порожденная дифференциальным выражением $l^*(y,\lambda)$ и краевыми условиями $V_j(y,\lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, называется сопряженной к исходной.

Регулярная задача

Предполагаем, что краевые условия являются нормированными в смысле определения из работы [55]. Число κ_j называется порядком краевого условия $U_j(y,\lambda)$, если эта форма содержит переменные вида $\lambda^{\nu} y^{(k)}(0)$ или $\lambda^{\nu} y^{(k)}(1)$ при $\nu+k = \kappa_j$ и не содержит переменных такого же вида при $\nu + k > \kappa_j$.

Известно (см. [50]), что если все корни характеристического уравнения

$$\omega^n + p_{11}\,\omega^{n-1} + \cdots + p_{nn} = 0 \tag{1.3}$$

различны, то комплексную плоскость можно разбить на не более чем $2n$ секторов, в каждом из которых уравнение (1.1) имеет фундаментальную систему решений вида

$$y_k^{(i)}(x,\lambda) = \omega_k^i\, \lambda^i\, e^{\omega_k \lambda x}\left(\eta_{ki}(x) + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\right), \tag{1.4}$$
$$k = 1, 2, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где через $\mathcal{O}(\lambda^{-1})$ обозначена функция от x и λ, допускающая оценку $\leq |\lambda|^{-1}\,\mathrm{const}$ равномерно по x и по λ из фиксированного сектора S_ν. Всюду в дальнейшем предполагаем, что корни характеристического уравнения (1.3) различны, либо есть одинаковые но фундаментальная система (1.5) существует.

Характеристический определитель спектральной задачи (1.1)–(1.2) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Далее используем обозначение Биркгофа $[F] = F + \mathcal{O}(\lambda^{-1})$. Подставив в (1.5) выражения (1.5) при $x = 0$ и $x = 1$, получим, что в каждом секторе S_ν характеристический определитель допускает представление

$$\Delta(\lambda) = c\,\lambda^{\kappa} \sum_i [F_i]\, e^{\lambda \mu_i}, \tag{1.6}$$

где μ_i — всевозможные попарно различные суммы чисел 0, ω_1, $\omega_2, \dots, \omega_n$, а $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n$ — суммарный порядок краевых условий (1.2). Функция (1.6) является голоморфной в фиксированном секторе S_ν, но числа F_i в (1.6) от выбранного сектора не зависят.

На комплексной плоскости отметим все точки μ_i и точку 0; построим по ним наименьший выпуклый многоугольник M. При этом часть точек μ_i, которые назовем угловыми и обозначим через μ_0, будет служить вершинами M. Остальная часть точек μ_i будет лежать внутри M или на его сторонах.

Те числа F_i в равенстве (1.6), которые отвечают угловым точкам μ_0, обозначим через F_i^0. Краевую задачу (1.1)–(1.2) назовем *регулярной*, если все коэффициенты $p_{\nu s}$ в уравнении (1.1) — суммируемые функции и числа F_i^0 отличны от нуля.

Литература

[1] Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области // ДАН СССР, 1964. Т. 146. С. 511–514.

[2] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи // УМН. Т. 19. Вып. 3. 1964. С. 53–161.

[3] Айнола Л. Я. Обратная задача о собственных колебаниях упругих оболочек // ПММ. 1971. № 2, С. 358–364.

[4] Алесеев А. А. Устойчивость обратной задачи Штурма-Лиувилля для конечного интервала // ДАН СССР. 1986. Т. 287. N 1. С. 11–13.

[5] Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 295 с.

[6] Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.

[7] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1966.

[8] Ахтямов А. М. Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов и соответствующие эволю-

Заключение

Подводя итоги можно сказать, что решена задача о продольных колебаниях стержня, оба конца которого испытывают сопротивление, пропорциональное скорости. При моделировании такого рода задач возникают краевые задачи со сложным вхождением спектрального параметра в краевые условия. В случае, когда спектральный параметр входит в краевые условия полиномиально, возникает проблема вычисления коэффициентов в ряды по производным цепочкам Келдыша. Найдены общие формулы для вычисления этих коэффициентов.

—

Регулярную задачу назовем *усиленно регулярной*, если нули характеристического определителя асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным числом $\delta > 0$.

Пучок операторов и его спектральные характеристики

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ операторный пучок

$$P(\lambda) = P_0 + \lambda\, P_1 + \cdots + \lambda^m\, P_m,$$

где P_k, $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m)$ — некоторые неограниченные операторы. Очевидно, $D\big(P(\lambda)\big) = \cap_{k=1}^{m} D(P_k)$ при $\lambda \neq 0$.

Число λ_0 называется *собственным значением* (СЗ) пучка $P(\lambda)$, если уравнение $P(\lambda_0)y = 0$ имеет нетривиальное решение $y \in D\big(P(\lambda_0)\big)$. Функция $y^{\,0} \neq 0$, удовлетворяющая уравнению $P(\lambda_0)y^0 = 0$, называется *собственной функцией* (СФ) пучка $P(\lambda)$, отвечающей СЗ λ_0.

Функции y^1, y^2, ... , $y^{\,p}$, связанные с собственной функцией $y^{\,0}$ соотношениями

$$P(\lambda_0)\, y^{\,h} + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0} y^{\,h-1} + \cdots + \frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^{\,h} P(\lambda)}{\partial^{\,h} \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0} y^{\,0}, \qquad h = 0,\, 1,\, \ldots,\, p,$$

называются *присоединенными функциями* к собственной функции $y^{\,0}$ пучка $P(\lambda)$.

Собственные и присоединенные функции (СПФ) объединяются под общим названием *корневых функций* пучка.

Пусть $y(x)$ — собственная функция пучка операторов. Обозначим через p наибольший порядок присоединенных к $y(x)$ функций. Число $p + 1$ будем называть *кратностью собственной функции* $y(x)$.

М.В. Келдышом в работе [27] введено понятие канонической системы собственных и присоединенных функций. *Канонической* *системой* собственных и присоединенных функций при $\lambda = \lambda_0$

$$y_k^0,\, y_k^1,\, \ldots\,,\, y_k^{p_k} \quad (k = 1,\, 2,\, \ldots) \tag{1.7}$$

будем называть систему обладающую следующими свойствами:

1°. Функции y_k^0 образуют базис подпространства собственных функций, соответствующих $\lambda = \lambda_0$.

2°. y_1^0 есть собственная функция, кратность которой достигает возможного максимума $p_1 + 1$.

3°. y_k^0 есть собственная функция, не выражающаяся линейно через

$$y_1^0,\, y_2^0,\, \ldots\,,\, y_{k-1}^0,$$

кратность которой достигает возможного максимума $p_k + 1$.

4°. Функции (1.7) образуют цепочку собственной и присоединенных функций (или другими словами, цепочку корневых функций).

Числа $p_1,\, p_2, \ldots$ не зависят от выбора канонической системы. Число $N = p_1 + 1 + p_2 + 1 + \ldots$ будем называть *корневой кратностью* или просто *кратностью собственного значения* $\lambda = \lambda_0$. (В литературе эту кратность принято называть алгебраической, см. [21, с. 19].)

Очевидно, собственное подпространство (т.е. множество, состоящее из нулевой функции и всех собственных функций, соответствующих СЗ $\lambda = \lambda_0$ является частью множества всех корневых функций. Размерность собственного подпространства называется *собственной кратностью* СЗ λ_0. Собственная кратность любого собственного значения не превосходит его корневой кратности.

В дальнейшем каждое СЗ будем нумеровать столько раз какова его собственная кратность.

Рассмотрим цепочку СПФ $y_k^0,\, y_k^1,\, \ldots\,,\, y_k^{p_k}$, входящую в каноническую систему СПФ оператора $P(\lambda)$. *Производной по Келдышу цепочкой длины m, построенной по корневым функциям y_k^h,*

B_2^1 — нулевой, окончательно имеем

$$\begin{aligned} c_{k,0}^{*} = {}& \langle\, A_1\, f_0 + A_2\, f_1\,,\, v_k\,\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle\, A_2\, f_0\,,\, \overline{\lambda_k}\, v_k\,\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ & + \left\langle\, B_1^1\, \left(S_0^1\, f_0\right) + B_2^1\, \left(S_0^1\, f_1\right)\,,\, T_0^1\, v_k\right\rangle_{L_2(\Gamma)} + \\ & + \left\langle\, B_2^1\, \left(S_0^1\, f_0\right)\,,\, T_0^1\, \overline{\lambda_k}\, v_k\right\rangle_{L_2(\Gamma)} = \\ = {}& \int_\Omega \left(b\,\frac{\partial f_0}{\partial x} + f_1\right)\overline{v_k}\, dx - \frac{a}{\alpha}\int_\Gamma f_0\,\overline{v_k}\, ds, \\ c_{k,0}^{**} = {}& \int_\Omega \left(b\,\frac{\partial u_k}{\partial x} + \lambda_k\, u_k\right)\overline{v_k}\, dx - \frac{a}{\alpha}\int_\Gamma u_k\,\overline{v_k}\, ds. \end{aligned}$$

Эти же выражения, с помощью формул, указанных в замечании 2 могут быть представлены в следующей форме

$$c_{k,0}^{*} = \left\langle f_0,\, -b\,\frac{\partial v_k}{\partial x} + \overline{\lambda_k}\, v_k\right\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle f_1,\, v_k\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle f_0,\, b\, K\, v_k - a\, v_k/\alpha\rangle_{L_2(\Gamma)}\,,$$

$$c_{k,0}^{**} = \left\langle u_k,\, -b\,\frac{\partial v_k}{\partial x}\right\rangle_{L_2(\Omega)} + 2\,\lambda_k\,\langle u_k,\, v_k\rangle_{L_2\Omega)} + \langle u_k,\, b\, K\, v_k - a\, v_k/\alpha\rangle_{L_2(\Gamma)}\,.$$

Полученные коэффициенты $c_k = c_{k,0}^{*}/c_{k,0}^{**}$ совпадают с найденными по формуле (5.51) из работы [15].

Откуда получаем $G_1^1\, v = b\, K\, v$, $G_2^1\, v = 0$. Следовательно условие А для задачи (5.48) выполняется (соответствующие формы G_1^1 и G_2^1 существуют).

Условие В также выполняется, так как существуют такие числа ξ_{11}^1 и ξ_{21}^1 для которых выполнены равенства $B_1^1\, u = \xi_{11}^1 \cdot S_0^1\, u$, $B_2^1\, u = \xi_{21}^1 \cdot S_0^1\, u$. Это числа $\xi_{11}^1 = 1$, $\xi_{21}^1 = 0$. ($B_1^1\, u = S_0^1\, u = u$, $B_2^1\, u = 0$).

Таким образом, условия теоремы 4 выполнены.

Следовательно, коэффициенты c_k из разложения $\widetilde{f} = \sum c_k\, \widetilde{u}_k$ совпадают с коэффициентами c_k из разложения $\widetilde{\mathbf{f}} = \sum c_k\, \widetilde{\mathbf{u}}_k$ в расширенном гильбертовом пространстве $[\mathcal{L}]^p = [L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma)]^2$, где $\widetilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1) = (f_0,\, S_0^1\, f_0,\ \ f_1,\, S_0^1\, f_1)$, $\widetilde{\mathbf{u}}_k = (\mathbf{u}_k, \lambda_k\, \mathbf{u}_k) = (u_k,\, S_0^1\, u_k,\, \lambda_k\, u_k,\, \lambda_k\, S_0^1\, u_k)$,

Поэтому согласно теореме 4 коэффициенты $c_k = c_{k,0}$ находятся по формуле $c_k = c_{k,0}^{*}/c_{k,0}^{**}$, где

$$c_{k,0}^{*} = \sum_{s=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{1-s} \Big\langle\, A_{\nu+s+1}\, f_\nu\,,\ v_k^{0,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ + \sum_{s=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{1-s} \Big\langle\, B_{\nu+s+1}^1\, \left(S_0^1\, f_\nu\right)\,,\, T_0^1\, v_k^{0,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}\,,$$

$$c_{k,0}^{**} = \sum_{s=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{1-s} \Big\langle\, A_{\nu+s+1}\, u_k^{0,\,\nu}\,,\ v_k^{0,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ + \sum_{s=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{1-s} \Big\langle\, B_{\nu+s+1}^1\, \left(S_0^1\, u_k^{0,\,\nu}\right)\,,\, T_0^1\, v_k^{0,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}\,.$$

Здесь учтено, что $m = 1$, $p = 2$, присоединенных функций нет ($h = 0$, $g_k = 0$, $g_j = 0$, $p_{k0} = p_k$, $q_{k0} = q_k$). Далее, так как $u_k^{0,\,0} = u_k$, $u_k^{0,\,1} = \lambda_k\, u_k$, $v_k^{0,\,0} = v_k$, $v_k^{0,\,1} = \overline{\lambda_k}\, v_k$, B_1^1 — единичный оператор, а

$h = 0,\ 1,\ \ldots,\ p_k$, *отвечающим СЗ* λ_k, мы будем называть вектор-функцию

$$\widetilde{y}_k^{\,h} = (y_k^{h,0},\ y_k^{h,1},\ \ldots,\ y_k^{h,m-1}),$$

где

$$y_k^{h,\nu} = \left[\frac{d^\nu}{dt^\nu}\, e^{\lambda_k t} \left(y_k^h + y_k^{h-1} \cdot \frac{t}{1!} + \cdots + y_k^0 \cdot \frac{t^h}{h!}\right)\right]_{t=0}, \\ h = 0,\, 1,\, \ldots,\, p_k; \quad \nu = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1.$$

Спектральные характеристики краевой задачи

Число λ_0 называется собственным значением (СЗ) краевой задачи (1.1)–(1.2), если существует такая функция $y^{\,0}(x) \not\equiv 0$ из W_2^n, что $l(y^{\,0},\, \lambda_0) = 0$ и $U_j(y^{\,0},\, \lambda_0) = 0$ для всех $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$. В этом случае функция $y^{\,0}(x)$ называется собственной функцией (СФ), отвечающей СЗ λ_0.

Система функций $y^{\,0}(x),\, \ldots,\, y^{\,p}(x)$ из W_2^n называется цепочкой собственной и присоединенных функций (СПФ) краевой задачи, отвечающей СЗ λ_0, если функции системы удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$l(y^h, \lambda_0) + \frac{1}{1!}\, \frac{d}{d\lambda}\, l(y^{h-1}, \lambda_0) + \cdots + \frac{1}{h!}\, \frac{d^h}{d\lambda^h}\, l(y^0, \lambda_0) = 0,$$

и краевым условиям

$$U_j(y^h, \lambda_0) + \frac{1}{1!}\, \frac{d}{d\lambda}\, U_j(y^{h-1}, \lambda_0) + \cdots + \frac{1}{h!}\, \frac{d^h}{d\lambda^h}\, U_j(y^0, \lambda_0) = 0, \\ h = 0,\, 1,\, \ldots,\, p, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Каноническая система СПФ, производные по Келдышу цепочки длины m, собственная и корневая кратность СЗ для задачи (1.1)–(1.2) определяются аналогично тому, как это делается для пучков операторов. Собственные значения нумеруются с учетом их собственной кратности.

Эллиптический оператор

Дифференциальный оператор A (произвольного порядка), задаваемый равенством

$$A\,f = \sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha(x)\,D^\alpha f, \tag{1.8}$$

называется *эллиптическим*, если

$$\sum_{|\alpha|=2\,m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha = a(x,\xi) \ne 0 \quad \text{при} \quad 0 \ne \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{1.9}$$

Здесь Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Ω есть либо $\mathbb{R}^n_+$, либо ограниченная область класса C^∞.

Дифференциальный оператор A (порядка $2\,m$), задаваемый равенством

$$A\,f = \sum_{|\alpha|\le 2\,m} a_\alpha(x)\,D^\alpha f, \tag{1.10}$$

называется *собственно эллиптическим*, если

$$\sum_{|\alpha|=2\,m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha = a(x,\xi) \ne 0 \quad \text{при} \quad 0 \ne \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{1.11}$$

и если для любого $x \in \overline{\Omega}$ и любой пары линейно независимых векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$ многочлен $a(x,\,\xi + \tau\,\eta)$ от комплексного переменного τ имеет в точности m корней $\tau_k^+ = \tau_k^+(x,\xi,\eta)$ $k = 1,\dots,m$, с положительной мнимой частью (и, следовательно, в точности m корней τ_k^- с отрицательной мнимой частью). Здесь $a_\alpha(x)$ — комплекснозначные бесконечно дифференцируемые функции на $\overline{\Omega}$. В случае $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^n_+$ функции $a_\alpha(x)$ суть константы.

Положим

$$a^+(x,\xi,\eta,\tau) = \prod_{k=1}^{m}(\tau - \tau_k^+), \qquad a^-(x,\xi,\eta,\tau) = \prod_{k=1}^{m}(\tau - \tau_k^-). \tag{1.12}$$

Пусть Ω есть либо $\mathbb{R}^n_+$, либо ограниченная область класса C^∞.

$$Q_k = -\alpha\,a \int_\Omega u_k\,\Delta\overline{v_k}\,dx + \alpha\,{\lambda_k}^2 \int_\Omega u_k\,\overline{v_k}\,dx + \lambda_k \int_\Gamma (\alpha\,b\,K - a)\,u_k\,\overline{v_k}\,ds.$$

Покажем как эти коэффициенты можно получить из общей теоремы 4, доказанной в настоящей работе. Проверим выполняются ли для задачи (5.48) условия A и B. В этих условиях фигурируют операторы A_k, B_k, S_0^1. Найдем их.

В обозначениях (5.17), (5.18) для задачи (5.48) имеем $m = 1$, $p = 2$, $d = 1$,

$$A_0\,u = a\,\Delta u, \quad A_1\,u = b\,\frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_2\,u = u, \quad B_0^1\,u = \alpha\,\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}, \quad B_1^1\,u = u.$$

Граничный оператор S_0^1 находится из равенства (5.24). Действительно, из формулы Грина следует, что

$$\int_\Omega (A_0\,u)\overline{v}\,dx - \int_\Omega u\,(\overline{A_0^* v})\,dx = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\cdot a\,\overline{v} - u\cdot a\,\frac{\partial v}{\partial \overline{n}}\right)\,ds.$$

Так как $B_0^1\,u = \alpha\,\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ и $m = 1$, то из последнего равенства и из (5.24) имеем

$$T_0^1\,v = -a\,v/\alpha, \qquad S_0^1 u = u, \qquad C_0^1\,v = -a\,\frac{\partial v}{\partial \overline{n}} \tag{5.52}$$

Нужный граничный оператор S_0^1 для проверки условия A найден. Порядок этого дифференциального оператора $m_1 = 0$. Поэтому $r = \max m_j = 0$.

Для того, чтобы убедиться, что условие A удовлетворяется, нужно проверить, существуют ли такие формы G_1^1 и G_2^1, для которых бы выполнялись равенства

$$\int_\Omega (A_k u)\overline{v}\,dx - \int_\Omega u\,(\overline{A_k^* v})\,dx = \int_\Gamma S_0^1\,u\cdot\overline{G_k^1 v}\,ds, \qquad k = 1,\,2. \tag{5.53}$$

Поскольку $A_1^*\,v = -b\,\frac{\partial v}{\partial x}$, $A_2^*\,v = v$, то из (5.53) следуют равенства

$$\int_\Gamma u\cdot b\,K\,\overline{v}\,ds = \int_\Gamma u\cdot\overline{G_1^1\,v}\,ds; \qquad 0 = \int_\Gamma u\cdot\overline{G_2^1\,v}\,ds.$$

Здесь a, b, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$; $\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ — производная по внешней нормали, а Ω — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\Gamma = \partial\,\Omega$, которую можно локально выпрямить гладкими преобразованиями координат.

Согласно методу, предложенному в работах [57] и [55], рассматриваемая задача допускает линеаризацию в пространстве $\mathcal{H} = H^1 \times H^0$, где $H^s = H^s(\Omega)$ — соболевское пространство с нормой $\|f\|^2_{H^s(\Omega)} = \|f^{(s)}\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{s} \|f^{(i)}\|^2_{L_2(\Gamma)}$.

Более точно, в пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим линейный оператор L, определенный равенством

$$L(f_0,\, f_1) = \left(f_1,\ -a\,\Delta f_0 - b\,\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \tag{5.49}$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{ \widetilde{f} = (f_0,\, f_1) \Big/ f_0 \in H^2(\Omega),\ f_1 \in H^1(\Omega), \alpha\,\frac{\partial f_0}{\partial \overline{n}} + f_1 = 0 \right\}. \tag{5.50}$$

Тогда оператор L имеет те же СЗ, что и задача (5.48), а СФ оператора L, соответствующая СЗ λ_k, имеет вид $\widetilde{u}_k = (u_k,\, \lambda_k\, u_k)$, где u_k — СФ задачи (5.48), отвечающая тому же СЗ λ_k. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что все СЗ задачи (5.48) простые.

Из [57] следует, что СФ $\widetilde{u}_k$ образуют полную и минимальную систему в пространстве $\mathcal{H}$. В работе [15] были вычислены коэффициенты $\{c_k\}$ разложения элемента $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$ в ряд по системе $\{\widetilde{u}_k\}$. Они были найдены с помощью построения сопряженного к L оператора L^*. Полученая формула была следующей:

$$c_k = P_k / Q_k, \tag{5.51}$$

где

$$P_k = -\alpha\, a \int_\Omega f_0\, \Delta \overline{v_k}\, dx + \alpha\, \lambda_k \int_\Omega f_1\, \overline{v_k}\, dx + \lambda_k \int_\Gamma (\alpha\, b\, K - a)\, f_0\, \overline{v_k}\, ds,$$

Говорят, что набор операторов $\{B_j\}_{j=1}^{m}$, задаваемых равенством

$$(B_j)\,(x) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{j,\alpha}(x)\, D^\alpha\, u(x), \qquad b_{j,\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega),$$

накрывает оператор A на $\partial\Omega$, если каково бы ни было $x \in \partial\Omega$, для нормального вектора ν_x и любого касательного к $\partial\Omega$ в точке x вектора $\xi_x \neq 0$ многочлены от τ

$$b_j(x,\, \xi + \tau\, \nu_x) = \sum_{|\alpha| = m_j} b_{j,\alpha}(x)\, (\xi + \tau\, \nu_x)^\alpha$$

линейно независимы по модулю $a^+(x, \xi, \eta, \tau)$.

Многочлены $b_j(x,\, \xi_x + \tau\, \nu_x)$, $j = 1,\, \ldots,\, m$ где $x \in \partial\Omega$, а ξ_x и ν_x фиксированы, называются *линейно независимыми по модулю* $a^+(x,\, \xi_x,\, \nu_x,\, \tau)$, если равенство

$$\sum_{j=1}^{m} c_j\, b_j(x,\, \xi_x + \tau\, \nu_x) = P(\tau)\, a^+(x,\, \xi_x,\, \nu_x,\, \tau) \tag{1.13}$$

где $c_1,\, \ldots,\, c_m$ — комплексные числа, а $P(\tau)$ — многочлен от τ, выполняется тождественно тождественно по τ лишь в тривиальном случае $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Замечание 1. Условие, наложенное на корни многочлена $a(x,\, \xi + \tau\, \eta)$, называется *корневым условием.* При $n \ge 3$ это условие является следствием условия (1.11).

Замечание 2. При $n \ge 3$ порядок эллиптического оператора является четным по необходимости. Таким образом, всякий эллиптический оператор при $n \ge 3$ является собственно эллиптическим.

Замечание 3 . Если же $n < 3$, то порядок эллиптического оператора может и не быть четным. Примером может служить оператор Коши-Римана

$$A\, u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i\, \frac{\partial u}{\partial x_2},$$

который является эллиптическим в указанном смысле.

Эллиптический оператор называется *равномерно эллиптическим*, если

$$\left| \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \right| \geq c\, |\xi|^l. \tag{1.14}$$

Для наших целей различие между эллиптичностью и равномерной эллиптичностью несущественно: в случае когда Ω — ограниченная область класса C^∞, условие (1.11) совпадает с условием (1.14) для $l = 2\,m$ и $x \in \overline{\Omega}$. В случае же $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ мы будем рассматривать лишь операторы с постоянными коэффициентами.

Пусть Ω есть либо $\mathbb{R}^n_+$, либо ограниченная область класса C^∞, и пусть B_j, $j = 1, \ldots, k$ — дифференциальные операторы на $\partial\Omega$, задаваемые формулой

$$(B_j)\,(x) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(x)\, D^\alpha\, u(x), \qquad b_{j,\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \tag{1.15}$$

причем $b_{j,\alpha}$ считаются постоянными в случае $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Набор $\{B_j\}_{j=1}^k$ называется *нормальной системой*, если

$$0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k \tag{1.16}$$

и для всякого нормального к $\partial\Omega$ вектора ν_x, $x \in \partial\Omega$, выполнено условие

$$\sum_{|\alpha| = m_j} b_{j,\alpha}(x)\, \nu_x^\alpha \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{1.17}$$

Пусть Ω есть либо $\mathbb{R}^n_+$, либо ограниченная область класса C^∞. Набор, состоящий из дифференциального оператора (1.10) и граничных операторов (1.15), называется *регулярно эллиптическим*, если

(a) оператор A является собственно эллиптическим;

(b) набор $\{B_j\}_{j=1}^m$ образует нормальную систему, причем $m_j \leq 2\,m - 1$, $j = 1, \ldots, m$;

$$c^{**}_{kh} = \left\langle L_1\, \widetilde{\mathbf{u}}^h_k,\, \widetilde{\mathbf{v}}^{g_k-h}_k \right\rangle_{[\mathcal{L}]^p} = \sum_{s=0}^{p-1} \left\langle \sum_{\nu=0}^{p-1-s} P_{\nu+s+1}\, \mathbf{u}^{h,\nu}_k,\ \mathbf{v}^{g_k-h,s}_k \right\rangle_{\mathcal{L}},$$

откуда и вытекают формулы (5.42)–(5.44). Теорема доказана.

Замечание 2. Коэффициенты c_{kh} могут быть вычислены также непосредственно с помощью сопряженного пучка операторов по формуле (5.47), где

$$c^*_{kh} = \sum_{s=0}^{p-1} \left\langle \mathbf{f}_s,\ \sum_{\nu=0}^{p-1-s} P^*_{\nu+s+1}\, \mathbf{v}^{g_k-h,\nu}_k \right\rangle_{\mathcal{L}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \left\langle f_s,\, A^*_{\nu+s+1}\, v^{g_k-h,\nu}_k \right\rangle_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \left\langle S^{\,i}_0\, f_s,\ \left[G^{\,i}_{\nu+s+1} + \sum_{j=1}^{m} \xi^{\,j}_{\nu+s+1,\,i} \cdot T^{\,j}_0 \right] v^{g_k-h,\nu}_k \right\rangle_{L_2(\Gamma)},$$

$$c^{**}_{kh} = \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \left\langle u^{h,s}_k,\, A^*_{\nu+s+1}\, v^{g_k-h,\nu}_k \right\rangle_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \left\langle S^{\,i}_0\, u^{h,s}_k,\ \left[G^{\,i}_{\nu+s+1} + \sum_{j=1}^{m} \xi^{\,j}_{\nu+s+1,\,i} \cdot T^{\,j}_0 \right] v^{g_k-h,\nu}_k \right\rangle_{L_2(\Gamma)}.$$

Однако эти формулы более громоздки и менее удобны для приложений, чем формулы (5.42)–(5.44).

Пример. В работах [15, 51] рассматривалась следующая несамосопряженная спектральная задача, которая возникает при решении нестационарного односкоростного уравнения переноса,

$$a\,\Delta u(x) + b\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^2\, u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad \alpha\,\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \lambda\, u(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{5.48}$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h} = (\mathbf{u}_k^{h,\,0},\, \mathbf{u}_k^{h,\,1},\, \ldots,\, \mathbf{u}_k^{h,\,p-1}),$$
$$\mathbf{u}_k^{h,\,i} = (u_k^{h,\,i},\, S_0^1\, u_k^{h,\,i},\, S_0^2\, u_k^{h,\,i},\, \ldots,\, S_0^m\, u_k^{h,\,i}),$$
$$i = 1,\, 2,\, \ldots,\, p-1.$$

Умножим скалярно равенство (5.45) справа на элемент $\dfrac{L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s}}{\left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_j^{\,s}, L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^p}}$.
В результате получим:

$$\frac{\left\langle \widetilde{\mathbf{f}},\; L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}}}{\left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_j^{\,s},\; L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh} \cdot \frac{\left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h},\; L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{H}]^{\,p}}}{\left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_j^{\,s},\; L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}}} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh} \cdot \delta_{k,\,j} \cdot \delta_{h,\,s} = c_{js}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты c_{kh} вычисляются по формуле

$$c_{kh} = c_{kh}^*/c_{kh}^{**}, c_{kh}^* = \left\langle \widetilde{\mathbf{f}},\, L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_k^{\,g_k-h} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}}, c_{kh}^{**} = \left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h},\, L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_k^{\,g_k-h} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}}. \tag{5.47}$$

Коэффициенты c_{kh} являются также коэффициентами разложения (5.19). Поэтому последнее равенство можно использовать и при вычислении коэффициентов разложения (5.19). При этом в качестве $\widetilde{\mathbf{f}}$ нужно брать элемент (5.46).

Из равенств

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{f}},\, L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}} = \left\langle L_1\,\widetilde{\mathbf{f}},\, \widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}},$$
$$\left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_j^{\,s},\, L_1^*\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}} = \left\langle L_1\,\widetilde{\mathbf{u}}_j^{\,s},\, \widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,g_j-s} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}}$$

следует, что

$$c_{kh}^* = \left\langle L_1\,\widetilde{\mathbf{f}},\, \widetilde{\mathbf{v}}_k^{\,g_k-h} \right\rangle_{[\mathcal{L}]^{\,p}} = \sum_{s=0}^{p-1} \left\langle \sum_{\nu=0}^{p-1-s} P_{\nu+s+1}\,\mathbf{f}_\nu,\; \mathbf{v}_k^{g_k-h,\,s} \right\rangle_{\mathcal{L}},$$

(c) набор $\{B_j\}_{j=1}^m$ образует накрывает оператор A.

Пусть A и B — два банаховых пространства. Обозначим через $L(A, B)$ множество всех непрерывных линейных отображений из A в B. Оператор $R \in L(A, B)$ называется *ретракцией*, если существует оператор $\in L(B, A)$, такой, что

$$RS = E \quad (\text{тождественный оператор из } L(B, B)).$$

При этом оператор S называется *коретракцией* (соответствующей R).

Глава 2

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях

Одним из основных моментов данной главы является выбор и построение функциональных пространств, в которых специальные производные цепочки, построенные по собственным и присоединенным функциям задачи, образуют базис или полную и минимальную систему.

2.1 К решению одного класса спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\begin{aligned} l(y,\lambda) &= l_0(y) + \lambda\, l_1(y) + \cdots + \lambda^n\, l_n(y) = 0, && (2.1)\\ U_j(y,\lambda) &= U_j^0(y) + \lambda\, U_j^1(y) + \cdots + \lambda^{\nu_j}\, U_j^{\nu_j}(y) = 0, && (2.2)\\ & \qquad j = 1,\, 2,\ \ldots\ ,\, n. \end{aligned}$$

задачи выполнены условия A и B, а также условия 1 и 2. Тогда коэффициенты c_{kh} из разложения (5.19) находятся по формуле

$$c_{kh} = \frac{c^*_{kh}}{c^{**}_{kh}}, \tag{5.42}$$

где

$$\begin{aligned} c^*_{kh} = &\sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \Big\langle A_{\nu+s+1}\, f_\nu\,,\, v_k^{g_k-h,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \Big\langle B^i_{\nu+s+1}\, \big(S_0^i\, f_\nu\big)\,,\, T_0^i\, v_k^{g_k-h,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned} c^{**}_{kh} = &\sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \Big\langle A_{\nu+s+1}\, u_k^{h,\,\nu}\,,\, v_k^{g_k-h,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-s} \Big\langle B^i_{\nu+s+1}\, \Big(S_0^i\, u_k^{h,\,\nu}\Big)\,,\, T_0^i\, v_k^{g_k-h,\,s} \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Здесь граничные операторы S_0^i и T_0^i определены равенствами (5.21), (5.22), (5.24); $u_k^{h,\,\nu}$ $(s = 0, 1, \ldots, p-1)$ — ν-ая компонента производной по Келдышу цепочки, построенной по канонической цепочке СПФ $\big\{u_k^h\big\}_{k=0}^{g_k}$ задачи (5.17)–(5.18); $v_k^{g_k-h,\,s}$ $(s = 0, 1, \ldots, p-1)$ — s-я компонента производной по Келдышу цепочки, построенной по канонической цепочке СПФ $\big\{v_k^h\big\}_{k=0}^{g_j}$ формально сопряженной задачи (5.31)–(5.32).

Доказательство. В силу непрерывности отображения, задающего след на границе, и того, что сходимость в сильной норме влечет сходимость в слабой норме, из (5.19) вытекает следующее равенство:

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh} \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_k^h. \tag{5.45}$$

Равенство (5.45) понимается как равенство в пространстве $[\mathcal{L}]^p$, причем здесь

$$\widetilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_0,\, \mathbf{f}_1,\, \ldots,\, \mathbf{f}_{p-1}), \quad \mathbf{f}_i = (f_i,\, S_0^1\, f_i,\, S_0^2\, f_i,\, \ldots,\, S_0^m\, f_i), \tag{5.46}$$

ные СЗ, то к равенствам (5.38)–(5.39) добавятся равенства:

$$(L_0 + \lambda_k L_1)\,\widetilde{\mathbf{u}}_k^h + L_0\,\widetilde{\mathbf{u}}_k^{h-1} = 0, \quad h = 1,\, 2,\, \ldots,\, g_k \quad (5.40)$$

$$\big((L_0)^* + \overline{\lambda_j}(\,L_1)^*\big)\,\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,s} + (L_0)^*\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,s-1} = 0, \;\; s = 1,\, 2,\, \ldots,\, g_j. \quad (5.41)$$

Соотношения биортогональности в случае кратных СЗ выводятся из равенств (5.38)–(5.41) тем же самым способом, как и в случае простых СЗ из равенств (5.38)–(5.39). Теорема доказана.

Замечание 1. В работе А.А. Шкаликова [56] получены соотношения биортогональности для пучков неограниченных операторов общего вида. Получены они на основе изучения резольвенты соответствующего оператора. Доказанная нами теорема (о соотношениях биортогональности) может быть получена и как следствие соотношений биортогональности из этой работы (см. формулу (2.19) [56, С. 154]).

Вычисление коэффициентов разложений. В этом параграфе доказан основной результат настоящей работы — теорема о вычислении коэффициентов разложений функции $\widetilde{f} = (f_0,\, f_1,\, \ldots,\, f_{p-1})$ из пространства $\mathcal{H}^0$ в ряд по производным цепочкам Келдыша $\widetilde{u}_k^h = (u_k^{h,0},\, u_k^{h,1},\, \ldots,\, u_k^{h,p-1})$, построенным по канонической системе СПФ u_k^h задачи (5.17)–(5.18).

Одно из условий теоремы состоит в том, чтобы f_ν ($\nu = 0,\, 1,\, \ldots,\, p-1$) принадлежало пространству H^r, где $r_\nu = \max\limits_j (l_j - (\nu + s + 1)\,d + m_j + 1,\, 2m - (\nu + s + 1)d)$. Требование $f_\nu \in H^{r_\nu}$ необходимо для того, чтобы имели смысл выражения $A_{\nu+s+1}\, f_\nu$ и $B^i_{\nu+s+1}\,\big(S_0^i\, f_\nu\big)$, фигурирующие в формуле (5.43). Это условие теоремы выполнено, так как $f_\nu \in H^{2m-(\nu+1)\,d}$, $A_{\nu+s+1}$ имеет порядок $2\,m - (\nu + s + 1)\,d$. Кроме того $l_j + m_j \le 2\,m$.

Теорема 4 (о вычислении коэффициентов). *Пусть* f_ν ($\nu = 0,\, 1,\, \ldots,\, p-1$) *принадлежит пространству* H^r*, где* $r_\nu = \max\limits_j (l_j - (\nu + s + 1)\,d + m_j + 1,\, 2m - (\nu + s + 1)d)$*, нуль не является собственным значением задачи (5.17)–(5.18) и для этой*

Здесь

$$l_\nu(y) \;=\; \sum_{s=\nu}^{n} p_{\nu s}(x)\, y^{(n-s)}, \quad \nu = 0,\, 1,\; \ldots\; ,\, n,$$

$$U_j^\nu(y) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} a_{j\,\nu\,k}\, y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{j\,\nu\,k}\, y^{(k)}(1), \quad \nu = 0,\, 1,\; \ldots\; ,\, \nu_j.$$

Коэффициенты $a_{j\,\nu\,k}$, $b_{j\,\nu\,k}$ являются комплексными числами, которые, в частности, могут быть равны нулю,

$$p_{ss}(x) = \mathrm{const},\;\; s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \quad p_{nn} \ne 0,$$

$p_{\nu s}(x)$ — достаточно гладкие функции, а $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ — произвольные полиномы от λ.

Изучение краевых задач (2.1)–(2.2) ведет начало от работ Дж. Биркгофа [68, 69]. В случае, когда $l_s(y) = 0$ при $s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$, $p_{00} = 1$ и $p_{0k} = 0$ при $k = 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, n-1$ в этих работах была найдена фундаментальная система решений уравнения (2.1) и выделен класс регулярных краевых условий, для которого была получена теорема о разложениях гладких функций в ряды по собственным и присоединенным функциям задачи.

В [50] была найдена асимптотика (по λ) системы фундаментальных решений уравнения (2.1) и получена теорема о возможности разложения гладкой функции в ряд по собственным функциям задачи (2.1)–(2.2) в самом общем случае.

В фундаментальных работах М.В. Келдыша [26, 27] было показано, что запас собственных и присоединенных функций полиномиального пучка n-го порядка столь богат, что в ряды по этим функциям, как правило, могут быть разложены одновременно n функций. Кроме того М.В. Келдыш отметил, что постановка задачи об n-кратных разложениях возникает естественным образом для обоснования метода Фурье при решении начально-краевой задачи для соответствующего уравнения с частными производными, из которого спектральная задача получается после разделения переменных.

В работе [55] были построены операторы, линеаризующие задачу (2.1)–(2.2) в пространствах $\mathcal{W}^r_{2,U} \times \mathbb{C}^{N_r}$, являющиеся подпространствами конечной коразмерности в произведениях пространств $W_2^{n+r-1} \times \cdots \times W_2^r \times \mathbb{C}^{N_r}$. Эти пространства в [55] построены явно. При этом если $r \geq r_0 = \max(0, \rho - n + 1)$, где ρ — максимальный из порядков краевых условий спектральной задачи (2.1)–(2.2), то $N_r = 0$ и линеаризатор имеет вид:

$$H\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\} =$$
$$= \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, -p_{nn}^{-1}\,(\,l_0(v_0) + l_1(v_1) + \cdots + l_{n-1}(v_{n-1})\,)\,\}.$$

При условии регулярности задачи (2.1)–(2.2) в [55] доказана теорема о базисности Рисса собственных и присоединенных функций $\widetilde{\mathbf{v}}^h_k$ линеаризатора H. А именно, любой элемент пространства $\mathcal{W}^r_{2,U}$ может быть разложен в ряд:

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \cdot \widetilde{\mathbf{v}}^h_k, \tag{2.3}$$

где ряд безусловно сходится после заключения некоторых его членов в скобки, расстановка которых не зависит от $\widetilde{\mathbf{v}}$.

Важной является задача вычисления c_{kh} разложения элемента $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}^r_{2,U}$ в ряд по системе $\widetilde{\mathbf{v}}^h_k$. Конечно, $c_{kh} = \langle \widetilde{\mathbf{v}}, \widetilde{\mathbf{g}}^h_k \rangle$, где $\{\widetilde{\mathbf{g}}^h_k\}$ — система функций биортогональная к $\{\widetilde{\mathbf{v}}^h_k\}$. Но вычислить явно $\{\widetilde{\mathbf{g}}^h_k\}$ — трудно осуществимая задача. Мы же хотим выразить коэффициенты разложений в терминах собственных функций задачи, сопряженной к (2.1)–(2.2).

Если краевые условия (2.2) не зависят от λ, то задачу (2.1)–(2.2) можно рассматривать как пучок n-го порядка дифференциальных операторов в $L_2(0,1)$: $(P_0 + \lambda\, P_1 + \cdots + \lambda^n\, P_n)\, y = 0$, где области определения операторов P_ν можно считать совпадающими с

$$D(P_0) = \big\{ y \quad / \quad y \in W_2^2, \quad U_j(y) = 0, j = 1, 2, \ldots, n \big\}.$$

производные по Келдышу цепочки $\widetilde{\mathbf{u}}^h_k = (\mathbf{u}^{h,0}_k, \mathbf{u}^{h,1}_k, \ldots \mathbf{u}^{h,p-1}_k)$ ($\widetilde{\mathbf{v}}^s_j = (\mathbf{v}^{s,0}_j, \mathbf{v}^{s,1}_j, \ldots \mathbf{v}^{s,p-1}_j)$) длины p, построенные по этой системе, образуют каноническую цепочку СПФ линейного операторного пучка $L(\lambda)$ ($[L(\overline{\lambda})]^*$). Верно и обратное: если вектор-функции $\widetilde{\mathbf{u}}^h_k = (\mathbf{u}^{h,0}_k, \mathbf{u}^{h,1}_k, \ldots \mathbf{u}^{h,p-1}_k)$ ($\widetilde{\mathbf{v}}^s_j = (\mathbf{v}^{s,0}_j, \mathbf{v}^{s,1}_j, \ldots \mathbf{v}^{s,p-1}_j)$) образуют каноническую цепочку СПФ линейного операторного пучка пучка $L(\lambda)$ ($[L(\overline{\lambda})]^*$), то первые компоненты этих вектор-функций образуют каноническую цепочку СПФ пучка $P(\lambda)$ ($[P(\overline{\lambda})]^*$).

Пусть все СЗ спектральной задачи (5.17)–(5.18) и формально сопряженной спектральной задачи (5.31)–(5.32) — простые, $\widetilde{\mathbf{u}}^0_k$ — СФ пучка $L(\lambda)$, соответствующая СЗ λ_k, $\widetilde{\mathbf{v}}^s_j$ — СФ пучка $[L(\overline{\lambda})]^* = (L_0)^* + \lambda(\,L_1)^*$, соответствующая СЗ $\overline{\lambda_j}$. Тогда верны равенства

$$(L_0 + \lambda_k\, L_1)\, \widetilde{\mathbf{u}}^0_k = 0, \tag{5.38}$$
$$\big((L_0)^* + \overline{\lambda_j}(\,L_1)^*\big)\, \widetilde{\mathbf{v}}^0_j = 0. \tag{5.39}$$

Умножим скалярно равенство (5.38) справа на функцию $\widetilde{\mathbf{v}}^0_j$, а равенство (5.39) — слева на $\widetilde{\mathbf{u}}^0_k$ и вычтем одно из другого. Получим

$$(\lambda_k - \lambda_j) \cdot \big\langle \widetilde{\mathbf{u}}^0_k, (\,L_1)^* \widetilde{\mathbf{v}}^0_j \big\rangle_{[\mathcal{L}]^p} = 0.$$

Отсюда следует, что при $k \neq j$ скалярное произведение $\Big\langle\, \widetilde{\mathbf{u}}^0_k, (L_1)^*\, \widetilde{\mathbf{v}}^0_j\, \Big\rangle_{[\mathcal{L}]^p}$ равно нулю. Кроме того, поскольку система функций $\{\widetilde{\mathbf{u}}^0_k\}$ полна в пространстве $[\mathcal{L}]^p$ (см. теорему 5.2) и нуль, согласно предположению, не является СЗ, то $\big\langle \widetilde{\mathbf{u}}^0_k, (L_1)^* \widetilde{\mathbf{v}}^0_k \big\rangle_{[\mathcal{L}]^p} \neq 0$.

Таким образом, если все СЗ пучка $P(\lambda)$ и $[P(\overline{\lambda})]^*$ — простые, то верно следующее равенство:

$$\frac{\big\langle \widetilde{\mathbf{u}}^0_k, (L_1)^* \widetilde{\mathbf{v}}^0_j \big\rangle_{[\mathcal{L}]^p}}{\big\langle \widetilde{\mathbf{u}}^0_k, (L_1)^* \widetilde{\mathbf{v}}^0_k \big\rangle_{[\mathcal{L}]^p}} = \delta_{k,j}.$$

В случае, если спектральная задача (5.17)–(5.18) имеет крат-

вы следующие соотношения биортогональности:

$$\frac{\left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_k^h,\ L_1^*\widetilde{\mathbf{v}}_j^s\right\rangle_{[\mathcal{L}]^p}}{\left\langle \widetilde{\mathbf{u}}_k^h,\ L_1^*\widetilde{\mathbf{v}}_j^{g_k-h}\right\rangle_{[\mathcal{L}]^p}} = \delta_{k,j}\cdot\delta_{h,\,g_j-s}, \tag{5.36}$$

где L_1 *— матрица следующего вида:*

$$L_1{}^* = \begin{pmatrix} P_1^* & P_2^* & \dots & P_{p-1}^* & P_p^* \\ P_2^* & P_3^* & \dots & P_p^* & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{p-1}^* & P_p^* & \dots & 0 & 0 \\ P_p^* & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.37}$$

Доказательство. Рассмотрим следующие операторы

$$L_0 \;=\; \begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -P_2 & -P_3 & \dots & -P_{p-1} & -P_p \\ 0 & -P_3 & -P_4 & \dots & -P_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -P_{p-1} & -P_p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -P_p & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 \;=\; \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{p-1} & P_p \\ P_2 & P_3 & P_4 & \dots & P_p & 0 \\ P_3 & P_4 & P_5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{p-1} & P_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что множество СЗ $\{\lambda_k\}$ (множество СЗ $\{\overline{\lambda_j}\}$) пучка $P(\lambda)$ (пучка $[P(\overline{\lambda})]^*$) и множество СЗ пучка $L(\lambda) = L_0 + \lambda\, L_1$ (пучка $[L(\overline{\lambda})]^*$) совпадают. При этом, если $\mathbf{u}_k^h$, $h = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ g_k$ ($\mathbf{v}_j^s$, $s = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ g_j$) образуют каноническую цепочку СПФ пучка $P(\lambda)$ (пучка $[P(\overline{\lambda})]^*$), то

В этом случае формулы для коэффициентов разложения получаются из общих формул [56, Теорема 2.1].

Если краевые условия (2.2) зависят от λ, то область определения пучка операторов также зависит от λ и формулы из [56] непосредственно применены быть не могут.

В этом параграфе мы выделим класс задач вида (2.1)–(2.2) для которых предложим два метода для вычисления коэффициентов разложения. Полученные формулы будут иметь разную форму. Если система $\{\widetilde{\mathbf{v}}_k^h\}$ собственных и присоединенных функций линеаризатора H полна в пространстве, где действует этот оператор (например, это так если задача регулярна), то биортогональная система определяется однозначно, а потому значения коэффициентов разложения, даваемые разными формулами, будут совпадать.

Предположим, что формы $U_1^0(y),\ U_2^0(y),\ \ \dots\ ,\ U_n^0(y)$ задачи (2.1)–(2.2) — линейно независимы (Этого всегда можно добиться рассматривая соответствующие линейные комбинации форм $U_j(y,\lambda)$). Обозначим через

$$U_{n+1}^0(y),\ U_{n+2}^0(y),\ \dots\ ,\ U_{2n}^0(y)$$

такие n линейных однородных форм от переменных $y^{(k)}(0)$, $y^{(k)}(1)$, $(k = 0,\ 1, \dots , n-1)$ с коэффициентами не зависящими от λ, чтобы формы

$$U_1^0(y),\quad U_2^0(y),\ \dots\ , U_n^0(y),\quad U_{n+1}^0(y),\quad U_{n+2}^0(y),\ \cdots\ ,\quad U_{2n}^0(y)$$

образовывали линейную независимую систему.

На протяжении всей работы через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ обозначается скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть $l_0^*(z)$ — сопряженное дифференциальное выражение к выражению $l_0(y)$ в пространстве L_2, определяемое интегрированием по частям:

$$\langle\, l_0(y),\ z\rangle_{L_2} = \langle\, y, l_0^*(z)\rangle_{L_2} + P_0(y,z).$$

Через $V_1^{\,0}(z), \ \dots \ V_n^0(z), \ V_{n+1}^0(z), \ \dots \ , \ V_{2n}^0(z)$ обозначим линейные однородные формы от переменных $z^{(k)}(0), \ z^{(k)}(1)$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, которые содержатся в билинейной форме обынтегрированных членов
$P_0(y,z) = U_1^{\,0}(y) \cdot \overline{V_{2n}^0(z)} + U_2^0(y) \cdot \overline{V_{2n-1}^0(z)} + \dots + U_{2n}^0(y) \cdot \overline{V_1^{\,0}(z)}$.

В третьей главе приводится основной результат работы — теорема о вычислении коэффициентов разложения (2.3) для спектральных задач (2.1)–(2.2), удовлетворяющих условиям $\mathbf{U}$ и $\mathbf{P}$:

U: *Формы $U_j^{\,\nu}(y)$ при $\nu = 1, 2, \dots, m$ являются линейными однородными формами от переменных $U_{n+1}^0(y), \ U_{n+2}^0(y), \ \dots, \ U_{2n}^0(y)$:*

$$U_i^{\,\nu}(y) = \xi_{i1}^{\,\nu}\, U_{n+1}^0(y) + \xi_{i2}^{\,\nu}\, U_{n+2}^0(y) + \dots + \xi_{in}^{\,\nu}\, U_{2n}^0(y),$$

где $\xi_{ij}^{\,\nu} \in$ C, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. (Постоянные $\xi_{ij}^{\,\nu}$ могут быть равны нулю. В частности, если краевые условия не зависят от λ, то условие $\mathbf{U}$ выполняется, поскольку можно выбрать все $\xi_{ij}^{\,\nu}$ равными нулю.)

P: *Билинейные формы обынтегрированных членов $P_\nu(y,z)$ $(\nu = 1, \ 2, \ \dots, \ n)$, которые возникают из равенства*

$$\langle\, l_\nu(y)\,, \ z\,\rangle_{L_2} = \langle\, y\,, \ l_\nu^* z\,\rangle_{L_2} + P_\nu(y,z),$$

удовлетворяют условию:

$$P_\nu(y,z) = \overline{\gamma_1^\nu} \cdot U_{n+1}^0(y) + \overline{\gamma_2^\nu} \cdot U_{n+2}^0(y) + \dots + \overline{\gamma_n^\nu} \cdot U_{2n}^0(y), \nu = 1, \ 2, \ \dots \ , \ n.$$

где коэффициенты $\overline{\gamma_1^\nu}, \overline{\gamma_2^\nu}, \dots, \overline{\gamma_n^\nu}$ являются некоторыми линейными однородными от переменных

$$z(0), \ z(1), \ z'(0), \ z'(1), \ \dots \ , \ z^{(n-1)}(0), \ z^{(n-1)}(1).$$

Заметим, что условия $\mathbf{U}$ и $\mathbf{P}$ не столь ограничительны, как это может показаться на первый взгляд. В частности, эти условия выполнены, если краевые условия не зависят от спектрального параметра. Таким образом, рассматриваемый класс охватывает все задачи для пучков линейных дифференциальных операторов, в

такое N, что

$$\| \,\widetilde{\mathbf{f}} - \sum_{k=1}^{N} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh} \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h} \,\|_{[\mathcal{L}]^p} < C_1\, \varepsilon.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_0, \, \mathbf{f}_1, \, \dots, \, \mathbf{f}_{p-1}), \quad \widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h} = (\mathbf{u}_k^{h,\,0}, \, \mathbf{u}_k^{h,\,1}, \dots, \, \mathbf{u}_k^{h,\,p-1})$.

Вместе с тем множество функций $\left\{ \widetilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_0, \, \mathbf{f}_1, \, \dots, \, \mathbf{f}_{p-1}) \ / f_i \in H^{\,2m}(\Omega) \right\}$ плотно в $[\mathcal{L}]^{\,p}$ (см. лемму (о плотности), доказанную выше). Поэтому для любой функции $\widetilde{\mathbf{u}}$ из пространства $[\mathcal{L}]^{\,p}$ найдется такое N, что

$$\| \,\widetilde{\mathbf{u}} - \sum_{k=1}^{N} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh} \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h} \,\|_{[\mathcal{L}]^p} < C_2\, \varepsilon.$$

Поскольку ε — произвольно, то отсюда следует, что замыкание линейной оболочки элементов $\widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h}$ совпадает с $[\mathcal{L}]^p$. Теорема доказана.

Соотношения биортогональности.
Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_k^{\,h} = (\mathbf{u}_k^{h,\,0}, \, \mathbf{u}_k^{h,\,1}, \, \dots \mathbf{u}_k^{h,\,p-1})$ — производные по Келдышу цепочки длины p, построенные по канонической системе СПФ $\mathbf{u}_k^h$ $(h = 0, \, 1, \, \dots, \, g_k)$ пучка $P(\lambda)$, а $\widetilde{\mathbf{v}}_j^{\,s} = (\mathbf{v}_j^{s,\,0}, \, \mathbf{v}_j^{s,\,1}, \, \dots \mathbf{v}_j^{s,\,p-1})$ — производные цепочки Келдыша длины p, построенные по канонической системе СПФ $\mathbf{v}_j^s$ $(j = 0, \, 1, \, \dots, \, g_j)$ сопряженного пучка $[P(\overline{\lambda})]^*$.

Теорема 3 (о соотношениях биортогональности).
Пусть нуль не является СЗ задачи (5.17)–(5.18) и выполнены условия теоремы Шкреда о полноте (а именно, краевая задача (5.17)–(5.18) удовлетворяет условиям 1 и 2 на множестве Λ, которое содержит набор лучей $\{\beta_j\}_{j=1}^N$ в комплексной плоскости, разбивающей ее на секторы раствора меньше, чем $\frac{\pi}{n}$; система граничных операторов $B^{\,j}$ нормальная). Тогда справедли-

Теорема. Пусть краевая задача (5.17)–(5.18) удовлетворяет условиям 1 и 2 на множестве Λ, которое содержит набор лучей $\{\beta_j\}_{j=1}^N$ в комплексной плоскости, разбивающей ее на секторы раствора меньше, чем $\frac{\pi}{n}$. Пусть также система граничных операторов B^j нормальная. Тогда система производных по Кедышу цепочек задачи (5.17)–(5.18) полна в пространстве $\mathcal{H}^0_{\{B^j\}}$.

Теорема 2 (о полноте). *Пусть выполнены условия теоремы о полноте из [57], приведенные выше. Тогда система $\left\{\widetilde{\mathbf{u}}_k^h\right\}$ производных по М.В. Келдышу цепочек пучка $P(\lambda)$ полна в пространстве $[\mathcal{L}]^p = [L_2(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^m]^p$.*

Доказательство. Поскольку система производных по Келдышу цепочек $\widetilde{u}_k^h = (u_k^{h,0}, u_k^{h,1}, \ldots, u_k^{h,p-1})$ полна в пространстве $\mathcal{H}^0_{\{B^j\}}$, то вектор $\widetilde{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{p-1})$, где $f_i \in H^{2m}(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, в пространстве $[L_2(\Omega)]^p$ может быть аппроксимирован при достаточно большом N суммой

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh} \cdot \widetilde{u}_k^h.$$

Согласно определению СПФ задачи (5.17)–(5.18) элементы $u_k^{h,i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$ принадлежат пространству $H^{2m}(\Omega)$. Отсюда и из теоремы о следах (см. [54, с. 412]) следует, что имеют смысл выражения

$$S_0^j\, u_k^{h,i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1, \quad j = 1, 2, \ldots, m).$$

В силу непрерывности отображения, задающего след на границе, элемент $\mathbf{f}_i = (f_i, S_0^1 f_i, \ldots, S_0^m f_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ аппроксимируется в пространстве $\mathcal{L}$ суммой

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh} \cdot \mathbf{u}_k^{h,i},$$

где $\mathbf{u}_k^{h,i} = (u_k^{h,i}, \ S_0^1\, u_k^{h,i}, \ \ldots, \ S_0^m\, u_k^{h,i})$, $\qquad i = 0, 1, \ldots, p-1$. Следовательно, если $f_i \in H^{2m}(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, то найдется

краевые условия которых спектральный параметр не входит. Кроме того, конкретные задачи с параметром в краевых условиях (см. [12, 22, 25, 30, 32, 73, 85]), рассмотренные ранее, также подпадают под этот класс. В конце параграфа для примера вычислены коэффициенты разложения для одной из таких задач.

Доказательство теоремы о вычислении коэффициентов проводится в два этапа. На первом этапе спектральная задача сводится к пучку неограниченных операторов, действующему в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$ таким образом, чтобы между собственными функциями сопряженного пучка операторов и сопряженной спектральной задачи можно было установить взаимно однозначное соответствие. На втором — показывается, что коэффициенты разложения по производным цепочкам пучка операторов совпадают с коэффициентами из равенства (2.3).

Доказательству теоремы предшествуют три леммы. В лемме 1 доказывается существование сопряженного пучка операторов. В лемме 2 указан общий метод определения области определения сопряженного пучка операторов (или сопряженного оператора). В лемме 3 показано, что собственные значения сопряженной спектральной задачи и сопряженного пучка операторов совпадают, а между их собственными и присоединенными функциями можно установить взаимно однозначное соответствие.

2.2 Описание используемых пространств

Для представления решений смешанной задачи в виде ряда не обойтись без описания используемых пространств, в которых сходятся соответствующие ряды. Обоснование использования этих пространств проведено в работе [55]. Поскольку соответствующие обоснования уже проделаны в этой работе, мы можем изложить то, как строятся эти пространства, в более подробной удобной для нас описательной форме.

Задачу (1.1)–(1.2) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
l(y,\lambda) &= l_0(y)+\dots+\lambda^{n-1}\,l_{n-1}(y)+p_{nn}\,\lambda^n\,y=0,\\
U_j(y,\lambda) &= \lambda^{m_j}\,U_j^{m_j}(y)+\dots+\lambda\,U_j^0+U_j^0=0, \qquad j=1,\,\dots,\,n,
\end{aligned}
$$

где $l_s(y)$, $s=0,\,\dots,\,n-1$, — дифференциальные выражения порядка $n-s$, а U_j^{ν}, $\nu=0,\,\dots,\,m_j$, — линейные формы, не зависящие от λ.

Оператор H, линеаризующий задачу (1.1), (1.2) (линеаризатор) согласно [55], действует по формуле

$$
\begin{gathered}
H\{v_0,v_1,\,\dots,v_{n-1}\}=\\
=\{v_1,v_2,\,\dots,v_{n-1},\,-p_{nn}^{-1}\,(\,l_0(v_0)+l_1(v_1)+\dots+l_2(v_{n-1})\,)\,\}.
\end{gathered}
$$

Если $\widetilde{\mathbf{v}}=\{v_0(x),v_1(x),\dots,v_{n-1}(x)\}\in\mathcal{W}_2^r=W_2^{n-r+1}\times W_2^{n+r-2}\times\dots\times W_2^r$, то при $r\geq 0$ действие оператора определено корректно и уравнение (1.1) эквивалентно следующему: $H\widetilde{\mathbf{v}}=\lambda\,\widetilde{\mathbf{v}}$.

Последнее равенство линеаризует уравнение (1.1) ($v_0=y$). Необходимо линеаризовать еще и краевые условия. Для корректной линеаризации приходится использовать пространства $\mathcal{W}_{2,U}^r$, которые являются пространствами конечной коразмерности в пространствах $\mathcal{W}_2^r$. Одна и та же спектральная задача может быть линеаризована в различных пространствах $\mathcal{W}_{2,U}^r$, т. е. при различных r и U. Здесь U характеризует ограничения на значения элементов пространства $\mathcal{W}_2^r$ в нуле и в единице и зависит от порядка краевых условий спектральной задачи. (В отличие от работы [55] мы не будем использовать линеаризацию задачи в пространствах $\mathcal{W}_{2,U}^r\times\mathbb{C}^N$. Для нас более удобна линеаризация спектральной задачи в тех пространствах, в представлении которых в виде декартового произведения, не содержится пространств комплексных чисел.)

Опишем эти пространства связанные со спектральной задачей. Рассмотрим вначале случай, когда комплекснозначные коэффициенты $a_{jk}(\lambda)=a_{jk}(\lambda),\ b_{jk}(\lambda)=b_{jk}(\lambda)$ являются полиномами от

В дальнейшем нами будет использована теорема о полноте из работы [57]. Теорема о полноте производных по Келдышу цепочек в работе [57] сформулирована с помощью условий, при которых М.С. Агранович и М.И. Вишик изучали в работе [2] эллиптические задачи с параметром.

Для формулировки этой теоремы произведем в уравнении (5.17) замену комплексного параметра λ на μ^d, а также заменим D_k на ξ_k ($k=1,\,2,\,\dots,\,n$). Старшую однородную по μ и ξ часть полинома $A(x,\,\xi,\,\mu)$ степени $2m$ обозначим $\widetilde{A}(x,\,\xi,\,\mu)$. Через Λ обозначим множество в комплексной μ-плоскости, содержащее набор лучей (или углов) с вершиной в нуле.

Условие 1. *Для всех* $x\in\overline{\Omega}$, $\quad\mu\in\Lambda$, $\quad|\xi|+|\mu|\neq 0$, $\quad\xi\in\mathbb{R}^n$ *выполнео следующее неравенство:* $\widetilde{A}(x,\,\xi,\,\mu)\neq 0$.

Пусть x' — произвольная точка на Γ. Предположим, что операторы $A(x,\,D,\,\lambda)$ и $B^j(x,\,D,\,\lambda)$ ($j=1,\,2,\,\dots,\,m$) записаны в системе координат, связанной с этой точкой (см. [2, с. 63]). Сделаем в них замены λ на μ^d и D_k на ξ_k ($k=1,\,2,\,\dots,\,n$) (Направление оси Ox_n совпадает с направлением внутренней нормали к Γ в точке x') и рассмотрим на полупрямой $x_n\geq 0$ задачу

$$
\widetilde{A}(x',\,\xi',\,-\frac{id}{dx_n},\,\mu)v(x_n)=0, \tag{5.34}
$$

$$
\widetilde{B}^j(x',\,\xi',\,-\frac{id}{dx_n},\,\mu)v(x_n)=h_j, \quad (j=1,\,2,\,\dots,\,m) \tag{5.35}
$$

где $\xi'=(\xi_1,\,\xi_2,\,\dots,\,\xi_{n-1}\in\mathbb{R}^{n-1}$, а через $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}^j$ обозначены старшие однородные части полиномов $A(x,\,D,\,\lambda)$ и $B^j(x,\,D,\,\lambda)$ после указанных замен.

Условие 2. *При всех* $\mu\in\Lambda$, $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $|\xi'|+|\mu|\neq 0$, *а также для любых* h_j ($j=1,\,2,\,\dots,\,m$) *задача (5.34)–(5.35) имеет одно и только одно решение в пространстве убывающих на бесконечности решений уравнения (5.34).*

В работе А.В. Шкреда [57] доказана следующая чающая СЗ λ_k, то элементы $\{\mathbf{v}_k^s\}_{s=0}^{g_k}$ где $\mathbf{v}_k^s = (v_k^s,\, T_0^1 v_k^s,\, T_0^2 v_k^s,\, \ldots,\, T_0^m v_k^s)$ составляют СПФ пучка $[P(\overline{\lambda})]^*$. Обратно, первые компоненты СПФ сопряженного операторного пучка образуют СПФ формально сопряженной задачи. Теорема доказана.

Полнота производных по Келдышу цепочек. Пусть $\{\widetilde{\mathbf{u}}_k^h\}$ — производные по Келдышу цепочки, построенные по канонической системе СПФ $\{\mathbf{u}_k^h\}$ пучка $P(\lambda)$ (Определение см. в [27] или [56, с.149]). В этом параграфе получена теорема о полноте производных по Келдышу цепочек $\{\widetilde{\mathbf{u}}_k^h\}$. Этот результат будет использован в следующем параграфе для получения соотношений биортогональности.

Так же как это сделано в работе [57] определим следующие гильбертовы пространства $\mathcal{H}^k = H^{2m+(k-1)d} \times H^{2m+(k-2)d} \times \cdots \times H^{kd}$, $k = 0, 1$, где $H^s = H_2^s(\Omega)$ — пространства Соболева с нормой $\|\cdot\|_s$. Пространство $\mathcal{H}^k$ состоит из элементов

$$\widetilde{f} = (f_0,\, f_1,\, \ldots,\, f_{p-1}), \qquad f_j \in H^{2m+(k-j-1)d}$$

с нормой

$$\|\widetilde{f}\| = \left(\sum_{j=0}^{p-1} \|\, f_j \,\|^2_{H^{2m+(k-j-1)d}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^1_{\{B^j\}} \;&=\; \Big\{ \widetilde{f} = (f_0,\, f_1,\, \ldots,\, f_{p-1}) \in \mathcal{H}^1 \;\Big/\; \Big(\sum_{k=0}^{p_j} B_k^j\, f_{s+k} \Big)_\Gamma = 0, \\
&\qquad j = 1, 2, \ldots, m: \quad s = 0,\, 1,\, \ldots,\, p-1-[l_j/d] \Big\}, \\
\mathcal{H}^0_{\{B^j\}} \;&=\; \Big\{ \widetilde{f} = (f_0,\, f_1,\, \ldots,\, f_{p-1}) \in \mathcal{H}^0 \;\Big/\; \Big(\sum_{k=0}^{p_j} B_k^j\, f_{s+k} \Big)_\Gamma = 0, \\
&\qquad j = 1, 2, \ldots, m: \quad s = 0,\, 1,\, \ldots,\, p-2-[l_j/d] \Big\},
\end{aligned}$$

где $[r]$ — целая часть действительного числа r.

λ степени не выше $n-1-k$. В этом случае задача может быть линеаризована в пространстве $\mathcal{W}^0_{2,U}$.

Продемонстрируем то как это делается. В каждом краевом условии (1.1) слагаемые $\lambda^k y^{(i)}(0)$, $\lambda^k y^{(i)}(1)$ заменим на $v_k^{(i)}(0)$, $v_k^{(i)}(1)$ так, чтобы параметр λ в новом краевом условии отсутствовал. Обозначим это новое условие так: $V_{0j} = 0$. В случае, если порядок краевого условия (1.2) меньше $n-1$, то проделаем аналогичную замену и для условий $\lambda^m U_j$, где $m = 1, 2, \ldots, n-1-\kappa_j$ В результате указанной процедуры получим $n^2-\kappa$ краевых условий $V_{mj} = 0$ (здесь $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $\quad m = 0, 1, \ldots, n-1-\kappa_j$, а κ — суммарный порядок краевых условий). Полученные краевые условия не содержат параметра λ. Формы V_{mj} являются линейными однородными формами от переменных $v_k^{(i)}(0)$, $v_k^{(i)}(1)$, $\quad k, i = 0, 1, \ldots, n-1$, $\quad k+i \le n-1$.

Условия V_{mj} назовем *линеаризованными краевыми условиями.* Переменные $v_k^{(i)}(0)$, $v_k^{(i)}(1)$ будем называть переменными порядка s, если $i+k=s$. Линеаризованное краевое условие V_{mj} будем называть *краевым условием порядка* s, если максимальный порядок переменных $v_k^{(i)}(0)$, $v_k^{(i)}(1)$, входящих в линеаризованное краевое условие V_{mj}, равен s.

Двойная индексация краевых условий неудобна. Поэтому введем другую нумерацию краевых условий. Через

$$V_j = 0, \quad j = n^2-\kappa-n+1,\, n^2-\kappa-n+2,\, \ldots,\, n^2-\kappa$$

будем обозначать линеаризованные краевые условия, которые прежде записывались как: $V_{n-1-\kappa_j,\, j}$. Эти линеаризованные условия имеют порядок $n-1$. Всего их n штук. Все остальные линеаризованные условия будем обозначать следующим образом: $V_j = 0$, $\quad (j = 1, 2, \ldots, n^2-\kappa-n)$. Они имеют порядок меньше $n-1$. Таким образом, в этом случае мы можем определить пространство $\mathcal{W}^0_{2,U}$ как множество функций

$$\Big\{\widetilde{\mathbf{v}} = \{v_0(x), v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)\} \Big/ \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}^0_2 = W_2^{n-1} \times W_2^{n-2} \times \\ \times \cdots \times L_2; \qquad V_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa - n\Big\}$$

со скалярным произведением, равным сумме соответствующих скалярных произведений перемножаемых пространств.

Определим в пространстве $\mathcal{W}^0_{2,U}$ оператор H равенством (**??**). Область определения оператора зададим следующим образом:

$$D(H) = \mathcal{W}^1_{2,U} = \big\{\widetilde{\mathbf{v}} \big/ \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}^1_2 = W_2^n \times W_2^{n-1} \times \cdots \times W_2^1, \\ V_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa\big\}$$

Обратим внимание, что коразмерность пространства $\mathcal{W}^0_{2,U}$ в $\mathcal{W}^0_2$ (она совпадает с числом линеаризованных краевых условий) равна $n^2 - \kappa - n$, а коразмерность пространства $\mathcal{W}^1_{2,U}$ в $\mathcal{W}^1_2$ равна $n^2 - \kappa$.

В [55] показано следующее:

1. Определенный выше оператор H является замкнутым оператором в пространстве $\mathcal{W}^0_{2,U}$ с плотной областью определения $D(H) = \mathcal{W}^1_{2,U}$. Его спектр совпадает со спектром задачи (1.1)–(1.2).

2. Если $y^0, y^1, \ldots, y^h$ — цепочка СПФ задачи (1.1)–(1.2), отвечающая СЗ λ_0, то элементы $\widetilde{\mathbf{v}}^s = \{y^{0,s}, \ldots, y^{n-1,s}\}$, $s = 0, 1, \ldots, h$, где

$$y^{l,s} = \frac{d^l}{dt^l} e^{\lambda_0 t} \left(y^s + \frac{t}{1!} y^{s-1} + \cdots + \frac{t^s}{s!} y^0\right)\Bigg|_{t=0},$$

образующие производную по Келдышу цепочку СПФ спектральной задачи, являются цепочкой СПФ оператора H, отвечающей тому же СЗ λ_0; и наоборот, если $\widetilde{\mathbf{v}}^0, \widetilde{\mathbf{v}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{v}}^h$ — цепочка СПФ оператора H, отвечающая СЗ λ_0, то первые компоненты элементов $\widetilde{\mathbf{v}}^0, \widetilde{\mathbf{v}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{v}}^h$ составляют цепочку СПФ задачи (1.1)–(1.2), отвечающей тому же СЗ λ_0.

раторного пучка $[P(\overline{\lambda})]^*$ совпадают с учетом их кратностей; а каждой цепочке СПФ $\{v_k^s\}_{s=0}^{g_k}$ формально сопряженной задачи, отвечающей СЗ $\overline{\lambda}_k$ соответствует цепочка СПФ $\{\mathbf{v}_k^s\}_{s=0}^{g_k}$, отвечающая тому же СЗ $\overline{\lambda}_k$; причем формула этого соответствия выражается следующим равенством: $\mathbf{v}_k^s = (v_k^s, T_0^1 v_k^s, T_0^2 v_k^s, \ldots, T_0^m v_k^s)$, $s = 0, 1, \ldots, g_k$.

Доказательство. Сопряженный к $P(\lambda)$ операторный пучок $[P(\overline{\lambda})]^*$ определяется равенством $[P(\overline{\lambda})]^* = (P_0)^* + \lambda (P_1)^* + \lambda^2 (P_2)^* + \cdots \lambda^p (P_p)^*$. Из лемм о сопряженном операторе и сужениях сопряженных операторов $(P_k)^*$ следует, что $D(P_0^*) = D((P_0)^*) \subset D(P_k^*) \subset D((P_k)^*)$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Область определения $D([P(\overline{\lambda})]^*)$ сопряженного операторного пучка представляет собой пересечение областей определения всех операторов-слагаемых. Поэтому $D([P(\overline{\lambda})]^*) = \bigcap_{k=0}^p D((P_k)^*) = D(P_0^*)$.

Если $\mathbf{v} \in D([P(\overline{\lambda})]^*) = D(P_0^*)$, то "действие" сопряженного операторного пучка представляется следующим образом:

$$[P(\overline{\lambda})]^*\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k \left(A_k^* v,\ [B_k^1(x, D)]^*,\ [B_k^2(x, D)]^*,\ \ldots,\ [B_k^m(x, D)]^*\right),$$

где $[B_k^i(x, D)]^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 0, 1, \ldots, p)$ определены равенствами (5.33).

Если v_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — собственная функция (СФ) задачи (5.31)–(5.32), отвечающей СЗ λ_k, то вектор-функция $\mathbf{v}_k = (v_k, T_0^1 v_k, T_0^2 v_k, \ldots, T_0^m v_k)$ из пространства $\mathcal{L} = L_2(\Omega) \times [L_2(\Gamma)]^m$ принадлежит области определения $D([P(\overline{\lambda})]^*)$ сопряженного операторного пучка и является СФ пучка $[P(\overline{\lambda})]^*$, отвечачающей тому же СЗ λ_k.

Верно и обратное: если $\mathbf{v}_k$ — СФ пучка $[P(\overline{\lambda})]^*$, то первая компонента этой функции является СФ формально сопряженной задачи (5.31)–(5.32), отвечающей тому же СЗ λ_k.

Далее, если $\{v_k^s\}_{s=0}^{g_k}$ — цепочка СПФ задачи (5.31)–(5.32), отве-

Доказательство. Из условий A и B для любых $\mathbf{u} \in D(P_k)$ и $\mathbf{v} \in D(P_k)$ имеем:

$$\langle P_k\,\mathbf{u}, \mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}} = \int_\Omega (A_k\,u)\cdot \overline{v}\,dx + \sum_{j=1}^m \int_\Gamma \left(B_k^j\,u\right)\cdot \overline{\alpha_{kj}}\,ds = \int_\Omega u\cdot \overline{(A_k^* v)}\,dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int_\Gamma S_0^i\,u\cdot \overline{G_k^i\,v}\,ds + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \int_\Gamma \xi_{ki}^j \cdot \left(S_0^i\,u\right)\cdot \overline{\alpha_{kj}}\,ds =$$

$$= \int_\Omega u\cdot \overline{(A_k^*\,v)\;dx} + \sum_{i=1}^m \int_\Gamma S_0^i\,u\cdot \overline{\left(G_k^i\,v + \sum_{j=1}^m \overline{\xi}_{ki}^j\cdot\alpha_{kj}\right)}\,ds = \langle\,\mathbf{u}, P_k^*\,\mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}}\,.$$

Таким образом, $P_k^* \subset (P_k)^*$. Лемма доказана.

Сопряженный операторный пучок и формально сопряженная задача.

Определение. *Пусть для задачи (5.17)–(5.18) выполнены условия A и B. Формально сопряженной к задаче (5.17)–(5.18) назовем следующую спектральную задачу:*

$$A^*\,(\,x,\,D,\,\lambda)\,v(x) = \left[\sum_{k=0}^p \lambda^k A_k^*\,(x,\,D)\right] v(x) = 0,\ \ x\in\Omega, \tag{5.31}$$

$$\left[B^i\,(x,\,D,\,\lambda)\right]^*\,v(x) = \left[\sum_{k=0}^p \lambda^k [B_k^i\,(x,\,D)]^*\right] v(x) = 0,\ \ x\in\Gamma, \tag{5.32}$$

где

$$\begin{aligned} [B_0^i\,(x,\,D)]^*\,v &= C_0^i\,v, \\ \left[B_k^i\,(x,\,D)\right]^*\,v &= G_k^i\,v + \sum_{j=1}^m \xi_{ki}^j\cdot T_0^j\,v, \\ & k=1,\,2,\,\ldots,\,p, \quad i=1,\,2,\,\ldots,\,m. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Теорема 1. *Пусть для задачи (5.17)–(5.18) выполнены условия A и B. Тогда СЗ формально сопряженной к (5.17)–(5.18) задачи (5.31)–(5.32) и СЗ сопряженного к $P(\lambda)$ опе-*

3. Если задача (1.1)–(1.2) является усиленно регулярной, то СПФ оператора H образуют базис Рисса в $\mathcal{W}_{2,U}^0$.

4. Если задача регулярна, то СПФ оператора H образуют базис Рисса со скобками в $\mathcal{W}_{2,U}^0$, причем в скобки нужно объединять не более некоторого фиксированного числа членов.

Все перечисленные здесь результаты верны и для оператора H, действующего в пространствах описываемых ниже.

Предваряя дальнейшее заметим, что если проводить аналогию с методом Фурье, то условия $V_j = 0, \quad j = 1,\,2,\,\ldots\,,\,n^2-\kappa-n$, используемые при описании пространства $\mathcal{W}_{2,U}^0$, в котором действует оператор H, условно можно называть “краевыми условиями линеаризованной смешанной задачи”, поскольку они будут накладываются на значения неизвестной функции (решения смешанной задачи) в точках $x=0$ и $x=1$ при всех значениях $t>0$. Условия же $V_j = 0, \quad (j = n^2-\kappa-n+1,\ n^2-n-\kappa+2,\ \ldots\ ,n^2-\kappa)$ присутствуют только в области определения оператора H (они будут ставиться только на начальные данные смешанной задачи). Наряду с предыдущими условиями эти условия из области определения оператора H условно можно называть “условиями согласования начальных и краевых условий линеаризованной смешанной задачи”.

В описанном здесь пространстве $\mathcal{W}_{2,U}^0$, как замечено выше, А.А. Шкаликовым при соответствующих условиях доказана базисность СПФ линеаризатора H. Это пространство может быть использовано и для корректной постановки смешанных задач в случае, когда порядок краевых условий спектральной задачи (1.1)–(1.2) меньше или равен $n-2$. Однако оно не пригодно для корректной постановки смешанных задач в случае, если порядок некоторых краевых условий спектральной задачи равен $n-1$. В этом случае, как будет видно из доказательства теоремы о существовании и единственности решения, для решения смешанной задачи требуется большая гладкость.

Поэтому, когда спектральная задача имеет краевые условия порядка $n-1$, для корректной постановки смешанной задачи действие оператора H необходимо рассматривать уже в другом пространстве, введенном А.А. Шкаликовым, — а именно, в пространстве

$$\mathcal{W}^1_{2,U} = \{ \widetilde{\mathbf{v}} \ / \ \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}^1_2 = W^n_2 \times W^{n-1}_2 \times \cdots \times W^1_2, \quad V_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa \}$$

В качестве области определения оператора H, действующего уже в этом пространстве, следует взять пространство

$$\mathcal{W}^2_{2,U} = \{ \widetilde{\mathbf{v}} \ / \ \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}^2_2 = W^{n+1}_2 \times W^n_2 \times \cdots \times W^2_2, \quad V_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa + n \} .$$

Как видим, помимо линеаризованных краевых условий $V_j = 0$, ($j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa$) и требования дополнительной гладкости, в качестве новых ограничений на функцию $\widetilde{\mathbf{v}}$, добавились еще n условий
$V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa + 1, n^2 - \kappa + 2, \ldots, n^2 + n - \kappa)$. Получаются эти условия следующим образом: Умножим последние n условий

$$V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa - n + 1, n^2 - \kappa - n + 2, \ldots, n^2 - \kappa)$$

на параметр λ. Поскольку переменная v_n не определена, то переменную $\lambda \cdot v_{n-1}$ мы конечно же не можем представить в виде v_n. Однако, в этом случае корректна следующая замена $\lambda \cdot v_{n-1} \to (H\mathbf{v})_{n-1}$, где $(H\widetilde{\mathbf{v}})_{n-1}$ — $(n-1)$-ая компонента образа $H\widetilde{\mathbf{v}}$ оператора H. Заменим все переменные $\lambda \cdot v^{(i)}_k(0)$, $\lambda \cdot v^{(i)}_k(1)$ в условиях

$$\lambda \cdot V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa - n + 1, \ n^2 - \kappa - n + 2, \ \ldots \ , \ n^2 - \kappa)$$

на переменные $(H\widetilde{\mathbf{v}})^{(i)}_k$. В результате и получим n линеаризованных условий

$$V_j = 0, \quad j \ = \ n^2 - \kappa + 1, \ n^2 - \kappa + 2, \ \ldots \ , \ n^2 - \kappa + n$$

будем обозначать через $A^*_k v$.

Далее на протяжении всей работы будем считать, что для задачи (5.17)–(5.18) выполнены следующие условия:

Условие A. *Операторы A_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяют равенствам:*

$$\int_\Omega (A_k u)\overline{v}\, dx - \int_\Omega u\, (\overline{A^*_k v})\, dx + \sum_{i=1}^m \int_\Gamma S^i_0\, u \cdot \overline{G^i_k v}\, ds,$$

где G^i_k — некоторые граничные операторы (образ которых в частности может равен нулю).

Условие B. *Операторы B^j_k $k = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, m$ удовлетворяют равенству*

$$B^j_k\, u = \sum_{i=1}^m \xi^j_{ki} \cdot S^i_0\, u, \ \ k = 1, 2, \ldots, p,$$

где $\xi^j_{ki} = \xi^j_{ki}(x)$ —некоторые достаточно гладкие на Γ комплекснозначные функции (при $k > p_j$ считаем, что $\xi^j_{ki} = 0$)

Лемма 4 (о сужении операторов $(P_k)^*$, $\quad k = 1, 2, \ldots, p$).

Пусть для задачи (5.17)–(5.18) выполнены условия A и B. Тогда сопряженный к P_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ оператор $(P_k)^*$ на множестве функций

$$D(P^*_k) = \{ \mathbf{v} = (\, v, \alpha_{k1}, \alpha_{ki}, \ldots, \alpha_{km}) \ / \, v \in H^{2m}(\Omega), \quad \alpha_{ki} \in L_2(\Gamma) \}$$

совпадает с оператором, действующим по формуле

$$P^*_k(\, v, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{km}) = (A^*_k\, v, \beta_{k1}, \beta_{k2}, \ldots, \beta_{km}),$$

где

$$\beta_{ki} = G^i_k\, v + \sum_{j=1}^m \overline{\xi}^j_{ki} \cdot \alpha_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, p)$$

Если $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, то из (5.28) получаем следующее равенство:

$$\int_\Omega (A_0\, u) \cdot \overline{v}\, dx = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\, dx, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.29}$$

Из принципа локального сглаживания [54, Замечание 5.4.1 и теорема 5.4.2, с. 477–479] следует, что функция v должна принадлежать пространству $H^{2m}(\Omega)$.

После применения формулы Грина в равенстве (5.28), получим

$$\int_\Omega u \cdot \overline{(A^*\, v - f)}\, dx = 0, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Откуда получаем: $f = A^*\, v$ (множество $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$).

Подстановка $f = A^*\, v$ в (5.28) и применение формулы Грина дают следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{m} \int_\Gamma B_0^j\, u \cdot \overline{(\alpha_j - T_0^j\, v)}\, ds + \sum_{j=1}^{m} \int_\Gamma S_0^j\, u \cdot \overline{(C_0^j\, v - \alpha_j)}\, ds = 0 \tag{5.30}$$
$$\forall u \in D(P_0),\ \forall v \in D((P_0)^*).$$

Из леммы 2.2 (точнее ее обобщения на случай области Ω) работы Ж.–Л. Лионса и Э. Мадженеса ([37, лемма 2.2, с. 142 и доказательство предложения 5.1, с. 189]) следует утверждение: *если u пробегает $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, то $\left\{B_0^j\, u,\ C_0^j\, v\right\}_{j=1}^{m}$ пробегает $[\mathcal{D}(\Gamma)]^{2m}$.* Поэтому из (5.30) следует, что $\alpha_j = T_0^j\, v$, $\varphi_j = C_0^j\, v$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом, $(P_0)^* \subset P_0^*$. Лемма доказана.

Следствие. *Оператор P_0 замкнут.*

Доказательство. Аналогично тому, как это было сделано выше, показывается, что сопряженным к оператору $(P_0)^* = P^*$ является оператор P_0. Отсюда следует, что P_0 является замкнутым оператором. Следствие доказано.

Выражение

$$\sum_{|\alpha| \le 2m-kd} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\, (\overline{a_\alpha}\, v)$$

порядка n, которые и содержатся в области определения оператора H.

Если спектральная задача имеет краевые условия порядка n (и не имеет краевых условий большего порядка), для корректной постановки смешанной задачи действие оператора H необходимо рассматривать уже в пространстве

$$\mathcal{W}_{2,U}^2 = \big\{ \widetilde{\mathbf{v}} \ / \ \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}_2^2 = W_2^{n+1} \times W_2^{n} \times \cdots \times W_2^{2},$$
$$V_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa + n \big\}$$

В качестве области определения этого пространства следует взять пространство

$$\mathcal{W}_{2,U}^3 = \big\{ \widetilde{\mathbf{v}} \ / \ \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}_2^2 = W_2^{n+2} \times W_2^{n+1} \times \cdots \times W_2^{3},$$
$$V_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa + 2n \big\}.$$

Помимо линеаризованных краевых условий

$$V_j = 0, (j = 1, 2, \ldots, n^2 - \kappa + n)$$

и требования дополнительной гладкости, в качестве новых ограничений на функцию $\widetilde{\mathbf{v}}$ добавились еще n условий $V_j = 0$, $(j = n^2 - \kappa + n + 1,\ n^2 - \kappa + n + 2,\ \ldots,\ n^2 - \kappa + 2n)$. Опишем как они получаются. Умножим последние n условий

$$V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa + 1,\ n^2 - \kappa + 2,\ \ldots,\ n^2 - \kappa + n)$$

на параметр λ. Заменив все переменные $\lambda \cdot v_k^{(i)}(0), \lambda \cdot v_k^{(i)}(1)$ в условиях

$$\lambda \cdot V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa + 1,\ n^2 - \kappa + 2,\ \ldots,\ n^2 - \kappa + n)$$

на переменные $(H\widetilde{\mathbf{v}})_k^{(i)}$. В результате и получим n линеаризованных условий

$$V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa + n + 1,\ n^2 - \kappa + n + 2,\ \ldots,\ n^2 - \kappa + 2n)$$

порядка $(n+1)$.

Аналогично описываются пространства и оператор H в случае, когда порядок краевых условий больше порядка уравнения. Если спектральная задача имеет краевые условия порядка $n+k$ (и не имеет краевых условий большего порядка), для корректной постановки смешанной задачи действие оператора H необходимо рассматривать уже в пространстве

$$\mathcal{W}^{2+k}_{2,U} = \Big\{ \widetilde{\mathbf{v}} \;/\; \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}^{2+k}_2 = W_2^{n+k+1} \times W_2^{n+k} \times \cdots \times W_2^{2+k}, \\ V_j = 0, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n^2 - \kappa + n + nk, \Big\}$$

которые уже считаем определенным предыдущими действиями.

В качестве области определения этого пространства возьмем пространство

$$\mathcal{W}^{k+3}_{2,U} = \Big\{ \widetilde{\mathbf{v}} \;/\; \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}^{2}_2 = W_2^{n+k+2} \times W_2^{n+k+1} \times \cdots \times W_2^{k+3}, \\ V_j = 0, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n^2 - \kappa + 2n + kn \Big\}\,.$$

Помимо линеаризованных краевых условий

$$V_j = 0, (j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n^2 - \kappa + n + kn)$$

, которые мы считаем определенными по предположению и требования дополнительной гладкости, в качестве новых ограничений на функцию $\widetilde{\mathbf{v}}$ добавились еще n условий $V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa + kn + n + 1,\; n^2 - \kappa + kn + n + 2,\; \ldots\,,\; n^2 - \kappa + kn + 2n)$. Они появляются после умножения последних n условий

$$V_j = 0, \quad (j = n^2 - \kappa + kn + 1,\, n^2 - \kappa + kn + 2,\, \ldots\,,\, n^2 - \kappa + kn + n)$$

на параметр λ, и замены всех переменных $\lambda \cdot v_k^{(i)}(0)$, $\lambda \cdot v_k^{(i)}(1)$ в условиях

$$l \cdot V_j = 0, \quad (j = n^2\kappa + kn + 1,\; n^2 - \kappa + kn + 2,\; \ldots\,,\; n^2 - \kappa + kn + n)$$

на переменные $(H\widetilde{\mathbf{v}})^{(i)}_k$.

Тогда оператор P_0^*, заданный равенствами

$$P_0^*\,\mathbf{v} \;=\; \big(A_0^*\,v,\, C_0^1\,v,\, C_0^2\,v,\, \ldots\,,\, C_0^m\,v\big)\,, \qquad (5.27)$$

$$D\,(P_0^*) \;=\; \Big\{ \mathbf{v} = (\,v,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\,,\, \alpha_m) \;\Big/\; v \in H^{2m}(\Omega),\; \alpha_j = T_0^j\,v \Big\}$$

является сопряженным к оператору P_0 оператором $(P_0)^*$.

Доказательство. Для любых элементов $\mathbf{u} \in D(P_0)$ и $\mathbf{v} \in D(P_0^*)$ имеем

$$\langle\, P_0\,\mathbf{u},\; \mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}} = \int_\Omega (A_0\,u)\,\overline{v}\,dx + \sum_{j=1}^m \int_\Gamma B_0^j\,u \cdot \overline{T_0^j\,v}\,ds,$$

$$\langle\, \mathbf{u},\; P_0^*\,\mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}} = \int_\Omega u\,(\overline{A^*\,v})\,dx + \sum_{j=1}^m \int_\Gamma S_0^j\,u \cdot \overline{C_0^j\,v}\,ds.$$

Вычтем одно равенство из другого и воспользуемся формулой Грина 5.24. В результате получим

$$\langle\, P_0\,\mathbf{u},\; \mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}} - \langle\, \mathbf{u},\; P_0^*\,\mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}} \;=\; \int_\Omega (A_0\,u)\,\overline{v}\,dx - \int_\Omega u\,(\overline{A_0^*\,v})\,dx \\ + \sum_{j=1}^m \int_\Gamma \Big(B_0^j\,u \cdot \overline{T_0^j\,v} - S_0^j\,u \cdot \overline{C_0^j\,v} \Big)\,ds.$$

Таким образом, $\langle\, P_0\,\mathbf{u},\,\mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}} = \langle\, \mathbf{u},\, P_0^*\,\mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}}$ и следовательно оператор P_0^* является сужением оператора $(P_0)^*$.

Теперь задача состоит в том, чтобы показать, что в действительности операторы P_0^* и $(P_0)^*$ совпадают.

Предположим, что $\mathbf{f} = (f,\, \varphi_1,\, \varphi_2,\, \ldots\,,\, \varphi_m) \in D((P_0)^*) \subset \mathcal{L}$. Тогда для любых элементов $\mathbf{u} \in D(P_0)$ и $\mathbf{v} = (\,v,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\,,\, \alpha_m) \in D((P_0)^*)$ имеем

$$\langle\, P_0\,\mathbf{u},\; \mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{L}} = \langle\, \mathbf{u},\, \mathbf{f}\,\rangle_{\mathcal{L}}\,. \qquad (5.28)$$

Требуется показать, что

$$v \in H^{2m}(\Omega), \quad f = A_0^*\,v, \quad \varphi_j = C_0^j\,v, \quad \alpha_j = T_0^j\,v \quad (j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, m).$$

ции $\varphi \in H^{2m-m_j-1/2}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, m$ (напомним: m_j — порядок граничного оператора S_0^j), такие, что $\| \varrho_j - \varphi_j \|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, m$.

Из леммы монографии Х. Трибеля (см. [54, с.484–485]) следует, что отображение, переводящее функцию $u_1(x)$ в $(S_0^1 u_1, S_0^2 u_1, \ldots, S_0^m u_1)$ является ретракцией $H^{2m}(\Omega)$ на $\prod_{j=1}^m H^{2m-m_j-1/2}(\Gamma)$. Существует соответствующая коретракция: $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \to u_1$. Поэтому найдется функция $u_1 \in H^{2m}(\Omega)$ такая, что

$$\| \varrho_j - S_0^j u_1 \|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Далее, для любой функции $g \in L_2(\Omega)$ найдется функция $u_2 \in H^{2m}(\Omega)$, удовлетворяющая условиям $S_j^0 u_2 = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, такая, что

$$\| (g - u_1) - u_2 \|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Положим теперь $f = u_1 + u_2$, тогда элемент $\mathbf{f} = \big(f, S_0^1 f, \ldots, S_0^m f\big)$ является искомым, так как

$$\| g - f \|_{L_2(\Omega)} + \| \varrho_1 - S_0^1 f \|_{L_2(\Gamma)} + \cdots + \| \varrho_m - S_0^m f \|_{L_2(\Gamma)} < (m+1)\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, а $\mathbf{g} = (g, \varrho_1, \ldots, \varrho_m)$ — любой элемент пространства $\mathcal{L}$, то лемма доказана.

Сопряженные операторы. Целью настоящего параграфа является построение сопряженного оператора $(P_0)^*$ и сужений сопряженных к операторам P_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ операторов P_k^*.

Сопряженный к P_k оператор, в отличие от его сужения P_k^*, будем обозначать символом $(P_k)^*$.

Через $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω, а через $\mathcal{D}(\Omega)$ будем обозначать пространство бесконечно дифференцируемых на Γ функций.

Лемма 3 (о сопряженном операторе $(P_0)^*$). *Пусть операторы A_0^*, T_0^j, C_0^j и P_0 определены равенствами (5.20), (5.22), (5.23) и (5.25) соответственно.*

Описанные здесь пространства необходимы для доказательства теоремы существования и единственности смешанной задачи. Отметим здесь, что если спектральная задача может быть линеаризована в пространстве $\mathcal{W}_{2,U}^r$ и коэффициенты $p_{\nu,s}(x)$ в уравнении являются аналитическими функциями , то она может быть линеаризована и в пространстве $\mathcal{W}_{2,U}^{r+l}$, где $l \geq 0$. Схема линеаризации при этом не отличается от описанной выше.

Глава 3

Два метода вычисления коэффициентов.

Целью настоящего главы является отыскание коэффициентов разложений по цепочкам собственных функций в соответствующих пространствах и предъявление решений соответствующих спектральных задач.

Вместо указанной конкретной задачи мы рассмотрим общую краевую задачу второго порядка и для нее найдем коэффициенты разложения пары произвольных функций (принадлежащих специальным пространствам) в ряды по собственным функциям. Мы сделаем это двумя способами. Первый подход использует явное построение сопряженного оператора к так называемому линеаризатору Шкаликова, а второй подход использует возможность представления задачи в виде пучка неограниченных операторов и дальнейшего применения соотношений биортогональности из работы [56] известных для пучков операторов.

где операторы S_0^j, $j = 1, 2, \ldots, m$ определены выше (см. (5.24)), а компоненты B_k^j при $k \geq p_j$ равны нулю.

Составим из операторов P_k $(k = 0, 1, \ldots, p)$ пучок

$$P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \cdots + \lambda^p P_p.$$

Спектральные свойства этого пучка тесно связаны со спектральными свойствами спектральной задачи (5.17)–(5.18). Эту связь выражает следующая

Лемма 1 (о спектральных свойствах пучка). *Собственные значения (СЗ) $\{\lambda_k\}$ задачи (5.17)–(5.18) и СЗ пучка операторов $P(\lambda)$ совпадают с учетом их кратностей. Каждой цепочке собственных и присоединенных функций (СПФ) u_k^0, u_k^1, $\ldots$, $u_k^{g_k}$ задачи (5.17)–(5.18), отвечающей СЗ λ_k, соответствует цепочка СПФ $\mathbf{u}_k^0$, $\mathbf{u}_k^1$, $\ldots$, $\mathbf{u}_k^{g_k}$ пучка $P(\lambda)$, отвечающая тому же СЗ λ_k. При этом формула соответствия имеет следующий вид:*

$$\mathbf{u}_k^s = (\, u_k^s,\, S_0^1\, u_k^s,\, S_0^2\, u_k^s,\, \ldots,\, S_0^m\, u_k^s), \qquad s = 0,\, 1,\, \ldots,\, g_k.$$

Лемма доказывается непосредственным сопоставлением определений СПФ пучка операторов и СПФ спектральной задачи (5.17)–(5.18).

Лемма 2 (о плотности). *Области определения $D(P_k)$ операторов P_k, где $k = 0, 1, \ldots, p$ плотны в пространстве*

$$\mathcal{L} = L_2(\Omega) \times [L_2(\Gamma)]^m\,.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{g} = (g,\, \varrho_1,\, \ldots,\, \varrho_m) \in \mathcal{L}$. Докажем, что существует элемент $\mathbf{f} = (f,\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_m) \in D(P_k)$ такой, что $\|\, \mathbf{f} - \mathbf{g}\,\|_{\mathcal{L}} < C_1\, \varepsilon$ или, что то же самое

$$\|\, g - f\,\|_{L_2(\Omega)} + \|\, \varrho_1 - \varphi_1\,\|_{L_2(\Gamma)} + \cdots + \|\, \varrho_m - \varphi_m\,\|_{L_2(\Gamma)} < C_2\, \varepsilon$$

(Здесь через C_i обозначены постоянные не зависящие от ε).

Для любых функций $\varrho_j \in L_2(\Gamma)$ $j = 1, 2, \ldots, m$ в силу теорем вложения для пространств Соболева найдутся функ-

В частности, мы имеем

$$\int_\Omega (A_0\, u)\overline{v}\, dx = \int_\Omega u\, (\overline{A_0^* v})\, dx, \quad u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega),\ v \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Очевидно, что A_0^*, как и A_0 — собственно эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$. Воспользуемся теперь формулой Грина. Существуют (см. [54, с. 478] и [37, Гл. 2, Теорема 2.1, с. 139]) дифференциальные операторы S_0^j, T_0^j и C_0^j, $\ j = 1,\, 2,\, \dots,\, m$, определяемые равенствами

$$S_0^j\, u = \sum_{|\alpha| \le m_j} s_0^{j,\alpha}(x) \cdot D^\alpha u,, \qquad m_j \le 2m - 1, \tag{5.21}$$

$$T_0^j\, u = \sum_{|\alpha| \le k_j} t_0^{j,\alpha}(x) \cdot D^\alpha u,, \qquad k_j \le 2m - 1, \tag{5.22}$$

$$C_0^j\, u = \sum_{|\alpha| \le r_j} c_0^{j,\alpha}(x) \cdot D^\alpha u,, \qquad r_j \le 2m - 1, \tag{5.23}$$

где коэффициенты $s_0^{j,\alpha}(x)$, $t_0^{j,\alpha}(x)$, $c_0^{j,\alpha}(x)$ являются достаточно гладкими, такими, что граничные операторы $\left\{S_0^j\right\}_{j=1}^m$, $\left\{T_0^j\right\}_{j=1}^m$, $\left\{C_0^j\right\}_{j=1}^m$ образуют нормальные на Γ системы и

$$\int_\Omega (A_0\, u)\overline{v}\, dx - \int_\Omega u\, (\overline{A_0^* v})\, dx = \sum_{j=1}^m \int_\Gamma \left(S_0^j\, u \cdot \overline{C_0^j v} - B_0^j\, u \cdot \overline{T_0^j v} \right) ds, \tag{5.24}$$

где $u \in H^{2m}$ и $v \in H^{2m}$.

При этом набор операторов $A_0^*,\, C_0^1,\, \dots,\, C_0^m$ регулярно эллиптичен.

Определим в пространстве $\mathcal{L} = L_2(\Omega) \times [L_2(\Gamma)]^m$ неограниченные операторы P_k, $\ k = 0,\, 1,\, \dots,\, p$ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_k\, \mathbf{u} &= (A_k\, u,\, B_k^1\, u,\, \dots,\, B_k^m\, u), &(5.25)\\ D(P_k) &= \big\{\mathbf{u} = (u,\, \varphi_1,\, \varphi_2,\, \dots,\, \varphi_m)\ /\ u \in H^{2m}(\Omega),\\ &\qquad \varphi_1 = S_0^1\, u,\ \varphi = S_0^2\, u,\ \dots,\ \varphi_m = S_0^m\, u\big\}, &(5.26) \end{aligned}$$

3.1 Вычисление коэффициентов с помощью сопряженного оператора

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{aligned} l(y,\lambda) &= y'' + (p_0 + p_1\,\lambda)\, y' + (q_0 + q_1\,\lambda + q_2\,\lambda^2)\, y = 0, &(3.1)\\ U_1(y,\lambda) &= a_1\, y'(0) + a_2\, y(0) + \lambda\, y(0) = 0, &(3.2)\\ U_2(y,\lambda) &= b_1\, y'(1) + b_2\, y(1) + \lambda\, y(1) = 0. &(3.3) \end{aligned}$$

Здесь $a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2,\, q_2 \in \mathbb{C}$; $a_1,\, b_1,\, q_2 \ne 0$; $p_0 = p_0(x)$, $q_0 = q_0(x)$, $p_1 = p_1(x)$, $q_1 = q_1(x)$ — непрерывно дифференцируемые комплекснозначные функции.

Чтобы не осложнять существо дела, считаем, что все собственные значения задачи (3.1)–(3.3) — простые.

В дальнейшем нам потребуется сопряженная к (3.1)–(3.3) краевая задача. Построение сопряженной задачи для общих краевых задач изложено, например, в книге М.А. Наймарка ([41, с. 17–23]). Согласно этой работе сопряженной к задаче (3.1)–(3.3) является следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} &z'' + (\overline{p_0} + \overline{p_1}\,\mu)\, z' + (\overline{q_0} + \overline{q_1}\,\mu + \overline{q_2}\,\mu^2)\, z = 0,\\ &\overline{a_1}\, z'(0) + (\overline{a_2} - \overline{a_1}\,\overline{p_0(0)})\,\mu\, z(0) = 0,\\ &\overline{b_1}\, z'(0) + (\overline{b_2} - \overline{b_1}\,\overline{p_0(1)})\,\mu\, z(1) = 0. \end{aligned}$$

Согласно [55] задача (3.1)–(3.3) допускает линеаризацию по параметру в пространстве $\mathcal{W}_2^0 = W_2^1 \times L_2$. Линеаризатор H задачи (3.1)–(3.3) задается следующими равенствами:

$$H\{v_0,\, v_1\} = \{v_1,\, -q_2^{-1}\,(v_0'' + p_0\, v_0' + p_1\, v_1' + q_1\, v_1)\},$$

$$D(H) = \big\{\widetilde{\mathbf{v}} = \{v_0,\, v_1\}\ /\ v_0 \in W_2^2,\ v_1 \in W_2^1,$$

$$V_1(\widetilde{\mathbf{v}}) = a_1\, v_0'(0) + a_2\, v_0(0) + v_1(0) = 0,$$

$$V_2(\widetilde{\mathbf{v}}) = b_1\, v_0'(1) + b_2\, v_0(1) + v_1(1) = 0\big\}.$$

Линейная спектральная задача $H\widetilde{\mathbf{v}} = \lambda\widetilde{\mathbf{v}}$ имеет те же собственные значения, что и задача (3.1)–(3.3), а собственные функции (СФ) оператора H, соответствуюшие собственным значениям λ_k, имеют вид

$$\widetilde{\mathbf{v}}_k = \{y_k,\, \lambda_k\, y_k\},$$

где y_k — собственные функции задачи (3.1)–(3.3), отвечающие тем же собственным значениям λ_k. (Напомним, что все собственные значения задачи (3.1)–(3.3) считаем простыми).

Пусть $\widetilde{\mathbf{v}}_k$ — собственная функция оператора H, соответствующая собственному значению λ_k, а $\widetilde{\mathbf{g}}_j$ — собственная функция оператора H^*, соответствующая собственному значению $\overline{\lambda_j}$. Тогда из равенств

$$H\,\widetilde{\mathbf{v}}_k = \lambda_k\,\widetilde{\mathbf{v}}_k, \qquad H^*\,\widetilde{\mathbf{g}}_j = \overline{\lambda_j}\,\widetilde{\mathbf{g}}_j,$$

вытекают соотношения биортогональности:

$$\langle \widetilde{\mathbf{v}}_k,\, \widetilde{\mathbf{g}}_j\rangle_{\mathcal{W}_2^0} \big/ \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k,\, \widetilde{\mathbf{g}}_k\rangle_{\mathcal{W}_2^0} = \delta_{kj}.$$

Из этих соотношений получается формула для вычисления коэффициентов разложения элемента $\widetilde{\mathbf{v}} = \{v_0,\, v_1\}$ из пространства $\mathcal{W}_2^0$ в ряд по собственным функциям $\widetilde{\mathbf{v}}_k$

$$c_k = \langle \widetilde{\mathbf{v}},\, \widetilde{\mathbf{g}}_j\rangle_{\mathcal{W}_2^0} \big/ \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k,\, \widetilde{\mathbf{g}}_k\rangle_{\mathcal{W}_2^0}\,. \tag{3.4}$$

Таким образом, задача вычисления коэффициентов сводится к поиску сопряженного оператора и его собственных функций.

Найдем оператор H^* и его СФ.

Теорема 1. *Сопряженный к H оператор H^* имеет следующий вид:*

$$H^*\{g_0,\, g_1\} = H_1^*\{g_0,\, g_1\} + H_2^*\{g_0,\, g_1\}.$$

$$D(H^*) = \Big\{\widetilde{\mathbf{g}} = \{g_0,\, g_1\} \big/ g_0 \in W_2^2,\, g_1 \in W_2^1,$$

$$G_1(\widetilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{\,-1}\,(1 - \overline{a_1}\,\overline{p_1(0)})g_1(0) - \overline{a_1}\,(g_0(0) - g_0'(0)) = 0,$$

$$G_2(\widetilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{\,-1}\,(1 - \overline{b_1}\,\overline{p_1(1)})g_1(1) - \overline{b_1}\,(g_0(1) + g_0'(1)) = 0\Big\}.$$

в расширенном гильбертовом пространстве. Этот метод будем называть *методом сопряженного операторного пучка*. Применение этого метода позволило получить не просто алгоритм вычисления коэффициентов, но и, что важно для приложений, конкретную формулу (см. теорему 4), выписанную в терминах коэффициентов уравнения (5.17) и краевых условий (5.18) для широкого класса эллиптических задач. Кроме того, формула выражена через скалярные произведения пространств L_2, а не H^s, что облегчает соответствующие вычисления для конкретных задач математической физики. Конкретный пример применения теоремы 4 для одной из задач математической физики приведен в заключительном пункте параграфа. Ниже доказаны также теоремы о полноте и минимальности специальных производных цепочек, отвечающих собственным значениям задачи (5.17)–(5.18), в расширенном гильбертовом пространстве (см. теоремы 2 и 3). Излагаемый ниже метод развивает идеи третьей главы и работы [16], где аналогичные результаты были получены для обыкновенных дифференциальных операторов с параметром.

Спектральная задача и пучок операторов. Здесь и везде далее в настоящей работе от задачи (5.17)–(5.18) будем требовать, чтобы набор операторов $\Big\{A_0, \quad B_0^j\ (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m)\Big\}$, являлся регулярным эллиптическим набором (определение см. [54, с. 453–454]).

Из этого требования следует, что оператор $A_0(x,\, D)$ является собственно эллиптическим (см. [54, Определение 1, с. 451]), а набор граничных операторов $\Big\{B_0^j(x,\, D)\Big\}_{j=1}^m$ образует номальную систему ([54, Определение 2, с. 452–453]).

Обозначим через $A_0^* = A_0^*(x,\, D)$ оператор, формально сопряженный к $A_0 = A_0(x,\, D)$:

$$A_0^*\,u = \sum_{|\alpha|\le 2m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\left(\overline{a_\alpha^0(x)}\,u\right). \tag{5.20}$$

$(j = 1, 2, \ldots, m)$, причем

$$0 \le l_1 < l_2 < \cdots < l_m \le 2m - 1, \qquad d \cdot p_j = l_j,$$

а также $A_p(x) \ne 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$.

Изучению задачи (5.17)–(5.18) были посвящены работы С. Агмона [60], М.С. Аграновича и М.И. Вишика [2], С.Я. Якубова [58], А.В. Шкреда [57] и много других работ (см. ссылки в перечисленных статьях).

В работе А.В. Шкреда [57] с помощью развития методов работы А.А. Шкаликова [55] были получены теоремы о полноте и минимальности производных по Келдышу цепочек $\widetilde{u}_k^h$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^0_{\{B^j\}}$. ($\mathcal{H}^0_{\{B^j\}}$ является подпространством пространства $\mathcal{H}^0 = H^{2m-d} \times H^{2m-2d} \times \cdots \times H^0$, где $H^s = H^s(\Omega)$ — это пространства Соболева.)

Коэффициенты c_{kh} разложения элемента $\widetilde{f} \in \mathcal{H}^0_{\{B^j\}}$ в ряд

$$\widetilde{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{g_k} c_{kh}\, \widetilde{u}_k^h, \tag{5.19}$$

сходящийся по норме пространства $\mathcal{H}^0$, в [57] не были найдены. Коэффициенты c_{kh} могут быть вычислены с помощью метода сопряженного оператора, предложенного в предыдущем пункте и основанного на том, что c_{kh} являются коэффициентами Фурье (см. [15]). Однако вычисление коэффициентов c_{kh} с помощью этого метода оказывается весьма трудоемким, поскольку предполагает отыскание и использование сопряженных операторов в пространстве $\mathcal{H}^0_{\{B^j\}}$, которые имеют весьма непростое представление.

Ниже при некоторых дополнительных ограничениях на задачу (5.17)–(5.18), а именно при выполнении условий подчинения А и В (их точное описание приводится в последующем параграфе), предложен другой метод вычисления коэффициентов, основанный на изучении свойств соответствующего пучка операторов

Здесь

$$\begin{aligned} H_1^*\{g_0,\, g_1\} \;&=\; \Big\{\overline{q}_2^{\,-1} \Big[g_1 - \int_0^x \overline{p_0(t)}\, g_1(t)\, dt + \int_0^x \int_0^\xi \overline{q_0(\xi)}\, g_1(\xi)\, d\xi\, dt - \\ &\quad - \frac{2-x}{3}\, g_1(0) + \frac{1+x}{3} \Big(\int_0^1 \overline{p_0(t)}\, g_1(t)\, dt - \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^t \overline{q_0(\xi)}\, g_1(\xi)\, d\xi\, dt - g_1(1) - \int_0^1 \overline{q_0(\xi)}\, g_1(\xi)\, d\xi\Big)\Big], \\ &\quad - g_0'' + \overline{q}_2^{\,-1} \big(\overline{p_1(x)}\, g_1(x)\big)' - \overline{q}_2^{\,-1} \big(\overline{q_1(x)}\, g_1(x)\big)\Big\}, \\ H_2^*\{g_0,\, g_1\} \;&=\; \Big\{\overline{a_2}\, \frac{2-x}{3} \big(g_0'(0) - g_0(0) - \overline{q}_2^{\,-1}\, \overline{p_1(0)}\, g_1(0)\big) + \\ &\quad + \overline{b_2}\, \frac{1+x}{3} \big(-g_0'(1) - g_0(1) + \overline{q}_2^{\,-1}\, g_1(1)\big),\, 0\Big\}. \end{aligned}$$

Доказательство. В отличие от стандартной нормы

$$\|f\|_{W_2^1} = (\|f'\|_{L_2}^2 + \|f\|_{L_2}^2)^{1/2}$$

будем использовать норму

$$\|f\|_{W_2^1} = (\|f'\|_{L_2}^2 + |f(0)|^2 + |f(1)|^2)^{1/2}.$$

Эти нормы эквивалентны ([40, с. 147]). В нашем случае вторая норма удобнее, так как она позволяет использовать вместо функций Грина обычные интегралы с переменным верхним пределом.

С помощью интегрирования по частям получаем равенство

$$\langle H\, \widetilde{\mathbf{v}},\, \widetilde{\mathbf{g}}\rangle_{\mathcal{W}_2^1} = \langle \widetilde{\mathbf{v}},\, H_1^*\, \widetilde{\mathbf{g}}\rangle_{\mathcal{W}_2^1} + P(\widetilde{\mathbf{v}},\, \widetilde{\mathbf{g}}). \tag{3.5}$$

Здесь H и H_1^* — выражения, определенные в формулировке теоремы, а

$$\begin{gathered} P(\widetilde{\mathbf{v}},\, \widetilde{\mathbf{g}}) = q_2^{-1} \big[v_0'(0)\, \overline{g}_1(0) - v_0'(1)\, \overline{g}_1(1) + \\ + v_1(0) \big(q_2\, \overline{g}_0(0) - q_2\, \overline{g'}_0(0) + p_1(0)\, \overline{g}_1(0)\big) + \end{gathered}$$

$$+v_1(1)\left(q_2\,\overline{g}_0(1)-q_2\,\overline{g'}_0(1)+p_1(1)\,\overline{g}_1(1)\right)\Big]$$

является билинейной формой проинтегрированных членов.

Равенство (3.5) напоминает формулу Лагранжа, с помощью которой находится сопряженный оператор для обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве L_2. Отличие состоит в том, что в нашем случае в "краевых условиях"

$$V_1(\widetilde{\mathbf{v}})=0,\quad V_2(\widetilde{\mathbf{v}})=0$$

(точнее, в условиях на область определения оператора) содержится шесть переменных (это переменные $v_0(0)$, $v_0(1)$, $v_0'(0)$, $v_0(1)'$, $v_1(0)$, $v_1(0)$), а в форме $P(\widetilde{\mathbf{v}},\,\widetilde{\mathbf{g}})$ — лишь четыре ($v_0(0)$, $v_0(1)$, $v_0'(0)$, $v_0(1)'$, $v_1(0)$, $v_1(0)$). В классическом случае — обратная ситуация. Там количество переменных в краевых условиях не больше числа переменных, содержащихся в билинейной форме проинтегрированных членов. Поэтому методы, используемые в книге Наймарка [41, с. 17–22], непосредственно не применимы в нашем случае. Прежде чем применить известные методы нахождения сопряженного оператора, требуется сделать некоторые преобразования. А именно, форму $P(\widetilde{\mathbf{v}},\,\widetilde{\mathbf{g}})$ представим в виде суммы двух форм $P_1(\widetilde{\mathbf{v}},\,\widetilde{\mathbf{g}})$ и $P_2(\widetilde{\mathbf{v}},\,\widetilde{\mathbf{g}})$ первую из которых запишем в виде скалярного произведения:

$$P_1(\widetilde{\mathbf{v}},\,\widetilde{\mathbf{g}})=-a_2\,v_0(0)\,q_2^{-1}\left[q_2\,\overline{g}_0(0)-q_2\,\overline{g}_0'(0)+p_1(0)\,\overline{g}_1(0)\right]-$$

$$-b_2\,v_0(1)\,q_2^{-1}\left[q_2\,\overline{g}_0(1)-q_2\,\overline{g}_0'(1)+p_1(1)\,\overline{g}_1(1)\right]=\langle\widetilde{\mathbf{v}},\,H_1^*\,\widetilde{\mathbf{g}}\rangle_{\mathcal{W}_2^0}\,,$$

а из второй, методом, описанным в работе Наймарка [41, с. 17–22] найдутся "сопряженные краевые условия".

Из изложенного выше следует равенство

$$\langle H\,\widetilde{\mathbf{v}},\,\widetilde{\mathbf{g}}\rangle_{\mathcal{W}_2^0}\,,=\langle\widetilde{\mathbf{v}},\,M\widetilde{\mathbf{g}}\rangle_{\mathcal{W}_2^0}\,,$$

где M — оператор, определяется равенствами

$$M\{g_0,\,g_1\}=H_1^*\{g_0,\,g_1\}+H_2^*\{g_0,\,g_1\}.$$

Изложенный в настоящем параграфе метод нахождения коэффициентов c_k в действительности годится не только для рассматриваемой задачи (5.48)–(5.2). Он пригоден и для общих спектральных задач высокого порядка. Можно указать алгоритм вычисления коэффициентов, аналогичный найденному в работе [10].

5.2 Метод сопряженного операторного пучка

Рассмотрим спектральную задачу

$$A(x,D,\lambda)\,u(x)\;=\;\left[\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\,A_k(x,D)\right]u(x)=0,\;\;x\in\Omega,\quad(5.17)$$

$$B^j(x,\,D,\,\lambda)\,u(x)\;=\;\left[\sum_{k=0}^{p_j}\lambda^k\,B_k^j(x,D)\right]u(x)=0,\;\;x\in\Gamma,\quad(5.18)$$

$$j=1,2,\ldots,m.$$

Здесь $x=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\in\mathbb{R}^n$ $(n>1)$, $D=(D_1,\;D_2,\;\ldots,\;D_n)$, $D_k=-\frac{\partial}{\partial x_k}$, $D^\alpha=D_1^\alpha\cdot D_2^\alpha\cdots D_n^\alpha$, $\alpha=(\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n)$ — мультииндекс, λ — спектральный параметр, $\lambda\in\mathbb{C}$, Ω — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\Gamma=\partial\Omega$, которую можно локально выпрямить гладкими преобразованиями координат (см. [2, С. 63]),

$$A_k=A_k(x,D)=\sum_{|\alpha|\le 2m-kd}a_\alpha^k(x)\cdot D^\alpha,$$

$$B_k^j=B_k^j(x,D)=\sum_{|\alpha|\le l_j-kd}b_\alpha^{j,k}(x)\cdot D^\alpha$$

— дифференциальные операторы, определяемые всюду в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω и имеющие в Ω достаточно гладкие коэффициенты $a_\alpha^k(x)$ и $b_\alpha^{j,k}(x)$, $d=\frac{2m}{p}$ — целое число; порядок оператора $A_0(x,D)$ равен $2m$, порядки операторов $B^j(x,D)$ равны l_j

венств для двух компонент $g_{0,k}$ и $g_{1,k}$ функции $\widetilde{g}_k$:

$$a\,g_{1,k} + F(g_{1,k}) = \overline{\lambda_k}\,g_{0,k} \quad \text{в } \Omega, \tag{5.14}$$

$$b\,\frac{\partial g_{1,k}}{\partial x} - \Delta\,g_{0,k} = \overline{\lambda_k}\,g_{1,k} \quad \text{в } \Omega, \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial g_{0,k}}{\partial \overline{n}} + g_{0,k} + \left(\frac{a}{\alpha} - b\,K\right) g_{1,k} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{5.16}$$

Из (5.14)–(5.16) следует, что вторая компонента $g_{1,k}$ собственной функции $\widetilde{g}_k$ является решением краевой задачи

$$a\,\Delta g_{1,k} - b\,\overline{\lambda_k}\,\frac{\partial g_{1,k}}{\partial x} + \overline{\lambda_k}^2\,g_{1,k} = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\alpha\,\frac{\partial g_{1,k}}{\partial \overline{n}} + \overline{\lambda_k}\left(1 - \frac{b\,K\,\alpha}{a}\right) g_{1,k} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Из (5.14) получаем, что первая компонента собственной функции $\widetilde{g}_k$ выражается через вторую равенством

$$g_{0,k} = \frac{1}{\overline{\lambda_k}}\left(a\,g_{1,k} + F(g_{1,k})\right).$$

Отсюда следует утверждение предложения 2. Таким образом, оператор L^* является линеаризатором сопряженной задачи (5.12)–(5.13) (это другой вид линеаризации, нежели для задачи (5.48)–(5.2)).

Из последней теоремы и формулы (5.5) вытекает

Теорема 3 (о коэффициентах разложения). *Если* $\widetilde{f} = \sum c_k\,\widetilde{f}_k$ *— разложение элемента* $\widetilde{f}$ *по собственным функциям оператора* L, *то коэффициенты* c_k *находятся по формулам* $c_k = p_k/q_k$, *где*

$$p_k = -\alpha\,a \int_\Omega f_0\,\Delta\overline{v_k}\,dx + \alpha\,\lambda_k \int_\Omega f_1\,\overline{v_k}\,dx + \int_\Gamma (\alpha\,b\,K - a\,\lambda_k)\,f_0\,\overline{v_k}\,ds,$$

$$q_k = -\alpha\,a \int_\Omega u_k\,\Delta\overline{v_k}\,dx + \alpha\,{\lambda_k}^2 \int_\Omega u_k\,\overline{v_k}\,dx + \int_\Gamma (\alpha\,b\,K - a\,\lambda_k)\,u_k\,\overline{v_k}\,ds.$$

$$D(M) = \Big\{\widetilde{\mathbf{g}} = \{g_0,\, g_1\} \,/\, g_0 \in W_2^2,\; g_1 \in W_2^1,$$

$$G_1(\widetilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{\,-1}\,(1 - \overline{a_1}\,\overline{p_1(0)})g_1(0) - \overline{a_1}\,(g_0(0) - g_0'(0)) = 0,$$

$$G_2(\widetilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{\,-1}\,(1 - \overline{b_1}\,\overline{p_1(1)})g_1(1) - \overline{b_1}\,(g_0(1) + g_0'(1)) = 0\Big\}.$$

Таким образом, $M \subset H^*$. Обратное включение $M \supset H^*$ следует из того факта, что образом операторов M и H является все пространство $\mathcal{W}_2^0$.

Теорема доказана.

Замечание. Как видим, формула действия сопряженного оператора помимо производных содержит так же интегралы и функционалы вида $Ax + B$ $(A, B \in \mathbb{C})$. В этом проявляется отличие от вида сопряженного оператора к оператору, порожденного обыкновенным дифференциальным выражением в пространстве L_2.

Теорема 2. *Коэффициенты разложения произвольной функции* $\widetilde{\mathbf{v}}$ *из пространства* $\mathcal{W}_2^0$ *по элементам* $\widetilde{\mathbf{v}}_k$ *имеют вид*

$$c_k = p_k/q_k,$$

где

$$\begin{aligned}
p_k \;&=\; \big\langle v_0,\, \overline{\lambda}_k\,z_k + \overline{q}_2^{\,-1}\left(\overline{q}_1(x) - (\overline{p}_1\,z_k(x))'\right)\big\rangle_{L_2} + \langle v_1,\, z_k\rangle_{L_2} + \\
&+\lambda_k^{-1}\,q_2^{-1}\,v_0(1)\left(\overline{z}_k{}'(1) - p_0(1)\,\overline{z}_k(1) + \frac{b_2}{b_1}\,\overline{z}_k(1)\right) + \\
&+\lambda_k^{-1}\,q_2^{-1}\,v_0(0)\left(-\,\overline{z}_k{}'(0) + p_0(0)\,\overline{z}_k(0) - \frac{a_2}{a_1}\,\overline{z}_k(0)\right),\\
q_k \;&=\; \big\langle y_k,\, \overline{\lambda}_k\,z_k + \overline{q}_2^{\,-1}\left(\overline{q}_1(x) - (\overline{p}_1\,z_k(x))'\right)\big\rangle_{L_2} + \langle \lambda_k\,y_k,\, z_k\rangle_{L_2} + \\
&+\lambda_k^{-1}\,q_2^{-1}\,y_k(1)\left(\overline{z}_k{}'(1) - p_0(1)\,\overline{z}_k(1) + \frac{b_2}{b_1}\,\overline{z}_k(1)\right) + \\
&+\lambda_k^{-1}\,q_2^{-1}\,y_k(0)\left(-\,\overline{z}_k{}'(0) + p_0(0)\,\overline{z}_k(0) - \frac{a_2}{a_1}\,\overline{z}_k(0)\right).
\end{aligned}$$

Доказательство. С найденным представлением сопряженного оператора можно показать, что 1) собственные значения оператора H и сопряженной задачи совпадают; 2) между собственными функциями $\widetilde{\mathbf{g}}_k = \{g_{k,0}, g_{k,1}\}$ оператора H^*, соответствующими собственным значениям μ_k, и собственными функциями z_k сопряженной задачи, соответствующими тем же собственным значениям, можно установить взаимное однозначное соответствие.

Подставим найденные функции $\widetilde{\mathbf{g}}_k$, найденные из равенства $H^*\widetilde{\mathbf{g}}_k = \mu_k \widetilde{\mathbf{g}}_k$, в формулу (3.4) для коэффициентов c_k. Обозначим $p_k = \langle \widetilde{\mathbf{v}}, \widetilde{\mathbf{g}}_k \rangle$, $q_k = \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k, \widetilde{\mathbf{g}}_k \rangle$. Применив формулу интегрирования по частям и воспользовавшись тем, что $\mu_k = \overline{\lambda}_k$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

3.2 Вычисление коэффициентов с помощью сведения задачи к квадратичному пучку операторов

Предложим теперь другой метод вычисления коэффициентов разложения, который основан на приведении спектральной задачи (3.1)–(3.3) к пучку операторов, действующем в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$. Пространство $L_2 \times \mathbb{C}^2$ — гильбертово пространство с элементами $\mathbf{y} = \{y(x),\, \xi_1,\, \xi_2\}$ и скалярным произведением

$$\langle \mathbf{y},\, \mathbf{z} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^2} = \langle y(x),\, z(x) \rangle_{L_2} + \xi_1\, \overline{\eta}_1 + \xi_2\, \overline{\eta}_2.$$

Здесь $\mathbf{z} = \{z(x), \eta_1, \eta_2\}$.

Определим в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$ операторы A_0, A_1, A_2 равенствами

$$\begin{aligned} A_0\, \mathbf{y} &= \{y'' + p_0\, y' + q_0\, y,\ a_1\, y'(0) + a_2\, y(0),\ b_1\, y'(1) + b_2\, y(1)\}, \\ & \quad D(A_0) = \{\, \mathbf{y} = \{y(x),\, y(0),\, y(1)\} \,\big|\, y \in W_2^2 \,\}, \\ A_1\, \mathbf{y} &= \{p_1\, y' + q_1\, y,\ y(0),\ y(1)\}, \quad D(A_1) = D(A_0), \\ A_2\, \mathbf{y} &= \{q_2\, y,\ 0,\ 0\}, \quad D(A_2) = D(A_0). \end{aligned}$$

— обынтегрированные члены. Воспользовавшись тем, что $\alpha\, \frac{\partial f_0}{\partial \overline{n}} + f_1 = 0$ и $-a \int_\Gamma f_0\, \overline{g_1}\, ds = \langle f_0\,,\, F(g_1) \rangle_{H^1}\,,$ из (5.10) получаем

$$P = \int_\Gamma f_1\, \overline{\left(\frac{\partial g_0}{\partial \overline{n}} + g_0 + \frac{a}{\alpha}\, g_1 - b\, K\, g_1 \right)}\, ds + \langle f_0\,,\, F(g_1) \rangle_{H^1}\,.$$

Отсюда и из (5.9) имеем

$$\left\langle L\, \widetilde{f},\, \widetilde{g} \right\rangle = \left\langle \widetilde{f},\, L^*\, \widetilde{g} \right\rangle. \tag{5.11}$$

Поэтому оператор L^* является сужением сопряженного к L оператора.

Операторы L и L^* являются сюръективными операторами с плотной областью определения. Следовательно заданный формулами (5.6)–(5.7) оператор L^* не имеет нетривиальных расширений таких, что равенство (5.11) выполняется для всех $\widetilde{f} \in D(L)$. Таким образом, оператор L^* совпадает с оператором сопряженным к L.

Теорема 2 (о сопряженной системе). *Собственные значения $\mu_k = \overline{\lambda_k}$ сопряженного оператора L^* и сопряженной задачи*

$$a\, \Delta v(x) - b\, \mu\, \frac{\partial v(x)}{\partial x} + \mu^2\, v(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{5.12}$$

$$\alpha\, \frac{\partial v}{\partial \overline{n}} + \mu \left(1 - \frac{b\, K\, \alpha}{a} \right) v(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{5.13}$$

совпадают, а собственные элементы $\widetilde{g}_k$ оператора L^* выражаются через собственные функции v_k задачи (5.12)–(5.13) следующим образом:

$$\widetilde{g}_k = \left(\frac{a\, v_k + F(v_k)}{\overline{\lambda_k}},\, v_k \right).$$

Доказательство. Задача на собственные значения $L^*\, \widetilde{g}_k = \overline{\lambda_k}\, \widetilde{g}_k$ для оператора L^* эквивалентна выполнению следующих рагде $\widetilde{g}_k$ — собственные элементы сопряженного оператора L^*, а скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ берется в пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому задача о вычислении коэффициентов сводится к решению двух задач: 1) найти сопряженный оператор L^* в пространстве $\mathcal{H}$; 2) выразить его собственные элементы $\widetilde{g}_k$ через собственные функции v_k сопряженной задачи.

Теорема 1 (о сопряженном операторе). *Сопряженный к оператору L, определенному в пространстве $\mathcal{H}$, находится по формуле*

$$L^*(g_0,\, g_1) = \left(a\cdot g_1 + F(g_1),\ b\,\frac{\partial g_1}{\partial x} - \Delta g_0\right), \tag{5.6}$$

$$D(L^*) = \left\{\widetilde{g} = (g_0,\, g_1)\big/ g_0 \in H^2, \quad g_1 \in H^1,\right. \\ \left. \tfrac{\partial g_0}{\partial \overline{n}} + g_0 + \left(\tfrac{a}{\alpha} - b\,K\right) g_1 = 0\right\}. \tag{5.7}$$

Здесь и далее $K = \sum_{i=1}^{n} n_i$ (где n_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали); а $F = F(g_1)$ — решение следующей краевой задачи

$$\Delta F = 0 \quad \textit{в}\ \Omega, \qquad \frac{\partial F}{\partial \overline{n}} + F = -a\cdot g_1 \quad \textit{на}\ \Gamma. \tag{5.8}$$

(Задача (5.8) имеет единственное решение. Доказательство этого см., например, в [31, с. 519].)

Доказательство. Используя теорему Грина, получаем

$$\langle f_1\,,\ g_0\rangle_{H^1} + \left\langle -a\,\Delta f_0 - b\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\,,\ g_1\right\rangle_{H^0} = \\ = \langle f_0\,,\, a\,g_1\rangle_{H^1} + \left\langle f_1\,,\ b\,\frac{\partial g_1}{\partial x} - \Delta g_0\right\rangle_{H^0} + P, \tag{5.9}$$

где

$$P = \int_\Gamma f_1\,\overline{\left(\frac{\partial g_0}{\partial \overline{n}} + g_0 - b\,K\,g_1\right)}\,ds - a\int_\Gamma \left(\frac{\partial f_0}{\partial \overline{n}} + f_0\right)\overline{g_1}\,ds \tag{5.10}$$

Образуем из этих операторов пучок

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda\,A_1 + \lambda^2\,A_2. \tag{3.6}$$

Собственные значения пучка операторов $A(\lambda)$ и краевой задачи совпадают. Между собственными элементами y_k краевой задачи и собственными элементами $\mathbf{y}_k$ пучка операторов можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathbf{y}_k = \{y_k(x),\, y_k(0),\, y_k(1)\}$. Операторы A_0, A_1, A_2 имеют плотную область определения в пространстве $L_2\times\mathbb{C}^2$. Отсюда следует, что у операторов A_0, A_1, A_2 имеются сопряженные операторы A_0^*, A_1^*, A_2^*.

Сопряженный к оператору A_0 оператор A_0^* имеет вид

$$\begin{aligned} A_0^*\,\mathbf{z} \ = \ & \{z'' - (\overline{p_0}\,z)' + \overline{q_0}\,z,\ \overline{a}_1^{\,-1}\,\overline{a}_2\,z\,(0) - \overline{p_0(0)}\,z(0) + z'(0), \\ & \overline{b}_1^{\,-1}\,\overline{b}_2\,z\,(1) - \overline{p_0(1)}\,z(1)\}, \\ & D(A_0^*) = \{\,\mathbf{z} = \{z(x),\, \overline{a}_1^{\,-1}\,z(0),\, \overline{b}_1^{\,-1}\,z(1)\}\,\big|\, y \in W_2^2\,\}. \end{aligned}$$

Это следует из равенства $\langle A_0\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2} = \langle \mathbf{y},\, A_0^*\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}$ и того, что образом операторов A_0 и A_0^* является все пространство.

Зададим операторы M_1, M_2 с помощью равенств

$$\begin{aligned} M_1\{z,\,d_1,\,d_2\} \ &= \ \{-(\overline{p}_1\,z)' + \overline{q}_1\,z,\ d_1 - \overline{p}_1(0),\ d_2 + \overline{p}_1(1)\,z(1)\}, \\ D(M_1) \ &= \ \{\{z,\,d_1,\,d_2\}\,\big|\,z \in W_2^1;\ d_1, d_2 \in \mathbb{C}\}, \\ M_2\{z,\,d_1,\,d_2\} \ &= \ \{\overline{q}_2^{\,-1}\,z,\ 0,\ 0\}, \\ D(M_2) \ &= \ \{\{z,\,d_1,\,d_2\}\,\big|\,z \in L_2;\ d_1, d_2 \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убедимся в том, что

$$\langle A_1\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2} = \langle \mathbf{y},\, M_1\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}, \quad \langle A_2\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2} = \langle \mathbf{y},\, M_2\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}.$$

Области определения операторов M_1, M_2 шире области определения оператора A_0^*.

Образуем из операторов A^*, M_1, M_2 пучок

$$M(\mu) = A_0^* + \mu\,M_1 + \mu^2\,M_2. \tag{3.7}$$

Область определения пучка операторов (3.7) совпадает с областью определения оператора A_0^*. Заметим, что собственные значения пучка операторов (3.7) и собственные значения сопряженной краевой задачи совпадают. Между собственными функциями $\mathbf{z}_k$ пучка операторов (3.7), соответствующими собственным значениям $\overline{\lambda}_k$, и собственными функциями z_k сопряженной краевой задачи, соответствующими тем же $\overline{\lambda}_k$,можно установить взаимно однозначное соответствие по формуле

$$\mathbf{z}_k = \{z_k,\, \overline{a}_1^{\,-1}\, z_k(0),\, \overline{b}_1^{\,-1}\, z_k(1)\}.$$

Для $\mu \neq \overline{\lambda}_k$ оператор $M(\mu)$ обратим, поэтому $M(\mu) = [A(\lambda)]^*$.

В работе А. А. Шкаликова [56] получены соотношения биортогональности для собственных функций пучка неограниченных операторов. Для нашего случая эти соотношения имеют вид

$$\langle G\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\, \widehat{\mathbf{z}}_j\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{kj}, \tag{3.8}$$

где

$$\widehat{\mathbf{y}}_k = \{\mathbf{y}_k,\, \lambda_k\, \mathbf{y}_k\}, \quad \widehat{\mathbf{z}}_j = \{\mathbf{z}_j,\, \mu_j\, \mathbf{y}_j\}, \quad G = \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Из соотношений биортогональности (3.8) следует, что коэффициенты разложения произвольной функции $\widehat{\mathbf{y}}$ из пространства $\mathcal{H}$ по собственным элементам пучка (3.7) находятся по формуле

$$\widehat{c}_k = \langle G\,\widehat{\mathbf{y}},\, \widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{\mathcal{H}} \;/\; \langle G\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\, \widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3.9}$$

Если задача (3.1)–(3.3) усиленно регулярна (определение см. в [55, с. 196]) в ряд по собственным функциям, то любой элемент $\widehat{\mathbf{v}} = \{v_0,\, v_1\}$ пространства $\mathcal{W}_2^0$ может быть разложен в ряд по элементам $\widehat{\mathbf{v}}_k = \{y_k,\, \lambda_k\, y_k\}$

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \widetilde{\mathbf{v}}_k, \tag{3.10}$$

при решении нестационарного односкоростного уравнения переноса (см. [51]).

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что все собственные значения задачи (5.48)–(5.2) простые.

Согласно методу, предложенному в работах [57] и [55], рассматриваемая задача допускает линеаризацию в пространстве $\mathcal{H} = H^1 \times H^0$,
где $H^s = H^s(\Omega)$ — соболевское пространство с нормой

$$\|f\|^2_{H^s(\Omega)} = \|f^{(s)}\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{s} \|f^{(i)}\|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Более точно, в пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим линейный оператор L, определенный равенством

$$L(f_0,\, f_1) = \left(f_1,\; -a\,\Delta f_0 - b\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) \tag{5.3}$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{ \widetilde{f} = (f_0,\, f_1) \Big/ f_0 \in H^2(\Omega), \quad f_1 \in H^1(\Omega), \quad \alpha\,\frac{\partial f_0}{\partial \overline{n}} + f_1 = 0 \right\}. \tag{5.4}$$

Тогда линейная спектральная задача $L\,\widetilde{f} = \lambda\,\widetilde{f}$ имеет те же собственные значения, что и задача (5.48)–(5.2), а собственный элемент оператора L, соответствующий собственному значению λ_k, имеет вид $\widetilde{f}_k = (u_k,\, \lambda_k\, u_k)$, где u_k — собственная функция задачи (5.48)–(5.2), отвечающая тому же собственному значению λ_k. Из [57] следует, что собственные элементы образуют полную и минимальную систему в пространстве $\mathcal{H}$. Важной является задача: как вычислить коэффициенты $\{c_k\}$ разложения элемента $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$ в ряд по системе $\{\widetilde{f}_k\}$. Хорошо известна формула

$$c_k = \left\langle \widetilde{f},\, \widetilde{g}_k \right\rangle \Big/ \left\langle \widetilde{f}_k,\, \widetilde{g}_k \right\rangle, \tag{5.5}$$

Глава 5

О некоторых вопросах, связанных с решением эллиптических задач с параметром в краевых условиях

Излагаемый ниже метод нахождения коэффициентов разложения для эллиптических задач с параметром в краевых условиях развивает идеи третьей главы и работы [16], где аналогичные результаты были получены для обыкновенных дифференциальных операторов с параметром.

5.1 Метод сопряженного линеаризатора

Рассмотрим несамосопряженную спектральную задачу

$$a\,\Delta u(x) + b\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^2\,u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{5.1}$$

$$\alpha\,\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \lambda\,u(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{5.2}$$

Здесь a, b, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$; $\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ — производная по внешней нормали, а Ω — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\Gamma = \partial\,\Omega$, которую можно локально выпрямить гладкими преобразованиями координат.

Рассматриваемая спектральная задача возникает, например,

который сходится в норме пространства $\mathcal{W}_2^0$). Отсюда следует

$$\widehat{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\widehat{\mathbf{y}}_k, \tag{3.11}$$

где

$$\widehat{\mathbf{y}} = \{v_0,\ v_0(0),\ v_0(1),\ v_1,\ v_1(0),\ v_1(1)\},$$

$$\widehat{\mathbf{y}}_k = \{y_k,\ y_k(0),\ y_k(1),\ \lambda_k\,y_k,\ \lambda_k\,y_k(0),\ \lambda_k\,y_k(1)\}.$$

При этом ряд (3.11) сходится в норме пространства

$$W_2^1 \times \mathbb{C}^2 \times L_2 \times \mathbb{C}^2.$$

Значит, тем более, этот ряд сходится и в норме пространства $\mathcal{H}$. Коэффициенты $\{c_k\}$ в (3.10) и нужно определить. Так как ряд из равенства (3.11) сходится в $\mathcal{H}$ к элементу $\widehat{\mathbf{y}}$ и выполнены соотношения (3.8), то коэффициенты Фурье его разложения определяются однозначно и согласно построению элемента $\widehat{\mathbf{y}}$ совпадают с коэффициентами c_k из (3.10). Следовательно, для этих коэффициентов c_k справедлива формула (3.9). Теперь вычислим эти коэффициенты.

$$\langle G\,\widehat{\mathbf{y}},\ \widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{\mathcal{H}} = \langle v_0,\ -(\overline{p}_1\,z_k)' + \overline{q}_1\,z_k + \mu_k\,\overline{q}_2\,z_k\rangle_{L_2} +$$

$$+v_0(0)\,(a_1^{-1}\,\overline{z}_k(0) - p_1(0)\,\overline{z}_k(0)) +$$

$$+v_0(1)\,(b_1^{-1}\,\overline{z}_k(1) - p_1(1)\,\overline{z}_k(1)) + \langle v_1,\ \overline{q}_2\,z_k\rangle_{L_2}.$$

Воспользовавшись краевыми условиями сопряженной краевой задачи и тем, что $\mu_k = \overline{\lambda}_k$, получим равенства

$$\langle G\,\widehat{\mathbf{y}},\ \widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{\mathcal{H}} = q_2^{-1}\,p_k, \quad \langle G\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\ \widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{\mathcal{H}} = q_2^{-1}\,q_k,$$

откуда $c_k = p_k/q_k$.

Заметим, что второй способ вычисления коэффициентов является менее трудоемким.

3.3 Сопряженный пучок операторов

Для доказательства основных результатов этого параграфа нам потребуются вспомогательные конструкции.

Далее через m обозначаем $\max(n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ ,\ \nu_n)$, а через q — порядок максимальной производной переменных $y^{(i)}(0)$, $y^{(i)}(1)$, содержащейся в формах U^0_{n+1}, U^0_{n+2}, $\ldots$,U^0_{2n}.

Определим в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$ операторы A_ν следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\nu \mathbf{y} &= \{l_\nu(y),\ U^\nu_1(y),\ U^\nu_2(y),\ \ldots\ ,\ U^\nu_n(y)\}, \\ D(A_\nu) &= \big\{\mathbf{y} = \{y,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ ,\ c_n\}\ / \\ &\quad y \in W^n_2, \quad c_1 = U^0_{n+1}(y), \quad c_2 = U^0_{n+2}(y),\ \ldots\ , \quad c_n = U^0_{2n}(y)\big\} \end{aligned}$$

Здесь

$$\nu = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n,\ n+1,\ \ldots\ ,\ m, \quad m = \max(n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ ,\ \nu_n).$$

При $n < m$ выражение $l_\nu(y)$, $\nu = n+1,\ \ldots\ ,m$ считаем тождественным нулю; а при $\nu_j < m$ считаем тождественно равными нулю также и формы $U^\nu_j(y)$, $\nu = \nu_{j+1},\ \nu_{j+2},\ \ldots\ ,\ m$.

Составим из операторов A_ν пучок операторов

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda\, A_1 + \cdots + \lambda^n\, A_n + \cdots + \lambda^m\, A_m.$$

Легко показать, что:

1. Собственные значения краевой задачи (2.1)–(2.2) и пучка операторов $A(\lambda)$ совпадают с учетом их кратностей.

2. Каждой цепочке собственной и присоединенных функций

$$y^0,\ y^1,\ \ldots\ y^{p_k}$$

задачи (2.1)-(2.2), отвечающей собственному значению λ_0, соответствует цепочка собственной и присоединенных функций

$$\mathbf{y}^0,\ \mathbf{y}^1,\ \ldots,\ \mathbf{y}^{p_k}$$

Теорема 4. *Если задача (0.1)–(0.3) является регулярной краевой задачей, то коэффициенты разложений произвольной функции* $\widetilde{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\}$ *из пространства* $\mathcal{W}^1_2 = W^2_2 \times W^1_2$ *в ряд по производным по Келдышу цепочкам* $\widetilde{\mathbf{v}}_k = \{\mathbf{y}_k, \lambda_k\, \mathbf{y}_k\}$:

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \widetilde{\mathbf{v}}_k$$

Отсюда следует, что элемент $\widehat{\mathbf{y}} = \{v_0, v_0'(0), v_0'(1), v_1, v_1'(0), v_1'(1)\}$ *разлагается в ряд по элементам*

$\widehat{\mathbf{y}}_k = \{y_k, y_k'(0), y_k'(1), \lambda_k\, y_k, \lambda_k\, y_k'(0), \lambda_k\, y_k'(1)\}$:

$$\widehat{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \widehat{\mathbf{y}}_k$$

можно вычислить по формуле

$c_k = \langle G_1\, \widehat{\mathbf{y}},\, \widehat{\mathbf{z}}_k \rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2} \,/\, \langle G_1\, \widehat{\mathbf{y}}_k,\, \widehat{\mathbf{z}}_k \rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2} = P_k/Q_k$, *где*

$$\langle G_1\, \widehat{\mathbf{y}},\, \widehat{\mathbf{z}}_k \rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2} = \langle A_1\, \mathbf{v_0} + A_2\, \mathbf{v_1},\, \mathbf{z}_k \rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]} + \big\langle A_2\, \mathbf{v_0},\, \overline{\lambda_k}\, \mathbf{z}_k \big\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]}$$

$$\begin{aligned} P_k = \int_0^1 \big(p_1\, v_0'(x) + q_1(x)\, v_0(x) + q_2\, v_1(x) + q_2(x)\, \lambda_k\, v_0(x)\big)\, \overline{z_k(x)}\, dx + \\ + (a_{12}\, v_0'(0) + a_{22}\, v_0(0))\, \overline{\eta_{1k}} + (b_{12}\, v_0'(1) + b_{22}\, v_0(1))\, \overline{\eta_{2k}}, \\ Q_k = \int_0^1 \big(p_1\, y_k'(x) + (q_1(x) + 2\, q_2(x)\, \lambda_k\, y_k(x)\big)\, \overline{z_k(x)}\, dx + \\ + (a_{12}\, y_k'(0) + a_{22}\, y_k(0))\, \overline{\eta_{1k}} + (b_{12}\, y_k'(1) + b_{22}\, y_k(1))\, \overline{\eta_{2k}} \end{aligned}$$

$z_k(x)$ — *каноническая по Келдышу система собственных функций сопряженной краевой задачи.*

отношения биортогональности таковы:

$$\langle G_1\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_j\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}\,/\,\langle G_1\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}=\delta_{kj}.$$

Здесь δ_{kj} — символ Кронеккера;

$$G_1=\left\|\begin{array}{cc}A_1 & A_2\\ A_2 & 0\end{array}\right\|,$$

$$\widehat{\mathbf{y}}_k=\{\mathbf{y}_k,\lambda_k\,\mathbf{y}_k\},\mathbf{y}_k=\{y_k,y_k'(0),y_k'(1)\},$$

$$\widehat{\mathbf{z}}_k=\{\mathbf{z}_k,\overline{\lambda_k}\,\mathbf{z}_k\},\mathbf{z}_k=\{z_k,\eta_{1k},\eta_{2k}\},$$

$$\eta_{1k}=[z_k'(0)-(\overline{p_0(0)}+\overline{p_1(0)}\,\overline{\lambda}_k)\,z_k(0)]/\overline{a_2(\lambda_k)},$$

$$\eta_{2k}=[-z_k'(1)+(\overline{p_0(1)}+\overline{p_1(1)}\,\overline{\lambda}_k)\,z_k(1)]/\overline{b_2(\lambda_k)}.$$

а $z_k(x)$ — каноническая по Келдышу система собственных функций сопряженной краевой задачи.

Доказательство.

$$(A_0+\lambda_k\,A_1+\lambda_k^2\,A_2)\,\mathbf{y}_k=0\Leftrightarrow(G_0+\lambda_k\,G_1)\,\widehat{\mathbf{y}}_k=0,$$

где $G_0=\left\|\begin{array}{cc}A_0 & 0\\ 0 & -A_2\end{array}\right\|$.

Тогда

$$\langle(G_0+\lambda_k\,G_1)\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_j\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}=0.$$

$$\langle(G_0+\lambda_j\,G_1)\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_j\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}=0.$$

Вычитая последние равенства, получаем

$$(\lambda_k-\lambda_j)\,\langle G_1\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_j\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}=0.$$

При $k\neq j$, $\lambda_k\neq\lambda_j$, $\Rightarrow\langle G_1\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_j\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}=0$.
При $k=j$, $\lambda_k=\lambda_j$ и $\Rightarrow\langle G_1\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}=\mathrm{const}$ (в силу полноты системы функций в рассматриваемом пространстве).

$$\Rightarrow\langle G_1\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widehat{\mathbf{z}}_k\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}\,/\,\|\,\langle G_1\,\widehat{\mathbf{y}}_k,\,\widetilde{\mathbf{z}}_k\rangle_{[L_2\times\mathbb{C}^2]^2}\,\|=1.$$

Доказано.

пучка $A(\lambda)$, отвечающая тому же собственному значению λ_0. При этом первые компоненты собственной (присоединенной) функции

$$\mathbf{y}^s=\{y^s,\,U_{n+1}^0(y^s),\,U_{n+2}^0(y^s),\,\dots\,,\,U_{2n}^0(y^s)\}$$

пучка $A(\lambda)$ совпадают с собственной (присоединенной) функцией y^s задачи (2.1)-(2.2).

Лемма 1 (о плотности).

Области определения операторов A_ν ($\nu=0,\,1,\,\dots,\,m$) плотны в пространстве $L_2\times\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Области определения операторов A_ν ($\nu=0,\,1,\,\dots,\,m$) совпадают и равны

$$\begin{aligned}D(A_\nu)\;=\;&\{\mathbf{y}=\{y,\,c_1,\,c_2,\,\dots\,,\,c_n\}\;/\\&y\in W_2^n,\quad c_1=U_{n+1}^0(y),\quad c_2=U_{n+2}^0(y),\,\dots\,,\quad c_n=U_{2n}^0(y)\}\,.\end{aligned}$$

Для доказательства плотности $D(A_\nu)$ в пространстве $L_2\times\mathbb{C}^n$ достаточно показать, что для любых чисел $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots\,,\,\alpha_n$, любого $\varepsilon>0$ и любой функции $\mathbf{v}=\{v,\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots\,,\,\alpha_n\}\in L_2\times\mathbb{C}^n$ найдется такая функция $\mathbf{y}=\{y,\,U_{n+1}^0(y),\,U_{n+2}^0(y),\,\dots,\,U_{2n}^0(y)\}$, что $U_{n+i}^0(y)=\alpha_i$, $i=1,\,2,\,\dots\,,\,n$ и $\|v-y\|_{L_2}<\varepsilon$.

Формы $U_{n+i}^0(\cdot)$ ($i=1,\,2,\,\dots\,,\,n$) линейно независимы. Значит для любых чисел $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots,\,\alpha_n$ можно подобрать функцию $u\in W_2^n$, для которой выполнены равенства $U_{n+i}^0(u)=\alpha_i$, ($i=1,\,2,\,\dots,\,n$).

Так как порядок форм $U_{n+i}^0(u)$ ($i=1,\,2,\,\dots,\,n$) не превосходят $n-1$, то множество всех функций $w\in W_2^n$, удовлетворяющих краевым условиям $U_{n+i}^0(w)=0$, $i=1,\,2,\,\dots\,,\,n$ всюду плотно в пространстве L_2. Поэтому любая функция из L_2 может быть приближена функцией w. Любая функция из L_2 может быть представлена в виде $v-u$, где v — произвольная функция из L_2, следовательно $\|(v-u)-w\|_{L_2}<\varepsilon$. Положив $y=u+w$, получаем, что $\|v-y\|<\varepsilon$ и $U_{n+i}^0(u)=\alpha_i$, ($i=1,\,2,\,\dots\,,\,n$). Лемма доказана.

Следствие. Область определения пучка операторов $A(\lambda)$ плотна в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$.

Замечание 1. Аналогично можно показать, что линеал функций

$$\{y,\ U^0_{n+1}(y),\ U^0_{n+2}(y),\ \ldots,\ U^0_{2n}(y)\},$$

где $y \in W_2^r,\ r > n$ плотен в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$. Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 2 (о сопряженном операторе). *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ заданы операторы H и M, образом которых является все пространство $\mathcal{H}$. Если оператор H имеет плотную область определения в $\mathcal{H}$ и, кроме того, для любых элементов $\mathbf{v} \in D(H)$ и $\mathbf{g} \in D(M)$ выполнено равенство*

$$\langle H\mathbf{v}\,,\, \mathbf{g} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v}\,, M\mathbf{g} \rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{3.12}$$

то оператор M является сопряженным к H.

Доказательство. Равенство (3.12) означает, что $M \subseteq H^*$. Для доказательства того, что $M = H^*$, осталось показать включение $D(M) \supseteq D(H^*)$. Покажем теперь, что это включение выполнено. Пусть $\mathbf{r} \in D(H^*)$ и $H^*\mathbf{r} = \mathbf{h}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{v} \in D(H)$ верно равенство

$$\langle H\mathbf{v}\,,\, \mathbf{r} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{3.13}$$

Поскольку образом оператора M является все пространство $\mathcal{H}$, то для элемента $\mathbf{h}$ найдется элемент $\mathbf{r}_1$ такой, что $M\mathbf{r_1} = \mathbf{h}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{v} \in D(H)$ верно равенство

$$\langle H\mathbf{v},\, \mathbf{r}_1 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v},\, \mathbf{h} \rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{3.14}$$

Из (3.13)–(3.14) получаем следующее равенство: $\langle H\mathbf{v}\,,\, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Обозначим через $\mathbf{f}$ элемент $H\mathbf{v}$. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$\langle \mathbf{f},\, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{3.15}$$

λ_k, соответствует собственная функция $\mathbf{z}_k$ оператор-функции $[A(\overline{\lambda})]^*$, отвечающая тому же собственному значению λ_k. При этом первые компоненты элемента $\mathbf{z}_k$ оператор-функции $[A(\overline{\lambda})]^*$ совпадают с элементом z_k. Более точно, собственные функции $\mathbf{z}_k$ сопряженной оператор-функции и собственные функции z_k сопряженной задачи, соответствующими одному и тому же собственному значению $\overline{\lambda}_k$, связаны равенством: $\mathbf{z}_k = \{z_k, \eta_{1k}, \eta_{2k}\}$, где

$$\eta_{1k} = [z_k'(0) - (\overline{p_0(0)} + \overline{p_1(0)}\,\overline{\lambda}_k)\, z_k(0)]/\overline{a_2(\lambda_k)},$$

$$\eta_{2k} = [-z_k'(1) + (\overline{p_0(1)} + \overline{p_1(1)}\,\overline{\lambda}_k)\, z_k(1)]/\overline{b_2(\lambda_k)}.$$

4.3 Соотношения биортогональности

Пусть собственные функции $y_k(x)$ задачи (1.1)–(1.3) образуют каноническую по Келдышу систему собственных функций. Тогда соответствующие функции $\mathbf{y}_k = \{y_k(x),\, y_k'(0),\, y_k'(1)\}$ образуют каноническую по Келдышу систему собственных функций пучка $A(\lambda)$ (определение канонической системы собственных функций см. в (см.[41, с. 309–310],). Образуем из этих функций систему производных по Келдышу цепочек $\widehat{\mathbf{y}}_k = \{\mathbf{y}_k, \lambda_k\, \mathbf{y}_k\}$. Для этой системы верны следующие теоремы:

Теорема 2. *Если задача (1.1)–(1.3) является нормальной краевой задачей , то система производных по Келдышу цепочек $\widehat{\mathbf{y}}_k$ полна в пространстве $[L_2 \times \mathbb{C}^2]^2$.*
Доказательство следует из замечания 2.3 [6].

Теорема 3. *Если задача (1.1)–(1.3) является нормальной краевой задачей, то система производных по Келдышу цепочек $\widehat{\mathbf{y}}_k$ минимальна в пространстве $[L_2 \times \mathbb{C}^2]^2$. Соответствующие со-*

$$+a_2^{-1}(\lambda)\,U_1(y,\lambda)\,(\overline{z'(0)}-(p_0(0)+p_1(0)\,\lambda)\,\overline{z(0)})+$$
$$+b_2^{-1}(\lambda)\,U_2(y,\lambda)\,(-\overline{z'(1)}+(p_0(1)+p_1(1)\,\lambda)\,\overline{z(1)})+U_1(y,\lambda)\,\overline{\eta_1}+$$
$$+U_2(y,\lambda)\,\overline{\eta_2}=\xi_1\,\overline{V_1(z,\mu)}+\xi_2\,\overline{V_2(z,\mu)}.$$
$$\overline{V_2(z,\mu)}\,(U_4(y,\lambda)-\xi_2)+\overline{V_1(z,\mu)}\,(U_3(y,\lambda)-\xi_1)+$$
$$+U_1(y,\lambda)\,(a_2^{-1}(\lambda)\,(\overline{z'(0)}-(p_0(0)+p_1(0)\,\lambda)\,\overline{z(0)})+$$
$$+\overline{\eta_1})+U_2(y,\lambda)\,b_2^{-1}(\lambda)\,(\overline{-z'(1)}+(p_0(1)+p_1(1)\,\lambda)\,\overline{z(1)})+\overline{\eta_2})=0.$$

Из последнего равенства с учетом линейной независимости форм получаем, что:

$$\xi_1=U_3(y,\lambda)=y'(0),\xi_2=U_4(y,\lambda)=y'(1),$$
$$\overline{\eta_1}=a_2^{-1}(\lambda)\,(\overline{z'(0)}-(p_0(0)+p_1(0)\,\lambda)\,\overline{z(0)}),$$
$$\eta_1==\overline{a_2^{-1}(\lambda)}\,(z'(0)-(\overline{p_0(0)}+\overline{p_1(0)}\,\mu)\,z(0)),$$
$$\overline{\eta_2}=b_2^{-1}(\lambda)\,(-\overline{z'(1)}+(p_0(1)+p_1(1)\,\lambda)\,\overline{z(1)}),$$
$$\eta_2=\overline{b_2^{-1}(\lambda)}\,(-z'(1)+(\overline{p_0(1)}+\overline{p_1(1)}\,\mu)\,z(1)).$$

Из равенства

$$\langle A(\lambda)\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}=\big\langle\mathbf{y},\,(M_0+M_1\,\lambda+M_1\,\lambda^2)\,\mathbf{z}\big\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2},$$

следует включение для областей определения оператор-функций $D(M_0+M_1\,\lambda+M_1\,\lambda^2)\subseteq D([A(\overline{\lambda})]^*)$. Из леммы 2 и того, что оператор-функция $(M_0+M_1\,\lambda+M_1\,\lambda^2)$, является отображением на все пространство $L_2\times\mathbb{C}^2$ вытекает равенство $[A(\overline{\lambda})]^*=M_0+M_1\,\lambda+M_1\,\lambda^2$.
Доказано.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *Собственные значения сопряженной краевой задачи и собственные значения сопряженной к $A(\lambda)$ оператор-функции $[A(\overline{\lambda})]^*$ совпадают, а каждой собственной функции z_k сопряженной задачи, отвечающей собственному значению*

Равенство (3.15) означает, что элемент $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ ортогонален элементу $\mathbf{f}$. Но так как $\mathbf{f}$ является произвольным элементом пространства $\mathcal{H}$, то (3.15) равносильно тому, что элемент $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ ортогонален всему пространству $\mathcal{H}$. Отсюда $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{0}$.

Таким образом, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1\in\mathcal{H}$ и лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть для каждого для задачи (2.1)–(2.2) выполнены условия* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{P}$. *Тогда собственные значения сопряженной краевой задачи и собственные значения сопряженного к $A(\lambda)$ пучка операторов $[A(\overline{\lambda})]^*$ совпадают с учетом их кратностей, а каждой цепочке собственной и присоединенных функций z_k^0, z_k^1, $\ldots z_k^h$, сопряженной задачи, отвечающей собственному значению λ_k, соответствует цепочка собственного и присоединенных функций z_k^0, z_k^1, $\ldots$, z_k^h, пучка $[A(\overline{\lambda})]^*$, отвечающая тому же собственному значению λ_k при этом первые компоненты элемента $z_k^s\,(s=0,\ 1,\ \ldots,\ h)$ пучка $[A(\overline{\lambda})]^*$ совпадают с элементом z_k^s.*

Доказательство. Заметим, что формы

$$U_1(y,\lambda),\ U_2(y,\lambda),\ \ldots,\ U_n(y,\lambda),\ U_{n+1}^0(y),\ U_{n+2}^0(y),\ \ldots,\ U_{2n}^0(y)$$

являются линейно независимыми при любом фиксированном λ. Действительно, предположим противное. Пусть формы не являются линейно независимыми. С помощью условия $\mathbf{U}$ получим, что формы

$$U_1^0(y),\ U_2^0(y),\ \ldots,\ U_n^0(y),\ U_{n+1}^0(y),\ U_{n+1}^0(y),\ \ldots,\ U_{2n}^0(y)$$

линейно зависимы. А это противоречит выбору линейных однородных форм

$$U_{n+1}^0(y),\ U_{n+1}^0(y),\ \ldots,\ U_{2n}^0(y).$$

Таким образом, формы

$$U_1(y,\lambda),\ U_2(y,\lambda),\ \ldots,\ U_n(y,\lambda),\ U_{n+1}^0(y),\ U_{n+2}^0(y),\ \ldots,\ U_{2n}^0(y)$$

являются линейно независимыми при любом фиксированном λ. Отсюда и из условий **U** и **P** следует, что сопряженная к задаче (3.12)–(3.13) задача имеет следующий вид:

$$l^*(z,\lambda) \;=\; \sum_{\nu=0}^{n}\lambda^\nu\sum_{s=\nu}^{n}(-1)^{n-s}\cdot\left(\overline{p_{\nu s}(x)}\cdot z(x)\right)^{(n-s)}=0, \quad (3.16)$$

$$U_j^*(z,\lambda) \;=\; \overline{V^0_{n+1-j}(z)}\,+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\lambda^\nu\left(\overline{\gamma_j^\nu(z)}-\xi^\nu_{j1}\cdot\overline{V^0_{2n}(z)}-\dots-\xi^\nu_{jn}\cdot\overline{V^0_{n+1}(z)}\right)=0, \quad (3.17)$$

$$j=1,\;2,\;\dots\;,\;n.$$

Здесь и далее формы $\overline{\gamma_1^\nu(z)},\;\overline{\gamma_2^\nu(z)},\;\dots\;,\;\overline{\gamma_n^\nu(z)}$ при $\nu=n+1,\;n+2,\;\dots\;,\;m$ тождественно равны нулю. Эти формы введены для сокращения записи.

Введем в рассмотрение пучок операторов $[A(\overline{\lambda})]^*$, действующий по формуле

$$\begin{aligned}
[A(\overline{\lambda})]^*\mathbf{z} \;=\; & \{\,l_0^*(z), V_n^0(z), V_{n-1}^0(z),\;\dots\;, V_1^0(z)\}\;+\\
+\;& \lambda\cdot\{\,l_1^*(z), b_{11}, b_{12},\;\dots\;, b_{1n}\}\;+\\
+\;& \lambda^2\cdot\{\,l_2^*(z), b_{21}, b_{22},\;\dots\;, b_{2n}\}\;+\;\dots\;+\\
+\;& \lambda^n\cdot\{\,l_n^*, b_{n1}, b_{n2},\;\dots\;, b_{nn}\}\;+\\
+\;& \lambda^{n+1}\cdot\{\,0, b_{n+1,\,1}, b_{n+1,\,2},\;\dots\;, b_{n+1,\,n}\}\;+\;\dots\;+\\
+\;& \lambda^m\cdot\{\,0, b_{m1}, b_{m2},\;\dots\;, b_{mn}\}
\end{aligned}$$

и имеющим область определения

$$\begin{aligned}
D([A(\overline{\lambda})]^*) \;=\; & \big\{\mathbf{z}=\{\,z, a_1, a_2,\;\dots\;, a_n\,\}\;/\;\mathbf{z}\in W_2^n,\\
& a_1=-V^0_{2n}(z),\; a_2=-V^0_{2n-1}(z),\;\dots\;,\; a_n=-V^0_{n+1}(z)\big\}
\end{aligned}$$

Здесь $b_{\nu j}$ $(\nu=1,\;2,\;\dots\;,\;n)$ — числа, определенные равенствами

$$b_{\nu j}=\gamma_j^\nu-\overline{\xi^\nu_{1j}}\cdot V^0_{2n}(z)-\overline{\xi^\nu_{2j}}\cdot V^0_{2n-1}(z)-\dots-\overline{\xi^\nu_{nj}}\cdot V^0_{n+1}(z),$$

а $b_{\nu j}$ $(\nu=n+1,\;n+2,\;\dots\;,\;m)$ — это числа, определенные равенствами

$$b_{\nu j}=-\overline{\xi^\nu_{1j}}\cdot V^0_{2n}(z)-\overline{\xi^\nu_{2j}}\cdot V^0_{2n-1}(z)-\dots-\overline{\xi^\nu_{nj}}\cdot V^0_{n+1}(z).$$

Таким образом, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1\in\mathcal{H}$ и лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Сопряженная к пучку $A(\lambda)$ оператор-функция $[A(\overline{\lambda})]^*$ задается равенствами $[A(\overline{\lambda})]^*=M_0+\lambda M_1+\lambda^2 M_2$, где $D([A(\overline{\lambda})]^*)=\Big\{\,\mathbf{z}=\{z(x),\,\eta_1,\,\eta_2\}$, где*

$$\eta_1=\overline{a_2^{-1}(\lambda)}\left(z'(0)-(\overline{p_0(0)}+\overline{p_1(0)}\,\mu)\,z(0)\right),$$

$$\eta_2=\overline{b_2^{-1}(\lambda)}\left(-z'(1)+(\overline{p_0(1)}+\overline{p_1(1)}\,\mu)\,z(1)\right)\;\Big/\;y\in W_2^2\Big\},$$

где операторы M_0, M_1, M_2 действуют по следующим формулам:

$$M_0\,\mathbf{z}=\left\{z''-(\overline{p_0}\,z)'+\overline{q_0}\,z,\;(\overline{a_{21}}-\overline{a_{11}}\,\overline{p_0(0)})\,z(0)+\overline{a_{11}}\,z'(0),\right.$$

$$\left.(\overline{b_{21}}-\overline{b_{11}}\,\overline{p_0(1)})\,z(1)+\overline{b_{11}}\,z'(1)\right\},$$

$$M_1\,\mathbf{z}=\left\{-(\overline{p_1}\,z)'+\overline{q_1}\,z,\;\overline{a_{12}}\,z'(0)-(\overline{a_{12}}\,\overline{p_0(0)}+\overline{a_{11}}\,\overline{p_1(0)}-\overline{a_{22}})\,z(0),\right.$$

$$\left.\overline{b_{12}}\,z'(1)-(\overline{b_{12}}\,\overline{p_0(1)}+\overline{b_{11}}\,\overline{p_1(1)}-\overline{b_{22}})\,z(1)\right\},$$

$$M_2\,\mathbf{z}=\left\{q_2\,z,\;-\overline{a_{12}}\,\overline{p_1(0)}\,z(0),\;-\overline{b_{12}}\,\overline{p_1(1)}\,z(1)\right\}.$$

Доказательство. Из равенства

$$\langle A(\lambda)\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}=\left\langle\mathbf{y},\,(M_0+M_1\,\lambda+M_1\,\lambda^2)\,\mathbf{z}\right\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2},$$

где $\mathbf{y}=\{y(x),\,\xi_1,\,\xi_2\}$, $\mathbf{z}=\{z(x),\,\eta_1,\,\eta_2\}$.

$$\langle A(\lambda)\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}=(l(y,\lambda),z)_{L_2}+U_1(y,\lambda)\,\overline{\eta_1}+U_2(y,\lambda)\,\overline{\eta_2}=$$

$$=(y,l^*(z,\mu))_{L_2}+\xi_1\,\overline{V_1(z,\mu)}+\xi_2\,\overline{V_2(z,\mu)}$$

$$\langle A(\lambda)\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}=(y,l^*(z,\mu))_{L_2}+P(y,z)+U_1(y,\lambda)\,\overline{\eta_1}+U_2(y,\lambda)\,\overline{\eta_2}.$$

Расписав $P(y,z)$ получаем:

$$U_3(y,\lambda)\,\overline{V_1(z,\mu)}+U_4(y,\lambda)\,\overline{V_2(z,\mu)}+$$

имеют вид $\widetilde{\mathbf{v}}_k = \{y_k,\, \lambda_k\, y_k\}$, где y_k — собственные функции задачи (1.1)–(1.3), отвечающие тем же собственным значениям λ_k.

Лемма 2 (о сопряженном операторе). *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ заданы операторы H и M, образом которых является все пространство $\mathcal{H}$. Если оператор H имеет плотную область определения в $\mathcal{H}$ и, кроме того, для любых элементов $\mathbf{v} \in D(H)$ и $\mathbf{g} \in D(M)$ выполнено равенство*

$$\langle\, H\mathbf{v}\,,\, \mathbf{g}\,\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v}\,, M\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{4.1}$$

то оператор M является сопряженным к H.

Доказательство. Равенство (4.1) означает, что $M \subseteq H^*$. Для доказательства того, что $M = H^*$, осталось показать включение $D(M) \supseteq D(H^*)$. Покажем теперь, что это включение выполнено. Пусть $\mathbf{r} \in D(H^*)$ и $H^*\mathbf{r} = \mathbf{h}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{v} \in D(H)$ верно равенство

$$\langle\, H\mathbf{v}\,,\, \mathbf{r}\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h}\,\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{4.2}$$

Поскольку образом оператора M является все пространство $\mathcal{H}$, то для элемента $\mathbf{h}$ найдется элемент $\mathbf{r}_1$ такой, что $M\mathbf{r_1} = \mathbf{h}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{v} \in D(H)$ верно равенство

$$\langle\, H\mathbf{v},\, \mathbf{r}_1\,\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v},\, \mathbf{h}\,\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{4.3}$$

Из (4.2)–(4.3) получаем следующее равенство: $\langle\, H\mathbf{v}\,,\, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1\,\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Обозначим через $\mathbf{f}$ элемент $H\mathbf{v}$. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$\langle\, \mathbf{f},\, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1\,\rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) означает, что элемент $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ ортогонален элементу $\mathbf{f}$. Но так как $\mathbf{f}$ является произвольным элементом пространства $\mathcal{H}$, то (4.4) равносильно тому, что элемент $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ ортогонален всему пространству $\mathcal{H}$. Отсюда $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$.

Нетрудно проверить, что

$$\langle\, A(\lambda)\,\mathbf{y},\, \mathbf{z}\,\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2} = \left\langle\, \mathbf{y},\, [A(\overline{\lambda})]^*\,\mathbf{z}\,\right\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2}. \tag{3.18}$$

Равенство (3.18) означает, что оператор $[A(\overline{\lambda})]^*$ является сужением сопряженного пучка операторов. Операторы $A(\lambda)$ и $[A(\overline{\lambda})]^*$ являются отображениями на все пространство $L_2 \times \mathbb{C}^n$. Отсюда и из леммы 2 следует, что пучок операторов $[A(\overline{\lambda})]^*$ совпадает с сопряженным к $A(\lambda)$ пучком операторов.

Если z^0 — собственная функция задачи (3.16)–(3.17), отвечающий собственному значению λ_0, то, как следует из определения оператора $[A(\overline{\lambda})]^*$, элемент

$$\mathbf{z}^0 = \{\, z^0,\ -V^0_{2n}(z^0),\ -V^0_{2n-1}(z^0),\ \ldots\ ,\ -V^0_{n+1}(z^0)\}$$

из пространства $L_2 \times \mathbb{C}^n$ принадлежит области определения $D\left([A(\overline{\lambda})]^*\right)$ сопряженного пучка операторов и является собственной функцией пучка $[A(\overline{\lambda})]^*$, отвечающего тому же собственному значению λ_0.

Верно и обратное: если $\mathbf{z}^0$ — собственная функция пучка $[A(\overline{\lambda})]^*$, то первая компонента этой функции является собственной функцией сопряженной краевой задачи (3.16)-(3.17), отвечающего тому же собственному значению λ_0. Далее, если $z^0,\ z^1,\ \ldots\ ,\ z^h$ — цепочка собственных и присоединенных функций краевой задачи (3.16)-(3.17), отвечающая собственному значению λ_0, то элементы

$$\begin{gathered}
\mathbf{z}^0 = \{\, z^0,\ -V^0_{2n}(z^0),\ -V^0_{2n-1}(z^0),\ \ldots\ ,\ -V^0_{n+1}(z^0)\}\,,\\
\mathbf{z}^1 = \{\, z^1,\ -V^0_{2n}(z^1),\ -V^0_{2n-1}(z^1),\ \ldots\ ,\ -V^0_{n+1}(z^1)\}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{z}^h = \{\, z^h,\ -V_{2n}(z^h),\ -V_{2n-1}(z^h),\ \ldots\ ,\ -V_{n+1}(z^h)\}
\end{gathered}$$

составляют цепочку собственных и присоединенных функций пучка $[A(\overline{\lambda})]^*$. И, наоборот, первые компоненты собственных и присоединенных функций сопряженного пучка операторов образуют цепочку собственных и присоединенных функций сопряженной краевой задачи. Лемма доказана.

Замечание 2. Используя лемму 2, нетрудно найти сопряженные к операторам A_ν, $(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m)$ и показать, что сопряженный пучок $[A(\overline{\lambda})]^*$ совпадает с пучком сопряженных операторов

$$A^*(\overline{\lambda}) = A_0^* + \lambda\, A_1^* + \ \dots\ + \lambda^n\, A_n^* + \ \dots\ + \lambda^m\, A_m^*,$$

причем $D\left([A(\overline{\lambda})]^*\right) = D(A_0^*)$.

3.4 Основной результат и его доказательство

Обозначим через $y_k^h \quad (k = 1,\ 2,\ \dots; \quad h = 0,\ 1,\ \dots,\ p_k)$ собственные и присоединенные функции краевой задачи (2.1)–(2.2), образующие каноническую по Келдышу систему. Здесь p_k — длина цепочки собственных и присоединенных функций, отвечающих собственному значению λ_k краевой задачи (2.1)–(2.2).

Через $\mathbf{y}_k^h$ обозначим следующий элемент:

$$\mathbf{y}_k^h = \{\, y_k^h,\, U_{n+1}^0(y_k^h),\, U_{n+2}^0(y_k^h),\, \dots,\, U_{2n}^0(y_k^h)\,\},$$

а через $\widehat{\mathbf{y}}_k^h$ — производные по Келдышу цепочки длины m, построенные по элементам $\mathbf{y}_k^h$ (см. [56]).

Пусть z_k^s — собственные и присоединенные функции сопряженной к (2.1)–(2.2) краевой задачи, образующие каноническую по Келдышу цепочку (здесь $s = 0, 1, \dots, p_k$), а $\widehat{\mathbf{z}}_k^h$ — производные по Келдышу цепочки длины m, построенные по элементам

$$\mathbf{z}_k^s = \{\, z_k^s,\ -V_{2n}^0(z_k^s),\ -V_{2n-1}^0(z_k^s),\ \dots,\ -V_{n+1}^0(z_k^s)\}.$$

Теорема. *Пусть задача (2.1)–(2.2) регулярна и выполнены условия* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{P}$. *Тогда элемент* $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}_{2,U}^r$, *где* $r \geq \max(\rho - n + 1,\ m - n + q)$, *разлагается в ряд (2.3) единственным образом и коэффициенты разложения находятся по следующей формуле:* $c_{kh} = P_{kh}/Q_{kh}$.

Поэтому любая функция из L_2 может быть приближена функцией w. Любая функция из L_2 может быть представлена в виде $v - u$, где v — произвольная функция из L_2, следовательно $\|(v-u) - w\|_{L_2} < \varepsilon$. Положив $y = u + w$, получаем, что

$$\|v - y\| < \varepsilon \ \text{ и } \ y'(0) = \alpha_1, \quad y'(1) = \alpha_2.$$

Лемма доказана.

Отсюда следует, что пучок операторов $A(\overline{\lambda})$ также имеет плотную область определения и у него существует сопряженная оператор-функция $[A(\overline{\lambda})]^*$.

4.2 Сопряженная оператор-функция

Между сопряженной задачей и сопряженным к $A(\lambda)$ пучком операторов существует определенная связь. Выявим ее. Для этого при фиксированном λ найдем сопряженный к $A(\overline{\lambda})$ оператор $[A(\overline{\lambda})]^*$. Этот оператор представляет собой сопряженную оператор-функцию от λ.

Вначале проведем лианеризацию задачи (1.1)–(1.3). Согласно [55] задача (1.1)–(1.3) допускает линеаризацию по параметру в пространстве $\mathcal{W}_2^1 = W_2^2 \times W_2^1$ (где $W_2^i = W_2^i[0,1]$ — пространства Соболева). Линеаризатор H задачи (1.1)–(1.3) задается следующими равенствами: $H\widetilde{v} = \lambda\,\widetilde{v}$, где

$$\widetilde{v} = \{v_0,\, v_1\},\ \ v_0 = y,\ \lambda\, v_0 = \lambda\, y = v_1$$

$$H\{v_0,\, v_1\} = \{v_1,\, -q_2^{-1}\,(v_0'' + p_0\, v_0' + p_1\, v_1' + q_1\, v_1 + q_0\, v_0)\},$$

$$D(H) = \left\{\widetilde{\mathbf{v}} = \{v_0,\, v_1\}\, \big/\, v_0 \in W_2^3,\ v_1 \in W_2^2,\right\}.$$

$$V_1(\widetilde{\mathbf{v}}) = a_{11}\, v_0'(0) + a_{12}\, v_1'(0) + a_{21}\, v_0(0) + a_{22}\, v_1(0) = 0,$$

$$V_2(\widetilde{\mathbf{v}}) = b_{11}\, v_0'(1) + b_{12}\, v_1'(1) + b_{21}\, v_0(1) + b_{22}\, v_1(1) = 0.$$

Линейная спектральная задача $H\,\widetilde{\mathbf{v}} = \lambda\,\widetilde{\mathbf{v}}$ имеет те же собственные значения,что и задача (1.1)–(1.3), а собственные функции оператора H, соответствуюшие собственным значениям λ_k, Определим в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$ операторы A_0, A_1, A_2 равенствами

$$A_0\,\mathbf{y} = \{y'' + p_0\,y' + q_0\,y,\; a_{11}\,y'(0) + a_{21}\,y(0),\; b_{11}\,y'(1) + b_{21}\,y(1)\},$$

$$A_1\,\mathbf{y} = \{p_1\,y' + q_1\,y,\; a_{12}\,y'(0) + a_{22}\,y(0),\; b_{12}\,y'(1) + b_{22}\,y(1)\},$$

$$A_2\,\mathbf{y} = \{q_2\,y,\; 0,\; 0\}.$$

Образуем из этих операторов пучок $A(\lambda) = A_0 + \lambda\,A_1 + \lambda^2\,A_2$.

Собственные значения пучка операторов $A(\lambda)$ и краевой задачи совпадают. Между собственными элементами y_k краевой задачи и собственными элементами $\mathbf{y}_k$ пучка операторов можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathbf{y} = \{y(x),\, y'(0),\, y'(1)\}$. $D(A) = \{\,\mathbf{y} = \{y(x),\, y'(0),\, y'(1)\}\,\big|\, y \in W_2^3\,\}$. Операторы A_0, A_1, A_2 имеют плотную область определения в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$.

Лемма 1 (о плотности). *Области определения операторов A_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ плотны в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$.*

Доказательство. Области определения операторов A_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ совпадают и равны

$$D(A_0) = \{\,\mathbf{y} = \{y(x),\, y'(0),\, y'(1)\}\,\big|\, y \in W_2^3\,\}.$$

Для доказательства плотности $D(A_\nu)$ в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$ достаточно показать, что для любых чисел α_1, α_2, любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $\mathbf{v} = \{v,\ \alpha_1,\ \alpha_2\} \in L_2 \times \mathbb{C}^2$ найдется такая функция $\{y(x),\, y'(0),\, y'(1)\}$, что $y'(0) = \alpha_1$, $y'(1) = \alpha_2$ и $\|v - y\|_{L_2} < \varepsilon$.

Формы $u'(0)$ и $u'(1)$ линейно независимы. Значит для любых чисел α_1, α_2 можно подобрать функцию $u \in W_2^2$, для которой выполнены равенства $u'(0) = \alpha_1$, $u'(1) = \alpha_2$

Так как порядок форм $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$ не превосходят двух, то множество всех функций $w \in W_2^2$, удовлетворяющих краевым условиям $w'(0) = 0$, $w'(1) = 0$ всюду плотно в пространстве L_2.

Здесь величины P_{kh} и Q_{kh} определены выражениями

$$\begin{aligned} P_{kh} \;=\; & \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s} \left\langle\, l_{\nu+1+s}(v_\nu)\,,\;\; z_k^{p_k-h,\,s} \,\right\rangle_{L_2} - \\ & - \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{m-1-s} U_j^{\nu+s+1}(v_\nu)\cdot\overline{V^{\,0}_{2\,n+1-j}}(z_k^{p_k-h,s}), \end{aligned} \qquad (3.19)$$

$$\begin{aligned} Q_{kh} \;=\; & \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{m-1-s} \left\langle\, l_{\nu+1+s}(y_k^{h,\,\nu})\,,\; z_k^{p_k-h,\,s} \,\right\rangle_{L_2} - \\ & - \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{m-1-s} U_j^{\nu+s+1}(y_k^{h,\,\nu})\cdot\overline{V^{\,0}_{2\,n+1-j}}\left(z_k^{p_k-h,\,s}\right) \end{aligned} \qquad (3.20)$$

или выражениями

$$\begin{aligned} P_{kh} \;=\; & \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s} \left\langle\, v_s\,,\, l^*_{\nu+1+s}(\,z_k^{p_k-h,\nu}\,) \,\right\rangle_{L_2} + \\ & + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s} U^0_{n+i}(v_s)\cdot\overline{\gamma_i^{\,\nu+1+s}}\left(z_k^{p_k-h,\nu}\right) - \\ & - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s} U^0_{n+i}(v_s)\cdot\xi^{\,\nu+1+s}_{n-j+1,\,i}\cdot\overline{V^{\,0}_{n+j}}(z_k^{p_k-h,\nu}), \end{aligned} \qquad (3.21)$$

$$\begin{aligned} Q_{kh} \;=\; & \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s} \left\langle\, y_k^{h,s}\,,\, l^*_{\nu+1+s}(z_k^{p_k-h,\nu}) \,\right\rangle_{L_2} + \\ & + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s} U^0_{n+i}(y_k^{h,s})\cdot\overline{\gamma_i^{\,\nu+1+s}}(z_k^{p_k-h,\nu}) \\ & - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s} U^0_{n+i}\left(y_k^{h,\,s}\right)\cdot\xi^{\,\nu+1+s}_{n-j+1,\,i}\cdot\overline{V^{\,0}_{n+j}}\left(z_k^{p_k-h,\,\nu}\right). \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Доказательство теоремы.

1. Доказательство формул (3.19), (3.20). Доказательство состоит из двух этапов. На первом этапе находятся коэффициенты $\widehat{c}_{kh}$ разложений по производным цепочкам пучка операторов. На втором — показывается, что эти коэффициенты совпадают с коэффициентами c_{kh} из разложения (2.3).

Первый этап доказательства. В работе [56] для общего пучка операторов, действующего в гильбертовом пространстве, были получены соотношения биортогональности, связывающие производные по Келдышу цепочки самого пучка и сопряженного к нему. Приложив этот результат [56, с. 154] к рассматриваемому пучку

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^n A_n + \cdots + \lambda^m A_m,$$

получаем следующие соотношения биортогональности:

$$\frac{\left\langle G\, \widehat{\mathbf{y}}_k^h,\, \widehat{\mathbf{z}}_j^s \right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}}{\left\langle G\, \widehat{\mathbf{y}}_k^h,\, \widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}} = \delta_{k,j}\cdot\delta_{h,p_j-s}, \tag{3.23}$$

где

$$G = \left\| \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{m-1} & A_m \\ A_2 & A_3 & A_4 & \ldots & A_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m-1} & A_m & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ A_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Из этих соотношений биотогональности следует, что если некоторый элемент $\widehat{\mathbf{y}} \in (L_2\times\mathbb{C}^n)^m$ разлагается в ряд

$$\widehat{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} \widehat{c}_{kh}\, \widehat{\mathbf{y}}_k^h,$$

то коэффициенты $\widehat{c}_{kh}$ находятся по следующей формуле:

$$\widehat{c}_{kh} = \frac{\left\langle G\,\widehat{\mathbf{y}},\, \widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}}{\left\langle G\,\widehat{\mathbf{y}}_k^h,\, \widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}}. \tag{3.24}$$

Задача (1.1)–(1.3) содержит параметр в краевых условиях и не тривиальна для аналитического и численного решения. Основная трудность разложения в ряды по производным цепочкам Келдыша связана с нарушением минимальности этих цепочек в пространстве $L_2\times L_2$. Система производных цепочек Келдыша оказывается “переполненной” в пространстве $L_2\times L_2$. В результате чего соответствующие ряды сходятся в пространстве $L_2\times L_2$, но не к тем функциям, которые требуется разложить в ряды.

Один из методов преодоления этой трудности состоит в том, чтобы проводить разложения в ряды по цепочкам Келдыша не в норме пространства $L_2\times L_2$, а в нормах других пространств, в которых соответствующие цепочки были бы не только полны, но и образовывали базис.

В дальнейшем нам потребуется сопряженная к (1.1)–(1.3) краевая задача. Построение сопряженной задачи для общих краевых задач изложено, например, в книге М.А. Наймарка (см. [41, с. 17–23],). Формы $U_1(y,\lambda)$, $U_2(y,\lambda)$ дополняем формами $U_3(y,\lambda) = y'(0)$, $U_4(y,\lambda) = y'(1)$. Тогда $U_1(y,\lambda)$, $U_2(y,\lambda)$,$U_3(y,\lambda)$, $U_4(y,\lambda)$ составляют линейно независимую систему как формы от $y(0)$, $y'(0)$, $y(1)$, $y'(1)$.

Сопряженной к задаче (1.1)–(1.3) является следующая краевая задача:

$$l^*(z,\mu) = z'' - ((\overline{p_0} + \overline{p_1}\,\mu)\,z)' + (\overline{q_0} + \overline{q_1}\,\mu + \overline{q_2}\,\mu^2)\,z = 0,$$

$$U_1^*(z,\mu) = [\overline{a_2(\lambda)} - \overline{a_1(\lambda)}\,(\overline{p_0(0)} + \overline{p_1(0)}\,\mu)]\,z(0) + \overline{a_1(\lambda)}\,z'(0) = 0,$$

$$U_2^*(z,\mu) = [\overline{b_2(\lambda)} - \overline{b_1(\lambda)}\,(\overline{p_0(1)} + \overline{p_1(1)}\,\mu)]\,z(1) + \overline{b_1(\lambda)}\,z'(1) = 0.$$

Предложим теперь метод вычисления коэффициентов разложения, который основан на приведении спектральной задачи (1.1)–(1.3) к пучку операторов, действующем в пространстве $L_2\times\mathbb{C}^2$. Пространство $L_2\times\mathbb{C}^2$ — гильбертово пространство с элементами $\mathbf{y} = \{y(x),\,\xi_1,\,\xi_2\}$ и скалярным произведением $\langle \mathbf{y},\,\mathbf{z}\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^2} = \langle y(x),\,z(x)\rangle_{L_2} + \xi_1\,\overline{\eta}_1 + \xi_2\,\overline{\eta}_2$. Здесь $\mathbf{z} = \{z(x),\eta_1,\eta_2\}$.

В данной главе мы отказываемся от требования независимости области определения сопряженного пучка операторов от спектрального параметра λ. Проводим определенную модернизацию метода сопряженного пучка операторов. Это позволяет снять ограничения на спектральную задачу, связанные с условиями подчинения, и получить самые общие формулы вычисления коэффициентов разложений.

Ниже для большей наглядности все вычисления проводятся на примере модельной спектральной задачи с дифференциальным уравнением второго порядка.

4.1 Вычисление коэффициентов с помомощью пучка операторов

Рассмотрим общую спектральную задачу второго порядка и для неё найдем коэффициенты разложения пары произвольных функций (принадлежащих специальным пространствам) в ряды по собственным функциям.

$$l(y,\lambda) = y'' + (p_0 + p_1\,\lambda)\,y' + (q_0 + q_1\,\lambda + q_2\,\lambda^2)\,y = 0, \qquad (1.1)$$

$$U_1(y,\lambda) = (a_{11} + a_{12}\,\lambda)\,y'(0) + (a_{21} + a_{22}\,\lambda)\,y(0) = 0, \qquad (1.2)$$

$$U_2(y,\lambda) = (b_{11} + b_{12}\,\lambda)\,y'(1) + (b_{21} + b_{22}\,\lambda)\,y(1) = 0. \qquad (1.3)$$

Здесь $a_1(\lambda) = a_{11} + a_{12}\,\lambda$, $a_2(\lambda) = a_{21} + a_{22}\,\lambda$, $b_1(\lambda) = b_{11} + b_{12}\,\lambda$, $b_2(\lambda) = b_{21} + b_{22}\,\lambda$ - линейные функции относительно параметра λ, где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, p_1, $q_2 \in \mathbb{C}$; $a_2(\lambda)$, $b_2(\lambda)$, $q_2 \neq 0$ при любом спектральном параметре λ ; $p_0 = p_0(x)$, $q_0 = q_0(x)$, $q_1 = q_1(x)$ — непрерывно дифференцируемые комплекснозначные функции.

Чтобы не осложнять существо дела, считаем, что все собственные значения задачи (1.1)–(1.3) — простые.

Второй этап доказательства. Согласно работе [55] вектор-функция $\widetilde{\mathbf{v}}$ разлагается в ряд по собственным и присоединенным функциям оператора H:

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kh}\widetilde{\mathbf{v}}_k^h. \qquad (3.25)$$

Сходимость ряда в (3.25) рассматривается в норме пространства $\mathcal{W}_2^{r+1}$. Поэтому равенство (3.25) означает выполнение следующих n равенств:

$$v_\nu = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\,y_k^{h,\nu}, \qquad \nu = 0,\,1,\,\ldots\,,\,n-1, \qquad (3.26)$$

где $y_k^{h,\nu}$ — производные по Келдышу цепочки, построенные по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи (2.1)–(2.2), а сами равенства (3.26) понимаются как равенства функций в пространстве $W_2^{r+1+\nu}$. Из равенств (3.26) получаем следующие разложения:

$$U^0_{n+j}(v_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\,U^0_{n+j}\left(y_k^{h,\nu}\right), \qquad (3.27)$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$. Выражение $U_i^0(v_\nu)$ имеет смысл только в том случае, когда порядок соболевского пространства W_2^k, которому принадлежит элемент v_ν на единицу больше порядка формы $U_i^0(\cdot)$. Именно поэтому в формулировке теоремы требуется, чтобы выполнялось неравенство $r \geq m-n+q$.

Максимальный порядок краевых условий ρ не меньше чем m. Поэтому при $m \geq n$ имеют смысл следующие равенства:

$$H\widetilde{\mathbf{v}} = H\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\widetilde{\mathbf{v}}_k^h\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\,H\widetilde{\mathbf{v}}_k^h = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\cdot\left(\lambda_k\widetilde{\mathbf{v}}_k^h + \widetilde{\mathbf{v}}_k^{h-1}\right)$$

Сходимость рядов в этих равенствах рассматривается уже в норме пространств $\mathcal{W}_2^r$. Отсюда, в частности, следуют равенства

$$(H\widetilde{\mathbf{v}})_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\cdot\left(\lambda_k\widetilde{\mathbf{v}}_k^h + \widetilde{\mathbf{v}}_k^{h-1}\right)_{n-1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\cdot\left(\lambda_k y_k^{h,\,n-1} + y_k^{h-1,\,n-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\, y_k^{h,\,n}$$

для $(n-1)$-ой компоненты $(H\widetilde{\mathbf{v}})_{n-1}$ вектор-функции $H\widetilde{\mathbf{v}}$ понимаемые как равенства в пространстве W_2^r. Здесь $y_k^{h,\,n}$ — n-я компонента производной цепочки Келдыша.

Представляя аналогичным образом последние компоненты остальных операторов H^i $(i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m-n)$, получим следующие равенства:

$$(H^i\,\widetilde{\mathbf{v}})_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\cdot y_k^{h,\,n+i-1}, \tag{3.28}$$

понимаемые как равенства в пространстве W_2^{r-i+1}. Здесь $y_k^{h,\,n+i-1}$ — $(n+i-1)$-я компонента производной цепочки Келдыша.

Из (3.28) следует, что имеют смысл и верны в пространстве $\mathbb{C}$ комплексных чисел следующие равенства:

$$U_{n+j}^0\left(H^i\,\widetilde{\mathbf{v}}\right)_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\,U_{n+j}^0\left(y_k^{h,\,n+i-1}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.29}$$

Элементы $(H^i\,\widetilde{\mathbf{v}})_{n-1}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots, m-n)$ будем обозначать через v_{i+n-1}. В новых обозначениях равенства (3.26)-(3.29) означают, что элемент

$$\widehat{\mathbf{y}} = \{\mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_{m-1}\}, \tag{3.30}$$

где $\mathbf{v}_\nu = \{v_\nu,\ U_{n+1}^0(v_\nu),\ U_{n+2}^0(v_\nu),\ \ldots,\ U_{2n}^0(v_\nu)\}$, разлагается в ряд по элементам $\widehat{\mathbf{y}}_k^h = \{\mathbf{y}_k^{h,\,0},\ \mathbf{y}_k^{h,\,1},\ \ldots,\ \mathbf{y}_k^{h,\,m-1}\}$,

и дальнейшего применения соотношений биортогональности известных для пучков операторов. Применение первого метода, метода сопряженного оператора, позволяет вычислять неизвестные коэффициенты в конкретных случаях, однако в общем случае метод оказывается весьма трудоемким и неэффективным, а главное, он не дает класса краевых задач, для которых формула вычисления коэффициентов выписывалась бы в общем виде в терминах коэффициентов уравнения и краевых условий спектральной задачи.

Применение метода сопряженного пучка операторов позволило получить не просто алгоритм вычисления коэффициентов, но и, что важно для приложений, эффективную общую формулу, выписанную в терминах коэффициентов уравнения и краевых условий для широкого класса спектральных задач. Однако хотя круг решаемых задач с помощью этого метода является достаточно широким, он ограничен. Ограничения связаны с условиями подчинения, налагаемыми на уравнение и краевые условия спектральной задачи.

Например, следующая спектральная задача

$$l(y,\lambda) = y'' + \lambda\, y' + \lambda^2\, y = 0, \tag{0.1}$$

$$U_1(y,\lambda) = a_1\, y'(0) + a_2\, y(0) + \lambda\, y'(0) = 0, \tag{0.2}$$

$$U_2(y,\lambda) = b_1\, y'(1) + b_2\, y(1) + \lambda\, y'(1) = 0. \tag{0.3}$$

не удовлетворяет условиям подчинения $\mathbf{U}$ и $\mathbf{P}$ из работы [16]. И поэтому достаточно эффективная формула вычисления коэффициентов из работы [16] не может быть применена для задачи (0.1)–(0.3).

Условия подчинения накладывались в [16] для того, чтобы область определения сопряженного пучка не зависела от спектрального параметра λ. В результате сопряженный пучок оказывался пучком сопряженных операторов.

ства $(\mathcal{W}^r_{2,U})$) неизвестно как находить коэффициенты разложений. Если краевые условия спектральной задачи полиномиально зависят от спектрального параметра λ, то область определения пучка операторов также зависит от λ и изложенные в учебниках методы вычисления коэффициентов разложений применены быть не могут. Проблема отыскания этих коэффициентов и составляет суть коэффициентной проблемы. Без ее решения невозможно предъявить точное или приближенное решение в виде ряда, поскольку в этом случае каждый член ряда будет содержать неизвестный коэффициент.

В 1983 году вышла работа А. А. Шкаликова (см.[55]), в которой была построена общая теория спектральных задач с полиномиальным вхождением параметра в краевые условия. Одним из основных наблюдений работы явилось то, что были найдены удачные пространства, в которых задача допускает линеаризацию. Это пространство. В этих пространствах при естественных условиях были доказаны теоремы полноты и базисности производных цепочек специального вида (в случае N=0 эти цепочки совпадают с производными по Келдышу цепочками). Были получены теоремы о разложимости произвольных функций в ряды по цепочкам собственных функций. Разложения проводились в специальных гильбертовых пространствах. Однако коэффициенты разложения функции в ряд по цепочкам собственных функций в этой работе не были найдены

Позднее А.М. Ахтямовым в работах (см.[12, 15, 16]) были предложены два метода решения коэффициентной проблемы для разложений в пространствах сложной структуры — метод сопряженного оператора и метод сопряженного пучка операторов. Первый подход использует явное построение сопряженного оператора к так называемому лианеризатору Шкаликова, а второй подход использует возможность представления задачи в виде пучка неограниченных операторов в расширенном гильбертовом пространстве

где $\mathbf{y}_k^{h,\nu} = \{y_k^{h,\nu},\ U^0_{n+1}(y_k^{h,\nu}),\ U^0_{n+2}(y_k^{h,\nu}),\ \ldots,\ U^0_{2n}(y_k^{h,\nu})\}$:

$$\widehat{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{p_k} c_{kh}\,\widehat{\mathbf{y}}_k^h. \tag{3.31}$$

Равенство (3.31) понимается как равенство вектор-функций в пространстве $\left(W_2^{n+r}\times\mathbb{C}^n\right)\times\left(W_2^{n+r-1}\times\mathbb{C}^n\right)\times\cdots\times\left(W_2^{n+r-m}\times\mathbb{C}^n\right)$.

Так как сходимость в сильной норме влечет за собой сходимость в слабой норме, то сходимость ряда в разложении (3.31) можно рассматривать в норме пространства $(L_2\times\mathbb{C}^n)^m$. Но элементы $\widehat{\mathbf{y}}_k^h$ являются производными по Келдышу цепочками пучка $A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^m A_m$. Поэтому разложение (3.31) можно рассматривать как разложение элемента $\widehat{\mathbf{y}}$ по производным цепочкам пучка $A(\lambda)$.

Если в качестве $\widehat{\mathbf{y}}$ выбрать элемент (3.30), то коэффициенты $\widehat{c}_{kh}$ являются также коэффициентами c_{kh} разложения (3.25). Поэтому равенство (3.24) можно использовать и при вычислении коэффициентов разложения (3.25). Используя конкретное представление для элемента $\widehat{\mathbf{y}}$, вычислим коэффициенты c_{kh}. Для этого найдем сначала скалярное произведение, стоящее в числителе дроби последнего равенства.

$$\left\langle G\,\widehat{\mathbf{y}}\,,\widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h}\right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m} = \sum_{s=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{m-1-s}\left\langle A_{\nu+s+1}\,\mathbf{y}_\nu\,,\ \mathbf{z}_k^{p_k-h,\,s}\right\rangle_{L_2\times\mathbb{C}^n} =$$
$$= \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-s}\left\langle l_{\nu+1+s}(v_\nu)\,,\quad z_k^{p_k-h,\,s}\right\rangle_{L_2} -$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{m-1-s} U_j^{\nu+s+1}(v_\nu)\cdot\overline{V^0_{2\,n+1-j}}(z_k^{p_k-h,s}).$$

Скалярное произведение $\left\langle G\,\widehat{\mathbf{y}}_k^h\,,\widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h}\right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}$ вычисляется аналогично. Доказательство формул (3.19), (3.20) закончено.

2. Доказательство формул (3.21), (3.22). Поскольку операторы A_ν имеют сопряженные, то справедливы следующие равенства

$$\widehat{c}_{kh} = \frac{\left\langle G\,\widehat{\mathbf{y}}\,,\,\widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h}\right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}}{\left\langle G\,\widehat{\mathbf{y}}_k^h\,,\ \widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h}\right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}} = \frac{\left\langle \widehat{\mathbf{y}}\,,\,G^*\,\widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h}\right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}}{\left\langle \widehat{\mathbf{y}}_k^h\,,\ G^*\,\widehat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h}\right\rangle_{(L_2\times\mathbb{C}^n)^m}}, \quad (3.32)$$

где G^* — квадратная матрица $m\times m$, составленная из операторов

$$A_1^*, A_2^*, \ldots, A_{m-1}^*, A_m^*: \quad G^* = \begin{Vmatrix} A_1^* & A_2^* & \ldots & A_{m-1}^* & A_m^* \\ A_2^* & A_3^* & \ldots & A_m^* & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_m^* & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Вычисляя скалярные произведения из (3.32) и получим формулы (3.21), (3.22), что завершает доказательство теоремы.

Пример. При изучении волновых движений жидкости возникает следующая спектральная задача [30]:

$$\begin{gathered} y'' + p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad U_1 = y(0) = 0, \\ U_2 = y'(1) + \left(a + \lambda b - \lambda^2 c\right) y(1) = 0. \end{gathered} \quad (3.33)$$

В [9] для этой задачи были вычислены и коэффициенты разложений по производным цепочкам. Метод, использованный в этой работе, опирался на построение сопряженного оператора к оператору H и являлся громоздким. Теорема позволяет получить этот же результат проще, непосредственной подстановкой в общую формулу.

Полученные в настоящей главе методы вычисления коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша применимы не только для обыкновенных дифференциальных операторов, но и для эллиптических задач математической физики (см. [15]).

Глава 4

Решение коэффициентной проблемы при невыполнении условий подчинения

В данной главе показывается алгоритм отыскания коэффициентов разложений по цепочкам собственных функций в соответствующих сложных пространствах и предъявление решений соответсвующих спектральных задач при невыполнении условий подчинения. Отказываемся от требования независимости области определения от спектрального параметра λ. Коэффициентная проблема возникает в связи решением начально-краевых задач математической физики методом разделения переменных. После разделения переменных возникает вопрос о разложимости функций из пространства $L_2\times L_2\times\cdots\times L_2$ (“пространства копий L_2”) в ряды по производным цепочкам Келдыша для соответствующей спектральной задачи. Для широкого класса случаев вопрос о разложимости в такие ряды и вычислении коэффициентов разложений хорошо изучен и описан в классических учебниках математической физики. Однако для некоторых начально-краевых задач математической физики приходится рассматривать разложения в ряды по производным цепочкам Келдыша не в нормах пространств $L_2\times L_2\times\cdots\times L_2$, а в нормах пространств более сложной структуры, для многих из которых (например, для простран-