

# МАТЕМАТИКА

## СЕКЦИЯ «КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ»

УДК 514.747

### СФЕРА РИМАНА И СФЕРИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ

Байгускаров Т.Ю.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается отображение  $S$  комплексной плоскости на сферу Римана с центром в точке  $(0;0;S)$  и радиусом  $S$ . Будем называть сферическим расстоянием функцию, обозначаемую  $[z,w]$ , она равна евклидову расстоянию между  $S(z)$  и  $S(w)$ . Установлено, что для сферического расстояния выполняются все аксиомы метрики, также выведена краткая формула

$$[z, w] = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}.$$

Пусть  $I$  – непустое подмножество области  $D$  на комплексной плоскости. Для краткости функцию расстояния до границы области обозначим как

$$d_D(z) = \inf_{w \in \partial D} [z, w], \quad z \in D, \quad \text{и} \quad d_D(I) = \inf_{z \in I} d_D(z)$$

Для области  $D$  на комплексной плоскости функция  $d_D$  положительна, непрерывна и обладает свойствами:

1)  $[z, w] \geq d_D(z) - d_D(w)$  для любых  $z, w \in D$ ;

2) Если  $I \subset I' \subset D \subset \Omega$ , где  $\Omega$  – область, то  $d_D(I) \geq d_D(I')$  и  $d_D(I) \geq d_\Omega(I)$ .

Важно то, что отображение области на сферу будет ограниченным множеством, даже если сама область не ограничена. Данная работа служит началом для доказательства некоторых теорем для областей на комплексной плоскости, которые доказаны лишь для ограниченных областей.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №09-01-0046\_a*

#### Литература

[1] [2] Б.Н. Хабибуллин, Ф.Б. Хабибуллин, Л.Ю. Чередникова, Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности // Алгебра и анализ - 2008.- С.190-236.

© Байгускаров Т.Ю., 2009 г.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дильмухаметова А.М.

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Основным результатом данной работы является введение одного класса  $A$  дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами и нахождение необходимого и достаточного условия, при котором операторы данного класса могут быть сведены к дифференциальным операторам в обобщенных производных с

постоянными коэффициентами вида:  $R = \sum_{k=1}^m c_k D^k F(z)$ .

Пусть  $p(z)$  - многочлен,  $Df$  - оператор обобщенного дифференцирования (см. [1], [2]), порожденный функцией вида

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{p(1)p(2)\dots p(k)} \quad (1)$$

Введем класс  $A$  дифференциальных операторов с полиномиальными коэф-

фициентами вида  $Lf = \sum_{k=1}^q P_k(z) f^{(k)}(z)$ , где  $P_k(z)$  - многочлен степени не выше  $k$ .

**Теорема.** Для того чтобы дифференциальный оператор с переменными коэффициентами  $L$  можно было представить в виде линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в обобщенных производных, порожденных функцией вида (1), необходимо и достаточно, чтобы после замены переменных  $z = e^w$  он представлялся в виде

$$a_0^0 \tilde{f}(w) + \frac{1}{e^w} \sum_{k=1}^m a_1^k \tilde{f}^{(k)}(w) + \frac{1}{e^{2w}} \sum_{k=1}^{2m} a_2^k \tilde{f}^{(k)}(w) + \dots + \frac{1}{e^{rw}} \sum_{k=1}^{rm} a_r^k \tilde{f}^{(k)}(w),$$

где через  $\tilde{f}(w)$  обозначена композиция двух отображений  $f \circ e \equiv f(e^w)$

и  $p(z)$  - характеристический многочлен выражения стоящего после  $\frac{1}{e^w}$ ,

$p_k(z)$  - выражения стоящего после  $\frac{1}{e^{kw}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , соответственно.

Заметим, что  $p(0) = 0$ .

1. Гельфонд А.О. и Леонтьев А.Ф. Об одном обобщении ряда Фурье.- Матем. сб., 1951, т.29 (71), №3, с. 477-500.

2. Леонтьев А.Ф. Об области регулярности предельной функции одной последовательности аналитических функций. - Матем. сб., 1956, т.39 (81), №4, с. 405-422.

Дильмухаметова А.М., 2009 г.

**ОБОБЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ФОКА**

Дильмухаметова А.М., Муллабаева А.У., Напалков В.В.

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

В математической физике важную роль играет пространство Фока, введенное в 1932 году. Обозначим через  $H(\mathbb{C})$ -пространство целых функций с топологией компактной сходимости. По определению пространство Фока в одномерном случае имеет вид:

$$F = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\mu \right\},$$

где  $d\mu$  - мера Лебега на плоскости.

Известно, что пространство  $F$  обладает следующими свойствами (см., например, [1]):

- 1) Преобразование Лапласа переводит элементы из  $F$  в  $F$ ;
- 2) Сопряженным к оператору умножения на переменную  $z$  является оператор дифференцирования.

Эти свойства лежат в основе приложений пространства Фока к задачам физики. В данной статье введены обобщённые пространства Фока  $F$  в одномерном случае и рассмотрены основные свойства этих пространств. Нами найден оператор, сопряженный к оператору умножения на переменную  $z$ , а также определена собственная функция сопряженного оператора. Изучено обобщенное преобразование Лапласа и построен базис для введенных пространств.

**Литература.**

V.Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Commun.Pure and Applied Math., 14, 1961, p-p.187-214.

© Дильмухаметова А.М., Муллабаева А.У., Напалков В.В., 2009 г.

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НУЛЕЙ В КРУГЕ

Кудашева Е.Г.

Башкирский государственный аграрный университет, г. Уфа, Россия

Рассмотрим односвязную область  $\Omega \ni 0$  в комплексной области  $\mathbb{C}$ , обозначим за  $M$  – субгармоническую функцию на  $\Omega$  с мерой Рисса  $\mathbf{n}_M$ . Пусть  $Hol(\Omega)$  – пространство всех голоморфных в  $\Omega$  функции  $f$ . Обозначим через  $\Lambda$  – последовательность нулей для подкласса  $H \subset Hol(\Omega)$ , если существует функции  $f$  класса  $H$ , обращающаяся в ноль на  $\Lambda$ . Функция  $M$  порождает весовое подпространство

$$Hol(\Omega, M) := \left\{ f \in Hol(\Omega) : \sup |f(z)| e^{-M(z)} < +\infty, z \in \Omega \right\}.$$

Для  $z = re^{iq} \in D$ , где  $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  определим

$$K(z; a) := \left\{ V = te^{ij} : (r - a\sqrt{1-r^2}) \leq t < 1, |\sin(j - q)| < a\sqrt{1-r^2} \right\}$$

и функцию  $q_M(z) := \frac{1}{1-|z|} \int_{K(z;a)} (1-|V|) d\mathbf{n}_M(V)$ . Рассмотрим

вариацию на терему Неванлинны.

**Теорема.** Пусть  $\Omega = D$ , субгармоническая функция  $M$  такая, что

$$M(0) > -\infty \text{ и } \sup_{r < 1} \frac{1}{2p} \int_0^{2p} M(re^{iq}) dq < +\infty. \text{ При любых числах}$$

$e \in (0,1)$  и  $a > 1$ , если  $\Lambda$  последовательность нулей для пространства  $Hol(\Omega)$ , то она является последовательностью нулей

$$Hol(D, A_M^e(z) + \frac{C_e}{2-a} q_M), \text{ где постоянная } C_e \text{ зависит только от}$$

$$e, \text{ и } A_M^e(z) := \frac{1}{2p} \int_0^{2p} M(z + e(1-|z|)e^{iq}) dq, 0 < e < 1.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00046\_a

© Кудашева Е.Г., 2009 г.

**О ТИПЕ ЦЕЛЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ**

Мингалеева З.Т.

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Основным результатом данной работы является получение оценки точной нижней грани типов целых функций  $f$ , обращающихся в нуль на последовательности  $\Lambda$ , при известном типе усредненной считающей функции последовательности  $N(r, \Lambda)$  и оценка типов целых функций  $g$  и  $h$  в представлении мероморфной функции  $f = g/h$  при известном типе характеристики Неванлинны  $T(r, f)$ . Будут доказаны следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $N(r, \Lambda)$  - функция конечного типа  $S$  при порядке  $r > 0$  и или, что то же,  $\sup(N(r, \Lambda) - Sr^r) < \infty$ . Тогда  $\exists$  целая функция  $f \neq 0$ ,  $f(\Lambda) = 0$  такая, что при  $r \leq 1$  выполнено неравенство  $\log|f(z)| \leq Sr^r$ , а при  $r > 1$  выполнено неравенство  $\log|f(z)| \leq Sr^r + const \cdot \log|z|$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f$  - мероморфная функция,  $f(0) = 1$ , и характеристика Неванлинны  $T(r, f)$  - функция конечного типа  $S$  при порядке  $r$  и  $T(r, f) \leq Sr^r + const$  или, что то же,  $\sup_{r \geq 0}(T(r, f) - Sr^r) < \infty$ . Тогда  $\exists$  мероморфная функция  $f = g/h$ , где  $g, h$  - целые:  $\max\{\log|g|, \log|h|\} \leq S \cdot |z|^r + const \cdot |z|^{(r-1)^+} + const \cdot \log(1 + |z|)$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №09-01-00046\_а.

**Список литературы.**

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
2. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Math. 1985. Т. 11. №3. С.257-282.
3. Хабибуллин Б. Н. Сравнение субгармонических функций по их ассоциированным мерам // Матем. сб. 1984. Т. 125. №4. С.522-538. УДК 539.1.38

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

Михайлов К.А.

Южно-Российский государственный университет экономики и  
сервиса, г. Шахты, Россия

Пусть  $r \in (0,1)$ ,  $r(r)$  — некоторый уточненный порядок. Для каждой пары  $m, n$  и весовой функции  $w(t) = |t|^{r(|t|)}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , положим

$$E_{m,n} := \left\{ g \in C^\infty(-1,1) : \|g\|_{m,n} := \sup_{a \in N_0} \sup_{|x| \leq 1-1/m} \frac{|g^{(a)}(x)|}{e^{j^*(an)/n}} < \infty \right\},$$

где  $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $j^*(y) = \sup_{x \geq 0} (xy - j(x))$  — сопряженная по Юнгу с

функцией  $j(x) = w(e^x)$ . Образует пространство  $E_{\{\omega\}}(-1,1) := \text{proj}_m \text{ind}_n E_m$  ультрадифференцируемых на интервале  $(-1,1)$  функций типа Румье, которое по своей топологической структуре является пределом приведенного проективного спектра (DFS)-пространств. Основной результат работы составляет следующая теорема.

**Теорема.** Последовательность экспонент  $\{e^{-ilx}\}_{l \in L}$ , где  $L = \{\pm pk\}_{k=1}^\infty \cup \{\pm ipk\}_{k=1}^\infty$ , является абсолютно представляющей системой в пространстве  $E_{\{\omega\}}(-1,1)$ . Другими словами, каждую функцию  $g \in E_{\{\omega\}}(-1,1)$  можно представить в виде суммы ряда  $g(x) = \sum_{l \in L} c_l e^{-ilx}$ , абсолютно сходящегося к  $g(x)$  по топологии  $E_{\{\omega\}}(-1,1)$ .

Доказательство основано на полученных ранее автором и А.В.Абаниным достаточных условиях того, что данная последовательность элементов является абсолютно представляющей системой в пределе приведенного проективного спектра (DFS)-пространств. При этом используется и частично корректируется схема доказательства теоремы 2 из [1], предложенная А.В.Абаниным для случая обычного порядка.

### Литература

[1] Абанин А. В., Шершнева О. В. Об одной системе экспонент в пространстве Жеврея // Изв. Вузov Сев. Кав. регион. Естественные науки.— 2001.— №3.— С. 3–6.

© Михайлов К.А., 2009 г.

## ПОСТРОЕНИЕ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Мухаметова Г.З.  
УГАТУ, г. Уфа, Россия

Рассмотрим стохастическое уравнение Ито (см. [1])

$$h(t, x) - h(0, x) = \int_0^t \left[ a(s, x, h) \frac{\partial^2 h(s, x)}{\partial x^2} + b(s, x, h) \frac{\partial h(s, x)}{\partial x} + c(s, x, h) \right] ds + \\ + \int_0^t \left[ S(s, x, h) \frac{\partial h(s, x)}{\partial x} + h(s, x, h) \right] dn(s), \quad h(0, x) = y(x, n(0)).$$

Его решением будет функция  $h(s, x)$ , для которой имеют смыслы интегралы в правой части уравнения (см. [2]) и которая обращает это уравнение в тождество. В данной работе для получения такого решения используется метод Насырова Ф.С. (см. [3]).

### Теорема.

*Решение  $h(s, x) = j(s, x, n(s))$  исходного уравнения определяется из следующей системы обычных дифференциальных уравнений в частных производных, с заданным начальным условием,*

$$\begin{cases} j_u = S j_x + h, \\ j_s = j_{xx} \left[ a - \frac{1}{2} S^2 \right] + (j_x)^2 [-SS_j] + j_x \left[ b - \frac{1}{2} S_j h - \frac{1}{2} SS_x - sh_j \right] + \\ + c - \frac{1}{2} h_j h - \frac{1}{2} sh_x, \quad j(0, x, n(0)) = h(0, x). \end{cases}$$

При выполнении некоторых условий на коэффициенты, эта система позволяет построить явное решение для целого класса уравнений.

### Литература

[1]. Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с.

[2]. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987. 320 с.

[3]. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений. Вестник УГАТУ. Уфа, 2003. Т. 4. № 2. С. 55–66.

**СРАВНЕНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ НА СФЕРЕ  
(ОКРУЖНОСТИ) И СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ В ШАРЕ  
(КРУГЕ) СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ**

Талипова Г.Р.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Целью данной работы является сравнение среднего значения субгармонической функции по объему и среднего значения субгармонической функции по площади для двумерного и трехмерного случая, а именно, покажем верность неравенства  $B_u(r) \leq S_u(r)$ . Так же мы рассмотрим ряд теорем, которые докажут существование такого коэффициента  $k$ , что возможно обратное соотношение  $S_u(kr) \leq B_u(r)$ .

Рассмотрим следующие формулировки теорем:

**Теорема 1.** Пусть функция  $u(r, j)$  является субгармонической в замкнутом шаре радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$ , тогда ее среднее значение на окружности является непрерывно возрастающей функцией переменного  $r$ , для  $0 \leq r \leq R$ , если положить  $S_u(0) = u(x_0)$ .

**Теорема Бёрдона.** Пусть  $u(x)$  субгармоническая функция в  $D \subseteq R^n$ , тогда  $S_u(kr) \leq B_u(r)$  в  $D$ , причем  $k = \frac{1}{2}$ ,  $n = 1$ ;

$$k = e^{-1/2}, n=2; k = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/(n-2)}, n \geq 3.$$

В работе будет показано, что доказательства этих теорем достаточно для вывода искомым неравенств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №09-01-00046-а

### Литература

1. Хейман У., Кеннеди П.//Субгармонические функции. - 1980 г.
2. Pedro Freitas, Joao Pahloto Matos// Characterization of harmonic and subharmonic functions via mean-value properties// arxiv.org:math.AP/0106078 v1 11 jun 2001.

© Талипова Г.Р., 2009 г.

**WEIGHTED ESTIMATES OF ONE CLASS OF MATRIX  
OPERATORS IN LEBEQUE SPACES OF SEQUENCES**

Taspaganbetova Zh.A., Temirkhanova A.

The L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Let  $1 \leq p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . We consider the estimate of the

following form

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} \left( u_i \sum_{j=1}^i a_{i,j} f_j \right)^q \right)^{1/q} \leq C \left( \sum_{i=1}^{\infty} |u_i f_i|^p \right)^{1/p}, \quad \forall f_i \geq 0, \quad (1)$$

where  $u_i \geq 0$ ,  $u_i > 0$ ,  $i \geq 1$ .

Let the entries of the matrix  $(a_{i,j})$  satisfy the following inequalities

$$\frac{1}{d} (a_{i,k} + b_{k,j} w_i) \leq a_{i,j} \leq d (a_{i,k} + b_{k,j} w_i) \quad \text{for all } 1 \leq j \leq k \leq i, \quad (2)$$

where  $d \geq 1$ ,  $w_i \geq 0$ ,  $b_{k,j} \geq 0$ ,  $b_{k+1,j} \geq b_{k,j}$ ,  $b_{k,j+1} \leq b_{k,j}$ .

**Theorem 1.** Let  $1 < p \leq q < \infty$  and the entries of the matrix  $(a_{i,j})$  satisfy the assumption (2). Then the inequality (1) holds if and only if  $B = \max\{B_1, B_2\} < \infty$ , where

$$B_1 = \sup_{k \geq 1} \left( \sum_{j=1}^k u_j^{-p'} \right)^{1/p'} \left( \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q u_i^q \right)^{1/q},$$

$$B_2 = \sup_{k \geq 1} \left( \sum_{j=1}^k b_{k,j}^p u_j^{-p'} \right)^{1/p'} \left( \sum_{i=k}^{\infty} w_i^q u_i^q \right)^{1/q}.$$

Moreover, for the best constant  $C$  in (1) the following estimate holds  $aB \leq C \leq bB$  with some constants  $0 < a < b < \infty$ .

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Хабибуллин Ф.Б.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Пусть  $\Lambda = \{I_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — последовательность комплексных точек в единичном круге комплексной плоскости. Пусть  $M$  — субгармоническая функция в единичном круге с мерой Рисса  $\mathbf{n}_M$ . В нашем сообщении будет рассмотрен вопрос о точных достаточных условиях, при которых последовательность  $\Lambda$  является последовательностью нулей для некоторой ненулевой голоморфной функции из класса голоморфных функций  $f$ , удовлетворяющих оценке  $|f(z)| \leq C_f \exp M(z)$ ,  $|z| < 1$ , где  $C_f \geq 0$  — постоянная. Отмеченный класс функций обозначаем  $Hol(M)$ .

Естественно ожидать (см., к примеру результат Ф.А. Шамоян [1; Теорема 2.2]), что если для меры Рисса  $\mathbf{n}_M$  при достаточно “мелком” покрытии  $\Sigma = \{S_k\}$  последовательности  $\Lambda$  для каждого  $S_k$  число точек последовательности  $\Lambda$ , попавших в  $S_k$ , в определенном смысле мажорируется величиной  $\mathbf{n}_M(S_k)$ , то естественно ожидать, что  $\Lambda$  — последовательность нулей для некоторого класса функций, близкого к классу  $Hol(M)$  или даже совпадающего с ним. Основные результаты представляют собой явную количественную форму этого наблюдения.

Для нашего исследования привлекается симбиоз результатов из [2] и [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00046\_a.

### Литература

- [1] Ф.А. Шамоян, Факторизационная теорема М.,М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН Арм. ССР. — 1978.— №5-6.— С.405-422.
- [2] Б.Н. Хабибуллин, Ф.Б. Хабибуллин, Л.Ю. Чередникова, Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности // Алгебра и анализ — 2008.— С.190-236.
- [3] Е.Г. Кудашева, Б.Н. Хабибуллин, Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций // Матем. сб. — 2009.— С.95-126.

© Хабибуллин Ф.Б., 2009 г.

## СЕКЦИЯ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

УДК 517.984.54

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Давлетов А.Р.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В настоящее время для решения обратной задачи Штурма-Лиувилля разработано несколько методов, с которыми вы можете подробно ознакомиться в трудах [1-3]. Сейчас мы построим метод на основе численного решения задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) + q_1 y(x) = I y(x), \quad x \in [0, a], \quad (1) \\ -y''(x) + q_2 y(x) = I y(x), \quad x \in [a, a + e], \quad (2) \\ -y''(x) + q_1 y(x) = I y(x), \quad x \in [a + e, 2p], \quad (3) \\ y(0) = y(2p) = 0; \quad (4) \end{array} \right.$$

где  $q_1$  и  $q_2$  – некоторые известные величины,  $a$  и  $e$  – точки, принадлежащие отрезку  $[0, 2p]$ .

Задача состоит в том, что нужно найти параметр  $a$  по известным собственным значениям задачи (1) – (4).

Показано, что параметр  $a$  восстанавливается однозначно по известному набору собственных частот.

Рассмотрим задачу (1) – (4) с физической точки зрения. Пусть дана струна длины  $2p$ , которая закрепляется на обоих концах. Здесь  $q_1$  и  $q_2$  – некоторые параметры.

Таким образом, найдено месторасположение (точка  $a$ ), где меняются параметры  $q_1$  и  $q_2$ . В дальнейшем нам предстоит найти отрезок  $[a, a + e]$ , где в нашем случае продолжается параметр  $q_2$ .

#### Литература

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. 1977.
2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969

© Давлетов А.Р., 2009 г.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В  
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Егорова И.П.

Самарский государственный архитектурно-строительный  
университет (Россия, г. Самара)

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{yy} = 0, \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -a < y < b\}$ ,  
где  $m$ ,  $a$  и  $b$  – заданные положительные числа,  $1 \leq m < 2$ .

**Задача.** Найдите в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ ,  
удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -a \leq y \leq b; \quad (4)$$

$$u_y(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

где  $f(x)$  – заданная достаточно гладкая функция.

Задача Дирихле для уравнения (1) изучена в работе [1] при  $0 < m < 1$ . В данной статье, следуя этой работе, установлен критерий единственности решения задачи (2) – (5). Само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи.

Литература

[1] Сабитов К.Б.; Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2007. №4. С. 45-53.

© Егорова И.П., 2009 г.



## НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ЦИЦЕЙКИ

Искандарова М.Н.

Уфимский государственный авиационный технический  
университет, г. Уфа, Россия

Рассматривается задача описания всех нелинейных гиперболических уравнения вида

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y), \quad (1)$$

которые специальной дифференциальной подстановкой

$$v = j(u, u_x, u_y) \quad (2)$$

сводятся к уравнению Цицейки

$$v_{xy} = \exp(v) + \exp(-2v). \quad (3)$$

Одним из основных результатов настоящей работы является следующее утверждение:

**Теорема.** *Преобразование  $v = j(u, u_x)$  решения нелинейного уравнения (1) переводит в решения уравнения Цицейки (3) лишь в следующих случаях:*

$$v = -\frac{1}{2} \ln(u_x - b), \quad (4)$$

$$v = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2a - 2u_x}{3}\right),$$

где функции  $b$ ,  $a$  определены формулами

$$(2u_x + b)^2(u_x - b) = 1, \quad 2(a + 2u_x)^2(a - u_x) = 27.$$

При этом соответствующие уравнения имеют вид:

$$u_{xy} = 3ub(u_x), \quad (5)$$

$$u_{xy} = \sqrt{2u_y} a(u_x).$$

Кроме того, доказано, что существует единственное нелинейное уравнение вида (1), которое подстановкой (2) ( $j_{u_x} \cdot j_{u_y} \neq 0$ ) сводится к уравнению (3).

Отметим, что уравнение (5), связанное преобразованием (4) с уравнением Цицейки, приводится в работе [1].

[1] А.В. Жибер, В.В. Соколов. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа // УМН. 2001. Т 56, № 1. 2001. С.63–106.

© Искандарова М.Н., 2009 г.

## ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГООПОРНОГО ВАЛА С ГРУЗАМИ НА СПЕКТР ЧАСТОТ ЕГО ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Колбин М.С., Сафина Г.Ф.

Нефтекамский филиал БашГУ, г. Нефтекамск, Россия

Исследования спектра частот колебаний любой механической системы важно для решения обратной задачи сохранения безопасного спектра частот при изменениях параметров системы. В данной работе рассматривается влияние на спектр частот поперечных колебаний трехопорного и четырехопорного валов таких характеристик, как массы грузов и длины между опорами вала.

Для трехопорного вала, например дифференциальные уравнения движения грузов  $W_1$  и  $W_2$  имеют вид [1]:

$$\frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 + P_1 = \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 + \frac{c}{ac-b^2} y_1 - \frac{b}{ac-b^2} y_2 = 0,$$

$$\frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 + P_2 = \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 - \frac{b}{ac-b^2} y_1 + \frac{a}{ac-b^2} y_2 = 0,$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $W_1, W_2$  – массы грузов,  $a, b, c$  – постоянные, зависящие от длины вала, расстояний между опорами и расстояний от грузов до опор,  $P_1, P_2$  – силы, вызывающие прогибы  $y_1$  и  $y_2$  вала под грузами.

По исследованию прямых спектральных задач показано, что увеличение масс грузов между опорами ведет к уменьшению собственных частот колебаний вала. Такие же изменения фиксированы и при увеличении массы одного из грузов (при неизменных значениях масс других грузов). Показано также, что увеличение длины вала между крайними опорами ведет к уменьшению собственных частот колебаний вала. Приведены графики и таблицы указанных зависимостей.

Приведена программа, составленная в среде Delphi, позволяющая в достаточно короткий срок установить значения собственных частот, соответствующих заданным параметрам системы (вал-грузы).

### Литература

Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко – М.: Физматгиз – 1959. 440с.

© Колбин М.С., Сафина Г.Ф., 2009 г.

## ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

Костригина О.С.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа,  
Россия

Работа посвящена описанию нелинейных гиперболических систем уравнений

$$u_{xy} = a(u, v, u_x, v_x, u_y, v_y), \quad v_{xy} = b(u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) \quad (1)$$

с интегралами следующих порядков

$$\text{ord}w = \text{ord}\bar{w} = 1, \quad \text{ord}W = \text{ord}\bar{W} = 2. \quad (2)$$

На основе понятия характеристической алгебры Ли ( см., например, [1]) в работе [2] было показано, что система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, если и только если ее  $x$ - и  $y$ -характеристические алгебры Ли конечномерны.

Одним из важных следствий этого критерия является тот факт, что из интегрируемости системы уравнений (1) следует конечномерность характеристических алгебр соответствующей линеаризованной системы

$$\begin{cases} p_{xy} = a_u p + a_v q + a_{u_x} p_x + a_{v_x} q_x + a_{u_y} p_y + a_{v_y} q_y \\ q_{xy} = b_u p + b_v q + b_{u_x} p_x + b_{v_x} q_x + b_{u_y} p_y + b_{v_y} q_y . \end{cases} \quad (3)$$

Ранее, в работе [3] были получены системы уравнений (1) с полным набором интегралов первого порядка. При этом рассматривались характеристические алгебры исходной системы (1).

В данной работе, на основе исследования структуры характеристической алгебры Ли линеаризованной системы (3), найдены необходимые и достаточные условия существования интегралов (2) у системы (1).

### Литература

- [1] Шабат А.Б., Ямилов Р.И., Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана, Уфа: Препринт БФ АН СССР, 1981.
- [2] Жибер А.В., Костригина О.С., Точно интегрируемые модели волновых процессов, // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 7 (25). С.83-89.
- [3] Жибер А.В., Костригина О.С., Нелинейные гиперболические системы уравнений с интегралами первого порядка, // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. – Ростов-на-Дону: РГУ, 2006. – С. 228-229.

© Костригина О.С., 2009 г.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ И  
ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В  
ПОЛУПЛОСКОСТИ**

Максимова Н.В.

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М.Акумуллы, г.Уфа, Россия

В области  $D = \{(x, y), y > 1, x \in \mathbb{R}\}$  исследуется уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} - mF(u) = f(x, y) \quad (1)$$

где функция  $f(x, y) \in C^\infty(D) \cap C^1(\overline{D})$  и  $F(u)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$F: [0; 1] \rightarrow [0; 1], F(u) \in C^\infty[0; 1], F(0)=0, F'(0) = 0, F''(0) > 0, 0 < F'(u) \quad (2)$$

для всех  $u \in (0; 1)$

Кроме того требуется, чтобы функция  $u(x, y)$  удовлетворяла условиям

$$u(x, 1) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, y \geq 1. \quad (4)$$

Справедлива теорема:

**Теорема.** Пусть  $F(u)$  удовлетворяет условиям (2),  $f(x, y) \in C^\infty(D) \cap C(\overline{D})$  и удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq M(y+1)^{-\alpha} (1+x^2)^{-N} \quad (5)$$

где  $\alpha > 0, 0 < N$  - достаточно большое число.

Тогда существует решение  $u(x, y)$  задачи (1) - (3) такое что для некоторых  $B > 0$  справедлива оценка:

$$|u(x, y)| \leq B(1+x^2)^{-\frac{N}{2}},$$

причем  $u \in C^\infty(D) \cap C(\overline{D})$ , где  $N$  то же что и в оценке (5).

Такое решение единственно в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$u(x, y) \leq B_1 (1+x^2)^{-2}, \text{ где } B_1 > 0.$$

**КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ  
НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
СМЕШАННОГО ТИПА**

Мартемьянова Н.В.

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия  
г. Самара, Россия

В прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -a < y < b\}$ , где  $a, b$  - заданные положительные действительные числа, для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0 \end{cases}$$

исследуется следующая

**Обратная задача.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$ , удовлетворяющие условиям

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+);$$

$$f(x, y) \in C(D_- \cup D_+);$$

$$Lu = f(x, y), (x, y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad -a \leq y \leq b;$$

$$u(x, b) = j(x), \quad u(x, -a) = y(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u_y(x, b) = c(x), \quad u_y(x, -a) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где  $j(x), y(x), c(x), g(x)$  - заданные достаточно гладкие функции,

$$j(0) = j(1), \quad y(0) = y(1), \quad j'(0) = y'(0) = 0,$$

$$D_+ = D \cap \{y > 0\}, \quad D_- = D \cap \{y < 0\}.$$

Следуя [1,2] в данной работе установлен критерий единственности решения поставленной обратной задачи в зависимости от сторон прямоугольника  $D$ .

### Литература

1. Сабитова Ю.К. Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Автореферат дисс. к.ф.-м.н. Стерлитамак. СГПА. 2007. 20с.
2. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка // ДАН. 2009. Т.427. №5, С. 593 – 596.

## МЕТОД ТОЛЛЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА С ДИСКАМИ

Назмутдинова Л.Р., Сафина Г.Ф.

Нефтекамский филиал БашГУ, г. Нефтекамск, Россия

В представленной работе рассматривается задача определения собственных частот крутильных колебаний вала с дисками по методу Толле [1]. Этот метод удобен при получении частотного уравнения для крутильных колебаний вала с любым числом дисков.

Из матричной формы метода Толле получено, что частотные уравнения для вала, например, с тремя, четырьмя, пятью дисками имеют, соответственно, вид:

$$I_1 p^2 q_1 + I_2 p^2 q_2 + I_3 p^2 q_3 = 0,$$

$$I_1 p^2 q_1 + I_2 p^2 q_2 + I_3 p^2 q_3 + I_4 p^2 q_4 = 0,$$

$$I_1 p^2 q_1 + I_2 p^2 q_2 + I_3 p^2 q_3 + I_4 p^2 q_4 + I_5 p^2 q_5 = 0.$$

Здесь  $p$  – собственная частота крутильных колебаний вала с дисками,  $I_k$  – момент инерции  $k$ -го диска,  $q_k$  – углы поворотов дисков, определяемые по формулам

$$q_2 = q_1 - e_1 p^2 I_1 q_1,$$

$$q_3 = q_2 - e_2 p^2 (I_1 q_1 + I_2 q_2),$$

$$q_4 = q_3 - e_3 p^2 (I_1 q_1 + I_2 q_2 + I_3 q_3),$$

$$q_5 = q_4 - e_4 p^2 (I_1 q_1 + I_2 q_2 + I_3 q_3 + I_4 q_4).$$

Рассмотренный метод Толле позволяет получить частотные уравнения для вала с любым числом дисков без объемных математических преобразований, как при составлении частотных уравнений стандартным энергетическим методом. В работе приведены примеры на применение метода Толле, проанализировано соответствие между двумя методами.

Проведенные исследования прямой задачи по определению частот колебаний вала с дисками важны для решения обратной задачи диагностирования характеристик вала по спектру частот его колебаний.

### Литература

Бабаков, И.В. Теория колебаний / И.В. Бабаков – М: Дрофа, 2004.

© Назмутдинова Л.Р., Сафина Г.Ф., 2009 г.

## НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Павленко В.А.

Институт математики с вычислительным центром, г.Уфа, Россия

Рассмотрим компактное многообразие  $X$  размерности  $n$ , в котором выделено его подмножество  $Y$ . Предполагается, что  $Y$  является стратифицированным подмногообразием, т.е., представляет собой произвольное объединение конечного числа гладких подмногообразий размерности  $n-1$ , которые пересекаются трансверсально. Мы вводим специальный класс функций, которые являются гладкими функциями на  $X \setminus Y$  и допускают асимптотическое разложение определенного вида при подходе к  $Y$ . Такие функции называются полиоднородными.

Для двух произвольных компактных многообразий  $X$  и  $X_1$  с отмеченными подмногообразиями  $Y$  и  $Y_1$  соответственно вводится понятие относительного отображения из  $X$  в  $X_1$ . Такое отображение является гладким отображением из  $X$  в  $X_1$ , которое переводит подмногообразие  $Y$  в подмногообразие  $Y_1$  и допускает асимптотическое разложение определенного вида вблизи  $Y$ .

Напомним, что поднятием гладкой функции  $v$  на  $X_1$  при гладком отображении  $f$  из  $X$  в  $X_1$  называется гладкая функция  $f^*v$  на  $X$ , определяемая по формуле  $f^*v = v \circ f$ . Опусканием обобщенной функции  $v$  на  $X$  при отображении  $f$  называется: обобщенная функция  $f_*v$  на  $X_1$ , определяемая формулой  $\langle f_*v, j \rangle = \langle v, f^*j \rangle$ .

Основной целью данной работы является нахождение достаточных условий на относительное отображение  $f$ , при которых поднятие и опускание полиоднородной функции является полиоднородной функцией.

Эти результаты в дальнейшем будут применяться для построения алгебры сингулярных интегральных операторов на компактных многообразиях с отмеченным стратифицированным подмногообразием и для исследования свойств дифференциальных уравнений на многообразии  $X$ , вырождающихся на подмногообразии  $Y$ .

© Павленко В.А., 2009 г.

## О ЗАДАЧЕ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ МАСС ГРУЗОВ МНОГООПОРНОГО ВАЛА ПО СПЕКТРУ ЧАСТОТ ЕГО ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Сафина Г.Ф.

Нефтекамский филиал БашГУ, г. Нефтекамск, Россия

Целью работы, представленной в данном сообщении, является определение масс грузов многоопорного вала по известному спектру частот его поперечных колебаний.

Рассмотрены частотные уравнения для трехопорного (1) и четырехопорного валов (2) задачи по поперечным колебаниям вала на опорах [1]:

$$\frac{W_1 W_2}{g^2} p^4 - \left( \frac{W_1 a - W_2 c}{g(ac - b^2)} \right) p^2 + \frac{1}{ac - b^2} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (a_{11} a_{22} a_{33} \frac{W_1 W_2 W_3}{g^3} - a_{12} a_{23} a_{33} \frac{W_1 W_2 W_3}{g^3} - a_{21} a_{32} a_{13} \frac{W_1 W_2 W_3}{g^3} + \\ & + a_{13} a_{31} a_{22} \frac{W_1 W_2 W_3}{g^3} + a_{23} a_{32} a_{11} \frac{W_1 W_2 W_3}{g^3} - a_{21} a_{12} a_{33} \frac{W_1 W_2 W_3}{g^3}) p^6 - \\ & - (a_{11} a_{33} \frac{W_1 W_2}{g^2} + a_{22} a_{33} \frac{W_2 W_3}{g^2} + a_{11} a_{22} \frac{W_1 W_2}{g^2} + a_{13} a_{31} \frac{W_1 W_3}{g^2} + \\ & + a_{23} a_{32} \frac{W_2 W_3}{g^2} - a_{21} a_{12} \frac{W_1 W_2}{g^2}) p^4 + (a_{33} \frac{W_3}{g} + a_{11} \frac{W_1}{g} + a_{22} \frac{W_2}{g}) p^2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $W_1, W_2, W_3$  - массы грузов,  $p$  - собственная частота поперечных колебаний,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $a, b, c, a_{ij}$  - постоянные, зависящие от длины вала, расстояний между опорами и расстояний от грузов до опор.

Поставлена и решена задача диагностирования масс грузов по известному спектру частот колебаний вала на опорах. По найденному алгоритму решения обратной задачи исследована также проблема сохранения заданного спектра частот колебаний вала при изменениях характеристик вала с грузами. Полученные аналитические формулы позволяют диагностировать массы грузов, необходимых для сохранения заданного спектра частот колебаний вала. Приведены конкретные примеры, подтверждающие выводы и совпадающие с результатами аналитических формул.

### Литература

1. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко - М.: Физматгиз - 1959. 440с.

© Сафина С.Г., 2009 г.

УДК 517.95

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Удалова Г.Ю.

Самарский государственный архитектурно-строительный  
университет (Россия, г. Самара)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = f(x),$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -a < y < b\}$ ,  
где  $a, b$  – заданные положительные числа.

**Обратная задача.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, y)$ ,  
и  $f(x)$ , удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+),$$

$$f(x) \in C(0, 1),$$

$$Lu \equiv f(x), \quad (x, y) \in D_- \cup D_+,$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0, \quad -a \leq y \leq b,$$

$$u(x, -a) = y(x), \quad u(x, b) = j(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u_y(x, -a) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где  $y(x), j(x), g(x)$  – заданные достаточно гладкие функции,  
 $y'(0) = y'(1) = 0, \quad j'(0) = j'(1) = 0, \quad D_- = D \cap \{y < 0\},$   
 $D_+ = D \cap \{y > 0\}.$

Задача решается методом спектральных разложений [1].  
Решение построено в виде суммы ряда Фурье. Установлен критерий  
единственности решения.

Литература

[1] Сабитов К.Б. Об одной краевой задаче для уравнения  
смешанного типа третьего порядка // ДАН, 2009, Т. 427, №5, С. 593-  
596.

© Удалова Г.Ю., 2009 г.

# СЕКЦИЯ «СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ»

УДК 517.984

## ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ПРОБЛЕМЫ

Ахметвалиева Э.Н.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим спектральную задачу:

$$l(y, I) = y'' + (p_0 + p_1 I) y' + (q_0 + q_1 I + q_2 I^2) y = 0 \quad (1)$$

$$U_1(y, I) = (a_{11} + I a_{12}) y'(0) + (a_{21} + I a_{22}) y(0) = 0 \quad (2)$$

$$U_2(y, I) = (b_{11} + I b_{12}) y'(1) + (b_{21} + I b_{22}) y(1) = 0 \quad (3)$$

Здесь  $a_i(I) = a_{i1} + I a_{i2}$ ,  $b_i(I) = b_{i1} + I b_{i2}$  – линейные функции относительно спектрального параметра  $I$ , где  $a_{ij}, b_{ij}, q_2 \in C$  ( $i, j=1,2$ );  $a_1(I), a_2(I); b_1(I), b_2(I)$  – попарно линейно независимы;  $a_2(I), b_2(I) \neq 0$  при любом спектральном параметре  $I$ ,  $q_2 \neq 0$ ,  $p_0 = p_0(x)$ ,  $q_0 = q_0(x)$ ,  $p_1 = p_1(x)$ ,  $q_1 = q_1(x)$  – гладкие функции. Чтобы не усложнять существо дела, считаем, что все собственные значения задачи (1)-(3) – простые.

Теорема. Если (1)-(3) является регулярной краевой задачей, то любой элемент  $\mathbf{v} = (v_0, v_1) \in W_2^1 \times W_2^1$  может быть разложен в ряд по элементам

$$\mathbf{v}_k = \{y_k, I_k y_k\}; \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{v}_k, \text{ который сходится в норме пространства}$$

$$W_2^1 \times W_2^1. \text{ Тогда } \tilde{y} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{y}_k, \text{ где } \tilde{y} = \{ \mathbf{y}, I \mathbf{y} \}, \mathbf{y} = \{y(x), y'(0), y'(1)\}; \text{ и } c_k = P_k/Q_k, \text{ где}$$

$$P_k = \int_0^1 [p_1 y' + (q_1 + q_2 I + q_2 \bar{I}_k) y] \bar{z}_k dx + (a_{12} y'(0) + a_{22} y(0)) \bar{h}_k + (b_{12} y'(1) + b_{22} y(1)) \bar{h}_k;$$

$$Q_k = \int_0^1 [p_1 y' + (q_1 + q_2 I + q_2 \bar{I}_k) y] \bar{z}_k dx + (a_{12} y'(0) + a_{22} y(0)) \bar{h}_k + (b_{12} y'(1) + b_{22} y(1)) \bar{h}_k;$$

$\bar{h}_k, \bar{z}_k = \{z_k, h_{1k}, h_{2k}\}$ ,  $z_k(x)$  – каноническая по Келдышу система собственных функций сопряженной краевой задачи.

© Ахметвалиева Э.Н., 2009 г.

## СВЯЗЬ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Игнатьева Г.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В работе рассматривается следующая краевая задача

$$y''(x) + p_1(x, I)y' + p_2(x, I) = 0 \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

$$y'(1) + f(I)y(1) = 0 \quad (3)$$

$x \in [0;1]$ ,  $I$  - спектральный параметр,  $p_1(x, I)$ ,  $p_2(x, I)$  - непрерывно дифференцируемые функции по  $x$  и  $I$ ,  $f(I)$  - целая функция.

По собственным значениям  $I_i$  (1)-(3) требуется найти целую функцию  $f(I)$  из краевого условия (3). Доказано, что рассматриваемая спектральная задача сводится к классической задаче интерполяции, которая состоит в отыскании целой функции  $f(I)$ , принимающей в заданных точках  $I_i$  - узлах интерполяции заданные значения  $C_i$ . В общем случае для однозначного восстановления функции  $f(I)$  требуется знание всех собственных значений и ограничение на рост  $f(I)$ . Но эти условия не являются необходимыми. Иногда о функции  $f(I)$  достаточно знать, что она является целой, а о собственных значениях достаточно знать поведение некоторой подпоследовательности, составленной из собственных значений. В работе приводятся примеры, когда теоремы единственности целых функций позволяют единственным образом восстановить  $f(I)$ .

© Игнатьева Г.А., 2009 г.

**IDENTIFICATION OF BOUNDARY CONDITION OF A  
SPECTRAL PROBLEM USING A FINITE SET OF ITS  
EIGENVALUES IN CASE OF A RING MEMBRANE**

Mouftakhov A.V.

Department of Mathematics and Statistics,  
Bar-Ilan University, Ramat-Gan, Israel.

The problem of finding the fastening of a membrane from natural frequencies is solved. The problem of the radial oscillations of membrane is reduced to the following eigenvalue problem

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + I^2v(r) = 0,$$

$$U_j(v) = (a_jv'(r) + b_jv(r))_{r=c_j} = 0 \quad (j=1,2),$$

where  $I$  is the spectral parameter,  $c_1$  and  $c_2$  are the short and long radius of the ring membrane respectively.

The problem in question belongs to a class of the inverse problems of identification of boundary conditions (see [1]). The search for the unknown boundary conditions is equivalent to finding Plucker coordinates of the span of the vectors of the coefficients of the boundary conditions (see [2]).

First, a method for establishing unknown conditions is indicated. An approximate formula for determining unknown boundary conditions is obtained, using the first three natural frequencies. The Plucker coordinates of these boundary conditions are found, and the matrices of the boundary conditions are reconstructed by the Plucker coordinates with the help of the Plucker relations.

Then, the theorem of stability of the solution is proved.

Finally, the method of the approximate calculation of Plucker coordinates of unknown boundary conditions is explained with the help of the example.

The method of approximate calculation of unknown boundary conditions is explained with the help of examples of different cases for the fastening.

### References

1. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, Determination of Boundary Conditions from Natural Frequencies, Inverse Probl. Sci. Eng. 12(4), 393–408 (2004).
2. W. V. D. Hodge, D. Pedoe, Methods of Algebraic Geometry, Cambridge Univ. Press., Cambridge, UK, 1994, p. viii+440.

© Mouftakhov A.V., 2009

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ  
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ДВУМ СОБСТВЕННЫМ  
ЗНАЧЕНИЯМ**

Орлов А.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим спектральную задачу:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + I^2 y = 0, \quad (1)$$

$$y'(0) - (a_0 + a_1 I)y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(1) + (b_0 + b_1 I)y(1) = 0, \quad (3)$$

где  $x \in [0, 1]$ ,  $I$  - спектральный параметр.

Теорема: Если известны коэффициенты  $a_0, a_1, (b_0, b_1)$  то любые два различных собственных значения  $I_i, (i=1,2)$  однозначно определяют остальные коэффициенты  $b_0, b_1, (a_0, a_1)$ .

Подобные теоремы были доказаны для остальных коэффициентов, и обобщены в таблицу:

Изв. коэф.	Неизв. коэф.	Выводы
$a_0, a_1$	$b_0, b_1$	однозначно определяют
$b_0, b_1$	$a_0, a_1$	однозначно определяют
$a_0, b_1$	$a_1, b_0$	определяют 2 значения
$a_1, b_0$	$a_0, b_1$	определяют 2 значения
$a_1, b_1$	$a_0, b_0$	определяют 2 значения
$a_0, b_0$	$a_1, b_1$	определяют 2 значения

© Орлов А.А., 2009 г.

УДК 517.984.54

**О ЗАДАЧЕ ОТЫСКАНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ  
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО НУЛЯМ  
ЕЁ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

Ахтямов А.М., Слепец М.А.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В работах [1,2] показано, что произвольный полином от спектрального параметра степени  $n-1$  из краевого условия задачи Штурма–Лиувилля однозначно восстанавливается по  $n$  ненулевым попарно различным собственным значениям  $\lambda_i$ .

Однако в [1.2] в задаче нахождения полинома от спектрального параметра в качестве исходных данных использовались собственные значения. В настоящей работе показано, что в качестве исходных данных для восстановления краевых условий можно использовать также нули  $x_i$  собственных функций  $y_i(x_i, \lambda)$ . А именно, доказано, что произвольный полином от спектрального параметра степени  $n-1$  из краевого условия задачи Штурма–Лиувилля однозначно восстанавливается по  $n$  нулям собственных функций  $y_i(x_i, \lambda)$ .

**Литература**

1. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. – 184 с.
2. Ахтямов А.М., Теория идентификации краевых условий / А.М. Ахтямов; Отд. физ.-мат. И техн. Наук АН РБ. – Уфа: Гилим, 2008.- 300с.

© Ахтямов А.М., Слепец М.А., 2009 г.

**О СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА  
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ОБЛАСТИ С МАЛЫМ  
ОТВЕРСТИЕМ**

Черданцева К.И.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается возмущенная задача Неймана в ограниченной области  $\Omega_\epsilon$  с малым отверстием диаметра  $0 < \epsilon \ll 1$  для эллиптического оператора второго порядка. Известно, что, когда отверстие сжимается, то к простому собственному значению предельной задачи Неймана в области  $\Omega$  без отверстия сходится простое собственное значение возмущенной задачи. Целью работы является доказательство следующего утверждения.

***Теорема.** Пусть  $I_0$  – собственное значение кратности  $N$  предельной задачи. Тогда:*

- 1) *к собственному значению  $I_0$  сходится  $N$  собственных значений (с учётом совокупной кратности) возмущённой спектральной задачи;*
- 2) *если  $I_{\epsilon,1}, I_{\epsilon,2}, \dots, I_{\epsilon,N}$  – собственные значения возмущённой задачи, которые сходятся к  $I_0$ , а  $u_{\epsilon,1}, u_{\epsilon,2}, \dots, u_{\epsilon,N}$  – соответствующие собственные функции, ортонормированные в  $L_2(\Omega)$ , то для любой последовательности  $\epsilon_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  существует подпоследовательность  $\epsilon_{k'} \rightarrow 0$ , такая что*

$$\|u_{\epsilon_{k'},j} - u_{0,j}\| \rightarrow 0,$$

*при  $\epsilon = \epsilon_{k'} \rightarrow 0$ , где  $u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,N}$  – собственные функции предельной задачи, соответствующие  $I_0$ , ортонормированные в  $L_2(\Omega)$ .*

**Литература**

[1] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

© Черданцева К.И., 2009 г.

## СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА»

УДК 532.529.5

### ИСТЕЧЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОПЛА

Агишева У.О., Галимзянов М.Н.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Течение пузырьковой жидкости в сопле, как показано в [1], [2], может сопровождаться интенсивными пульсациями пузырьков, возникающими из-за изменения давления в жидкости по длине сопла. Механизм развития колебаний пузырьков следующий: снижение давления в жидкости в сужающейся части приводит к росту пузырьков, который вследствие инерции продолжается в горловине сопла, когда давление в жидкости достигает минимального значения и начинает увеличиваться в диффузорной части.

Данная работа посвящена исследованию процесса стационарного течения пузырьковой жидкости через сопло. Рассматривается установившееся адиабатическое течение жидкости с газовыми пузырьками в сопле кругового сечения с заданием основных характеристик: смесь является монодисперсной, вязкость и теплопроводность существенно лишь в процессе межфазного взаимодействия (например, при пульсации пузырьков), отсутствует массообмен между пузырьками и жидкостью, пренебрегаем трением о стенки канала. Отметим, что для изучения процесса течения двухфазной смеси в каналах различной геометрии одной из важных характеристик является критический расход газожидкостных потоков. Знание особенностей критического истечения газожидкостных потоков имеет важное значение для оценки максимальных расходов через сопла.

На основе численных расчетов установлена возможность получения высоких давлений температур в газовой фазе пузырьковой жидкости, при ее истечении через сопло, из-за развития интенсивных колебаний пузырьков в расширяющейся части сопла вблизи минимального сечения. Наиболее высокие давления и температуры газа реализуются в крупнодисперсных смесях, вследствие снижения тепловых потерь при пульсациях.

1. Лепихин С.А., Галимзянов М.Н. Численное исследование реализации высоких давлений и температур в газовой фазе пузырьковой жидкости при ее истечении через сопла // Сб. трудов XV Зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь, 2007. – С. 225–229.
2. Шагапов В.Ш., Лепихин С.А., Галимзянов М.Н. Реализация высоких давлений и температур в газовой фазе при истечении пузырьковой жидкости через сопло // ИФЖ. – 2007. – Т. 80, № 6. – С. 134–137.

© Агишева У.О., Галимзянов М.Н., 2009 г.

## КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Ахтямов А.М., Сатыев Э.И.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Целью работы является восстановление критической радиальной нагрузки  $q$  на арку по шести упругим характеристикам закреплений.

В качестве расчетной схемы арки рассматривается упругий стержень постоянной кривизны с длиной  $l$ .

Общее решение дифференциального уравнения потери устойчивости известно и равно  $u = \sum_{i=1}^6 C_i u_i(s)$ , где  $u_i(s)$  - известные

функции, содержащие  $q$ , а  $C_i$  - константы. Краевые условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{EI}{R^2} \left( R^2 \frac{d^4}{ds^4} + \frac{d^2}{ds^2} \right) - k_1^- \frac{d}{ds} \right] u(0) = U_1(u) = 0 \\ \left[ \frac{EI}{R^2} \left( R^2 \frac{d^4}{ds^4} + \frac{d^2}{ds^2} \right) + k_1^+ \frac{d}{ds} \right] u(l) = U_2(u) = 0 \\ \left[ \frac{EI}{R^2} \left( R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds} \right) - k_2^- \frac{d^2}{ds^2} \right] u(0) = U_3(u) = 0 \\ \left[ \frac{EI}{R^2} \left( R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds} \right) + k_2^+ \frac{d^2}{ds^2} \right] u(l) = U_4(u) = 0 \\ \left[ \frac{EI}{R^2} \left( R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds} \right) - k_3^- \right] u(0) = U_5(u) = 0 \\ \left[ \frac{EI}{R^2} \left( R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds} \right) + k_3^+ \right] u(l) = U_6(u) = 0 \end{array} \right.$$

Отсюда получаем, что  $\Delta(q) = \det \left\| U_j(u_i) \right\|_{6 \times 6} = 0$ . Решение

этого уравнения с одним неизвестным  $q$  может быть найдено численно.

© Ахтямов А.М., Сатыев Э.И., 2009 г.

УДК 51-74

## **ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСЛОВИЙ СОПРЯЖЕНИЯ И ВЕЛИЧИНЫ ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА СТЕРЖЕНЬ**

Ахтямов<sup>1</sup> А.М., Захарова<sup>2</sup> М.А.

<sup>1</sup>Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

<sup>2</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия

Прямая задача определения функции прогибов стержня по известным краевым условиям, дифференциальным уравнениям прогиба и функции нагрузки стержня хорошо изучены (см. [1]). Обратная задача нахождения краевых условий и функций нагрузки по прогибам стержня в нескольких точках рассмотрена в работах [2-4]. Обратная задача определения условий сопряжения и нагрузки, действующей на стержень, ранее не изучалась. В настоящей работе рассмотрен стержень, заделанный на обоих концах. Середина стержня закреплена пружиной с неизвестной жесткостью  $C$ . Показали, что по значениям прогиба в некоторых точках можно однозначно определить  $C$  – коэффициент жесткости пружины и величину постоянной нагрузки  $f_0$ , действующей на стержень.

### **Литература**

1. Понаморев К. К, «Теория дифференциальных уравнений» Мн., «Высшая школа», 1973, 560 стр.
2. Ахтямов А. М., Нафикова Э. Р. Восстановление краевых условий и функций нагрузки // Контроль. Диагностика 2007 №9 С. 50-52
3. Ахтямов А. М. К решению обратной статической задачи// Электронный журнал «Исследовано в России». 2003.49. С. 567-573: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/049polf>
4. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий. Отдел физ.-мат. и техн. наук АН РБ.-Уфа: Гилем, 2008.-300 с.

© Ахтямов А.М., Захарова М.А., 2009 г.

**НАХОЖДЕНИЕ ПОЛИНОМА ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО  
ПАРАМЕТРА В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНОГО НУЛЕВОГО  
СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ**

Ахтямов А.М., Кумушбаев Р.Р.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

На практике часто встречаются такие ситуации, когда спектральный параметр входит в краевое условие. Так, задача о поперечных колебаниях гладкой струны, у которой левый конец жестко зашпелен, а правый конец несет сосредоточенную массу и движется с вязким трением, приводится с помощью преобразования Лиувилля к следующей задаче Штурма–Лиувилля:

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2y(x), \quad y(0)=0, \quad y'(1)+(d_0+d_1\lambda+d_2\lambda^2)y(1)=0.$$

В работе [1] показано, что произвольный полином от спектрального параметра степени  $n-1$  из краевого условия задачи Штурма–Лиувилля однозначно восстанавливается по  $n$  ненулевым попарно-различным собственным значениям. В [1] показано также, что условие отличности от нуля собственных значений являются существенным. Однако, в настоящей работе выявлено, что в некоторых случаях информация о нулевом собственном значении также может быть использована для отыскания неизвестного полинома из краевого условия задачи Штурма–Лиувилля, в частности доказано, что функция  $d(\lambda)=d_1\lambda+d_2\lambda^2$  может быть восстановлена однозначно по двукратному нулевому собственному значению и одному собственному значению, отличному от нуля.

Полученный результат может быть применен к задаче акустической диагностики об определении параметров закрепления одного из концов колеблющейся струны.

**Литература**

1. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. – 184 с.

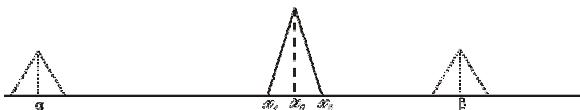
© Ахтямов А.М., Кумушбаев Р.Р., 2009 г.

## РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

Ахтямов А.М., Утяшев И.М.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В данной работе рассматривается обратная ретроспективная задача об определении местоположения и момента времени возбуждения струны внешним объектом. На бесконечной струне в точках  $x = a$ ,  $x = b$  установлены датчики, которые фиксируют величины  $u(a, t)$ ,  $u(b, t)$  поперечных колебаний струны в любой момент времени  $t$ . В некоторый момент времени  $t_0$  между точками  $x = a$ ,  $x = b$  в некоторой точке  $x_0$  происходит касание объекта и струны. Возникает возбуждение струны, которое распространяется в обе стороны. В некоторые моменты  $t_a$ ,  $t_b$  возбуждение достигает точек  $x = a$ ,  $x = b$ . Требуется определить момент времени  $t_0$  возбуждения струны и место  $x_0$  касания объекта и струны по показаниям датчиков  $u(a, t)$ ,  $u(b, t)$ .



Выведены уравнения для нахождения местоположения и момента времени возбуждения с использованием двух тензодатчиков.

$$x_0 = \frac{b + a - a(t_b - t_a)}{2}, \quad a, b \in (-\infty, +\infty)$$

$$t_0 = \frac{a(t_a + t_b) + a - b}{2a}, \quad t_a, t_b \in (0, +\infty)$$

### Литература

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224с.
2. Ахтямов А.М. Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня // Контроль. Диагностика. 2007. № 11. с. 59-60.

© Ахтямов А.М., Утяшев И.М., 2009 г.

## ОДНОЗНАЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТРУНЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ

Ахтямова А.А.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В работе [1] была доказана теорема о нахождении произвольного полинома от спектрального параметра из краевого условия задачи Штурма-Лиувилля. Из этой теоремы следует в частности, что произвольный полином  $H(\lambda)$  степени  $(n-1)$  от спектрального параметра  $\lambda$ , входящий в краевое условие задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y'' = \lambda^2 y \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

$$y'(1) + H(\lambda)y(1) = 0 \quad (3)$$

находится по  $n$  различным собственным значениям однозначно. Однако случай, когда некоторые из коэффициентов полинома известны, не рассматривался. Не очевидно, что в этом случае для однозначного восстановления полинома  $H(\lambda)$  потребуется меньшее число собственных значений, так как определитель соответствующей системы уравнений

(1) - (3) уже не будет определителем Вандермонда.

В настоящей работе показано, что для однозначного восстановления квадратичной функции  $H(\lambda) = H_0 + H_2 \lambda^2$  в краевом условии (2), (3) достаточно двух, а не трех собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Однако в отличие от работы [1] на собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  требуется наложить еще одно условие:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0.$$

Полученный результат позволяет определять неизвестные параметры закрепления одного из концов колеблющейся струны не по трем, а лишь по двум собственным значениям, что весьма важно в акустической диагностике, поскольку экспериментальное получение третьего собственного значения бывает часто проблематичным.

### Литература

1. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. – 184 с.

УДК 536.46

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ БЫСТРОГО ГОРЕНИЯ ГАЗА В ПОРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГРАНУЛЯРНОЙ НАСЫПКИ**

Балапанов Д.М.

Институт Механики УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

В экспериментальных исследованиях по распространению волн горения в газах, насыщающих инертные пористые насыпки, обнаружен режим при котором пламя распространяется с довольно высокой (порядка ста метров в секунду), но дозвуковой скоростью. Профиль волны горения плавный, без характерного для детонации скачка давления, вместо которого наблюдается плавное повышение давления, образующее пик, после чего следует спад в точке, где начинается реакция. В литературе режим называется «быстрое горение».

Разработана математическая модель, описывающая явление быстрого горения газа в пространстве, загроможденном плотноупакованными монодисперсными шариками. Шарика принимаются неподвижными и недеформируемыми. Поровое пространство среды насыщено обедненной водородно-кислородной смесью. Устойчивое горение с высокой скоростью обеспечивается конвективным механизмом зажигания, который заключается в том, что сгоревший газ в случайном направлении выбрасывается из межгранулярного "микросопла" в виде горячей струи и поджигает соседние порции холодного газа. Эти горячие струи хаотически взаимодействуют между собой, формируя турбулентный фронт пламени. Плавный «предвестник» – область роста давления перед зоной реакции – образуется из-за того, что возмущения давления опережают фронт волны.

Турбулизация потока рассмотрена в рамках алгебраической модели пути смешения Прандтля. Межфазное взаимодействие представлено силами Стокса и присоединенных масс, и стационарным теплообменом. Принимаются во внимание сложные зависимости теплофизических свойств газа от состава и температуры.

Рассчитанные по уравнениям модели скорости и профили волн быстрого горения согласуются с экспериментальными данными.

© Балапанов Д.М., 2009 г.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБЖИГА ИЗВЕСТНЯКА В ГАЗОВОЙ ПЕЧИ

Буркин М.В.

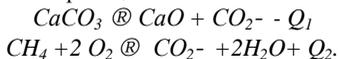
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г.Стерлитамак, Россия

В настоящее время для обжига известняка используются, в основном, коксовые печи, рассмотренные в [1]. Однако, использование газа представляется более перспективным.

Построена математическая модель установившегося процесса обжига известняка в печи в одномерном приближении. Эта модель, полученная на основе законов сохранения масс и энергии с учётом кинетики физико-химических превращений, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. При известных геометрических параметрах печи, задавая условия на ее входе и на выходе, то есть граничные условия, решая краевую задачу можно определить термохимическую и гидродинамическую обстановку в печи.

Печь для обжига известняка представляет собой канал круглого сечения. С верхнего сечения, которое будем называть входом, печь непрерывно загружается известняком, а снизу закачивается метан и воздух в количестве достаточном для полного его выгорания. В верхней части печи известняк, опускаясь, прогревается газом, движущимся снизу. При этом известняк, прогреваясь, слой за слоем разлагается на негашеную известь с выделением углекислого газа. Считаем, что метан мгновенно сгорает на нижнем сечении, а выделившаяся при этом энергия идет на нагрев газа. Частицы известняка сферические и при разложении сохраняют свою конфигурацию.

Для процесса горения метана и разложения известняка примем следующие схемы химических реакций:



Полагаем, что температуры, концентрации каждой составляющей по сечению канала одинаковы. Давление газа в печи считаем постоянным.

Система уравнений представляет собой законы сохранения масс и энергии, а так же законы движения в рамках механики сплошных сред.

### Литература

[1] Шагапов В. Ш., Буркин М.В. Теоретическое моделирование совместных процессов горения кокса и разложения известняка в печи // Физика горения и взрыва, 2008, т. 44, №1, с. 63-72.

© Буркин М.В., 2009 г.

## **ИСТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОПЛА С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ**

Бузина В.А., Галимзянов М.Н.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Течение пузырьковой жидкости в сопле, как показано в [1], может сопровождаться интенсивными пульсациями пузырьков, возникающими из-за изменения давления в жидкости по длине сопла. Механизм развития колебаний пузырьков следующий: снижение давления в жидкости в сужающейся части приводит к росту пузырьков, который вследствие инерции продолжается в горловине сопла, когда давление в жидкости достигает минимального значения и начинает увеличиваться в диффузорной части.

Данная работа посвящена исследованию процесса стационарного течения парогазожидкостной пузырьковой смеси через сопло с фазовыми переходами. Рассматривается установившееся адиабатическое течение жидкости с газовыми пузырьками в сопле кругового сечения с заданием исходных параметров и значением скорости на входе в сопло. Смесь является монодисперсной, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия, массообмен между пузырьками и жидкостью отсутствует. Пренебрегаем силами трения потока о стенки канала. Отсутствует дробление и слипание пузырьков. Газовая фаза пузырьковой системы рассматривается, как газовая смесь из двух компонент инертного газа и пара окружающей пузырьки жидкости.

На основе проведенных численных расчетов установлено, что учет межфазного массообмена оказывает двойное воздействие: во-первых, происходит более сильное начальное расширение пузырьков в области минимального сечения сопла, т.к. пузырьки становятся более мягкими из-за интенсивного испарения жидкости внутрь пузырьков, приводящего к уменьшению сопротивляемости пузырьков расширению. Во-вторых, в парогазовых пузырьках наиболее высокие значения пиковых давлений и температур реализуются не при первых схлопываниях, а при последующих колебаниях, когда масса парогазовой смеси в пузырьках уменьшается.

1. Шагапов В.Ш., Лепихин С.А., Галимзянов М.Н. Реализация высоких давлений и температур в газовой фазе при истечении пузырьковой жидкости через сопло // ИФЖ. – 2007. – Т. 80, № 6. – С. 134–137.

© Бузина В.А., Галимзянов М.Н., 2009 г.

УДК 532.5

## **ДИНАМИКА ВОЛН СЖАТИЯ В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКОВУЮ ЗАВЕСУ**

Гадельшин Р.Р., Галимзянов М.Н.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Задача о распространении малых возмущений и ударных волн в пузырьковой жидкости является одной из интереснейших задач гидродинамики, как в плане теоретического изучения, так и с точки зрения ее практических приложений.

Пузырьковые жидкости являются жидкостями с особыми свойствами. При небольших по объему добавках пузырьков среда приобретает высокую сжимаемость, сохраняя при этом плотность, близкую к плотности жидкости, что приводит к нелинейности среды. Кроме того, пузырьковые среды, главным образом из-за проявления межфазного теплообмена, обладают сильными диссипативными свойствами. Совокупное взаимодействие нелинейных, диссипативных и дисперсионных эффектов приводят к существенным особенностям распространения возмущений в пузырьковых средах.

В данной работе исследуется динамика нелинейных волн в жидкости при прохождении через пузырьковую завесу. Рассматривается ситуация, когда пузырьковая завеса ограничена с обеих сторон «чистой» жидкостью, а также ситуация когда с одной стороны завеса ограничена твердой стенкой. Проводится анализ зависимости эволюции волн при прохождении завесы от параметров смеси (начальное объемное содержание пузырьков, начальный радиус пузырька) и ширины завесы.

На основе проведенных численных расчетов установлено, что завеса, расположенная перед «твердой» стенкой при надлежащем подборе ее параметров (начального радиуса пузырьков и объемного содержания) может существенно снизить воздействие падающего сигнала на стенку или же, наоборот, существенно увеличить начальную амплитуду падающего сигнала.

© Гадельшин Р.Р., Галимзянов М.Н., 2009 г.

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГРУНТА ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ПОДВОДНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ МЕТОДОМ НАКЛОННО НАПРАВЛЕННОГО БУРЕНИЯ

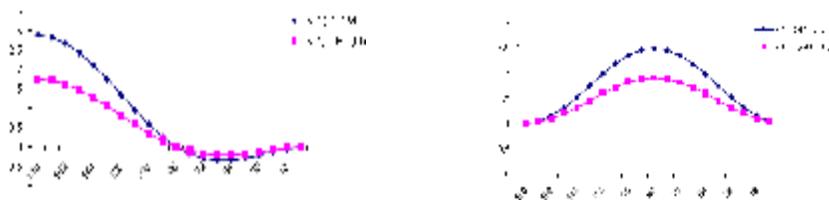
Гафарова Ю.А.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Одна из проблем метода наклонно направленного бурения – напряженно-деформированное состояние грунта вокруг отверстия в процессе бурения.

Получено численное и аналитическое решение двух задач: отверстие расположено глубоко и на незначительном расстоянии от уровня размыва.

В первом случае напряжения получены в полярной системе



координат  $(j, r)$  для неограниченной области с круговым отверстием радиуса  $R$  при однородном нормальном давлении  $p$

$$s_{rr}(r) = -p(R/r)^2, \quad s_{jj}(r) = p(R/r)^2$$

Вторая задача решена введением биполярной системы координат  $(a, b)$ . Формулы выведены для полу-бесконечной пластины, содержащей круглое отверстие, на которое действует однородное нормальное давление  $p$ , и ограниченной прямолинейной границей, которая свободна от напряжений.

$$s_{bb} = -p + 2p \operatorname{cosech}^2 a (\cosh^2 a - \cos^2 b)$$

Напряжение рассчитано на прямолинейной границе и вокруг кругового отверстия. Зависимость напряжения  $\sigma$  от биполярной координаты  $\beta$  представлены на рисунках. Изменение напряжения зависит от отношения расстояния прямолинейной границы до центра окружности  $d$  к её радиусу  $r$ . Анализ расчетов показал, что трещина появится на прямолинейной границе при  $d \leq \sqrt{3}r$ , а на круглом отверстии –  $d \geq \sqrt{3}r$ . Когда  $d \gg r$  вторая задача сводится к первой.

© Гафарова Ю.А., 2009 г.

**НАХОЖДЕНИЕ ПОЛИНОМА ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО  
ПАРАМЕТРА В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНОГО НУЛЕВОГО  
СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ**

Ахтямов А.М., Галеева Д.Р.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

На практике часто встречаются такие ситуации, когда спектральный параметр входит в краевое условие. Так, задача о поперечных колебаниях гладкой струны, у которой левый конец жестко зашпелен, а правый конец несет сосредоточенную массу и движется с вязким трением, приводится с помощью преобразования Лиувилля к следующей задаче Штурма–Лиувилля:

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2y(x), \quad y(0)=0, \quad y'(1)+(d_0+d_1\lambda+d_2\lambda^2)y(1)=0.$$

В работе [1] показано, что произвольный полином от спектрального параметра степени  $n-1$  из краевого условия задачи Штурма–Лиувилля однозначно восстанавливается по  $n$  ненулевым попарно-различными собственными значениями. В [1] показано также, что условие отличности от нуля собственных значений являются существенным. Однако, в настоящей работе выявлено, что в некоторых случаях информация о нулевом собственном значении также может быть использована для отыскания неизвестного полинома из краевого условия задачи Штурма–Лиувилля, в частности доказано, что функция  $d(\lambda)=d_1\lambda+d_2\lambda^2$  может быть восстановлена однозначно по двукратному нулевому собственному значению и одному собственному значению, отличному от нуля.

Полученный результат может быть применен к задаче акустической диагностики об определении параметров закрепления одного из концов колеблющейся струны.

**Литература**

1. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. – 184 с.

© Ахтямов А.М., Галеева Д.Р., 2009 г.

УДК 532.5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ГАЗОВЫХ ГИДРАТОВ

Галимзянов М.Н.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В последние десятилетия интерес к проблеме газовых гидратов во всем мире резко возрос. Резко возросла активизация поисков альтернативных источников углеводородного сырья, особенно в экономически развитых странах, бедных ресурсами энергоносителей. Одним из важных факторов изменения климата на Земле является увеличение концентрации двуокиси углерода в атмосфере Земли. В настоящее время предлагаются различные технологии утилизации углекислого газа. Одним из перспективных способов утилизации является перевод газа в газогидратное состояние и хранение на дне океана [1].

В работе [2] экспериментально исследован процесс растворения и гидратообразования за ударной волной умеренной амплитуды в воде с пузырьками фреона 12 при атмосферном статическом давлении. В нашей работе выписана система уравнений, которая приведена к безразмерному виду и записана в системе переменных Лагранжа для удобства расчета. Исследовалось образование газогидрата при эволюции двумерных волн в жидкости с пузырьками газа. Рассмотрены случаи плоского удара по жидкости, в которой находится пузырьковые зоны конечных размеров. В одномерном приближении полученные результаты численного расчета продемонстрировали качественное совпадение с экспериментальными данными, опубликованными в работе Донцова В.Е.[2]

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-97033), Программы фонда фундаментальных исследования ОЭМПУ РАН (ОЕ-15) и Программы фонда фундаментальных исследований Президиума РАН (П-17).*

1. Anderson V., Woodhouse S., Graff O.Fr., Gudmundson J.S. Hydrates for deep ocean storage of CO<sub>2</sub> // Proc. 5 Int. Conf. on Gas Hydrates. Trondheim, Norway, June 13-16. 2005. P. ref. 4006. P.1135-1139.
2. Донцов В.Е., Накоряков В.Е., Чернов А.А. Образование газовых гидратов в газожидкостной смеси за ударной волной// ДАН. 2006. Т. 411. №2. С. 190-193.

© Галимзянов М.Н., 2009 г.

УДК 532.5

**ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С  
ПУЗЫРЬКАМИ, ЧАСТИЧНО СОСТОЯЩИМИ ИЗ  
ИНЕРТНОГО ГАЗА**

Гималтдинов И.К.<sup>1</sup>, Кучер А.М.<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Биишевой, г. Стерлитамак, Россия

<sup>2</sup>Уфимский государственный авиационный технический  
университет, г. Уфа, Россия

В последнее время представляет большой интерес проблема реализации высоких температур в газе, помещенного в жидкости в виде пузырьков. Это связано с анализом возможности реализации высокотемпературных плазмохимических реакций при волновом воздействии на изначально холодные системы. Известны два способа возбуждения волн давления для сильного сжатия пузырьков находящихся в жидкости. Первый способ – воздействие граничным давлением, возникающим за счет разрыва мембраны между камерой высокого давления и рабочим участком ударной трубы. Кроме этого, возможно инициирование волны действием жесткого ударника на границу пузырьковой жидкости. Такие способы пригодны только в том случае, когда в объеме «чистой» жидкости находится одиночный пузырек или одиночный пузырьковый кластер. В случае, когда пузырьки распределены по всему объему жидкости, первоначально инициированная волна давления быстро затухает из-за неравновесного теплообмена и вязкости. Поэтому достаточно сильное сжатие пузырьков может происходить только на участках близких к границам возбуждающим волны, а не во всем объеме.

В данной работе представлены исследования по сжатию пузырьков с инертным газом детонационной волной возникающей и распространяющейся в жидкости за счет содержания пузырьков с горючей смесью. Также взрывчатые пузырьки при этом являются своеобразным распределенным в объеме «прессом» сжимающим инертные пузырьки во всей области.

© Гималтдинов И.К., Кучер А.М., 2009 г.

УДК 534.113

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ И РАЗМЕРОВ ТРЕЩИНЫ В БАЛКЕ ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ**

Ильгамов М.А., Ахтямов А.М.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Для балки Эйлера-Бернулли предлагаются условия сопряжения, моделирующие раскрытую трещину. На основе этой модели решается задача об определении местоположения и размеров трещины в консольной балке. Напряженно-деформированное состояние рассматривается только в рамках технической теории для балки Эйлера-Бернулли без учета сложного деформированного состояния в пределах надреза. Не учитываются также инерционные силы в пределах трещины. Ширина трещины принимается намного меньшей длины балки.

Идентификация местоположения и размеров трещины проводится как в статическом случае по значениям прогибов балки в нескольких точках, так и в динамическом случае по первым собственным частотам изгибных колебаний балки.

Наиболее близкие к рассматриваемой проблеме задачи изучались в работах [1-2]. В отличие от [1], здесь рассмотрен случай раскрытой трещины, а не случай полости. В отличие от [2] задача идентификации трещины решается в случае изгибных, а не продольных колебаний стержня.

### **Литература**

1. Ватульян А.О., Солюянов Н.О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т.49. №6. С.152-158.
2. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып.5./ Под ред. М.А.Ильгамова, С.Ф.Урманчеева, С.В.Хабирова. Уфа: Гилем, 2007. С.201-211.

© Ильгамов М.А., Ахтямов А.М., 2009 г.

УДК 532.546

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МЕЖФАЗНОГО  
ТЕПЛОБМЕНА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ  
ИМПУЛЬСОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ, НАСЫЩЕННЫХ  
ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСЬЮ**

Лукин С.В.

Институт механики УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Одним из наиболее перспективных методов исследования структуры и насыщенности пористых сред является акустическое зондирование. Анализируя отраженные и прошедшие сигналы, характеристики которых определяются структурой скелета и свойствами флюида, можно найти пористость, проницаемость среды, вязкость насыщающего флюида и другие величины. В данной работе проведено исследование распространения слабых возмущений в пористых средах, насыщенных газожидкостной смесью. Получены зависимости для асимптотических значений фазовых скоростей волн. Качественно проанализировано влияние тепловой необратимости газовой фазы на скорость и затухание волн первого и второго типа. На примере кварцевого песка, заполненного водой с пузырьками воздуха получен диапазон чисел Нуссельта для качественного описания распространения слабых акустических импульсов.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Bedford A., Stern M. A model for a wave propagation in gassy sediments // J. Acoust. Soc. America. – 1983. – V.73, №2. – P.409-417.
2. Донцов В.Е., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волны давления в суспензии жидкости с твёрдыми частицами и газовыми пузырьками // ПМТФ – 1995. - Т.36, N 1. - С.32-40.

© Лукин С.В., 2009 г.

УДК 532.546

**ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПОРИСТОСТИ НА ТЕЧЕНИЕ  
ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Лукин С.В.

Институт механики УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

В работе проведено исследование распространения волновых импульсов в пористых средах насыщенных жидкостью. Математическая модель составлялась в рамках общепринятых для таких задач допущений на основе уравнений механики многофазных сред. Межфазная сила взаимодействия представлялась в виде суммы сил: вязкого трения Стокса, присоединённых масс и силы Бассэ. Основное внимание уделялось изучению особенностей распространения волн в среде с переменной пористостью. Проводились исследования идеализированных пористых сред с незначительным влиянием межфазных силы и вязкоупругих эффектов. Установлено, что зависимость начальной пористости от пространственной координаты значительно влияет на характер волнового течения при распространении импульса давления. Показано, что распространение волны в идеализированной насыщенной пористой среде с незначительным влиянием сил межфазного взаимодействия приводит к перетоку жидкости из области течения, охватываемой быстрой волной в область медленной волны. Скорость частиц скелета при этом направлена в сторону распространения волнового импульса.

© Лукин С.В., 2009 г.

УДК 539.3

**ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ  
ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН НА ТУННЕЛЬНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЯХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ  
СЕКТОРНОГО СЕЧЕНИЯ В ИЗОТРОПНОМ МАССИВЕ**

Моисеенко Р.П.

Донецкий национальный университет, г. Донецк, Украина

Представлена численно-аналитическая методика решения задач стационарной дифракции волн плоской деформации на туннельных цилиндрических полостях в упругом изотропном массиве, содержащих отличающиеся по свойствам изотропные упругие включения секторного сечения. На радиальные участки граничных поверхностей секторного выреза нанесены нерастяжимые абсолютно гибкие покрытия, а на поверхности сопряжения включений и основного тела выполняются условия идеального механического контакта. При построении решения вводятся волновые потенциалы для описания полей падающих, рассеянных включением и преломленных во включении волн. Потенциалы для поля рассеянных волн описывают расходящиеся неосимметричные цилиндрические волны с различными окружными волновыми числами и содержат подлежащие определению из граничных условий неизвестные коэффициенты. Для волновых потенциалов, описывающих преломленные во включении волны, структура вводимых потенциалов учитывает геометрию областей поперечных сечений включений. При алгебраизации системы функциональных уравнений, получаемых после подстановки соответствующих представлений в граничные условия, в настоящей работе применяется метод наименьших квадратов.

С использованием данной методики проведены расчеты основных характеристик дифракционных полей для случаев падения волн разной относительной волны, варьировании геометрических и механических параметров задачи.

© Моисеенко Р.П., 2009 г.

УДК 532.5

## **О МЕХАНИЗМЕ ЗАПИРАНИЯ ВОДОУГЛЕВОДОРОДНЫХ ДИСПЕРСИЙ В КАПИЛЛЯРАХ**

Саметов С.П.

Институт механики УНЦ РАН, г. Уфа, Россия

Течение обратных водоуглеводородных эмульсий в микроканалах обнаруживает удивительный для течения жидкости с микрокаплями другой жидкости (воды) эффект динамического запираания. Эффект запираания состоит в том, что при нагнетании обратных водоуглеводородных эмульсий через микроканалы обнаруживается остановка течения несмотря на постоянное действие перепада давления.

Явление запираания было обнаружено при течении обратной высококонцентрированной водонефтяной эмульсии в ячейке Хили-Шоу. Далее эксперименты на капиллярах стали тестовыми ввиду простейшей геометрии самих капилляров. В данной работе изучены особенности течения водоуглеводородных эмульсий в капилляре диаметром 100 мкм, методы обнаружения причин запираания, а также попытка объяснить механизм явления.

Предполагается, что запираание обусловлено структурированием микрокапель у входа в капилляр. В состав всех используемых водоуглеводородных эмульсий входит эмульгатор, состоящий из поверхностно-активных веществ, молекулы которых составляют около 3 нм. Они образуют на поверхности капель воды оболочку, на которой молекулы располагаются перпендикулярно поверхности. По всей видимости, взаимодействие наномасштабных оболочек капель жидкости замедляет проскальзывание, начинается замедление потоков, перепад давления переходит на входную зону капилляра, микрокапли деформируются, их оболочки из сферических становятся подобием многогранников.

В работе приведены экспериментальные попытки подтверждения утверждений гипотезы, а также влияние ультразвукового излучения на запертую систему как метод управления процессами запираания при течении водоуглеводородных дисперсий в микроканалах.

*Работа при выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 08-01-97032\_p\_поволжье\_a*

© Саметов С.П., 2009 г.

УДК 539.3

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В  
АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДАХ С УСЛОЖНЕННОЙ  
ГЕОМЕТРИЕЙ СЕЧЕНИЯ**

Троян Р.Р.

Донецкий национальный университет, г. Донецк, Украина

Задачи об определении структуры полных дисперсионных спектров распространяющихся (однородных) нормальных волн в цилиндрических телах с варьируемой геометрией и физико-механическими свойствами приобретают все большую актуальность и до сегодняшнего дня остаются открытыми по очень многим аспектам. Один из аспектов анализа указанного класса задач заключается в поиске возможностей «управления» структурой дисперсионного спектра варьированием геометрии поперечного сечения волновода.

В контексте этой задачи реализуется теоретическое исследование закономерностей распространения нормальных волн в трансверсально-изотропных составных цилиндрических волноводах круговых сечений с секторными вырезами произвольной угловой меры. Рассмотрены случаи, когда на поверхностях секторного выреза заданы смешанные краевые условия гибких нерастяжимых покрытий, а цилиндрические участки граничных поверхностей свободны от механических напряжений.

Дисперсионные соотношения представлены счетными сериями равенств нулю конечных функциональных определителей с элементами, содержащими бесселевы функции с дробным индексом.

Исследованы и обобщены закономерности взаимосвязи отдельных характеристик дисперсионных спектров с геометрическими характеристиками сечений волноводов.

Осуществлен анализ амплитудных характеристик упругих смещений и осевой компоненты потока мощности нормальных волн в областях сечений во всех рассматриваемых случаях вариации геометрии волновода и типов граничных условий на поверхностях волноводов.

© Троян Р.Р., 2009 г.

## СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

УДК 517.9

### ПРЯМАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

Белишев М.И., Пестов А.Л.

Санкт-Петербургское отделение математического института имени  
В.А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

В работе рассматривается начально-краевая задача для системы

$$\rho u_{tt} - (\Gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, 0 < t < T \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0 \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где  $\rho = \text{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ ,  $A$  и  $B$  суть достаточно гладкие  $2 \times 2$  матрицы-функции переменной  $x$ . Более того  $\rho_i$  и  $\gamma_i$  положительны и удовлетворяют условию разделенности скоростей,  $0 < \rho_1(x)/\gamma_1(x) < \rho_2(x)/\gamma_2(x)$ ,  $x \geq 0$ ;  $f = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$  граничное управление;  $u(x) = \text{col}(u_1(x, t), u_2(x, t))$  – решение (волна). Система соответствует известной модели теории упругости (Балка Тимошенко), описывающей колебания балки, в которой возможны два типа волн (мод), распространяющихся с разными скоростями. Взаимодействие мод приводит к интересным физическим эффектам и, в то же время, осложняет исследование системы.

**Результаты** В работе определяется обобщенное 2-решение задачи (1)-(3) для управлений класса  $2((0, \infty); \mathbb{R}^2)$  и дается точное описание пространств, в которых задача оказывается корректной. Метод исследования вполне традиционный: задача сводится к системе интегральных уравнений вольтерровского типа, затем устанавливается разрешимость последней в подходящем пространстве вектор-функций. Вводится фундаментальное решение задачи и детально исследуются его главные особенности.

**Комментарий** Наши рассуждения подготавливают исследование динамической обратной задачи для системы (1)-(3) методом граничного управления. Известные в ней результаты относятся к случаю постоянных скоростей. Задача о восстановлении переменных коэффициентов в главной части сложнее и требует более основательного изучения свойств решения прямой задачи. В последнем и состоит основная цель данной статьи.

#### Литература

- [1] M.I. Belishev, A.S. Blagovestchenskii, S.A. Ivanov. Erratum to the two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems [Wave motion 25 (1997) 83-107]". *Wave motion*, 26 (1997), 99.
- [2] Л.П. Нижник. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Изд. *Наукова Думка*, Киев, 1991.

© Белишев М.И., Пестов А.Л., 2009 г.

## ДИАГНОСТИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ И АМПЛИТУДАМ ЕЁ КОЛЕБАНИЙ

Гарипова Г.И.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В настоящее время получило широкое развитие направление, возникшее на стыке теории механизмов с акустикой, решающее задачи безразборной диагностики технических конструкций. Целью данной работы является определение обобщённых масс и коэффициентов жёсткости пружин механической системы, разборка которой представляется невозможной по той или иной причине, по значениям собственных частот и амплитуд её колебаний.

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, состоящую из двух тел с массами  $m_j$  ( $j = 1, 2$ ), соединённых пружинами, жесткости которых соответственно равны  $c_j$  ( $j = 1, 2$ ). За обобщённые координаты  $q_1, q_2$  возьмём горизонтальные перемещения  $x_1, x_2$ , грузов, отчитывая эти перемещения от состояния равновесия, в котором пружины не деформированы. Общий вид дифференциальных уравнений движения системы может быть получен по схеме Лагранжа[1]:

$$m_j \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^s c_{jk} q_k = 0, j = 1, 2 \quad (1)$$

Общее решение этой системы имеет вид:

$$q_j = \sum_{i=1}^s A_{ji} \sin(k_i t + b_i), j = 1, 2 \quad (2)$$

Теперь перейдём к постановке обратной задачи. Её можно сформулировать следующим образом: амплитуды колебаний  $A_{ji}$  и спектр собственных частот  $k_i$  нам известен. Требуется найти коэффициенты жёсткости пружин  $c_j$  и массы тел  $m_j$ .

В работе показано, что обратная задача однозначно неразрешима. Однако имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Если одна из неизвестных  $c_1, c_2, m_1, m_2$  будет дана, то остальные однозначно определяются по набору собственных частот и амплитудам колебаний.

Применение метода восстановления продемонстрировано на примере.

### Литература

[1] Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 256

© Гарипова Г.И., 2009 г.

**О ЛУЧЕВОМ МЕТОДЕ ДЛЯ СРЕД БИО**

Заворохин Г.Л.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Работа посвящена исследованию распространения волн в пористой среде Био, которая содержит упругую фазу(скелет) и жидкую фазу. Среда рассматривается трехмерной, безграничной, анизотропной и неоднородной, при этом жидкая фаза является изотропной. На основании известных уравнений среды Био строится функция Лагранжа и используется принцип наименьшего действия Гамильтона. В результате записываются уравнения Эйлера, выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий и система динамических уравнений Био. Векторы смещений в упругой и жидкой фазах представляются в виде формальных асимптотических разложений. Для нахождения членов этого разложения устанавливаются рекуррентные соотношения и определяется главный член пространственно- временного разложения. В случае изотропной неоднородной среды построенное волновое поле разлагается на две продольные волны, соответствующие упругой и жидкой фазам, и на поперечную волну. В этом случае устанавливается аналог закона Рытова, выведенного для упругой среды. В целом построение геометро- оптического разложения для системы динамических уравнений Био проводится по схеме, изложенной, например, в [1]. Основные результаты работы состоят в использовании пространственно- временного лучевого метода для исследования поля в среде Био и в выводе аналога закона Рытова.

**Литература**

[1] В.М. Бабич, В.С. Буддырев, И.А. Молотков. "Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны". ЛГУ, 1985.

© Заворохин Г.Л., 2009 г.

**ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА  
ТРАНСЦИЛЛЯТОРНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА**

Леонтьев А.И., Карагулов Р.Ф., Хисматуллин А.С.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Бишевой, г.Стерлитамак, Россия

Построена теоретическая модель явления трансцилляторного переноса в пузырьковой жидкости, как за счет всплывания, так и за счет воздействия акустического поля и описаны некоторые экспериментальные результаты.

Экспериментальное определение коэффициента трансцилляторного переноса осуществляются путем измерения температуры в газожидкостной среде в сосуде прямоугольной формы, вертикальные размеры которого намного превышают горизонтальные. Поскольку сосуд имеет тепловой контакт с окружающей средой, то важна оценка вклада теплообмена в различные моменты времени, на которой основано введение соответствующих поправок.

Рассмотрено тепловое поле в прямоугольном параллелепипеде. Внутри резервуара в начальный момент находится вода при комнатной температуре, которая постепенно повышается до  $50^{\circ}\text{C}$  (температуры нагревателя).

Температура найдена путем трехмерного решения уравнения температуропроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < l, t > 0,$$

с соответствующими начальными условиями.

Предполагалось, что теплообмен на границах описывается по закону Ньютона.

Построены многомерные графические зависимости температуры от пространственных координат и времени.

© Леонтьев А.И., Карагулов Р.Ф., Хисматуллин А.С., 2009 г.

УДК 539.3

**ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ  
ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН НА ТУННЕЛЬНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЯХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ  
СЕКТОРНОГО СЕЧЕНИЯ В ИЗОТРОПНОМ МАССИВЕ**

Моисеенко Р.П.

Донецкий национальный университет, г. Донецк, Украина

Представлена численно-аналитическая методика решения задач стационарной дифракции волн плоской деформации на туннельных цилиндрических полостях в упругом изотропном массиве, содержащих отличающиеся по свойствам изотропные упругие включения секторного сечения. На радиальные участки граничных поверхностей секторного выреза нанесены нерастяжимые абсолютно гибкие покрытия, а на поверхности сопряжения включений и основного тела выполняются условия идеального механического контакта. При построении решения вводятся волновые потенциалы для описания полей падающих, рассеянных включением и преломленных во включении волн. Потенциалы для поля рассеянных волн описывают расходящиеся неосимметричные цилиндрические волны с различными окружными волновыми числами и содержат подлежащие определению из граничных условий неизвестные коэффициенты. Для волновых потенциалов, описывающих преломленные во включении волны, структура вводимых потенциалов учитывает геометрию областей поперечных сечений включений. При алгебраизации системы функциональных уравнений, получаемых после подстановки соответствующих представлений в граничные условия, в настоящей работе применяется метод наименьших квадратов.

С использованием данной методики проведены расчеты основных характеристик дифракционных полей для случаев падения волн разной относительной волны, варьировании геометрических и механических параметров задачи.

© Моисеенко Р.П., 2009 г.

## ВЛОЖЕНИЯ АФФИННЫХ АЛГЕБР ЛИ

Рунёв Е.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия.

Задача редукции представлений аффинных алгебр Ли представляет огромный интерес в связи с изучением моделей теории поля, обладающих бесконечномерной симметрией, в частности, моделей Швингера, а также конформных теорий поля, описывающих фазовые переходы.

В работе определены абсолютные кратности весов фундаментальных представлений для скрученных аффинных алгебр Ли на примере алгебры  $D_{3^2}$ .

Основным инструментом исследования является рекуррентное соотношение [1], которое позволяет явно вычислить кратности весов, полученное с помощью алгебры формальных характеров. Из двух типов вложений в работе рассматривается более сложный тип вложения – специальное.

Приводятся результаты вычислений кратностей весов с помощью рекуррентной процедуры, и формулируется алгоритм построения. Осуждается роль струнных функций в построении кратностей весов неприводимых представлений, роль главной камеры Вейля в этих построениях, приведены результаты для представлений с уровнем 2, где построение струнных функций становится затруднительным.

### Литература

1. V. D. Lyakhovsky, S. Yu. Melnikov, Recursion relation and branching rules for simple Lie algebras.//arXiv: q-alg/9505006/

© Рунёв Е.В., 2009 г.

УДК 532.546

**ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В  
УСТАНОВКЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА  
ТРАНСЦИЛЛЯТОРНОГО ПЕРЕНОСА**

Уразаева Р.Р., Ханнанов Х.Я., Хисматуллин А.С.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Бишиевой, г. Стерлитамак, Россия

Для измерения коэффициента трансцилляторного переноса в установке УИКТП, сконструированной в институте математики и естественных наук, использованы измерения температурного поля в сосуде в форме параллелепипеда.

Двумерная модель теплового поля в установке для измерения коэффициента трансцилляторного переноса сводится к задаче для определения температурного поля в газожидкостной среде в сосуде прямоугольной формы, вертикальные размеры которого намного превышают горизонтальные. Температурное поле описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad -a < x < a, \quad -b < y < b, \quad t > 0.$$

Считаем, что теплообмен на границах описывается по закону Ньютона, тогда граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} + h(T|_{x=a} - T_0) &= 0, & \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-a} - h(T|_{x=-a} - T_0) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=b} + h(T|_{y=b} - T_0) &= 0, & \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-b} - h(T|_{y=-b} - T_0) &= 0. \end{aligned}$$

Найдено аналитическое решение данной задачи и составлена программа для определения коэффициентов теплопроводности, которая реализует алгоритм решения обратной по отношению к рассмотренной задаче.

© Уразаева Р.Р., Ханнанов Х.Я., Хисматуллин А.С., 2009 г.

## **СЕКЦИЯ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»**

УДК 519.6

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В АЛЮМИНИЕВОМ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРЕ**

Закиева Г.Н.

Нефтекамский филиал БашГУ, г.Нефтекамск, Россия

Исследование электрического поля в системах со сложными электрохимическими и геометрическими параметрами имеет важное научно - техническое значение для оптимизации процессов существующих производств электролиза. Проектирование электролизеров для производства цветных металлов связаны с разработкой математических моделей и программ, позволяющих проводить вычислительные эксперименты.

В работе рассматриваются двумерные и трехмерные модели электрических полей в электролизерах в форме цилиндра и параллелепипеда, с составными анодами сложной конфигурации. Применение разностных методов в задачах с криволинейными границами трудноосуществимо, поэтому для сведения краевой задачи к эквивалентным интегральным уравнениям используется метод граничных элементов на основе интегральной формулы Грина.

Для решения задачи токораспределения апробирован алгоритм, основанный на последовательном уточнении решений граничных интегральных уравнений для потенциала электрического поля в непересекающихся подобластях.

### **Литература**

- [1] Болотнов А. М. Методы граничных элементов в расчетах электрических полей электрохимических систем. – Уфа: БашГУ, 2002. – 143 с.
- [2] Болотнов А. М., Зайков Ю. П., Закиева Г. Н., Ковров В.А., Храмов А.П., Щербинин С.А. Математическое моделирование и оптимизация токораспределения в цилиндрическом электролизере с многоэлементным анодом. – Вестник Башкирского государственного университета, Уфа, 2003. – № 3-4. - С. 3-7.

© Закиева Г.Н., 2009 г.

## КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА С ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ ВТОРЫХ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Бадиев М.К.

Институт физики Дагестанского научного центра РАН, г. Махачкала,  
Россия.

Исследование фазовых переходов (ФП) и критических явлений (КЯ) в фрустрированных спиновых системах является одной из актуальных задач статистической физики. Это обусловлено тем, что результаты, полученные, при исследовании критических свойств некоторых фрустрированных спиновых систем, показывают, что многие из этих результатов выходят далеко за рамки современной теории ФП и КЯ [1-3].

В данной работе нами предпринята попытка на основе специального репличного алгоритма метода Монте-Карло определить значения критических параметров трехмерной (3D) фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга на треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей.

Гамильтониан данной модели может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) - J' \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{S}_i \vec{S}_j)$$

где  $\vec{S}_i$  – трехкомпонентный единичный вектор  $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ ,  $J < 0$  и

$J' < 0$  – константа антиферромагнитного обменного взаимодействия.

$J'/J = k = 0.0 \div 0.1$  – величина взаимодействия вторых ближайших соседей. Для определения критической температуры  $T_N$ , нами использовался метод кумулянтов Биндера  $U_L$  четвертого порядка [4]. Для расчета статических киральных и магнитных критических индексов теплоемкости  $a$ , восприимчивости  $g$ ,  $g_k$  намагниченности  $b$ ,  $b_k$  и радиуса корреляции  $\nu$ ,  $\nu_k$  использовались соотношения теории конечно-размерного скейлинга [5].

1. Вик. С. Доценко, УФН **165**, 481 (1995).
2. А.К. Муртазаев, УФН **176**, 1119 (2006).
3. И.К. Камиллов, А.К. Муртазаев, Х.К. Алиев, УФН **169**, 773 (1999).
4. К. Binder, Z. Phys. B **43**, 119 (1981).
5. А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев. ЖЭТФ. – 2007. Т. **132**, №5, – С.1152-1159.

© Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Бадиев М.К., 2009 г.

УДК 519.67

## ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Шакуров И.Р.

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М.Акмиллы, г.Уфа, Россия

Первые интегралы широко применяются в моделях химической кинетики. В отсутствии общих методов нахождения первых интегралов для систем дифференциальных уравнений, вызывает интерес рассмотрение частных случаев для определенного рода систем. В данной работе представлен алгоритм нахождения первых интегралов для систем ДУ с полиномиальными правыми частями.

Рассмотрим систему ОДУ с полиномиальными правыми частями вида

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{p_i} a_{m_{1k} \dots m_{nk}}^i x_1^{m_{1k}^i} \dots x_n^{m_{nk}^i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

где  $p_i$  – число слагаемых в  $i$ -м уравнении;  $a_{m_{1k} \dots m_{nk}}^i$  – известные буквенные коэффициенты;  $M_k^i = m_{1k}^i \dots m_{nk}^i$  – мультииндекс.

Будем искать полиномиальный первый интеграл в виде

$$W = \sum_{s=1}^q b_{m_{1s} \dots m_{ns}} x_1^{m_{1s}} \dots x_n^{m_{ns}} \quad (2)$$

коэффициенты  $b_{m_{1s} \dots m_{ns}}$  – неизвестные коэффициенты.

Для нахождения первых интегралов будем использовать необходимое и достаточное условие существования первых интегралов [1]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i = 0. \quad (3)$$

Использование условия (3) позволяет найти первый интеграл (2) для произвольной системы вида (1).

### Литература

[1] Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений – Минск: Наука и техника, 1979. – 570

© Шакуров И.Р., 2009 г.

## СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАТИСТИКА»

УДК 537.8

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ ПАРАФИНОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ В ТРУБЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Абдуллина В.А., Фатыхов М.А.

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М. Акмуллы, г. Уфа, Россия

В последние годы в различные отрасли народного хозяйства внедряются технологии, связанные с интенсификацией физических и физико-химических процессов с использованием энергии высокочастотных и сверхвысокочастотных электромагнитных полей. Однако при добыче, транспортировке и переработке нефти и газа это направление не развито. Между тем, существует острая необходимость внедрения электромагнитных полей с целью ликвидации различных отложений в скважинах, трубах, узлах нефтехимического оборудования. Причиной такой задержки является недостаточное физическое обоснование предложенных технологий. В связи с этим тема данной работы, связанная с ликвидацией асфальто-смолистых отложений в трубах при объемном нагреве высокочастотным электромагнитным излучением, актуальна.

В данной работе изучены причины образования пробок в подземном и наземном оборудовании. Освоена теория диэлектрического нагрева сред. Выписана система уравнений, необходимая для изучения термо- и гидродинамических особенностей воздействия на пробки. Показана необходимость воздействия движущимся источником тепла, создаваемым в электромагнитном поле. Получено математическое выражение, описывающее объемные источники тепла. Исследованы закономерности изменения температуры в системе труба-пробка-окружающая среда.

Теоретически изучено распределение объемных источников тепла в трубе, созданные основным типом электромагнитной волны. Развита теория теплопроводности многофазных сред в высокочастотном электромагнитном поле. Проведены расчетные исследования температуры в трубе, заполненной диэлектрическим отложением

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Балакирев, Г.В. Сотников, Ю.В. Ткач, Т.Ю. Яценко Разрушение асфальто-парафиновых отложений в нефтяных трубопроводах движущимся источником высокочастотного электромагнитного излучения. - ЖТФ, 2001, Т. 71, вып.9. – С.89- 99.

© Абдуллина В.А., Фатыхов М.А., 2009 г.

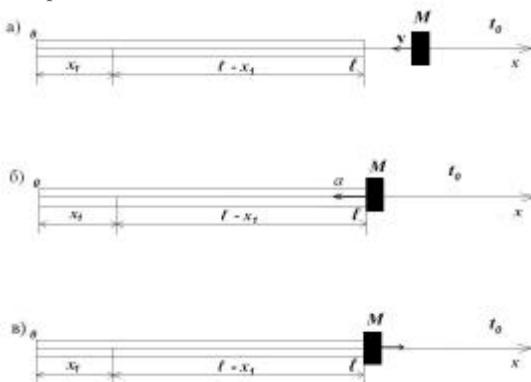
## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОДАТЧИКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ ГРУЗА

Ахтямов А.М., Муртазина Р.Ф.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Рассматриваемая задача актуальна в связи с проблемой определения места и времени разрыва трубопровода, находящегося на дне моря. Визуально определить место прорыва трубопровода по пятну нефти, всплывшей на поверхность, не представляется возможным. Оно может быть определено только с помощью определенных датчиков, встроенных в трубопровод изначально. Спрашивается, можно ли по показаниям тензодатчиков определить место разрыва трубопровода. Сначала надо рассмотреть ее упрощенные математические модели: без учета движения жидкости, без учета нелинейности колебаний и без учета некоторых других факторов.

Перед нами была поставлена следующая задача. Рассматривается цилиндрический стержень, один конец которого ( $x = 0$ ) закреплен, а другой ( $x = l$ ) свободен (рис.). В какой-то момент времени  $t_0$  свободный конец подвергается удару груза массы  $M$ , движущегося вдоль оси со скоростью  $v$ , после чего груз отлетает. Требуется определить момент времени  $t_0$  удара, длину стержня  $l$ , массу груза  $M$  и скорость  $v$  по данным датчика, который снимает значения производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  сечения стержня с абсциссой  $x_1$  в различные моменты времени  $t$ . Задача решается теоретически с помощью уравнения продольных колебаний однородного стержня.



© Ахтямов А.М., Муртазина Р.Ф., 2009 г.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО  
СЕЙСМИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

Байшугурова Р.Р.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Бишевой, г. Стерлитамак, Россия

Пусть в кусочно-однородной цилиндрической среде  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ , в области  $\Omega_{i0}$  в точке  $T(x_0, y_0, z_0)$  находится точечный источник поля интенсивности  $I(t)$ , и математическая модель распределения поля  $U(P, t)$  в точке  $P(x, y, z)$  в момент времени  $t$  данной среды описывается начально-краевой задачей для уравнения гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \Delta U_{i0}(P, t) - \frac{c_{i0}^2}{S_{i0}} \cdot \frac{\partial U_{i0}^2(P, t)}{\partial t^2} &= -\frac{I(t)}{S_{i0}} d(P-T), \quad c_{i0} \neq 0; \\ \Delta U_i(P, t) - \frac{c_i^2}{S_i} \frac{\partial^2 U_i(P, t)}{\partial t^2} &= 0, \quad c_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad i \neq i_0; \\ U_i(P, t) - U_j(P, t) \Big|_{g_i, \Gamma_{g_j}} &= 0, \quad S_i \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial n} - S_j \frac{\partial U_j(P, t)}{\partial n} \Big|_{g_i, \Gamma_{g_j}} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ & j \in J_i; \\ a_i \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial n} - b_i U_i(P, t) \Big|_{\Gamma_{e_i}} &= y_i(P, t), \quad |a_i| + |b_i| \neq 0, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_k, \quad k \leq N; \\ U_m(P, t) \rightarrow 0, \quad P \rightarrow \infty, \quad m &= m_1, m_2, \dots, m_n, \quad n \leq N; \\ U(P, 0) = j(P), \quad \frac{\partial U(P, 0)}{\partial t} &= e(P). \end{aligned}$$

Здесь  $d(P-T)$  - дельта функция Дирака;  $I(t)$  - интенсивность во времени;  $S$ ,  $c$  - действительные коэффициенты, описывающие геофизические свойства среды.

Сведем задачу с помощью преобразования Лапласа  $U^w(P) = \int_0^\infty U(P, t) e^{-wt} dt$  формулой обращения

$$U(P, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w_0 - i\infty}^{w_0 + i\infty} U^w(P) e^{wt} dw, \quad Re w = w_0 > 0, \quad \text{к задаче эллиптического типа}$$

с операторами Гельмгольца в подобластях  $\Omega_i$ :

$$H[U_i(P)] \equiv \Delta U_i(P) - \frac{a_i^2}{S_i} U_i(P) = \Delta U_i(P) - k_i U_i(P), \quad k_i = \frac{a_i^2}{S_i} \geq 0. \quad \text{Метод решения}$$

задачи эллиптического типа рассмотрен в [1].

[1]. Кризский В.Н. Метод решения начальных граничных задач математической физики в кусочно-однородных средах // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы. Уфа: Гилем, 2008. - Т.3. - 273 с. - с. 219 - 225.

© Байшугурова Р.Р., 2009 г.

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЦ  
СЛАБОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ТРЕХМЕРНЫХ  
ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ДИСКРЕТНОЙ  
ОПТИМИЗАЦИИ**

**(на примере геофизических исследований скважин)**

Верхотурова О.М.

ООО «РН-УфаНИПИнефть», г. Уфа, Россия

Задача выделения объектов встречается в различных областях человеческой деятельности, в том числе в космических исследованиях, в нефтяной промышленности, в медицине и т.д. Особый интерес представляет задача идентификации границ слабоструктурированных естественных трехмерных объектов, которая является весьма трудоемкой, сложной и неоднозначной. В статье рассматривается подход к решению этой задачи в заданной области  $O \subset R^3$ . Критерием выделения объектов в исследуемых узлах служит принцип подобия сегментов кривых, характеризующих каждый опорный и исследуемый узел.

Для решения задачи применяется несколько подходов. Один из них базируется на наиболее распространенном метаэвристическом методе "генетический алгоритм", который адаптируется для решения поставленной задачи. Рассмотрены различные варианты параметров алгоритма, в том числе и различные варианты операторов кроссовера и мутации. Кроме того, для решения задачи используется метод, заимствованный из области распознавания речевых сигналов, - модификация метода динамического искажения времени (*DDTW – Derivative Dynamic Time Warping*) [1].

Описывается структура разработанного программного продукта, который был реализован в среде *Matlab*.

Предлагаемые методы и алгоритмы адаптируются для решения конкретной задачи – задачи нахождения границ продуктивных пластов на скважинах месторождения по данным геофизических исследований. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что применение разработанной системы позволяет улучшить решение, получаемое экспертами (геологами), в среднем на 5-15% в зависимости от месторождения и выделяемого пласта при этом время работы значительно сокращается.

[1] Keogh E., Pazzani M. Derivative dynamic time warping. In First SIAM International Conference on Data Mining, - Chicago, IL. - 2001.

© Верхотурова О.М., 2009 г.

УДК 681.3

## РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОИСКА ПОХОЖИХ ТЕКСТОВЫХ ДОКУМЕНТОВ

Вильданов А.Н.

Нефтекамский филиал БашГУ, г. Нефтекамск, Россия

В работе рассматривается задача создания приложения по поиску похожих электронных документов. Такая задача, возникает, например, при проверке студенческих работ на предмет самостоятельности проведенного исследования. Зачастую студент берет готовую работу у старших курсов, меняет в ней только фамилию и сдает под своим именем. Данная программа позволила бы выявить такой плагиат. При этом предполагается, что в ВУЗе хранятся электронные варианты курсовых, дипломных работ и т.д.

В результате исследования разработан программный продукт по поиску похожих документов в среде программирования Delphi. Она решает следующие задачи:

- 1) получение текста из данного Word файла;
- 2) поиск в указанной папке Word файлов;
- 3) сравнение текста документа с документами в указанной папке;
- 4) возможность индексации файлов в указанной папке для обеспечения более быстрого поиска;
- 5) сохранение результатов поиска.

Приложение Microsoft Word является сервером автоматизации (com-объектом). Это свойство использовалось для решения первой задачи. Для поиска файлов использовались стандартные функции Delphi FindFirst, FindNext, и FindClose. Каждому тексту сопоставлялись различные статистические показатели, которые потом использовались при сравнении текстов. Их близость означала высокую вероятность совпадения текстов.

Программа позволяет индексировать файлы в указанной папке путем создания в ней файла indexfile.dat, содержащего предварительную информацию о файлах указанной папке. При проверке файлов в данной папке сначала проверяется индексный файл. Такая технология позволяет значительно ускорить поиск документов.

Сам поиск организован в виде самостоятельного потока программы с использованием класса TThread. Поддерживаются форматы doc, rtf, txt, html, htm, docx.

© Вильданов А.Н., 2009 г.

**МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ  
КАТАЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В УСЛОВИЯХ  
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Воронов А.В., Мустафина С.А.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Биишевой, г. Стерлитамак, Россия

Во многих случаях эффективность технических систем (ТС) не может быть оценена с помощью только одного критерия, и возникает необходимость использования нескольких конфликтующих критериев. Это могут быть экономический и экологические критерии, критерии оценки работы системы управления и т.д.

Многокритериальная оптимизация представляет собой минимизацию некоторого вектора целей  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ , на который могут быть наложены дополнительные ограничения или предельные значения:

$$\min_{x \in D_x} (f_1(x), \dots, f_p(x)), \quad (1)$$

где  $D_x = \{x : g(x) \leq 0\}$  - допустимая область задачи (1), а вектор-функция ограничений  $g(x)$  имеет размерность  $m$ . Таким образом, в задаче имеется  $p$  целевых функций.

Отметим, что поскольку  $f(x)$  является вектором, то любые компоненты  $f(x)$  являясь конкурирующими и отсутствует некоторое единое решение поставленной задачи. Взамен этого, для описания характеристик целей вводится концепция множества точек, не улучшаемых решений (так называемая оптимальность по Парето). Не ухудшаемое решение есть такое решение, в котором улучшение в одной из целей приводит к некому ослаблению другой. Множество таких решений образует множество Парето (МП).

Предположим, что нашли МП. Лицо, принимающее решение, может использовать эту информацию следующими двумя путями:

- а) используя инженерные соображения, он может выбрать одну из точек МП как окончательное решение;
- б) формируя новый критерий  $F(f_1, \dots, f_p)$ , который учитывает относительную важность индивидуальных критериев, он может найти на МП наилучшую точку с точки зрения этого критерия.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИТ-МОДЕЛЕЙ В ОЦЕНКЕ ТИПА ДЕФЕКТА ТРУБ КОМПРЕССОРНОЙ СТАНЦИИ

Гареева И.Ю., Лакман И.А.

Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г.Уфа, Россия

Одной из задач, позволяющей оптимизировать время ремонтных работ на компрессорных станциях, является задача прогнозирования типа и количества дефектов труб и элементов трубопроводов на конкретных участках компрессорных станций и шлейфов. Возможность решения подобной задачи заключается в построении логит-модели множественного выбора с неупорядоченными альтернативами, позволяющей определять вероятности появления того или иного дефекта. Зависимой переменной в подобной модели является переменная, определяющая тип дефекта:

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если дефект - растрескивание;} \\ 1, & \text{если дефект - коррозия;} \\ 2, & \text{если дефект - технологический.} \end{cases}$$

Функция полезности выбора между  $j$  альтернативами имеет вид:

$$u_{ij} = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + e \quad (1)$$

Здесь в качестве независимых факторов рассматриваются  $x_1$  – внутреннее давление на стенки трубы (Па);  $x_2$  – кислотность почвы (РН);  $x_3$  – предел прочности материалов (Па);  $x_4$  – максимальный перепад температуры воздуха (°С);  $x_5$  – относительная влажность (%);  $x_5$  – фиктивная переменная, отвечающая за тип изоляции:

$$x_5 = \begin{cases} 0, & \text{если тип изоляции - полипропиленовый;} \\ 1, & \text{если тип изоляции - компаунд.} \end{cases}$$

Тогда логит-модель выбора дефекта имеет вид:

$$P(y_i = j) = L(u_{ij}) \quad (2)$$

где  $L(y) = \frac{e^y}{1 + e^y}$  – логистическое распределение, а остаточная

компонента  $\varepsilon$  распределена по закону Вейбула. Оценку модели (2) проводят методом максимального правдоподобия.

Предложенная модель позволяет повысить эффективность принятия решений о ремонте того или иного участка компрессорной станции, и как следствие снизить затраты, связанные с предварительной диагностикой.

© Гареева И.Ю., Лакман И.А., 2009 г.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ЗА ЗАДАННОЕ ВРЕМЯ

Давлетшин Р.С.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
г.Стерлитамак, Россия

Физические процессы, имеющие место в технике, как правило управляемы, т.е. могут осуществляться различными способами в зависимости от воли человека. В связи с этим возникает вопрос о нахождении наилучшего в том или другом смысле или, как говорят, оптимального управления процессом. Речь может идти, например, об оптимальности в смысле быстрейшего, т.е. о достижении цели процесса за кратчайшее время, о достижении этой цели с минимальной затратой энергии и т.п. Математически сформулированные, эти вопросы являются задачами вариационного исчисления, которое и обязано им своим возникновением. В классическом вариационном исчислении нет решения целого ряда вариационных задач, важных для современной техники. Решение значительного числа вариационных задач неклассического типа в существенных чертах объединяется одним общим математическим приемом, который называется принципом максимума Понтрягина. Все основные необходимые условия классического вариационного исчисления с обыкновенными производными следуют из принципа максимума [1].

Даны модель объекта управления  $\dot{x}_1(t) = u$ ,  $\dot{x}_2(t) = x_1(t)$ ,  $t \in [0; 2,5]$ ,  $|u| \leq 1$  с начальными условиями  $x_1(0) = -1$ ,  $x_2(0) = 0$  и функционал  $I = x_1^2(2,5) + x_2^2(2,5) \rightarrow \min$ . Требуется найти оптимальное управление  $u^*(\cdot)$  и соответствующую ему траекторию  $x^*(\cdot)$  (задача Майера).

Решая данную задачу с помощью принципа максимума Понтрягина, возникает двухточечная краевая задача на основе так называемых условий трансверсальности, которая не всегда имеет единственное решение.

Оказывается, что исходная задача имеет бесконечное множество оптимальных решений.

### Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976, 392 с.

© Давлетшин Р.С., 2009 г.

## РЕШЕНИЕ (2+1)D УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА В ПРИСУТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Екомасов А.Е., Муртазин Р.Р.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Уравнение Синус-Гордона (СГ) описывает многие явления в различных областях физики. Например, динамику доменных границ в магнетиках, распространение дислокаций по кристаллу и магнитного потока в джозефсоновских контактах [1]. В таких приложениях задача о решении уравнения СГ в присутствии локальных неоднородностей возникает вполне естественно. При этом могут быть адекватны физическому смыслу как одномерные, так и многомерные уравнения. Поведение солитонов уравнения СГ в присутствии различного рода неоднородностей изучается достаточно давно и плодотворно. Показана в одномерном случае возможность зарождения локализованных примесных мод колебаний [1] и различного вида солитонов [2].

В работе рассматривается модифицированное уравнение СГ вида:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\tilde{K}(x, y)}{2} \sin 2q = 0, \quad (1)$$

где  $\tilde{K}(x, y)$  – функция, определяющая распределение локальной неоднородности.

Уравнение (1) решается численно, методом конечных разностей [3]. Использована явная схема решения уравнения. Изучена динамика прохождения кинком области локальной неоднородности. Было обнаружено, что в некоторых случаях в этой области возникают локализованные решения типа: пульсона, двумерного солитона и пульсона переходящего в двумерный солитон.

### Литература

1. О.М.Браун, Ю.С.Кившарь. “Модель Френкеля-Контровой: Концепции, методы, приложения.” Физматлит, М.(2008). 519 с.
2. Екомасов Е.Г., Азаматов Ш.А., Муртазин Р.Р. ФММ. 105, С. 341(2008).
3. Самарский А.А. «Введение в численные методы», М.:Наука (1987), 288 с.

© Екомасов А.Е., Муртазин Р.Р. 2009 г.

## О ВЫЧИСЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Левин С.В.

Стерлитамакский филиал академии наук РБ, Стерлитамак, Россия

Пусть в кусочно-однородной среде  $\Omega$ , состоящей из областей  $\Omega_i$  с удельными электропроводностями  $\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , в среде  $\Omega_{i_0}$  в точке  $A(x_0, y_0, z_0)$  находится точечный источник тепла, изменяющий свою интенсивность во времени по закону  $I(t)$ . Математическая модель распределения поля  $U(P, t)$  в точке  $P(x, y, z)$  в момент времени  $t$  данной среды описывается начально-краевой задачей для уравнений параболического типа:

$$\Delta U_{i_0}(P, t) - \frac{\alpha_{i_0}^2}{\sigma_{i_0}} U_{i_0}(P, t) - \frac{b_{i_0}^2}{\sigma_{i_0}} \frac{\partial U_{i_0}(P, t)}{\partial t} = -\frac{I(t)}{\sigma_{i_0}} \delta(P - A), b_{i_0} \neq 0;$$

$$\Delta U_i(P, t) - \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i} U_i(P, t) - \frac{b_i^2}{\sigma_i} \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial t} = 0, b_{i_0} \neq 0, i = \overline{1, N}, i \neq i_0;$$

$$U_i(P, t) - U_j(P, t)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, \sigma_i \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial n} - \sigma_j \frac{\partial U_j(P, t)}{\partial n} |_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0,$$

$$i = \overline{1, N}, j \in J_i;$$

$$\alpha_i \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial n} - \beta_i U_i(P, t)|_{\Gamma_i} = \psi_i(P, t), |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = i_1, i_2, \dots, i_k, k \leq N;$$

$$U_{m_i}(P, t) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m_i = m_1, m_2, \dots, m_n, n \leq N; \quad U(P, 0) = \varphi(P),$$

где  $\gamma_i$ - участки внутренней границы области  $\Omega$ ,  $\Gamma_i$ - участки внешней границы  $\Omega$ ,  $J_i$ - множество индексов областей, примыкающих к  $\Omega_i$ .

Сведём задачу с помощью преобразования Лапласа  $U^\omega(P) = \int_0^{i\infty} U(P, t) e^{-\omega t} dt$ , с формулой обращения

$$U(P, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_0 + i\infty}^{\omega_0 + i\infty} U^\omega(P) e^{\omega t} d\omega, \operatorname{Re} \omega = \omega_0 > 0,$$

к задаче эллиптического типа с операторами Гельмгольца  $H[U_i^\omega(P)] \equiv \Delta U_i^\omega(P) - \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i} U_i^\omega(P) = \Delta U_i^\omega(P) - k_i U_i^\omega(P), k_i = \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i} \geq 0$

в областях  $\Omega_i$ . Метод решения задачи эллиптического типа описан в [1].

[1]: Кризский В.Н. Метод решения начально-граничных задач математической физики в кусочно-однородных средах.// Дифференциальные уравнения и смежные выражения. – Уфа: Гилем, 2008. – т.3. – 273с. – с.219-225.

© Левин С.В., 2009 г.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ПОЛИМЕРИЗАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ**

Мифтахов Э.Н., Мустафина С.А.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Бишевой, г.Стерлитамак, Россия

Математическое моделирование полимеризационных процессов позволяет решить задачи оптимизации производства и предсказания влияния изменения рабочих условий (в том числе получение обширной информации о поведении всей системы).

Кинетический метод моделирования полимеризационных процессов заключается в составлении и численном решении кинетических уравнений для концентрации всех типов макромолекул, радикалов и других активных центров, участвующих в процессе полимеризации.

При выводе уравнений для кинетических модулей происходит описание блок-схемы механизма. Составляя матрицу стехиометрических коэффициентов и умножая ее на вектор-столбец скоростей реакции, получим систему дифференциальных уравнений. Если ограничить максимальную длину цепи  $x$  величиной  $R$ , то общее число уравнений в системе составит  $2R$ . Обычно значение  $R$  колеблется от  $10^3$  до  $10^5$ . Тогда получаем, что процесс описывается практически бесконечной системой нелинейных дифференциальных уравнений. Для упрощения системы ДУ используется метод моментов[1]. Основной целью решения системы является получение распределения концентраций реакционных компонентов и, соответственно, построение кривой ММР. Анализируя соотношения молекулярных масс можно получить данные о механизме полимеризации и его особенностях. При переходе к непрерывным промышленным реакторным системам необходимо учитывать влияние гидродинамического и энергетического уровня. При выводе уравнений для гидродинамических модулей, надо выяснить к какой группе относится реакторы (идеального вытеснения, идеального перемешивания или промежуточного типа). Модели же энергетического уровня будут различаться в зависимости от способа организации теплоотвода.

### **Литература**

[1] Подвальный С.Л. Моделирование промышленных процессов полимеризации. М.: Химия, 1979. 256 с.ил.

© Мифтахов Э.Н., Мустафина С.А., 2009 г.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ ДЛЯ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА

Морозкин Ю.Н.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Текущее состояние финансового рынка заставляет быстро и адекватно реагировать на его изменения, поэтому роль управления инвестициями резко возрастает и заключается в оптимизации структуры портфеля ценных бумаг. Этой цели служат математические модели выбора оптимального портфеля ценных бумаг. В данной работе построена модель определения эффективного множества оптимальных портфелей, в состав которых входят паевые инвестиционные фонды.

Для формирования оптимального портфеля и выбора инструментов, способных минимизировать риск при достаточном уровне дохода, определим дисперсию, стандартное отклонение, а так же ковариацию и корреляцию [1]:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}, \quad (1)$$

где  $s^2$  - дисперсия;  $\bar{r}$  - средняя доходность;  $n$  - число периодов.

$$r = Cov(X, Y) / (s_X \cdot s_Y). \quad (2)$$

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum (r_{Xc} - r_{Xc}) \cdot (r_{Yc} - r_{Yc})}{n - 1}, \quad (3)$$

где  $r_X$  и  $r_Y$  - доходности активов X и Y;  $r_{Xc}$  и  $r_{Yc}$  - ожидаемые доходности активов X и Y;  $n$  - число наблюдений.

Для нахождения оптимального портфеля необходимо определить допустимое множество соотношений "риск-доход" для инвестора, которое достигается путем построения минимально-дисперсионной границы портфелей, т.е. границы, на которой лежат портфели с минимальным риском при заданной доходности. Полученное эффективное множество позволяет определить оптимальный портфель для инвесторов с различным отношением к риску.

Применение метода продемонстрировано на примере. Необходимо также отметить, что в расчет оптимального портфеля включены ПИФ что позволило значительно снизить риски.

### Литература

[1] Боровикова В.А. Рынок ценных бумаг. 2-е издание. – СПб.: Питер, 2008. – 400с.

© Морозкин Ю.Н., 2009 г.

УДК 538.9

## ПОСТРОЕНИЕ И РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ И ПРОВОДИМОСТИ

Нагаев Ф.А.

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

В данной работе рассматривается процесс создания модели теплообменника с использованием мощной интерактивной среды для моделирования физических объектов, явлений и процессов Comsol Multiphysics.

Управляющим уравнением для этой модели является уравнение высокой температуры для проводящей и конвективной теплопередачи

$$\nabla(-k\nabla T) = Q - rC_p u \nabla T$$

где  $C_p$  – теплоемкость (J / (kg·K)),  $T$  - температура (K),  $k$  - теплопроводность (W / (m·K)),  $\rho$  - плотность (кг/м<sup>3</sup>),  $u$  – вектор скорости (м/с), и  $Q$  - характеристики выброса.

В твердой части теплообменника скоростной вектор,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  имеет нулевое значение во всех направлениях. В каналах скоростная область определена по аналитическому выражению, которое соответствует потоку для круглого поперечного сечения для горячих и холодных потоков, скоростные компоненты  $x$  и  $z$  устанавливаются равными нулю.

Во входных отверстиях определяются постоянные температуры для холодных и горячих потоков,  $T_{\text{cold}}$  и  $T_{\text{hot}}$ , соответственно. При выходах конвекция преобладает над теплопроводностью, таким образом применяется граничное условие потока:

$$-k\nabla T n = 0$$

### ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика.-3-е изд., перераб.-М.: Наука.

© Нагаев Ф.А., 2009 г.

УДК 519.2

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ (НА ПРИМЕРЕ ЗДАНИЯ НФ БАШГУ)**

Пыжьянов А.В., Шагапов И.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Нефтекамский филиал г.Нефтекамск, Россия

Работа посвящена компьютерному 3D-моделированию. В качестве объекта моделирования было выбрано здание второго корпуса НФ БашГУ, мысли о «воссоздании» которого витали давно. Изначальные идеи базировались на создании модели в 3dsMax. Но из-за большой «требовательности» этой программы и отсутствии прямой возможности «пройтись» по готовому объекту, выбор пал на программу «Unreal Level Editor».

Сначала была проведена работа по «изучению объекта», в частности, «сняты» все метрические данные, составлена подробная карта, разработана текстура и т.д. Затем на основе собранных данных поэтапно был построен сам объект.

В модели реализованы все основные составные части здания, включая текстуру. Пользователь данной модели «видит» с точки зрения «3D-наблюдателя», причем этот наблюдатель подчиняется основным физическим законам (гравитации, инерции и т.д.).



Реализована возможность «прогулки» по всем этажам, аудиториям данного здания. Текстуры объектов получились достаточно реалистичными и узнаваемыми.

© Пыжьянов А.В., Шагапов И.А., 2009 г.

## ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАРШРУТОВ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Сатышев И.С.

Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета,  
г. Нефтекамск, Россия

Система реакций, состоящую из  $m$  актов, в которой участвуют  $n$  веществ, записывают в общем виде:  $\sum_{k=1}^n a_{ik} a_k \rightarrow \sum_{k=1}^n b_{ik} a_k, 1 \leq i \leq m$ ,  $a_{ik}, b_{ik}$  - целые неотрицательные числа (стехиометрические коэффициенты).

Если  $u_k$  - концентрация вещества  $a_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), то закон сохранения во времени функций  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  записывают в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m g_{ik} w_i, g_{ik} = b_{ik} - a_{ik}, \text{ где } w_i \text{ скорость } i\text{-й реакции.}$$

Решение задач химической кинетики приобретает большую наглядность, если изобразить механизм реакции графически.

Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  - вещества, участвующие в реакции,  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  - сами реакции. Элементы множеств  $A$  и  $B$  изображают точками на плоскости и называют вершинами графа. Факт, что  $a_{ik}$  единиц (молекул, атомов) вещества  $a_k$  вступает в реакцию  $b_i$  означает, что  $a_{ik}$  - стрелки, идущие от вершины  $a_k$  к  $b_i$ , аналогично, с помощью  $b_{ik}$  обозначают стрелки, идущие от вершины  $b_i$  к вершине  $a_k$ . В результате получаем конечный ориентированный двудольный граф.

Анализируя граф реакции, можно выявить взаимоднозначное соответствие между простым циклическим подграфом и маршрутом реакции.

Графические правила нахождения маршрутов и итоговых уравнений системы реакций:

1. Упрощение графа Вольперта;
2. Нахождение простых циклических подграфов, образованных  $B$ -вершинами;
3. Проверка балансовых соотношений уравнений, соответствующих найденным подграфам;
4. Определение маршрутов.

© Сатышев И.С., 2009 г.

## КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТАЛЛОКОМПЛЕКСНОГО КАТАЛИЗА

Тихонова М.В.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Использование металлокомплексного катализа в тонком органическом синтезе представляет собой "горячую" область химии. Уже достигнуты грандиозные успехи, одним из которых является то, что катализ комплексами металлов позволяет ускорять медленно идущие реакции.

Существенным инструментом в исследованиях сложных реакций является раздел науки, называемый химической кинетикой[1].

Рассмотрим механизм одной из трех реакций гидроалюминирования олефинов алкинами  $\text{HAlBu}_2^i$ ,  $\text{ClAlBu}_2^i$  и  $\text{AlBu}_3^i$ , представленных в работе кандидата химических наук - Печаткиной С. В.[2]:

$A_1 + 2A_2 = \frac{1}{2}A_{16} + A_3$	$w_1 = k_1^a x_1 x_2^2$	$w_j$ – скорость j-й стадии
$A_{16} + 2A_2 = 2A_7$	$w_2 = k_2^a x_2^2 x_{16}$	$x_i$ – мольная доля i-го компонента
$\frac{1}{2}A_{16} + 2A_5 = A_{10} + A_{11}$	$w_3 = k_3^a x_{16}^{1/2} x_5^2$	(соответствует веществу $A_i$ )
$A_{10} + 2A_2 = A_{11} + \frac{1}{2}A_{16}$	$w_4 = k_4^a x_2^2 x_{10}$	$k_j$ – константа скорости j-й реакции

Требуется получить распределение технологических параметров во времени и в пространстве по заданным начальным условиям и исследовать вещества на экстремум в зависимости от констант скоростей реакций  $k_1^a, k_2^a, k_3^a, k_4^a$ .

В работе показано аналитическое исследование реакции. Численными методами [3] получено распределение параметров.

### Литература

- [1] Г.С. Яблонский, С.И. Спивак. Математические модели химической кинетики, изд. «Знание», Москва, 1977
- [2] С.В. Печаткина. Механизм реакции гидроалюминирования олефинов алкинами, катализируемой  $\text{Cr}_2\text{ZrCl}_2$ . -Уфа, 2004
- [3] А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы.- Москва, «Наука», 1989

**АЛГОРИТМ КЛАССИФИКАЦИИ ПЕРЬЕВ**

Фазлытдинов М.Ф.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Данная работа посвящена теме распознавания образов, обработки изображения, выделению отличительных признаков на примере фотографий перьев птиц. Задача заключается в том, чтобы полученные данные в формате изображения сравнить с некоторыми имеющимися результатами, полученными ранее и вывести определенный результат или запомнить новые данные.

Решение задачи разделено на четыре основных блока: бинаризация, предварительная обработка, вычисление признаков, распознавание объекта по полученным признакам.

Основными форматами для хранения изображений являются jpeg, jpeg2000, jpg, bmp. Все форматы переводятся в монохромный формат bmp. При работе с цветным изображением преобразование в черно-белый идет по формуле  $Y:=0.3*R+0.59*G+0.11*B$ . Формат bmp (BitMaP - битовая карта) представляет собой несжатое (в основном) изображение, которое довольно легко читается и выводится в ОС Windows. Далее данное изображение принимает вид массива из 0 и 1, в зависимости от необходимого диапазона оттенка серого, который регулируется кареткой в программе.

Для выделения необходимого объекта в матрице используется алгоритм расставления меток по следующим правилам.

0	0	0	0	L	L	L	L	L
L 0 1 -> 0L	L 1 -> LL	0 1 -> 0L	L 1 -> LL	M				
1 -> ML								(M:=L)

В результате работы алгоритма - после первого же прохода массива все метки ссылаются друг на друга или являются уникальными.

Далее реализован алгоритм по вычислению моретрических признаков объекта. Также сама матрица, в которой хранится битовая карта изображения, используется в распознавании. Так как размер матрицы зависит от размера изображения и может достигать до 1200x1600, то работа с ней значительно снизит скорость программы. Поэтому используется алгоритм сжатия матрицы.

**Литература**

Описание формата Bmp – [www.jenyay.net/Programming/Bmp](http://www.jenyay.net/Programming/Bmp)

Обработка изображений - [www.matlab.exponenta.ru/imageprocess](http://www.matlab.exponenta.ru/imageprocess)

## **АЛГОРИТМ ГИЛЬОТИННОГО РАЗМЕЩЕНИЯ КОНТЕЙНЕРОВ В ПОЛОСУ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ**

Хасанова Э.И.

Уфимский государственный авиационный технический  
университет, г.Уфа, Россия

Задачи размещения крупногабаритных грузов на палубах судов, в отсеках самолетов или железнодорожных вагонах в простейшем случае описываются классическими моделями задач раскроя-упаковки [1]. Однако на практике зачастую возникает необходимость обхода препятствий, которыми изобилуют платформы транспортных средств. Наличие препятствий накладывает на решение задачи в классической постановке ряд дополнительных условий.

В данной работе рассматривается задача гильотинного размещения предметов в полубесконечную полосу с препятствиями прямоугольной формы, длина и ширина которых соизмеримы с размерами размещаемых предметов. Такая задача является NP-трудной.

Алгоритм поиска решения основан на сведении поставленной задачи к задаче гильотинного размещения предметов в прямоугольные листы (2-Dimensional Guillotine Bin Placing, 2DGBP). Для этого из области с препятствиями выделяются области без препятствий меньшего размера. Поскольку препятствия расположены вдоль граней полосы, сначала выделяется большая область в центре. Разделение происходит путем проведения условных сквозных резов по граням препятствий. В зависимости от типа препятствия, по грани которого проводится рез, выделяются горизонтальный верхний, горизонтальный нижний и вертикальный сквозные резы. Если образовавшаяся в результате разделения область все еще содержит препятствия, то работа алгоритма продолжается, в противном случае полученные прямоугольные области заполняются с помощью модифицированного уровневого алгоритма [2].

Работа алгоритма продемонстрирована на примере.

### **Литература**

- [1] Gilmore P.C., Gomory R.E. Multistage cutting stock problem of two and more dimensions. – Operat. Res., 1965, v.13, N.1
- [2] Lodi A., Martello S., Vigo D. Recent advances on two-dimensional bin packing problems // Discrete Applied Mathematics 123, 2002, P. 379-396

© Хасанова Э.И., 2009 г.

**О ПРИМЕНЕНИИ ДИСКРЕТНОГО ПРИНЦИПА  
МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОПЕРАТИВНОМ  
УПРАВЛЕНИИ НА НЕФТЕХИМИЧЕСКОМ ПРЕДПРИЯТИИ**

Чикуров А.В., Исакова З.М.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа,  
Россия

В процессе производства нефтехимическому предприятию приходится сталкиваться с рядом возмущающих воздействий (изменения планового задания, состава и количества сырья, выход из строя отдельных установок и др.), что приводит к необходимости оперативного управления [1].

В условиях изменения потребности в отдельных видах продукции и требований к их составу возникает необходимость перераспределения внутренних потоков завода, т.е. изменение коэффициентов отборов продуктов, получаемых на технологических установках. Для решения подобной задачи предлагается использовать дискретный принцип максимума Понтрягина для определения оптимальной стратегии управления разделением внутренних потоков с целью получения продуктов заданного количества и качества.

Рассматриваемая ХТС (общая схема установки) представляется в виде ориентированного материально-потокowego графа  $G(V,E)$ , дуги которого соответствуют материальным потоками между установками. Считаем, что система находится в стационарном режиме.

Рассмотрим простейший случай, когда не предъявляется требований к составу получаемой продукции, т.е. оптимизируемыми переменными являются только величины расходов внутренних потоков  $X$ . Известны сырьевые потоки  $X_{вх}$ , заданы требуемые продуктовые потоки  $X_{вых}^*$ . (иными словами известны истоки и стоки материально-потокowego графа).

Условимся также, что граф не содержит циклов (соответствующая технологическая схема не содержит рециклических потоков). В этом случае можно легко определить вычислительную последовательность расчёта системы (ВПРС) [2]. ВПРС необходима для задания начального распределения потоков (если оно уже не задано), причем коэффициенты разделения  $\alpha$  можно принимать произвольным образом (при выполнении условия  $\sum \alpha = 1$  для каждого узла).

© Чикуров А.В., Исакова З.М., 2009 г.

## АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ДЕЗАКТИВАЦИИ КАТАЛИЗАТОРОВ

Шангареев Р.Р., Мустафина С.А.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Биишевой, г. Стерлитамак, Россия

Большинство катализаторов в ходе своей эксплуатации теряют свою первоначальную активность. Процессы с изменяющейся активностью катализаторов могут быть описаны в виде систем квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического вида.

Математическая модель химического процесса с учетом изменения активности катализатора может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = f_i(c, q, u), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial q_j}{\partial t} = q_j(c, q, u), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

с граничными условиями:

$$c(0, t) = v(t), \quad t \in [0, t_k], \quad q(t, 0) = w(t), \quad t \in [0, t_k],$$

где  $c = (c_1(t, t), \dots, c_n(t, t))$  – вектор-функция, учитывающая состояние процесса (концентрация, температура, давление в реакторе, т.д.);  $q = (q_1(t, t), \dots, q_m(t, t))$  – вектор-функция, описывающая изменение каталитической активности,  $u$  – вектор-функция, характеризующая управляющее воздействие;  $t$  – время контакта;  $t$  – астрономическое время.

Задача оптимизации состоит в нахождении оптимального  $u^*(t, t)$  и соответствующих ему решений  $c^*(t, t)$  и  $q^*(t, t)$  с использованием принципа максимума Понтрягина.

При совместном решении систем основных и сопряженных уравнений она становится неустойчивой, т.е. небольшие изменения значений на одной границе приводят к значительным изменениям на другой. При этом переход к двумерному пространству независимых переменных неоправданно увеличивает трудоемкость задачи и соответственно требования к ЭВМ.

Для решения поставленной задачи используются численные алгоритмы, основанные на методе раздельного интегрирования основной и сопряженной систем и на методе движения по градиенту функции Понтрягина.

УДК 51-78, 510.8, 512.579

## **АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МУЗЫКАЛЬНЫХ ТОНОВ И РАЗРАБОТКА С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ MUTABOR**

Schlemmer T.

Technische Universität Dresden, Dresden, Deutschland

Одним из элементарных понятий музыки является тон. Тоны можно рассматривать методами математики, физики, психологии и других наук. В математической музыкологии существуют несколько теорий о математической структуре музыкальных композиций. Рудольф Вилле предложил в 80-х годах XX века подход к изучению алгебраических свойств множеств тонов и музыкальных интервалов.

Модифицированный подход применяется к компьютерной программе Mutabor, которая посвящена старой проблеме настройки музыкальных инструментов, возникающей из двойственной природы высоты тонов - частоты с линейно распределенными обертонами и ее логарифма - слышимой высоты.

Определим алгебраическую структуру тонов, с которой легко определить систему тонов и множество дополнительных понятий музыкологии.

Настройка или перенастройка музыкальных инструментов является отображением из одной системой (напр. система нот или исходная система) в целевую систему тонов. Mutabor позволяет музыкантам использовать меняемые настройки, которые могут отображать тоны одной и той же высоты на различные тоны. Для реализации таких меняемых настроек используют специальные логики.

При переводе данной логики настройки в содержащую ее систему тонов возникают несколько вопросов, которые будут обсуждены на докладе.

Литература

- [1] B. Ganter, H. Henkel, R. Wille, MUTABOR - A Computer-Controlled Musical-Instrument for the Study of Pitches: *Acustica* 57(4-5), 284-289 (1985).
- [2] T. Schlemmer, St. E. Schmidt, A Formal Concept Analysis of Harmonic Forms and Interval Structures: *CEUR Workshop Proceedings* 433, 9-12 (2009).
- [3] J. Th. Winkler, *Algebraische Modellierung von Tonsystemen: Beiträge zur begrifflichen Wissensverarbeitung* – Verl. Allg. Wiss. -- HRW e.K., 2009, ISBN 3-935-924-07-0

© Schlemmer T., 2009

## СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ»

УДК 330+519.862.6

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЖИЛОЙ НЕДВИЖИМОСТИ (НА ПРИМЕРЕ ВТОРИЧНОГО РЫНКА ЖИЛЬЯ Г.УФА)

Азнабаев А.М.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Сегодня традиционные методы индивидуальной оценки недвижимости обладают недостатками: 1) трудоемкость; 2) высокая доля субъективизма конкретного оценщика в полученных результатах, несмотря на его опыт и знания. Отсюда вытекает актуальность цели данной работы - разработки метода оценки, который позволил бы на основе большого количества фактических данных быстро и объективно оценивать стоимость жилья в зависимости от влияния ценообразующих факторов.

Разработку такого метода можно осуществить с помощью регрессионного анализа. Суть его заключается в построении универсальной математической модели, отражающей зависимость рыночной стоимости объекта оценки от влияния на нее ценообразующих факторов, таких как: площадь объекта, материал стен, этаж, местоположение и другие.

Данный метод предполагает использование многофакторной мультипликативной линейной регрессионной модель вида:

$$Y_{расч} = C \cdot a_1^{X_1} \cdot \dots \cdot a_m^{X_m} \cdot e$$

Расчет коэффициентов проводится с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Для этого модель преобразуют в аддитивный вид (линеаризуют) путем логарифмирования обеих частей уравнения:

$$\ln Y_{расч} = \ln C + X_1 \cdot \ln a_1 + \dots + X_m \cdot \ln a_m + \ln e ,$$

где  $Y_{расч}$  – стоимость 1 кв. м оцениваемой квартиры;  $C$  – стоимость 1 кв. м в квартире с базовыми (стандартными) параметрами;  $X_m$  – ценообразующий фактор  $m$ ;  $a_m$  – коэффициент, описывающий влияние  $m$ -го фактора на конечную стоимость объекта;  $e$  – ошибка расчетов модели.

После построения модели оценивается ее адекватность, затем она «восстанавливают» к первоначальному мультипликативному виду, откуда получают итоговые корректировки на ценообразующие факторы.

По предложенной модели уже была произведена комплексная оценка рынка жилья в Уфе в 2008г., итоги которой представлены в данной работе.

На сегодняшний день, в связи с экономическим кризисом и изменением конъюнктуры рынка, является приоритетным очередное проведение оценки жилья в г. Уфа по предложенному методу и сравнение новых результатов с полученными ранее.

© Азнабаев А.М., 2009 г.

**О ЗАКОНОМЕРНОМ ПАДЕНИИ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ  
«ЗЕРКАЛЬНОМ» ИНВЕСТИРОВАНИИ**

Ахтямов А.М., Амангильдин Ш.Т.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Прогнозированию объема выпуска продукции в зависимости от инвестиций посвящено большое количество работ. При этом большинство авторов объясняют наблюдающееся иногда падение производства при росте инвестиций временным лагом: «тяжелые отрасли не работают «с колес»», существует некоторое запаздывание между моментом времени, когда деньги вложены, и тем моментом, когда деньги начнут работать [1, с.13].

Все это справедливо, но лишь отчасти. В настоящей работе показано, что даже в том случае, когда временной лаг отсутствует (т.е. отрасли работают «с колес»), наблюдается та же картина: при восходящем графике инвестирования, объемы производства оказываются меньше, чем при нисходящем графике с тем же объемом инвестирования. Причем, это – не противоречие, а закономерность. Доказательство этого факта проводится на использовании простейшей безлаговой математической модели динамики выпуска продукции с учетом инвестирования и выбытия фондов. Эта модель представляет собой следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка [2, с.177–178]:

$$y'(t)+k(t)y(t)=u(t),$$

где  $y(t)$  – общая стоимость продукции предприятия, произведенной в момент времени  $t$ ,  $k(t)$  – коэффициент выбытия фондов (с течением времени происходит изнашивание оборудования и орудий труда),  $u(t)$  – поток капитальных вложений, направленный на восстановление и расширение фондов.

**Литература**

1. Рубченко М., Шохина Е. Призрак роста // Эксперт. 2005. №4. С.13.
2. Горелик А.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь. 1991.
3. Ахтямов А.М. Инерция падения объемов выпуска продукции при росте инвестиций // Экономика и управление. 2006. №1. С.56-59.

**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ ПРИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОМ  
РАЗВИТИИ С УЧЕТОМ ИНДЕКСА РАЗВИТИЯ  
ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА (ИРЧП)**

Исламов И.Я.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В последние десятилетия все больше внимания уделяется человеческому измерению экономического развития. Этот факт отражен во всех программных и аналитических документах международных организаций семейства ООН.

Принципиально важное положение концепции человеческого развития состоит в утверждении, что развитие не может рассматриваться только как рост объема материальных благ и услуг. Следовательно, традиционные макроэкономические показатели, в том числе объем валового внутреннего продукта (ВВП) и среднедушевой доход, не являются адекватными характеристиками развития во всем его многообразии. Только экономические показатели не могут служить универсальным критерием при распределении общественных ресурсов или при ранжировании стран по уровню развития. Такой подход приводит к недооценке многих неэкономических параметров развития. [1]

При реализации каждого пункта целей метода ИРЧП должно упроститься и легко применим при больших вычислениях. В таких случаях могут быть сгруппированы некоторые категории, и это может привести к недочетам или погрешностям. Чтобы избежать таких ошибок, нужно проследить связь между тремя компонентами ИРЧП для выявления закономерностей влияния каждой категории друг на друга. Экономический рост является экстенсивным, если он осуществляется за счет привлечения дополнительных ресурсов и не меняет среднюю производительность труда в обществе. Интенсивный рост связан с применением более совершенных факторов производства и технологии. Интенсивный рост может служить основой повышения благосостояния населения. Благодаря этому метод ИРЧП является важным инструментом мониторинга долгосрочных тенденций в развитии человека.

**Список литературы:**

[1] Садовина Т.Н., Развитие человеческого потенциала как фактора экономического роста. – Чебоксары, 2009г. – С.10..

© Исламов И.Я, 2009 г.

**БЮДЖЕТ СТУДЕНТА: МОЖНО ЛИ ИМ УПРАВЛЯТЬ?**

Казакова Д.С.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Бухгалтерский учет определяется как система, которая осуществляет измерение, обработку и передачу финансовой информации об определенном хозяйствующем субъекте. Как правило, под хозяйствующим субъектом понимается предприятие. Но есть работы, в которых под хозяйствующим субъектом понимается семья [1] или конкретное физическое лицо [2], ведущее экономическую деятельность. В этих работах строится бюджет хозяйствующих субъектов, его расходная и доходная части. Однако в них не приводится строгой системы и документов финансового и бухгалтерского учета. В данной работе приведены результаты создания основных документов бухгалтерского учета для студента.

Для получения этих документов введен Главный журнал, в который изо дня в день записываются все факты финансово-хозяйственной стороны жизни студента. Далее в соответствии с основными принципами бухгалтерского учета эти записи переносятся в счета Главной книги. На основе полученных данных создаются Отчет о прибылях и убытках и Отчет о движении денежных средств. При составлении Баланса к счетам активов относятся все ценности, которые находятся в собственности студента, а к счетам пассивов – рассчитанные инвестиции родителей, государства или иные источники вложений в течение всей жизни.

Очевидно, студент не может заработать достаточно средств, чтобы покрыть все свои пассивы, так что при вычитании пассивов из активов мы получаем капитал со знаком «-». Чтобы получить равенство в балансовом уравнении мы используем такое понятие как «человеческий капитал». Его нужно отнести к счетам активов студента. Величина капитала дает оценку тех денежных средств, вложенных как инвестиционные ресурсы, предполагающие отдачи в последующем периоде трудовой деятельности.

Таким образом, в своей работе мы показали, что составление основных документов бухгалтерского учета для студента вполне реальная задача.

**Литература**

[1] Резник С. Д., Егорова Н. Ю. Бюджет современной семьи: можно ли им управлять? // Экономическая наука современной России. М.: ЭНСР №1 (40) 2008г.

[2] Покудов А. В. Личные финансы. Секреты управления и индивидуальный финансовый план – М.: Эксмо, 2007. – 176с.

© Казакова Д.С., 2009 г.

## АНАЛИЗ КРЕДИТНОЙ ИСТОРИИ ЗАЕМЩИКА И МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕКТИРОВОЧНЫХ КРЕДИТНЫХ КОЭФИЦИЕНТОВ

Морозкин Ю.Н., Хайруллин Б.Ф.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Активное развитие потребительского кредитования требует от банков выработки быстрых и высокотехнологичных методик для повышения эффективности процесса кредитования, которые позволяют банку принимать обоснованные кредитные решения и снижать кредитные риски. В работе смоделированы корректировочные коэффициенты, предложен способ модификации максимально возможной суммы и процентной ставки в зависимости от добросовестности кредитной истории заемщика.

Для оценки кредитной истории заемщика в банковской практике используются три характеристики[1]:

- добросовестная кредитная история;
- недобросовестная кредитная история;
- кредитная история отсутствует.

Для моделирования корректировочных коэффициентов в работе предложен анализ агрегированного показателя доходности банка непосредственно от конкретного заемщика.

$$M_{\%} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_l}{l}, \quad (1)$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_l$  – процентное значение маржи, полученной банком в  $1, 2, \dots, l$  платеж заемщика в банке,  $l$  – количество платежных периодов заемщика в банке.

Таким образом, корректировочные коэффициенты предлагается находить исходя из следующих соотношений:

$$\begin{cases} b_i = \left( 1 - (1 - i_{\Delta-}) \frac{M_{\%}}{\tilde{M}} \right) & b_i \in [i_{\Delta-}; 1), i_d \in [i_{\min}; i), M_{\%} \in (0; +\infty); \\ b_K = \left( 1 + (K_{\Delta+} - 1) \frac{M_{\%}}{\tilde{M}} \right) & b_K \in (1; K_{\Delta+}], K_d \in (K; K_{\max}], M_{\%} \in (0; +\infty). \end{cases} \quad (2)$$

Применение метода продемонстрировано на примере.

### Литература

[1] Морозкин Ю.Н. Применение математического моделирования в задачах оптимизации процессов кредитования // Препринт № 100. – Саранск: СВМО, 2007. – 28 с.

© Морозкин Ю.Н., Хайруллин Б.Ф., 2009 г.

**СИСТЕМНАЯ МОДЕЛЬ КОНСТИТУЦИИ РФ**

Нурисламова Л.Ф.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Система – это совокупность взаимосвязанных объектов, образующих новое качество, несводимое к свойствам объектов. М. Месарович и Я. Такахара полагают вполне оправданным рассматривать математическую теорию систем для формализации любых системных понятий. В нашей работе решается задача формализации Конституции РФ. Для создания системы лингвистическое описание основного закона государства представим в виде структуры, построенной на основе комбинации моделей Минцберга[1] и Бьюкенена[2]. Минцберг предлагает организацию разделить на пять взаимосвязанных частей: стратегическая вершина, срединная линия, операционное ядро, технотрутура и вспомогательный персонал. В модели Бьюкенена рассматриваются две функции государства: «государство защищающее» и «государство производящее».

Операционное ядро – это подсистема, за счет которой существует организация, т.е. в структуре государства это его экономическая деятельность. Стратегическую вершину занимает Президент РФ. Вниз по иерархии располагаются Правительство РФ, исполнительные органы власти субъектов РФ, органы местного управления. Слева к иерархии прилежит подсистема «правовое государство» («государство защищающее»). В нее входят Совет Федерации, Государственная Дума, Прокуратура, Вооруженные силы РФ и другие органы. Справа от иерархии расположены бюджетные организации, выполняющие вспомогательные функции: учреждения здравоохранения, образовательные учреждения, учреждения культуры, социальные службы и другие. Они образуют подсистему «государство производящее».

Лингвистическое описание позволяет построить структуру, выделив объекты и описав их причинно-следственные связи. На примере Конституции РФ мы получили системную модель государства.

**Литература**

- [1] Г. Минцберг Структура в кулаке: создание эффективной организации / Пер. с англ. под ред. Ю. Н. Каптуревского. – СПб.: Питер, 2004. – 512
- [2] Джеймс М. Бьюкенен Сочинения. Пер. с англ. Серия: «Нобелевские лауреаты по экономике». Т.1./Фонд экономической инициативы; Гл. ред. кол.: Нуреев Р.М. и др./ М.: «Таурис Альфа», 1997.- 560 с.

© Нурисламова Л.Ф., 2009 г.

**ИЗМЕНЕНИЕ ЦЕНЫ И СПРОСА НА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИЮ**

Сулейманов А.Р.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

С конца 2003 года в нашей стране зародился рынок оптовой торговли электроэнергией. На этом рынке покупатели и продавцы могут покупать и продавать электроэнергию по свободным (нерегулируемым) ценам, определяемым путем конкурентного отбора ценовых заявок покупателей и поставщиков.

Анализ данных торгов на оптовом рынке электроэнергии позволяет сделать интересные выводы: Цены на электроэнергию были не постоянными, а периодическими с примерным периодом равным неделе. Так же стоит отметить, что важным фактором при анализе является количество более дешевой электроэнергии в процентах от общего количества выработанной электроэнергии. Т.е. в те периоды, когда доля электроэнергии, вырабатываемая гидроэлектростанциями больше, цена на электроэнергию на оптовом рынке снижается.

Проанализируем изменение цены и спроса на электроэнергию при помощи модели «хищник–жертва». Обозначим цену предложения на рынке электроэнергии через  $x$ , предложение этого товара через  $y$ . В случае падения цены товаров первой необходимости ( $y=0$ ) спрос на него  $x$  растет согласно уравнению:

$$x' = ax, \quad a > 0.$$

Цена товара в случае отсутствия спроса падает по закону

$$y' = -by, \quad b > 0.$$

Поэтому если спрос ненулевой, то цена меняется по закону

$$x' = ax - cxy, \quad a > 0, c > 0.$$

Скорость увеличения цены ( $y'$ ) пропорциональна количеству проданного товара по предыдущей цене ( $xy$ ).

Поэтому имеем

$$y' = -by + dxy \quad (b > 0, d > 0).$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x' &= ax - cxy, & a > 0, c > 0, \\ y' &= -by + dxy, & b > 0, d > 0 \end{aligned}$$

**Литература**

Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. – М.: Физматлит, 2004. 464 с.

## СТАВКА ДИСКОНТИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ РОССИЙСКИХ КОРПОРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ КРИЗИСА

Ямалетдинова Г.Х.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Изменение условий функционирования бизнеса вследствие кардинальной перемены конъюнктуры мирового рынка привело к значительному сокращению стоимости российских компаний и стоимости вложенного капитала. При оценке стоимости российских компаний специалисты, как правило, применяют модели оценки, используя данные зарубежных экономик, что приводит к существенному искажению результатов оценки. Цель работы – объективно оценить стоимость капитала (ставку дисконтирования) на основе данных российских предприятий, а также оценить влияние кризиса на изменение стоимости капитала.

Ставка дисконтирования  $R$  рассчитана по модели WACC (Weighted average cost of capital):

$$R = k_d(1 - t_c) * W_d + k_p * W_p + k_s * W_s$$

Расчет произведен при следующих допущениях: стоимость привлечения привилегированных акций  $k_p$  равна стоимости привлечения обыкновенных акций  $k_s$ ; собственный капитал состоит только из обыкновенных акций, т.е. доля привилегированных акций  $W_p$  равна нулю; стоимость заемного капитала  $k_d$  представляет собой средневзвешенную ставку по рублевым кредитам; ставка налога на прибыль  $t_c$  в соответствии с действующим законодательством РФ составляет 20%; доля заемного капитала  $W_d$  рассчитана по отчетности 50 российских корпораций, на основе котировок акций которых составлен индекс РТС.

Стоимость привлечения собственного капитала определена по модели CAPM (Capital Asset Pricing Model):

$$k_s = R_f + \beta(R_m - R_f)$$

Безрисковая норма доходности  $R_f$ , коэффициент бэта  $\beta$ , премия за риск вложения в акции ( $R_m - R_f$ ) определены на основе данных РТС и ЦБРФ.

Результаты анализа следующие: 1) рассчитаны средние значения ставок дисконтирования предприятий РФ по состоянию на 01.07.08г. и на 01.07.09г.; 2) проанализированы изменения структуры и стоимости капитала российских корпораций; 3) оценено воздействие кризисных явлений на стоимость капитала российских компаний.

© Ямалетдинова Г.Х., 2009 г.