

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ
И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»,
посвященная 100-летию БашГУ
(1 октября – 6 ноября 2009 года)

МАТЕМАТИКА. ТОМ 1

Уфа
РИЦ БашГУ
2009

УДК 51, 53, 54 ББК 22+24

Издано при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (гос. контракт №02.741.12.2037), РФФИ (проект №09-01-06820-моб-г), а также при софинансировании БашГУ.

Редакционная коллегия:

д-р хим. наук, проф. **Р. Ф. Талипов**

(проректор БашГУ по научной работе);

д-р физ.-мат. наук, проф. **Б. Н. Хабибуллин**

(руководитель работ по проектам ФАНИ и РФФИ);

канд. физ.-мат. наук, доц. **В. В. Картак** *(отв. редактор);*

Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Математика. Том 1. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2008. - стр.

В сборнике помещены статьи участников Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Статьи воспроизводятся с предоставленных авторами оригиналов.

УДК 51, 53, 54

ББК 22+24

© Коллектив авторов, 2009 г.

© БашГУ, 2009 г.

УДК 532.5.296:534.12

ДИНАМИКА ПУЗЫРЬКОВ У СТЕНКИ

Аганин А. А., Ильгамов М. А., Малахов В. Г.
(Уфа, ИМ УНЦ РАН, Казань, ИММ КНЦ РАН)

Введение

Динамика пузырьков у стенки является многосторонним явлением. В настоящей работе ограничимся лишь рассмотрением тех ее аспектов, которые связаны с кавитационным разрушением – деструктивным воздействием пузырьков на поверхности тел.

Явление кавитационного разрушения известно давно. Его исследование было начато еще в начале 20 века в связи с быстрым износом гребных винтов водных двигателей. Кавитационному разрушению подвержены также и многие другие устройства, находящиеся в контакте с жидкостью, давление которой на поверхности контакта в процессе функционирования, в силу разных причин, является переменным.

Пример разрушительного воздействия кавитации иллюстрирует приведенная на рис. 1 фотография вращающейся детали насоса, прокачивающего жидкость [1]. Повреждения имеются на всей поверхности детали. При этом хорошо видны особенно сильные разрушения краев лопастей в зонах наиболее интенсивной кавитации. Приведенный на рис. 2 небольшой фрагмент поверхности тела более детально иллюстрирует то, что происходит с изначально ровной поверхностью тела при воздействии кавитации.

Фундаментальным для понимания разрушительного влияния кавитации является уяснение особенностей воздействия на тело отдельного пузырька. Несмотря на большое количество исследований этого вопроса, ряд важных режимов воздействия отдельных пузырьков на тело до сих пор остается неизученным. К ним, в



Рис. 1: Фотография детали насоса, прокачивающего жидкость.

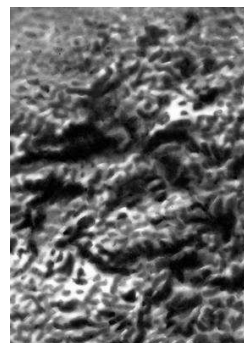


Рис. 2: Поверхность тела после воздействия кавитации.

частности, относится режим ударного воздействия, при котором в финальной стадии сжатия пузырька в жидкости возникают ударные волны. Быстро растущие возможности экспериментального оборудования (например, скорости видеосъемки) и возможностей вычислительной техники (в частности, ее быстродействия) позволяют приступить к детальному исследованию и этих сложных явлений.

Дальнейшее изложение материала построено следующим образом. Сначала представляются основные механизмы кавитационного разрушения. Затем кратко описываются существующие теоретические модели и методы решения задач динамики пузырька вблизи поверхности тел. После этого приводятся результаты расчета полей давления в жидкости и напряжений в твердом деформируемом теле в случае сильного схлопывания пузырька вблизи его поверхности на режиме с ударными волнами. Эти результаты имеют качественный характер, так как получены с применением упрощенных моделей пузырька, динамики жидкости и твердого деформируемого тела.

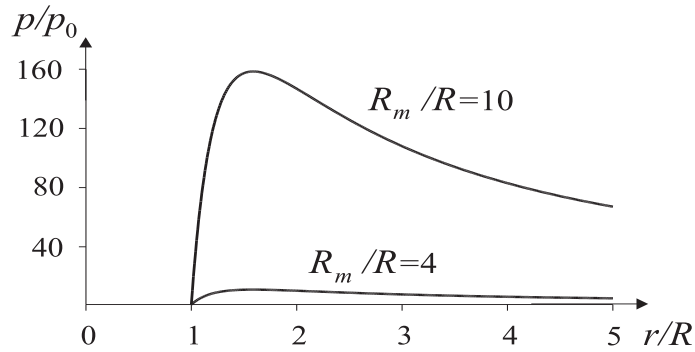


Рис. 3: Радиальное распределение давления в жидкости в два момента времени в ходе схлопывания в ней пустой сферической полости. R_m , R – начальный и текущий радиусы пузырька, p_0 – статическое давление жидкости.

§ 1. Основные механизмы кавитационного разрушения

К настоящему времени можно выделить два основных механизма кавитационного разрушения, а именно, механизмы Rayleigh [2] и Kornfeld and Suvorov [3]. В 1917 г. Рэлей показал [2], что в ходе схлопывания пустой сферической полости (пустого пузырька) в несжимаемой жидкости радиальное распределение давления жидкости $p(r, t)$ имеет вид (рис.3)

$$p(r, t) = p_0 \left[1 + \frac{R_m^3}{3R^2 r} \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \right],$$

где r – радиальная координата, отсчитываемая от центра пузырька, t – время, $R = R(t)$ – текущий радиус пузырька, R_m – начальный радиус пузырька, p_0 – давление жидкости. При $r = 4^{1/3}R$, т.е. на расстоянии от поверхности пузырька, примерно равном $1.59R$, в профиле давления жидкости $p(r, t)$ имеется максимум. В процессе схлопывания радиус пузырька уменьшается до нуля ($R \rightarrow 0$), в результате чего давление жидкости в окрестности пузырька возрастает так, что его максимум стремится к бесконечности как $(R_m/R)^3$. По решению Рэрея можно заключить, что в ходе схлопывания сферического пузырька давление жидкости

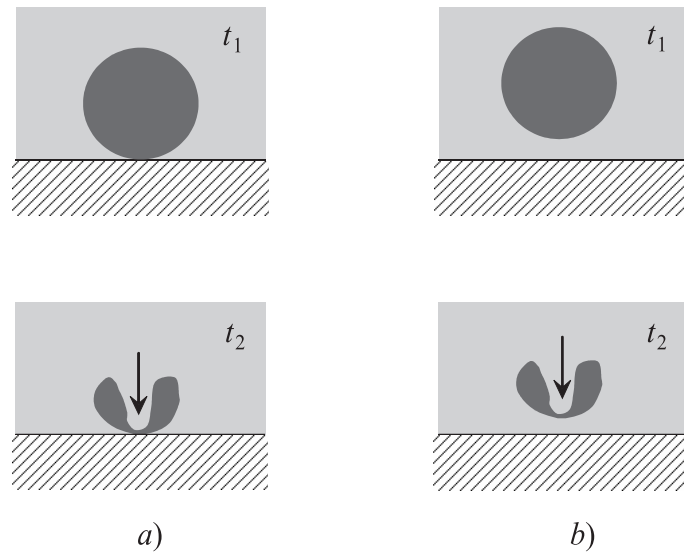


Рис. 4: Схлопывание пузырька у стенки с образованием на его поверхности высокоскоростной струи при контакте пузырька со стенкой (*a*) и при наличии между ними небольшой прослойки жидкости (*b*). Момент t_1 соответствует началу схлопывания, а момент t_2 – касанию струей поверхности стенки (*a*) и противоположной части поверхности пузырька пузырька (*b*). Стрелка указывает направления движения струи.

около него может достигать бесконечно больших значений в случае модельного пустого пузырька, и очень больших, но конечных значений для реального пузырька, заполненного паром, газом или парогазовой смесью. Ясно, что если пузырек будет схлопываться подобным образом вблизи поверхности тела, то поверхность тела будет испытывать значительное силовое воздействие. Такой механизм силового влияния пузырька на тело обычно и называют механизмом Рэля.

В 1944 г. Kornfeld and Suvorov [3] в результате анализа накопленных к тому времени экспериментальных данных пришли к заключению, что схлопывание пузырьков вблизи стенок происходит не чисто сферически, как принимал Рэлей, а с большими деформациями межфазной поверхности. Ими было выдвинуто предположение, что при схлопывании пузырьков вблизи стен-

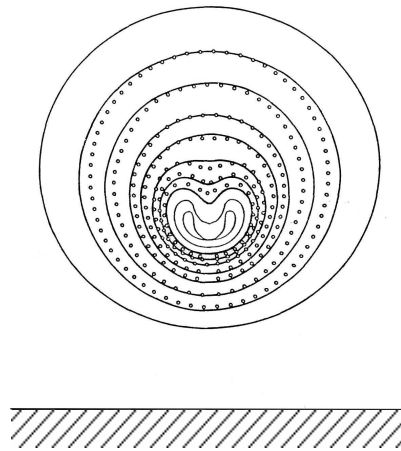


Рис. 5: Сравнение теоретических (сплошные линии, Plesset and Chapman [4]) и экспериментальных (пунктирные линии, Lauterborn and Bolle [5]) форм пузырька в процессе его схлопывания у стенки с образованием на поверхности пузырька высокоскоростной струи.

ки на их поверхностях возникают высокоскоростные струйки. На рис. 4 показаны осевые сечения пузырька в два момента времени (в начале t_1 и конце t_2 процесса) для двух случаев несферического схлопывания (a , b). В первом случае пузырек касается стенки, а во втором – находится от нее на небольшом удалении (между пузырьком и стенкой имеется жидкая прослойка). В конце схлопывания образованные на поверхности пузырьков струйки могут оказывать сильное воздействие на стенку (по направлению стрелки) либо непосредственно (путем столкновения с ней, рис. 4*a*), либо опосредованно (сталкиваясь с областью поверхности пузырька, расположенной ближе к стенке, рис. 4*b*), что и вызывает микро-разрушения стенки.

Струйный механизм кавитационного разрушения был подтвержден теоретически в 1971 г. Plesset and Chapman [4]. Результаты расчетов схлопывания пузырька у плоской твердой стенки в случае, когда между пузырьком и стенкой имеется жидкая прослойка (рис. 4*b*), приведены на рис. 5 сплошными линиями. Расче-



Рис. 6: Фотография пузырька, схлопывающегося у стенки с образованием на его поверхности высокоскоростной струи (сделана Крамом [6]).

ты выполнены методом конечных разностей. Видно, что по мере схлопывания пузырька в верхней более удаленной от стенки области поверхности пузырька образуется струя, которая со временем увеличивается и сталкивается с нижней более близкой к стенке частью поверхности пузырька, что соответствует сценарию развития струи, показанному на рис. 4*b*. Установлено, что скорость струи имеет порядок сотен метров в секунду.

В 1975 г. результаты расчетов Плессета и Чапмана были подтверждены экспериментально Lauterborn and Bolle [5]. Их экспериментальные данные показаны на рис. 5 кружочками. Видно удовлетворительное согласование теории и эксперимента.

По мере углубления исследований и развития экспериментального оборудования стали получать более наглядные свидетельства реализации струйного механизма кавитационного разрушения. Примером тому служит сделанная Крамом [6] очень яркая фотография пузырька в финальной стадии его схлопывания у твердой поверхности (рис. 6). На этой фотографии четко видна струя, прошивающая полость пузырька.

§ 2. Существующие математические модели и методы расчета

К настоящему времени выполнено большое количество исследований динамики пузырьков у стенки. Выявлен ряд зависимо-

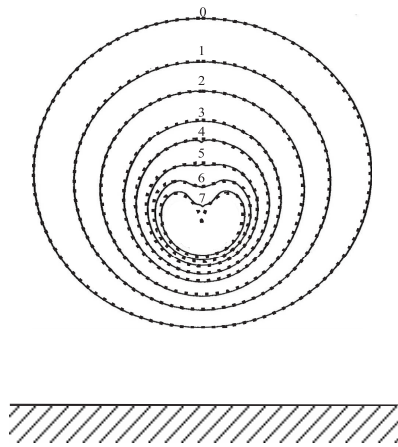


Рис. 7: Сравнение форм пузырька в процессе его схлопывания у стенки с образованием на поверхности пузырька высокоскоростной струи. Сплошные линии получены Plesset and Charman [4] методом конечных разностей, пунктирные линии – Аганиным и Давлетшиным [9]) методом Рунге-Кутты. В модели Аганина и Давлетшина [9] деформации поверхности пузырька принимаются малыми.

стей параметров схлопывания пузырьков от расстояния между пузырьком и стенкой, искривленностью поверхности стенки, начальных размеров пузырька, физических свойств жидкости и многое другое. При этом использовались математические модели, в которых жидкость вблизи пузырька, как правило, считается несжимаемой, газ в пузырьке гомобарическим (с однородным распределением давления), а тело твердым недеформируемым. Эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, ее теплообмена с пузырьком и др. обычно учитываются приближенно. В некоторых случаях для учета реакции тела его моделируют несжимаемой жидкостью.

В рамках указанных допущений задачу об отклонениях формы пузырьков от сферической можно значительно упростить. После некоторых преобразований она сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Неизвестными в ней являются радиус пузырька, положение его центра и амплитуды отклонений его формы от сферической в виде поверхностных сферических гармоник [7, 8].

Одна из таких моделей динамики пузырька была предложена недавно Аганиным и Давлетшиным 2009 [9]. Она отличается от других тем, что позволяет изучать воздействие пузырька на стенку при произвольно малых расстояниях между ними. На рис. 7 приведено сравнение результатов ее применения (пунктирные кривые) с тем, что получено Плессетом и Чапманом (сплошные кривые) методом конечных разностей. Видно, что эта модель довольно хорошо работает и при не очень малых искажениях сферичности пузырька. Вместе с тем, она неприменима при контакте пузырька со стенкой, что представляет значительный интерес.

Для изучения взаимодействия пузырьков с большими деформациями их поверхностей наиболее часто применяется подход, в котором на каждом шаге по времени скорость поверхности пузырька находится из граничного интегрального уравнения (ГИУ). Решение ГИУ осуществляется методом граничных элементов (МГЭ). При этом жидкость обычно предполагается невязкой несжимаемой, ее движение – безвихревым.

Остановимся на работах, в которых используются аналогичный подход, более подробно.

В работе Воинов О.В. и Воинов В.В. 1975 [10] предложен численный метод, основанный на решении ГИУ для расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями (включая динамику пузырька у стенки). Этот метод развит в работе Воинов О.В. и Воинов В.В. 1976 [11] для расчетов захлопывания деформированного (несферического) пузырька около стенки. Обнаружена сильная чувствительность параметров струи к начальной деформации пузыря. С ростом начальной деформации скорость струйки резко возрастает.

Blake, Taib, and Doherty 1986 [12] используют МГЭ для изучения роста и коллапса паровых полостей около твердой границы с учетом выталкивающей силы. Миграция коллапсирующего пузырька и последующее формирование струи могут быть направ-

лены как к стенке, так и от нее.

Kurbatskii and Kedrinskii 1992 [13] применяют МГЭ для изучения кумулятивного течения и параметров высокоскоростной струи в парогазовых пузырьках как основного источника импульсного воздействия на жесткую стенку. Рассматривается осесимметричная задача коллапса полости в невязкой несжимаемой жидкости с переменным давлением, которое рассчитывается по двухфазной модели.

Best 1993 [14] применяет МГЭ для описания коллапса пузырька у твердой стенки. Рассчитывается движение тороидального пузырька путем соединения кончика струи со стороной пузырька, по которой бьет струя.

Blake, Robinson, Shima and Tomita 1993 [15] рассматривают движение двух кавитационных пузырьков возле твердой границы. Применяются экспериментальные наблюдения с помощью высокоскоростной камеры и численные решения, полученные МГЭ. Сравнение удовлетворительно как в отношении истории изменения формы, так и движения центра. В экспериментах и расчетах наблюдались вытянутые пузырьки, струи, направленные к твердой стенке и от нее, расщепление пузырька.

Chahine and Duraiswami 1993 [16] разработали МГЭ для расчета двумерной и трехмерной динамики пузырьков, образующихся при подводных взрывах в объеме жидкости и около ее границ.

В работе Boulton-Stone 1993a [17] дается сравнение разных вариантов МГЭ для изучения движения двумерных пузырьков в неограниченной жидкости.

Sato, Tomita and Shima 1994 [18] исследуют динамику пузырька у твердой стенки в поле осциллирующего давления с применением двух подходов. МГЭ применяется для описания профиля пузырька во времени. Для описания нелинейных радиальных колебаний и миграции сферического пузырька используются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Жидкость пола-

гается невязкой, несжимаемой, потенциальной, а газ в пузырьке описывается политропическим законом. Обнаружено, что период и амплитуда колебаний пузырька связаны не только с изменением давления жидкости, но и положением пузырька относительно стенки.

В работе Robinson, Boulton-Stone and Blake 1995 [19] с помощью МГЭ изучается начальное движение цилиндрически деформируемых газовых пузырьков, всплывающих в невязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрено влияние поверхностного натяжения, относительного начального положения и объема.

В работе Blake, Hooton, Robinson and Tong 1997 [20] с помощью МГЭ исследуются факторы, влияющие на формирование и направление струи жидкости при коллапсе полости, на воздействие на близлежащие твердые стенки. Приводятся примеры расчетов осесимметричных и трехмерных задач. Во втором случае показано, что выталкивающая сила может вызывать формирование струи параллельно вертикальной твердой стенке, т.е. струи без разрушительного влияния. Моделируются также рост и коллапс кавитационного пузырька в потоке с передней точкой стагнации как модели повторного соприкосновения пограничного слоя, где часто наблюдается сильное кавитационное разрушение. Делается сравнение между сферическими и осесимметричными теориями для осциллирующих пузырьков в поле периодического давления.

Blake, Tomita and Tong 1998 [21] применяют МГЭ для изучения асимметричного коллапса кавитационного пузырька около стенки с развитием высокоскоростной жидкой струи и образованием тороидального пузырька. После образования тороидального пузырька на границе могут быть давления, на порядок больше, чем ударное давление, связанное со струей.

Wang 1998 [22] с помощью МГЭ изучает нелинейную динамику пузырька около наклонной стенки. Улучшения относительно предыдущих работ касаются треангуляции начального сфериче-

ского пузырька, интегрирования коэффициентов влияния, расчета нормального вектора и касательной скорости в узлах, схеме интегрирования по времени и т.д. Проведены расчеты для пузырька, находящегося от наклонной стенки на расстоянии одного, двух и трех его максимальных радиусов (R_m), с различными значениями параметров, определяющих выталкивающую силу, и разным наклоном стенки. Если пузырек в начале отстоит от наклонной стенки на расстояние $3R_m$ или более, то струя является близкой к симметричной. Направление струи, приблизительно, такое же как и движение центра пузырька. Когда пузырек отстоит от стенки, примерно, на $2R_m$, струя осесимметричная и направлена вверх. Когда пузырек отстоит от стенки на расстояние R_m или меньше, а выталкивающая сила и сила притяжения Бьеркнесса являются сравнимыми, струя также направлена, приблизительно, вверх.

В работе Zhang, Yeo, Khoo and Chong 1999 [23] предлагается трехмерный вариант МГЭ с устраненными особенностями. В контексте динамики пузырька изучается выбор параметров для десингуляризации, что является критическим для успеха данного метода. При их правильном выборе параметров он является намного эффективнее, чем существующие. Это связано с простой метода десингуляризации. Кроме того, предлагается простой и привлекательный способ измельчения сетки. Хотя при этом временной шаг имеет тенденцию к уменьшению по мере сближения двух поверхностей, это можно легко преодолеть путем временного перехода к прямому методу. Затем предлагаемый метод можно вновь использовать для изучения сложных двусвязных областей, включая тороидальные пузырьки, что иначе сделать трудно.

Harris, Verma and Chakrabarti 1999 [24] используют МГЭ для исследования взаимодействия взрывного пузырька с фиксированной жесткой конструкцией. В данной работе представляется модифицированная форма МГЭ для описания движения пузырька вблизи твердой конструкции. Представлены результаты расчетов

типичных осесимметричных задач.

Blake, Keen, Tong and Wilson 1999 [25] рассматривают с применением МГЭ динамику пузырька возле осцилирующей поверхности, удар струй и разрушение поверхностей, взаимодействие пузырьков, пузырьковые кластеры и поведение пузырьков около неровной поверхности.

Афанасьев и Григорьева 2000 [26] используют МГЭ для описания взаимодействия пузырька со стенкой при разных радиусах пузырька, расстояниях от стенки, положений стенки.

В работе Brujan, Keen, Vogel and Blake 2002 [27] с помощью МГЭ и экспериментально рассматривается финальная стадия коллапса произведенного лазером кавитационного пузырька вблизи твердой границы. Временная эволюция струи жидкости, образующейся при коллапсе пузырька, испускание ударной волны и эффект "всплеска" изучаются с помощью высокоскоростной фотографии до 5 миллионов кадров в секунду. МГЭ дает изолинии давления и поле вектора скорости жидкости и формы пузырька. Согласование экспериментальных и теоретических форм пузырька и перемещения его центра вполне удовлетворительное.

Zhang Z and Zhang H 2004 [28] с помощью МГЭ рассматривают влияние поверхностного натяжения на поведение чисто паровой полости или полости, содержащей некоторое неконденсируемое включение. Полость растет, коллапсирует и отскакивает осесимметрично возле твердой стенки. Рассматриваются различные значения безразмерного расстояния до стенки, выталкивающей силы и поверхностного натяжения.

Zhang Z and Zhang H 2005 [29] применяют МГЭ для изучения влияния поверхностного натяжения на динамику двух изначально сферических полостей, растущих и коллапсирующих осесимметрично около твердой стенки. Варьируются размеры полости, расстояния между пузырьками и между пузырьками и стенкой, числа Вебера. Обнаружено, что когда более низкая полость на-

много меньше более высокой, а число Вебера меньше или равно 20, поверхностное натяжение в ходе коллапса имеет существенное влияние на поведение нижней полости. Это проявляется в изменении формы и направления ее струи, если силы Бьеркнесса, действующие на нижнюю полость со стороны верхней полости и стенки примерно равны. Во всех других случаях, когда числа Вебера больше или равны 10, поверхностное натяжение не имеет качественного влияния на поведение полости, а вызывает лишь изменение длины, ширины или размеров струи жидкости.

Afanasiev and Grigorieva 2006 [30] методом ГЭ изучают трехмерную динамику парогазового пузырька в неограниченной жидкости и взаимодействие пузырька с наклонной стенкой. Жидкость невязкая несжимаемая, движение безвихревое. Изучаются высота струи, ее направление и скорость. Для оценки эффекта эрозии стенки применяется коэффициент проникновения струи.

Lee, Klaseboer and Khoo 2007 [31] методом ГЭ исследуют формирование тороидального пузырька в конечной стадии коллапса полости в окрестности твердой границы. Дальнейшая эволюция (отскок) тороидального пузырька рассматривается с учетом потерь энергии системы. Представлен пример расчета наблюдаемой в экспериментах обратной струи.

Кроме того, для описания роста и коллапса пузырька возле твердой стенки, свободной поверхности или другого пузырька вариации МГЭ применялись в работах Lenoir 1976 [32], Prosperetti 1982 [33], Taib, Doherty, and Blake 1984 [34], Taib 1985 [35], Blake, Taib, and Doherty 1987 [36].

Следует отметить, что ГИУ для рассматриваемых задач представляют собой интегральные уравнения Фредгольма первого рода, имеющие сингулярные ядра (в осесимметричном случае эти ядра включают полные эллиптические интегралы с логарифмической особенностью). Для их вычисления применяются специальные квадратурные формулы (Stroud and Secrest 1966 [37]).

Наряду с методом граничных элементов для описания динамики пузырьков у стенок применяются также и ряд других методов. Отметим некоторые из них.

Mitchell, Kling, Cheeseweight and Hammit 1967 [38] исследовали несимметричное схлопывание пустого пузырька у стенки модифицированным методом маркеров и ячеек (МАС) Harlow and Welch 1965 [39].

Plesset and Chapman 1970 [40] разработали конечно-разностный метод решения задач динамики пузырька в терминах потенциала скорости. Этот метод экономичнее, чем метод маркеров и ячеек (МАС) Harlow and Welch 1965 [39] за счет учета потенциальности движения жидкости. Вязкость и сжимаемость жидкости не учитываются.

Plesset and Chapman 1971 [4] рассмотрели коллапс изначально сферического парового пузырька у стенки. Задача решается численно разработанным авторами конечно-разностным методом в терминах потенциала скорости Plesset and Chapman 1970 [40]. Вязкость и сжимаемость жидкости не учитываются. Рассмотрены случаи, когда в начальный момент времени пузырек находится в контакте со стенкой и на расстоянии половины радиуса. Показано, что на ранней стадии коллапса пузырек формирует направленную к стенке струю. Скорость струи в момент ее контакта с противоположной стороной поверхности пузырька равна 130 м/с в первом случае и 170 м/с – во втором. Струя формируется рано, так что эффекты сжимаемости в жидкости и паре несущественны.

Mitchell and Hammit 1973 [41] исследовали несимметричное схлопывание пустого пузырька у стенки модифицированным методом маркеров и ячеек (МАС) Harlow and Welch 1965 [39]. Жидкость несжимаемая. Эффекты вязкости жидкости учтены внутри жидкости и в граничных условиях на стенке. В окрестности границы пузырька они считаются пренебрежимо малыми.

Bevir and Fielding 1974 [42] применили приближенный подход

с использованием интегральных уравнений для описания ранних стадий коллапса пузырька. В нем применяется распределение источников и производных (например, дублетов), целиком содержащихся в пределах пузырька и расположенных вдоль оси симметрии. Преимущество такого метода в том, что он требует меньше расчетного времени по сравнению с конечно-разностным методом "маркеров и ячеек" применяемым Plesset and Chapman 1971 [4] и Mitchell and Hammit 1973 [41]. Его главный недостаток состоит в том, что его нельзя применять для поздней стадии коллапса.

В работах Ryskin and Leal 1983 [43], Ryskin and Leal 1984a [44], Ryskin and Leal 1984b [45], Ryskin and Leal 1984c [46], предлагается конечно-разностный метод решения задач динамики пузырьков с применением адаптивных сеток.

Shopov, Minev, Bazhlevkov, and Zapryanov 1990 [47] применяют метод конечных элементов для изучения взаимодействия деформируемого пузырька с твердой стенкой при умеренных числах Рейнольдса. Нестационарное вязкое течение, вызванное деформируемым газовым пузырьком, приближающимся или удаляющимся от стенки, изучается при умеренных числах Рейнольдса в рамках полных уравнений Навье-Стокса. Пузырек движется под влиянием выталкивающей силы. Работоспособность численного метода демонстрируется на двух примерах: пузырек движется в полупространстве, ограниченном твердой пластиной, и в сферическом контейнере, заполненном вязкой жидкостью. Получены результаты для различных чисел Рейнольдса. Проведено сравнение с известными теоретическими и экспериментальными данными.

Popinet and Zaleski 2002 [48] численно изучают эффект вязкости на формирование струй при коллапсе пузырьков около твердой поверхности. Представлена методика численного решения уравнений Навье-Стокса с условиями на свободной поверхности. Получено хорошее согласование с экспериментальными данными для коллапса больших пузырьков. Однако отскоки полу-

чаются больше, чем в эксперименте, что, по-видимому, связано с пренебрежением эффектами сжимаемости и теплопроводности.

Sankin and Zhong 2006 [49] изучают взаимодействие созданных лазером отдельных пузырьков (со временем коллапса 121 мкс) около силиконовой резиновой мембраны с ударной волной (с пиковым давлением 55 МПа и длительностью импульса сжатия 1.7 мкс). Это взаимодействие ведет к направленному вынужденному несимметричному коллапсу пузырька с формированием микроструи к поверхности. Максимальное проникновение струи в мембрану возникает в ходе фазы коллапса пузырька при оптимальных значениях времени подхода ударной волны и расстояния от поверхности. Такое взаимодействие может обеспечивать уникальное акустическое средство для микроинъекции, применяемое для доставки макромолекул и генов к биологическим тканям.

Обзор ранних работ по динамике пузырьков около границ можно найти в работе Blake and Gibson 1987 [1].

Таким образом, если деформации пузырька малые, то при изучении динамики пузырька около поверхности тела обычно используют модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. В противном случае, как правило, используют метод граничных элементов или методы конечных разностей и конечных элементов. С вычислительной точки зрения метод граничных элементов уступает по экономичности методу Рунге-Кутты, но значительно превосходит методы конечных разностей и конечных элементов. С другой стороны, при использовании методов граничных элементов, конечных разностей и конечных элементов деформации поверхности пузырьков могут быть практически произвольными. При этом в методах конечных разностей и конечных элементов можно довольно полно учесть эффекты вязкости жидкости, ее теплообмена с пузырьками и т.д.

§ 3. Схлопывание пузырьков на режиме с ударными волнами

Несмотря на большое количество исследований воздействия кавитации на стенки ряд важных режимов динамики пузырька вблизи тела и возникающих при этом в теле напряжений до сих пор остается неизученным. Это обусловлено тем, что в существующих моделях жидкость около пузырька, как отмечалось, счи-

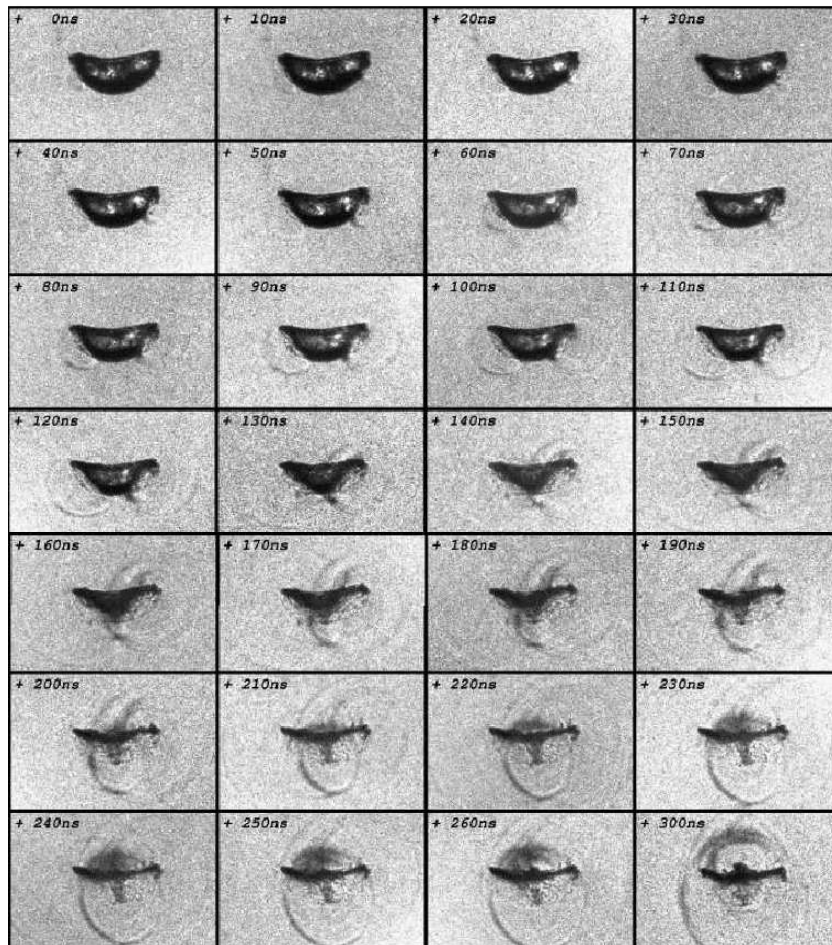


Рис. 8: Фотографии изменения форм пузырька и возникающих при этом в жидкости ударных волн при сильном несферическом схлопывании пузырька (Mettin, Luther, Lindau and Lauterborn [50]).

тается несжимаемой, газ в пузырьке – гомобарическим, а тело – недеформируемым. Вместе с тем, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в финале сильного несферического схлопывания пузырька в жидкости в его окрестности могут возникать ударные волны довольно сложной конфигурации.

Пример такого схлопывания приведен на рис. 8, где представлена серия экспериментальных фотографий Mettin, Luther, Lindau and Lauterborn [50]. Фотографии демонстрируют изменение формы межфазной поверхности и волновой картины в жидкости в заключительной стадии сильного несферического схлопывания пузырька. Размер кадров – 1.3 мм × 0.8 мм, разрешение – 100 миллионов кадров/сек, последовательность кадров в рядах – слева направо, а рядов – сверху вниз.

Видно, что в конце сжатия пузырька его форма сильно изменяется. Возникает ряд ударных волн. Вслед за струей, показанной на приведенных выше рисунках, образуется также и струя с противоположным направлением движения (так называемая "обратная струя"), что хорошо видно на последнем кадре. Ясно, что для описания воздействия пузырька на тело при таком схлопывании необходимо правильно описывать распространение ударных волн и в жидкости, и в деформируемом теле, и, возможно, в полости пузырька.

§ 4. Ударное воздействие пузырьков на твердые тела

Рассмотрим схлопывание пузырька у стенки в ударно-волновом режиме (т.е. в режиме с образованием ударных волн). Для этого воспользуемся упрощенными моделями схлопывания пузырька, учета сжимаемости жидкости и упругости твердого тела.

Задачу схлопывания пузырька будем считать осесимметричной, с осью симметрии z , направленной перпендикулярно плоской поверхности тела. За начало отсчета времени $t = 0$ примем момент, когда кончик струи касается либо поверхности тела (рис.9а,

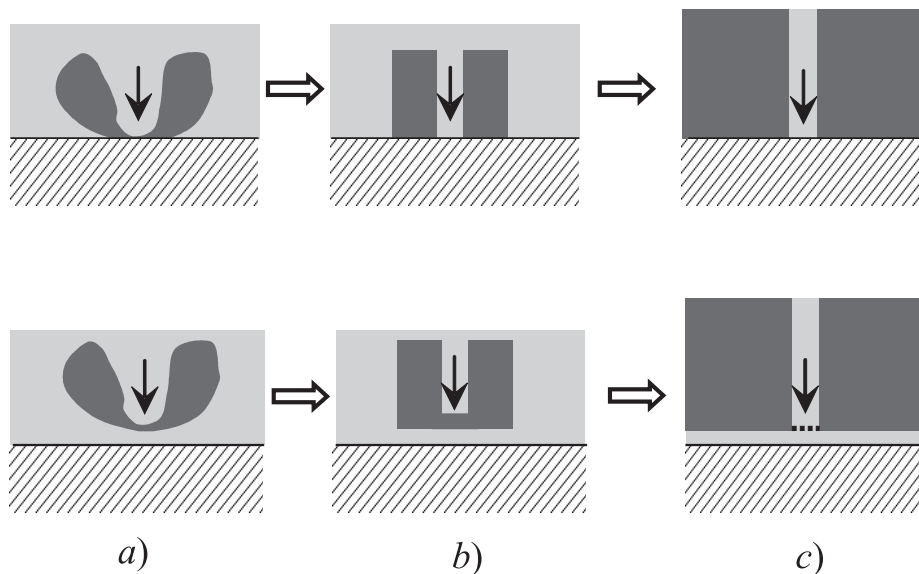


Рис. 9: Упрощение формы пузырька (слева направо) при наличии на его поверхности высокоскоростной струи для расчетов с целью получения качественных оценок влияния струи на твердое деформируемое тело.

сверху), либо противоположной (нижней) части поверхности пузырька (рис.9а, снизу). Во втором случае между пузырьком и стенкой имеется прослойка жидкости. Упростим форму пузырька, как указано на рис.9б. Кроме того, примем, что по сравнению с поперечным размером струйки полость пузырька является настолько большой, что влиянием ее верхней и боковой поверхностей можно пренебречь. В результате в начальный момент времени будем иметь конфигурацию, показанную на рис.9с.

Для оценки влияния ударного воздействия струи на тело воспользуемся двумя моделями. В первой модели будем учитывать деформируемость тела, но с упрощенным описанием динамики жидкости по модели линейной акустики. Такая модель даст возможность оценить возникающие в теле напряжения. Во второй модели тело будем считать абсолютно жестким, но динамику жидкости будем описывать по более полной модели с учетом конвекции. Это позволит проследить влияние растекания жидкости

вдоль поверхности тела, что не учитывается в модели линейной акустики.

§ 5. Упрощенная модель ударного воздействия струи на твердые деформируемые тела

Для описания динамики жидкости принимается модель линейной акустики

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь ρ_0 , c_0 – плотность и скорость звука в жидкости, u , v – компоненты скорости по осям r и z .

Для описания динамики твердого деформируемого тела взята модель линейно-упругого тела

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{s}{r} \right), \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right).\end{aligned}$$

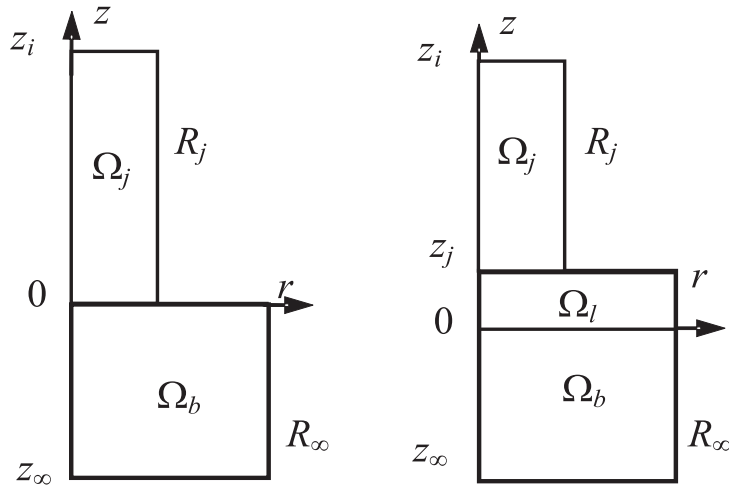


Рис. 10: Расчетные области в случае непосредственного контакта струи с поверхностью тела (слева) и при наличии между струей и телом прослойки жидкости (справа).

Здесь ρ – невозмущенная плотность материала тела, $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$, – нормальные напряжения вдоль соответствующих осей, s – касательное напряжение на площадках с нормальными по осям r или z , λ, μ – коэффициенты Ламэ.

С учетом осевой симметрии расчетные области (рис.10) можно представить как сумму прямоугольных областей: области струи $\Omega_j = (0 \leq r \leq R_j) \times (z_j \leq z \leq z_i)$, области прослойки жидкости $\Omega_l = (0 \leq r \leq R_\infty) \times (0 \leq z \leq z_j)$ и области упругого тела $\Omega_b = (0 \leq r \leq R_\infty) \times (z_\infty \leq z \leq 0)$. Здесь R_j – радиус струи, $z = z_j$ – поверхность контакта струи и прослойки (при $0 \leq r \leq R_j$), $z = 0$ – поверхность контакта между телом и жидкостью. При отсутствии прослойки (рис.10, слева) – $\Omega_l = \emptyset$ и $z_j = 0$. Величины R_∞, z_i, z_∞ – радиальная и осевые координаты искусственных границ расчетной области, обычно вводимых при использовании численных методов для бесконечных областей.

Граничные условия задачи при отсутствии прослойки приведе-

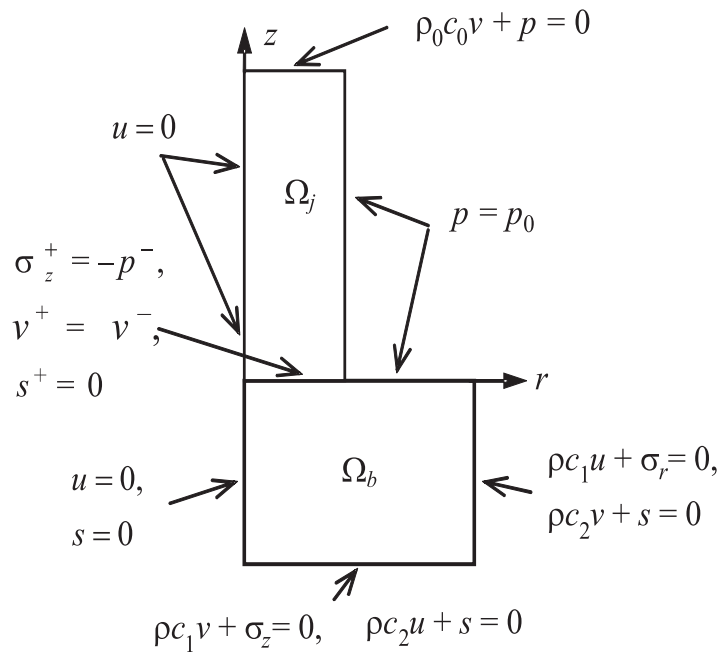


Рис. 11: Условия на границах расчетной области в случае непосредственного контакта струи с поверхностью тела.

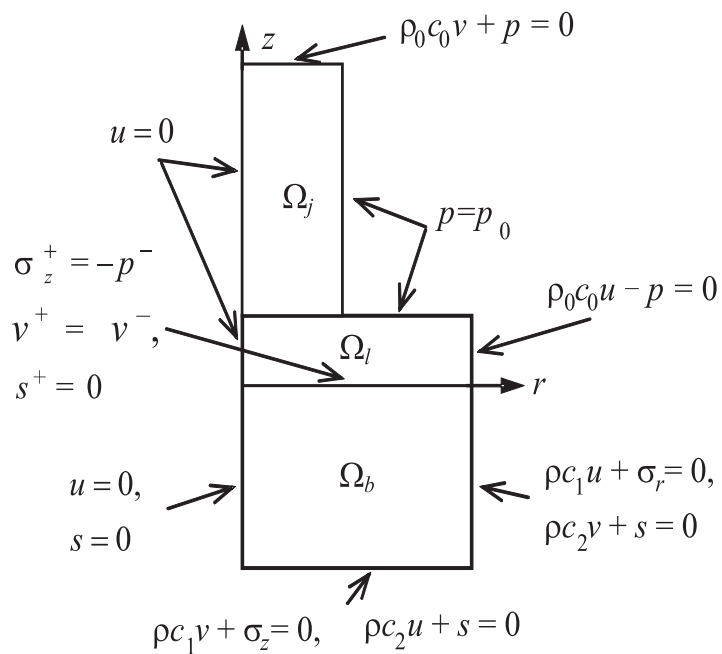


Рис. 12: Условия на границах расчетной области в случае наличия между струей и телом прослойки жидкости.

ны на рис. 11, а при ее наличии – на рис. 12. На этих рисунках $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ – скорость распространения волн растяжения-сжатия, $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ – скорость распространения волн сдвига. В обоих случаях на искусственных границах $z = z_i$, $z = z_\infty$ и $r = R_\infty$ ставятся приближенные неотражающие условия [51], боковая поверхность струи $r = R_j$ является свободной поверхностью. На поверхности между телом и жидкостью накладываются контактные условия равенства нормальных напряжений (касательные напряжения в жидкости равны нулю) и нормальных составляющих вектора скорости. На левой границе областей жидкости и тела выполняются условия симметрии.

Свободными поверхностями являются части граничной поверхности расчетной области $z = 0$ (для расчетной области без прослойки) или $z = z_j$ (для области с прослойкой), не являющиеся межфазными границами "жидкость-упругое тело" или "жидкость-жидкость".

Начальные условия имеют следующий вид

$$\Omega_j : p = p_0, u = 0, v = v_0.$$

$$\Omega_l : p = p_0, u = 0, v = 0.$$

$$\Omega_b : \sigma_z = -p_0, \sigma_r = \sigma_\varphi = -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}p_0, s = 0, u = 0, v = 0.$$

Начальные значения напряжений σ_r и σ_φ в теле соответствуют нулевым значениям деформаций в направлениях r и φ .

§ 6. Ударное воздействие струи на твердые деформируемые тела

Рассмотрим ударное воздействие струи на твердое деформируемое тело в рамках принятой выше постановки задачи при следующих данных: $\rho = 8000$ кг/м³, $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $c_1 = 5742.9$ м/с, $c_2 = 3069.7$ м/с, $c_0 = 1500$ м/с, $p_0 = 0.1$ МПа, $z_\infty = 100$ мкм, $z_j = 20$ мкм (при отсутствии прослойки $z_j = 0$), $z_i - z_j = 60$ мкм,

$R_j = 20$ мкм, $R_\infty = 100$ мкм для скорости струи $v_0 = -100$ м/с. Они соответствуют удару водяной струи по стальному телу. Расчеты проводились методом Годунова первого порядка точности [52] на прямоугольной разностной сетке с ее последовательным измельчением до сходимости численного решения.

Результаты вычислений для расчетной области без прослойки жидкости приведены на рис. 13, 15*a*, для области с прослойкой на рис. 14, 15*b*. На рис. 13, 14 показаны изолинии давления жидкости p и осевого напряжения $-\sigma_z$ в шесть характерных последовательно возрастающих моментов времени t_{1-6} . На рис. 15 даны распределения давления жидкости p и осевого напряжения $-\sigma_z$ вдоль оси симметрии z для двух моментов времени (стрелкой указано направление движения струи). На рис. 13, 14 видно распространение ударных волн и волн сжатия в жидкости и сжимающих напряжений в твердом теле. Видны также и их постепенная трансформация и формирование областей с отрицательным давлением в жидкости и растягивающими напряжениями в твердом теле. Более подробную информацию о положениях максимумов сжимающих напряжений в теле и их числовых значениях можно получить из рис. 15.

Примечательно, что в случае без прослойки (рис. 13, 15*a*) максимальные сжимающие напряжения в теле (момент t_3) оказываются значительно больше (примерно в 1.5 раза) тех, что образуются в момент начального соприкосновения струи и тела (момент t_1). Характерно, что максимум этих напряжений достигается на оси симметрии не непосредственно на поверхности тела, а на некотором удалении от нее (порядка 0.5 радиуса струи). Анализ показывает, что оба эти эффекта связаны с влиянием сдвиговых напряжений. При формальном уменьшении модуля сдвига, например, в 10 раз указанный максимум функции $-\sigma_z(r, z)$ уменьшается до своего значения в момент $t = t_1$.

Следует также отметить возникающую в момент t_6 на поверх-

ности тела и возле нее в окрестности оси симметрии область со значительными растягивающими напряжениями (рис. 13). В этой зоне могут происходить откольные разрушения. Приведенные на

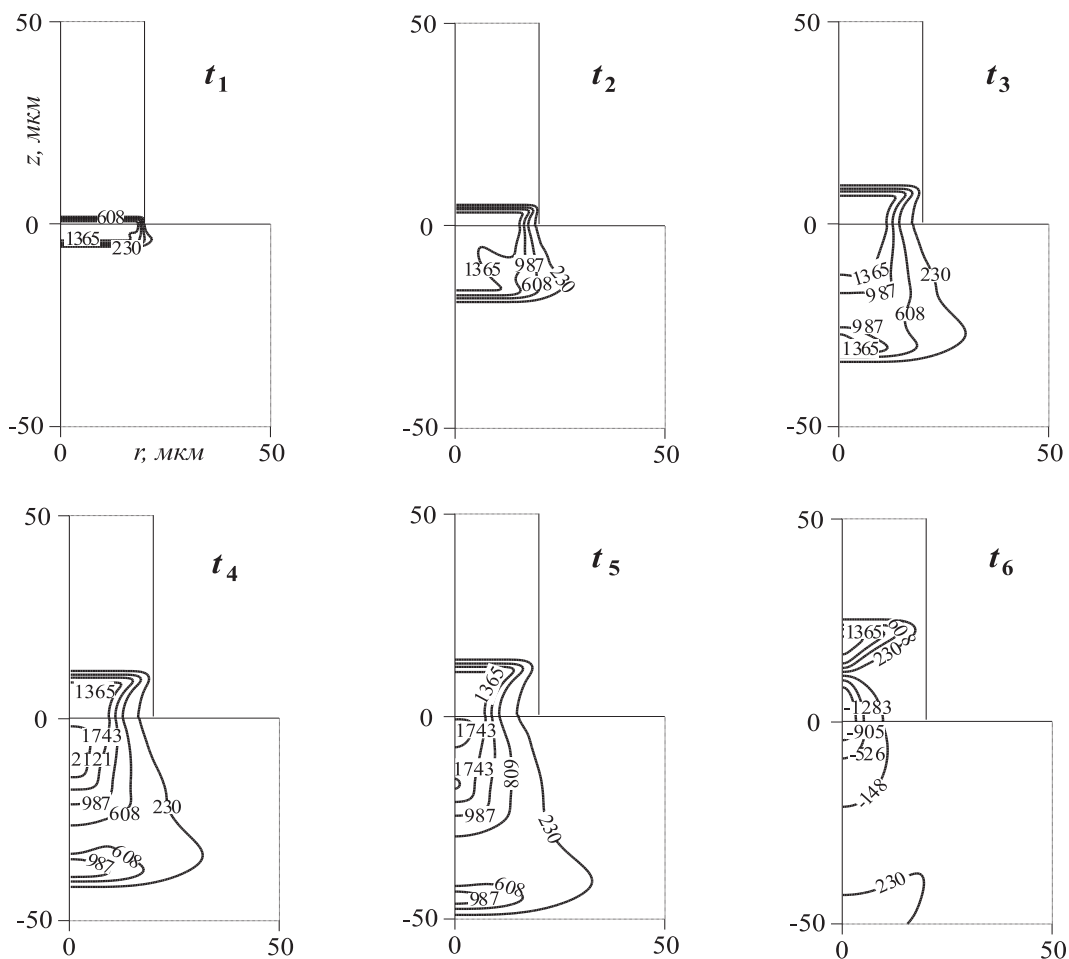


Рис. 13: Изолинии давления в жидкости $p(r, z)$ и осевых напряжений в упругом теле $-\sigma_z(r, z)$ (в барах) в шесть последовательных моментов времени t_{1-6} в случае непосредственного удара струи по поверхности тела.

рис. 14, 15b результаты показывают, что наличие между струей и поверхностью тела прослойки жидкости, хотя и ослабляет отмеченные выше эффекты, но не устраняет их полностью. И здесь максимум сжимающих напряжений, как в случае без прослойки, находится на некотором удалении от поверхности тела. Возника-

ют также значительные растягивающие напряжения, что может приводить к откольным разрушениям.

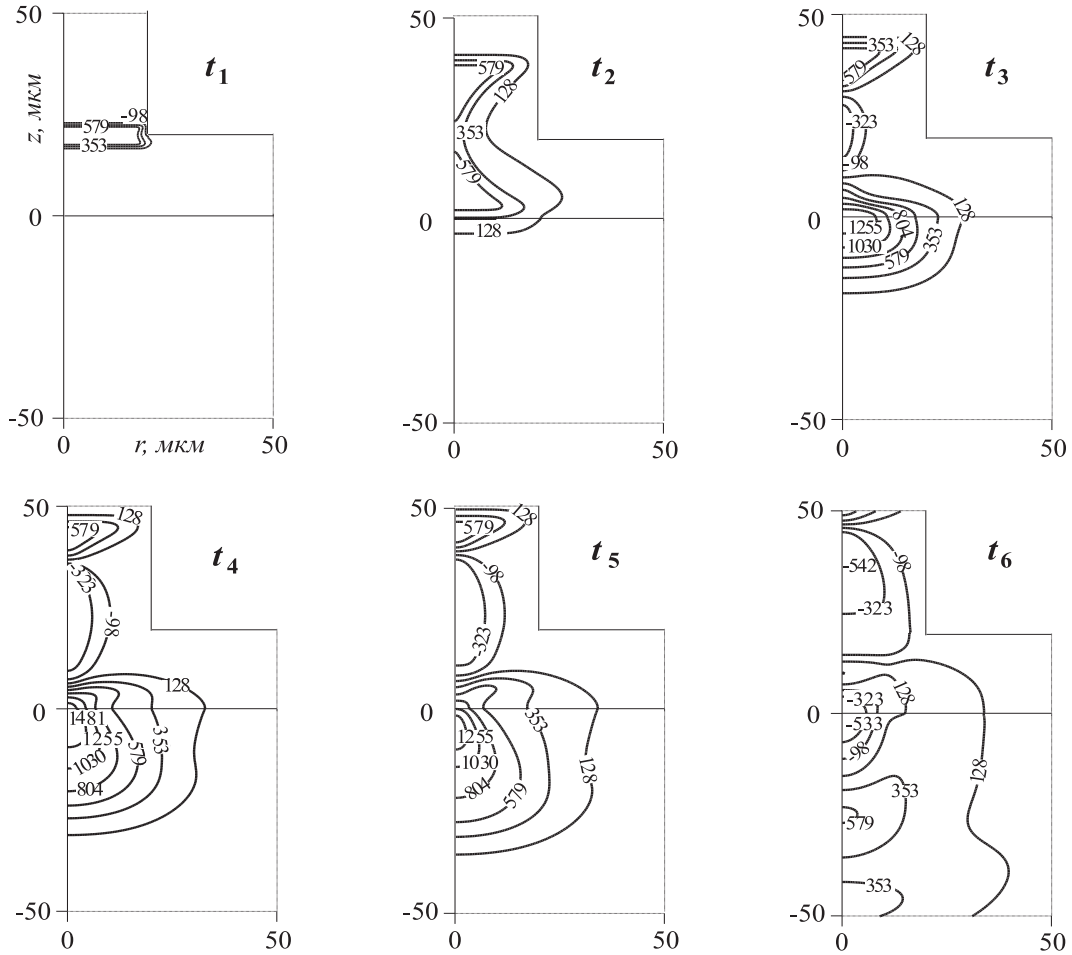


Рис. 14: Изолинии давления в жидкости $p(r, z)$ и осевых напряжений в упругом теле $-\sigma_z(r, z)$ (в барах) в шесть последовательных моментов времени t_{1-6} в случае наличия между струей и телом прослойки жидкости.

Таким образом, можно заключить, что при ударном воздействии струи на тело в нем могут возникать как большие сжимающие, так и значительные растягивающие напряжения. Причем в результате взаимодействия волн сжатия и сдвига сжимающие напряжения могут достигать своих максимальных значений не на поверхности тела, а на некотором удалении от нее.

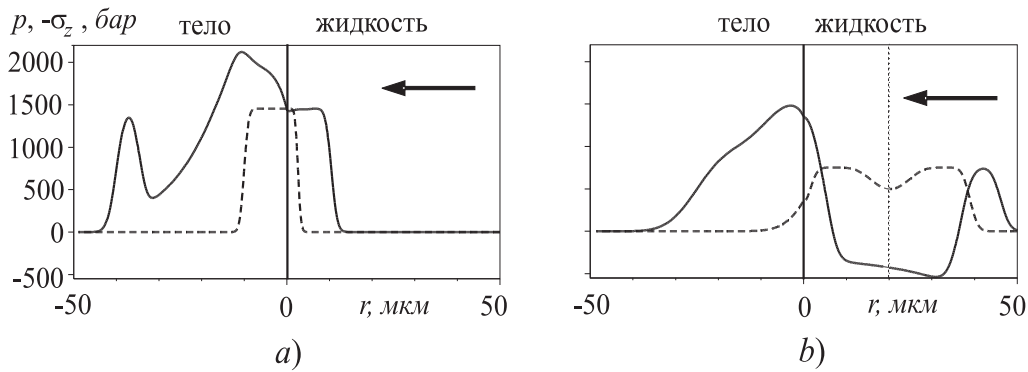


Рис. 15: Профили давления в жидкости $p(0, z)$ и осевых напряжений в упругом теле $-\sigma_z(0, z)$ вдоль оси симметрии z в случае непосредственного удара струи по поверхности тела (a) и при наличии между струей и телом прослойки жидкости (b).

Расчеты также показывают, что при выбранных характеристиках упругого тела (сталь) обратное влияние деформаций тела на волны в жидкости незначительно.

§ 7. Упрощенная модель ударного воздействия струи на жесткую стенку

Учитывая слабую зависимость волн в жидкости от упругости тела, оценка влияния конвективных слагаемых уравнений динамики жидкости, т.е. влияния растекания струи по стенке, была сделана без учета деформируемости тела. При этом был рассмотрен только случай, когда прослойка жидкости между струей и стенкой отсутствует.

Для описания динамики жидкости в струе была принята следующая система уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0,$$

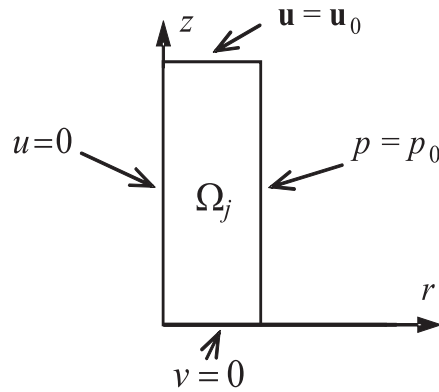


Рис. 16: Расчетная область и условия на ее границах в случае удара струи о поверхность недеформируемого тела.

где \mathbf{u} – вектор скорости жидкости, ρ – переменная плотность жидкости. Система замыкается баротропным уравнением состояния $p = p(\rho)$.

Расчетная область в данном случае состоит лишь из одной области струи Ω_j . Она показана на рис. 16. Там же приведены и условия на ее границах. В начальный момент времени принимается $p = p_0, \rho = \rho_0, u = 0, v = v_0$.

§ 8. Ударное воздействие струи на жесткую стенку

Расчеты ударного воздействия струи на жесткую стенку в рамках принятой в предыдущем параграфе постановки задачи выполнены при тех же входных данных, что использовались выше при рассмотрении воздействия струи на упругое тело, варьировалась лишь скорость струи v_0 . Результаты расчетов приведены на рис. 17*a, b* в виде изолиний давления жидкости p в три характерных последовательно возрастающих момента времени t_{1-3} для скорости струи $v_0 = -10$ м/с (рис. 17*a*) и $v_0 = -100$ м/с (рис. 17*b*). На рис. 17*c* для сравнения приведено также и численное решение этой же задачи, полученное с применением модели линейной акустики при $v_0 = -100$ м/с.

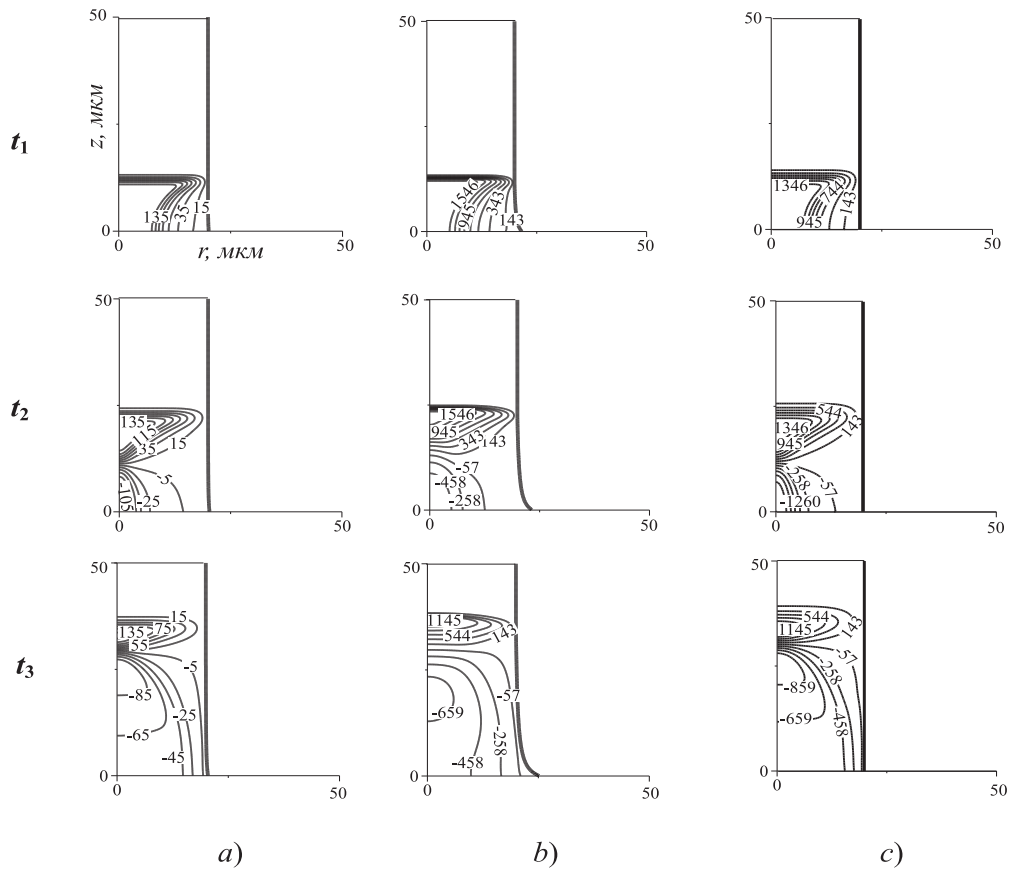


Рис. 17: Изолинии давления жидкости $p(r, z)$ (в барах) в три последовательных момента времени t_{1-3} при ударе струи о поверхность недеформируемого тела. Решение задачи с учетом (a – для скорости струи -10 м/с, b – для скорости струи -100 м/с, модель нелинейной гидродинамики) и без учета (c – для скорости струи -100 м/с, модель линейной акустики) растекания жидкости по поверхности тела.

Видно, что по мере увеличения скорости струи влияние конвективных слагаемых уравнений динамики жидкости возрастает. В частности, поле давления с учетом этих слагаемых при $v_0 = -10$ м/с (рис. 17а) хорошо приближается полем, полученным без их учета (рис. 17с). При $v_0 = -100$ м/с поля давления, полученные по двум моделям, заметно различаются (рис. 17б). При $v_0 = -100$ м/с видно, что возникает искривление боковой поверхности струи около поверхности стенки, обусловленное рас-

течением жидкости. Вместе с тем, качественное различие полей изолиний даже в момент времени $t = t_3$ все еще остается незначительным.

Таким образом, растекание струи может оказывать влияние на величину давления, действующего на тело. Однако величина максимальных сжимающих и растягивающих напряжений может измениться при этом незначительно в силу того, что эти экстремальные значения достигаются через довольно короткий промежуток времени после начала ударного воздействия струи.

Заключение

Характер воздействия высокоскоростной струи, возникающей на поверхности сильно схлопывающегося пузырька, на твердое деформируемое тело в режиме с ударными волнами (ударного воздействия) остается неизученным. С помощью упрощенных моделей ударного воздействия высокоскоростной струи на твердое деформируемое тело показано, что в теле могут возникать как большие сжимающие, так и значительные растягивающие напряжения, что на практике может приводить к образованию в них трещин и разрушений. При этом экстремальные значения сжимающих напряжений могут возникать не на поверхности тела, а на некотором удалении от нее.

Показано, что растекание струи может оказывать влияние на величину давления, действующего на упругое тело. Однако, при скорости струи до 100 м/с это влияние не столь велико и при расчетах можно использовать акустическую модель.

Для уточнения приведенных результатов в режиме с ударными волнами требуется проведение дополнительных исследований с применением более точных моделей.

Благодарности

Работа выполнена в рамках программ РАН и при поддержке

РФФИ (код проекта 08-01-00215). Авторы благодарны к.ф.-м.н. Халитовой Т.Ф. за предоставленные результаты расчетов, использованные в последнем параграфе, и помощь в оформлении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Blake J. R., Gibson D. C.* Cavitation bubbles near boundaries // An.Rev.Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 99–123.
- [2] *Rayleigh Lord.* On the pressure developed in a liquid on a collapse of a spherical cavity // *Phylos Mag.* 1917. V. 34. № 200. P. 94–97.
- [3] *Kornfeld M. And Suvorov N.* On the destructive action of cavitation // *App. Phys.* 1944. V. 15. P. 495–506.
- [4] *Plesset M. S., Chapman R. B.* Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 47. P. 283–290.
- [5] *Lauterborn W., Bolle H.* Experimental investigations of cavitation-bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 72. P. 391–399.
- [6] *Blake J. R., Keen G. S., Tong R. P. and Wilson M.* Acoustic cavitation: the fluid dynamics of non-spherical bubbles // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1999. V. 357. P. 251-267.
- [7] *Shima A., Sato Y.* The collapse of a spherical bubble between near a solid wall // *J. Mec.* 1981. V. 20. P. 253-271.
- [8] *Chahine G.L., Bovis A.G.* Pressure field generated by non-spherical bubble collapse // *Trans. ASME. J. Fluid Eng.* 1983. V. 105. P.356-363.
- [9] *Аганин А. А., Давлетшин А. И.* Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // *Математическое моделирование.* 2009. Т. 21. № 6. С. 89–102.

- [10] *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. №3. С. 559-562.
- [11] *Воинов О.В., Воинов В.В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. №1. С. 63-66.
- [12] *Blake J.R., Taib B.B., Doherty G.* Transient cavities near boundaries. Part 1. Rigid boundary // Journal of Fluid Mechanics Digital Archive. 1986. V. 170. P. 479-497.
- [13] *Kurbatskii K.A., Kedrinskii V.K.* Collapse of a bubble in the cavitation zone near a rigid boundary // The Journal of the Acoustical Society of America. October 1992. V. 92. Issue 4. P. 2453.
- [14] *Best J. P.* The formation of toroidal bubbles upon the collapse of transient cavities // Journal of Fluid Mechanics. 1993. V. 251.P. 79-107.
- [15] *Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y.* Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary// Journal of Fluid Mechanics Digital Archive. 1993. V. 255. P. 707-721.
- [16] *Chahine G.L., Duraiswami R.* Boundary element method for calculating 2-D and 3-D underwater explosion bubble behavior in free water and near structures. NSWC Weapons Research and Technology Department Report NCWCDD/TR-93/44.
- [17] *Boulton-Stone J.M.* A comparison of boundary integral methods for studying the motion of two-dimensional bubble in an infinite fluid // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1993a. V. 102. P.213-234.

- [18] *Sato K., Tomita Y., Shima A.* Numerical analysis of a gas bubble near a rigid boundary in an oscillating pressure field. // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 95. P. 2416-2424.
- [19] *Robinson P.B., Boulton-Stone J.M., Blake J.R.* Application of the boundary integral method to the interaction of rising two-dimensional deformable gas bubbles // Journal of Engineering Mathematics. 1995. V. 29. P. 393.
- [20] *Blake J.R., Hooton M.C., Robinson P.B., Tong R.P.* Collapsing cavities, toroidal bubbles and jet impact // Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser.A. 1997. V. 355. №1724. P. 537-550.
- [21] *Blake J.R., Tomita Y., Tong R.P.* The Art, Craft and Science of Modelling Jet Impact in a Collapsing Cavitation Bubble // Applied Scientific Research. 1998. V. 58. N(1-4). P. 77-90.
- [22] *Wang Q.X.* The Evolution of a Gas Bubble Near an Inclined Wall // Theoret. Comp. Fluid Dynamics. 1998. V. 12. N1. P. 29-51.
- [23] *Zhang Y.L., Yeo K.S., Khoo B.C., Chong W.K.* Simulation of three-dimensional bubbles using desingularized boundary integral method // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1999. V. 31. P. 1311.
- [24] *Harris P.J., Verma A., Chakrabarti R.* Interaction of an explosion bubble with a fixed rigid structure // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1999. V. 29. P. 389.
- [25] *Blake J.R., Keen G.S., Tong R.P., Wilson M.* Acoustic cavitation: the fluid dynamics of non-spherical bubbles // Phyl. Trans. R. Soc. Lond. A. 1999. V. 357. P. 251-267.
- [26] *Афанасьев К.Е., Григорьева И.В.* Исследование эволюции пространственного кавитационного пузыря около твердой

стенки в идеальной несжимаемой жидкости при наличии поверхностного натяжения // Тр. Мат. центра им. Лобачевского. 2000. Т. 7. С. 38-42.

- [27] *Brujan E.A., Keen G.S., Vogel A., Blake J.R.* The final stage of the collapse of a cavitation bubble close to a rigid boundary // *Physics of Fluids* - January. 2002. V. 14. №1. P 85-92.
- [28] *Zhang Z.Y., Zhang H.S.* Surface tension effects on the behavior of a cavity growing, collapsing, and rebounding near a rigid wall // *Physical Review E* 2004. V. 70. P. 056310.
- [29] *Zhang Z.Y., Zhang H.S.* Surface tension effects on the behavior of two cavities near a rigid wall // *Physical Review E* 2005. V. 71. P. 066302.
- [30] *Afanasiev K.E., Grigorieva I.V.* Numerical investigation of three-dimensional bubble dynamics // *Journal of Engineering Mathematics*. 2006. V. 55. N(1-4). P. 65-80.
- [31] *Lee M., Klaseboer E., Khoo B.C.* On the boundary integral method for the rebounding bubble // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. V. 570. P. 407-429.
- [32] *Lenoir M.* Calcul numerique de l'implosion d'une bulle de cavitation au voisinage d'une paroi ou d'une surface libre // *J. Mec.* 1976. V. 15. P. 725-751.
- [33] *Prosperetti A.* Bubble dynamics: a review and some recent results // *ApplJ. Sci. Res.* 1982. V. 38. P.145-164.
- [34] *Taib B.B., Doherty G., Blake J.R.* Boundary integral methods applied to cavitation bubble dynamics // *Proc.Cent. for Math. Anal. ANU Math. Program. and Numerical Anal Workshop*. Ed S.A. Gustafson, R.S. Womersley. 1984. V. 6. P.166-186.
- [35] *Taib B.B.* Boundary integral methods applied to cavitation bubble dynamics // *PhD thesis. Univ. Wollongong. Australia.*

- [36] *J.R., Taib B.B., Doherty G.* Transient cavities near boundaries Part 2. Free surface // Journal of Fluid Mechanics Digital Archive. 1987. V. 181. P. 197-212.
- [37] *Stroud A.H., Secrest D.* Gaussian Quadrature Formulas. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall. 1966.
- [38] *Mitchell T.M., Kling C.L., Cheesewright R., Hammit F.G.* U. of Michigan. College of Eng. Rep. 1967. Rep. 07738-5-T.
- [39] *Harlow F.G. and Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surfaces // Physics of fluid. 1965. Vol. 8. P.2182-2189.
- [40] *Plesset M.S., Chapman R.B.* Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // Div. of Eng. and Appl. Science. Calif Inst. of Tech. Rep. No. 85-49.
- [41] *Mitchell T.M, Hammit F.G.* Asymmetric cavitation bubble collapse // Trans. ASME. 1973. V. D95. №.1 P. 29-37. (Перевод: Митчел, Хэммит. Несимметричное схлопывание кавитирующего пузырька. Теор. основы инж. расчетов. 1973. Т.95. № 1. С.98-107.)
- [42] *Bevir M.K., Fielding P.J.* Numerical solution of incompressible bubble collapse with jetting // In: Moving boundary Problems in Heat Flow and Diffusion (ed. J.R. Ockendon and W.R. Hodgkins)) Ckfrendon Press. 1974.
- [43] *Ryskin G., Leal L.G.* Orthogonal mapping // J. Comput. Phys. 1983. V. 56. P.71-100.
- [44] *Ryskin G., Leal L.G.* Numerical dolutions of free boundary problems in fluid mechanics. Part I. The finite-didderence technique // J. Fluid Mech. 1984a. V. 148. P.1-17.
- [45] *Ryskin G., Leal L.G.* Numerical dolutions of free boundary problems in fluid mechanics. Part II. Buoyancy-driven motion of

- a gas bubble through a quiescent liquid // J. Fluid Mech. 1984b. V. 148. P.19-36.
- [46] *Ryskin G., Leal L.G.* Numerical solutions of free boundary problems in fluid mechanics. Part III. Bubble deformation in an axisymmetric straining flow // J. Fluid Mech. 1984c. V. 148. P.37-44.
- [47] *Shopov P.J., Minev P.D., Bazhlekov I.B., Zapryanov Z.D.* Interaction of a deformable bubble with a rigid wall at moderate Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1990. V. 219. P. 241.
- [48] *Popinet S., Zaleski S.* Bubble collapse near solid boundary: a numerical study of the influence of viscosity // J. Fluid Mech. 2002. V. 464. P. 137-163.
- [49] *Sankin G.N. and Zhong P.* Interaction between shock wave and single inertial bubbles near an elastic boundary // Phys. Rev. E 2006. V. 74. P. 046304.
- [50] *Mettin R., Luther S., Lindau O. and Lauterborn W.* Investigations of cavitation bubble dynamics by means of fast Cinematography // The Intern. Conf. on multiphase systems. 2000. Gilem Publisher, Pol Publisher. Ufa. P.279-287.
- [51] *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит. 2003. 240 с.
- [52] *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

УДК 532.529.5

ИСТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОПЛА

Агишева У. О. (БГУ, Уфа)

Галимзянов М. Н. (ИМех УНЦ РАН, Уфа)

Введение

Изучение закономерностей течения двухфазных смесей в соплах является интересным с точки зрения практического применения. С каждым годом технологии сопел все шире применяются в нашей повседневной жизни. Примеры мы можем видеть повсеместно: окрасочные сопла (применяются для создания направленной струи лакокрасочного материала, с учетом вязкости вещества и необходимой толщины покрытия), абразивные сопла (используются для увеличения скорости смеси абразива и воздуха при очистке, например, металлических конструкций от окалины, старой краски, ржавчины и других загрязнений), насосы, пожарные брандспойты, бытовые пульвелизаторы. Результаты полученные при рассмотрении задач с соплами могут быть применены к задачам, связанным, например, проблемой транспортировки многофазных сред внутри загнутых труб или магистральных трубопроводов.

Подобные процессы часто встречаются в природе, а также могут применяться в новейших технологиях. Актуальность проблемы связана с анализом возможных аварийных ситуаций, вызванных, например, ударными волнами и эффектом кавитации. И наоборот, возникает необходимость усиления ударов в технологических процессах, связанных с воздействием высокого давления.

Также известно множество работ по получению нанопорошков с использованием сопел, например, при истечении бензола через сопло, сопровождаемого кавитацией, установлено образование твердых частиц, содержащих алмаз [1].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается установившееся адиабатическое течение жидкости с пузырьками газа в сопле кругового сечения. Примем следующие допущения для пузырьковой жидкости [3]: смесь является монодисперсной, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия. Все пузырьки сферические и одинакового радиуса. Отсутствует дробление и слипание пузырьков. Жидкость термостат.

В соответствии с приведенными допущениями запишем систему уравнений движения в квазиодномерном и односкоростном приближении [4]:

- уравнение сохранения массы жидкости:

$$\frac{d}{dz} [\rho_l^0 (1 - \alpha_g) v S] = 0;$$

- уравнение сохранения числа пузырьков:

$$\frac{d}{dz} (nvS) = 0;$$

- уравнение импульсов:

$$\rho_l^0 (1 - \alpha_g) v \frac{dv}{dz} = - \frac{dp_l}{dz};$$

- уравнение на давление газа в пузырьке:

$$v \frac{dp_g}{dz} = - \frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q;$$

- уравнение Рэлея-Ламба:

$$av \frac{dw}{dz} + \frac{3}{2} w^2 + 4\nu^{(v)} \frac{w}{a} = \frac{p_g - p_l - \frac{2\sigma}{a}}{\rho_l^0},$$

$$v \frac{da}{dz} = w, \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n,$$

где ρ_l^0 , α_l , α_g , v , p_l , p_g , n , a , w , γ , q , $\nu^{(v)}$, σ - соответственно плотность жидкости, объемное содержание жидкой и газовой фазы, скорость, давление в жидкости и пузырьках газа, число и радиус пузырьков, скорость радиального движения, показатель адиабаты газа, интенсивность теплообмена или тепловой поток от газа к жидкости, кинематическая вязкость жидкости, коэффициент поверхностного натяжения.

Интенсивность теплообмена q можно определить конечным соотношением для числа Нуссельта, зависящим от разности средних температур газа и жидкости:

$$q = Nu \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a},$$

где $T_0 = const$ - температура жидкости, Nu - число Нуссельта.

При описании число Нуссельта задается в виде:

$$Nu = \begin{cases} \sqrt{Pe}, & \text{если } Pe \geq 100, \\ 10, & \text{если } Pe < 100. \end{cases}$$

Для числа Пекле примем выражение:

$$Pe = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a |w|}{\nu^{(T)}}, \quad \nu^{(T)} = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}.$$

Здесь $\nu^{(T)}$, λ_g , c_g - коэффициент температуропроводности, коэффициент теплопроводности и теплоемкость газа соответственно.

Жидкость считаем несжимаемой, а газ - калорически совершенным

$$\rho_l^0 = const, \quad p_g = \rho_g^0 B T_g,$$

где B - привиденная газовая постоянная.

С учетом уравнения состояния и неразрывности для температуры газа в пузырьках можно получить:

$$\frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_{g0}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3.$$

§ 2. Приведение системы уравнений к расчетному виду

Для поставленной задачи основные параметры можно найти, решая задачу Коши. Для этого систему уравнений надо привести к расчетному виду.

Из уравнения сохранения массы жидкости с учетом уравнения состояния и уравнения сохранения числа пузырьков для скорости течения жидкости получим:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{3\alpha_g w}{a} - \frac{v}{S} \frac{dS}{dz}.$$

С учетом этой формулы, из уравнения импульсов получаем уравнение для давления в жидкости:

$$\frac{dp_l}{dz} = \rho_l^0 (1 - \alpha_g) v \left(\frac{3\alpha_g w}{a} - \frac{v}{S} \frac{dS}{dz} \right).$$

Для определения давления в газе, радиальной скорости и радиуса пузырьков запишем

$$\begin{aligned} \frac{dp_g}{dz} &= -\frac{1}{av} (3\gamma p_g w + 3(\gamma - 1)q), \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{1}{av} \left(\frac{p_g - p_l - \frac{2\sigma}{a}}{\rho_l^0} - \frac{3}{2}w^2 - 4\nu^{(v)} \frac{w}{a} \right), \\ \frac{da}{dz} &= \frac{w}{a}. \end{aligned}$$

Для объемного газосодержания в произвольном сечении сопла с учетом уравнения сохранения числа пузырьков $n_0 v_0 S_0 = n v S$, и определения концентрации пузырьков

$$n = \frac{3}{4} \frac{\alpha_g}{\pi a^3}$$

можно получить

$$\alpha_g = \alpha_{g0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \frac{v_0 S_0}{v S},$$

где нижний индекс 0 соответствует значениям параметра на входе сопла.

Решая систему методом Рунге-Кутта 4 порядка при заданном сечении сопла и параметрах двухфазной смеси на входе в сопло, получаем в результате распределение значений давления, температуры и радиуса пузырька по всей длине сопла.

§ 3. Результаты численных расчетов

При истечении через сопло пузырьковой жидкости, в ней, вследствие уменьшения давления в жидкости в сужающейся части сопла, и инерционного радиального движения пузырьков в области минимального сечения, могут развиваться нелинейные колебания пузырьков, интенсивность которых определяется характеристиками газожидкостной смеси и величиной минимального давления, достигаемого в горловине сопла, как показано в [2] и [4]. На рис. 1 представлено схематическое изображение задачи.

Как показывают численные расчеты, интенсивное развитие колебаний пузырьков наблюдается в случае, когда давление в жидкости, в области минимального сечения, приближается к значению давления насыщения паров жидкости при соответствующей температуре жидкости, и определяется возникающей разностью давлений в фазах пузырьковой жидкости, обусловленной инерционным радиальным движением пузырьков в расширяющейся части сопла вблизи горловины.

Численное исследование проводилось для сопла (рис. 2) переменного кругового сечения длиной 15 см. Диаметры концов равны 3.57 см. Диаметр минимального сечения равен 2.52 см и расположен на расстоянии 2.3 см от входа сопла. Входу сопла соответствует координата $z = 0$.

В расчетах жидкой фазой является вода, инертным газом - воздух.

Из рис. 3 видно, что в результате снижения давления в жид-

кости в сужающейся части сопла и инерционного радиального движения в области минимального сечения происходит более чем шестикратное увеличение пузырьков с последующим быстрым их сжатием, вследствие чего в расширяющейся части сопла развиваются интенсивные колебания пузырьков, в которых в моменты максимального сжатия пиковые значения давления и температуры газа достигают порядка 70 МПа и 3700 К соответственно.

Заметим, что достижение таких высоких температур в газе приводит к свечению пузырьков и неизбежной потере энергии при излучении. Однако этот факт и необходимость учета соответствующих энергетических превращений не отменяет, с нашей точки зрения, принципиальную возможность достижения высоких давлений и температур в пузырьках в рассматриваемом процессе.

Здесь стоит отметить, что течение жидкости с сильными нелинейными пульсациями пузырьков в сопле наблюдается, когда давление в горловине уменьшается до тысячных долей атмосферы, и определяется величиной скорости на входе сопла и отношением площади входного сечения к площади сечения в горловине сопла. Повышение скорости до предельного значения, при котором давление жидкости в горловине стремится к нулю, приводит к наиболее интенсивным колебаниям пузырьков и реализации в них огромных давлений и температур газа в моменты максимального сжатия.

На рис. 4 представлены расчеты для течения жидкости с разными по размеру пузырьками. Видно, что наиболее сильные колебания пузырьков реализуются в крупнодисперсной пузырьковой среде (при $a_0 = 10^{-4}$), тогда как мелкие пузырьки практически не подвержены пульсациям. Это объясняется тем, что вследствие проявления сил поверхностного натяжения, мелкие пузырьки обладают меньшей способностью к расширению в области минимального сечения и накоплению потенциальной энергии для последующих колебаний. А уменьшение удельной поверхности, че-

рез которую происходит теплообмен между газом в пузырьках и жидкостью, с ростом начального размера пузырьков, обуславливает реализацию в более крупных пузырьках пиковых давлений и температур вследствие снижения тепловых потерь при их пульсациях.

Здесь отметим, что во всех рассматриваемых в работе случаях течение пузырьковой жидкости в сопле является дозвуковым, т.е. в минимальном сечении сопла скорость газожидкостного потока не достигает местной равновесной скорости звука. Также еще раз оговоримся, что приведенные величины для давления и температуры газа соответствуют средним, по пузырьку значениям. На самом деле процесс инерциального сжатия каждого отдельного пузырька представляет движение, которое может сопровождаться нелинейными газодинамическими эффектами, такими как образование ударных волн. Поэтому в центральных зонах пузырьков могут реализовываться в определенные моменты времени значительно более высокие температуры и давления, чем представленные значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (08-01-97033), Программы фонда фундаментальных исследования ОЭММПУ РАН (ОЕ-15) и Программы фонда фундаментальных исследований Президиума РАН (П-17).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Галимов Э. М., Кудин А. М., Скоробогатский В. М. и др.* Экспериментальное подтверждение синтеза алмаза в процессе кавитации // Доклады РАН. 2004. Т. 395. № 2. С. 187-191.
- [2] *Лепихин С. А., Галимзянов М. Н.* Численное исследование реализации высоких давлений и температур в газовой фазе пузырьковой жидкости при ее истечении через сопла. // Сб. трудов XV Зимней школы по механике сплошных сред.- Пермь, 2007. С. 225–229.

- [3] *Нигматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1, 360 С.
- [4] *Шагапов В. Ш, Лепихин С. А, Галимзянов М. Н* Реализация высоких давлений и температур в газовой фазе при истечении пузырьковой жидкости через сопло. // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 6. С. 134–137.

УДК 330+519.862.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЖИЛОЙ
НЕДВИЖИМОСТИ (НА ПРИМЕРЕ ВТОРИЧНОГО РЫНКА
ЖИЛЬЯ Г.УФА)

Азнабаев А. М. (Уфа, БашГУ)

Введение

В современном обществе в связи с развитием экономических отношений становятся все более востребованными услуги, связанные с оценкой всевозможных активов, выступающих объектами экономических отношений. Связано это в первую очередь с необходимостью на законодательном уровне проведения оценки при осуществлении большинства транзакций.

Одним из таких объектов сегодня выступает жилая недвижимость. Существующие традиционные методы индивидуальной оценки недвижимости обладают недостатками: 1) трудоемкость; 2) высокая доля субъективизма конкретного оценщика в полученных результатах, несмотря на его опыт и знания.

Отсюда вытекает актуальность цели данной работы - разработки метода оценки, который позволил бы на основе большого количества фактических данных быстро и объективно оценивать стоимость жилья в зависимости от влияния совокупности ценообразующих факторов.

§ 1. Регрессионный анализ как метод проведения массовой оценки

Массовая оценка предполагает использование известных подходов к оценке: сравнительного, затратного и доходного. Каждый из них, по сути, представляет собой процедуру построения некоторой математической модели, устанавливающей связь между наиболее вероятной ценой объекта оценки, ценами аналогов и ценообразующими факторами. Иными словами, основная задача оценки состоит в том, чтобы понять: а) какие характеристики влияют на цены объектов недвижимости; б) как именно характеристики влияют на цены объектов недвижимости [1].

Одним из методов массовой оценки недвижимости может служить регрессионный анализ, проводимый в рамках сравнительного подхода. Данный метод позволяет представить рыночную стоимость объекта недвижимости как функцию от основных ценообразующих факторов, а также указать направление влияния данных факторов. В общем виде данную зависимость можно представить следующим образом:

$$Y_{расч} = f(X_1, \dots, X_n),$$

где $Y_{расч}$ - стоимость исследуемого (оцениваемого) объекта недвижимости; $f(X)$ - определенная функция, описывающая влияние ценообразующих факторов на стоимость исследуемого объекта; X_1, \dots, X_n - ценообразующие факторы.

Основная цель применения регрессионного анализа для оценки – построение и обоснование математической модели формирования рыночной стоимости недвижимости с использованием статистических данных по объектам, выставленным на продажу.

§ 2. Этапы проведения оценки на основе регрессионного анализа

Этап 1. Сбор, анализ и первичная обработка данных.

Этап включает в себя сбор информации об объектах, выставленных на продажу, и составление на их основе единой базы данных. Как правило, в таком случае используются базы данных от риэлторских агентств за определенный (небольшой) промежуток времени.

Для определения наиболее объективного влияния ценообразующих факторов, выборка из объектов была большой и представительной, в ней должны отсутствовать “аномальные” объекты, стоимость которых при значительном отклонении от среднерыночной цены невозможно объяснить рыночными факторами. Именно поэтому проводится логический анализ и первичная обработка данных с целью исключения таких объектов.

Этап 2. Определение и выбор ценообразующих факторов.

На данном этапе на основе экспертного мнения оценщика и первичного анализа базы данных объектов выявляются наиболее значимые факторы, влияющие на конечную стоимость квартир. Среди них выделяют: 1) количество комнат в квартире; 2) материал стен жилого здания; 3) тип дома; 4) развитие окружающей инфраструктуры; 5) этаж; 6) разница площадей текущего объекта и стандартного (базового) объекта; 7) уровень отделки (ремонта) квартиры и другие.

Затем выбираются факторы, которые наиболее присущи анализируемой выборке.

Этап 3. Выбор исходного типа модели.

Для проведения оценки на основе регрессионного анализа предлагается использовать многофакторные линейные регрессионные модели следующих типов:

- аддитивная: $Y_{расч} = C + a_1 * X_1 + \dots + a_m * X_m + \varepsilon$,

- мультипликативная: $Y_{расч} = C * a_1^{X_1} * ... * a_m^{X_m} * \varepsilon$,

где $Y_{расч}$ - стоимость 1 кв. м оцениваемой квартиры; C - стоимость 1 кв. м в квартире с базовыми (стандартными) параметрами; X_m - ценообразующий фактор m ; a_m - коэффициент, описывающий влияние m -го фактора на конечную стоимость объекта; ε - ошибка расчетов модели.

Расчет коэффициентов проводится методом наименьших квадратов (МНК). Оценивание данным методом подразумевает лишь аддитивный характер влияния независимых переменных на зависимую, поэтому мультипликативную модель преобразуют в аддитивный вид (линеаризуют, сделав предположение о равенстве ошибки нулю) путем логарифмирования обеих частей уравнения:

$$\ln Y_{расч} = \ln C + X_1 * \ln a_1 + ... + X_m * \ln a_m + \ln \varepsilon.$$

После нахождения логарифмических значений коэффициентов линеаризованной модели, над ней выполняется операция, обратная логарифмированию (потенцирование). С помощью данной операции модель принимает первоначальный (мультипликативный) вид с уже рассчитанными восстановленными значениями коэффициентов. В свою очередь полученные коэффициенты позволяют рассчитать и наглядно показать значения корректировок на ценообразующие факторы в процентном выражении, а в случае с изначально аддитивной моделью – в абсолютном выражении.

Очень важно отметить, что описанное выше преобразование возможно только в случае мультипликативности ошибки, то есть величина ошибки изменяется пропорционально изменению значения анализируемого зависимого фактора. Модели такого типа называют нелинейными по параметрам либо внутренне линейными, когда с помощью преобразования уравнения регрессии и переобозначения параметров модель можно привести к линейному, т.е. аддитивному виду [3, с.4].

Согласно принципу ценообразования на рынке, для оценки жилой недвижимости наиболее приемлемо использовать мультипликативную модель.

Этап 4. Вторичная обработка и подготовка данных для построения модели.

Проводится вторичная обработка информации об имеющихся в сформированной базе объектах для использования их непосредственно при построении модели. Происходит так называемая “оцифровка” выбранных на втором этапе ценообразующих факторов и присвоение заданных цифровых значений соответствующим переменным x_m в представленных выше формулах.

Полученные переменные носят качественный характер, т.е. присваивают качественным признакам факторов количественные значения по соответствующей шкале, выбираемой оценщиком на основе экспертного мнения. Как правило, данные переменные принимают лишь два значения: 0 или 1 и называются двоичными (бинарными). В таком случае они отражают принадлежность (значение 1) ценообразующего фактора к объекту, либо же его отсутствие (значение 0).

Например, отражение присутствия и соответственно влияния на объект фактора первого этажа: если квартира находится на первом этаже, значение переменной равно 1, и, следовательно, если не находится на первом этаже – значение равно 0.

Практика показывает, что модели, использующие такие переменные, во-первых, просты для понимания, во-вторых, они способны достаточно хорошо аппроксимировать практически любые нелинейные зависимости цены от ценообразующих факторов и, наконец, в-третьих, они очень близки к моделям ценообразования, которыми руководствуются в своей практической деятельности операторы рынка недвижимости [1].

В целом, переменные могут принимать различные количественные значения, отражающие качественные признаки. Например,

ремонт в квартире можно описать следующим образом: при отсутствии ремонта переменной присваивается значение 0, при необходимости его проведения – значение, равное -1, при наличии хорошего ремонта – значение 1, отличного – 2 и т.д. Здесь переменная описывает также и степень “присутствия” ценообразующего фактора у оцениваемого объекта.

Иногда, в зависимости от типа влияющего фактора, переменные могут отражать и его количественные характеристики. Один из них – фактор влияния вариации по площади между объектами на их конечную стоимость. В данном случае переменная, описывающая влияние указанного фактора, будет принимать абсолютные значения отклонения (либо в кв. м, либо относительного в процентах) площади оцениваемого объекта от базового.

В соответствии с перечисленным выше обозначением качественных признаков, выбирается базовая квартира с эталонными параметрами, которые определяются оценщиком индивидуально. Как правило, это объект со стандартными характеристиками, наиболее часто встречающийся в выборке. Именно относительно данной квартиры определяется влияние изучаемых факторов на цены других квартир. Поэтому всем переменным, отражающим влияние факторов на цену данного объекта, присваиваются значения, равные 0 (в силу отсутствия у такого объекта указанных факторов). В указанных моделях стоимость такого объекта отражает величина постоянного члена (константа C).

Этап 5. Построение математической модели и оценка ее качества.

После проведения перечисленных выше процедур, возможно перейти непосредственно к построению математической модели оценки рыночной стоимости жилой недвижимости.

Расчет коэффициентов выбранной модели осуществляется в специализированных программах, имеющих встроенные пакеты обработки данных на основе регрессионного анализа. Среди них:

эконометрические и статистические пакеты EViews, Statistica, Deductor, а также табличный процессор MS Excel (надстройка “Анализ данных”).

После построения модели и получения необходимых коэффициентов, проводится оценка качества полученной модели по следующим необходимым критериям:

- Коэффициент детерминации (R^2), скорректированный на число степеней свободы (Adjusted R-square).
- Обобщенная ошибка модели (S.E. of regression), или среднеквадратическое отклонение (СКО). Для мультипликативной модели в исходном виде рассчитывается относительное значение СКО (коэффициент вариации) путем восстановления его из прологарифмированной.
- Критерий Фишера (F -Statistic) – оценивает в целом надежность регрессионного уравнения.
- Критерий Стьюдента (t -Statistic) – рассчитывается для каждого коэффициентов модели.
- Коэффициент Jarque-Bera (необходим для определения соответствия остатков регрессионной модели нормальному закону распределения).

Этап 6. Интерпретация полученных результатов и расчет итоговых корректировок на ценообразующие факторы из полученной модели.

С помощью полученных коэффициентов можно рассчитать корректировки на соответствующие ценообразующие факторы: относительные, выраженные в процентах – в случае применения мультипликативной модели; либо абсолютные, выраженные в денежных единицах – в случае применения аддитивной модели.

Общая схема расчета выглядит следующим образом:

- для мультипликативной модели: $K_{\%} = (a_m^{X_m} - 1) * 100\%$,
- для аддитивной модели: $K_{ABS} = a_m * X_m$,

где $K_{\%}$ и K_{ABS} - соответственно относительное (в %) и абсолютное значение (в денежных единицах) рассчитываемой корректировки.

§ 3. Пример построения регрессионной модели на основе данных рынка жилой недвижимости г. Уфа

Построение модели было проведено в начале 2008г. на основе данных за последние месяцы 2007г. Для проведения исследования использовалась выборка из единой базы данных о предложении объектов жилой недвижимости от риэлторских агентств в г. Уфа, составленной ООО “Информационная система ЦЕНТР” – организатора национальной мультилистинговой системы.

После проведения первичной обработки данных, на основе экспертного мнения были выбраны следующие ценообразующие факторы, способные значительно повлиять на формирование рыночной стоимости анализируемых объектов: 1) количество комнат в квартире – 1, 2, 3, 4; 2) материал стен жилого здания – панель, кирпич, комбинированный; 3) тип дома (планировка квартиры) – обычный (стандартная планировка), “хрущевка”, “сталинка”, элитный, а так же новые дома с улучшенной планировкой; 4) местоположение внутри района (развитость окружающей инфраструктуры); 5) этаж квартиры – первый, последний (т.е. крайние); 6) площадь квартиры – абсолютное значение процентного отклонения площади оцениваемого объекта от площади базового объекта.

Площади базовых объектов: однокомнатные квартиры – 33 кв. м; двухкомнатные – 45 кв. м; трехкомнатные – 65,8 кв. м; четырехкомнатные – оценка не производилась в силу малого количества таких объектов в выборке.

Также при оценке в аналитических целях в модель вводились некоторые другие факторы.

В итоге базовая квартира обладала следующими параметрами: однокомнатная (площадь 33 кв. м); в панельном доме стандартной планировки (80-90-х годов постройки); не на крайнем этаже; с обычной отделкой и со стандартным развитием окружающей инфраструктуры. Именно относительно данного объекта проводилась оценка влияния ценообразующих факторов.

В качестве исходной модели для оценки была выбрана упомянутая выше многофакторная мультипликативная регрессионная модель. Для обработки данных и построения/оценки моделей использовались табличный процессор MS Excel и эконометрический пакет EViews.

Итогом исследования явилось построение и расчет регрессионных моделей по трем жилым районам г. Уфы: Сипайлово, Черниковка, Зеленая Роща/школа МВД.

Полученные модели оказались полностью адекватными по всем необходимым статистическим параметрам.

Итоговые (восстановленные) значения некоторых корректировок по району Сипайлово

На сегодняшний день, в связи с экономическим кризисом и изменением конъюнктуры рынка, является приоритетным очередное проведение оценки жилья в г. Уфа по предложенному методу и сравнение новых результатов с полученными ранее.

В качестве заключения необходимо отметить, что процесс построения регрессионных моделей, кажущийся на первый взгляд простым, в действительности является достаточно длительным и трудоемким. Очень редко первая выбранная спецификация зависимости дает хорошие по всем параметрам результаты. Как правило, приходится постепенно подбирать формулу связи и состав факторных переменных, анализируя на каждом этапе качество полученной зависимости. Анализ качества обязательно должен включать, кроме расчета статистических показателей и критери-

Стоимость 1 кв. м базового объекта, руб.		53799
Факторы		Корректировки
Количество комнат:	2	-3.08%
	3	-13.40%
	4	-9.78%
Материал стен:	1-комнатные	6.73%
	2-комнатные	7.39%
	3-комнатные	10.29%
	4-комнатные	не влияет
Этаж квартиры:	первый	-2.42%
Ремонт:	хороший	5.62%
	отличный	14.15%
	дорогой	16.51%
	требуется	-7.83%
Увеличение площади на каждый дополнит. 1% (панельный дом)	1-комнатные	-0.32%
	2-комнатные	-0.253%
	3-комнатные	-0.178%
Увеличение площади на каждый дополнит. 1% (кирпичный дом)	1-комнатные	-0.212%
	2-комнатные	-0.148%
	3-комнатные	-0.133%
Срочность продажи:		-2.94%

ев адекватности, еще и анализ экономического смысла полученного уравнения регрессии. А именно, действительно ли значимыми оказались факторные переменные, важные с точки зрения теории; положительны или отрицательны коэффициенты, показывающие направление воздействия этих факторов; попали ли рассчитанные значения коэффициентов регрессии и, соответственно, полученные на основе них корректировки, в предполагаемые по теоретическим соображениям интервалы [2, с.63].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Грибовский С.В. “Оценка недвижимости для налогообложения” // Вестник оценщика [Электронный ресурс]. Электрон. журнал.- М.: Портал Appraiser, 2006. Режим доступа: <http://www.appraiser.ru/>, свободный.
- [2] Цымбаленко С. В., Цымбаленко О.С., Шепель О.В. Особенности определения рыночной стоимости недвижимости муниципальных образований // Оценочная деятельность. 2007. №1.
- [3] Цыплаков А.А. Некоторые эконометрические методы: Методическое пособие. - Новосибирск: ЭФ НГУ, 1997.

УДК 534.112

ОДНОЗНАЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТРУНЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ

Ахтямова А.А. (Уфа, БашГУ)

Введение

Процессы, протекающие в механизмах и двигателях, являются источниками шума. В результате исследования многих ученых

было установлено, что шум приносит большой урон нашему здоровью. Поэтому, в последние полтора - два десятилетия велось ужесточение по снижению к целому ряду отраслевых стандартов и начались исследования по отношению шума и вибрации. Однако научные работы по созданию закреплений, обеспечивающих безопасный диапазон частот колебаний механических систем, появились лишь недавно. Эти работы можно рассматривать в рамках акустической диагностики, которая изучает возможности распознавания характеристик двигателя или другого механизма по его шуму. В частности, часто, возникает необходимость идентифицировать вид и параметры закрепления механической системы по набору собственных частот. Математическая постановка этой задачи состоит в следующем: требуется восстановить краевые условия спектральной задачи по ее собственным значениям. В работе [1] были получены результаты о восстановлении краевых условий спектральной задачи с известными коэффициентами в уравнении по одному спектру. В частности рассмотрена краевая задача

$$-y''(x) = \lambda^2 y(x), \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(1) + d(\lambda)y(1) = 0. \quad (3)$$

Было показано, что для нахождения коэффициента $d(\lambda)$, имеющего следующий вид $d(\lambda) = d_0 + d_1\lambda$, достаточно знать два собственных значения. Если же

$$d(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2,$$

то для нахождения этого полинома достаточно трех собственных значений спектральной задачи (1) – (3).

В настоящей работе рассматривается случай, когда

$$d(\lambda) = d_0 + d_2\lambda^2.$$

Этот случай отличается от предыдущих тем, что определитель соответствующей системы уравнения не является определителем Вандермонда. Показывается, что в этом случае, для восстановления квадратичной функции, достаточно двух, а не трех собственных значений. Однако, требуется наложить еще одно дополнительное условие.

§ 1. Доказательство теоремы о восстановлении квадратичной функции в краевом условии.

Теорема 1. *Для однозначного восстановления квадратичной функции $d(\lambda) = d_0 + d_2\lambda^2$ в краевом условии (3), достаточно двух различных и отличных от нуля собственных значений λ_1 и λ_2 , которые удовлетворяют условию:*

$$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу (1) – (3), где $d(\lambda) = d_0 + d_2\lambda^2$. Запишем общее решение дифференциального уравнения (1).

$$y(x)_{\text{общ}} = C_1 \cos \lambda x + \frac{C_2 \sin \lambda x}{\lambda}.$$

Вычислим ее производную:

$$y'(x)_{\text{общ}} = -\lambda C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x.$$

Учитывая краевые условия (2) и (3), получаем

$$\begin{aligned} C_1 \neq 0, C_2 = 0, \\ -\lambda C_1 \sin \lambda + d(\lambda) C_1 \frac{\cos \lambda}{\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Из (2) и (3) следует, что $d(\lambda) = \lambda^2 \operatorname{tg} \lambda$.

Далее, рассмотрим систему, где требуется восстановить коэффициенты d_0 и d_2 .

$$\begin{aligned}d_0 + d_2 \lambda_1^2 &= \lambda_1^2 \operatorname{tg} \lambda_1, \\d_0 + d_2 \lambda_2^2 &= \lambda_2^2 \operatorname{tg} \lambda_2.\end{aligned}\tag{4}$$

Для однозначного решения системы, по правилу Крамера необходимо, чтобы матрица этой системы была невырожденной, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Откуда получаем, что

$$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0.$$

Теорема доказана.

§ 2. Существенность условия теоремы.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, т.е. условие теоремы 1 нарушается. Пусть известны собственные значения $\lambda_1 = \pi$ и $\lambda_2 = -\pi$. Требуется восстановить полином $d(\lambda) = d_0 + d_2 \lambda^2$.

Решение. Подставив данные значения λ_1 и λ_2 в систему (4), получим

$$\begin{aligned}d_0 + d_2 \pi^2 &= 0, \\d_0 + d_2 \pi^2 &= 0.\end{aligned}$$

Как видим, полученная система состоит из двух одинаковых уравнений. Следовательно, эта система имеет бесконечное число решений.

§ 3. Заключение.

Таким образом, было показано, что в случае, когда квадратичная функция $d(\lambda)$ в краевом условии (3) имеет вид $d(\lambda) = d_0 + d_2\lambda^2$, то для ее восстановления требуется лишь два различных и отличных от нуля собственных значения, которые удовлетворяют условию

$$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0.$$

Причем, это условие является существенным. Поскольку экспериментальное получение третьего собственного значения бывает часто проблематичным, то найденный результат весьма важен в акустической диагностике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. // - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. - 184 с.

УДК 534.113

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ

Аюпова А. Р. (Нефтекамск, НФ БашГУ)

Определение нагруженности механических систем по собственным частотам ее колебаний является актуальным в связи с необходимостью решений задач акустической диагностики данных систем. Механические системы, которые упрощенно можно представить как балки с сосредоточенными массами, являются составной частью многих технических конструкций, находящихся широкое применение в различных областях деятельности человека. Известно, что сосредоточенные массы со временем могут

менять свои значения в связи с изношенностью. Поэтому определение масс важно для проверки надежности работы механической системы.

Во многих случаях изучение таких систем связано с большими затруднениями и затратами. В [1] был предложен метод, с помощью которого можно диагностировать нагруженность механической системы с двумя степенями свободы по двум собственным частотам изгибных колебаний. Т.е. найденные в [1] формулы позволяют производить оперативный контроль технических конструкций без их разборки.

Механическая система, для которой были найдены формулы, имеет следующий вид: балка длины l нагружена в точках, отстоящих от левой опоры на расстояния x_1, x_2 , некоторыми сосредоточенными массами m_1, m_2 . Оба конца балки шарнирно оперты, можно рассматривать и другие способы закрепления, при этом изменятся только коэффициенты влияния a_{jk} .

Необходимые формулы были получены из частотного уравнения

$$\text{Det}(AM - pE) = 0, \quad p = \frac{1}{\omega^2},$$

где $A = \|a_{jk}\|$ -квадратная матрица второго порядка, M -диагональная матрица с элементами m_1, m_2 соответственно, E -единичная матрица, ω -частотный параметр.

Если собственные частоты изгибных колебаний p_1 и p_2 известны, то массы можно восстановить из формул

$$M_1 = \frac{(p_1 + p_2) \mp \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - \frac{4a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|}}}{2} \quad (1)$$

$$M_2 = \frac{(p_1 + p_2) \pm \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - \frac{4a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|}}}{2} \quad (2)$$

где $M_1 = a_{11} \cdot m_1$, $M_2 = a_{22} \cdot m_2$, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}^2$. Массы находятся из формул (1)-(2) однозначно с точностью до перестановки

их местами.

Была гипотеза, что и при решении задачи с тремя массами будет получен подобный результат. Но эта гипотеза оказалась не верной. Более того, было установлено, что при восстановлении значений n сосредоточенных масс получается $n!$ решений, среди которых n решений действительные, остальные комплексные.

В данной работе доказывается утверждение, о том, что решение задачи с двумя степенями свободы всегда будет действительным и положительным.

Для начала покажем, что определитель матрицы A всегда принимает положительные значения. Как было сказано выше $A = \|a_{jk}\|$ -квадратная симметричная матрица второго порядка, элементами которой являются коэффициенты влияния a_{jk} . Для шарнирно-опертой на обоих концах балки при постоянной жесткости на изгиб имеем

$$a_{jk} = \frac{x_j^2(l-x_j)^2 \left[2\frac{x_k}{x_j} + \frac{x_k}{l-x_j} - \frac{x_k^3}{x_j^2(l-x_j)} \right]}{6EJl} \quad (3)$$

$$x_k \leq x_j, a_{jk} = a_{kj}, EJ = const.$$

Найдем необходимые коэффициенты, приняв $EJ = 1$

$$a_{11} = \frac{2x_1^2(l-x_1)^2}{6l}, \quad a_{22} = \frac{2x_2^2(l-x_2)^2}{6l},$$

$$a_{21} = \frac{x_2^2(l-x_2)^2 \left[2\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{l-x_2} - \frac{x_1^3}{x_2^2(l-x_2)} \right]}{6l}$$

Представим a_{21}^2 в виде

$$\begin{aligned} a_{21}^2 &= \frac{x_2^4(l-x_2)^4}{36l^2} \times \left(\frac{2x_1x_2(l-x_2) + x_1x_2^2 - x_1^3}{x_2^2(l-x_2)} \right)^2 = \\ &= \dots = \frac{x_1^2}{36l^2} \cdot (2x_2l - x_2^2 - x_1^2) \cdot (l-x_2) \end{aligned}$$

Запишем теперь определитель $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}^2$ и предположим, что $|A| \leq 0$

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{4x_1^2 \cdot (l - x_1)^2 \cdot x_2^2 \cdot (l - x_2)^2}{36l^2} - \frac{x_1^2(l - x_2)^2}{36l^2} \cdot (2x_2l - x_2^2 - x_1^2)^2 = \\ &= \frac{x_1^2 \cdot (l - x_2)^2}{36l^2} \cdot [4(l - x_1)^2 \cdot x_2^2 - (2x_2 \cdot l - x_2^2 - x_1^2)^2] \leq 0 \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках распишем по формуле разности квадратов, опустив левый множитель в силу его положительности

$$\begin{aligned} [2(l - x_1) \cdot x_2 - (2x_2 \cdot l - x_2^2 - x_1^2)] \cdot [2(l - x_1) \cdot x_2 + (2x_2 \cdot l - x_2^2 - x_1^2)] = \\ = \dots = [(x_2 - x_1)^2] \cdot [4lx_2 - (x_2 - x_1)^2] \leq 0 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 4lx_2 - (x_2 - x_1)^2 &\leq 0 \\ 4lx_2 - x_2^2 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)^2 &\leq 0 \\ 4l - x_2 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Последнее неравенство получим неверное, т.к. $1 - \frac{x_1}{x_2} < 1$ и $x_1 < x_2 < l$. Следовательно $|A| > 0$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем основное утверждение о положительных корнях. Обозначим $a_{11}m_1 = M_1$ и $a_{22}m_2 = M_2$. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}m_1 + a_{22}m_2 = p_1 + p_2 \\ |A|m_1m_2 = p_1p_2 \end{cases}$$

перепишется в виде

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = p_1 + p_2 \\ M_1M_2 = \frac{a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|} \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения M_1 , подставим во второе:

$$M_2^2 - (p_1 + p_2) \cdot M_2 + \frac{a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|} = 0 \quad (4)$$

Рассмотрим последнее равенство как квадратное уравнение с неизвестным M_2 . Корни уравнения представятся в виде:

$$M_2 = \frac{(p_1 + p_2) \pm \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - \frac{4a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|}}}{2}.$$

Тогда

$$M_1 = \frac{(p_1 + p_2) \mp \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - \frac{4a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|}}}{2}.$$

Для того, чтобы M_1 и M_2 были действительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант D уравнения (4) был неотрицательным. Допустим обратное, пусть

$$(p_1 + p_2)^2 - \frac{4a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|} < 0$$

Необходимо учесть, что $p_1 \neq p_2$; $p_1, p_2 > 0$. Так как $|A| > 0$ запишем

$$|A| \cdot (p_1 + p_2)^2 - 4a_{11}a_{22}p_1p_2 < 0$$

После некоторых упрощений это выражение примет следующий вид:

$$|A| \cdot (p_1 - p_2)^2 < 0$$

Здесь $|A| > 0$, $(p_1 - p_2)^2 > 0$, следовательно получили противоречие. Т.е. $D \geq 0$, а значит M_1 и M_2 будут действительными.

Докажем положительность корней. Из равенств для M_1 , M_2 и из $D \geq 0$ следует, что

$$p_1 + p_2 > \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - \frac{4a_{11}a_{22}p_1p_2}{|A|}}$$

значит $M_1, M_2 > 0$, а так как значения частот положительны, то и значения масс будут положительными, что и требовалось показать. Доказательства проверим на примерах.

Пример 2. Для определенности примем, что на балке, лежащей на двух опорах и имеющей длину $l = 30$, сосредоточены грузы. Известно, что эти грузы расположены на расстоянии 10 см и 20 см от левого конца балки и $EJ = 6,25 \cdot 2 \cdot 10^6$. По известным значениям частот $p_1 = 0,0013$, $p_2 = 0,0001$ необходимо восстановить массы грузов m_1 и m_2 .

Найдем коэффициенты влияния $a_{11} = a_{22} = 0,000036$, $a_{21} = 0,000031$ и подставим их в (1)-(2). В итоге, выразив массы, получим $\{m_1 = 18, m_2 = 19,9\}$, $\{m_1 = 19,9, m_2 = 18\}$. Решение получили с точностью до перестановок. Все значения положительные и действительные.

Для получения более точного решения необходимы дополнительные условия. Сосредоточенные массы, как правило, представляют собой детали конструкций, недоступных для визуального осмотра. Но среди них встречаются и такие, где один из концов или какой-то участок остается открытым для осмотра и исследования. Тогда добавив на этот конец или участок дополнительную известную массу, или, наоборот, удалив ее, можно получить единственное решение.

Используем это для получения однозначного решения в приведенном выше примере.

Пример 3. Расположим дополнительный груз с массой $m_3 = 5$ кг на расстоянии 25 см от левого конца балки. Зная частоты $p_1 = 0,000005$, $p_2 = 0,000092$, $p_3 = 0,001323$ и массу m_3 , найдем m_1 и m_2 . Для решения подобной обратной задачи была составлена программа в математическом пакете Maple. Решение представится в виде $\{m_1 = 18, m_2 = 19,9, m_3 = 5\}$. Значения m_1 и m_2 совпадают с значениями масс, для которых были найдены значения частот.

Таким образом, нам удалось показать, что если известно хотя бы одно значение m_j , то остальные однозначно определяются по набору собственных частот колебаний механической системы.

Пример 4. Рассмотрим эту же задачу для балки с жестким закреплением. По значениям $p_1 = 0,000096$, $p_2 = 0,004650$ необходимо определить массы грузов.

Коэффициенты влияния рассчитываются по формуле [4, с.119]

$$a_{jk} = \frac{x_k^2(3x_j - x_k)}{6EJ}.$$

Тогда $a_{11} = 0,000027$, $a_{21} = 0,000067$, $a_{22} = 0,000213$. Подставим все известные значения в (1)-(2) и получим $\{M_1 = 0,00048, M_2 = 0,00427\}$, $\{M_1 = 0,00427, M_2 = 0,00048\}$. Выразим отсюда массы $\{m_1 = 18, m_2 = 20\}$, $\{m_1 = 159,99, m_2 = 2,25\}$. Здесь также можно применить вышеупомянутые действия для уточнения решения.

Применение предложенного метода позволяет при диагностировании какой-либо недоступной для визуального осмотра части механической установки сложной структуры проводить анализ ее технического состояния, не используя дорогостоящую разборку и не нарушая приработку деталей. Это удобный и наиболее безопасный способ, не требующий больших затрат и времени.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахтямов А. М.* Диагностирование нагруженности механической системы // Приборы и системы. управление, контроль, диагностика. 2003. No 6
- [2] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения(с техническими приложениями). М.: Наука, 1968.
- [3] *Graham ML Gladwell.* Inverse problems in vibration .// Applied Mechanics Reviews. 1996. № 10.Part 2.

[4] *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004.

УДК 514.747

СФЕРА РИМАНА И СФЕРИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ

Байгускаров Т. Ю. (Уфа, БГУ)

Введение

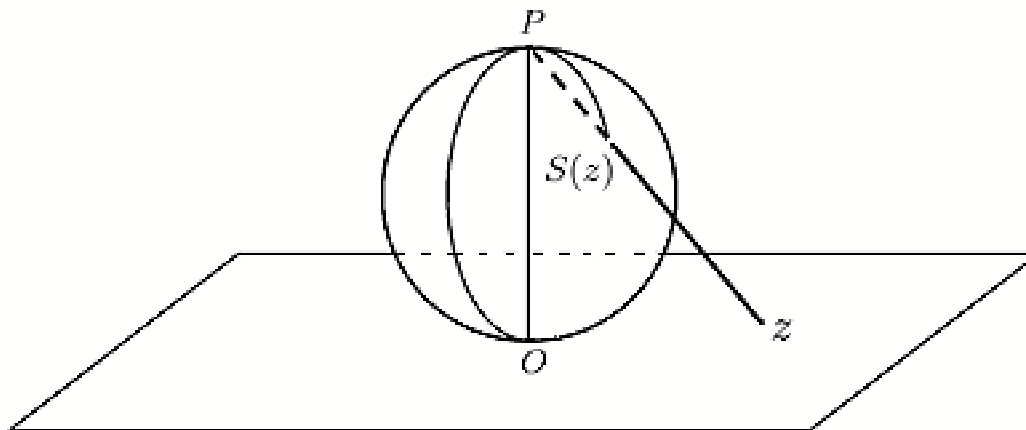
Возьмем сферу единичного диаметра, касательную к плоскости в нулевой точке O . Диаметр сферы OP , проходящий через точку O , будет перпендикулярным к плоскости; вторую точку его пересечения со сферой, точку $P(0, 0, 1)$ назовем полюсом.

Всякое комплексное число z изображается точкой на плоскости; соединяя эту точку с полюсом прямой линией Pz , получим в пересечении этой прямой и сферы единственную точку (отличную от P), которую примем за изображение комплексного числа z и назовем ее $S(z)$.

Итак, мы устанавливаем взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками плоскости и точками сферы (за исключением точки P). Эта сфера, из которой выкинута точка P , является изображением совокупности всех комплексных чисел, $S(\mathbb{C})$. Естественно принять точку P за изображение бесконечности, а соответствующую ей единственную точку плоскости назвать *бесконечно удаленной* точкой этой плоскости.

Таким образом, путем указанного преобразования, называемого *стереографической проекцией*, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между точками сферы и точками плоскости, включая ее единственную бесконечно удаленную точку. Эта сфера, точки которой изображают совокупность всех комплексных чисел и бесконечности, носит название *комплексной числовой сферы*, или *сферы Римана*. Плоскость комплексного переменного

вместе с бесконечно удаленной точкой будем называть *расширенной плоскостью* комплексного переменного.



Смысл этого исследования заключается в том, чтобы с помощью отображения S доказать некоторые теоремы для областей на плоскости, доказанные только для конечных областей.

§ 1. Формулы стереографической проекции

Мы уже дали геометрическое определение стереографической проекции; теперь займемся выводом формул этого преобразования, т.е. решим задачу: *зная комплексное число, определить координаты соответствующей точки сферы, и обратно*. Для решения этой задачи выберем систему пространственных осей координат $O\xi\eta\zeta$ таким образом, что оси $O\xi$ и $O\eta$ совпадают соответственно с осями Ox и Oy на числовой плоскости, а ось $O\zeta$ направлена по диаметру OP . Комплексное число $z = x + yi$ изображается на плоскости точкой с координатами x, y ; на сфере пусть это число отобразится в точку с координатами ξ, η, ζ . Так как центр сферы лежит в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ и радиус ее равен $\frac{1}{2}$, то ξ, η, ζ должны удовлетворять следующему уравнению сферы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta). \quad (1)$$

Далее, так как три точки $(0, 0, 1)$, (ξ, η, ζ) и $(x, y, 0)$ лежат на одной и той же прямой линии, их координаты удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}. \quad (2)$$

Из этих равенств (2) можно выразить x и y через ξ , η , ζ . Так, сравнивая первое отношение с третьим, а затем второе с третьим, найдем:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \quad (3)$$

Эти формулы (3) дают выражения координат точки плоскости через координаты соответствующей точки сферы. Для получения обратных формул заметим, что

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}, \quad (3')$$

откуда находим:

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}; \quad (4)$$

зная же ζ из формул (3) определяем ξ и η :

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}; \quad (4')$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}. \quad (4'')$$

Формулы (4), (4'), и (4'') дают выражения для координат точки сферы через компоненты x и y комплексного числа.

§ 2. Сферическое расстояние

Определение. Пусть $z = x + iy$, $w = p + iq$ – комплексные числа, а $S(z)$ и $S(w)$ – их изображения на сфере Римана. Сферическим расстоянием $sp(z, w)$ будем называть функцию, равную

обыкновенному расстоянию в \mathbb{R}^3 между $S(z)$ и $S(w)$:

$$sp(z, w) = |S(z) - S(w)|. \quad (5)$$

Для краткости обозначим $S(z)$ и $S(w)$, как Z и W соответственно, а их координаты ξ, η, ζ как Z_ξ, Z_η, Z_ζ и W_ξ, W_η, W_ζ . Выразим $sp(z, w)$ через z и w :

$$sp(z, w) = \sqrt{(Z_\xi - W_\xi)^2 + (Z_\eta - W_\eta)^2 + (Z_\zeta - W_\zeta)^2}. \quad (5')$$

Чтобы не запутаться, будем вычислять по частям:

$$sp(z, w) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \text{ где } A = Z_\xi - W_\xi, B = Z_\eta - W_\eta, C = Z_\zeta - W_\zeta.$$

$$A = \frac{x}{|z|^2 + 1} - \frac{p}{|w|^2 + 1} = \frac{x(|w|^2 + 1) - p(|z|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (6.1)$$

$$B = \frac{y}{|z|^2 + 1} - \frac{q}{|w|^2 + 1} = \frac{y(|w|^2 + 1) - q(|z|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (6.2)$$

$$C = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} - \frac{|w|^2}{|w|^2 + 1} = \frac{|z|^2(|w|^2 + 1) - |w|^2(|z|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (6.3)$$

$$A^2 = \frac{x^2(|w|^2 + 1)^2 - 2xp(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1) + p^2(|z|^2 + 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2(|w|^2 + 1)^2} \quad (6.4)$$

$$B^2 = \frac{y^2(|w|^2 + 1)^2 - 2yq(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1) + q^2(|z|^2 + 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2(|w|^2 + 1)^2} \quad (6.5)$$

$$C^2 = \frac{|z|^4(|w|^2 + 1)^2 - 2|z|^2|w|^2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1) + |w|^4(|z|^2 + 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2(|w|^2 + 1)^2} \quad (6.6)$$

Учитывая, что $x^2 + y^2 = |z|^2$ и $p^2 + q^2 = |w|^2$, перепишем зна-

менатель дроби $A^2 + B^2 + C^2$ в виде:

$$\begin{aligned}
& (|z|^4 + |z|^2)(|w|^2 + 1)^2 - 2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2|w|^2 + xp + yq) + \\
& \quad + (|w|^4 + |w|^2)(|z|^2 + 1)^2 = |z|^2(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)^2 - \\
& - 2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2|w|^2 + xp + yq) + |w|^2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)^2 = \\
& \quad = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2(|w|^2 + 1) - 2(|z|^2|w|^2 + xp + yq) + \\
& \quad + |w|^2(|z|^2 + 1)) = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2 - 2xp - 2yq + |w|^2) = \\
& = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)((x-p)^2 + (y-q)^2) = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)|z-w|^2;
\end{aligned}$$

$(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)$ сокращается и остается:

$$sp(z, w) = \sqrt{\frac{|z-w|^2}{(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)}} = \frac{|z-w|}{\sqrt{(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)}}. \quad (7)$$

Эта формула будет служить основной формулой для вычисления сферического расстояния. Примечательно, что $sp(z, w)$ зависит только от $|z|$, $|w|$ и $|z-w|$, то есть при повороте плоскости $sp(z, w)$ не меняется.

§ 3. Основные свойства сферического расстояния

Во первых, стоит удостовериться, действительно ли $sp(z, w)$ можно называть *расстоянием*. То есть, удовлетворяет ли оно трем аксиомам метрики:

$$1) sp(z, w) \geq 0, sp(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w;$$

$$2) sp(z, w) = sp(w, z);$$

$$3) sp(z, w) + sp(w, t) \geq sp(z, t),$$

где z, w, t — произвольные комплексные числа.

Принимая во внимание, что $sp(z, w)$ на самом деле является евклидовым расстоянием между $S(z)$ и $S(w)$, заключаем, что все три аксиомы верны, так как верны для евклидова расстояния.

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и S – непустое подмножество области $D \subset \mathbb{C}$. Для краткости функцию сферического расстояния до границы области переобозначим как

$$sp_D(z) = \inf_{w \in \partial D} sp(z, w), \quad z \in D,$$

$$sp_D(S) = \inf_{z \in S} sp_D(z).$$

Проводя аналогию с евклидовым расстоянием, необходимо выделить некоторые элементарные свойства. Выделим важные для нас свойства sp_D в небольшую теорему.

Теорема. Для ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ функция sp_D положительна, непрерывна и обладает свойствами:

- 1) $sp(z, w) \geq sp_D(z) - sp_D(w)$ для любых $z, w \in D$;
- 2) если $S \subset S' \subset D$, то $d_D(S) \geq d_D(S')$.

Доказательство. 1) Так как $S(\partial D)$ – замкнуто,

$$\inf_{t \in \partial D} sp(z, t) = \min_{t \in \partial D} sp(z, t), \text{ т.е. } \exists A \in \partial D : sp(z, A) = sp_D(z);$$

$$sp(z, w) + sp(A, z) \geq sp(A, w) \geq sp_D(w).$$

- 2) Следует из определения \inf и включения $S \subset S'$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00046_а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю., Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I // Алгебра и анализ. 2008. Т.20. №1. 146-189.
- [2] Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

УДК 534.222+536.46

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЫСТРОГО ГОРЕНИЯ
ГАЗОВОГО ТОПЛИВА В ГРАНУЛЯРНОЙ НАСЫПКЕ

Балапанов Д. М. (Уфа, Институт механики УНЦ РАН)

Введение

В работах [1, 2] обнаружен и экспериментально исследован режим быстрого горения разбавленных водород-кислородных смесей в трубах, заполненных стальной дробью. Пламя в данном режиме распространяется с постоянной дозвуковой скоростью порядка 20-300 м/с, формируя перед собой уединенный пилообразный импульс давления. При прохождении волны мимо пьезодатчиков давления, установленных по всей длине трубы отмечается плавный рост давления до некоторого максимума, затем давление так же плавно спадает и наблюдается свечение газа, сопровождающее зону химической реакции.

Быстрое горение не может быть обусловлено ни молекулярной теплопроводностью газа, так как скорость этого процесса имеет порядок 1 м/с, ни адиабатическим сжатием как при детонации, поскольку в профиле волны давления отсутствует характерный скачок. В [3] предложен механизм конвективного распространения пламени, при котором поджигание холодной смеси происходит в результате выброса из зоны реакции горячих струй, которые взаимодействуя между собой порождают турбулентный фронт пламени. Таким образом, высокая скорость волны быстрого горения здесь связывается в основном с турбулизацией потока газа из-за сложной геометрии поровых каналов. В [3] предложена простая математическая модель, описывающая стационарное быстрое горение, и исследованы свойства решения. Однако, ввиду того, что

при выводе уравнений сделаны достаточно грубые упрощения, полученный профиль волны давления лишь качественно не противоречит экспериментальным данным [1, 2]. Также, модель не позволяет одновременно определить скорость распространения волны и параметры пика давления.

Целью данной работы является построение более полной модели явления быстрого горения на основе уравнений механики многофазных систем [4] и численное моделирование для исследования структуры фронта волны и выявления физических причин, обуславливающих высокую скорость распространения пламени в режиме быстрого горения.

§ 1. Уравнения модели

Рассмотрим одномерный реагирующий поток унитарного газофазного топлива в порах плотной насыпки из одинаковых твердых шаров. При выводе уравнений модели будем полагать справедливыми следующие соображения: 1) размеры твердых частиц много больше длины пробега молекул в газе, но при этом много меньше расстояний, на которых происходит значительное изменение макроскопических параметров; 2) пористый каркас неподвижен и несжимаем; 3) отсутствует влияние особых свойств поверхностной фазы; 4) массообмен между фазами не происходит; 5) тепло от межфазного трения целиком выделяется в газе. Основываясь на представлениях механики многофазных систем [4] и подходе Рейнольдса-Буссинеска к моделированию турбулентности, с учетом приведенных выше соображений, запишем осредненные уравнения сохранения для газообразной и твердой фазы:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g v_g) = 0; \\
& \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g v_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g v_g^2 + p_g) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_T \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) + F_{sg}; \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_g \rho_g \left[U_g + \frac{v_g^2}{2} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_g \rho_g v_g \left[U_g + \frac{v_g^2}{2} + \frac{p_g}{\rho_g} \right] \right) = \\
& = Q_{sg} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_T v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_T \frac{\partial T_g}{\partial x} \right); \\
& \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_s \rho_s U_s) = Q_{gs}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь представлены законы сохранения массы, импульса и полной механической энергии для газовой фазы и единственный закон сохранения – внутренней энергии для твердой фазы (масса и импульс скелета сохраняются автоматически, при соблюдении предположений 2 и 4). Используются следующие обозначения: t – время, x – координата в направлении распространения волны, α_i , ρ_i , U_i , T_i – соответственно: объемное содержание, истинная плотность (масса фазы в единице ее объема), удельная внутренняя энергия и температура i -ой фазы ($i = g, s$); v_g и p_g – скорость и давление газа соответственно; η_T и λ_T – турбулентные коэффициенты вязкости и теплопроводности газа; F_{sg} и Q_{sg} – объемные интенсивности передачи импульса и тепла от газовой фазы к твердой, $Q_{sg} = -Q_{gs}$. Нижний индекс g относится к параметрам газовой фазы, s – твердой фазы.

В качестве газового горючего рассматривается смесь 20% H_2 + 80% O_2 , где цифры означают молярную концентрацию реагента. Согласно [5] реакция горения протекает в две стадии. На первой стадии (индукция) происходит накопление активных центров в результате бимолекулярных реакций обмена с низким тепловым эффектом. По истечении периода индукции в зоне реакции начинают

протекать существенно экзотермические трехмолекулярные реакции. Как показано в [6] для высоких температур горения состав газовой смеси достаточно точно может быть определен с помощью единственной переменной – молярной массы. Это позволяет записать модель кинетики реакции в виде двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g Y) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g v_g Y) &= J_Y; \\ \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \mu_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g v_g \mu_g) &= J_\mu;\end{aligned}\tag{2}$$

первое из которых описывает кинетику индукционной стадии, а второе – экзотермической стадии. Обозначения: μ_g – молярная масса газа; J_μ – скорость изменения молярной массы за счет реакции горения, умноженная на плотность газа; Y – доля периода химической индукции; J_Y – скорость протекания индукционного периода, умноженная на плотность газа. На стадии индукции $0 < Y < 1$, $J_\mu = 0$, а на стадии тепловыделения $Y = 0$, $J_Y = 0$, $J_\mu \neq 0$. Из-за своей громоздкости выражения для J_μ и J_Y не приводятся, но их можно найти в работах [6] и [7]. Следуя модели [6] запишем калорическое уравнение состояния газа:

$$U_g = \left(\frac{1}{\mu_a} + \frac{1}{2\mu_g} + \beta \left[\frac{1}{\mu_a} - \frac{1}{\mu_g} \right] \frac{\theta/T_g}{\exp(\theta/T_g) - 1} \right) RT_g + E_\mu \left(\frac{1}{\mu_g} - \frac{1}{\mu_{min}} \right).\tag{3}$$

Здесь $\mu_a = 0.013$ кг/моль – молярная масса газа в атомарном состоянии, $\beta = \mu_{max}/\mu_{min} = 2.22$, где $\mu_{max} = 0.029$ кг/моль и $\mu_{min} = 0.013$ кг/моль – молярная масса газа в предельно рекомбинированном и предельно диссоциированном состояниях; $\theta = 4980$ К – эффективная температура возбуждения колебательных степеней свободы молекул. Первое слагаемое в (3) определяет термодинамическую, а второе – химическую составляющую внутренней

энергии газа. В качестве термического уравнения состояния газовой фазы используется уравнение состояния совершенного газа.

Благодаря высокой теплоемкости твердого вещества скелет слабо нагревается в результате сгорания топлива, поэтому теплоемкость c_s твердой фазы можно считать константой, и записать удельную внутреннюю энергию скелета как $U_s = c_s T_s$.

Силу взаимодействия фаз F_{sg} на основании решения задачи об обтекании твердой сферы [4] можно представить в виде суммы:

$$F_{sg} = F_\eta + F_m + F_A. \quad (4)$$

Слагаемые в (4) имеют следующий смысл: F_η – квазистационарная сила вязкого трения, F_m – сила присоединенных масс, F_A – сила Архимеда. Выражения для этих сил имеют вид [4]:

$$F_\eta = -\alpha_g \alpha_s K_\eta \frac{\eta_g v_g}{d_0^2}; \quad F_m = \frac{1}{2} \alpha_g \alpha_s K_m \rho_g \frac{dv_g}{dt}; \quad F_A = \alpha_g \alpha_s \rho_g \frac{dv_g}{dt}, \quad (5)$$

где d_0 – диаметр твердых частиц, η_g – молекулярная вязкость газа, а коэффициенты K_m и K_η являются функциями от α_i и числа Рейнольдса. В расчетах используются выражения для K_m и K_η , полученные соответственно в [8] и [9]. При выводе выражения для K_η в [9] учитывается, что истинная скорость течения газа внутри поровых каналов в $1/\alpha_g$ раз больше, чем средняя расходная скорость, определяемая из системы уравнений (1).

Учитывая, что газ обладает существенно меньшей теплопроводностью, чем материал скелета, объемную скорость межфазного теплообмена определим по следующей формуле [4]:

$$Q_{sg} = \frac{6\alpha_s}{d_0^2} \lambda_g Nu_g (T_s - T_g), \quad (6)$$

в которой Nu_g – число Нуссельта – безразмерная характеристика интенсивности теплообмена, определяемое по формуле, полученной в [10].

Молекулярные коэффициенты вязкости и теплопроводности газовой смеси будем рассчитывать по кинетической модели реального газа в приближении потенциала Леннарда-Джонса [11]:

$$\lambda_g = \frac{25}{32} \sqrt{\frac{RT_g}{\pi \mu_g}} \frac{c_V}{\sigma^2 \Omega}; \quad \eta_g = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{\mu_g RT_g}{\pi}} \frac{1}{\sigma^2 \Omega}; \quad \Omega = f\left(\frac{kT_g}{\epsilon}\right) \quad (7)$$

Обозначения: c_V – теплоемкость газа при постоянном объеме, $\sigma = 1.678 \cdot 10^{-10}$ м и $\epsilon/k = 6418$ К – параметры потенциала Леннарда-Джонса, k – постоянная Больцмана. Аппроксимация зависимости $\Omega(kT_g/\epsilon)$, удобная для расчетов, взята из [2].

Как уже говорилось выше, течение газа в окрестности волны горения является турбулентным. Турбулентные коэффициенты переноса, в соответствии с алгебраической моделью пути смешения Прандтля [13] определяются с помощью формул:

$$\eta_T = l_m^2 \left| \frac{\partial v_g}{\partial y} \right| \approx l_m^2 \frac{2v_g}{d_e}; \quad l_m = 0.4d_e; \quad \lambda_T = Pr_T \eta_T. \quad (8)$$

где Pr_T – турбулентное число Прандтля, значение которого для течений в пограничном слое принимается равным 0.9.

Замыкается система уравнений условием нормировки для объемных концентраций фаз: $\alpha_g + \alpha_s = 1$. Из условия несжимаемости скелета следует, что как объем газа в порах α_g , так и объем скелета α_s являются постоянными величинами.

Уравнения (1)-(8) образуют замкнутую систему относительно переменных $\rho_g, v_g, p_g, \mu_g, T_g, T_s, U_g, U_s, Y$.

Система интегрировалась численно с использованием подхода дробных шагов.

§ 1. Результаты моделирования

Исследование структуры фронта волны быстрого горения проводилось для смеси $20\%H_2 + 20\%O_2$ в одномерной области с физическим размером 1 м. Начальное значение молярной массы смеси

$\mu_g = 0.026$ кг/моль. На обоих концах области, для соответствия экспериментальным условиям [1], ставились граничные условия, моделирующие твердую стенку. В качестве твердой фазы рассматривалась заполняющая всю расчетную область насыпка из стальных шаров, диаметром 3 мм; средняя пористость такой насыпки составляет 0.4. Инициирование горения производилось моделированием мгновенного тепловыделения с плотностью энергии 1 МДж/м³ в узкой области размером 1 см.

На рис. 1. приведено решение, полученное для начального давления в смеси 0.4 бар.

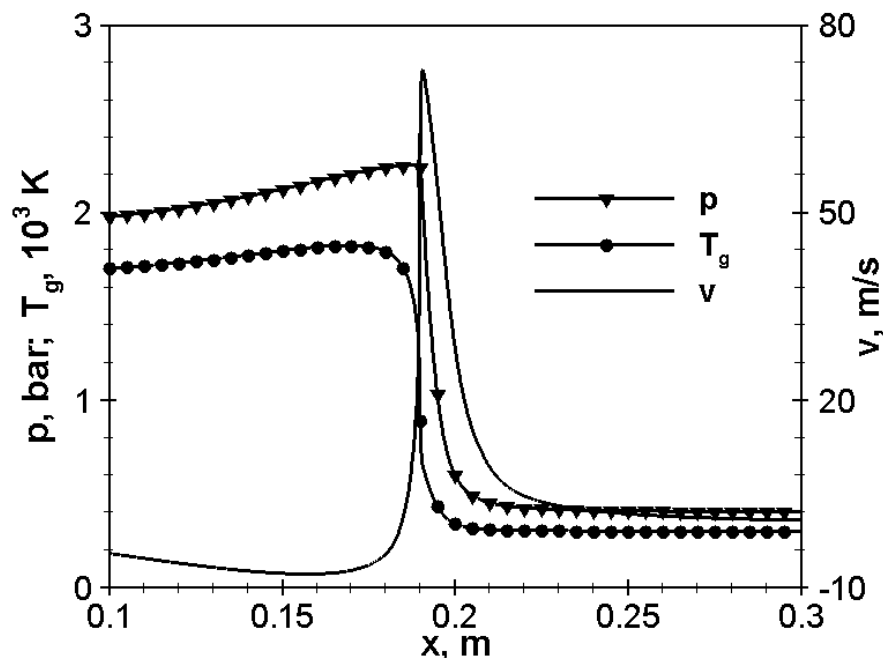


Рис. 1: Эпюры давления, скорости и температуры в волне быстрого горения для смеси 20% H_2 + 80% O_2 при начальном давлении 0.4 бар.

Рассчитанная скорость распространения пламени составляет 135 м/с, что довольно близко к экспериментальному значению из [2], которое для соответствующих условий равно 150 м/с. В волне наблюдается пик давления с плавным передним фронтом, что качественно согласуется с осциллограммами [2]. Задний фронт имеет существенно меньший наклон, чем в опыте, что, возможно,

связано с пренебрежением нестационарными эффектами при теплообмене между фазами.

Из эпюр газодинамических переменных на рис. 1. следует, что поток газа опережает волну химической реакции (фронт которой примерно совпадает с фронтом температуры), но в зоне тепловыделения скорость газа также положительна, а это означает, что перенос тепла от продуктов реакции к холодному газу имеет, хотя бы отчасти, конвективный механизм. За зоной реакции (ее левая граница соответствует положению плавного максимума температуры) наблюдается отток разогретых реактантов в обратную сторону от хода волны, но с гораздо меньшей скоростью, чем перед зоной реакции. Это связано с тем, что давление за волной значительно выше, чем перед ней.

Плавное нарастание давления перед волной быстрого горения связано с фильтрационным режимом течения газа через поры скелета. При варьировании размеров твердых частиц, а вместе с тем и гидравлического сопротивления среды, выяснено, что возмущение давления успевает распространиться на тем большее расстояние перед волной, чем больше диаметр частиц. Ширина переднего фронта импульса давления также зависит от скорости распространения пламени: чем быстрее движется волна, тем на меньшее расстояние от нее успевает отойти возмущение давления и тем меньший объем газа находится в движении (средняя скорость течения при этом возрастает).

В режиме быстрого горения основными факторами, определяющими устойчивость и самоподдерживаемость волны реакции, являются турбулентная теплопроводность и теплоотвод от зоны реакции к частицам скелета. В пренебрежении теплопроводным слагаемым в уравнении баланса энергии газа не удалось получить стационарной волны горения - пламя либо затухало, либо переходило в детонацию. Затухание наблюдается при числах Нуссельта $Nu_g > 200$. Турбулентная вязкость при рассмотренных условиях

практически не сказывается на параметрах волны горения.

Если начальное давление в системе постепенно увеличивать, то скорость пламени увеличивается, пик давления и массовой скорости газа растет. Начиная с некоторого значения (расчет дает 1.5 бар) режим быстрого горения переходит в сверхзвуковой режим медленной детонации, в котором также важную роль в устойчивости стационарной волны играет турбулентная теплопроводность.

Представленная математическая модель дает удовлетворительное согласие с экспериментально установленными закономерностями высокоскоростного дозвукового горения в инертных гранулярных насыпках, что говорит о ее пригодности для описания рассматриваемого круга явлений. Численные расчеты подтверждают предположение [3], что распространение горения по газовой смеси обусловлено конвективным механизмом передачи тепла.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лямин Г.А., Пинаев А.В.* О режиме быстрого дозвукового горения газов в инертной пористой среде с плавным подъемом давления в волне // *Физика горения и взрыва*. 1987. Т. 23. № 4.
- [2] *Пинаев А.В., Лямин Г.А.* Основные закономерности дозвукового и детонационного горения газов в инертных пористых средах // *Физика горения и взрыва*. 1989. Т. 25. №4.
- [3] *Тунник Ю.В.* Самоподдерживающийся режим высокоскоростного горения газа в инертных пористых средах насыпной плотности // *Физика горения и взрыва*. 1990. Т. 26. № 6. С. 98-104.
- [4] *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [5] *Левин В.А., Коробейников В.П.* Сильный взрыв в горючей смеси газов // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*.

1969. № 6. С. 48-51.

- [6] *Николаев Ю.А.* Приближенное моделирование, модель кинетики и калорическое уравнение состояния химически реагирующих газовых смесей при высоких температурах // *Физика горения и взрыва*. 2001. Т. 37. № 1. С. 6-15.
- [7] *Strehlow R.A., Crooker A.J., Cusey R.E.* Detonation initiation behind an accelerating shock wave // *Combustion and Flames*. 1967. Vol. 11, N 4. P. 339-351.
- [8] *Berryman J.G.* Elastic wave propagation in fluid saturated porous media // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1981. Vol. 69, N 2. P. 416-424.
- [9] *Аэров М.Э., Тодес О.М., Наринский Д.А.* Аппараты со стационарным зернистым слоем: Гидравлические и тепловые основы работы. Л.: Химия, 1979. 176 с.
- [10] *Rogg B., Herrmann D., Adomeit G.* Shock-induced flow in regular arrays of cylinders and packed beds // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1985. Vol. 28, N 12.
- [11] *Варнатиц Ю., Маас У., Диббл Р.* Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 352 с.
- [12] *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие. Л.: Химия, 1982. 592 с.
- [13] *Гинзбург И.П.* Аэрогазодинамика. М.: Высшая школа, 1966. 404 с.

УДК 532.529.5

ИСТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОПЛА С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Бузина В. А. (БГУ, Уфа)

Галимзянов М. Н. (ИМех УНЦ РАН, Уфа)

Введение

Газожидкостные пузырьковые системы широко распространены в природе, их применения в современной технике, вызывает повышенный интерес исследователей и ученых к классу задач, связанных с проблемами механики пузырьковых сред. Этот интерес возрастает в связи с перспективами развития новых технологий, связанных в частности с возможностью реализации газофазных высокотемпературных, плазмохимических процессов в изначально холодной пузырьковой жидкости и получением супервысоких рабочих давлений, посредством воздействия на пузырьковые среды в ограниченных емкостях ударными волнами или пропусканием газожидкостных систем через сопла.

Например, это используется для получения нанопорошков. Процесс изготовления нанопорошков заключается в следующем: при испарении твердого материала с последующим интенсивным охлаждением паров получаемого вещества. В результате воздействия низкой температуры наблюдается процесс конденсации желаемых частиц, и можно получить ультрадисперсионный материал, размер частиц у которых составляет от 10 до 300 нм. Благодаря технологии производства наноразмерных порошков в атмосфере различных газов можно получить нанопорошки различных веществ с очень высокой производительностью: десятки килограмм в час для некоторых нанопорошков. На данный момент на практике получены ультрадисперсные порошки оксида магния, оксида

алюминия, закиси меди, оксида кремния, а также ряда металлов - — никеля, алюминия, тантала, молибдена.

В лабораторных условиях академик Галимов Э.М. при истечении бензола через сопло, сопровождаемого кавитацией, установлено образование твердых частиц, содержащих алмаз [1].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается установившееся адиаботическое течение жидкости с газовыми пузырьками в сопле кругового сечения. Для описания двухфазного потока принимаем стандартные допущения для пузырьковой жидкости: смесь является монодисперсной, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия. Отсутствует дробление и слипание пузырьков, пузырьки сферические и одинакового радиуса. Жидкость термостат.

Газовую фазу пузырьковой системы будем рассматривать, как газовую смесь, состоящую из двух компонент - инертного газа, не участвующего в фазовых переходах, и пара окружающей пузырьки жидкости. В соответствии с приведенными допущениями запишем систему уравнений в квазиодномерном и односкоростном приближении [5]:

- уравнение сохранения массы жидкости (пренебрегаем изменением массы жидкости за счет фазовых переходов):

$$\frac{d}{dz} [\rho_l^0 (1 - \alpha_g) v S] = 0;$$

-уравнение сохранения числа пузырьков:

$$\frac{d}{dz} (n v S) = 0;$$

-уравнение импульсов:

$$\rho_l^0 (1 - \alpha_g) v \frac{dv}{dz} = -\frac{dp_l}{dz};$$

-уравнение Рэлея-Ламба с учетом межфазного массообмена:

$$av \frac{dw}{dz} + \frac{3}{2}w^2 + 4\nu^{(v)} \frac{w}{a} = \frac{p_g - p_l - \frac{2\sigma}{a}}{\rho_l^0},$$

$$v \frac{da}{dz} = w + \frac{j}{\rho_l^0}, \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3}\pi a^3 n,$$

где ρ_l^0 , α_l , α_g , v , p_l , p_g , n , a , w , $\nu^{(v)}$, σ , j - соответственно плотность жидкости, объемное содержание жидкой и газовой фазы, скорость, давление в жидкости и пузырьках газа, число и радиус пузырьков, скорость радиального движения, кинематическая вязкость жидкости, коэффициент поверхностного натяжения, интенсивность испарения.

Дополним эти уравнения следующими:

-уравнение внутренней энергии для изменения газовой смеси в пузырьке:

$$v \frac{de}{dz} = -4\pi a^2 p_g w_{g(a)} + 4\pi a^2 q_g + 4\pi a^2 j c_{g(a)} T_a, \quad (e = m_g c_g T_g),$$

где c_g , q_g - удельная теплоемкость газовой смеси при постоянном объеме, интенсивность теплообмена.

-уравнение для давления парогазовой смеси:

$$\frac{dp_g}{dz} = \frac{3(\gamma - 1)}{av} \left[-\frac{\gamma p_g}{\gamma - 1} \left(w + \frac{j}{\rho_l^0} \right) + q_g + \right. \\ \left. + (B_a + c_{g(a)}) T_a j - (1 - k_v) \left(\frac{c_{gv} - c_{gg}}{c_g} - \frac{B_v - B_g}{B} \right) c_g T_g j \right],$$

где γ - соответственно показатель адиабаты для газа, c_{gi} , B_i ($i = g, v$) - удельная теплоемкость и приведенная газовая постоянная для инертной и паровой составляющей газовой смеси. Уравнение для переменной плотности парогазовой смеси и концентрации пара следуют из закона сохранения массы для смеси в пузырьке и ее газовой составляющей.

Уравнение для изменения парогазовой смеси в пузырьке и ее газовой составляющей:

$$v \frac{dm_g}{dz} = 4\pi a^2 j, \quad v \frac{d}{dz} [m_g (1 - k_v)] = 0, \quad m_g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_g^0;$$

- уравнение для плотности парогазовой смеси в пузырьке:

$$\frac{d\rho_g^0}{dz} = \frac{3(j - \rho_g^0 w)}{av};$$

- уравнение для концентрации пара в пузырьке:

$$\frac{dk_v}{dz} = \frac{3(1 - k_v)}{\rho_g^0 av} j.$$

§ 2. Условия на межфазной границе

На границе фазового перехода задаем условие баланса тепла [5]:

$$q_l - q_g = jl,$$

где l - удельная теплота парообразования. Разница потоков тепла идет на фазовый переход.

Тепловый потоки к межфазной поверхности определяются эмпирическими формулами:

$$q_l = Nu_l \lambda_l \frac{T_l - T_a}{2a}, \quad q_g = Nu_g \lambda_g \frac{T_a - T_g}{2a}.$$

Из уравнения баланса тепла получаем выражение для температуры межфазной поверхности:

$$T_a = \frac{\lambda_l Nu_l T_l + \lambda_g Nu_g T_g - 2ajl}{\lambda_l Nu_l + \lambda_g Nu_g}.$$

Интенсивность фазового перехода:

$$j = -\frac{\rho_{g(a)}}{1 - k_{v(a)}} DSh \frac{k_v - k_{v(a)}}{2a},$$

где $\rho_{g(a)}, k_{v(a)}$ - соответственно плотность газовой смеси и массовая концентрация на межфазной поверхности, D - коэффициент диффузии, Sh - число Шервуда.

При описании число Нуссельта задается в виде:

$$Nu = \begin{cases} \sqrt{Pe}, & \text{если } Pe \geq 100, \\ 10, & \text{если } Pe < 100. \end{cases}$$

Для числа Пекле примем выражение:

$$Pe = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\nu^{(T)}}, \quad \nu^{(T)} = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}.$$

Здесь $\nu^{(T)}, \lambda_g, c_g$ - коэффициент температуропроводности, коэффициент теплопроводности и теплоемкость газа соответственно.

Истинная плотность газа в пузырьке:

$$\rho_g^0 = \rho_{gg}^0 + \rho_{gv}^0,$$

где ρ_{gg}^0, ρ_{gv}^0 - соответственно парциальные плотности инертного газа и пара жидкости.

Введем массовые концентрации инертного газа и пара в газовой фазе:

$$k_g = \frac{\rho_{gg}^0}{\rho_g^0}, \quad k_v = \frac{\rho_{gv}^0}{\rho_g^0}, \quad k_g + k_v = 1.$$

Для давления газовой фазы, согласно закону Дальтона имеем:

$$p_g = p_{gg} + p_{gv},$$

где парциальные давления инертного газа и пара определяются уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$p_{gg} = \rho_{gg}^0 \frac{R}{\mu_g} T_g, \quad p_{gv} = \rho_{gv}^0 \frac{R}{\mu_v} T_g.$$

В этих уравнениях R - универсальная газовая постоянная, μ_v, μ_g - молярные массы пара и инертного газа, T_g - температура газа в пузырьке.

§ 3. Результаты численных расчетов

На рис. 1 представлено распределение основных параметров пузырьковой жидкости при течении в сопле с учетом и без учета фазовых переходов. Скорость смеси на входе сопла $v_0 = 11.37$ м/с. Геометрические размеры сопла, принятого в расчетах, следующие: длина 0.15 м, диаметры концов 0.0357 м, расстояние от входного ($z = 0$) до минимального сечения сопла 0.025 м, диаметр минимального сечения 0.0252 м. Указанные параметры сопла согласуются с размерами сопел Лавалья [4] и трубок Вентури [2], применявшимися в экспериментальных исследованиях критического течения двухфазных газожидкостных смесей и вскипающих жидкостей. Для параметров на входном сечении сопла ($z = 0$) приняты следующие величины: давления в жидкости и в газовой фазе $p_{l0} = p_{g0} = 0.2$ МПа, температура $T_{g0} = 300$ К, радиус пузырьков $a_0 = 10^{-4}$ м, объемное газосодержание $\alpha_{g0} = 10^{-4}$.

Кривые 1 соответствуют случаю, когда не учитываются фазовые переходы, кривые 2 - случаю с учетом фазовых превращений. Для числа Нуссельта принято значение $Nu_l = 10^3$. Как отмечено в [3], учет межфазного массообмена оказывает двойное воздействие: во-первых, происходит более сильное начальное расширение пузырьков в области минимального сечения сопла, поскольку пузырьки становятся более мягкими, вследствие интенсивного испарения жидкости внутрь пузырьков, приводящего к уменьшению сопротивляемости пузырьков расширению. При этом масса парогазовой смеси в пузырьках может увеличиваться в несколько раз по сравнению с первоначальной. Во-вторых, при последующем быстром сжатии пузырьков, это набранное значительное количество пара, не успевает конденсироваться обратно, что в свою очередь способствует значительному демпфированию процесса сжатия пузырьков. Поэтому в парогазовых пузырьках наиболее высокие значения пиковых давлений и температур реализуются не при первых схлопываниях, как это имеет место в

пузырьковой жидкости при отсутствии фазовых переходов, а при последующих колебаниях, когда масса парогазовой смеси внутри пузырьков уменьшается.

Из анализа результатов численного расчета видно, что интенсивность испарения жидкости в пузырьки возрастает вблизи горловины сопла, что объясняется увеличением межфазной поверхности, через которую происходит массообмен, с ростом пузырьков и приближением давления в жидкости к давлению насыщенных паров.

Однако, как показывает расчет, для водовоздушных смесей испарением жидкости при температурах ниже 25°C можно пренебречь (рис. 2 и 3), вследствие незначительного вклада паровой компоненты газовой фазы в механизм развития колебаний пузырьков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (08-01-97033), Программы фонда фундаментальных исследования ОЭММПУ РАН (ОЕ-15) и Программы фонда фундаментальных исследований Президиума РАН (П-17).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Галимов Э. М., Кудин А. М., Скоробогатский В. М. и др.* Экспериментальное подтверждение синтеза алмаза в процессе кавитации // Доклады РАН. 2004. Т. 395. № 2. С. 187-191.
- [2] *Крамченков Е.М., Губарев В.Я., Стерлингов В.А., Урбанович Л.И., Ермаков О.Н.* Эффект запираания расхода в трубке Вентури // Труды IV Российской национальной конференции по теплообмену. 2006. Т. 5. С. 262-264.
- [3] *Лепихин С.А., Галимзянов М.Н.* Численное исследование реализации высоких давлений и температур в газовой фазе пузырьковой жидкости при ее истечении через сопла // Сб. трудов XV Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь. 2007. С. 225-229.

- [4] *Мильман О.О., Голдин А.С., Карышев А.К., Помазков В.В., Ширяев О.Н.* Экспериментальное исследование течения вскипающей жидкости в расширяющихся каналах // Труды IV Российской национальной конференции по теплообмену. 2006. Т. 5. С. 276-279.
- [5] *Шагапов В. Ш., Лепихин С. А., Галимзянов М. Н* Реализация высоких давлений и температур в газовой фазе при истечении пузырьковой жидкости через сопло // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 6. С. 134–137.

УДК 517.956.2

КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ
РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С
НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Бузина Е. А. (Уфа, Институт математики с ВЦ)

Введение

Рассматривается задача Дирихле для однопараметрического семейства уравнений с p -Лапласом и с неоднородной нелинейностью неопределенного знака. В основном результате найдена точная вариационная формула для критического уровня значений спектрального параметра при которых рассматриваемые уравнения не имеют положительных решений.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача Дирихле

$$-\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2} u = g(x) |u|^{q-2} u + f(x) |u|^{\gamma-2} u \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2)$$

Здесь Ω ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $n \geq 1$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$; $g(\cdot), f(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$, $1 < p < q < \gamma < p^*$, где $p^* = \frac{pn}{n-p}$ если $p < n$ и $p^* = +\infty$ если $p \geq n$. Предполагается, что нелинейность в правой части (см. [1]) имеет неопределенный знак (см. [1]), т.е. функции g и f могут принимать как отрицательные, так и положительные значения на Ω .

В данной заметке решается проблема об отсутствии положительных решений (1), (2) в зависимости от значения спектрального параметра λ . Проблема существования, отсутствия и кратного существования положительных решений задачи (1)-(2) с однородной ($g \equiv 0$) и неопределенного знака нелинейностью изучалась многими авторами (см. напр. [1] (для $p = 2$) и в [2],[3] (для $1 < p < +\infty$)). При этом в работе [3] найдена точная вариационная формула для критического значения λ^* , разделяющего интервалы существования и отсутствия положительных решений задачи (1), (2) при $g \equiv 0$. Основным результатом данной заметки является обоснование аналогичного точного результата в случае неоднородной нелинейности в (1), т.е. $g \neq 0, f \neq 0$.

§ 1. Основной результат

Рассматриваются слабые неотрицательные решения (1)-(2) из пространства $W := W_0^{1,p}$, где $W_0^{1,p}$ стандартное соболевское пространство, определяемое как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\| = (\int |\nabla u|^p dx)^{1/p}$.

Зададим следующие подмножества функций в W : $\Phi = \{\varphi \in W : \varphi(x) \geq 0, \varphi(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, $S = \{w \in \Phi \cap C(\overline{\Omega}) : w(x) > C(w)d_\Omega(x), x \in \Omega\}$. Здесь $d_\Omega(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $x \in \Omega$, и $0 < C(w) < +\infty$ некоторая константа, которая может зависеть от w .

Введём обозначения

$$G(v) := \frac{1}{q} \int g(x)|v|^q dx, \quad F(v) := \frac{1}{\gamma} \int f(x)|v|^\gamma dx, \quad v \in W$$

Следуя методу продолженного функционала [5], введем следующую минимаксную спектральную точку

$$\lambda_* = \sup_{u \in S} \inf_{\psi \in \Phi} L(u, \psi), \quad (3)$$

здесь

$$L(u, \psi) := \frac{\int |\nabla u|^{p-2} (\nabla u, \nabla \psi) dx - D_u G(u)(\psi) - D_u F(u)(\psi)}{\int |u|^{p-2} u \psi dx}, u \in S, \psi \in \Phi.$$

Пусть $D \subset \Omega$ гладкая подобласть. Будем обозначать через $\lambda_1(D)$ первое собственное значение оператора $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле на границе D , а через $\varphi_1(D) \in W_0^{1,p}$ соответствующую собственную функцию.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 1. Пусть $g(\cdot), f(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют всем вышеописанным условиям. Предположим, что выполняется одно из следующих двух предположений:

- a) $f(x_0) > 0$ при некотором $x_0 \in \Omega$;
- b) $f(x) \geq 0, x \in \Omega$, при этом множество $\bar{M} := \{x \in \Omega : f(x) = 0, g(x) \geq 0\}$ имеет ненулевую меру Лебега,

тогда $\lambda_* < +\infty$ и при всех $\lambda > \lambda_*$ задача (1)-(2) не имеет слабых положительных решений.

§ 1. Доказательство основного результата

Докажем первую часть теоремы. Как в [5] показывается, что, если $\lambda_* < +\infty$, то задача (1)-(2) не имеет слабых положительных решений при всех $\lambda > \lambda_*$. Поэтому для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что $\lambda_* < +\infty$.

Сделаем в (3) замену переменных $\psi = \varphi^\gamma / u^{\gamma-1}$, $u \in S$, $\varphi \in \Phi$. Тогда можно показать (см. [5]), что $\lambda_* =$

$\sup_{u \in S} \inf_{\varphi \in \Phi} L(u, \varphi^\gamma / u^{\gamma-1})$. Рассмотрим дуальную вариационную задачу $\lambda^* = \inf_{\psi \in \Phi} \sup_{u \in S} L(u, \varphi^\gamma / u^{\gamma-1})$. Поскольку $\lambda_* \leq \lambda^*$, то для доказательства необходимого утверждения достаточно показать, что $\lambda^* < +\infty$.

Пусть справедливо предположение а) теоремы. Тогда найдется открытая гладкая область $U \subset \Omega$ такая, что $f(x) > 0$, $x \in U$. Обозначим $\tilde{\varphi} = \varphi_1(U)$. Легко видеть, что $\lambda^* \leq \lambda(\tilde{\varphi}) := \sup_{u \in S} L(u, \tilde{\varphi}^\gamma / u^{\gamma-1})$. Докажем, что $\lambda(\tilde{\varphi}) < +\infty$. Для этого мы воспользуемся процедурой расслоения [4]. Введем следующее многообразие расслоения: $\tilde{S} = \{v \in S : \int \tilde{\varphi}^\gamma / v^{\gamma-q} dx = 1\}$. Заметим

$$\begin{aligned} \sup_{u \in S} L(u, \tilde{\varphi}^\gamma / u^{\gamma-1}) &= \sup_{v \in \tilde{S}} \sup_{t > 0} L(tv, \tilde{\varphi}^\gamma / (tv)^{\gamma-1}) = \\ &= \sup_{v \in \tilde{S}} \left[\frac{\int |\nabla v|^{p-2} (\nabla v, \nabla(\tilde{\varphi}^\gamma / v^{\gamma-1})) dx}{\int \tilde{\varphi}^\gamma / v^{\gamma-p} dx} - \inf_{t > 0} \frac{t^{q-p} \int g \tilde{\varphi}^\gamma / v^{\gamma-q} dx + \gamma t^{\gamma-p} F(\tilde{\varphi})}{\int \tilde{\varphi}^\gamma / v^{\gamma-p} dx} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $F(\tilde{\varphi}) > 0$, то несложно показать, что

$$\begin{aligned} \inf_{t > 0} (t^{q-p} \int g \tilde{\varphi}^\gamma / v^{\gamma-q} dx + \gamma t^{\gamma-p} F(\tilde{\varphi})) &\geq -C_1 \frac{(|\int g \tilde{\varphi}^\gamma / v^{\gamma-q} dx|)^{\frac{\gamma-p}{\gamma-q}}}{F(\tilde{\varphi})^{\frac{q-p}{\gamma-q}}} \geq \\ &\geq -C_1 \frac{(\sup_{x \in \Omega} |g(x)|)^{\frac{\gamma-p}{\gamma-q}}}{F(\tilde{\varphi})^{\frac{q-p}{\gamma-q}}} \geq -C(\tilde{\varphi}, p, q, \gamma) \end{aligned} \quad (5)$$

где $C_1 = -(\frac{q-p}{\gamma-p})^{\frac{\gamma-p}{\gamma-q}} [1 - \frac{\gamma(\gamma-p)}{q-p}] > 0$, а $C(\tilde{\varphi}, p, q, \gamma) < +\infty$ не зависит от $v \in \tilde{S}$. Известно [5], что при всех $u \in S$ справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} \int (|\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla((\frac{\tilde{\varphi}}{u})^{\gamma-1} \tilde{\varphi})) dx &\leq \int (|\nabla \tilde{\varphi}|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi}, \nabla((\frac{\tilde{\varphi}}{u})^{\gamma-p+1} u)) dx = \\ &= \lambda_1(U) \int \tilde{\varphi}^\gamma / u^{\gamma-p} dx \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда и из (4), (5) вытекает, что $\lambda(\tilde{\varphi}) < +\infty$. Таким образом, первая часть теоремы в случае выполнения гипотезы а) доказана.

В условиях гипотезы b) доказательство аналогично. В этом случае в (4) мы полагаем $\tilde{\varphi} = \varphi_1(M)$, где M гладкая открытая подобласть в \bar{M} . Далее, используя неотрицательность инфимума \inf_t в правой части (4) и оценку (6) при $U = M$, получаем требуемое: $\lambda_* \leq \lambda(\tilde{\varphi}) < +\infty$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Berestycki H., Capuzzo–Dolcetta I, Nirenberg L.* Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. // NoDEA **2** (1995), 553–572.
- [2] *P. Drábek, S. I. Pohozaev,* Positive solution for the p-Laplacian: application of the fibering method. // Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A **127** (1997), 703–726.
- [3] *Y. Il'yasov.* On positive solutions of indefinite elliptic equations. C. R. Acad. Sci., Paris **333**, Série 1, (2001) 533–538.
- [4] *С. И. Похожаев.* О методе расслоения решения нелинейных краевых задач. // Д. Тр. МИАН СССР, **192**, Наука, М., (1990), 146–163.
- [5] *Я. Ш. Ильясов.* Исчисление бифуркаций методом продолженного функционала. // Функц. Анал. и его прилож, Т. 41, №1, (2007), 23–38.

УДК 681.3

СОЗДАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОИСКА ПОХОЖИХ ДОКУМЕНТОВ

Вильданов А. Н. (Нефтекамск, НФ БашГУ)

Введение

В работе рассматривается задача разработки приложения по поиску похожих электронных документов. Такая задача, возникает, например, при проверке студенческих работ на предмет самостоятельности проведенного исследования. Зачастую студент берет готовую работу у старших курсов, меняет в ней только фамилию и сдает под своим именем. Данная программа позволила бы выявить такой плагиат. При этом предполагается, что в ВУЗе хранятся электронные варианты курсовых, дипломных работ и т.д.

В результате исследования был разработан программный продукт «Find Pairs» по поиску похожих документов в среде программирования Delphi. Она решает следующие задачи:

- 1) получение текста из данного Word файла;
- 2) поиск в указанной папке Word файлов;
- 3) сравнение текста документа с документами в указанной папке;
- 4) возможность индексации файлов в указанной папке для обеспечения более быстрого поиска;
- 5) сохранение результатов поиска.

§ 1. Получение текста из данного Word файла

Одной из главных проблем при решении такой задачи является получение текста документа. Приложение Microsoft Word является сервером автоматизации (СОМ-объектом), и позволяет под-

ключаться к себе клиентам и использовать свои методы и свойства. Это свойство использовалось для решения первой задачи. Для доступа к документу Word можно использовать примерно такой код:

```
var sa, DocName : string; W : variant;  
begin  
    W:=CreateOleObject('Word.Application');  
    W.Visible := False;  
    W.Documents.Open (DocName, confirmConversions:=False,  
    ReadOnly:=true);  
    sa:=W.ActiveDocument.Range.Text;  
    W.ActiveDocument.Close(savechanges:=0);  
    W.Quit;  
End;
```

Сначала вводим вариантную переменную W, затем создаем объект OLE 'Word.Application', и присваиваем его этой переменной. Открытие существующего документа Word с названием DocName реализуется методом Open. Файл открывается только для чтения и закрывается методом Close без сохранения (оно нам, естественно, не нужно). Текст документа сохраняется в строковую переменную sa. На протяжении всего процесса редактор Word работает в фоновом режиме и на экране не отображается.

§ 2. Поиск в указанной папке Word файлов

Поиск в указанной папке текстовых файлов происходит в два этапа. Сначала происходит поиск всех подкаталогов папки, которые заносятся в ListBox. Тем самым формируется дерево каталогов указанной папки. Затем последовательно в каждом таком каталоге осуществляется поиск файлов на «одном уровне», т.е. поиск во вложенных папках уже не производится.

Для поиска файлов использовались стандартные функции Delphi FindFirst, FindNext и FindClose. Каждый найденный тек-

стовой файл открывается с помощью алгоритма из предыдущего пункта, извлекается его текст и сравнивается с текстом проверяемого файла.

§ 3. Сравнение текста документа с документами в указанной папке

Собственно, алгоритм, по которому сравниваются два текста, следующий. Задается базис из N ключевых слов, и для данного текста вычисляются «веса» всех ключевых слов (количество вхождений ключевых слов, поделенное на общее количество всех ключевых слов в тексте). Получается массив из N числовых элементов. Очевидно, что близость значений двух массивов означает высокую вероятность совпадения соответствующих текстов.

Тем самым сравнение текстов сводится к сравнению двух числовых массивов. Они просто вычитаются друг из друга.

Точность такого сравнения зависит от удачного выбора базиса ключевых слов и количества N . Чем больше N , тем точнее проверка, но медленнее скорость работы программы.

В результате поиска программа выводит названия пяти похожих документов, начиная с самого близкого. Если похожие документы не найдены, программа выводит соответствующее сообщение.

§ 4. Индексация файлов

Программа позволяет индексировать файлы в указанной папке путем создания в ней файла `indexfile.dat`, содержащего предварительную информацию о файлах папки. Индексный файл немного напоминает торрент-файл и содержит названия файлов папки и соответствующие им массивы. В каждой папке создаются свои индексные файлы.

При проверке файлов в данной папке сначала проверяется, есть ли в ней индексный файл. Если такой файл найден, он открыва-

ется, из него извлекается нужная информация, и программа переходит к поиску в других папках. Такая технология позволяет значительно ускорить поиск документов.

После индексации папки ее содержимое менять не следует. В противном случае нужно удалить старый индексный файл и проиндексировать папку заново. В программе также есть опция индексации с обновлением, при котором такой процесс происходит автоматически.

§ 5. Программная реализация

Сам поиск организован в виде самостоятельного потока программы с использованием класса TThread. Это нужно, чтобы во время поиска форма не выглядела зависшей и пользователь мог видеть ход поиска. Для отображения хода процесса поиска используется стандартный компонент ProgressBar1. Перед поиском файлов в указанной папке сначала вычисляется количество текстовых файлов в ней с помощью дополнительного поиска. После запускается основной поиск. Соответственно, после обработки очередного текстового файла индикатор ProgressBar1.Position увеличивается на единицу.

Программой поддерживаются электронные документы следующих форматов: rtf, txt, html, htm (в win-кодировке), doc, docx, т.е., по сути, те форматы, которые может обрабатывать редактор Word.

В настоящее время программа проходит апробацию в Нефтекамском филиале БашГУ на экономико-математическом факультете.

§ 6. Дальнейшие шаги

Главный недостаток программы – слишком медленная скорость. На обработку одного документа уходит 1-2 сек. Существует

ют пути повышения скорости поиска. Следует, во-первых, отказаться от процедуры открытия файла через COM, а извлекать текст с помощью стандартных функций Delphi доступа к файлам типа Read или функций API. Правда, при этом придется решать проблему извлечения текста из word-документов. Во-вторых, использовать механизм отображения файлов в адресное пространство программы с помощью функции CreateFileMapping. Такая возможность не только в большинстве случаев повышает скорость работы с данными, но и предоставляет средства обработки сразу всех записей файла. Такой путь предполагается использоваться в дальнейшем.

Также планируется обеспечить поддержку других текстовых форматов (PDF, DjVu, OpenOffice), хотя это нетривиальная задача.

Следует, далее, улучшить механизм индексации. Необходимо, например, чтобы при обнаружении в каталоге файла, информация о котором в индексном файле отсутствует или устарела, программа автоматически меняла индексный файл путем добавления соответствующей информации. Пока это естественное требование не реализовано, отсюда и запрет на изменение файлов в папке.

Заключение

Программа Find Pairs служит для поиска похожих текстовых документов. Она позволяет найти в указанной папке файл, текст которого максимально совпадает с текстом данного файла.

В первую очередь эта программа предназначена для высших учебных заведений. Предполагается, что в ВУЗе хранятся дипломные, курсовые работы и т.д. в формате Word. При защите новой дипломной работы программа Find Pairs позволяет быстро сверить ее содержимое с уже имеющимися работами и сделать выводы о наличии и степени заимствований, если таковые имеют место.

Таким образом, программа предназначена в первую очередь против грубого копирования чужих источников. Тем не менее, последнее слово должно оставаться за преподавателем. Программа просто подскажет, имеются ли совпадения и их примерное количественное соотношение.

Удобство программы в том, что не нужно создавать никакой базы данных имеющихся рефератов, дипломных проектов, и т.д. Они должны просто храниться более-менее упорядоченно в папках. Например, можно их сортировать по учебному году, по кафедре, по дисциплинам, по группам и т.д. на выбор ВУЗа.

Конечно, отсутствие базы данных влияет на скорость поиска, которая будет не очень высокой. Эта проблема решается с помощью индексации.

В принципе программу можно использовать для поиска любых похожих документов, а не только дипломных работ. Ограничение только одно – скажем прямо, не очень высокая скорость работы программы. Для статических документов это проблема решается индексацией, так как защищенная курсовая или дипломная работа обычно не меняется и хранится без изменений.

В основе работы программы «Find Pairs» лежит уникальный способ анализа текстов. Его плюсы – простота и эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Фаронов, В.В.* Turbo Pascal 7.0: Начальный курс: учебное пособие. - М.: КНОРУС, 2005. - 576 с.
- [2] *Бобровский, С.* Delphi 5: Начальный курс. - М.: ДЕСС: Инфорком-Пресс, 1999. - 272 стр.
- [3] *Елманова Н., Трепалин С., Тенцер А.* Delphi и технология COM. Мастер-класс. - СПб.: Питер, 2003. - 698 с.: ил.
- [4] Информатика и программирование: шаг за шагом. Технология COM. // <http://it.kgsu.ru>.

- [5] *Архангельский, А.Я.* Delphi 7: справочное пособие. - М.: Бином-Пресс, 2003. - 1024с.: ил.
- [6] *Семенов.* Программный поиск файлов. // <http://www.codenet.ru>.
- [7] *Карих, Н.* Первые шаги с TThread в Delphi. // <http://www.realcoding.net>.
- [8] *Kest.* Особенности разработки потоков. // <http://www.codingrus.ru>.
- [9] *Богдановский, В.* Импорт информации из Delphi в Word. // <http://www.interface.ru>.
- [10] Основы Delphi. // <http://www.delphibasics.ru>.
- [12] Функции и процедуры для работы с файлами. // <http://www.helloworld.ru>.

УДК 532.5

ДИНАМИКА СЛАБЫХ ВОЛН СЖАТИЯ В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКОВУЮ ЗАВЕСУ

Гадельшин Р. Р., Галимзянов М. Н. (Уфа, БашГУ)

Введение

В работе исследуется динамика волн сжатия в жидкости при прохождении через пузырьковую завесу. Проводится анализ зависимости эволюции волн при прохождении завесы от параметров смеси (начальное объемное содержание пузырьков, начальный радиус пузырька) и ширины завесы. Рассмотрены случаи, когда длина волны больше ширины завесы, и когда длина волны сопоставима с шириной завесы. Изучение явлений проводится в рамках механики многофазных систем.

Постановка задачи

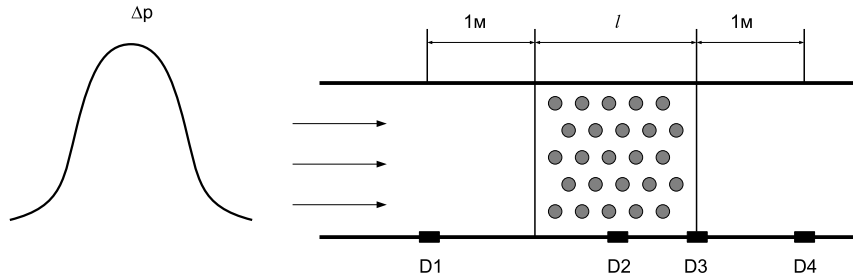


Рис. 1: Схематическое изображение расчетной области. Δp — импульс давления, l — ширина завесы, D1, D2, D3, D4 — датчики.

В “чистой” жидкости создаем импульс давления колоколообразной формы, который описывается выражением

$$p_l(0, t) = p_0 + \Delta p \exp\left(-\left(\frac{t - t_m}{t_*/6}\right)^2\right) \quad (1)$$

Здесь Δp — амплитуда импульса, t_m — момент времени на который приходится максимум амплитуды первоначального импульса, t_* — характерная протяженность импульса.

Задача состоит в определении эволюции волны при ее прохождении через пузырьковую завесу.

§ 1. Основные уравнения для смеси жидкости с газовыми пузырьками

Рассмотрим смесь жидкости со сферическими пузырьками, причем отсутствует массообмен между фазами.

Система макроскопических уравнений масс, числа пузырьков и импульсов при отсутствии дробления пузырьков в односкоростном приближении ($v_i = v, i = l, g$) запишется в виде [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_i v^k) = 0 \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(n v^k) = 0$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -p_l + (\rho_l f_l + \rho_g f_g) \quad (2)$$

$$\left(\rho = \rho_l + \rho_g, \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \alpha_l + \alpha_g = 1, \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3 \right)$$

Здесь $i = l, g$ относятся к параметрам жидкости и газа в пузырьках, $\rho_i, \rho_i^0, \alpha_i, v, p, n, a, f$ — соответственно, средняя по смеси и средняя по фазе плотности, объемные концентрации фаз, скорость, давление, число пузырьков в единице объема, радиус пузырьков, удельная массовая сила.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [2], будем полагать, что скорость радиального движения w состоит из двух слагаемых: $w = w_R + w_A$, где w_R описывается уравнением Релея-Ламба:

$$a_0 \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = (p_g - p_l) / \rho_l^0 \quad (3)$$

где ν_l — вязкость жидкости. Добавка w_A определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}} \quad (4)$$

где C_l — скорость звука в жидкой фазе.

§ 2. Уравнения динамики в переменных Лагранжа

Для решения задачи об эволюции волн в жидкости при наличии пузырьковой завесы будем пользоваться системой уравнений, приведенной в § 1, записанной в переменных Лагранжа. Это обстоятельство связано с тем, что в лагранжевых координатах положение завесы постоянное.

$$\rho_l \frac{\partial x}{\partial s} = \rho_{l0}, \quad n \frac{\partial x}{\partial s} = n_0, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_l}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v \quad (5)$$

$$\left(\rho = \rho_l + \rho_g, \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \alpha_l + \alpha_g = 1, \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3 \right)$$

Здесь x и s — соответственно пространственные переменные Эйлера и Лагранжа. Индексы $i = l$ и g относятся к параметрам жидкости и газа.

Уравнение для давления внутри пузырьков запишем в виде:

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -\frac{3\gamma p_g w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q \quad (6)$$

Тепловой поток q задается соотношением [3]:

$$q = Nu \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a} \quad (7)$$

где $T_0 = const$ — температура жидкости, T_g и λ_g — средняя температура и коэффициент теплопроводности газа, Nu — число Нуссельта, зависящее в общем случае от истории деформации пузырьков, его задаем в виде [3]:

$$Nu = \begin{cases} \sqrt{Pe}, Pe \geq 100 \\ 10, Pe < 100 \end{cases}$$

$$Pe = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{k_g}$$

где k_g — коэффициент температуропроводности газа. Из уравнения состояния для газа:

$$p_g = \rho_g^0 B T_g \quad (8)$$

где B — газовая постоянная, с учетом соотношения

$$\rho_g^0 a^3 = \rho_{g0}^0 a_0^3 \quad (9)$$

следующего из уравнения неразрывности, с учетом уравнения сохранения числа пузырьков можно получить

$$\frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \quad (10)$$

Приведем эту систему к более удобному виду для численного интегрирования. Для этого продифференцируем уравнение неразрывности, и, учитывая соотношение $\rho_l = \rho_{l0}(1 - \alpha_g)$, имеем:

$$\left[(1 - \alpha_g) \frac{\partial \rho_l^0}{\partial t} - \rho_l^0 \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} \right] \frac{\rho_{l0}}{\rho_l} + \rho_l \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad (11)$$

Проделаем такую же операцию с уравнением для числа пузырьков, получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n^2}{n_0} \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad (12)$$

Учитывая связь между числом частиц и объемным содержанием газа, после некоторых преобразований, уравнение (12) запишется в виде

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} - \frac{3\alpha_g}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{n\alpha_g}{n_0} \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad (13)$$

С учетом (13) и уравнения состояния жидкости в акустическом приближении уравнение (11) можно записать в виде:

$$\frac{1 - \alpha_g}{C_l^2} \frac{\partial p_l}{\partial t} = \frac{3\alpha_g \rho_l^0}{a} w - \left[\frac{\rho_l^2}{\rho_{l0}} + \rho_l^0 \alpha_g \right] \frac{\partial v}{\partial s} \quad (14)$$

или

$$\frac{1 - \alpha_g}{C_l^2 \rho_l^0} \frac{\partial p_l}{\partial t} = \frac{3\alpha_g}{a} w - \left[\frac{(1 - \alpha_g)^2}{(1 - \alpha_{g0})} + \alpha_g \right] \frac{\partial v}{\partial s} \quad (15)$$

Таким образом, для численного решения задачи о динамике волн в жидкости при наличии в ней пузырьковой завесы имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g C_l^2 \rho_l^0}{a(1 - \alpha_g)} w - \left(\frac{(1 - \alpha_g)^2}{1 - \alpha_{g0}} + \alpha_g \right) \frac{C_l^2 \rho_l^0}{(1 - \alpha_g)} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{n\alpha_g}{n_0} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t} &= v & (16) \\
\frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a}w - \frac{3(\gamma - 1)}{a}q \\
\frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_R + w_A \\
\frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left(\frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2}w_R^2 - 4\nu_l \frac{w_R}{a} \right) \frac{1}{a} \\
w_A &= \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}} \\
q &= Nu \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a} \\
\frac{T_g}{T_0} &= \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \\
Nu &= \begin{cases} \sqrt{Pe}, Pe \geq 100 \\ 10, Pe < 100 \end{cases} \\
Pe &= 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{k_g}
\end{aligned}$$

§ 3. Численное исследование

Система (16) решалась численно по явной схеме. Для аппроксимации дифференциальных уравнений использовалась равномерная шахматная сетка с узлами в точках [4]

$$(s_i, t_i), (s_{i+1/2}, t_{i+1/2}),$$

$$s_{i+1} = s_i + h, s_{i+1/2} = s_i + 0.5h, i = 0, 1 \dots N - 1$$

$$s_0 = 0, s_N = M, t_{j+1} = t_j + \tau, t_{j+1/2} = t_j + 0.5\tau$$

$$t_j = j\tau, j = 0, 1, 2 \dots$$

где h и τ — соответственно шаги по координате и по времени. К узлам сетки (s_i, t_j) будем относить сеточные функции скорости v_i^j и эйлеровой переменной x_i^j , к “полуцелым” точкам $(s_{i+1/2}, t_{j+1/2})$ — сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [4].

Устойчивость данной схемы следует из условия Куранта, которое ставит ограничение на величину шага по времени [4]

$$\tau \leq \frac{h}{C_i} \quad (17)$$

§ 4. Результаты расчетов

На рис.2 представлены показания датчиков D1, D4 для различных начальных объемных газовых содержаний — $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $\alpha_{g0} = 10^{-3}$, $\alpha_{g0} = 10^{-4}$, для $a_0 = 10^{-2}$ м, $\Delta p = 10^4$ Па, $l = 0.1$ м, $t_* = 10^{-3}$ с. Здесь для датчика D1, расположенного в “чистой” жидкости перед завесой, первый всплеск (обращенный вверх) соответствует первоначальному импульсу, второй всплеск (обращенный вниз) сигналу, отразившемуся от пузырьковой завесы. Видим сильное влияние объемного газового содержания на изменение амплитуды импульса давления. Для $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ амплитуда импульса при прохождении через завесу затухает практически полностью, для $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ импульс практически не гасится.

На рис. 3 представлены показания датчиков D1, D4 для различных начальных радиусов пузырьков — $a_0 = 10^{-2}$ м, $a_0 = 10^{-3}$ м, $a_0 = 10^{-4}$ м, для начального объемного газового содержания $\alpha_{g0} = 10^{-4}$, $\Delta p = 10^4$ Па, $l = 0.1$ м, $t_* = 10^{-3}$ с. Видим, что изменение начальных радиусов пузырьков не оказывает существенного влияния на изменение амплитуды импульса давления, для $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ импульс практически не гасится.

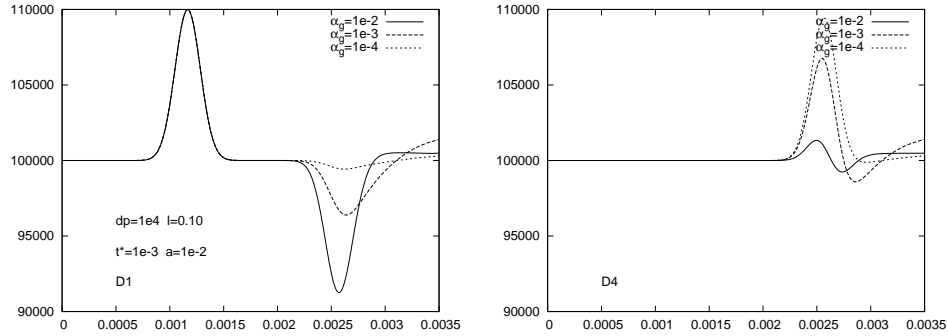


Рис. 2: Показания датчиков D1, D4 для различных начальных объемных газовых содержаний и для начального радиуса пузырьков $a_0 = 10^{-2}$ м.

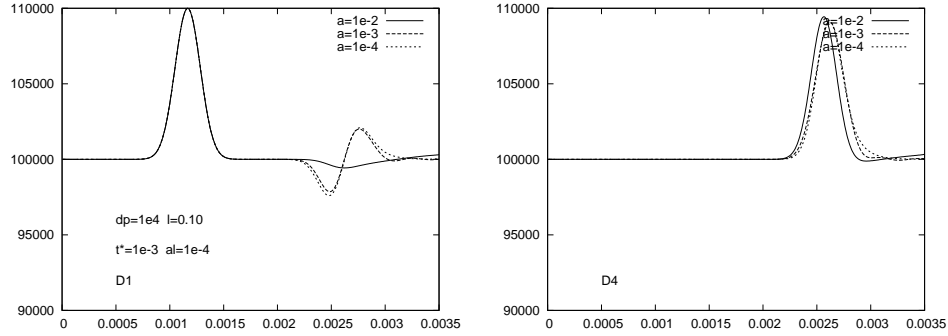


Рис. 3: Показания датчиков D1, D4 для различных начальных радиусов пузырьков и для начального газового содержания $\alpha_{g0} = 10^{-4}$.

На рис. 4 представлены показания датчиков D2, D3 для различных значений ширины завесы — $l = 0.05$ м, $l = 0.1$ м, $l = 0.15$ м, $l = 0.2$ м, $l = 0.25$ м, для протяженности импульса $t_* = 10^{-3}$ с, $a_0 = 10^{-3}$ м, $\alpha_{g0} = 10^{-4}$, $\Delta p = 10^4$ Па.

На рис. 5 представлены показания датчиков D2, D3 для различных значений ширины завесы — $l = 0.05$ м, $l = 0.1$ м, $l = 0.15$ м, $l = 0.2$ м, $l = 0.25$ м, для протяженности импульса $t_* = 10^{-4}$ с, $a_0 = 10^{-3}$ м, $\alpha_{g0} = 10^{-4}$, $\Delta p = 10^4$ Па.

Из рисунков 4 и 5 видно, что более узкий импульс (с протяженностью $t_* = 10^{-4}$ с) погасит проще чем более широкий ($t_* = 10^{-3}$ с),

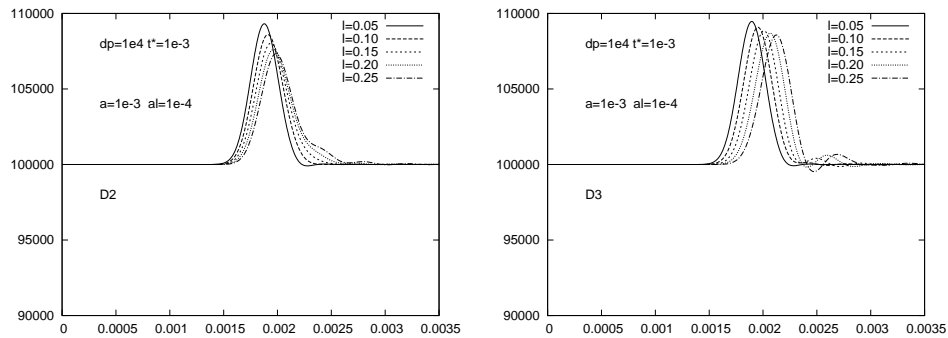


Рис. 4: Показания датчиков D2, D3 для различных значений ширины завесы и протяженности импульса $t_* = 10^{-3}$ с.

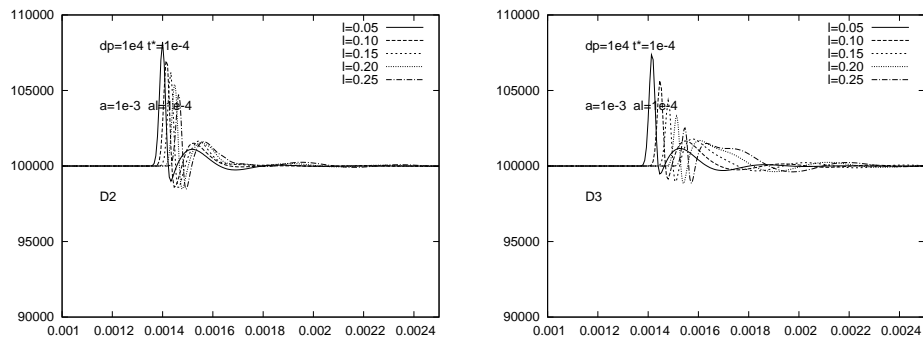


Рис. 5: Показания датчиков D2, D3 для различных значений ширины завесы и для протяженности импульса $t_* = 10^{-4}$ с.

чтобы погасить импульс давления с первоначальной амплитудой $\Delta p = 10^4$ Па и протяженностью $t_* = 10^{-4}$ с, при $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ достаточно завесы шириной 25 см. Импульс протяженностью $t_* = 10^{-3}$ с значительно сложнее погасить только за счет увеличения ширины завесы.

Выводы

- на изменение амплитуды импульса давления сильное влияние оказывает начальное объемное газовое содержание α_{g0} , а не начальный радиус пузырьков a_0

- завеса шириной 10см при начальном объемном газовом содержании $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ практически полностью гасит импульс давления с первоначальной амплитудой 10^4 Па, тогда как при $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ такой импульс почти без потерь проходит через завесу
- более узкий импульс (с протяженностью $t_* = 10^{-4}$ с) погасит проще чем более широкий ($t_* = 10^{-3}$ с)
- чтобы погасить импульс давления с первоначальной амплитудой 10^4 Па и протяженностью $t_* = 10^{-4}$ с, при $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ достаточно ширины завесы 10см, при $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ достаточно 25см
- импульс протяженностью $t_* = 10^{-3}$ с значительно сложнее погасить только за счет увеличения ширины завесы

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шаганов В. Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками. ПМТФ, 1977, № 1, С. 90–101.
- [2] Нигматулин Р. И., Шаганов В. Ш., Вахитова Н. К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространение волны в пузырьковой среде. ДАН, 1989, т. 304, № 5, С. 1077–1088.
- [3] Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, Т1, 1987, С. 360.
- [4] Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: 1975, С. 352.

УДК 534.112

НАХОЖДЕНИЕ ПОЛИНОМА ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО
ПАРАМЕТРА В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНОГО НУЛЕВОГО
СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Галеева Д. Р. (Уфа, БашГУ)

На практике часто встречаются такие ситуации, когда спектральный параметр входит в краевое условие.

Рассмотрим спектральную задачу

$$y'' + p_1(x, \lambda)y' + p_2(x, \lambda)y = 0, \quad (1)$$

$$a(\lambda)y'(0) + b(\lambda)y(0) = 0, \quad (2)$$

$$c(\lambda)y'(1) + d(\lambda)y(1) = 0, \quad (3)$$

где λ - спектральный параметр, $x \in [0, 1]$, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$, $d(\lambda)$ - функции, коэффициенты которых не обращаются в нуль одновременно.

В работе [1] показано, что произвольный полином от спектрального параметра степени $n-1$ из краевого условия задачи Штурма-Лиувилля однозначно восстанавливается по n ненулевым попарно различным собственным значениям. В [1] показано также, что условие отличности собственных значений от нуля является существенным.

Однако, в настоящей работе выявлено, что в некоторых случаях информация о нулевом собственном значении также может быть использована для отыскания неизвестного полинома из краевого условия задачи Штурма-Лиувилля.

Рассматривается спектральная задача:

$$-y'' = \lambda^2 y, \quad (4)$$

$$y'(0) = 0, \quad (5)$$

$$y'(1) + D(\lambda)y(1) = 0, \quad (6)$$

где $D(\lambda) = D_1\lambda + D_2\lambda^2 + \dots + D_n\lambda^n$, $y = y(x, \lambda)$, λ - спектральный параметр, $x \in [0, 1]$.

Для этой спектральной задачи показывается, что полином порядка n можно однозначно восстановить по 1 нулевому собственному значению кратности 2 и $n-1$ ненулевым попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \neq 0$. А именно, верна следующая теорема.

Теорема. Полином $D(\lambda)$ (коэффициенты D_1, D_2, \dots, D_n) из краевого условия (6) однозначно восстанавливается по одному нулевому собственному значению кратности 2 - λ_0 и $n-1$ ненулевым попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ краевой задачи (4) - (6)

Доказательство. Общим решением задачи (4) - (6) является функция $y(x) = y(x, \lambda) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$.

Для определения констант C_1, C_2 используются краевые условия (5) - (6) и характеристический определитель задачи (4) - (6) имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = D(\lambda)\cos\lambda - \lambda\sin\lambda = 0 \quad (7)$$

Из уравнения (7) выразим $D(\lambda)$:

$$D(\lambda) = \frac{\lambda\sin\lambda}{\cos\lambda},$$

где $\cos\lambda \neq 0$.

Тогда восстанавливаемый полином будет иметь следующий вид:

$$\frac{\lambda\sin\lambda}{\cos\lambda} = D_1\lambda + D_2\lambda^2 + \dots + D_n\lambda^n \quad (8)$$

Подставив в (8) известные спектральные параметры $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ можно получить следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \lambda_0 + D_2 \lambda_0^2 + \dots + D_n \lambda_0^n = \frac{\lambda_0 \sin \lambda_0}{\cos \lambda_0} \\ D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_1^2 + \dots + D_n \lambda_1^n = \frac{\lambda_1 \sin \lambda_1}{\cos \lambda_1} \\ \dots \\ D_1 \lambda_{n-1} + D_2 \lambda_{n-1}^2 + \dots + D_n \lambda_{n-1}^n = \frac{\lambda_{n-1} \sin \lambda_{n-1}}{\cos \lambda_{n-1}} \end{array} \right.$$

где $\cos \lambda_i \neq 0, i = 0, n - 1$

Так как $\lambda_0 = 0$ кратности 2, то из определения кратности корня следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(\lambda_0) = 0 \\ \Delta'(\lambda_0) = 0 \\ \Delta''(\lambda_0) \neq 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

где $\Delta'(\lambda) = D'(\lambda) \cos \lambda - D(\lambda) \sin \lambda - \sin \lambda - \lambda \cos \lambda$.

Подставив λ_0 в (9) несложно выявить, что

$$D'(\lambda_0) = D_1 + 2D_2 \lambda_0 + \dots + nD_n \lambda_0^{n-1} = 0.$$

Подставляя $\lambda_0 = 0$ в предыдущее уравнение, получаем, что $D_1 \equiv 0$.

Следовательно восстановленный полином имеет следующий вид: $D(\lambda) = D_2 \lambda^2 + \dots + D_n \lambda^n$. А система уравнений преобразуется в:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2 \lambda_1^2 + \dots + D_n \lambda_1^n = \frac{\lambda_1 \sin \lambda_1}{\cos \lambda_1} \\ D_2 \lambda_2^2 + \dots + D_n \lambda_2^n = \frac{\lambda_2 \sin \lambda_2}{\cos \lambda_2} \\ \dots \\ D_2 \lambda_{n-1}^2 + \dots + D_n \lambda_{n-1}^n = \frac{\lambda_{n-1} \sin \lambda_{n-1}}{\cos \lambda_{n-1}} \end{array} \right.$$

где $\cos \lambda_i \neq 0, i = 1, n - 1$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ ненулевые попарно различные собственные значения.

Разделив каждое уравнение данной системы на соответствующий коэффициент $\lambda_i^2, i = 1, n - 1$, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2 + \dots + D_n \lambda_1^{n-2} = \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1 \cos \lambda_1} \\ D_2 + \dots + D_n \lambda_2^{n-2} = \frac{\sin \lambda_2}{\lambda_2 \cos \lambda_2} \\ \dots \\ D_2 + \dots + D_n \lambda_{n-1}^{n-2} = \frac{\sin \lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1} \cos \lambda_{n-1}} \end{array} \right.$$

Таким образом, основной определитель последней системы име-

ет вид определителя Вандермонда: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$

$$(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \dots (\lambda_{n-1} - \lambda_1) \dots (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

т.к все λ_i , $i = 1, n$ ненулевые и попарно различные.

Такая система имеет однозначное решение. Обозначим $\frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i \cos \lambda_i} = b_i$, где $i = 1, \dots, n - 1$. Тогда неизвестные коэффициенты D_1, \dots, D_n однозначно восстанавливаются :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} \\ b_2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-3} & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-3} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-3} & b_n \end{vmatrix}$$

По найденным $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ восстанавливаются коэффициенты нашего полинома

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \equiv 0 \\ D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dots \\ D_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{array} \right. \quad (10)$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом показано, что произвольный полином от спектрального параметра степени n из краевого условия задачи Штурма-Лиувилля однозначно восстанавливается по 1 нулевому собственному значению кратности 2 и $n - 1$ ненулевым попарно различными собственным значениям.

Полученный результат может быть применен к задаче акустической диагностики об определении параметров закрепления сложной механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями.- М.: Изд-во. Моск. ун-та. 2009.-184с.

УДК 622.692

НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГРУНТА ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ПОДВОДНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ МЕТОДОМ НАКЛОННО НАПРАВЛЕННОГО БУРЕНИЯ

Гафарова Ю. А. (Уфа, БашГУ)

Введение

На пути прокладки трубопроводов неизбежно встречаются водные преграды. Технология и методы строительства данных переходов по сравнению со строительством линейной сухопутной части резко отличаются. Подводный переход – особый конструктивный элемент линейной части магистрального трубопровода, который представляет потенциальную опасность для окружающей

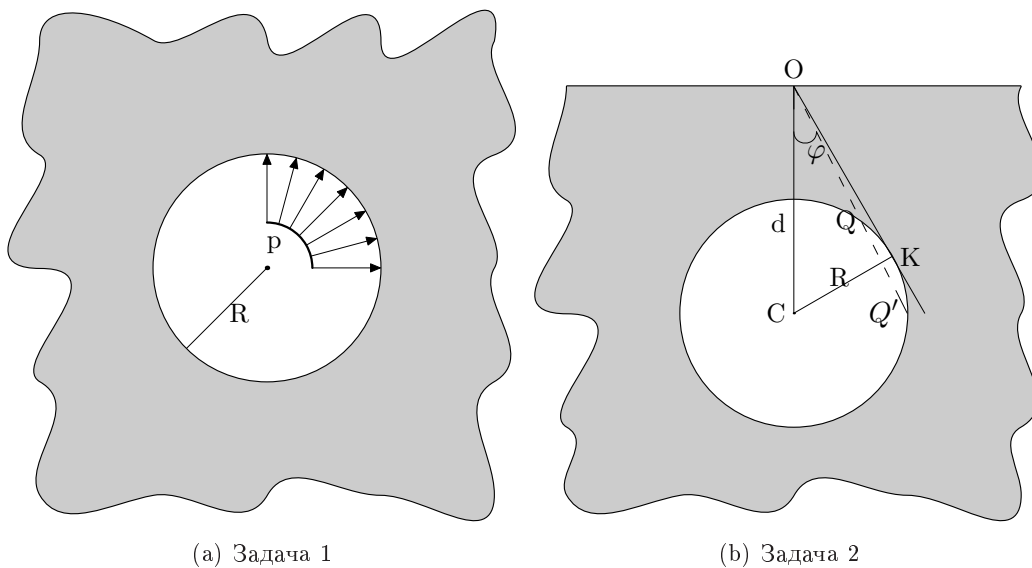


Рис. 1: Отверстие расположено глубоко и на незначительном расстоянии от уровня размыва

среды. Поэтому во избежание аварийных разливов нефти или выхода газа в водоемы получило развитие строительство трубопровода методом наклонного бурения.

§ 1. Аналитическое решение и анализ напряженно деформированного состояния грунта в процессе бурения

При расчете напряжения необходимо учесть глубину пролегания, размер отверстия и характер грунта. Получено аналитическое решение двух задач: отверстие расположено глубоко и на незначительном расстоянии от уровня размыва.

В первом случае напряжения получены в полярной системе координат (r, φ) для неограниченной области с круглым отверстием радиуса R при однородном нормальном давлении p (рис. 1(а)) [1].

При переходе к полярным координатам функция Эри $F(r, \varphi)$ оказывается функцией координат r и φ . Уравнения равновесия удо-

влетворяются при

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Из условий совместимости при пренебрежении объёмными силами получаем бигармоническое уравнение в полярных координатах

$$\Delta\Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) F = 0. \quad (2)$$

В частном случае осевой симметрии относительно оси z функция напряжений Эри зависит только от r и становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) F = 0. \quad (3)$$

(3) с помощью экспоненциальной подстановки можно привести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$F(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (4)$$

С учетом (1) компоненты напряжений определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B(1+2 \ln r) + 2C, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{A}{r^2} + B(3+2 \ln r) + 2C, \quad \tau_{r\varphi} = 0. \quad (5)$$

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{rr}(R) = -p, \quad \sigma_{rr}(\infty) = 0. \quad (6)$$

Из общих выражений для напряжений (5) с учетом граничных условий (6) получаем формулы для констант

$$A = -pR^2, \quad B = C = 0. \quad (7)$$

Таким образом, решение для напряжений в полярной системе координат имеет вид

$$\sigma_{rr}(r) = -p \left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r) = p \left(\frac{R}{r}\right)^2. \quad (8)$$

Расчеты по функции Эри показали, что радиальное напряжение всегда сжимающее, а окружное напряжение – растягивающее. На бесконечности напряжения исчезают.

Вторая задача решена введением биполярной системы координат (α, β) , предложенной Jeffery G. В. [2].

Формулы выведены для полубесконечной пластины, содержащей круглое отверстие, на которое действует однородное нормальное давление p , и ограниченной прямолинейной границей, которая свободна от напряжений (рис. 1(b)). Напряжение в пласте определяется по формуле

$$\sigma_{\beta\beta} = -p + \frac{2p (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta)}{\sinh^2 \alpha}. \quad (9)$$

Напряжение на прямолинейной границе

$$\sigma_{\beta\beta} = \frac{2p (\cos \beta - 1) \cos \beta}{\sinh^2 \alpha}. \quad (10)$$

На рисунке 2 представлены графики изменения напряжения на прямолинейной границе от биполярной координаты β при фиксированных α .

Если r — радиус отверстия, d — длина перпендикуляра от центра отверстия до прямолинейной границы и x — расстояние, отмеченное вдоль прямолинейной границе от основания перпендикуляра, то

$$d = a \coth \alpha, \quad r = \frac{a}{\sinh \alpha}, \quad d^2 - r^2 = a^2, \quad x = \frac{a \sin \beta}{1 - \cos \beta}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\beta\beta} = -4p \frac{r^2(x^2 - d^2 + r^2)}{(x^2 + d^2 - r^2)^2}.$$

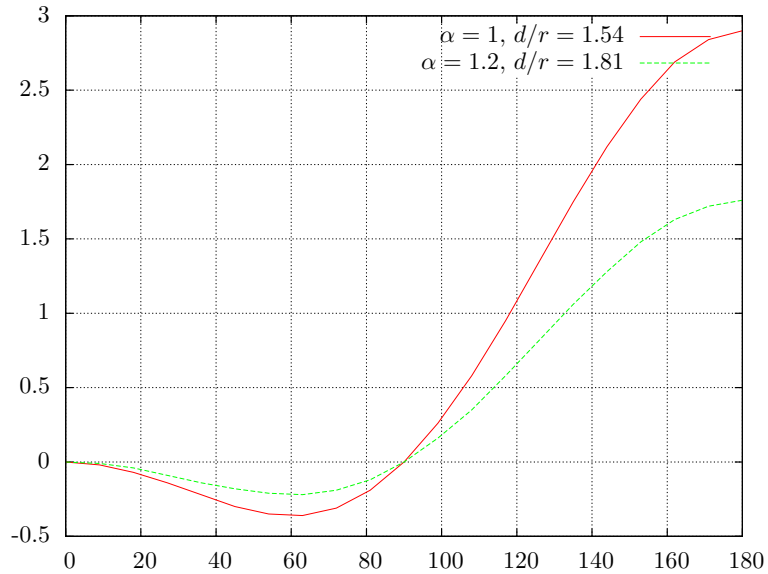


Рис. 2: Изменение напряжения на прямолинейной границе $\sigma = f(\beta)$

Максимальное напряжение в симметричной точке принимает величину $4p \frac{r^2}{d^2 - r^2}$.

В точках $x = \pm \sqrt{d^2 - r^2}$ напряжение исчезает, затем становится сжимающим и достигает максимального значения в точках на расстоянии $\pm \sqrt{3(d^2 - r^2)}$ с обеих сторон от основания перпендикуляра, опущенного из центра отверстия.

Напряжение вокруг круглого отверстия может быть представлено простым геометрическим построением. Если на рисунке 1(b) центр круглого отверстия т. С; т. Q — любая точка на окружности; СО — перпендикуляр, опущенный из т. С на прямолинейную границу; через φ обозначить угол QOC, то напряжение на круглом отверстии определяется по формуле

$$\sigma_{\beta\beta} = p (1 + 2 \tan^2 \varphi) . \quad (12)$$

Следовательно, напряжение одинаково в точках Q, Q', которые лежат на одном луче, проведенном из т. О. Напряжение минимально в точках, как самых близких так и наиболее отдаленных

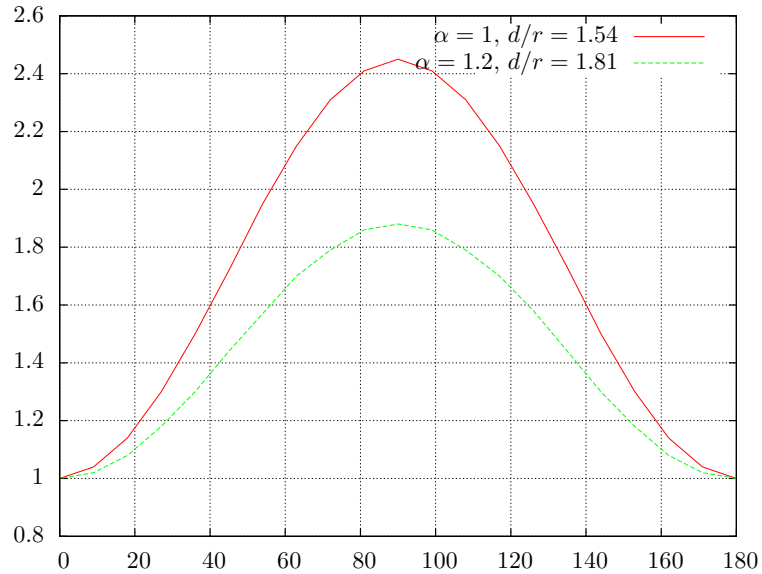


Рис. 3: Изменение напряжения на круглой границе $\sigma = f(\beta)$

от прямолинейной границы, в которых это напряжение численно равняется приложенному давлению. Таким образом, в этих точках напряжение будет тем же самым, какое оно было бы в отсутствии прямолинейной границы, если бы пластина была бесконечна. На рисунке 3 представлены графики изменения напряжения на круглой границе от биполярной координаты β при фиксированных α . Максимальное напряжение находится в точках контакта касательных, опущенных из т. О на круглую границу. В этих точках его значение равно $p \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2}$.

Максимальное напряжение на круглой границе равно максимальному напряжению на прямолинейной границе, если $d = \sqrt{3}r$. В этом случае каждое из них равно $2p$. На рисунке 4 представлены графики зависимости максимального напряжения от биполярной координаты α на прямолинейной границе и на отверстии.

Когда труба расположена на незначительном расстоянии от уровня размыва, разрушение сыпучих пород начнется там, где

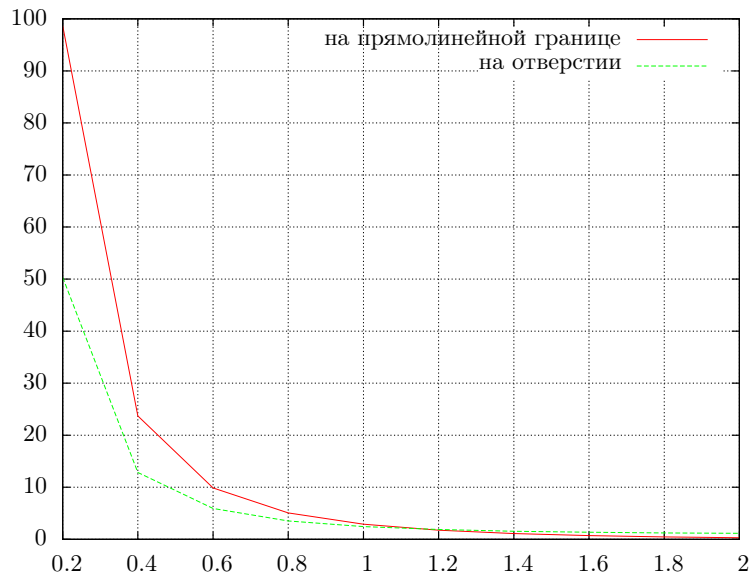


Рис. 4: Максимальные напряжения на границах $\sigma = f(\alpha)$

напряжение достигает максимума. Изменение напряжения зависит от отношения расстояния между прямолинейной границей и центром окружности d к ее радиусу r . Анализ расчетов показал, что трещина появится на прямолинейной границе при $d \leq \sqrt{3}r$, на круглом отверстии — $d \geq \sqrt{3}r$. Когда $d \gg r$ вторая задача сводится к первой.

Таким образом, при прокладке подводных трубопроводов вблизи линии размыва важным критерием является отношение расстояния от линии размыва до центра скважины к ее радиусу.

§ 2. Математическая модель напряженно деформированного состояния грунта в процессе бурения

Уравнения Бельтрами-Митчелла в декартовых координатах для плоского деформированного состояния без учета объем-

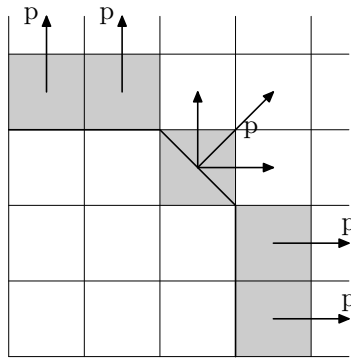


Рис. 5: Начальные условия на отверстии

НЫХ СИЛ

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 0, \\ \Delta\sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 0, \\ \Delta\sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $S = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$.

Получен дискретный аналог уравнений (13) методом контрольного объема. Напряжения рассчитаны на сетке 30×30 при начальных условиях на отверстии (рис. 5):

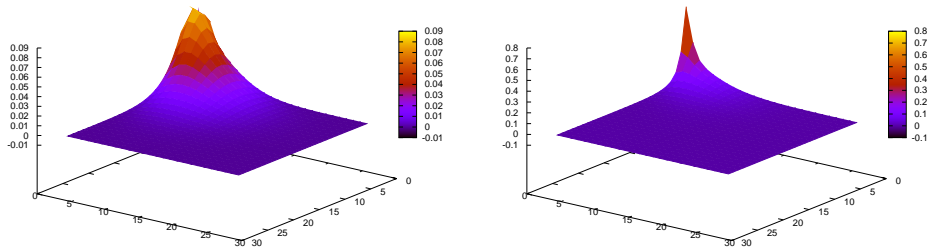
на верхней границе $\sigma_{yy} = p$, $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$,

на правой границе $\sigma_{xx} = p$, $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$,

на ячейке перегиба $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma_{xy} = 0$.

На рисунке 6 представлено распределение напряжений в пластине, отнесенное к приложенному давлению p .

ЛИТЕРАТУРА



(a) Касательное напряжение в пласте (b) Нормальное напряжение в пласте

Рис. 6: Распределение напряжений в пласте

- [1] Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и её приложения: Пер. с нем. – М.: Мир, 1988 - 344с.
- [2] Jeffery G. B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. - London, 1920.
- [3] Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах: Пер. с англ. Е. В. Калабина; под ред. Г. Г. Янькова. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 312 с.

УДК 517.94

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гилимшина В. Ф. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы)

Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства \mathbb{R}_n , $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$. Рассматривается линейное эллиптическое уравнение второго порядка:

$$Lu = -\Phi, \quad (1)$$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n [b_i(x)u_{x_i} + (c_i(x)u)_{x_i}] - d(x)u.$$

Все коэффициенты уравнения измеримы и ограничены в Ω , $d \geq 0$. Условия на обобщенную функцию Φ будут даны ниже. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют условию эллиптичности: существуют положительные постоянная Γ и функция $s(x)$ такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}_n$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливы неравенства:

$$s(x)|y|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}(x)y_\alpha y_\beta \leq s(x)\Gamma|y|^2. \quad (2)$$

Непрерывная в Ω функция $s(x)$ может обращаться в нуль на границе области.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с сочетающимися краевыми условиями первого и третьего типа

$$u|_{x \in \Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sum_{i=1}^n c_i n_i u \right) \Big|_{x \in \Gamma_2} = 0. \quad (3)$$

Здесь Γ_1, Γ_2 произвольные множества, такие, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$; $\mathbf{n}(n_1, n_2, \dots, n_n)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}n_j$.

Работа посвящена исследованию зависимости скорости убывания решения задачи (1), (3) от геометрии неограниченной области Ω .

Будем предполагать, что неограниченная область Ω имеет p ветвей, уходящих на бесконечность, и представлена в виде объединения $\Omega = \bigcup_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ последовательности вложенных $\Omega^N \subset \Omega^{N+1}$ ограниченных областей, удовлетворяющих следующим требованиям. Дополнения $\Omega_N^{N+1} = \Omega^{N+1} \setminus \overline{\Omega^N}$ распадаются на конечное

число подобластей ω_i^N , $i = 1, \dots, p$: $\Omega_N^{N+1} = \bigcup_{i=1}^p \omega_i^N$. Пересечение $(\partial\Omega^N) \cap \Omega$ распадается на конечное число гиперповерхностей S_i^N , $i = 1, \dots, p$.

Определим векторы $t^N = (t_1^N, \dots, t_p^N)$ и $\lambda^N = (\lambda_1^N, \dots, \lambda_p^N)$ формулами $t_i^N = \text{dist}(S_i^N, S_i^{N+1})$ и $\lambda_i^N = \lambda(\omega_i^N)$, где

$$\lambda(Q) = \inf \left\{ \int_Q (s(x)|\nabla g|^2 + dg^2) dx \mid g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n \setminus \Gamma_1), \int_Q s(x)g^2 dx = 1 \right\} \quad (4)$$

Будем предполагать, что существует число $\theta > 0$ такое, что при всех $N \geq 0$ выполняются неравенства

$$1 \leq \theta \lambda_i^N (t_i^N)^2, \quad i = 1, \dots, p. \quad (5)$$

Описанное выше представление $\Omega = \bigcup_{N=0}^\infty \Omega^N$ при выполнении неравенств (5) будем называть λ -разбиением области, соответствующим задаче (1), (3) (в дальнейшем просто λ -разбиением). Понятие λ -разбиения можно считать обобщением понятия λ -последовательности, введенного Л.М.Кожевниковой в [2] в случае $\Gamma_2 = \emptyset$ и $s \equiv 1$ для области, имеющей одну ветвь, уходящую на бесконечность "вдоль оси Ox_1 на случай многих ветвей, достаточно произвольным образом уходящих на бесконечность. В работе [2] области

$$\Omega^N = \{x \in \Omega \mid x_1 < z_N\}, \quad N = \overline{0, \infty} \quad (6)$$

определяются последовательностью чисел $\{z_N\}_{N=0}^\infty$. Приведено простое условие, необходимое и достаточное для существования последовательности чисел такой, что для разбиения $\Omega = \bigcup_{N=0}^\infty \Omega^N$ выполнено требование (5) (в случае равномерно эллиптического уравнения без младших членов, т.е. $s \equiv 1$): для любого $r_1 > 0$

найдется $r_2 > r_1$ такое, что

$$\lambda(\Omega(r_2) \setminus \Omega(r_1)) > 0, \quad (7)$$

где $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$. В §3 построены разбиения для вырождающегося уравнения.

Будем считать, что функционал Φ на множестве функций $C_0^\infty(R^n \setminus \Gamma_1)$ определяется равенством

$$\Phi(v) = \int_{\Omega^0} ([d(x)\varphi v + s(x) \sum_{i=1}^n \varphi_i v_{x_i}] dx, \int_{\Omega^0} [d(x)\varphi^2 + s(x) \sum_{i=1}^n \varphi_i^2] dx < \infty. \quad (8)$$

Будем предполагать, что коэффициенты оператора L удовлетворяют неравенствам

$$|\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 \leq sd/2, \quad |b_i| \leq A\sqrt{sd}, \quad |c_i| \leq A\sqrt{sd}, \quad x \in \Omega \quad (9)$$

где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, A – постоянная. Потребуем, чтобы для вектора $\mathbf{c} = \{c_i\}$ при всех $N = 0, 1, \dots$ и k таком, что $12\Gamma^2 k^2 \theta e^{2k} = 1$, были выполнены соотношения

$$-\frac{\partial \text{dist}(x, S_i^N)}{\partial \mathbf{c}} \leq \frac{k\Gamma^2 s}{t_i^N}, \quad x \in \omega_i^N, \quad i = \overline{1, p}. \quad (10)$$

Это нужно, чтобы младшие члены уравнения (1) не сильно искажали убывание решения задачи, определяемое старшими производными. В следующей теореме рассматривается обобщенное решение задачи (1), (3).

Теорема 1. Пусть $\Omega = \bigcup_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ – некоторое λ -разбиение области Ω . Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют соотношениям (8)-(10). Тогда решение $u(x)$ задачи (1), (3) удовлетворяет оценке

$$\int_{\Omega \setminus \Omega^N} (s|\nabla u|^2 + du^2)dx \leq C_1 \exp(-2kN) \int_{\Omega_0^1} su^2 dx. \quad (11)$$

§ 1. Доказательство теоремы.

На множестве функций $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ определим билинейную форму

$$(u, v)_{1,Q} = \int_Q (duv + s \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} v_{x_j}) dx.$$

Через $\|v\|_{1,Q}$ будем обозначать полунорму, порождаемую этой билинейной формой. В случае, когда $Q = \Omega$, индекс Q опускаем. Пространство $\mathring{H}(\Omega; \Gamma_1)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}_n \setminus \Gamma_1)$ по норме $\|v\|_1$.

Отметим, что из определения чисел λ_i^N следуют неравенства

$$\lambda_i^N \int_{\omega_i^N} s(x)g^2 dx \leq \int_{\omega_i^N} (s(x)|\nabla g|^2 + dg^2) dx = \|g\|_{1,\omega_i^N}^2, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n \setminus \Gamma_1). \quad (12)$$

Последние обеспечивают оценку $\int_{\Omega_0^N} s(x)g^2 dx \leq \varepsilon(N)\|g\|_1^2$.

Обобщенным решением задачи (1), (3) будем называть функцию $u(x) \in \mathring{H}(\Omega; \Gamma_1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (c_i u v_{x_i} - b_i u_{x_i} v) + duv \right] dx = \\ = \int_{\Omega^0} (d\varphi v + s \sum_{i=1}^n \varphi_i v_{x_i}) dx \end{aligned} \quad (13)$$

для любой функции $v(x) \in \mathring{H}(\Omega; \Gamma_1)$.

Построим определенную в Ω липшицеву функцию $\xi(x)$, удовлетворяющую условиям $\xi(x) = 0$ при $x \in \Omega^0$, $\xi(x) = 1$ при $x \in \Omega \setminus \Omega^N$, $\xi(x) = \exp(-k(N-1)) \min(1, \text{dist}(S_i^0, x)/t_i^0)$ при $x \in \omega_i^0$, $\xi(x) = \exp(-k(N-\nu - \min(1, \text{dist}(S_i^\nu, x)/t_i^\nu)))$ при $x \in \omega_i^\nu$, $\nu = \overline{1, N-1}$, $i = \overline{1, p}$. Нетрудно установить следующие соотношения

$$|\nabla \xi| \leq \frac{\exp(-k(N-1))}{t_i^0}, \quad x \in \omega_i^0, \quad i = \overline{1, p}; \quad (14)$$

$$|\nabla \xi| \leq \frac{k\xi}{t_i^\nu}, \quad x \in \omega_i^\nu, \quad \nu = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, p}; \quad (15)$$

$$\max_{\Omega_{\nu+1}^\nu} \xi(x) = e^k \min_{\Omega_{\nu+1}^\nu} \xi(x), \quad \nu = \overline{1, N-1}; \quad \max_{\Omega_0^1} \xi(x) = \exp(-k(N-1)). \quad (16)$$

Подставим в (13) пробную функцию $v = u\xi^2$. Законность такой подстановки нетрудно обосновать, приближая функцию v по норме пространства $\mathring{H}(\Omega; \Gamma_1)$ последовательностью функций $v_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1)$ и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$.

Поскольку $\xi = 0$ в Ω^0 , то учитывая условие (8), имеем

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n \xi^2 a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + d \xi^2 u^2 \right] dx =$$

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n -2\xi u a_{ij} u_{x_i} \xi_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i \xi^2 u u_{x_i} - c_i u (\xi^2 u_{x_i} + 2u \xi \xi_{x_i})) \right] dx.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\int_{\Omega} [\xi^2 s |\nabla u|^2 + d \xi^2 u^2] dx \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} \left[2\Gamma s \xi |\nabla \xi| |u \nabla u| + \xi^2 \left(\frac{s |\nabla u|^2}{4} + \frac{|\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 u^2}{s} \right) - 2u^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}} \right] dx$$

Условия (9) позволяют переписать это в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [s\xi^2 |\nabla u|^2 + d \xi^2 u^2] dx \leq \int_{\Omega} \left[4\Gamma^2 s u^2 |\nabla \xi|^2 - 2u^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}} \right] dx$$

Теперь воспользуемся соотношениями (10), (14), (15), (16):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [s\xi^2 |\nabla u|^2 + d \xi^2 u^2] dx &\leq \sum_{i=1}^p \int_{\omega_i^0} \exp(-2k(N-1)) \Gamma^2 s u^2 \frac{8+4k}{(t_i^0)^2} dx + \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^p \int_{\omega_i^j} \Gamma^2 s \xi^2 u^2 \frac{12k^2}{(t_i^j)^2} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Из неравенства (14) и условия (5) следует оценка

$$\int_{\omega_i^j} s \frac{u^2}{(t_i^j)^2} dx \leq \theta \int_{\omega_i^j} (s |\nabla u|^2 + d u^2) dx.$$

Применяя (16), заключаем, что

$$\int_{\omega_i^j} s \frac{\xi^2 u^2}{(t_i^j)^2} dx \leq \theta e^{2k} \int_{\omega_i^j} \xi^2 (s |\nabla u|^2 + d u^2) dx, \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Поскольку $\xi = 1$ в $\Omega \setminus \Omega^N$, благодаря выбору k , из (17) устанавливаем соотношение

$$\int_{\Omega \setminus \Omega^N} (s |\nabla u|^2 + d u^2) dx \leq \frac{C_0 \exp(-2kN)}{\min_i \{(t_i^0)^2\}} \int_{\Omega_0^1} s u^2 dx.$$

Оценка (11) доказана.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю профессору Ф.Х.Мукминову за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кожеевникова Л. М., Мукминов Ф. Х.* Оценки скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка // Матем. сб. 2000. Т. 191. №2. С. 91–131.
- [2] *Кожеевникова Л. М.* Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения // Матем. сб. 2005. Т. 196 №7. С.67–100

УДК 517.984.54

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Давлетов А.Р.

В настоящее время для решения обратной задачи Штурма-Лиувилля разработано несколько методов. Исследованиями в этом направлении занимались Н. Левинсон, М.Г. Крейн, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, З.Л. Лейбензон, В.А. Юрко и другие [1]-[4]. Исследованиям в области обратных задач Штурма-Лиувилля, а также в целом обратных спектральных задач, придавало импульс и то, что они позволили создать оригинальные методы для расчета радиоволн, теплового излучения, выбрали металлических конструкций.

В последнее время обществом стали предъявляться большие требования к диагностике технических систем. Возникающие техногенные катастрофы и опасности связанные с изношенностью основных фондов, потребовали необходимости создания новых методов инженерного обследования и диагностики технического состояния строительных и других объектов. Стало ясно что математические модели в акустической диагностике закреплений следует разрабатывать с помощью механики, затем формулировать как обратные задачи математической физики и спектральной теории

операторов, которые уже решаются с помощью последовательного применения методов дифференциальных уравнений. Рассматривается задача о колебаниях струны, длина которой закрепляется на обоих концах, а также разрез струны на трех интервалах с соответствующими физическими параметрами. С помощью численного решения задачи Штурма-Лиувилля показано, что можно найти местонахождение, где меняются рассматриваемые физические параметры.

1 Постановка прямой задачи

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) + q_1 y(x) = \lambda y, \quad x \in [0, a] \quad (1) \\ -y''(x) + q_2 y(x) = \lambda y, \quad x \in [a, a + \varepsilon] \quad (2) \\ -y''(x) + q_1 y(x) = \lambda y, \quad x \in [a + \varepsilon, 2\pi] \quad (3) \\ y(0) = y(2\pi) = 0; \quad (4) \end{array} \right.$$

где q_1 и q_2 — некоторые известные величины, a и $a + \varepsilon$ — точки, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi]$.

Известны величины a , ε , q_1 и q_2 , которые являются постоянными. Нужно найти собственные значения задачи (1)-(4).

2 Решение прямой задачи

Из непрерывности решений уравнений (1)-(3) получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(a) = y_2(a); \quad (5) \\ y_1'(a) = y_2'(a); \quad (6) \\ y_2(a + \varepsilon) = y_3(a + \varepsilon); \quad (7) \\ y_2'(a + \varepsilon) = y_3'(a + \varepsilon); \quad (8) \\ y_1(0) = 0; \quad (9) \\ y_3(2\pi) = 0; \quad (10) \end{array} \right.$$

где y_1, y_2, y_3 —соответствующие решения уравнений (1),(2),(3), которые при постоянных c_1, c_2, \dots, c_6 имеют вид:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda - q_1}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda - q_1}x); & (11) \\ y_2 = c_3 \cos(\sqrt{\lambda - q_2}x) + c_4 \sin(\sqrt{\lambda - q_2}x); & (12) \\ y_3 = c_5 \cos(\sqrt{\lambda - q_1}x) + c_6 \sin(\sqrt{\lambda - q_1}x); & (13) \end{cases}$$

Чтобы избавиться от громоздких выражений введем обозначения. Пусть

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \sqrt{\lambda - q_1}, \\ m_2 = \sqrt{\lambda - q_2}, \\ s_1^a = \cos(\sqrt{\lambda - q_1}a), \\ t_1^a = \sin(\sqrt{\lambda - q_1}a), \\ s_2^a = \cos(\sqrt{\lambda - q_2}a), \\ t_2^a = \sin(\sqrt{\lambda - q_2}a), \\ s_1^{a+\varepsilon} = \cos(\sqrt{\lambda - q_1}(a + \varepsilon)), \\ t_1^{a+\varepsilon} = \sin(\sqrt{\lambda - q_1}(a + \varepsilon)), \\ s_2^{a+\varepsilon} = \cos(\sqrt{\lambda - q_2}(a + \varepsilon)), \\ t_2^{a+\varepsilon} = \sin(\sqrt{\lambda - q_2}(a + \varepsilon)), \\ s_1^{2\pi} = \cos(2\sqrt{\lambda - q_1}\pi), \\ t_1^a = \sin(2\sqrt{\lambda - q_1}\pi), \end{array} \right.$$

Система уравнений (5)-(10) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} s_1^a & t_1^a & -s_2^a & -t_2^a & 0 & 0 \\ -t_1^a m_1 & s_1^a m_1 & t_2^a m_2 & s_2^a m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2^{a+\varepsilon} & t_2^{a+\varepsilon} & -s_1^{a+\varepsilon} & -t_1^{a+\varepsilon} \\ 0 & 0 & -t_2^{a+\varepsilon} m_2 & s_2^{a+\varepsilon} m_2 & t_1^{a+\varepsilon} m_1 & s_1^{a+\varepsilon} m_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_1^{2\pi} & t_1^a \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

Решая уравнение (14) мы найдем собственные значения задачи (1)-(4).

Рассмотрим пример нахождения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля (1)-(4).

Вычисления сделаны в программе Maple.

Пример: Пусть $\varepsilon = 0.01$; $q_1 = 1$; $q_2 = 2$. При различных параметрах a находим собственные значения λ_i (см. табл.1).

a	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
λ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
λ_2	1.25079	1.25079	1.25158	1.25238	1.25296	1.253173	1.25295	1.25236	1.25157	1.250783	1.25020
λ_3	2.0023	2.00239	2.00318	2.00237	2.000782	2.000000	2.00081	2.002403	2.00318	2.002365	2.00077
λ_4	3.25161	3.25157	3.25157	3.25000	3.25161	3.2531	3.25156	3.25000	3.25161	3.253181	3.25156
λ_5	5.00241	5.00236	5.0000004	5.00241	5.00236	5.0000000	5.00241	5.002357	5.00000	5.002417	5.00235

табл.1

3 Постановка обратной задачи

Рассмотрим задачу (1)-(4) с физической точки зрения. Пусть дана струна длины 2π , которая закрепляется на обоих концах. Здесь a_1 и a_2 — некоторые параметры, параметр a — метры q_1 и q_2 (см. рис.1).

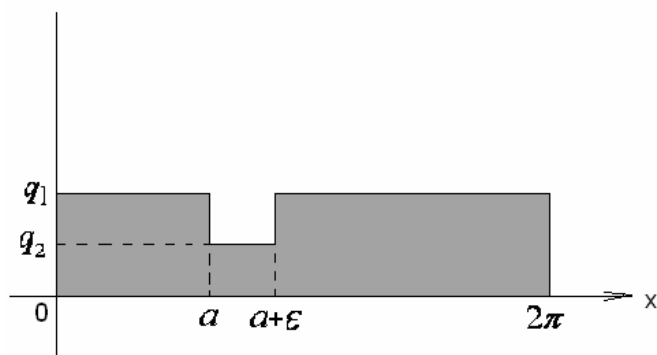


рис.1

Требуется найти параметр a по известным собственным значениям задачи (1)-(4).

4 Решение обратной задачи

Доказана следующая теорема:

Теорема: Пусть дана задача Штурма-Лиувилля (1)-(4), q_1 и q_2 — некоторые известные величины, a и $a + \varepsilon$ — точки, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi]$, тогда можно восстановить параметр a по известному набору собственных частот.

Доказательство: Пусть известны собственные значения задачи (1)-(4), параметры q_1, q_2 и ε . Необходимо восстановить параметр a . Рассмотрим уравнение (14). Для доказательства теоремы нам достаточно по известному набору собственных значений решить уравнение (14).

Рассмотрим контрпример. Пусть известны собственные значения задачи (1)-(4): $\lambda_1 = 1.250216278, \lambda_2 = 2.009040341, \lambda_3 = 3.267794899; \varepsilon = 0.01; q_1 = 1; q_2 = 2$. Тогда решая численно уравнение (14) восстановим параметр a , т.е. найдем корень $a = \frac{\pi}{6}$.

Итак, мы доказали теорему.

Замечание: Пусть дана задача Штурма-Лиувилля (1)-(4), q_1 и q_2 — некоторые известные величины, a и $a + \varepsilon$ — точки, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi]$, тогда параметр a нельзя восстановить по одному собственному значению.

Рассмотрим еще один пример. Пусть известны собственные значения λ_2 при $a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \dots, \frac{11\pi}{6}$ (см. табл.1).

Рассмотрим соотношение собственных частот λ_2 и параметров a на графике (см. рис. 2).

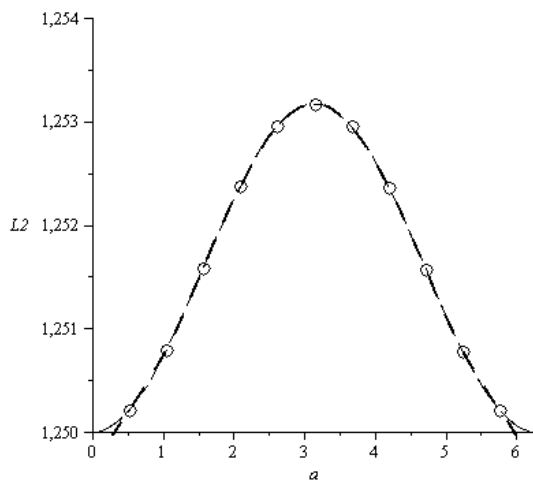


рис.2

Мы видим, что на отрезке $[0, 2\pi]$ одному собственному значению соответствуют 2 значения a . Поэтому чтобы восстановить параметр a однозначно, в данном случае нужно рассмотреть только половину отрезка $[0, 2\pi]$, т.е. следует рассмотреть отрезок $[0, \pi]$.

Таким образом, поставленная обратная задача решена. С физической точки зрения задача имеет смысл в том, что можно найти месторасположение a с двух сторон закрепленной струны, где меняются параметры q_1 и q_2 .

Список литературы

- [1] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [2] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.
- [3] Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.:Физматлит, 2007.
- [4] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

УДК 534.2.532

КОЛЕБАНИЯ ПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ

Давлетшин А. И., Топорков Д. Ю. (Казань, ИММ
КазНЦ РАН)

Введение

В настоящей работе предлагается математическая модель для изучения динамики газового пузырька около плоской жесткой стенки в поле периодически изменяющегося давления окружающей жидкости. В ней учитываются малые деформации поверхности пузырька. Приблизительно учитываются эффекты вязкости и сжимаемости жидкости. Газ в пузырьках полагается гомобарическим. Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиуса пузырька, координаты его центра и амплитуд отклонений формы пузырька от сферической. Она имеет четвертый порядок точности относительно отношения характерного радиуса пузырька к удвоенному расстоянию между центром пузырька и стенкой.

§ 1. Математическая постановка задачи.

Рассматривается осесимметричная задача динамики газового пузырька, радиально пульсирующего около плоской жесткой стенки под действием переменного давления жидкости (рис. 1). Без учета эффектов вязкости и сжимаемости уравнения динамики жидкости (уравнение неразрывности и интеграл Коши-Лагранжа) в терминах потенциала скорости Φ можно записать следующим образом

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho_0} = \frac{p_\infty}{\rho_0}. \quad (1)$$

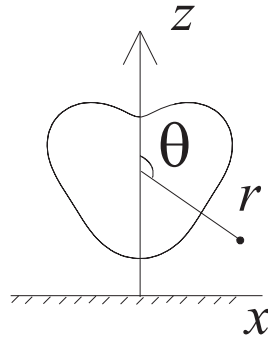


Рис. 1: Взаимное расположение пузырька и систем отсчета.

Здесь ρ_0 – плотность жидкости, p – давление в произвольной точке жидкости, p_∞ – давление жидкости вдали от пузырька.

Газ в пузырьке принимается идеальным гомобарическим с давлением, изменяющимся по закону

$$p_b = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa}.$$

Здесь p_0 – статическое давление жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, R , R_0 – текущий и начальный радиусы пузырька, κ – показатель адиабаты.

На поверхности пузырька, которая в неподвижной декартовой системе координат x , y , z и связанным с ней временем t описывается уравнением $F(x, y, z, t) = 0$, ставится кинематическое и динамическое контактные условия

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla F = 0, \quad (2)$$

$$p = p_b - 2H\sigma, \quad (3)$$

где $2H$ – средняя кривизна поверхности.

На поверхности стенки также ставится граничное условие

$$\nabla\Phi \cdot \nabla F = 0.$$

Давление жидкости p_∞ совершает гармонические колебания

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t,$$

где Δp , ω – амплитуда и частота колебаний.

Пузырек находится не очень близко к стенке, так, что величиной δ^5 по сравнению с 1 можно пренебречь (здесь $\delta = R/d$, где d – удвоенное расстояние от стенки до центра пузырька).

Наряду с неподвижной декартовой системой координат x, y, z и временем t используется подвижная сферическая система отсчета r, θ, φ «вмороженная» в пузырек, и связанное с ним время τ . Радиальная координата отсчитывается от центра пузырька (рис.1).

Для произвольной функции f имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau} - \mathbf{w} \cdot \nabla f, \quad (4)$$

где \mathbf{w} – скорость движения подвижной системы координат.

С учетом (4) интеграл Коши-Лагранжа (1) и кинематическое условие (2) примут следующий вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \mathbf{w} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho_0} = \frac{p_\infty}{\rho_0}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \mathbf{w} \cdot \nabla F + \nabla \Phi \cdot \nabla F = 0. \quad (6)$$

Общий вид потенциала Φ определяется из задачи о взаимодействии двух газовых пузырьков [1], так как динамику пузырька около стенки в рамках [1] можно интерпретировать как взаимодействие двух одинаковых пузырьков, плоскость симметрии в которой совпадает со стенкой. Потенциал Φ принимается в виде

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma 1}(\tau) P_\gamma(\cos \theta_1)}{r_1^{\gamma+1}} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma 2}(\tau) P_\gamma(\cos \theta_2)}{r_2^{\gamma+1}},$$

а в системе подвижных координат 1-го пузырька

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma 1}(\tau) P_\gamma(\cos \theta_1)}{r_1^{\gamma+1}} + \sum_{\gamma, \varsigma=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma \varsigma} B_{\gamma 2}(\tau) r_1^\varsigma P_\varsigma(\cos \theta_1)}{d^{\gamma+\varsigma+1}}. \quad (7)$$

Здесь $P_\gamma(\cos \theta_1)$ – полином Лежандра степени γ от $\cos \theta_1$, d – расстояние между центрами пузырьков, $C_{\gamma\varsigma} = (-1)^\varsigma(\gamma + \varsigma)!/(\gamma!\varsigma!)$.

Переходя в выражении (7) к задаче о взаимодействии пузырька со стенкой получим следующее выражение для потенциала Φ

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_\gamma(\tau)P_\gamma(\cos \theta)}{r^{\gamma+1}} + \sum_{\gamma,\varsigma=0}^{\infty} \frac{G_{\gamma\varsigma}B_\gamma(\tau)r^\varsigma P_\varsigma(\cos \theta)}{d^{\gamma+\varsigma+1}}, \quad (8)$$

где $G_{\gamma\varsigma} = (-1)^{\gamma+\varsigma}C_{\gamma\varsigma}$.

Поверхность пузырька представляется в виде

$$F(r, \theta, \tau) = r - r_s(\theta, \tau) = r - \left(R(\tau) + \sum_{n=2}^N a_n(\tau)P_n(\cos \theta) \right), \quad (9)$$

где N – число гармоник, используемых в представлении поверхности пузырька, a_n – амплитуда отклонения поверхности пузырька от сферической формы в виде поверхностной гармоники $P_n(\cos \theta)$. Искажения $\varepsilon_n = a_n/R$ полагаются малыми ($\varepsilon_n^2 \ll 1$).

Подставляя $F(r, \theta, \tau)$ из (9) и Φ из (8) в кинематическое условие (6), получим выражения для коэффициентов потенциала B_γ (в силу громоздкости эти выражения не приводятся).

Система уравнений для R , z_c (координата центра пузырька) и a_n находится из динамических условий (3), из которых, учитывая (5) и подставляя выражения (8) с найденными коэффициентами B_γ , получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} R\ddot{R} + \frac{3\dot{R}^2}{2} - \frac{\dot{z}_c^2}{4} - \frac{p_b - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R} &= \frac{\dot{B}_0}{d} + \frac{R^3\ddot{z}_c - 4B_0\dot{z}_c}{2d^2} - \\ &- \frac{R^3\dot{z}_c^2}{2d^3} + \frac{2(B_0R^3)'}{4d^4} + \frac{3B_0^2}{4d^4} - \frac{3(R^2\dot{z}_ca_2)'}{10d^2} + \psi_0 + \Delta, \\ \left(1 - \frac{7\varepsilon_2}{5}\right) R\ddot{z}_c + 3\left(1 - \frac{4\varepsilon_2}{5}\right) \dot{R}\dot{z}_c - \frac{9\dot{z}_c\dot{a}_2}{5} - \dot{z}_c^2 \sum_{m=2}^N c_{m,1}\varepsilon_m &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3(B_0R)'}{d^2} - \frac{3(R^4\dot{z}_c)'}{d^3} - \frac{6B_0R\dot{z}_c}{d^4} + \frac{9R^4\dot{z}_c^2}{d^4} + \\
&\quad + \frac{3(4B_0\dot{R}\varepsilon_2 + \dot{B}_0a_2 + 3B_0\dot{a}_2)}{5d^2} + \frac{2B_0\dot{z}_c}{d^2} \sum_{m=2}^N c_{m,1}\varepsilon_m + \psi_1, \\
&\frac{1}{n+1} \left[R\ddot{a}_n + 3\dot{R}\dot{a}_n - (n-1)\ddot{R}a_n + \sum_{m=2}^N (c_{mn,1}\ddot{z}_c a_m + c_{mn,5}\dot{z}_c \dot{a}_m) \right] + \\
&\quad + \frac{9\alpha_{11n}\dot{z}_c^2}{8} + \dot{z}_c \sum_{m=2}^N \left[c_{mn,2}\dot{z}_c \varepsilon_m - \frac{3\beta_{m1n}(\dot{a}_m + 2\dot{R}\varepsilon_m)}{2(m+1)} \right] + \\
&\quad + \frac{(n-1)(n+2)\sigma\varepsilon_n}{\rho_0 R} = \frac{9\beta_{11n}B_0\dot{z}_c}{4d^2} + \frac{9\beta_{11n}R^3\dot{z}_c^2}{4d^3} - \frac{5\beta_{21n}RB_0\dot{z}_c}{2d^3} + \\
&\quad + \frac{9\beta_{11n}B_0^2}{8d^4} - \frac{15\beta_{21n}R^4\dot{z}_c^2}{4d^4} + \frac{21\beta_{31n}R^2B_0\dot{z}_c}{8d^4} + \frac{(2n+1)(R^n B_0)'}{(-1)^n(n+1)d^{n+1}} + \\
&\quad + \frac{(2n+1)\left[(R^{n+3}\dot{z}_c)'\right]}{(-1)^n 2d^{n+2}} + \frac{9\alpha_{11n}B_0\dot{z}_c\varepsilon_2}{10d^2} + \\
&\quad - \frac{1}{d^2} \sum_{m=2}^N \left[\frac{c_{mn,5}(B_0 a_m)'}{n+1} - c_{mn,4}(\dot{a}_m + 2\dot{R}\varepsilon_m)B_0 - c_{mn,3}B_0\dot{z}_c\varepsilon_m \right] + \psi_n,
\end{aligned}$$

где $B_0 = -R^2\dot{R}$, числа c_{q1} , c_{qn1} , c_{qn2} , c_{qn3} , c_{qn4} , c_{qn5} , $\alpha_{\gamma 1\varsigma}$, $\beta_{\gamma 1\varsigma}$, $\chi_{\gamma 11\varsigma}$ определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned}
c_{q1} &= \frac{9}{5}(3\alpha_{q12} - \beta_{q12}), \quad c_{qn1} = -(n-2)\alpha_{q1n} - \frac{3\beta_{q1n}}{2}, \\
c_{qn2} &= -\frac{9}{2} \left[\sum_{\gamma=0}^{n+1} \frac{c_{q\gamma 5}\beta_{\gamma 1n}}{3(\gamma+1)} - \frac{\chi_{q11n}}{2} \right], \\
c_{qn3} &= \sum_{\gamma=0}^{n+1} c_{q\gamma 5} \left(\alpha_{\gamma 1n} + \frac{2\beta_{\gamma 1n}}{\gamma+1} \right) - \frac{9\chi_{q11n}}{2}, \quad c_{qn4} = \alpha_{q1n} + \frac{\beta_{q1n}}{2(q+1)},
\end{aligned}$$

$$c_{qn5} = 3 \left(\alpha_{q1n} - \frac{\beta_{q1n}}{2} \right), \quad \alpha_{\gamma1\varsigma} = \frac{2\varsigma + 1}{2} \int_{-1}^1 P_\gamma \eta P_\varsigma d\eta,$$

$$\beta_{\gamma1\varsigma} = \frac{2\varsigma + 1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) P'_\gamma P_\varsigma d\eta, \quad \chi_{\gamma11\varsigma} = \frac{2\varsigma + 1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) P_\gamma P_\varsigma d\eta,$$

где штрих означает производную по аргументу (η).

Параметры ψ_0 , ψ_1 , ψ_n , Δ – это поправки, обусловленные вязкостью [2] и сжимаемостью [3] жидкости.

$$\psi_0 = -\frac{4\nu\dot{R}}{R}, \quad \psi_1 = -\frac{12\nu}{R} \left(\dot{z}_c + \frac{B_0}{d^2} + \frac{R^3\dot{z}_c}{d^3} - \varepsilon_2\dot{z}_c - \frac{B_0\varepsilon_2}{d^2} \right),$$

$$\psi_n = \frac{2\nu}{R} \left[-(n+2)\dot{a}_n - 2(n-1)\dot{R}\varepsilon_n + \frac{(-1)^n n(2n+1)R^{n-1}B_0}{d^{n+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n n(n+1)(2n+1)R^{n+2}\dot{z}_c}{2d^{n+2}} - \frac{3(n-2)}{2} \left(\dot{z}_c + \frac{B_0}{d^2} \right) \sum_{m=2}^N \varepsilon_m \left(2\alpha_{m1n} - \frac{n\beta_{m1n}}{n-2} \right) \right],$$

$$\Delta_0 = \frac{\dot{R}}{c_0} \left(R\ddot{R} + \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{\dot{z}_c^2}{4} + \frac{p_b - p_\infty}{\rho_0} \right) + \frac{R}{c_0} \left(\frac{\dot{z}_c\ddot{z}_c}{2} + \frac{\dot{p}_b - \dot{p}_\infty}{\rho_0} \right),$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости.

§ 2. Результаты расчетов.

Рассматривается задача динамики пузырька со следующими входными данными: $c_0 = 1500$ м/с, $\rho_0 = 998$ кг/м³, $p_0 = 1$ бар, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $\mu = 10^{-3}$ кг/(м с), $\kappa = 1.4$, $\Delta p = 1.2$ бар, $\omega/2\pi = 20$ кГц, $R(0) = 3$ мкм, $z_c(0) = 125$ мкм, $a_n(0) = 0$, $\dot{R}(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{a}_n(0) = 0$. Изменение в ходе относительно большого количества

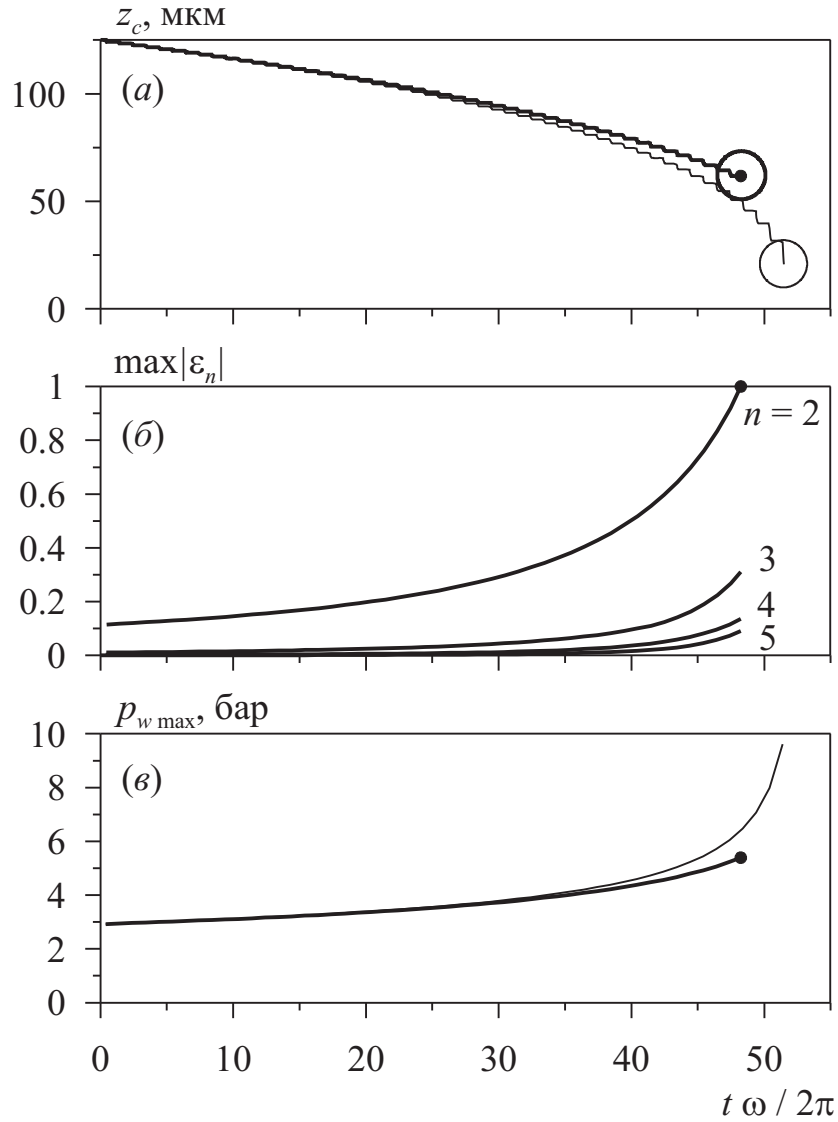


Рис. 2: Динамика пузырька у жесткой стенки: временные зависимости z_c – положения центра пузырька (а), $\max|\epsilon_n|$ – амплитуды максимального (за период колебаний p_∞) значения $|\epsilon_n|$ (б) и $p_{w \max}$ – максимального (за период колебаний p_∞) давления жидкости на поверхности стенки в точке, лежащей на оси z , (в) с учетом (жирные кривые) и без учета (тонкие кривые) несферичности пузырька. Точкой указан момент разрушения пузырька. На конечных участках кривых z_c приведены контуры поверхности пузырька в моменты его максимального расширения.

колебаний p_∞ величин z_c (а), $\max |\varepsilon_n|$ при $n = 2-5$ (искажения по другим гармоникам малы) (б) и $p_{w \max}$ (в) представлено на рис. 2.

Из рис. 2 следует, что в ходе колебаний пузырек перемещается вдоль оси z к стенке и стремится столкнуться с ней. По мере уменьшения расстояния между пузырьком и стенкой несферичность пузырька и давление на стенке довольно быстро растут. Так, величина $|\varepsilon_2|$ уже на 48-м периоде колебаний p_∞ достигает единицы. В этот момент между пузырьком и стенкой более четырех равновесных радиусов пузырька.

Более детально динамика пузырька в ходе одного периода (41-го) колебаний p_∞ представлена на рис. 3. Здесь также приведены контуры поверхности пузырька в семь характерных моментов времени, отмеченных точками. При этом момент 2 соответствует максимальному давлению на стенке, а остальные – экстремальным значениям искажения по второй гармонике.

Из рис. 3 можно заключить, что пузырек при расширении перемещается значительно меньше и медленнее, чем при сжатии. Быстрые перемещения пузырька вызывают значительные эллипсоидальные деформации его поверхности. Их локально высокие уровни практически не зависят от предыстории колебаний. Они оставались бы точно такими, даже если пузырек в начале каждого периода был бы чисто сферическим.

На кривой давления p_w наблюдаются резкие всплески, возникающие на стадии затухающих радиальных колебаний пузырька в фазах его максимального сжатия. Наибольшее давление на стенке возникает в момент первого максимального сжатия.

На рис. 4 представлены зависимости $p_{w \max}$ от z_c . Видно, что давление на стенке не зависит от деформаций пузырька. Имеющееся на рис. 2 различие кривых давления на стенке с учетом и без учета несферичности пузырька обусловлено различием расстояния между стенкой и пузырьком. Из рис. 4 можно также заключить, что если стенку убрать, то давление жидкости в соот-

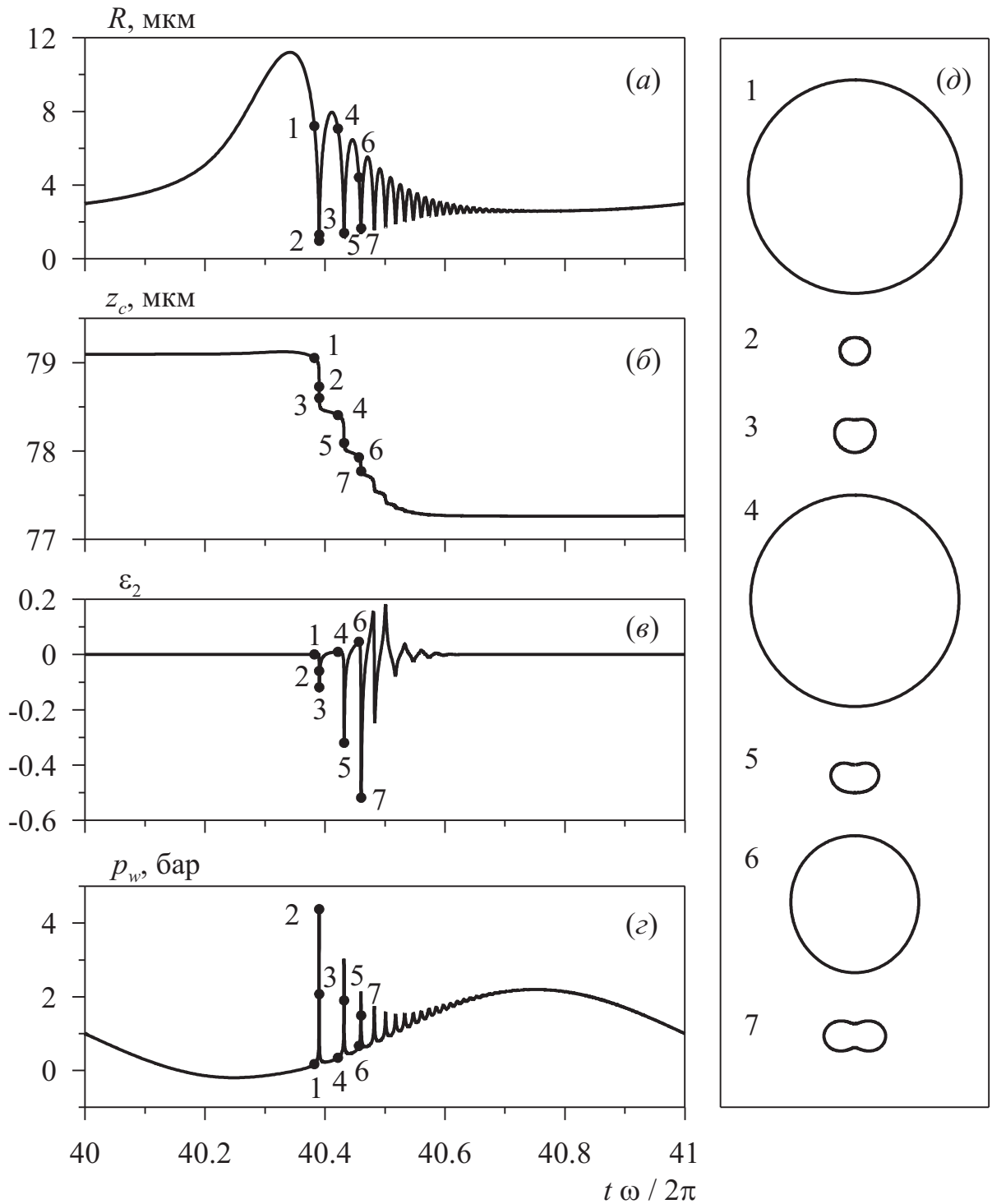


Рис. 3: Изменение R , z_c , ε_2 , p_w в точке, лежащей на оси z , в ходе 41-го периода колебаний p_∞ и форма пузырька в семь характерных моментов времени, указанных точками.

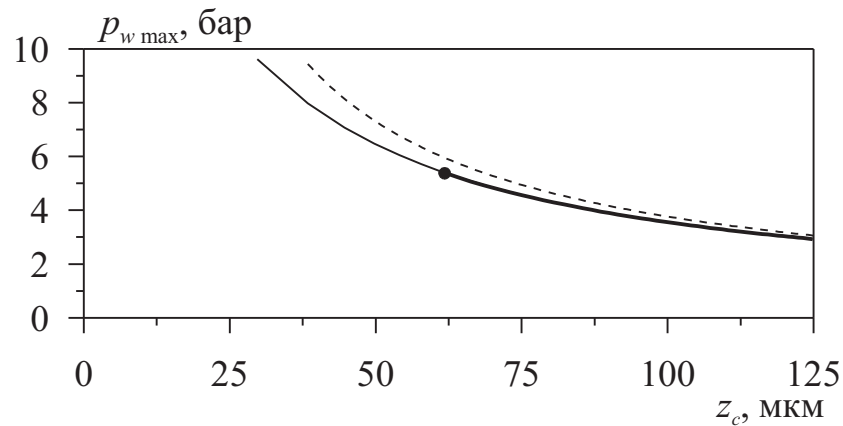


Рис. 4: Максимальное (за период колебаний p_∞) давление на стенке $p_{w \max}$ в зависимости от z_c . Сплошные кривые – решение рассматриваемой задачи с учетом (жирная кривая) и без учета (тонкая кривая) несферичности пузырька. Штриховая кривая – давление на расстоянии z_c от центра пузырька в задаче без стенки. Точка указывает место разрушения несферического пузырька.

ветствующем месте будет выше.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ (коды проектов 08-01-00215 и 08-01-97029).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Doinikov A. A.* Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. N. 2. 026301 (6 P.).
- [2] *Gavrilyuk S. L., Teshukov V. M.* Drag force acting on a bubble in a cloud of compressible spherical bubbles at large Reynolds number // *European Journal of Mech. B/Fluids.* 2005. V. 24. N. 4. P. 468–477.
- [3] *Doinikov A. A.* Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17. N. 12. 128101 (4 P.).

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Егорова И. П. (Самара, СГАСУ)

1. Введение. Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L(u) \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{yy} = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где m , α и β — заданные положительные числа, $1 \leq m < 2$, и поставим следующую задачу с двумя нелокальными граничными условиями.

Задача. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u_y(x, \beta) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

где $f(x)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Нелокальные задачи изучались в работах [1–3] для эллиптических уравнений, в которых условия (4) имели вид: $u(0, y) = u(1, y)$ и $u_x(0, y) = 0$ или $u_x(0, y) = u_x(1, y)$ и $u(1, y) = 0$ при $y \geq 0$. В [4–5] рассмотрены нелокальные задачи с условием (4) для уравнения смешанного типа первого рода. В [6] рассмотрена задача Дирихле

с условием $u(0, y) = u(1, y) = 0$ для уравнения смешанного типа второго рода (1) при $0 < m < 1$.

В данной работе, следуя [6], доказана теорема единственности решения задачи (2) – (5) с точностью до постоянного слагаемого. Само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи.

2. Построение частных решений. Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D будем искать в классе функций (2) методом разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставляя данное произведение в уравнение (1), получим

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

$$X(0) = X(1), \quad X'(0) = X'(1), \quad (7)$$

$$Y''(y) - \lambda(\operatorname{sgn} y)|y|^{-m}Y(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \quad (8)$$

где λ – постоянная разделения.

Как известно, решение спектральной задачи (6) и (7) имеет вид

$$X_k(x) : \quad 1, \sqrt{2} \cos \lambda_k x, \sqrt{2} \sin \lambda_k x, \quad (9)$$

здесь $X_0(x) = 1$, $\lambda_k = 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$. Система (9) ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0, 1]$.

В уравнении (8) при $y > 0$ выполним замену

$$Y(y) = W(p_k y^q) \sqrt{y}, \quad p_k^2 = (2\pi k)^2 / q^2, \quad q = (2 - m) / 2. \quad (10)$$

Тогда получим модифицированное уравнение Бесселя [7, с.12]

$$W''(z) + \frac{1}{z}W'(z) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)W(z) = 0, \quad (11)$$

где $z = p_k y^q$, $\nu = 1/2q \in [1, +\infty)$.

Общее решение уравнения (11) определяется по формуле

$$W(z) = C_1 I_{\frac{1}{2q}}(z) + C_2 K_{\frac{1}{2q}}(z), \quad (12)$$

где $I_{\frac{1}{2q}}(z)$, $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Тогда на основании (10) и (12) общее решение уравнения (8) при $y > 0$ определяется по формуле

$$Y_k^+(y) = a_k \sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k \sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q). \quad (13)$$

В формуле (13) a_k , b_k – произвольные постоянные.

Аналогичным образом в уравнении (8) при $y < 0$, выполнив замену

$$Y(y) = \sqrt{-y} Z(p_k (-y)^q), \quad (14)$$

получим обычное уравнение Бесселя

$$Z''(z) + \frac{1}{z} Z'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z(z) = 0, \quad z = p_k (-y)^q,$$

общее решение которого определяется по формуле

$$Z(z) = \tilde{C}_1 J_{\frac{1}{2q}}(z) + \tilde{C}_2 Y_{\frac{1}{2q}}(z), \quad z > 0. \quad (15)$$

где $J_{\frac{1}{2q}}(z)$, $Y_{\frac{1}{2q}}(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 – произвольные постоянные. Из равенств (14) и (15) общее решение уравнения (8) при $y < 0$ выражается по формуле

$$Y_k^-(y) = c_k \sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q) + d_k \sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q), \quad (16)$$

где c_k , d_k – произвольные постоянные.

Таким образом, для уравнения (8) построены решения $Y_k(y)$, определяемые по формулам (13) и (16), т. е. они имеют вид

$$Y_k(y) = \begin{cases} a_k \sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k \sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), & y > 0, \\ c_k \sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q) + d_k \sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q), & y < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что производные функций $Y_k^+(y)$ и $Y_k^-(y)$ имеют особенности при $|y| \rightarrow 0$:

$$Y_k'^+(y) = O(y^{1-m}), \quad Y_k'^-(y) = O((-y)^{1-m}), \quad 1 < m < 2,$$

$$Y_k'^+(y) = O(\ln y), \quad Y_k'^-(y) = O(\ln(-y)), \quad m = 1.$$

Поскольку решение $u(x, y)$ должно удовлетворять условиям (2), то в формуле (17) подберем постоянные a_k, b_k, c_k, d_k так, чтобы выполнялись условия сопряжения:

$$Y_k(0+0) = Y_k(0-0), \quad Y_k'(0+0) = Y_k'(0-0). \quad (18)$$

Равенства (18) будут выполнены, если потребуем, чтобы $b_k = 0$ и $d_k = 0, a_k = -c_k$. С учетом этого функции (17) примут вид

$$Y_k(y) = \begin{cases} Y_k^+(y) = a_k \sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), & y > 0, \\ Y_k^-(y) = -a_k \sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q), & y < 0. \end{cases} \quad (19)$$

3. Единственность решения. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи (2) – (5). Рассмотрим функции

$$u_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos \lambda_k x \, dx, \quad (20)$$

$$u_0(y) = \int_0^1 u(x, y) \, dx, \quad (21)$$

$$v_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \sin \lambda_k x dx, \quad \lambda_k = 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

На основании (20) – (22) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

$$u_{0,\varepsilon}(y) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) dx, \quad (24)$$

$$v_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (23) по y дважды при $y > 0$ и $y < 0$ и учитывая уравнение (1), получаем

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = -\sqrt{2}(\operatorname{sgn} y)|y|^{-m} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \cos \lambda_k x dx.$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом условий (4), получим дифференциальное уравнение

$$u''_k(y) - (\operatorname{sgn} y)|y|^{-m} \lambda_k^2 u_k(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta),$$

которое совпадает с (8) при $\lambda = \lambda_k^2$. Тогда $u_k(y) \equiv Y_k(y)$ на промежутке $[-\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x, y) \in C^1(\overline{D})$, то функции $u_k(y)$ определяются по формуле (19).

Для нахождения постоянной a_k в (19) воспользуемся граничным условием (5) и формулой (20):

$$u'_k(\beta) = \sqrt{2} \int_0^1 u_y(x, \beta) \cos \lambda_k x dx =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos \lambda_k x dx = f_k. \quad (26)$$

Теперь на основании (19) и (26) найдем

$$a_k = \frac{f_k}{p_k q \beta^{q-\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k \beta^q)}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (19), имеем

$$u_k(y) = \begin{cases} \frac{f_k \sqrt{y}}{p_k q \beta^{q-\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k \beta^q)} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), & y > 0, \\ -\frac{f_k \sqrt{-y}}{p_k q \beta^{q-\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k \beta^q)} J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q), & y < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Аналогично получаем краевую задачу для функции $v_k(y)$:

$$v_k''(y) - (\operatorname{sgn} y) |y|^{-m} \lambda_k^2 v_k(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \quad (29)$$

$$v_k(0+0) = v_k(0-0), \quad v_k'(0+0) = v_k'(0-0), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} v_k'(\beta) &= \sqrt{2} \int_0^1 u_y(x, \beta) \sin \lambda_k x dx = \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin \lambda_k x dx = \tilde{f}_k. \end{aligned} \quad (31)$$

Единственное решение задачи (29) – (31) определяется по формуле

$$v_k(y) = \begin{cases} \frac{\tilde{f}_k \sqrt{y}}{p_k q \beta^{q-\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k \beta^q)} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), & y > 0, \\ -\frac{\tilde{f}_k \sqrt{-y}}{p_k q \beta^{q-\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k \beta^q)} J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q), & y < 0. \end{cases} \quad (32)$$

Найдем теперь $u_0(y)$. Дифференцируя (24) дважды по y при $y \neq 0$ и учитывая уравнение (1) при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$, имеем

$$u''_{0,\varepsilon}(y) = -(\operatorname{sgn} y)|y|^{-m} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}(x, y) dx. \quad (33)$$

Интеграл (33) проинтегрируем по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ на основании условий (4), получим, что $u_0(y)$ является решением следующей задачи:

$$u''_0(y) = 0, \quad (34)$$

$$u'_0(\beta) = \int_0^1 u_y(x, \beta) dx = \int_0^1 f(x) dx = f_0, \quad (35)$$

$$u_0(0+0) = u_0(0-0), \quad u'_0(0+0) = u'_0(0-0). \quad (36)$$

Решение задачи (34) – (36) определяется по формуле с точностью до постоянного слагаемого

$$u_0(y) = f_0 y + b_0, \quad (37)$$

где b_0 – произвольная постоянная.

Далее перейдем к обоснованию единственности решения задачи (2) – (5). Пусть $f(x) \equiv 0$. Тогда из равенств (26), (31), (35) следует, что $f_k = \tilde{f}_k = f_0 = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу (28), (32), (37) и формул (20) – (22) следует, что

$$\sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos \lambda_k x = 0,$$

$$\int_0^1 u(x, y) = b_0,$$

$$\sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \sin \lambda_k x = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда в силу полноты системы (9) в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что $u(x, y) = b_0$ почти для всех $x \in [0, 1]$ и при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. В силу (2) функция $u(x, y) \in C(\overline{D})$, то $u(x, y) \equiv b_0$ на \overline{D} .

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Если существует решение задачи (2) – (5), то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.*

Решение задачи (2) – (5) при некоторых ограничениях на функцию $f(x)$ определяется в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, y) = u_0(y) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \cos \lambda_k x + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \sin \lambda_k x,$$

где $u_k(y)$, $v_k(y)$, и $u_0(y)$ определяются по формулам (28), (32) и (37).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лернер М. Е., Репин О. А.* О задачах типа задачи Франкля для некоторых эллиптических уравнений с вырождением разного рода // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. №8. С. 1087 – 1093.
- [2] *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. №8. С.1094 – 1100.
- [3] *Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г.* Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом // Труды международной конференции "Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы", посвящ. юбилею акад. Ильина В.А., СФ АН РБ Стерлитамак. Уфа: Гилем, 2003. Т.1. С. 213 – 219.

- [4] *Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г.* Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа // Сборник тезисов международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвящ. 103 – летию со дня рождения И.Г. Петровского. М.: Изд – во МГУ. 2004. С. 183 – 184.
- [5] *Сидоренко О. Г.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия "Физико – математические и технические науки". Уфа: Гилем, 2006. Выпуск 3. С. 201 – 208.
- [6] *Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2007. №4. С. 45 – 53.
- [7] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1966. 296 с.

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ $(2+1D)$ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА
В ПРИСУТСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Екомасов А. Е. (Уфа, БГУ) Муртазин Р. Р. (Уфа, БГУ)

Введение

Уравнение Синус-Гордона (СГ) описывает многие явления в различных областях физики. Например, динамику доменных границ в магнетиках, распространение дислокаций по кристаллу и магнитного потока в джозефсоновских контактах [1]. В таких приложениях задача о решении уравнения СГ в присутствии локальных неоднородностей возникает вполне естественно. При этом могут быть адекватны физическому смыслу как одномерные, так

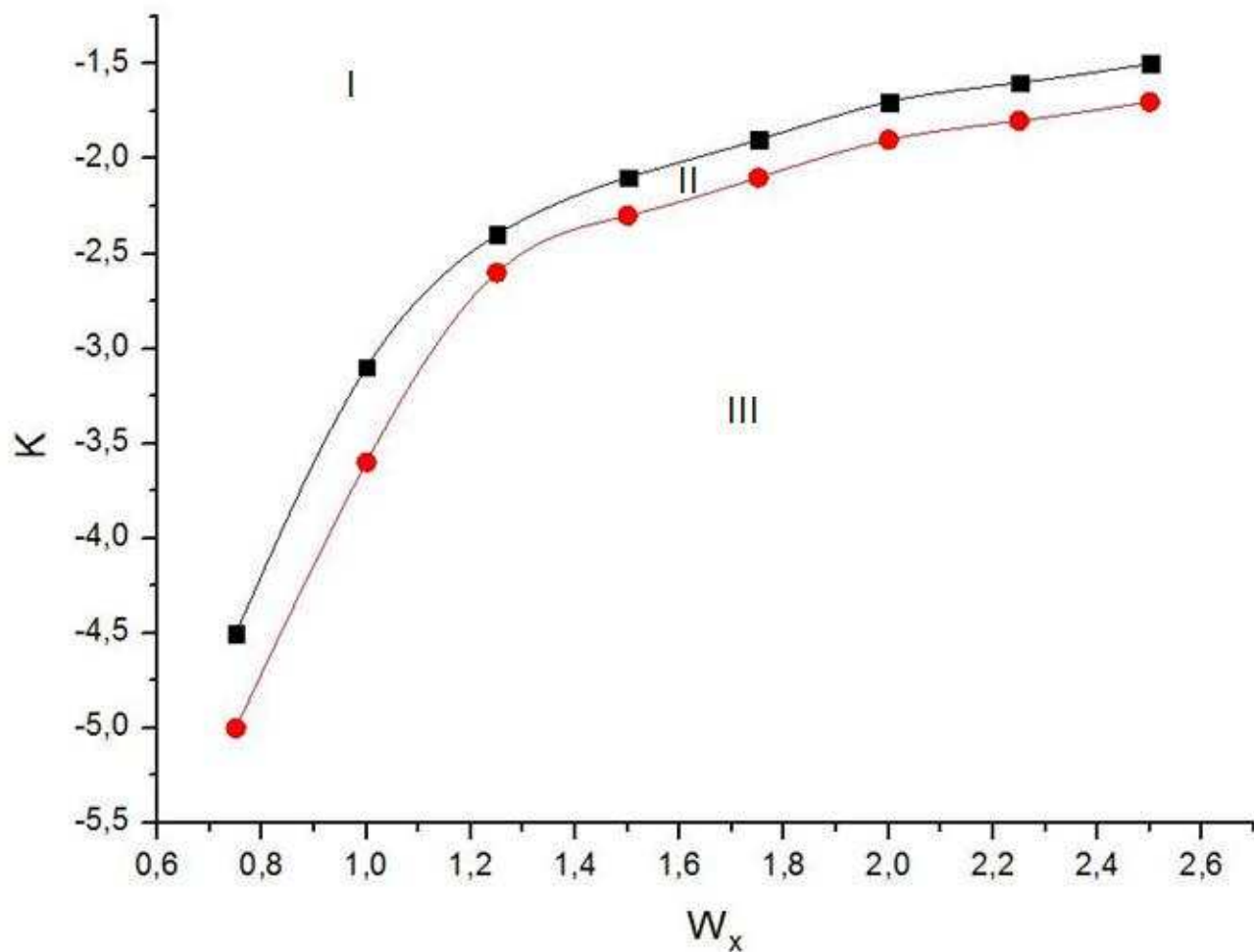


рис. 1, $W_y = 2$

и многомерные уравнения. Поведение солитонов уравнения СГ в присутствии различного рода неоднородностей изучается достаточно давно и плодотворно [2]. Показана в одномерном случае возможность зарождения локализованных приместных мод колебаний и различного вида солитонов [1].

§ 1. Численный метод и результаты

В работе исследуется нелинейная динамика кинков модифицированного уравнения синус-Гордона:

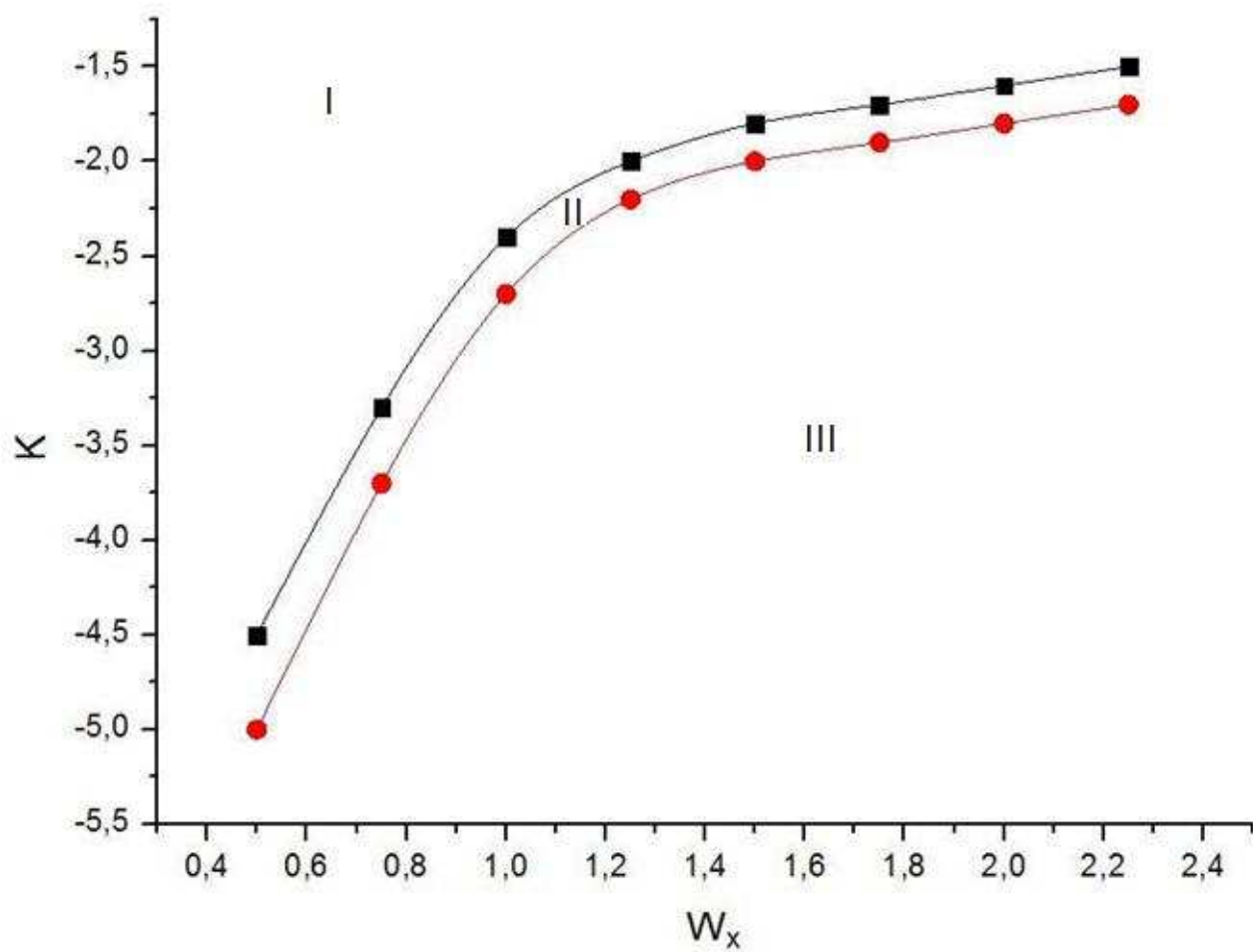


рис. 1, $W_y = 3$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{K(x,y)}{2} \sin 2\theta = 0$$

, где $K(x,y)$ - функция, определяющая зависимость от координат x и y неоднородности параметров системы. Наиболее интересен случай, когда ширина кинка и размер, характеризующий неоднородность параметра K одного и того же порядка, тогда структура кинка должна претерпевать сильные изменения при прохождении через двумерную неоднородную область. В дальнейшем для простоты будем брать K в виде:

$$K = \begin{cases} 1, & x < x_1, x > x_2, y < y_1, y > y_2 \\ K, & x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

, где $W_x = x_1 - x_2, W_y = y_1 - y_2$ - ширина и длина двумерной области неоднородности параметра K .

Для исследования нелинейной динамики кинка в данной задаче применялись численные методы. Уравнение решалось численно при помощи метода конечных разностей с использованием явной схемы решения и условия сходимости явной схемы $\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{4}$. В качестве начального условия использовали его точное статическое решение: $\theta_0(x, y) = 2 \arctg(e^x)$. Граничные узлы сетки по переменной x имеют значения $\theta(\pm N_x, y) = \theta_0(\pm N_x), \dot{\theta}(\pm N_x, y) = \dot{\theta}_0(\pm N_x)$, граничные узлы сетки по переменной y свободные. Для расчета применялась равномерная сетка по координатам x и y с шагом h , т.е.

$$\{x_i = h \cdot i, i = -N_x, \dots, N_x\} \{y_j = h \cdot j, j = -N_y, \dots, N_y\}$$

и сетка по времени t с шагом τ

$$\{\tau_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, N_t\}$$

, где N_x, N_y, N_t - целые числа. Значения N_x, N_y при расчетах брались в диапазоне от 400 до 1200. Проверялось при этом и то, чтобы изменение числа точек по оси x и y не влияло на основные результаты численных расчетов. Была написана программа,

с помощью которой находились основные характеристики кинка и было проведено сравнение с известными аналитическими данными.

Рассмотрено движение кинка с постоянной начальной скоростью $v=0.85$ через область неоднородности параметра K , центр которой расположен в точке $x=13.9$, $y=0$, с различными значениями параметров W_x , W_y , K . Обнаружен при этом процесс образования локализованных решений уравнения СГ, являющихся источником излучения свободных (объемных) волн. Последние, обладая скоростью большей, чем у кинка, обгоняют ее. В зависимости от значения величин W_x , W_y , K после прохождения кинка, в области неоднородности обнаружена возможность зарождения трех типов локализованных решений. Они могут быть типа: пульсон, пульсона, переходящего в двумерный солитон и двумерного солитона. На рисунках 1 и 2 представлены области параметров, определяющих возможность существования данных типов решений. I-пульсон, II- пульсон, переходящий в 2Dсолитон, III - 2D солитон.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля-Контровой: Концепции, методы, приложения. // Физматлит. 2008. М. 519 с.
- [2] 2. Косевич А. М., Ковалев А. С. Введение в нелинейную физическую механику. // Киев: Наукова думка. 1989. 304 с.

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В АЛЮМИНИЕВОМ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРЕ

Закиева Г.Н. (Нефтекамский филиал БашГУ,
г.Нефтекамск, Россия)

Введение

Исследование электрического поля в системах со сложными электрохимическими и геометрическими параметрами имеет важное научно - техническое значение для оптимизации процессов существующих производств электролиза. Проектирование электролизеров для производства цветных металлов связаны с разработкой математических моделей и программ, позволяющих проводить вычислительные эксперименты. Основными требованиями при разработке математических моделей являются повышение точности, надежности и скорости проведения вычислительного эксперимента.

Математическая постановка задачи

В работе рассматривается алюминиевый электролизер в форме цилиндра с составным анодом. От трехмерной задачи перейдем к двумерной и будем рассматривать горизонтальное сечение цилиндрического электролизера, внутри которого расположен цилиндрический анод (рис. 1), тогда возникает задача для потенциала $u(p)$ в области Ω . Границу области Ω представим в виде $S_q = S_a \cup S_k$. Краевая задача в этом случае формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(p)}{\partial y^2} = 0; p \in \Omega; \quad (1)$$

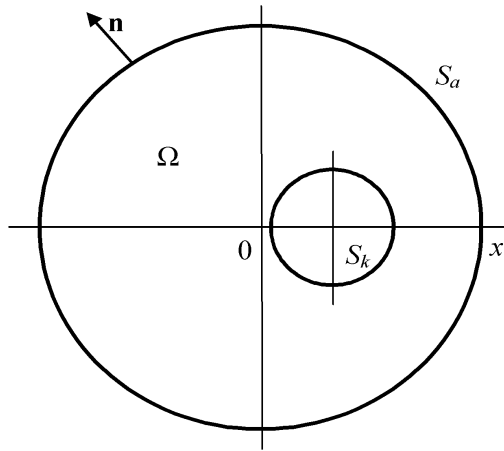


Рис. 1: Область интегрирования

$$\left(u(p) + \sigma c_a \frac{\partial u(p)}{\partial n} \right) \Big|_{S_a} = \varphi_a; \quad (2)$$

$$\left(u(p) + \sigma c_k \frac{\partial u(p)}{\partial n} \right) \Big|_{S_k} = \varphi_k; \quad (3)$$

где σ - удельная электропроводность среды; c_a, c_k - удельные поляризуемости анода и катода; φ_a, φ_k - электродные потенциалы.

Применение разностных методов в задачах с криволинейными границами трудноосуществимо, поэтому для сведения исходной краевой задачи (1) - (3) к эквивалентным интегральным уравнениям используем метод граничных элементов. Основная интегральная формула Грина для этого случая имеет вид:

$$k(p)u(p) = \int_{S_q} \left(\ln \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \ln \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \right) dS_q - \int_{D_q} \Delta u(q) \ln \frac{1}{r(p, q)} dq \quad (4)$$

где $r(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$ - расстояние между точками p и q ;

$$k(p) = \begin{cases} 2\pi, & p \in \Omega; \\ \pi, & p \in S; \\ 0, & p \notin S + \Omega. \end{cases}$$

Соответственно, если точка $p \in S, q \in S$

$$\pi u(p) = \int_{S_q} \left(\ln\left(\frac{1}{r(p, q)}\right) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \ln\left(\frac{1}{r(p, q)}\right) \right) dS_q, \quad (5)$$

Преобразуем правую часть (5): для этого разобьем интеграл по границе S_q на сумму интегралов по границам S_a, S_k . Выразим из (2) и (3) производные по нормали от $u(q)$.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S_a} = \frac{\varphi_a - u(q)}{\sigma c_a}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S_k} = \frac{\varphi_k - u(q)}{\sigma c_k}; \quad (6)$$

Подставим все это в (5), собрав отдельно слагаемые, в состав которых входит $u(q)$ и обозначив их как $K(p, q)$, также собрав отдельно слагаемые, в состав которых не входит $u(p)$ и обозначив их как $F(p, q)$, тогда уравнение (5) преобразуется к виду:

$$\pi u(p) + \int_{S_q} u(q) K(p, q) dS_q = \int_{S_q} F(p, q) dS_q, \quad (7)$$

где если точка $q \in S_a$

$$K(p, q) = \frac{1}{\sigma c_a} \ln \frac{1}{r(p, q)} + \frac{\partial}{\partial n_q} \ln \frac{1}{r(p, q)};$$

$$F(p, q) = \frac{\varphi_a}{\sigma c_a} \ln \frac{1}{r(p, q)};$$

и если точка $q \in S_k$ соответственно

$$K(p, q) = \frac{1}{\sigma c_k} \ln \frac{1}{r(p, q)} + \frac{\partial}{\partial n_q} \ln \frac{1}{r(p, q)};$$

$$F(p, q) = \frac{\varphi_k}{\sigma c_k} \ln \frac{1}{r(p, q)};$$

Уравнение (7) является уравнением Фредгольма II рода. В ходе преобразования, мы из исходной краевой задачи, определенной во всей области Ω , перешли к уравнению, заданной лишь на границе S_k .

Алгоритм численного решения задачи

Первым этапом для формирования численного решения задачи является задание геометрических границ области Ω . Участок границы в плоском сечении представляется параметрической записью окружности:

$$x = x_0 + R \cos \alpha; y = y_0 + R \sin \alpha;$$

где R - радиус окружности; x_0, y_0 - координаты центра; α - параметр (угол).

Для формирования алгоритма численного решения граничных интегральных уравнений также необходимы векторы к границам S_a, S_k области Ω промежутки разбиений N_a, N_k границы области.

Функция влияния для уравнения Лапласа имеет вид:

$$G(p, q) = \ln \left(\frac{1}{r(p, q)} \right); \quad (8)$$

где $r(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$ - расстояние между точками p и q ;

Производные от функции $G(p, q)$ по нормали к границе S_q в точке определяется выражением, если границей является дуга окружности радиуса R_o и n_q - внешняя нормаль:

$$\frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} = \frac{x_p - x_q}{r(p, q)} \frac{x_q - x_0}{R_o} + \frac{y_p - y_q}{r(p, q)} \frac{y_q - y_0}{R_o}; \quad (9)$$

где (x_0, y_0) - центр окружности.

Интеграл в особой точке (при $p = q$) для прямолинейного граничного элемента ΔS_q вычисляется точно;

если середина отрезка ΔS_q , то

$$\int_{\Delta S_q} \left(\ln \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \right) dS_q = \Delta S_q (1 + \ln 2 - \ln \Delta S_q). \quad (10)$$

Если обе точки p и q лежат на дуге окружности радиуса R_o и n_q - внешняя нормаль, то

$$\frac{\partial}{\partial n_q} \left(\ln \frac{1}{r(p, q)} \right) = \frac{1}{R_o}; \quad (11)$$

В общем случае, ($p \neq q$) интегрирование по граничному отрезку ΔS_q проводится с помощью квадратурной формулы Гаусса при $n = 7$ [6], точной для полиномов степени $(2n-1)$.

Если центры электродов совпадают, то задача превращается в одномерную (решение не зависит от угла). В этом случае краевая задача для потенциала в полярной системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad (12)$$

$$\left(u + \sigma c_a \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_a} = \varphi_a; \quad \left(u + \sigma c_k \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_k} = \varphi_k; \quad (13)$$

где $R_k \leq r \leq R_a$.

Результаты расчетов

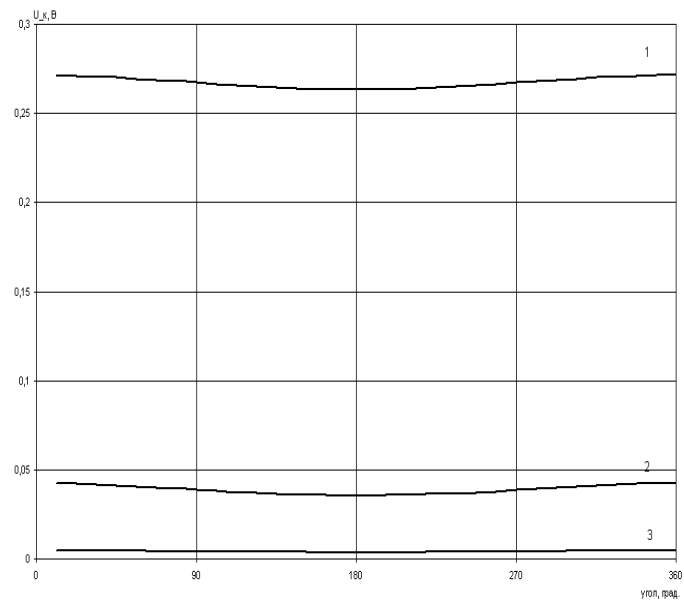


Рис. 2: Зависимость потенциала на катоде, где 1 – $\sigma = 10$; 2 – $\sigma = 1$; 3 – $\sigma = 0,1$.

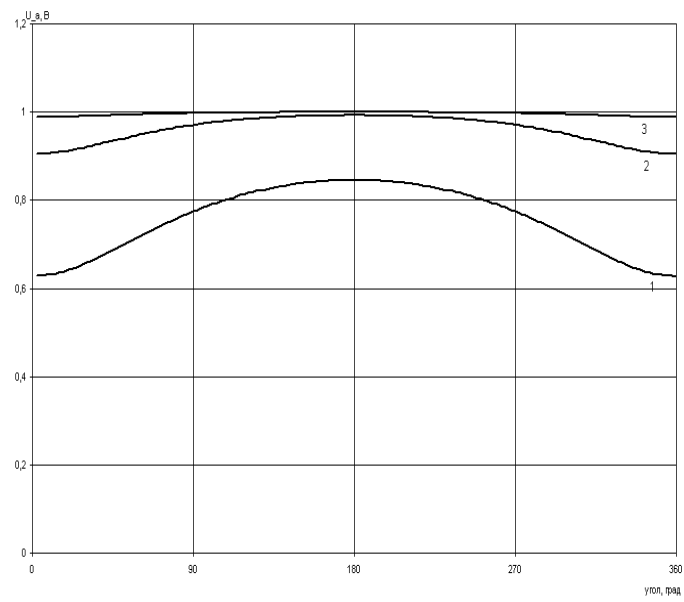


Рис. 3: Зависимость потенциала на аноде, где 1 – $\sigma = 10$; 2 – $\sigma = 1$; 3 – $\sigma = 0,1$.

По изложенному алгоритму на основе метода граничных элементов была составлена программа, рассчитывающая потенциал и плотность тока. Приведем некоторые результаты расчетов. Задача решалась при следующих значениях параметров: радиус окружности анода $R_a = 10$, радиус окружности катода $R_k = 2$, расстояние между анодом и катодом изменялось от 1 до 10, разбиение анодной границы $N_1 = 160$ точек, разбиение катодной границы $N_2 = 32$ точки. По ось ординат отложен критерий равномерности $Kr = (U_{max} - U_{min})U_{max}/$, где U_{min}, U_{max} - минимальное и максимальное значение потенциала.

На рисунках 2, 3 представлены зависимости потенциала на аноде и катоде при различных электропроводностях среды σ , где расстояние между окружностями $h = 3$.

В приведенных примерах численных расчетов зависимостей потенциала на аноде и катоде исследовались электрические поля с небольшим количеством разбиений границ, причем при увеличении количества разбиений, скорость счета становится ниже, а точность результатов выше. Расчет ведется на компьютере с процессором AMD Athlon(TM) XP 2600+, 1,9 GHz, где время счета занимает около 60 секунд.

Литература

- [1] *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. // М.: Наука, 1984. 383 с.
- [2] *Бобрик А. И., Михайлов В. Н.* Решение некоторых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями IV рода: Журн. вычислит. матем. и матем. физики. // 1974. Т. 14, № 1. С. 126–134
- [3] *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. // М.: Мир, 1984. 490 с.
- [4] *Болотнов А. М.* Методы граничных элементов в расчетах

электрических полей электрохимических систем. // Уфа: БашГУ, 2002. 143 с.

- [5] *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрофизики. // М.: Наука, 1985. 334 с.
- [6] *Кронкрод А. С.* Узлы и веса квадратурных формул. // М.: Наука, 1964. 144 с.
- [7] *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. // М.: Наука, 1967. 500 с.
- [8] *Соболев С. А.* Уравнения математической физики. // М.: Наука, 1992. 431 с.

УДК 517.984

О СВЯЗИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Игнатьева Г. А., Ахтямов А. М. (Уфа, БГУ)

Введение

Значительное число обратных задач математической физики сводится к решению обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в краевых условиях. Обратные задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром λ изучались во многих работах (см. [1], [2] и библиографию этих работ). Типичная постановка такой задачи состоит в определении коэффициента дифференциального уравнения по собственным значениям и другим спектральным характеристикам. Работы [3]-[7] посвящены несколько иной цели - восстановлению краевого условия (краевых условий) спектральной

задачи по её собственным значениям. Настоящая работа продолжает цикл работ посвященных этой теме. В ней решается задача отыскания целой функции параметра λ , присутствующей в одном из краевых условий спектральной задачи, по её собственным значениям.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x, \lambda) \frac{dy}{dx} + p_2(x, \lambda)y = 0, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(1) + f(\lambda)y(1) = 0, \quad (3)$$

Здесь $x \in [0, 1]$, λ - спектральный параметр, $f(\lambda)$ - целая функция, а $p_1(x, \lambda), p_2(x, \lambda)$ - непрерывно дифференцируемые функции по x и по λ .

Сформулируем для задачи (1)-(3) обратную. По собственным значениям λ_i задачи (1)-(3) требуется найти целую функцию $f(\lambda)$ из краевого условия (3).

Изучим вопрос о единственности решения этой обратной задачи.

Пусть $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ - решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющие в точке $x = 0$ условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1. \quad (4)$$

Числа λ_i являются корнями характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, поэтому удовлетворяют следующему уравнению:

$$\Delta(\lambda_i) = y_2'(1, \lambda_i) + f(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) = 0, \quad (5)$$

Значение функции $y_2(x, \lambda_i)$ в точке $x = 1$ отлично от нуля. Действительно, предположив противное, то есть, что $y_2(1, \lambda_i) = 0$, из равенств (4), (5) имеем $y_2'(1, \lambda_i) = 0$. В силу единственности

решения задачи Коши имеем $y_2(x, \lambda_i) \equiv 0$. А это противоречит выбору функции $y_2(x, \lambda)$. Итак, $y_2(1, \lambda_i) \neq 0$.

Из (5) следуют равенства

$$f(\lambda_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$c_i = -y_2'(1, \lambda_i)/y_2(1, \lambda_i). \quad (7)$$

Таким образом, рассматриваемая обратная спектральная задача свелась к классической задаче интерполяции (см. Главу 4 из [8], которая состоит в отыскании целой функции $f(\lambda)$, принимающей в заданных точках c_i - узлах интерполяции - заданные значения.

Обозначим класс целых функций $f(\lambda)$ порядка меньшего ρ через F^ρ . Справедлива следующая теорема единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

Теорема: Пусть функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ принадлежат классу F^ρ , а $\{\lambda_i^1\}$ и $\{\lambda_i^2\}$ - это последовательности собственных значений краевой задачи (1) - (3) для функций $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ соответственно. Тогда если $\{\lambda_i^1\}$ и $\{\lambda_i^2\}$ имеют показатель сходимости меньший, чем ρ , и, кроме того $\lambda_i^1 = \lambda_i^2$ ($i \in Z$), то $f_1(\lambda) \equiv f_2(\lambda)$.

Доказательство следует из того, что класс всех целых функций порядка, меньшего показателя сходимости последовательности, состоящей из узлов интерполяции, является классом единственности для интерполяционной задачи (6) (см., например, с 69 из [8]).

Конструктивное решение задачи интерполяции (6), как известно строится с помощью ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i \varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i) \varphi'(\lambda_i)} \quad (8)$$

в котором $\varphi(\lambda)$ - целая функция с простыми корнями в узлах $\{\lambda\}_1^\infty$, при $\lambda_i \neq \lambda_j$ для $i \neq j$ и $|\lambda_i| \rightarrow \infty$. Условия сходимости этого ряда зависят от поведения c_i и λ_i и достаточно хорошо изучены (см. [8] с. 84-89). Поэтому для построения решения рассмат-

риваемой обратной задачи достаточно переформулировать соответствующие интерполяционные теоремы, понимая под узлами интерполяции собственные значения.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу Коши для дифференциального уравнения с частными производными: Найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \quad (9)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u(0, t) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \sum_{j=0}^m d_j \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^j u(x, t) \Big|_{x=1} \quad (11)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad (12)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции.

При решении этой задачи методом разделения переменных возникает следующая спектральная задача

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad (13)$$

$$y(0) = 0 \quad (14)$$

$$y'(l) + f(\lambda)y(1) = 0 \quad (15)$$

где λ - спектральный параметр, а $f(\lambda) = \sum_{j=0}^m d_j \lambda^j$.

С механической точки зрения задача (13)-(15) характеризует колебания струны, левый конец которой жестко закреплен, а правый конец свободен, но его движение подчиняется определенному закону.

Сформулируем для (13)-(15) обратную задачу. Требуется определить неизвестный полином $f(\lambda)$, степень которого m нам так

же неизвестна, по известным собственным значениям λ_i , которые совпадают с корнями уравнения

$$ctg\sqrt{\lambda_i} = M\sqrt{\lambda_i}. \quad (16)$$

На языке математики эта обратная задача может быть интерпретирована следующим образом. Требуется по собственным частотам (по тембру звучания) струны определить "степень нагруженности" её правого конца, который является недоступным для непосредственного наблюдения.

Решения обратной задачи. Линейно независимые решения $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ уравнения (13), удовлетворяющие условиям (4), имеют следующий вид: $y_1(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$, $y_2(x, \lambda) = \sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda}$. Поэтому равенства (6) в случае нашего примера записываются в следующем виде: $f(\lambda_i) = -\cos(\sqrt{\lambda_i}x)\sqrt{\lambda_i}/\sin(\sqrt{\lambda_i}x)$. Учитывая (16) получаем

$$f(\lambda_i) = -M\lambda_i \quad (17)$$

Для построения решения обратной задачи можно воспользоваться интерполяционным рядом Лагранжа (8). Однако, в нашем случае проще воспользоваться доказанной теоремой единственности решения обратной спектральной задачи. Поскольку порядок полинома равен нулю, а показатель сходимости последовательности λ_k равен $1/2$, то из этой теоремы следует, что существует единственный полином $f(\lambda)$, удовлетворяющий в узлах интерполяции λ_i условиям (17). Таким полиномом очевидно является линейная функция $f(\lambda) = -M\lambda$. Итак, спектральная задача восстановлена. Она имеет следующий вид:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) - M\lambda y(1) = 0.$$

Эта задача рассматривалась в работах А. Н. Крылова [9], С. П. Тимошенко [10], А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [11] и в работах других авторов. Она описывает колебания однородной струны, один конец которой ($x = 0$) закреплен, а ко второму концу

прикреплен груз массы M . Таким образом, по собственным частотам λ_i восстановлены как сам закон движения правого конца струны (свободные колебания с грузом на конце), так и масса прикрепленного груза.

Если собственные значения λ_i задачи (13)-(15) совпадают с корнями уравнения $\sqrt{\lambda_i} = \pi/2 + \pi i$, то равенства (6) записываются в следующем виде: $f(\lambda_i) = 0$. Откуда в силу теоремы единственности получаем, что $f(\lambda) \equiv 0$. В терминах теории колебаний это означает, что невидимый правый конец струны закреплен свободно и не испытывает никаких нагрузок.

В общем случае для однозначного восстановления краевого условия (15) требуется знание всех собственных значений задачи (13)-(15) и ограничение на рост функции $f(\lambda)$. Однако эти условия не являются необходимыми. Иногда о функции $f(\lambda)$ достаточно знать, что она является целой, а о собственных значениях задачи (13)-(15) достаточно знать поведение некоторой подпоследовательности составленной из её собственных значений. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) + f(\lambda)y(1) = 0 \quad (18)$$

Пусть $\lambda_i = 1/i$ - известные собственные значения задачи (18). Требуется найти неизвестную функцию $f(\lambda)$, про которую известно лишь то, что она является целой. Решим эту обратную задачу. Имеем:

$$y_1(x, \lambda) = 1, \quad y_2(x, \lambda) = x, \quad f(\lambda_i) = -1$$

Отсюда и из этой теоремы единственности для целых функций (см. [12] с. 48) следует, что $f(\lambda) \equiv -1$

Остановимся на обобщениях полученной теоремы единственности восстановления краевого условия спектральной задачи.

Для более общей краевой задачи второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x, \lambda) \frac{dy}{dx} + p_2(x, \lambda) y = 0, \quad (19)$$

$$a(\lambda)y'(0) + b(\lambda)y(0) = 0, \quad (20)$$

$$c(\lambda)y'(1) + d(\lambda)y(1) = 0, \quad (21)$$

где $x \in [0, 1]$, а λ - спектральный параметр, также верна аналогичная теорема восстановления одной из целых функций $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ или $d(\lambda)$.

Однако обобщения на пути восстановления двух из целых функций $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ или $d(\lambda)$ в задаче (19)-(21) вообще говоря невозможны.

Действительно, спектральные задачи

$$y'' - 3\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \quad y'' - 3\lambda y' + \lambda^2 y = 0,$$

$$y'(0) + \lambda y(0) = 0, \quad y'(0) + 0,5\lambda y(0) = 0,$$

$$y'(1) + 4\lambda y(1) = 0, \quad y'(1) + 2\lambda y(1) = 0.$$

имеют одинаковые собственные значения которые совпадают с нулями характеристического определителя $\Delta(\lambda) = \lambda^2(12e^{2\lambda} - 15e^\lambda)$, функции $a(\lambda)$, и $c(\lambda)$ у этих задач совпадают, а соответствующие функции $b(\lambda)$, и $d(\lambda)$ - нет. Значит, обобщение на этом пути невозможно. Нельзя для произвольного дифференциального уравнения (19) однозначно восстановить одновременно две неизвестные функции $b(\lambda)$ и $d(\lambda)$ параметра λ .

Интересно, что для некоторых частных случаев дифференциальных уравнений однозначное восстановление коэффициентов $b(\lambda)$ и $d(\lambda)$ спектральной задачи, тем не менее, возможно. По этому поводу см. работу [6].

Отметим, что полученный результат полностью переносится на задачу восстановления функции $f(\lambda)$ в одном из краевых условий спектральной задачи с уравнением n -го порядка. Он также может быть интерпретирован в терминах теории колебаний - например, как единственность восстановления по собственным частотам характера закрепления одного из концов стержня, недоступного для визуального осмотра.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма - Лиувилля и их приложения.// Наука, М., 1984.
- [2] *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных операторов.// Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 1989.
- [3] *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий// Доклады Академии наук. 367 (1999), № 6 739-741.
- [4] *Ахтямов А.М.* Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений.// Дифференц. уравнения. 35(1999), № 8, 1127-1128.
- [5] *Ахтямов А.М.* О единственности восстановления краевых условий задачи Штурма-Лиувилля по её спектру.// Математическое моделирование. 12(2000), №3, 6.
- [6] *Ахтямов А.М.* О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по её спектру.// Фундаментальная и прикладная математика. 6(2000), № 4, 995-1006.
- [7] *Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М.* Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний.// Прикладная математика и механика. 65(2001), № 2, 290-298.
- [8] *Гольдберг А.А., Левин Б.Я. Островский И.В.* Целые и мероморфные функции.// Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. 85(1990), ч. 1, 5-186
- [9] *Крылов А.Н.* Некоторые замечания о крещерах и индикаторах.// Известия Академии наук, 6 серия. 3(1909), № 15, 623-654.
- [10] *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций.// Наука, М., 1975.

- [11] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнений математической физики.// Наука, М., 1977.
- [12] *Маркушевич А.И.* Целые функции. Элементарный очерк.// Наука, М., 1965.

УДК 517.57

КОНСТРУКЦИЯ ЦЕЛЫХ "ФУНКЦИЙ ТИПА СИНУСА"

Исаев К. П., Путинцева А. А., Трунов К. В.
(Уфа, БашГУ)

Введение

В данной работе строятся целые функции, логарифм модуля которых асимптотически близок к $u(\operatorname{Re} z)$, где u — наперед заданная выпуклая функция на вещественной оси.

Определение. Пусть u непрерывная субгармоническая функция на плоскости и $\tau(u, z)$ — радиус наибольшего круга с центром в точке z , в котором функция u отклоняется от пространства гармонических функций на этом круге не более чем на 1. Функцией типа синуса для функции u будем называть целую функцию L , удовлетворяющую условиям

1. Все нули z_n , $n \in \mathbb{N}$, функции L простые и при некотором $\varepsilon > 0$ круги $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

2. При любом $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется соотношение $|\ln |L(z)| - u(z)| \leq A(\varepsilon)$.

Из соображений субгармоничности и из определения величины $\tau(u, z)$ вытекает свойство

2'. Для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется оценка сверху

$$\ln |L(z)| \leq |u(z)| + A_1(\varepsilon).$$

Термин „функции типа синуса“, по видимому, впервые появился в работе [1]. Применительно к нашему определению в этой работе речь идет о функции типа синуса для опорной функции

$$h(z) = \max_{w \in \bar{D}} \operatorname{Re} zw$$

некоторого выпуклого многоугольника D .

За несколько лет до появления работы [1] В.С. Азариным в работе [2] была доказана теорема об аппроксимации произвольной субгармонической функции конечного порядка логарифмом модуля целой функции. Существенным уточнением результата В.С. Азарина стала теорема, доказанная в [3]. В этой теореме утверждается, в частности, что для любой субгармонической функции конечного порядка u существует целая функция f , такая, что вне некоторого исключительного множества E конечной лебеговой меры выполняется соотношение

$$|u(z) - \ln |f(z)|| = O(\ln |z|), \quad z \notin E, \quad |z| \longrightarrow \infty.$$

Несложно показать, что функции типа синуса для функции u , введенные выше, обладают свойствами целых функций, построенных в указанной работе [3].

В работе [4] функции типа синуса построены для опорных функций выпуклых областей кривизна границы которых ограничена от нуля и бесконечности.

В работе [7] исследованы субгармонические функции медленного роста.

Множество функций типа синуса для функции u будем обозначать через $\mathcal{S}(u)$.

Конструкция целых функций типа синуса

Базовой для наших конструкций будет служить функция $F(z) = e^z - 1$, поэтому сначала опишем ее свойства. Положим $\operatorname{Re}^+ z = \max(0, \operatorname{Re} z)$.

Пусть $L(x) = d(x - b)$ — вещественная линейная функция и $L^+(x) = \max(0, L(x))$. Тогда

LF1. Нулями функции $F(L(z))$ являются точки $z_n = b + \frac{2\pi in}{d}$, $n \in \mathbb{Z}$, причем все нули простые.

LF2. Для любого $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \frac{\varepsilon}{d})$, $n \in \mathbb{Z}$, выполняется соотношение

$$|\ln |F(L(z))| - L^+(Rez)| \leq A_\varepsilon e^{-|L(Rez)|}.$$

Сформулируем две подготовительные леммы.

Лемма 1. Пусть u — кусочно - линейная выпуклая функция на \mathbb{R} , причем

$$u(x) = l_k(x), \quad x \in [b_k; b_{k+1}], \quad k \in \mathbb{Z},$$

где l_k — линейные функции и b_k — возрастающая последовательность точек излома. Если положить $L_0(x) = l_0(x)$, $L_n(x) = l_n(x) - l_{n-1}(x)$, $n \neq 0$, то

$$u(x) = L_0(x) + \sum_{n \neq 0} L_n^+(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В работе [6] введена следующая геометрическая характеристика выпуклых функций: если u — выпуклая функция на вещественной оси, то для любого $y \in \mathbb{R}$ через $\rho(u, y)$ обозначим супремум таких $p > 0$, для которых

$$\int_{-p}^{+p} |u'_+(y+t) - u'_+(y)| dt \leq 1.$$

Если функция u не линейна, то функция $\rho(u, y)$ определена и конечна на \mathbb{R} и как показано в той же работе [6], функция $\rho(u, x)$ удовлетворяет условию Лифшица

$$|\rho(u, x) - \rho(u, y)| < |x - y|, \quad x \neq y. \quad (1)$$

Определение величины $\rho(u, y)$ можно переписать следующим образом: $\rho(u, y)$ — супремум таких $p > 0$, для которых

$$u(y+p) + u(y-p) - 2u(y) \leq 1.$$

Для точки $y \in \mathbb{R}$ через $l_u(y, x)$ обозначим линейную функцию, равную $u(x)$ в точках $y \pm \rho(u, y)$. Из геометрических рассуждений легко вывести, что имеет место соотношение

$$0 \leq l_u(y, x) - u(x) \leq 1, \quad x \in [y - \rho(u, y); y + \rho(u, y)]. \quad (2)$$

Лемма 2. Для любой выпуклой функции u на \mathbb{R} существует кусочно - линейная выпуклая функция v , такая, что

1. Если $b_n, n \in \mathbb{Z}, \dots < b_{-1} < b_0 < b_1 < \dots$, — точки излома функции v и $b_n^* = (b_n + b_{n+1})/2$, то

$$b_{n+1} - b_n = 2\rho(u, b_n^*), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При этом, если функция u имеет асимптоту в $+\infty$ ($-\infty$), то последовательность b_n конечна справа (слева).

2. Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется оценка

$$u(x) \leq v(x) \leq u(x) + 1.$$

3. Если $v(x) = l_n(x), x \in [b_n; b_{n+1}], n \in \mathbb{Z}$, и d_n — угловой коэффициент линейной функции $l_n - l_{n-1}$, то

$$\frac{1}{2\rho(u, b_n^*)} \leq d_n \leq \frac{3}{\rho(u, b_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема 1. Пусть u — выпуклая функция на \mathbb{R} . Предположим, что найдется функция $\alpha(x) \geq 1$, удовлетворяющая условиям

а) При некоторой константе A для любого $x \in \mathbb{R}$ для всех $y \in [x - \rho(u, x); x + \rho(u, x)]$ имеет место соотношение

$$|\alpha(y) - \alpha(x)| \leq A.$$

б) Сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x)} \frac{dx}{\rho(u, x)} < \infty.$$

с) При некоторой константе $a > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ для всех $y_1, y_2 \in [x - 2\alpha(x)\rho(u, x); x + 2\alpha(x)\rho(u, x)]$ имеет место соотношение

$$\frac{\rho(u, y_1)}{\rho(u, y_2)} \geq a.$$

Тогда существует целая функция f , которая имеет простые нули вида $z_{nk} = b_n + \frac{2\pi i}{d_n}k$, $n, k \in \mathbb{Z}$, и для любого $\varepsilon > 0$ вне кругов $B(z_{nk}, \varepsilon\rho(u, b_n))$ удовлетворяет оценке

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq A(\varepsilon).$$

При этом, если $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то круги $B(z_{nk}, \varepsilon\rho(u, b_n))$ попарно не пересекаются.

Доказательство. Изложим конструкцию функции f .

На основе леммы 2 для функции u построим выпуклую кусочно линейную функцию v с изломами в точках b_n , $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющую соотношению

$$u(x) \leq v(x) \leq u(x) + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функция v по лемме 1 представляется в виде

$$v(x) = L_0(x) + \sum_{n \neq 0} L_n^+(x),$$

где L_n — линейные функции и если $L_n(x) = d_n(x - b_n)$, то по п.3 леммы 2 имеют место оценки

$$\frac{1}{2\rho(u, b_n^*)} \leq d_n \leq \frac{3}{\rho(u, b_n)}. \quad (3)$$

Положим $F(z) = e^z - 1$ и

$$f(z) = e^{L_0(z)} \prod_{n \neq 0} F(L_n(z)).$$

Тогда функция f имеет простые нули в точках $z_{nk} = b_n + \frac{2\pi ik}{d_n}$ и

$$|\ln |f(z)| - u(\operatorname{Re}z)| \leq |\ln |f(z)| - v(\operatorname{Re}z)| + 1 \leq$$

$$\leq \sum_{n \neq 0} |\ln |F(L_n(z))| - L_n^+(Rez)| + 1.$$

По свойствам $LF1-LF2$ для любого $\varepsilon > 0$ вне кругов $B(z_{nk}, \frac{\varepsilon}{d_n})$ имеем

$$|\ln |f(z)| - u(Rez)| \leq A(\varepsilon) \sum_{n \neq 0} e^{-|L_n(Rez)|} + 1. \quad (4)$$

Оценим сумму в правой части. В силу левого неравенства в соотношении (3) имеем

$$e^{-|L_n(x)|} \leq \exp\left(-\frac{|x - b_n|}{2\rho(u, b_n^*)}\right). \quad (5)$$

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и множество всех индексов $n \in \mathbb{Z}$ разобьем на две части, полагая

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{n \in \mathbb{Z}, |x - b_n| \geq (2\alpha(b_n^*) - 1)\rho(u, b_n^*)\}, \\ Z_2 &= \{n \in \mathbb{Z}, |x - b_n| < (2\alpha(b_n^*) - 1)\rho(u, b_n^*)\}. \end{aligned}$$

Тогда из (4) следует

$$\sum_{n \in Z_1} e^{-|L_n(x)|} \leq \sqrt{e} \sum_{n \in Z_1} e^{-\alpha(b_n^*)}.$$

По условиям теоремы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(b_n^*)} &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2e^A}{a} \int_{b_n}^{b_{n+1}} e^{-\alpha(x)} \frac{dx}{\rho(u, x)} = \\ &= \frac{2e^A}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x)} \frac{dx}{\rho(u, x)} = C_1 < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{n \in Z_1} e^{-|L_n(x)|} \leq \sqrt{e} C_1. \quad (6)$$

Рассмотрим множество индексов Z_2 . Положим

$$N_1 = \inf\{p : p \in Z_2\}, \quad N_2 = \sup\{p : p \in Z_2\},$$

$$s = \min\{p : p \in Z_2, b_p \geq x\}.$$

Возьмем $n \in Z_2$, $n \geq s$, тогда

$$|x - b_n| = (b_s - x) + \sum_{p=s}^{n-1} (b_{p+1} - b_p) \geq 2 \sum_{p=s}^{n-1} \rho(u, b_p^*). \quad (7)$$

Пусть $p = s, \dots, n-1$. Тогда

$$b_p \geq b_s \geq x \geq b_n - (2\alpha(b_n^*) - 1)\rho(u, b_n^*) = b_n^* - 2\alpha(b_n^*)\rho(u, b_n^*)$$

и, с другой стороны, $b_p \leq b_n \leq b_{n+1} = b_n^* + \rho(u, b_n^*)$. Таким образом, $b_p \in [b_n^* - 2\alpha(b_n^*)\rho(u, b_n^*); b_n^* + 2\alpha(b_n^*)\rho(u, b_n^*)]$ и по условию с)

$$\rho(u, b_p^*) \geq a\rho(u, b_n^*).$$

Отсюда и из (5) следует

$$|x - b_n| \geq 2a \sum_{p=s}^{n-1} \rho(u, b_n^*) = 2a(n-s)\rho(u, b_n^*).$$

Если же $n \in Z_2$, $n \leq s-1$, то аналогичным образом получим

$$|x - b_n| = (x - b_{s-1}) + \sum_{p=n+1}^{s-1} (b_p - b_{p-1}) \geq 2a(s-n-1)\rho(u, b_n^*).$$

Объединив последние две оценки получим

$$\frac{-|x - b_n|}{\rho(u, b_n^*)} \leq -2a(|s - n| - 1).$$

Отсюда и из соотношения (5) следует

$$\sum_{n \in Z_2} e^{-|L_n(Rez)|} \leq 2e^{2a} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2ak} \leq \frac{2e^{4a}}{e^{2a} - 1}.$$

Вместе с оценками (4), (6) отсюда получим, что для любого $\varepsilon > 0$ вне кругов $B(z_{nk}, \frac{\varepsilon}{d_n})$ выполняется соотношение

$$|\ln |f(z)| - u(Rez)| \leq 1 + A(\varepsilon) \left(\sqrt{e}C_1 + \frac{2e^{4a}}{e^{2a} - 1} \right).$$

Из (3) следует, что эта оценка выполняется вне кругов $B(z_{nk}, \varepsilon \rho(u, b_n^*))$. Поскольку $b_n \in [b_n^* - \rho(u, b_n^*); b_n^* + \rho(u, b_n^*)]$, то по условию с) выполняется неравенство $\rho(u, b_n) \geq a \rho(u, b_n^*)$, следовательно, последняя оценка выполняется вне кругов $B(z_{nk}, \varepsilon \rho(u, b_n))$.

Нам осталось доказать, что для $\varepsilon < \frac{1}{2}$ круги $B_{nk}(\varepsilon) = B(z_{nk}, \varepsilon \rho(u, b_n))$ попарно не пересекаются. Возьмем два различных нуля z_{nk}, z_{mp} . Если $n = m$, то $k \neq p$ и в силу п.3 леммы 2 имеем

$$|z_{nk} - z_{mp}| \geq \frac{2\pi}{d_n} \geq \frac{2\pi}{3} \rho(u, b_n) > 2\varepsilon \rho(u, b_n),$$

значит круги $B_{nk}(\varepsilon), B_{mp}(\varepsilon)$ не пересекаются. Пусть $n \neq m$, для определенности $m < n$. Тогда получим

$$|z_{nk} - z_{mp}| \geq b_n - b_m \geq b_n - b_{n-1} = 2\rho(u, b_{n-1}^*) \geq \rho(u, b_n)$$

и

$$|z_{nk} - z_{mp}| \geq b_n - b_m \geq b_{m+1} - b_m = 2\rho(u, b_m^*) \geq \rho(u, b_m),$$

поэтому

$$|z_{nk} - z_{mp}| \geq \frac{1}{2}(\rho(u, b_n) + \rho(u, b_m)) > \varepsilon(\rho(u, b_n) + \rho(u, b_m)).$$

Тем самым круги $B_{nk}(\varepsilon), B_{mp}(\varepsilon)$ не пересекаются. Теорема 1 доказана. •

Следствие 1. *Если функция u удовлетворяет условиям теоремы 1, то для нее существует функция типа синуса.*

Следствие 2. *Если функция u имеет асимптоты в $\pm\infty$, то для нее существует функция типа синуса.*

Сформулируем вариант теоремы 1, более удобный для применений.

Теорема 2. *Пусть u — дважды непрерывно дифференцируемая выпуклая функция на \mathbb{R} такая, что найдется бесконечно большая в $\pm\infty$ функция $\beta(x)$ и положительная константа b такие, что выполнены следующие условия*

а) Для всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $y \in [x - \frac{1}{\sqrt{u''(x)}}; x + \frac{1}{\sqrt{u''(x)}}]$ имеет место $|\beta(x) - \beta(y)| \leq B$.

б) Интеграл

$$\int_I e^{-\varepsilon\beta(x)} \sqrt{u''(x)} dx$$

сходится для любого $\varepsilon > 0$.

с) Для любого $x \in \mathbb{R}$ для всех $y_1, y_2 \in [x - \frac{\beta(x)}{\sqrt{u''(x)}}; x + \frac{\beta(x)}{\sqrt{u''(x)}}]$ имеет место соотношение

$$\frac{u''(y_1)}{u''(y_2)} \geq b > 0.$$

Тогда существует целая функция типа синуса для u , которая имеет простые нули вида $z_{nk} = b_n + \frac{2\pi ki}{d_n}$ и для любого $\varepsilon > 0$ вне кругов $B\left(z_{nk}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{u''(b_n)}}\right)$ удовлетворяет оценке

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq A(\varepsilon).$$

Кроме того, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ круги $B\left(z_{nk}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{u''(b_n)}}\right)$ попарно не пересекаются.

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ МК-2532.2009.1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с ней разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 657–702.
- [2] Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции // Матем. сб. 1969. Т. 79. № 4. С. 463–476.
- [3] Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica. 1985. V. 11. P. 257–282.

- [4] Любарский Ю. И., Содин М. Л. налоги функций типа синуса для выпуклых областей // Препринт №17. Харьков: Физико-технического института низких температур АН УССР. 1986. С. 42.
- [5] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы. 1983.
- [6] Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства // Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 80–87.
- [7] Chyzhikov I. E. Approximation of subharmonic functions of slow growth // Matem. fiz., analiz, geom. 2002. V. 9. № 3. P. 509–520.
- [8] Исаев К. П., Путинцева А. А., Юлмухаметов Р. С. Представление рядами экспонент в весовых пространствах на вещественной оси // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1. № 1. С. 16–37.

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ЦИЦЕЙКИ¹

Искандарова М. Н. (Уфа, УГАТУ)

Введение

Уравнение Цицейки

$$v_{xy} = \exp(v) + \exp(-2v) \quad (1)$$

имеет многочисленные приложения в различных областях физики и математики [1]. При этом оно является интегрируемым методом обратной задачи рассеяния [2].

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-91222-СТ-а

Одним из способов исследования интегрируемости нелинейных гиперболических уравнений является подход, основанный на применении дифференциальных подстановок. Не являясь обратимыми преобразованиями, подстановки, тем не менее, сохраняют некоторые важные свойства дифференциальных уравнений, например, формальную интегрируемость [3]. В ряде случаев наличие у уравнения дифференциальной подстановки позволяет получить его решения из решений некоторого хорошо изученного уравнения.

Соотношение

$$v = \Phi \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \right) \quad (2)$$

называется дифференциальной подстановкой из уравнения

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y) \quad (3)$$

в уравнение

$$v_{xy} = g(v, v_x, v_y),$$

если для любого решения $u(x, y)$ первого уравнения функция (2) удовлетворяет второму.

В настоящей работе описаны все нелинейные гиперболические уравнения вида (3), которые дифференциальной подстановкой

$$v = \varphi(u, u_x, u_y) \quad (4)$$

сводятся к уравнению Цицейки (1).

Кроме того, доказано, что существует единственное нелинейное уравнение вида (3), которое подстановкой (4) ($\varphi_{u_x} \cdot \varphi_{u_y} \neq 0$), сводится к уравнению синус-Гордон

$$v_{xy} = \sin v. \quad (5)$$

§ 1. Преобразования специального вида $v = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$

В настоящем параграфе рассматриваются уравнения вида (3), которые дифференциальной подстановкой

$$v = \varphi(u, u_x) \quad (6)$$

сводятся к уравнению Цицейки.

Одним из основных результатов работы является следующее утверждение:

Теорема 1. *Преобразование вида (6) решения нелинейного уравнения (3) переводит в решения уравнения Цицейки лишь в следующих случаях:*

$$v = -\frac{1}{2} \ln(u_x - b(u_x)), \quad (7)$$

$$v = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2a(u_x) - 2u_x}{3}\right),$$

где функции b , a определены формулами

$$(2u_x + b)^2(u_x - b) = 1, \quad 2(a + 2u_x)^2(a - u_x) = 27. \quad (8)$$

При этом соответствующие уравнения имеют вид:

$$u_{xy} = 3ub(u_x), \quad (9)$$

$$u_{xy} = \sqrt{2u_y}a(u_x).$$

Отметим, что уравнение (9), связанное преобразованием (7) с уравнением Цицейки, приводится в работе [2].

Доказательство. Дифференцируя соотношение (6) последовательно по переменным x , y , учитывая (3), в силу независимости переменных u , u_x , u_y , u_{xx} , получаем

$$\begin{aligned} \varphi_u u_y + \varphi_{u_x} f &= \psi(u, u_y), \\ \varphi_{uu} u_x u_y + \varphi_u f + \varphi_{uu_x} u_x f + \varphi_{u_x} (f_u u_x + f_{u_y} f) &= \\ &= \exp(\varphi) + \exp(-2\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $\varphi_{\mathbf{u}_x} \neq \mathbf{0}$, тогда из первого соотношения (10) имеем

$$f = \frac{\psi - \varphi_u u_y}{\varphi_{u_x}}. \quad (11)$$

Перепишем второе равенство (10), используя формулу (11)

$$\varphi_{u_x} \psi_u u_x + \psi_{u_y} (\psi - \varphi_u u_y) = \varphi_{u_x} (\exp(\varphi) + \exp(-2\varphi)). \quad (12)$$

Далее дифференцируем соотношение (12) последовательно по переменным u_x, u_y

$$\psi_{uu_y} (\varphi_{u_x} u_x)_{u_x} - \varphi_{uu_x} (\psi_{u_y} u_y)_{u_y} = 0. \quad (13)$$

Если $\psi_{\mathbf{u}\mathbf{u}_y} = \mathbf{0}$, $\varphi_{\mathbf{u}\mathbf{u}_x} = \mathbf{0}$, то справедливы формулы

$$\psi = g(u) + p(u_y), \quad \varphi = q(u) + s(u_x). \quad (14)$$

Подставляя соотношения (14) в равенство (12), получаем эквивалентную ему систему

$$\begin{aligned} \left(g'(u)u_x - \exp(q + s) - \exp(-2q - 2s) \right) s'(u_x) &= \lambda(u), \\ p'(u_y) \left(q'(u)u_y - g(u) - p(u_y) \right) &= \lambda(u). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $\mathbf{p}'(\mathbf{u}_y) = \mathbf{0}$, тогда, в силу второго равенства (15), первое соотношение (15) примет вид

$$g'(u)u_x - \exp(q(u) + s(u_x)) - \exp(-2q(u) - 2s(u_x)) = 0. \quad (16)$$

Дифференцируем соотношение (16) по переменной u_x

$$g'(u) \exp(2q(u)) = \left(\exp(3q(u)) \exp(s(u_x)) - 2 \exp(-2s(u_x)) \right) s'(u_x). \quad (17)$$

Нетрудно показать, что в случае $q(u) \neq 0$ получаем противоречие условию $s'(u_x) \neq 0$. Если $q(u) = 0$, тогда согласно (17) имеем

$$\exp(s(u_x)) s'(u_x) - 2 \exp(-2s(u_x)) s'(u_x) = g'(u).$$

Отсюда

$$g'(u) = c_1, \quad (\exp(s(u_x)) - 2 \exp(-2s(u_x)))s'(u_x) = c_1. \quad (18)$$

Второе уравнение (18) после преобразования $c_1u + c_2x \rightarrow 3u$ и замены $s\left(\frac{3u_x - c_2}{c_1}\right) \rightarrow s(u_x)$ дает

$$\exp(s(u_x)) + \exp(-2s(u_x)) = 3u_x.$$

Если $s(u_x) = -\frac{1}{2} \ln(u_x - b(u_x))$, то функция b удовлетворяет первому уравнению (8). Далее, из первого соотношения (18) и формул (14), (11) после сдвига $3u + c_3 \rightarrow 3u$ и приведенных выше замен получаем

$$g = 3u, \quad \psi = 3u, \quad \varphi = -\frac{1}{2} \ln(u_x - b). \quad f = 3ub(u_x). \quad (19)$$

Пусть теперь $\mathbf{p}'(\mathbf{u}_y) \neq \mathbf{0}$. Из второго соотношения (15) имеем

$$\lambda(u) = C_1q'(u) + C_2g(u) + C_3. \quad (20)$$

Подставляя функцию (20) во второе равенство (15) получаем, что

$$(p'(u_y)u_y - C_1)q'(u) - (p'(u_y) + C_2)g(u) - p'(u_y)p(u_y) - C_3 = 0. \quad (21)$$

Если $\mathbf{p}'(\mathbf{u}_y) + \mathbf{C}_2 \neq \mathbf{0}$, тогда справедливы соотношения

$$g(u) = C_4\alpha + C_5, \quad q(u) = \alpha u + \beta, \quad (22)$$

$$\lambda(u) = C_1 \cdot \alpha + C_2 \cdot C_4 \cdot \alpha + C_2 \cdot C_5 + C_3. \quad (23)$$

Из первого равенства (15), учитывая формулы (22), (23), получаем, что $\alpha = 0$. Тогда

$$-\exp(s(u_x) + \beta) + \frac{1}{2} \exp(-2(s(u_x) + \beta)) = (C_2C_5 + C_3)u_x + C_6. \quad (24)$$

Подставляем формулы (22) в (21) и интегрируем полученное равенство по переменной u_y

$$p(u_y)C_5 + \frac{p^2(u_y)}{2} + (C_2C_5 + C_3)u_y + C_7 = 0. \quad (25)$$

После замены $s(u_x) + \beta = S(u_x)$, $C_2C_5 + C_3 = \gamma$, $p(u_y) + C_5 = P(u_y)$, $U = -(\gamma u + C_6x + C_7y - \frac{C_5^2}{2}y)$ формулы (14), (11), (24), (25) приобретают вид

$$\varphi = S(U_x), \quad \psi = P(U_y), \quad f = \frac{P(U_y)}{s'(u_x)},$$

$$-\exp(S(u_x)) + \frac{1}{2}\exp(-2S(u_x)) = -U_x, \quad \frac{P^2(U_y)}{2} - U_y = 0.$$

И, наконец, если $S(U_x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2a(U_x)-2U_x}{3}\right)$, то $f = \sqrt{2U_y}a(U_x)$, где функция a определена второй формулой (8).

Рассматривая равенство (13) в случае $\varphi_{u_x} \neq 0$ нетрудно проверить, что других дифференциальных подстановок вида (6), кроме тех, что получены выше, не существует. Теорема доказана.

§ 2. Преобразования общего вида

В настоящем параграфе рассматриваются дифференциальные подстановки вида (4), такие, что $\varphi_{u_x} \cdot \varphi_{u_y} \neq 0$, для уравнений Цицейки и синус-Гордон. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Нелинейное гиперболическое уравнение (3) дифференциальной подстановкой (4), такой, что $\varphi_{u_x} \cdot \varphi_{u_y} \neq 0$, сводится к уравнению Цицейки тогда и только тогда, когда уравнение (4) имеет вид*

$$u_{xy} = \mu(u)b(u_x)\bar{b}(u_y). \quad (26)$$

Здесь функции b, \bar{b} определены формулами

$$(2u_x + b)^2(u_x - b) = 1, \quad (2u_y + \bar{b})^2(u_y - \bar{b}) = 1, \quad (27)$$

а μ – произвольное решение дифференциального уравнения

$$\mu'' - 2\mu\mu' - 4\mu^3 = 0. \quad (28)$$

Соответствующая дифференциальная подстановка имеет вид

$$v = -\frac{1}{2}\ln(u_x - b) - \frac{1}{2}\ln(u_y - \bar{b}) + \alpha(u), \quad (29)$$

где функция α определяется из дифференциального уравнения

$$\alpha'^2 - 2\mu\alpha' - 3\mu' - 2\mu^2 = 0. \quad (30)$$

Доказательство. Дифференцируя соотношение (4) последовательно по переменным x , y и разделяя независимые переменные u , u_x , u_y , u_{xx} , u_{yy} получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_u u_y + \varphi_{u_x} f &= A(u, u_y), \quad \varphi_u u_x + \varphi_{u_y} f = B(u, u_x), \\ \varphi &= p(u, u_x) + q(u, u_y), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{uu_x} u_x + \varphi_u + \varphi_{u_x} f_{u_y} + \varphi_{uu_y} u_y + \varphi_{u_y} f_{u_x}) f + \varphi_{uu} u_x u_y + \\ + f_u (\varphi_{u_x} u_x + \varphi_{u_y} u_y) = \exp(\varphi) + \exp(-2\varphi). \end{aligned}$$

Первые две формулы системы (31) дают одно из основных соотношений, используемых при доказательстве теоремы

$$(A - \varphi_u u_y) \varphi_{u_y} = (B - \varphi_u u_x) \varphi_{u_x}. \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что последовательное дифференцирование формулы (32) по переменным u_x , u_y приводит к равенству

$$\varphi_{uu_y} (\varphi_{u_x} u_x)_{u_x} = \varphi_{uu_x} (\varphi_{u_y} u_y)_{u_y}. \quad (33)$$

Рассмотрим различные случаи при которых формула (33) верна. А именно, если $\varphi_{uu_y} = \mathbf{0}$, $\varphi_{uu_x} = \mathbf{0}$, то согласно системе (31)

$$\varphi = \alpha(u) + \beta(u_x) + \gamma(u_y). \quad (34)$$

Подставляя в формулу (32) выражение для φ получаем

$$A\gamma' - \alpha'\gamma' u_y = \mu(u), \quad B\beta' - \alpha'\beta' u_x = \mu(u). \quad (35)$$

Первое соотношение (31), в силу равенств (35), преобразуется к виду

$$f = \frac{\mu}{\beta'\gamma'}. \quad (36)$$

Кроме того, последнее уравнение системы (31) приобретает форму

$$-\mu^2 \frac{\beta''}{\beta'^2} + \beta' u_x (\gamma' \alpha'' u_y + \mu') = -\alpha' \mu + \mu^2 \frac{\gamma''}{\gamma'^2} - \mu' \gamma' u_y + \gamma' \beta' u_y + \gamma' \beta' (\exp(\alpha + \beta + \gamma) + \exp(-2\alpha - 2\beta - 2\gamma)). \quad (37)$$

Дифференцирование соотношения (37) дает

$$\alpha''(u) = c_1 \exp(\alpha(u)) + c_2 \exp(-2\alpha(u)). \quad (38)$$

Далее рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu^2(u) & \alpha''(u) \gamma'(u_y) u_y + \mu'(u) \\ \mu^2(w) & \alpha''(w) \gamma'(w_y) w_y + \mu'(w) \end{vmatrix}$$

Легко проверяется, что $\Delta \neq 0$. В формуле (37) положим $u = C_1$, $u_y = C_2$, а затем $u = \bar{C}_1$, $u_y = \bar{C}_2$, получим систему уравнений относительно неизвестных $\beta' u_x$, $\frac{\beta''}{\beta'^2}$, решение которой представимо в виде

$$\begin{aligned} \beta' u_x &= C_3 + C_4 \beta' (\exp(\beta + C_5) + \exp(-2\beta - 2C_5)), \\ \frac{\beta''}{\beta'^2} &= \bar{C}_3 + \bar{C}_4 \beta' (\exp(\beta + \bar{C}_5) + \exp(-2\beta - 2\bar{C}_5)). \end{aligned} \quad (39)$$

Первое уравнение системы дает $A \exp(\beta) + B \exp(-2\beta) = u_x$. Аналогично получаем, что $E \exp(\gamma) + D \exp(-2\gamma) = u_y$. После сдвига $\beta \rightarrow \beta + \ln C$, $\frac{B}{2AC^2} = 1$ и растяжения $x \rightarrow 3ACx$, $\beta(3ACu_x) \rightarrow \beta(u_x)$ имеем $\exp(\beta) + \exp(-2\beta) = 3u_x$. Если $\beta = -\frac{1}{2} \ln(u_x - b(u_x))$, то функция b определена первой формулой (27). С другой стороны, если $\gamma = -\frac{1}{2} \ln(u_y - \bar{b}(u_y))$, то функция \bar{b} определена второй формулой (27).

Подставляем полученные выражения для b , \bar{b} в формулу (37) и разделяем независимые переменные u , $\frac{u_x}{b}$, $\frac{u_x u_y}{bb}$, учитывая соотношение (38), имеем

$$\begin{aligned} 2\mu^2 + \mu' &= 2 \exp(\alpha) - \exp(-2\alpha), \\ \alpha' \mu - 2\mu^2 &= \exp(\alpha) + \exp(-2\alpha), \\ \alpha'' &= 4 \exp(\alpha) + \exp(-2\alpha). \end{aligned}$$

Используя последние формулы нетрудно показать, что функции μ и α удовлетворяют соотношениям (28), (30) соответственно.

Теперь рассмотрим случай $\varphi_{uu_x} = \mathbf{0}$, $\varphi_{uu_y} \neq \mathbf{0}$. Согласно формулам (31), (33) функция φ приобретает форму $\varphi = c \ln u_x + q(u, u_y)$. Учитывая последнее равенство из соотношения (32) получаем эквивалентную ему систему

$$\frac{B \cdot c}{u_x} = \mu(u), \quad Aq_{u_y} - q_u q_{u_y} u_y + cq_u = \mu(u), \quad (40)$$

При этом, функция f , в силу равенств (31) принимает вид

$$f = \frac{u_x (\mu(u) - cq_u)}{cq_{u_y}}. \quad (41)$$

Подставляя формулу (41) в последнее соотношение системы (31)

$$u_x \xi(u, u_y) = \exp(c \ln u_x + q) + \exp(-2c \ln u_x - 2q). \quad (42)$$

, дважды дифференцируя полученное равенство по переменной u_x , исключая экспоненту, приходим к

$$u_x (2c^2 - c - 1) \xi(u, u_y) = 0. \quad (43)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi = & \left(\frac{-q_{uu_y} q_{u_y} c - \mu + cq_u q_{u_y} u_y}{q_{u_y}^2} + q_{uu_y} u_y + \frac{\mu}{c} \right) \frac{\mu - cq_u}{cq_{u_y}} + \\ & + q_{uu} u_y + \frac{\mu' - cq_{uu}}{q_{u_y}} - \frac{(\mu - cq_u) q_{uu_y}}{q_{u_y}^2} + \frac{(\mu' - cq_{uu}) u_y}{c} - \frac{(\mu - cq_u) q_{uu_y} u_y}{cq_{u_y}}. \end{aligned}$$

Из равенства (43) следует, что $c = 1$ или $c = -1/2$, или $\xi \equiv 0$. В первых двух случаях не выполняются соотношения, возникающие при переходе от формулы (31) к (43). Последний случай, в силу равенства (42), дает $\exp(c \ln u_x + q) + \exp(-2c \ln u_x - 2q) = 0$. Отсюда $\varphi_{uu_y} = 0$. Противоречие.

И, наконец, справедливость соотношения (33) не нарушается при $(\mathbf{u}_x \varphi_{\mathbf{u}_x})_{\mathbf{u}_x} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{u}_y \varphi_{\mathbf{u}_y})_{\mathbf{u}_y} = \mathbf{0}$. Функция φ принимает форму

$$\varphi = \alpha(u) \ln u_x + \theta(u) \ln u_y + \mu(u). \quad (44)$$

Учитывая формулу (44) перепишем равенство (32) в виде эквивалентной ему системы

$$\frac{B\alpha}{u_x} + (\alpha' \ln u_x + \mu')(\theta - \alpha) = \lambda(u), \quad \frac{A\theta}{u_y} - \theta' \ln u_y (\theta - \alpha) = \lambda(u). \quad (45)$$

Функция f приобретает вид

$$f = \frac{u_x u_y}{\alpha \theta} (\lambda - \alpha \theta' \ln u_y - \theta (\alpha' \ln u_x + \mu')). \quad (46)$$

Подставляя функцию f , заданную формулой (46) в последнее соотношение системы (31), умножая обе части полученной формулы на $(\alpha \cdot \theta)/(u_x u_y)$ получаем равенство, правая часть которого имеет вид

$$\alpha \theta (u_x^{\alpha-1} u_y^{\theta-1} \exp(\mu) + u_x^{-2\alpha-1} u_y^{-2\theta-1} \exp(-2\mu)),$$

а левая содержит функции от переменной u и слагаемые $\ln u_y$, $\ln u_x$ с различными коэффициентами. Таким образом, указанное равенство может быть выполнено только при условии $\alpha \cdot \theta = 0$, что противоречит условию $\varphi_{u_x} \neq 0$. Теорема доказана.

Для уравнения синус-Гордон имеет место утверждение:

Теорема 3. *Нелинейное гиперболическое уравнение (3) дифференциальной подстановкой (4), такой, что $\varphi_{u_x} \cdot \varphi_{u_y} \neq 0$, сводится к уравнению синус-Гордон тогда и только тогда, когда уравнение (4) имеет вид*

$$u_{xy} = S(u) \sqrt{1 - u_x^2} \sqrt{1 - u_y^2}. \quad (47)$$

Здесь функция S удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$S'' - 2S^3 + \lambda S = 0,$$

где λ — произвольная постоянная. Соответствующая дифференциальная подстановка имеет вид

$$v = \arcsin u_x + \arcsin u_y + P(u), \quad (48)$$

где

$$P'^2 = 2S' - 2S^2 + \lambda.$$

Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.

Автор благодарен своему научному руководителю А. В. Жиберу за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Борисов А. Б., Зыков С. А., Павлов М. В. Уравнение Цицейки и размножение нелинейных интегрируемых уравнений // ТМФ. 2002. Т. 131. № 1. С. 126–134.
- [2] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
- [3] Свинолунов С. И., Соколов В. В., Ямилов Р. И. О преобразованиях Беклунда для интегрируемых эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 802–805.

УДК 330 + 519.86

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ ПРИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОМ РАЗВИТИИ С УЧЕТОМ ИНДЕКСА РАЗВИТИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА (ИРЧП)

Исламов И. Я. (Уфа, БашГУ)

В последние десятилетия все больше внимания уделяется человеческому измерению экономического развития. Этот факт отражен во всех программных и аналитических документах международных организаций семейства ООН. Предложенные ПРООН

методики и измерители человеческого развития позволяют производить сравнительный анализ прогресса как отдельных стран, так и групп стран в этой области. На данный момент более 100 стран, включая Россию, публикуют ежегодные национальные доклады о человеческом развитии.

Человеческое развитие, измеряемое индексом развития человеческого потенциала (ИРЧП) впервые был разработан пакистанским экономистом Махбубом эль Хаком (Mahbub ul Haq) в 1990 году и использовался с 1993 года. На сегодняшний день, этот метод является основным методом для подсчета ИРЧП. [1, С. 18]

Принципиально важное положение концепции человеческого развития состоит в утверждении, что развитие не может рассматриваться только как рост объема материальных благ и услуг. Следовательно, традиционные макроэкономические показатели, в том числе объем валового внутреннего продукта (ВВП) и среднедушевой доход, не являются адекватными характеристиками развития во всем его многообразии. Только экономические показатели не могут служить универсальным критерием при распределении общественных ресурсов или при ранжировании стран по уровню развития. Представление о том, что производство все большего количества товаров и услуг является наилучшим путем повышения жизненного уровня и решения других общенациональных задач, является в определенной степени односторонним. Такой подход приводит к недооценке многих неэкономических параметров развития. Уровень жизни людей может быть относительно низким при формально высоких показателях экономического роста. Возможна и противоположная ситуация - относительно высокий уровень жизни при умеренных показателях экономического роста.

Индекс развития человеческого потенциала (ИРЧП), как комбинация индексов долголетия, образованности и скорректированного дохода, позволяет учитывать человеческое развитие более адекватно и комплексно. Индекс учитывает важнейшие парамет-

ры благополучия человека. Прямо или косвенно через индекс учитываются такие характеристики развития, как здоровье и долголетие, состояние окружающей среды, уровень культуры и образования, уровень доходов населения. Все эти составляющие формализованы и удобны для межстрановых сравнений. Как видно, человеческое развитие, измеряемое ИРЧП, означает нечто большее, чем то, что формально вытекает из предложенных трех измерений. Однако здесь нет никакого противоречия: ИРЧП представляет собой интегральный социально-экономический показатель, который постоянно совершенствуется специалистами ПРООН. И является важным инструментом мониторинга долгосрочных тенденций в развитии человека.

ИРЧП как сводный показатель базовых аспектов развития человека ориентирован на достижение многих целей, из которых наиболее важны следующие:

- разработка показателя, позволяющего измерить основные аспекты человеческого развития и расширение возможностей выбора для людей;
- использование ограниченного числа показателей для обеспечения простоты сводного показателя;
- разработка сводного индекса, вместо большого числа отдельных показателей;
- создание показателя, охватывающего возможности как экономического, так и социального выбора;
- обеспечение гибкости показателя в возможность постепенного его совершенствования в ответ на критику анализа;
- обеспечение ранжирования стран по значению индекса для обоснования данных, имеющих отношение к политике развития человека, и инвестиций в сбор и анализ данных. [2. С. 40]

При реализации каждого пункта вышеуказанных целей метод ИРЧП должно упроститься и легко применим при больших вычислениях. В таких случаях могут быть сгруппированы некоторые

категории, и это может привести к недочетам или погрешностям. Чтобы избежать таких ошибок, нужно проследить связь между тремя компонентами ИРЧП для выявления закономерностей влияния каждой категории друг на друга. Рассмотрим это через экономическую категорию как потребление.

Потребление - это использование, применение продукции, вещей, благ, товаров, услуг в целях удовлетворения потребностей. [3]

Видно, что потребление тесно связано с тремя компонентами ИРЧП. Индекс долголетия или здоровье зависят от наших потребностей в потреблении. А потребность в потреблении зависит от благосостояния человека. Уровень образованности формирует мост через эти компоненты.

Проследив связь между компонентами, можем обнаружить причины медленного развития того или иного компонента ИРЧП. И построить задачи для их устранения.

Рассмотрим методику определения ИРЧП. Сначала некоторые вводные. Для перевода любой переменной, скажем x , в индекс без единиц измерения между 0 и 1 (это позволит складывать различные показатели) используется следующая формула:

$$x - \text{индекс} = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)},$$

где $\min(x)$ и $\max(x)$ являются максимальными и минимальными значениями, которые достигала переменная x соответственно.

Таким образом, индекс развития человеческого потенциала (ИРЧП) представим средним от трёх следующих показателей:

1) Определяют индекс ожидаемой продолжительности жизни или индекс долголетия - фиксированные значения (определенные Программой развития ООН):

$$\text{Индекс продолжительности жизни} = \frac{LE - 25}{85 - 25},$$

где LE : Средняя продолжительность жизни;

2) Индекс образования. Этот индекс измеряет относительные достижения региона как в повышении уровня грамотности взрослого населения, так и в увеличении поступления в начальные, средние и высшие учебные заведения. Сначала рассчитывается индекс грамотности взрослого населения и индекс совокупного валового коэффициента поступивших в начальные, средние и высшие учебные заведения. Затем эти два индекса сводятся в единый индекс образования.

$$\text{Индекс грамотности взрослого населения (ALI)} = \frac{ALR}{100},$$

$$\text{Индекс совокупной доли учащихся (GEI)} = \frac{GGER}{100},$$

$$\text{Индекс образования} = \frac{2}{3} \times \text{ALI} + \frac{1}{3} \times \text{GEI},$$

где ALR : Грамотность взрослого населения страны в процентах;
 $GGER$: Совокупная доля учащихся;

3) Индекс уровня жизни или индекс реального валового регионального продукта на душу населения:

$$\text{GDP Index} = \frac{\log(GDPpc) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)},$$

где $GDPpc$: ВВП на душу населения при ППС в долларах США. Тогда,

$$\begin{aligned} \text{ИРЧП} = & \frac{1}{3}(\text{Индекс долголетия}) + \frac{1}{3}(\text{Индекс образования}) + \\ & + \frac{1}{3}(\text{Индекс уровня жизни}). \end{aligned}$$

Главной задачей вычисления ИРЧП является не определение его величины как таковой, а ранжирование на его основе различных стран, регионов внутри страны и сопоставление рангов по ИРЧП и ВВП (ВРП) на душу населения (если место по ИРЧП

выше, чем по среднедушевому ВВП (ВРП), это позволяет судить о большей ориентированности экономики страны на цели человеческого развития, и наоборот). [1, С. 27]

При расчете ИРЧП все три базовых показателя сводятся к единой системе измерения путем определения достижений по каждому показателю как относительной дистанции от желаемой цели. Максимальное и минимальное значение каждой переменной переносятся на шкалу от 0 до 1, причем каждый регион располагается в определенной точке этой шкалы. При расчете ИРЧП определяется мера относительных достижений региона по каждой из трех базовых переменных и рассчитывается простая средняя величина всех трех показателей. Чем ближе регион к величине ИРЧП, равной 1, тем меньше тот путь, который еще предстоит пройти данному региону до уровня и качества жизни, принимаемых за должные.

Концепция человеческого развития предлагает четыре способа, с помощью которых можно добиться улучшения трех компонентов ИРЧП:

- увеличить инвестиции в образование, здравоохранение, профессиональную подготовку, содействуя реализации способностей человека и его участию в производстве и распределении благ;
- добиваться более справедливого распределения дохода и богатства, обеспечивая материальную основу развития человеческого потенциала;
- достичь тщательной сбалансированности социальных расходов, всемерно укрепляя экономическую базу социальной сферы;
- расширять возможности людей осуществлять свой выбор в политической, социальной и экономической сферах. [4, С. 10]

Экономический рост является экстенсивным, если он осуществляется за счет привлечения дополнительных ресурсов и не меняет среднюю производительность труда в обществе. Интенсивный рост связан с применением более совершенных факторов произ-

водства и технологии, т.е. осуществляется не за счет увеличения объемов затрат ресурсов, а за счет роста их отдачи. Интенсивный рост может служить основой повышения благосостояния населения.

Согласно концепции человеческого развития одной из ключевых проблем общества на каждом этапе, наряду с возможностью прожить долгую здоровую жизнь и получить образование, является доступ к ресурсам, необходимым для достойного уровня жизни. Достойный уровень жизни в стране и обществе достигается благодаря экономическому росту, а для каждого человека - посредством справедливого распределения благ и доходов в обществе. Для большинства населения источником дохода является труд, причем концепцией человеческого развития в качестве одного из основных признаков рассматривается его продуктивность. Подразумевается, что люди должны иметь возможность повышать продуктивность своей деятельности, полноценно участвовать в процессе формирования дохода и трудиться за достойное денежное вознаграждение. Поэтому экономический рост, динамика занятости и заработной платы являются составляющими моделями человеческого развития.

Таким образом, на первый план современных условиях развитие национальной экономики определяется группой интенсивных факторов, качественно отличающихся от традиционных (экстенсивных), таких как: инновационная восприимчивость экономики, интеллектуальный капитал и качество человеческого потенциала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Республика Башкортостан. Доклад о развитии человеческого потенциала 2008 . Уфа, 2009. С. 18–36.
- [2] Как измерить человеческое развитие. Нью-Йорк, 2007. С. 40.
- [3] Ведомости конференции. // Режим доступа: [<http://www.smoney.ru/>].

- [4] Садовина Т. Н., Развитие человеческого потенциала как фактора экономического роста. Чебоксары, 2009. С. 10.

УДК 519.8

БЮДЖЕТ СТУДЕНТА: МОЖНО ЛИ ИМ УПРАВЛЯТЬ?

Казакова Д. С. (Уфа, БашГУ)

Бухгалтерский учёт определяется как система, которая осуществляет измерение, обработку и передачу финансовой информации об определённом хозяйствующем субъекте. Как правило, под хозяйствующим субъектом понимается предприятие. Но есть работы, в которых финансовый учёт используется для исследования семьи [1] или конкретного физического лица [2], ведущего экономическую деятельность. В этих работах строится бюджет хозяйствующих субъектов, его расходная и доходная части. Однако в них не приводится строгий системы и документов финансового и бухгалтерского учёта. В данной работе приведены результаты создания основных документов бухгалтерского учёта для студента.

Для получения этих документов вводятся необходимые счета. Счёт определяется как основная единица хранения информации. Например, счёт "Касса" используется для регистрации движения денежных средств, находящихся непосредственно в кошельке студента.

Счета "Инвестиции родителей" и "Инвестиции государства" используются для учёта средств, вложенных соответственно родителями и государством в студента.

Счёт "Расходы на здоровье и безопасность" включает все расходы, связанные с улучшением здоровья и жизни студента в целом. Это расходы на визит к врачу или посещение тренажёрного зала.

Операции, связанные с покупкой одежды и обуви отражаются на двух счетах: "Одежда и обувь" и "Расходы на одежду и обувь".

На счёт "Одежда и обувь" мы записываем те вещи, которые имеют стоимость больше, чем 1 000 рублей. Таким образом, за счёт них увеличиваются активы. Одежда и обувь стоимостью меньше 1 000 рублей проходит по счёту "Расходы на одежду и обувь то есть сразу же списывается, так как предполагается, что она малоценна.

Счета "Баланс мобильного телефона" и "Доступные средства на карточке" отражают те денежные средства, которые расположены на балансе мобильного телефона и пластиковой карте соответственно.

Счёт "Скидки с закупок" показывает, какая сумма была сэкономлена в течение месяца за счет предоставления скидок, например, по карточке.

На счетах "Прочие расходы" и "Прочие доходы" отражаются те расходы и доходы, которые встречаются крайне редко.

Предназначение остальных счетов вытекает из названия: "Расходы на питание", "Расходы на транспорт", "Расходы на коммунальные услуги", "Расходы на бытовую химию", "Полученное вознаграждение", "Стипендия" и т. д.

Очевидно, что данный перечень счетов лишь примерный и в каждом конкретном случае он может быть сужен или дополнен какими-то счетами, например, "Заработная плата", "Расходы по страховке" и т. д.

Далее вводится Главный журнал, в который изо дня в день, с помощью перечисленных выше счетов, записываются все факты финансово-хозяйственной стороны жизни студента. Регистрация каждой операции начинается с даты, далее в графе "Описание" фиксируется корреспонденция счетов, то есть названия дебетуемого и кредитуемого счёта, и соответствующие суммы по дебету и кредиту. Ниже приведена часть Главного журнала с некоторыми проводками.

Главный журнал			
Дата	Описание	Дебет	Кредит
2009г.			
Май 1	Расходы на кабельное телевидение	37,50	
	Инвестиции родителей		37,50
	Понесены расходы на кабельное телевидение.		
1	Расходы на обучение	2 500	
	Инвестиции государства		2 500
	Понесены расходы на обучение.		
4	Расходы на развлечения и отдых	100	
	Касса		100
	Приобретен билет на КВН.		
4	Баланс мобильного телефона	50	
	Касса		50
	Пополнен баланс мобильного телефона.		
11	Расходы на бытовую химию	376	
	Скидки с закупок		37,60
	Касса		338,40
	Приобретена бытовая химия со скидкой по карте.		
12	Расходы на коммунальные услуги	667,425	
	Счета к оплате		667,425
	Получен счёт-квитанция за коммунальные услуги.		
15	Расходы на транспорт	20	
	Касса		20
	Понесены транспортные расходы на маршрутное такси.		

Дата	Описание	Дебет	Кредит
2009г.			
Май 16	Одежда и обувь	1 700	
	Сбережения		1 700
	Приобретена сумка.		
17	Расходы на питание	41	
	Инвестиции родителей		41
	Приобретены продукты питания.		
24	Расходы на косметику	270	
	Инвестиции родителей		270
	Приобретена косметика.		
25	Доступные средства на карточке	1 533,82	
	Стипендия		1 533,82
	Перечислена стипендия.		
30	Расходы на услуги связи	110	
	Инвестиции родителей		110
	Оплачены местные телефонные переговоры.		
30	Счета к оплате	667,425	
	Инвестиции родителей		667,425
	Оплачен счёт-квитанция за коммунальные услуги.		
30	Расходы по амортизации	760	
	Начисленный износ по технике		760
	Начислен износ по технике.		

Затем все операции переносятся в счета Главной книги, форма которой предусматривает наличие четырёх граф для записи в них дебетовых и кредитовых сумм, а также текущего сальдо (дебетового или кредитового). Далее показано заполнение Главной книги на примере счетов "Касса" и "Инвестиции родителей".

Главная книга				
Касса				
Дата	Дебет	Кредит	Сальдо	
			Дебет	Кредит
2009г.				
Май 1			102,60	
3	1 000		1 102,60	
4		20	1 082,60	
...		
27		20	362,90	
28		16	346,90	
29		16	330,90	

Главная книга				
Инвестиции родителей				
Дата	Дебет	Кредит	Сальдо	
			Дебет	Кредит
2009г.				
Май 1		7,50		7.50
1		37,50		45
1		142,50		187,50
...	
30		667,425		5 344,225
30		71,50		5 415,725
30		110		5 525,725

Полученные таким образом итоговые сальдо на счетах Главной книги в конце месяца переносятся соответствующим образом в Отчёт о прибылях и убытках и в Отчёт о движении денежных средств.

Отчёт о прибылях и убытках отражает все доходы и расходы студента, которые имели место в текущем месяце, даже если непосредственно денежные средства будут получены позже. Причём,

если доходы превышают расходы, то будет иметь место чистая прибыль, а если расходы превышают доходы, то чистый убыток.

**Отчёт о прибылях и убытках
за месяц, закончившийся 31 мая 2009г.**

Доходы		
Стипендия		1 533,82
Итого доходы		<u>1 533,82</u>
Расходы		
Расходы на питание		2 341,30
Расходы на бытовую химию	596,50	
Минус: Скидки с закупок	37,60	558,90
Расходы на транспорт		510
Расходы на развлечения и отдых		100
Расходы на Интернет		177,50
Расходы на кабельное телевидение		37,50
Расходы на коммунальные услуги		667,425
Расходы на обучение		2 500
Расходы на косметику	399	
Минус: Скидки с закупок	24,70	374,30
Расходы на одежду и обувь		299
Расходы на услуги связи	110	
Плюс: Баланс моб. телефона на 1 мая	21,26	
Пополнения баланса моб. телефона	50	
Минус: Баланс моб. телефона на 31 мая	36,27	144,99
Расходы по амортизации		960
Расходы на электроэнергию		71,50
Итого расходы		<u>8 742,415</u>
Чистый убыток		<u>7 208,595</u>

Отчёт о движении денежных средств отражает все денежные поступления и раскрывает их использование в течение месяца.

**Отчёт о движении денежных средств
за месяц, закончившийся 31 мая 2009г.**

Касса на 1 мая 2009г.		102,60
Сбережения на 1 мая 2009г.		12 600
Плюс		
Инвестиции родителей		1 500
Доступные средства на карточке		3 000
Итого		<u>4 500</u>
Минус		
Расходы на транспорт		460
Расходы на развлечения и отдых		100
Расходы на питание		323,30
Баланс мобильного телефона		50
Расходы на бытовую химию	376	
Минус: Скидки с закупок	37,60	338,40
Одежда и обувь		1 700
Итого		<u>2 971,70</u>
Касса на 31 мая 2009г.		330,90
Сбережения на 31 мая 2009г.		13 900

При составлении Баланса к счетам активов относятся все ценности, которые находятся в собственности студента. Это денежные средства на различных счетах ("Касса", "Сбережения", "Доступные средства на карточке", "Баланс мобильного телефона"), техника, одежда и обувь. А к счетам пассивов относятся инвестиции, полученные от родителей и государства, а также все прочие задолжности.

При подсчёте общей суммы, вложенной родителями, берутся итоговые сальдо на конец месяца, полученные на счёте "Инвестиции родителей" в мае, июне, июле и августе. Эти суммы равны соответственно 5 525,725, 2 966,50, 5 326,91 и 8 276,025. Между ними вычисляется среднее арифметическое. Оно равно 5 523,79. Это значение умножается на количество прожитых месяцев (237) и

таким образом получается оценка денежных средств, вложенных родителями в студента в течение всей жизни. То есть на 31 апреля 2009г. вложения родителей в студента составили 1 309 138,23.

При подсчёте общей суммы, вложенной государством суммируются расходы государства на образование в школе и в университете и расходы государства на медицинское обслуживание. Эти данные получаются из следующих соображений:

1. в 2008г. расходы на одного ученика в среднем по России составили 37 938 рублей, т.е. можно предположить, что за 10 лет обучения эта сумма составит 379 380 рублей [3];
2. расходы на образование в университете были взяты в размере 2 500 рублей в месяц(примерная оплата образовательных услуг математического факультета) или 80 000 рублей за 32 месяца обучения;
3. в 2009г. государство потратит на одного пациента в среднем 7 633 рубля [4], таким образом за 19 лет эта сумма составит 145 027 рублей.

Таким образом, получают данные в балансе на 31 апреля 2009г., которые имеют большую погрешность из-за достаточно грубой оценки, не учитывающей дисконт и некоторые другие факторы. Начиная с мая, во все документы вносились более точные данные, так как они были получены в результате ведения финансовой отчетности.

Очевидно, студент не может заработать достаточно средств, чтобы покрыть все свои пассивы, так что при вычитании пассивов из активов получается капитал со знаком минус. Для получения равенства в балансовом уравнении используется такое понятие как "человеческий капитал". Человеческий капитал определяется как совокупность знаний, умений, навыков, используемых для удовлетворения многообразных потребностей человека и общества в целом. Человеческий капитал нужно отнести к счетам

активов студента. Величина капитала даёт оценку тех денежных средств, вложенных как инвестиционные ресурсы, предполагающие отдачи в последующем периоде трудовой деятельности.

**Баланс
31 мая 2009г.**

Активы

Человеческий капитал		***
Касса		330,90
Сбережения		13 900
Доступные средства на карточке		106,31
Баланс мобильного телефона		36,27
Техника	53 864	
Минус: Начисленный износ по технике	28 024	25 840
Одежда и обувь	36 700	
Минус: Начисл. износ на одежду и обувь	200	36 500
Итого активы		76 713,48

Пассивы

Инвестиции родителей	1314663,955
Инвестиции государства	606 907
Итого пассивы	1921570,955

Хотя зачастую студент не задумывается о том, как и из чего строится его бюджет, насколько грамотно он распоряжается имеющимися у него ресурсами, всё же проследить за этими моментами, раскрыть содержание деятельности, сделать её прозрачной является чрезвычайно полезным. То, что это возможно показано в данной статье. Благодаря чему можно сделать вывод о том, что бюджетом студента можно управлять.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Резник С. Д., Егорова Н. Ю. Бюджет современной семьи: можно ли им управлять? // Экономическая наука современной России. М.: ЭНСР № 1 (40) 2008г.
- [2] Покудов А. В. Личные финансы. Секреты управления и индивидуальный финансовый план – М.: Эксмо, 2007.–176с.
- [3] РИА Новости Центральный округ, www.center.rian.ru/society/20090413/81871172.html
- [4] Невинная И. 7600 рублей на пациента потратит государство на медицинскую помощь в следующем году. // Российская газета – Федеральный выпуск № 4812 от 12 декабря 2008г.

УДК 517.9

ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

Костригина О. С. (Уфа, УГАТУ) ²

Введение

Один из способов классификации интегрируемых по Дарбу гиперболических систем уравнений

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (u_{xy}^i = F^i, \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

основан на изучении структуры характеристических алгебр Ли этих систем. Впервые этот подход был предложен в работах [1], [2] для экспоненциальных систем вида

$$u_{xy} = a_{i1}e^{u^1} + \dots + a_{in}e^{u^n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

²Работа поддержана грантом РФФИ № 08-01-00440-а.

Введем набор независимых переменных

$$u_1 = u_x, \bar{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \bar{u}_2 = u_{yy}, \dots$$

и обозначим через $\bar{D}(D)$ — оператор полного дифференцирования по переменной $y(x)$.

Определение 1. Функция $W(x, y, u, u_1, u_2, \dots, u_m)$ называется x -интегралом порядка m системы (1), если $\bar{D}(W) = 0$. Аналогично, y -интеграл m -го порядка — это функция $\bar{W}(x, y, u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$, удовлетворяющая соотношению $D(\bar{W}) = 0$.

X -интегралы W^1, W^2, \dots, W^k называются независимыми, если $D^i W^j$ функционально независимы. В статье [3] показано, что максимальное число независимых x -интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 2. Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует максимальное число независимых x - и y -интегралов.

Определим x - и y -характеристические алгебры Ли системы уравнений (1). Пусть F — пространство локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $\bar{u}_1, x, y, u, u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$. Оператор \bar{D} на функциях из F действует по правилу

$$\bar{D} = \bar{u}_2^i X_i + X_{n+1},$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_1^i \frac{\partial}{\partial u_i} + F^i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + D(F^i) \frac{\partial}{\partial u_2^i} + \dots + D^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial u_k^i} + \dots$$

X -характеристическая алгебра Ли уравнений (1) есть алгебра Λ , порожденная векторными полями X_1, X_2, \dots, X_{n+1} . Аналогично определяется y -характеристическая алгебра Ли $\bar{\Lambda}$.

Классификация нелинейных гиперболических систем уравнений интегрируемых по Дарбу основана на следующем критерии (см. [4]).

Теорема 1. Система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, если и только если, x - и y - характеристические алгебры Ли Λ и $\bar{\Lambda}$ конечномерны. При этом если n_k — число x -интегралов k -го порядка, $k = 1, 2, \dots, m$, то

$$\dim \Lambda = n + 1 + \sum_{i=1}^m i n_i.$$

Рассмотрим линейризацию системы уравнений (1)

$$v_{xy} = F_u v + F_{u_x} v_x + F_{u_y} v_y. \quad (2)$$

Следствие 3. Если система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, то характеристические алгебры линейризованного уравнения (2) конечномерны.

В работе [4] была проведена классификация интегрируемых систем (1) с полным набором интегралов первого порядка, а также двухкомпонентных систем уравнений с тремя интегралами первого порядка и одним второго.

В настоящей работе рассматриваются системы двух уравнений вида

$$\begin{cases} u_{xy} = a(u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1) \\ v_{xy} = b(u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1) \end{cases} \quad (3)$$

с двумя интегралами первого и двумя интегралами второго порядка

$$\omega = \omega(u, v, u_1, v_1), \quad W = W(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2), \quad (4)$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(u, v, \bar{u}_1, \bar{v}_1), \quad \bar{W} = \bar{W}(u, v, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2). \quad (5)$$

При этом для решения задачи классификации исследуется структура характеристической алгебры линейризации системы уравнений (3).

§ 1. Характеристическая алгебра линеаризованной системы

Рассмотрим линеаризацию системы уравнений (3)

$$\begin{cases} p_{xy} = a_u p + a_v q + a_{u_1} p_1 + a_{v_1} q_1 + a_{\bar{u}_1} \bar{p}_1 + a_{\bar{v}_1} \bar{q}_1 \\ q_{xy} = b_u p + b_v q + b_{u_1} p_1 + b_{v_1} q_1 + b_{\bar{u}_1} \bar{p}_1 + b_{\bar{v}_1} \bar{q}_1. \end{cases} \quad (6)$$

X –характеристическая алгебра Ли системы уравнений (6) есть алгебра A , порожденная векторными полями

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial y} + (a_u p + a_v q + a_{u_1} p_1 + a_{v_1} q_1) \frac{\partial}{\partial p} + (b_u p + b_v q + b_{u_1} p_1 + b_{v_1} q_1) \frac{\partial}{\partial q} + \dots, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial p} + a_{\bar{u}_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + b_{\bar{u}_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial q} + a_{\bar{v}_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + b_{\bar{v}_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots. \end{aligned}$$

Приведем важное для дальнейшего утверждение.

Лемма 3. Пусть

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

где $\delta_i, \gamma_i, i = 1, 2, \dots$ есть функции переменных $u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \dots$. Тогда соотношение

$$[D, Z] = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда $Z = 0$.

Если система уравнений (6) имеет x -интегралы первого и второго порядка, тогда размерность характеристической алгебры A равна 4, что в свою очередь эквивалентно одному из следующих условий

$$X_5 = \alpha X_4, \quad X_6 = [X_1, X_4] = \beta X_4, \quad (7)$$

либо

$$X_4 = 0, \quad \tilde{X}_6 = [X_1, X_5] = \delta X_5, \quad (8)$$

где

$$X_4 = [X_1, X_2], \quad X_5 = [X_1, X_3],$$

а функции α , β , δ есть функции переменных $u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \dots$

Или, согласно лемме 3 имеем

$$\begin{aligned} [X_5, D] &= \alpha[X_4, D] - D(\alpha)X_4, \\ [X_6, D] &= \beta[X_4, D] - D(\beta)X_4, \end{aligned} \quad (9)$$

либо

$$[X_4, D] = 0, \quad [\tilde{X}_6, D] = \delta[X_5, D] - D(\delta)X_5. \quad (10)$$

Для удобства введем обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= \bar{D}(a_{\bar{u}_1}) - a_u - a_{\bar{u}_1}a_{u_1} - b_{\bar{u}_1}a_{v_1}, \\ A_2 &= \bar{D}(a_{\bar{v}_1}) - a_v - a_{\bar{v}_1}a_{u_1} - b_{\bar{v}_1}a_{v_1}, \\ B_1 &= \bar{D}(b_{\bar{u}_1}) - b_u - a_{\bar{u}_1}b_{u_1} - b_{\bar{u}_1}b_{v_1}, \\ B_2 &= \bar{D}(b_{\bar{v}_1}) - b_v - a_{\bar{v}_1}b_{u_1} - b_{\bar{v}_1}b_{v_1}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить праведливость следующих соотношений

$$\begin{aligned} [X_1, D] &= (a_u p + a_v q + a_{u_1} p_1 + a_{v_1} q_1)X_2 + (b_u p + b_v q + b_{u_1} p_1 + b_{v_1} q_1)X_3, \\ [X_2, D] &= a_{\bar{u}_1}X_2 + b_{\bar{u}_1}X_3, \\ [X_3, D] &= a_{\bar{u}_1}X_2 + b_{\bar{u}_1}X_3, \\ [X_4, D] &= A_1X_2 + B_1X_3 + a_{\bar{u}_1}X_4 + b_{\bar{u}_1}X_5, \\ [X_5, D] &= A_2X_2 + B_2X_3 + a_{\bar{v}_1}X_4 + b_{\bar{v}_1}X_5, \\ [X_6, D] &= (\bar{D}(A_1) - a_{u_1}A_1 - a_{v_1}B_1)X_2 + (\bar{D}(B_1) - b_{u_1}A_1 - b_{v_1}B_1)X_3 + \\ &+ (A_1 + \bar{D}(a_{\bar{u}_1}) + X_1(\alpha)b_{\bar{u}_1})X_4 + (B_1 + \bar{D}(a_{\bar{u}_1}))X_5 + (a_{\bar{u}_1} + \alpha b_{\bar{u}_1})X_6, \\ [\tilde{X}_6, D] &= (\bar{D}(A_2) - a_{u_1}A_2 - a_{v_1}B_2)X_2 + (\bar{D}(B_2) - b_{u_1}A_2 - b_{v_1}B_2)X_3 + \\ &+ (B_2 + \bar{D}(b_{\bar{v}_1}))X_5 + b_{\bar{v}_1}\tilde{X}_6. \end{aligned}$$

Подставляя последние равенства в формулы (9), (10) находим, что условие (7) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}
A_2 &= \alpha A_1, \quad B_2 = \alpha B_1, \\
\bar{D}(A_1) - a_{u_1} A_1 - a_{v_1} B_1 &= \beta A_1, \\
\bar{D}(B_1) - b_{u_1} A_1 - b_{v_1} B_1 &= \beta B_1, \\
a_{\bar{v}_1} + \alpha b_{\bar{v}_1} &= \alpha(a_{\bar{u}_1} + \alpha b_{\bar{u}_1}) - D(\alpha), \\
A_1 + \bar{D}(a_{\bar{u}_1}) + \alpha(B_1 + \bar{D}(b_{\bar{u}_1})) + \bar{D}(\alpha)b_{\bar{u}_1} &= -D\beta, \\
\alpha &= \alpha(u, v, \bar{u}_1, \bar{v}_1), \quad \beta = \beta(u, v, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2), \\
A_1 \neq 0, \quad A_2 \neq 0, \quad B_1 \neq 0, \quad B_2 \neq 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

а условие (8) - системе

$$\begin{aligned}
A_1 = B_1 = b_{\bar{u}_1} &= 0, \\
\bar{D}(A_2) - a_{u_1} A_2 - a_{v_1} B_2 &= \delta A_2, \\
\bar{D}(B_2) - b_{u_1} A_2 - b_{v_1} B_2 &= \delta B_2, \\
B_2 + \bar{D}(b_{\bar{v}_1}) &= -D\delta, \\
\delta &= \delta(u, v, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2).
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если система уравнений (3) обладает x -интегралами первого и второго порядка*

$$\omega = \omega(u, v, u_1, v_1), \quad W = W(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2),$$

то правые части системы уравнений (3) удовлетворяют либо соотношениям (11), либо соотношениям (12).

Замечание. Необходимые условия существования y -интегралов первого и второго порядка у системы (3) получаются из условий существования x -интегралов заменой $u_i \rightarrow \bar{u}_i, v_i \rightarrow \bar{v}_i, \bar{u}_i \rightarrow u_i, \bar{v}_i \rightarrow v_i$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Анатолию Васильевичу Жиберу за ценные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана, Уфа: Препринт БФ АН СССР, 1981.
- [2] *Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б.*, Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
- [3] *Гурьева А. М., Жибер А. В.*, О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2 (13). С. 26–33.
- [4] *Жибер А. В., Костригина О. С.*, Точно интегрируемые модели волновых процессов // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 7 (25). С. 83–89.

УДК 532.5

ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ, ЧАСТИЧНО СОСТОЯЩИМИ ИЗ ИНЕРТНОГО ГАЗА

**Кучер А.М. (ИМиЕН, СГПА им. З.Биишевой, г.
Стерлитамак)**

**Гималтдинов И.К. (ИМиЕН, СГПА им. З.Биишевой,
филиал ГОУ ВПО УГАТУ, г. Стерлитамак)**

Рассмотрены особенности эволюции детонационных волн в пузырьковой жидкости, содержащей пузырьки, часть которых состоит из горючей смеси газов, а другая часть из инертного газа. Изучена динамика инертных пузырьков на фоне детонационной волны, возникающей за счет пузырьков с горючей газовой смесью.

В последнее время представляет большой интерес проблема реализации высоких температур в газе, помещенного в жидкости в виде пузырьков [1]. Это связано с анализом возможности реализации высокотемпературных плазмохимических реакций при волновом воздействии на изначально холодные системы. Известны два способа возбуждения волн давления для сильного сжатия пузырьков находящихся в жидкости. Первый способ - воздействие граничным давлением, возникающим за счет разрыва мембраны между камерой высокого давления и рабочим участком ударной трубы. Кроме этого, возможно инициирование волны действием жесткого ударника на границу пузырьковой жидкости. Такие способы пригодны только в том случае, когда в объеме "чистой" жидкости находится одиночный пузырек или одиночный пузырьковый кластер. В случае, когда пузырьки распределены по всему объему жидкости, первоначально инициированная волна давления быстро затухает из-за неравновесного теплообмена и вязкости [2]. Поэтому достаточно сильное сжатие пузырьков может происходить только на участках близких к границам возбуждающим волны, а не во всем объеме.

В данной работе представлены исследования по сжатию пузырьков с инертным газом детонационной волной [5] возникающей и распространяющейся в жидкости за счет содержания пузырьков с горючей смесью. Также взрывчатые пузырьки при этом являются своеобразным распределенным в объеме "прессом" сжимающим инертные пузырьки во всей области.

1. Постановка задачи. Рассмотрим одномерные волновые движения пузырьковой среды при следующих допущениях. Смесью является монодисперсной, т.е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одинакового радиуса. В пузырьках при достижении критической температуры T_* (температура воспламенения газа) происходит мгновенная реакция, сопровождающаяся тепловыделением, и температура в них мгновенно увеличивалась

на величину ΔT , соответствующей теплотворной способности горючей газовой смеси в пузырьках [1]. В рамках принятых допущений, запишем систему макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков при отсутствии их дробления, импульсов и давления в пузырьках:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 (i = l, g), \quad \frac{dn_j}{dt} + n_j \frac{\partial v}{\partial x} = 0 (j = 1, 2) \\ \rho_l^0 \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0 \\ \frac{dp_{gj}}{dt} &= -\frac{3\gamma_j p_{gj}}{a_j} w_j - \frac{3(\gamma_j - 1)}{a_j} q_j \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

где a_j – радиус пузырьков, p_l – давление несущей жидкости, ρ_i^0 – истинные плотности фаз, α_i – объемные содержания фаз, n – концентрация пузырьков, v – скорость, γ_j – показатели адиабаты для газа, q_j – интенсивности теплообмена или тепловой поток от жидкости к газу, отнесенный к единице площади межфазной поверхности. Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз. Дополнительные нижние индексы $j = 1, 2$ соответствуют взрывчатой и инертной газовой фазе.

При описании радиального движения, будем полагать [3], что $w_j = w_{Aj} + w_{Rj}$,

$$a_j \frac{dw_{Rj}}{dt} + \frac{3}{2} w_{Rj}^2 + 4\nu_l \frac{w_{Rj}}{a_j} = \frac{p_{gj} - p_l}{\rho_l^0}, \quad w_{Aj} = \frac{p_{gj} - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_{gj}^{1/3}}$$

где ν_l – вязкость жидкости, C_l – скорость звука в "чистой" жидкости.

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_{gj} = \rho_{gj}^0 B T_{gj}$$

где B – газовая постоянная. Здесь и в дальнейшем индекс 0 внизу относится к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток q_g задается приближенным конечным соотношением [2]

$$q_{gj} = \text{Nu}_{gj} \lambda_{gj} \frac{T_{gj} - T_0}{2a_j}, \quad \frac{T_{gj}}{T_0} = \frac{p_{gj}}{p_0} \left(\frac{a_j}{a_{0j}} \right)^3$$

$$\text{Nu}_{gj} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_{gj}}, & \text{Pe}_{gj} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe}_{gj} < 100, \end{cases} \quad \text{Pe}_{gj} = 12(\gamma_{gj} - 1) \frac{T_0}{|T_{gj} - T_0|} \frac{a_j |w_j|}{k_{gj}}$$

$$k_{gj} = \frac{\lambda_{gj}}{c_{gj} \rho_{gj}},$$

$T_0 = \text{const}$ – температура жидкости, Nu_{gj} и Pe_{gj} – числа Нуссельта и Пекле, k_{gj} – коэффициент температуропроводности газов, c_{gj} и λ_{gj} – теплоемкость и теплопроводность газов.

2. Методика численного расчета. Для численного анализа задачи об эволюции детонационных волн в многокомпонентной пузырьковой жидкости удобнее пользоваться системой уравнений, приведенной в разд. 1, записанной в лагранжевых переменных. В качестве лагранжевой координаты берется эйлерова координата в начальный момент времени. Тогда после некоторых преобразований система уравнений, приведенная в разд. 1, запишется в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{J \rho_l^0} \left(-\frac{\partial p_l}{\partial x_0} \right), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial p_l}{\partial t} = \frac{C_l^2 \rho_l^0}{(1 - \alpha_{g1} - \alpha_{g2})} \left(\frac{3\alpha_{g1} w_1}{a_1} + \frac{3\alpha_{g2} w_2}{a_2} - \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial p_{gj}}{\partial t} = -\frac{3\gamma_j p_{gj}}{a_j} w_j - \frac{3(\gamma_j - 1)}{a_j} q_j, \quad \frac{\partial a_j}{\partial t} = w_j = w_{Aj} + w_{Rj} (j = 1, 2)$$

$$a_j \frac{dw_{Rj}}{dt} + \frac{3}{2} w_{Rj}^2 + 4\nu_l \frac{w_{Rj}}{a_j} = \frac{p_{gj} - p_l}{\rho_l^0}, \quad w_{Aj} = \frac{p_{gj} - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_{gj}^{1/3}}$$

$$\frac{\partial \alpha_{gj}}{\partial t} = \frac{3\alpha_{gj}}{a_j} w_j - \frac{\alpha_{gj}}{J} \frac{\partial J}{\partial t}$$

$$p_l = p_0 + C_l^2(\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), p_{gj} = \rho_{gl}^0 B T_{gj}$$

$$q_{gj} = \text{Nu}_{gj} \lambda_{gj} \frac{T_{gj} - T_0}{2a_j}, \frac{T_{gj}}{T_0} = \frac{p_{gj}}{p_0} \left(\frac{a_j}{a_{0j}} \right)^3$$

$$\text{Nu}_{gj} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_{gj}}, & \text{Pe}_{gj} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe}_{gj} < 100, \end{cases} \quad \text{Pe}_{gj} = 12(\gamma_{gj} - 1) \frac{T_0}{|T_{gj} - T_0|} \frac{a_j |w_j|}{k_{gj}}$$

$$k_{gj} = \frac{\lambda_{gj}}{c_{gj} \rho_{gj}},$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial x_0}, \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x_0}$$

Для аппроксимации дифференциальных уравнений используется равномерная сетка с узлами в точках

$$(x_i, t_j)$$

$$x_{i+1} = x_i + h, i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$x_0 = 0, x_N = M, t_{j+1} = t_j + \tau,$$

$$t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots$$

3. Результаты расчётов. Детонационная волна инициируется П-образным изменением давления на границе $x_0 = 0$, которое задаётся следующим выражением:

$$p_0(t) = \begin{cases} p_0 + \Delta p_0, & t < t_* \\ p_0, & t \geq t_* \end{cases}$$

На рис. 1 представлены эпюры давления, радиуса пузырьков и температуры газа для моментов времени 200 мкс (1) и 350 мкс (2). На фрагменте а) представлены распределения давления по координате x . Видно, что детонационная волна, распространяющаяся

по многокомпонентной пузырьковой жидкости, имеет вид стационарного солитона. К моменту времени 200 мкс детонационная волна выходит на стационарный режим, достигая своей "крейсерской" скорости и амплитуды. На фрагменте б) жирными и тонкими линиями представлены эпюры для радиусов пузырьков с активным и инертным газами внутри пузырьков, на фрагменте в) также жирными и тонкими линиями показаны соответственно температура газа в пузырьках с взрывчатым газом и в пузырьках с инертным газом. Из фрагмента б) видно, что в детонационной волне радиус активных пузырьков уменьшается примерно в три раза по сравнению с первоначальным радиусом и эти пузырьки воспламеняются из-за повышения давления и температуры. На этом фоне пузырьки с инертным газом продолжают сжиматься и в момент максимального сжатия достигают почти десятикратного уменьшения радиуса по сравнению с первоначальным. Из фрагмента в) следует, что температура газа при этом в инертных пузырьках растет до 3300 К.

Расчетные осциллограммы для датчика D1 расположенного в середине расчетной области представлены на рис. 2. На фрагментах а) и б) представлены осциллограммы давления, на фрагментах в) и г) - осциллограммы относительных радиусов пузырьков. Здесь, жирная линия соответствует радиусу активных пузырьков, тонкая линия - инертных. Из фрагментов а) и б) видно, что с увеличением начального радиуса взрывчатых пузырьков (фрагмент а)) происходит уширение детонационного солитона. Если при $a_{g1}^{(0)} = 1.5$ мм протяженность детонационного солитона составляет около 70 мкс, то при $a_{g1}^{(0)} = 0.25$ мм около 30 мкс. Из фрагмента в) следует, что в детонационной волне инертные пузырьки осциллируют. Это происходит потому, что при таком значении исходного радиуса активных пузырьков ($a_{g1}^{(0)} = 1.5$ мм) в многокомпонентной пузырьковой жидкости формируется достаточно "толстая" детонационная волна, временная протяженность

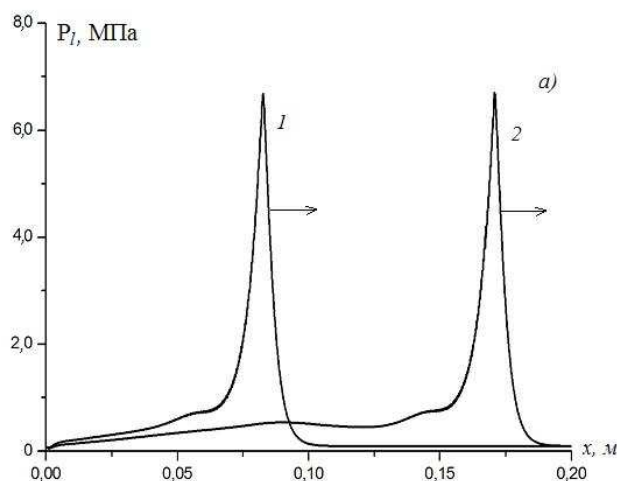
которой многократно превышает период $t_m^{(2)}$ собственных колебаний пузырьков (для представленного на фрагменте в) примерно он составляет $t_m^{(2)} \approx 15$ мкс). Кроме этого, уменьшение периода собственных колебаний инертного пузырька связано еще и с тем, что инертный пузырек находится в зоне более поджатого фонового давления вблизи пикового значения детонационной волны. Из фрагмента г) видно, что, несмотря на то, что характерная протяженность детонационного солитона (30 мкс) намного меньше, чем период собственных колебаний пузырьков, из-за того, что за детонационным солитоном идет "хвостовая" волна с более плавным снижением фонового давления, инертные пузырьки успевают совершать колебания с максимальным уменьшением радиуса почти в три раза.

На рис. 3 представлены: эпюры давления; осциллограммы давления и радиуса инертных пузырьков, соответствующие показаниям датчика D, расположенного на границе $x_0 = L_x$ (являющейся жесткой стенкой, $v = 0$). Расчетная область поделена на три зоны. Зона 1 состоит из смеси жидкости и пузырьков с взрывчатым газом с объемной концентрацией газа $\alpha_{g1}^{(0)} = 0.01$ (ацителенокислородная смесь), зона 2 – чистая жидкость, зона 3 состоит из жидкости и пузырьков с инертным газом с объемной концентрацией газа $\alpha_{g2}^{(0)} = 0.001$ (воздух). Из фрагмента а) видно, что при прохождении детонационной волны через чистую жидкость, увеличивается ее амплитуда с 9 МПа до 16 МПа, а при достижении волной твердой стенки амплитуда детонационного солитона достигает значения 25 - 26 МПа. При этом около жесткой стенки пузырьки с инертным газом сжимаются в 10 раз.

4. Заключение. Исследована динамика детонационных волн в многокомпонентной пузырьковой жидкости, содержащей пузырьки как активного (взрывчатого), так и инертного газов. Показано, что под воздействием детонационной волны инертные пузырьки с первоначальным радиусом 1 мм могут сжиматься до 10 раз.

Температура в инертном газе повышается при этом более чем в 12 раз по сравнению с первоначальной. Установлено, что если в многокомпонентной пузырьковой жидкости формируется детонационная волна, временная протяженность которой многократно превышает период собственных колебаний пузырьков с инертным газом, то под воздействием детонационной волны инертные пузырьки сжимаются несколько раз. Установлено, что более эффективное сжатие можно осуществить воздействием на инертные пузырьки, расположенные около жесткой стенки, постдетонационными волнами, это связано, во-первых, с тем, что амплитуда у постдетонационной волны более чем в два раза больше амплитуды детонационных волн, и, во-вторых, при отражении от твердой стенки постдетонационной волны их амплитуда еще более возрастает и тем самым можно эффективно сжимать пузырьки, находящиеся около стенки.

Работа поддержана грантом МД – 280.2008.1.



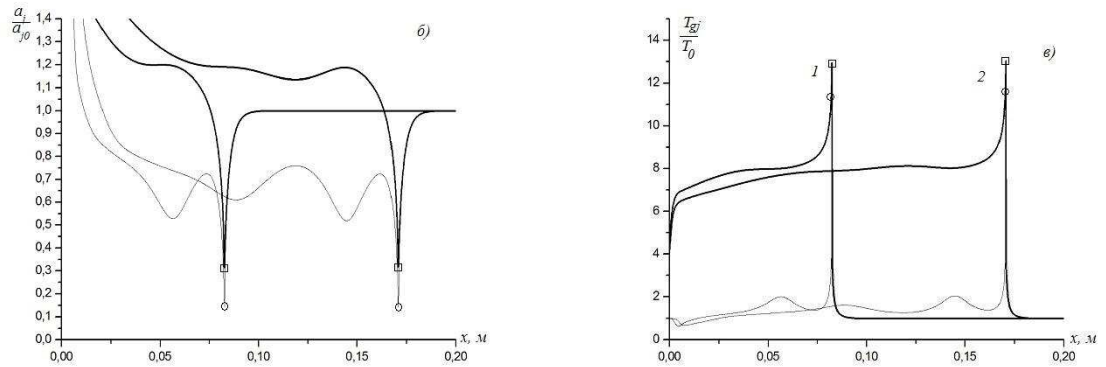


Рис. 1. Эпюры давления, относительного радиуса пузырьков и температуры газа внутри пузырьков. Параметры системы: $\alpha_{g1}^{(0)} = 0.01$, $\alpha_{g2}^{(0)} = 0.01$, $a_{g1}^{(0)} = a_{g2}^{(0)} = 1$ мм, газ: ацетилено-кислородная смесь ($C_2H_2 + 2.5O_2$): $\rho_{g01}^{(0)} = 1.26$ кг/м³, $\gamma_{01} = 1.35$, $\lambda_{01} = 2.49 \cdot 10^{-2}$ Дж/(м·с·град), $c_{g1} = 1.14 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), $T_* = 1000$ К, $\Delta T = 3200$ К, инертные – воздух: $\rho_{g02}^{(0)} = 1.21$ кг/м³, $\gamma_{02} = 1.4$, $\lambda_{02} = 2.63 \cdot 10^{-2}$ Дж/(м·с·град), $c_{g2} = 1.007 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град) жидкость – смесь глицерина с водой: $\rho_{l0}^0 = 1126$ кг/м³, $\nu_l = 0.75 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $C_l = 1700$ м/с; $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 300$ К. Символами \diamond и \odot отмечены соответственно значения радиусов и пассивных пузырьков в момент максимального сжатия.

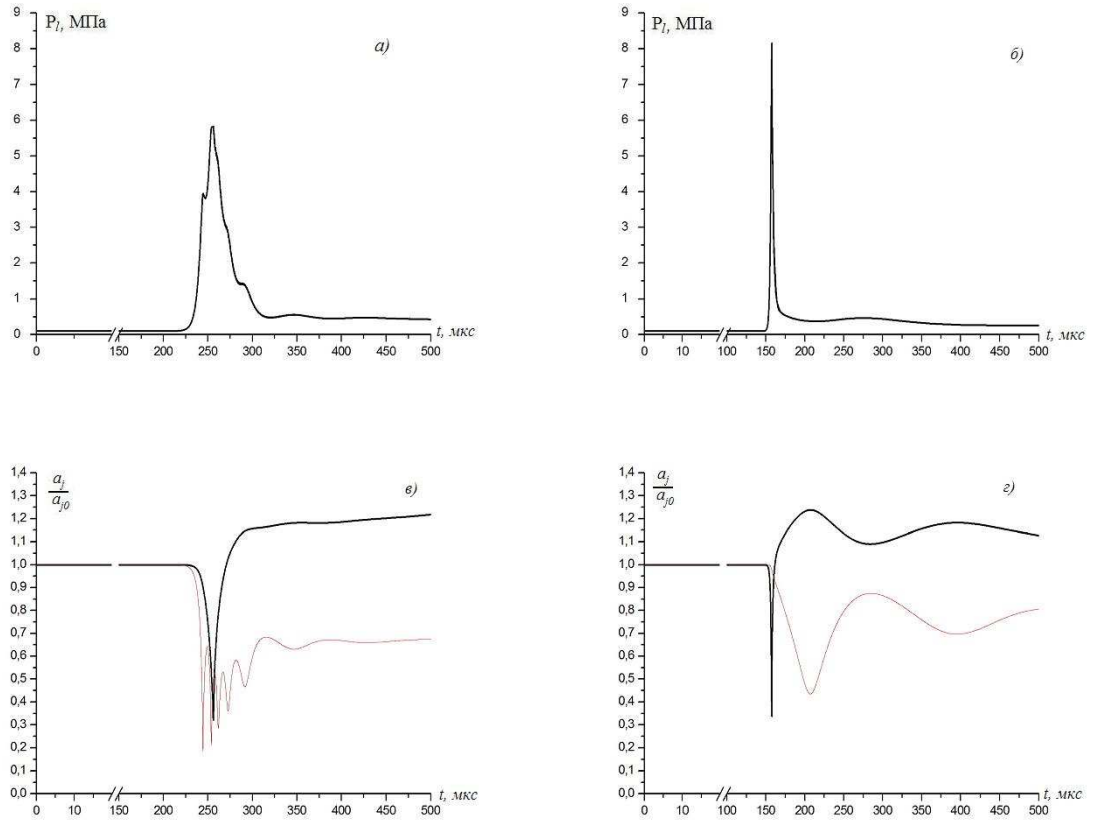


Рис. 2. Осциллограммы для давления и радиуса пузырьков построенные по показаниям датчика D1, расположенного в середине расчетной области. Фрагменты а и в соответствуют $\alpha_{g1}^{(0)} = 0.01$, $\alpha_{g2}^{(0)} = 0.01$, $a_{g1}^{(0)} = 1.5$ мм, $a_{g2}^{(0)} = 0.5$ мм; фрагменты б и г – $\alpha_{g1}^{(0)} = 0.01$, $\alpha_{g2}^{(0)} = 0.01$, $a_{g1}^{(0)} = 0.25$ мм, $a_{g2}^{(0)} = 2$ мм. Остальные параметры такие же как для рис. 1.

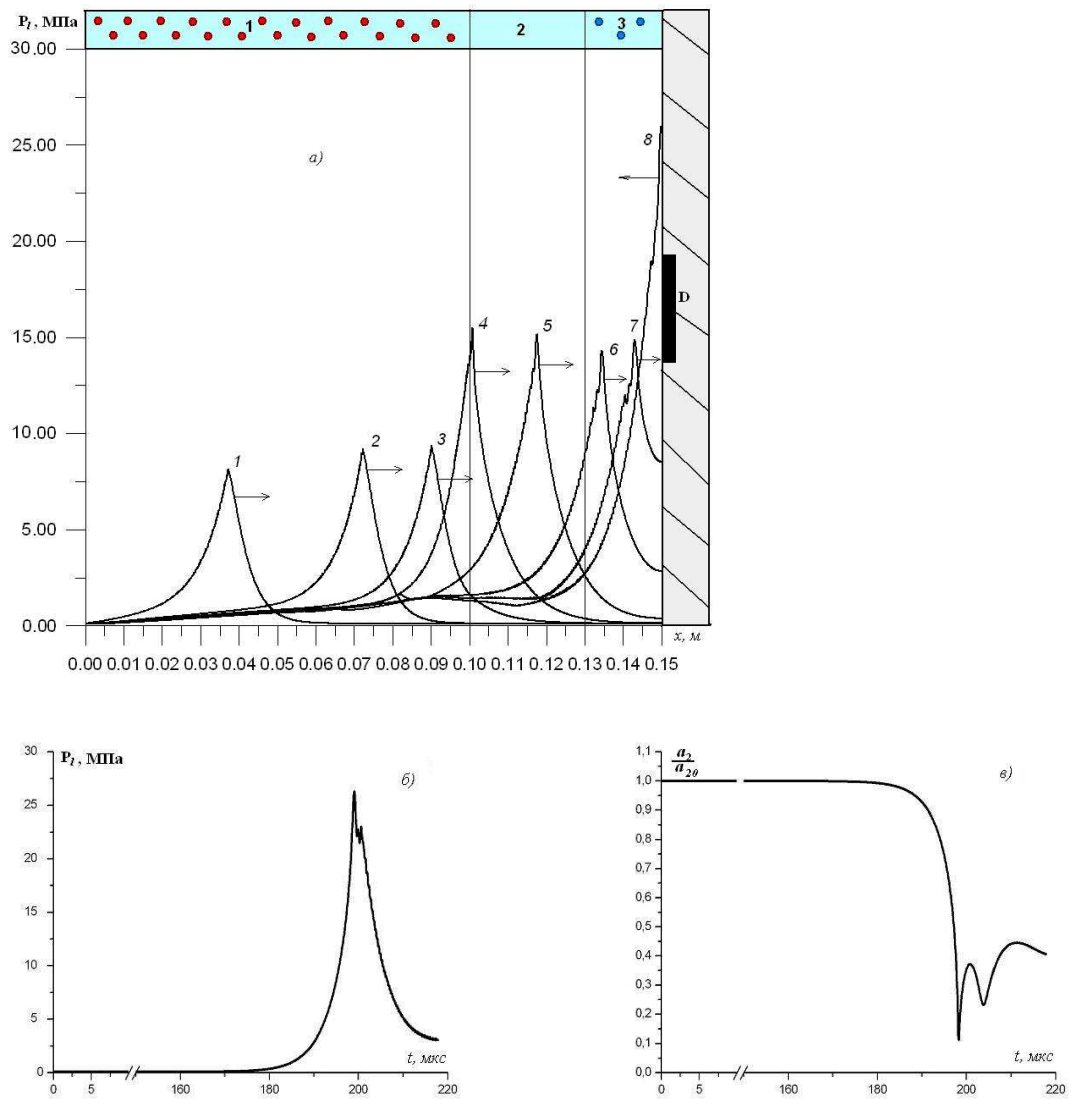


Рис. 3. Динамика детонационной волны и осциллограммы для давления и радиуса инертных пузырьков, построенные по показаниям датчика D, расположенного на жесткой стенке. Параметры среды: $\alpha_{g1}^{(0)} = 0.01$, $\alpha_{g2}^{(0)} = 0.001$, $a_{g1}^{(0)} = a_{g2}^{(0)} = 1$ мм. Остальные параметры такие же как для рис. 1. Линии на фрагменте а) соответствуют моментам времени 1 – 0.1 мс, 2 – 0.14 мс, 3 – 0.16 мс, 4

– 0.17 мс, 5 – 0.18 мс, 6 – 0.19 мс, 7 – 0.195 мс, 8 – 0.199 мс.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш., Юдин А.В.* Нелинейные колебания пузырькового кластера в сферическом резонаторе // Теплофизика высоких температур. -2002. Т.40, №2. -С.284-291.
- [2] *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. 1987, Т. 2, 368 ст.
- [3] *Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К.* Волны в пузырьковой системе при наличии химических реакций в газовой фазе //ФГВ.-1989, №6.-С.14-22.
- [4] *Нигматуллин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К.* Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т.304.№5.С.1077-1081.
- [5] *Сычев А.И.* Влияние размера пузырьков на характеристики волны детонации // ФГВ. 1995. Т.31, №5.С.83-91.
- [6] *Ляпидевский В.Ю.* Структура детонационных волн в многокомпонентных пузырьковых средах //ФГВ.-1997, №3.-С.104-113.
- [7] *Сычев А.И.* детонационные волны в многокомпонентных пузырьковых смесях // ФГВ. 1993. Т.29, № 1.С.110-117.

УДК 534.112

НАХОЖДЕНИЕ ПОЛИНОМА ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО
ПАРАМЕТРА В СЛУЧАЕ НЕРАСПАДАЮЩИХСЯ КРАЕВЫХ
УСЛОВИЙ

Кумушбаев Р.Р. (Уфа, БашГУ)

На практике часто встречаются такие ситуации, когда спектральный параметр входит в краевое условие.

Рассмотрим следующую задачу.

$$y'' + p_1(x, \lambda)y' + p_2(x, \lambda)y = 0, \quad (1)$$

$$a(\lambda)y'(0) + b(\lambda)y(0) = 0, \quad (2)$$

$$c(\lambda)y'(1) + d(\lambda)y(1) = 0, \quad (3)$$

где λ - спектральный параметр, $x \in [0, 1]$

$a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$, $d(\lambda)$ - функции коэффициенты которых не обращаются в нуль одновременно.

В работе [1] сформулирована следующая задача. Пусть $d(\lambda)$ является многочленом следующего вида:

$d(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \dots + d_{m-1}\lambda^{m-1}$, требуется найти k из m коэффициентов d_0, d_1, \dots, d_{m-1} , если остальные $m - k$ коэффициентов известны. Функции $p_1(x, \lambda)$, $p_2(x, \lambda)$, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ - является заданными, известно так же k ненулевых попарно различных собственных значений задачи (1) – (3).

Была сформулирована и доказана также следующая теорема. Если $p_1(x, \lambda)$, $p_2(x, \lambda)$ - непрерывно дифференцируемы по λ и

по x , а функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ - непрерывно дифференцируемые функции по λ , то для $\forall k$ ненулевых попарно различных собственных значений λ_i , где $i = 1, \dots, k$ задачи (1) – (3) для которых $c(\lambda_i) \neq 0$ однозначно определяет k последовательных коэффициентов d_j , где $j = s + 1, \dots, s + k$, коэффициентов краевых условий (3).

В работах [2, 3] показано, что произвольный полином от спектрального параметра степени $n - 1$ из краевого условия задачи Штурма-Лиувилля однозначно восстанавливается по n ненулевым попарно различным собственным значениям. Однако в [2, 3] задача нахождения полинома от спектрального параметра решалась лишь в случае, когда условия задачи Штурма-Лиувилля являются распадающимися. Случай нераспадающихся краевых условий для данной обратной задачи не рассматривался. В настоящей статье рассматривается спектральная задача с нераспадающимися краевыми условиями.

$$-y'' = \lambda^2 y, \quad (4)$$

$$U_1(y) = y'(0) + y(1) = 0, \quad (5)$$

$$U_2(y) = y'(1) + H(\lambda)y(1) = 0, \quad (6)$$

где $H(\lambda) = H_0 + H_1\lambda + H_2\lambda^2 + \dots + H_{n-1}\lambda^{n-1}$. Для этой спектральной задачи показывается, что полином $n - 1$ порядка можно однозначно восстановить по собственным ненулевым попарно различным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \neq 0$. А именно, верна следующая теорема.

Теорема. Полином $H(\lambda)$ (коэффициенты H_0, H_1, \dots, H_{n-1}) из краевого условия (6) однозначно восстанавливается по n попарно различным ненулевым собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ краевой задачи (4) – (6)

Доказательство. Решим дифференциальное уравнение второго порядка. Поскольку линейно-независимыми решениями уравнения $y'' + \lambda y = 0$ являются $y_1 = \cos \lambda x$, $y_2 = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$, то характе-

ристический определитель задачи (4) – (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos\lambda & 1 + \frac{\sin\lambda}{\lambda} \\ -\lambda\sin\lambda + H(\lambda)\cos\lambda & \cos\lambda + H(\lambda)\frac{\sin\lambda}{\lambda} \end{vmatrix} = \\ &= 1 + \lambda\sin\lambda - H(\lambda)\cos\lambda = 0 \quad (7). \end{aligned}$$

Из уравнения (7) выразим $H(\lambda)$. $H(\lambda) = \frac{1+\lambda\sin\lambda}{\cos\lambda}$, где $\cos\lambda \neq 0$, тогда наш полином будет иметь следующий вид:

$$\frac{1 + \lambda\sin\lambda}{\cos\lambda} = H_0 + H_1\lambda + H_2\lambda^2 + \dots + H_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Рассмотрим уравнение для $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \neq 0$.

$$\begin{cases} H_0 + H_1\lambda_1 + H_2\lambda_1^2 + \dots + H_{n-1}\lambda_1^{n-1} = \frac{1+\lambda_1\sin\lambda_1}{\cos\lambda_1} \\ H_0 + H_1\lambda_2 + H_2\lambda_2^2 + \dots + H_{n-1}\lambda_2^{n-1} = \frac{1+\lambda_2\sin\lambda_2}{\cos\lambda_2} \\ \dots \\ H_0 + H_1\lambda_n + H_2\lambda_n^2 + \dots + H_{n-1}\lambda_n^{n-1} = \frac{1+\lambda_n\sin\lambda_n}{\cos\lambda_n} \end{cases}$$

где $\cos\lambda_i \neq 0$, $i = 1..n$. Решим систему линейных неоднородных уравнений методом Крамера. Составим основной определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \dots (\lambda_n - \lambda_1) \dots (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Определитель Вандермонда.

Если $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \neq 0$, то система имеет однозначное решение.

Составим определители Δ_i ($i = 0, \dots, n$), заменив $\frac{1+\lambda_i\sin\lambda_i}{\cos\lambda_i} = b_i$, где $i = 1, \dots, n$.

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ b_2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

...

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots & b_2 \\ & & \dots & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots & b_n \end{vmatrix}$$

По найденным $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ восстанавливается сам полином $H(\lambda) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta}\lambda + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\lambda^{n-1}$.

Что и требовалось доказать.

Таким образом показано, что и в случае нераспадающихся краевых условий теорема, доказанная в [2, 3], сохраняет свою силу. А именно, произвольный полином от спектрального параметра степени $n - 1$ из краевого условия задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями однозначно восстанавливается по n ненулевым попарно различным собственным значениям.

Полученный результат может быть применен к задаче акустической диагностики об определении параметров закрепления сложной механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахтямов А. М.* Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35, № 8. С.1127-1128.
- [2] *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями.- М.: Изд-во. Моск. ун-та. 2009.-184с.
- [3] *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий / А.М.Ахтямов:Отд. физ.-мат. и техн. наук АН РБ.- Уфа: Гиллим. 2008.-300с.

УДК 519.6:517.58

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Манапова А. Р. (Уфа, БГУ)

Введение

В данной работе исследуются математические модели оптимального управления системами нелинейного типа с распределенными параметрами, описываемыми квазилинейными уравнениями эллиптического типа с переменными коэффициентами, учитывающими анизотропность сред, с управлением в правой части уравнения в произвольных выпуклых областях. Построены разностные аппроксимации исходных экстремальных задач и установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Никакие дополнительные априорные требования на гладкость обобщенных решений для состояния при этом не накладываются. Проведена регуляризация аппроксимаций.

§ 1. Постановка задач и их корректность

Пусть управляемый процесс описывается задачей Дирихле с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} + d(\xi)q(u) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega, \\ u(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ произвольной формы. Будем предполагать, что Ω – выпуклая область с границей Γ , принадлежащей классу C^2 ; $k_{\alpha}, b_{\alpha}, d, q, \alpha = 1, 2$ – заданные функции; $g = f \in H = L_2(\Omega)$

- управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha \in W_\infty^1(\Omega)$ и $k_\alpha(\xi) \geq \nu > 0$, $\alpha = 1, 2$, $\xi \in \Omega$, $b_\alpha \in L_\infty(\Omega) : \zeta_\alpha \leq b_\alpha(\xi) \leq \bar{\zeta}_\alpha$ п.в. на Ω , $\alpha = 1, 2$; $d \in L_\infty(\Omega) : \zeta_3 \leq d(\xi) \leq \bar{\zeta}_3$ п.в. на Ω ; q определена на \mathbb{R} со значениями в \mathbb{R} , $q(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq [q(s_1) - q(s_2)] / (s_1 - s_2) \leq L_q < \infty$, для всех $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$.

Поставим следующую задачу: на решениях задачи (1), отвечающих всевозможным допустимым управлениям $g \in U \subset H = L_2(\Omega)$,

$$U = \{f \in L_2(\Omega) : \zeta_4 \leq f(\xi) \leq \bar{\zeta}_4 \text{ п.в. на } \Omega\} \quad (2)$$

или

$$U = \{f \in L_2(\Omega) : \|f\| \leq R\} \quad (3)$$

минимизировать функционал

$$J(g) = \int_{\Omega} |u(\xi, g) - u_0(\xi)|^2 d\Omega. \quad (4)$$

Здесь $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ - заданная функция, а $R, \nu, \zeta_k, \bar{\zeta}_k$, $k = \overline{1, 4}$ - заданные числа, $R > 0$; п.в. - почти всюду.

Предполагается выполнение следующих условий:

$$\delta_0 = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \nu}} \left\{ \frac{\nu - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\epsilon_1} - \frac{p^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} -m \leq \zeta_1 \leq \bar{\zeta}_1 \leq m, \quad -q \leq \zeta_2 \leq \bar{\zeta}_2 \leq q, \quad m, q = \text{const} > 0; \\ \zeta_k \leq \bar{\zeta}_k, \quad \zeta_k, \bar{\zeta}_k = \text{const}, k = 3, 4; \quad D = \text{diam } \Omega. \end{aligned}$$

Под решением задачи (1) при фиксированном управлении $g \in U$ понимается функция $u \equiv u(g) \in W_2^1(\Omega) \equiv V$, удовлетворяющая

для $\forall \eta \in V$ тождеству

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \eta + d(\xi) q(u) \eta \right\} d\Omega = \int_{\Omega} f(\xi) \eta d\Omega. \quad (6)$$

При сделанных предположениях задача (1) однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega)$ при каждом фиксированном управлении $g \in U$ (см. [1]). Из результатов в [1] следует, что обобщенное (из $W_2^1(\Omega)$) решение задачи (1) принадлежит также пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$ и для любого $g \in U$ справедлива априорная оценка

$$\|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (7)$$

Через C здесь и в дальнейшем будем обозначать положительные константы, не зависящие от управления g , шагов вводимых далее сеток и от сеточного управления $\Phi_h \in U_h$; $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$.

Теорема 1. Пусть выполнены все условия при постановке задачи оптимального управления (1)- (4). Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_* \in U$ задачи (1)- (4), т.е. $J_* = \inf \{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$, множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ слабо компактно в $H = L_2(\Omega)$. Любая минимизирующая последовательность $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ слабо в H сходится ко множеству U_* точек минимума функционала $J(g)$.

Отметим, что из теоремы 1 следует существование решения задачи (1)- (4), но решение этой задачи, вообще говоря, может быть не единственным.

§ 2. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач (1)- (4) последовательностями конечномерных задач оптимального управления.

Задаче оптимального управления (1)- (4) поставим в соответствие следующую разностную аппроксимацию: минимизировать функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \omega} |y(x; \Phi_h) - u_0^h(x)|^2 \text{mes } e(x), \quad (8)$$

при условиях, что сеточная функция $y(\Phi_h) \in W_2^1(\omega)$, называемая решением разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции $v \in W_2^1(\omega)$ сумматорному тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x' \in \omega'_\alpha} a_\alpha^{(+0.5\alpha)}(x) y_{x_\alpha}^{(+0.5\alpha)} v_{x_\alpha}^{(+0.5\alpha)} h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha} + \\ & + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} b_\alpha^h(x) y_{x_\alpha}^\circ v \text{mes } e(x) + \sum_{\omega} d^h(x) q(y) v \text{mes } e(x) = \quad (9) \\ & = \sum_{\omega} \Phi_h(x) v \text{mes } e(x), \end{aligned}$$

а сеточное управление Φ_h таково, что $\Phi_h \in U_h \subset B_h = L_2(\omega)$,

$$U_h = \{ \Phi_h \in L_2(\omega) : \zeta_4 \leq \Phi_h(x) \leq \bar{\zeta}_4 \}, \quad (10)$$

или

$$U_h = \{ \Phi_h \in L_2(\omega) : \|\Phi_h\|_{L_2(\omega)} \leq R \}. \quad (11)$$

По поводу определения сеток ω , ω'_α , $\alpha = 1, 2$, норм и полунорм, коэффициентов $a^{(\pm 0.5\alpha)}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $u_0^h(x)$ см. [2], [3].

Ниже всюду будем предполагать, что выполняется условие

$$\delta_0 = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \sigma}} \left\{ \frac{\nu - \beta(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\epsilon_1} - \frac{p^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0, \quad (12)$$

$\sigma = v/\beta$, $\beta = h_1/h_1^* + h_2/h_2^*$, $h_\alpha^* = \min_{x \in \bar{\omega}} h_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, из которого следует справедливость условия (5).

Теорема 2. *Задача о нахождении решения разностной схемы (9) при фиксированном управлении $\Phi_h \in U_h$ эквивалентна решению операторного уравнения $A_h y = F_h$, где $A_h : \overset{\circ}{W}_2^1(\omega) \rightarrow \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$, $F_h \in W_2^1(\omega)$; оператор A_h и сеточная функция F_h определяются равенствами*

$$(A_h y, v)_{W_2^1(\omega)} = A_h(y, v), \quad (F_h, v)_{W_2^1(\omega)} = l_h(v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega); \quad (13)$$

Задача (9) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ при каждом $\Phi_h \in U_h$ и имеет место априорная оценка

$$\|y(\Phi_h)\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \|\Phi_h\|_{L_2(\omega)}. \quad (14)$$

§ 3. Априорные оценки погрешностей метода по состоянию и сеточного функционала. Сходимость аппроксимаций по функционалу и управлению

Справедливы следующие теоремы

Теорема 3. *Пусть $u(\xi) = u(\xi, g)$ и $y(x) = y(x, \Phi_h)$ - решения задач (1) - (4) и (8), (9) соответственно. Тогда для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ справедлива оценка погрешности метода по состоянию*

$$\|y(\Phi_h) - u(g)\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \left\{ \left[|h| \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)} + \|d\|_{L_\infty(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^2 \|b_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)} \right) \right] \|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\Phi_h - R_\omega^h g\|_{L_2(\omega)} \right\}. \quad (15)$$

Теорема 4. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ для погрешности сеточного функционала справедлива оценка

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| \leq C \left\{ |h| + \|R_\omega^h g(x) - \Phi_h(x)\|_{L_2(\omega)} \right\}, \quad (16)$$

где $C = \text{const} > 0$, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g .

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задачи (1)- (4) по функционалу и управлению рассмотрим при $|h| \rightarrow 0$ последовательность разностных задач минимизации (8), (9). Будем допускать, что вычисления функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно и приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$ связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$\begin{aligned} J_{h\delta_h}(\Phi_h) &= J_h(\Phi_h) + \Theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\Theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \quad \forall \Phi_h \in U_h; \\ \delta &\rightarrow +0 \text{ при } |h| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Предположим теперь, что при каждом h и соответствующей сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h\delta_h*} + \epsilon_h$ нижней грани $J_{h\delta_h*}$ функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h и найдено сеточное управление $\hat{\Phi}_h(x) = \Phi_{h\delta_h\epsilon_h}$, такое что

$$J_{h\delta_h*} \leq J_{h\delta_h}(\hat{\Phi}_h) \leq J_{h\delta_h*} + \epsilon_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \quad (18)$$

где $\epsilon_h \geq 0$ и $\epsilon_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

Теорема 5. Семейство разностных задач минимизации (17), (8), (9) при $|h| \rightarrow 0$ аппроксимирует экстремальную задачу (1)- (4) по функционалу, т.е. $\lim J_{h\delta_h*} = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, причем справедливы оценки скорости сходимости

$$|J_{h\delta_h*} - J_*| \leq |J_{h*} - J_*| + \delta_h \leq C|h| + \delta_h;$$

если последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\} \in U_h$ определена из условий (18), то последовательность сеточных управлений $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$ является минимизирующей для задачи (1)- (4) и

справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h) - J_* \leq C(|h| + \epsilon_h + \delta_h);$$

последовательность $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$ слабо в $H = L_2(\Omega)$ сходится к множеству $U_* \neq \emptyset$ оптимальных управлений задачи (1)- (4).

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению). Из теоремы 5 следует, что для построения минимизирующих последовательностей в исходной экстремальной задаче (1)- (4) можно использовать конечномерную задачу минимизации (8), (9). В силу же теоремы 1 экстремальная задача (1)- (4) корректно поставлена в слабой топологии пространства H . Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства H . Следовательно, нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 5) для $J(g)$ на U будет сходящейся по норме H ко множеству U_* . Для построения сильно сходящейся минимизирующей последовательности проведем регуляризацию конечномерных задач (8), (9) по методу регуляризации А.Н. Тихонова (см. [4], [5]).

Введем на U стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$, $g \in U$ и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом h рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (17), (8), (9):

$$T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h), \quad \Phi_h \in U_h, \quad (19)$$

где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \rightarrow 0$. При каждом h определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \quad (20)$$

где $\nu_h \geq 0$ и $\nu_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$. Пусть $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) : g_* \in U_*\}$ – множество Ω -нормальных

решений задачи (1)- (4). Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (1)- (4) и функционалы $J(g)$, $\Omega(g)$ - слабо полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства H , то $U_{**} \neq \emptyset$ [4].

Теорема 6. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\}$ определена из условий (19), (20). Тогда последовательность $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$ является минимизирующей для задачи (1)- (4) и справедлива оценка скорости сходимости:

$$0 \leq J(\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h) - J_* \leq C(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h);$$

если последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ удовлетворяют условиям $\alpha_h, \delta_h, \nu_h > 0$, $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, причем $\{\alpha_h\}$ стремится к нулю согласовано с величинами $|h|$, δ_h, ν_h так, что $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, то последовательность $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$ сильно в H сходятся к множеству U_{**} и $\lim \Omega(\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h) = \Omega_*$ при $|h| \rightarrow 0$.

Полученные результаты не зависят от конкретного метода решения разностных задач минимизации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [2] *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. П.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М.: Высшая школа, 1987.
- [3] *Лубышев Ф. В., Манапова А. Р.* О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области. //Труды СВМО. 2009. Т. 11, № 1.
- [4] *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

- [5] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мартемьянова Н. В. (Самара, ПГСГА)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева - Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β – заданные положительные действительные числа, и поставим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$f(x, y) \in C(D_- \cup D_+); \quad (3)$$

$$Lu = f(x, y), (x, y) \in D_- \cup D_+; \quad (4)$$

$$u(0, y) = u(1, y), u_x(0, y) = 0, -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

$$u_y(x, \beta) = \chi(x), u_y(x, -\alpha) = g(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где $\varphi(x), \psi(x), \chi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(0) = \varphi(1), \psi(0) = \psi(1), \varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad (8)$$

$$D_+ = D \cap \{y > 0\}, \quad D_- = D \cap \{y < 0\} .$$

Обратные задачи для некоторых типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах, например, в работах А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2,3], В.К. Иванова [4] и их учеников. Подробное изложение этого вопроса можно найти в монографии А.М. Денисова [5].

В последние годы в работах К.Б. Сабитова предложен новый подход - метод спектральных разложений для обоснования единственности и существования решения прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа. Таким методом решены обратные задачи для уравнений смешанного параболого-гиперболического типа с локальными граничными условиями [6,7].

В работах автора (которые находятся в печати) доказаны критерии существования и единственности решения обратной задачи для уравнения (1) в случае, когда $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$. В данной работе предлагается обратная задача для уравнения (1) с нелокальным условием (5) при $f_1(x) \neq f_2(x)$. Установлен критерий единственности решения задачи (2) - (7).

Пусть $\{u(x, y), f_1(x), f_2(x)\}$ решение поставленной обратной задачи при

$$u(x, \beta) = 0, \quad u(x, -\alpha) = 0, \quad u_y(x, \beta) = 0, \quad u_y(x, -\alpha) = 0. \quad (9)$$

Следуя [8,9] рассмотрим следующие системы функций:

$$1, \cos \lambda_k x, x \sin \lambda_k x, \quad (10)$$

$$2(1-x), 4(1-x) \cos \lambda_k x, 4 \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Системы функций (10) и (11) образуют биортогональную систему, являются полными в $L_2[0, 1]$ и удовлетворяют необходимому и достаточному условию базисности в пространстве $L_2[0, 1]$ [8].

Введем в рассмотрение функции:

$$u_k(y) = 4 \int_0^1 u(x, y) \sin \lambda_k x dx, \quad (12)$$

$$v_k(y) = 4 \int_0^1 u(x, y)(1-x) \cos \lambda_k x dx, \quad (13)$$

$$v_0(y) = 2 \int_0^1 u(x, y)(1-x) dx. \quad (14)$$

Отступив от концов промежутка интегрирования на достаточно малое число $\varepsilon > 0$, на основании (12) – (14) получим

$$u_{k,\varepsilon}(y) = 4 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin \lambda_k x dx, \quad (15)$$

$$v_{k,\varepsilon}(y) = 4 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y)(1-x) \cos \lambda_k x dx, \quad (16)$$

$$v_{0,\varepsilon}(y) = 2 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y)(1-x) dx. \quad (17)$$

Дифференцируя равенства (15) – (17) при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ два раза и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = 4 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (f_1(x) - u_{xx}(x, y)) \sin \lambda_k x dx, \quad y > 0, \quad (18)$$

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = 4 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx}(x, y) - f_2(x)) \sin \lambda_k x dx, \quad y < 0, \quad (19)$$

$$v''_{k,\varepsilon}(y) = 4 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (f_1(x) - u_{xx}(x, y))(1-x) \cos \lambda_k x dx, \quad y > 0, \quad (20)$$

$$v''_{k,\varepsilon}(y) = 4 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx}(x, y) - f_2(x))(1-x) \cos \lambda_k x dx, \quad y < 0, \quad (21)$$

$$v''_{0,\varepsilon}(y) = 2 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (f_1(x) - u_{xx}(x, y))(1-x) dx, \quad y > 0, \quad (22)$$

$$v''_{0,\varepsilon}(y) = 2 \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx}(x, y) - f_2(x))(1-x) dx, \quad y < 0. \quad (23)$$

Интегрируя два раза по частям в интегралах в правых частях равенств (18) – (23) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, найдем следующие уравнения:

$$u_k''(y) - \lambda_k^2 u_k(y) = f_{1k}, \quad y > 0, \quad (24)$$

$$u_k''(y) + \lambda_k^2 u_k(y) = -f_{2k}, \quad y < 0, \quad (25)$$

$$v_k''(y) - \lambda_k^2 v_k(y) = \tilde{f}_{1k} - 4\pi k u_k(y), \quad y > 0, \quad (26)$$

$$v_k''(y) + \lambda_k^2 v_k(y) = -\tilde{f}_{2k} + 4\pi k u_k(y), \quad y < 0, \quad (27)$$

$$v_0''(y) = f_{1,0}, \quad y > 0, \quad (28)$$

$$v_0''(y) = -f_{2,0}, \quad y < 0, \quad (29)$$

где

$$f_{1k} = 4 \int_0^1 f_1(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \tilde{f}_{1k} = 4 \int_0^1 f_1(x)(1-x) \cos \lambda_k x dx, \quad (30)$$

$$f_{1,0} = 2 \int_0^1 f_1(x)(1-x) dx, \quad f_{2k} = 4 \int_0^1 f_2(x) \sin \lambda_k x dx, \quad (31)$$

$$\tilde{f}_{2k} = 4 \int_0^1 f_2(x)(1-x) \cos \lambda_k x dx, \quad f_{2,0} = 2 \int_0^1 f_2(x)(1-x) dx. \quad (32)$$

Дифференциальные уравнения (24) – (29) имеют общие решения

$$u_k(y) = \begin{cases} -\frac{f_{1k}}{\lambda_k^2} + a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y}, & y > 0, \\ -\frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} + c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y, & y < 0, \end{cases} \quad (33)$$

$$v_k(y) = \begin{cases} -\frac{\tilde{f}_{1k}}{\lambda_k^2} + \tilde{a}_k e^{\lambda_k y} + \tilde{b}_k e^{-\lambda_k y} + \\ \quad + y(-a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y}), & y > 0, \\ -\frac{\tilde{f}_{2k}}{\lambda_k^2} + \tilde{c}_k \cos \lambda_k y + \tilde{d}_k \sin \lambda_k y + \\ \quad + y(-d_k \cos \lambda_k y + c_k \sin \lambda_k y), & y < 0, \end{cases} \quad (34)$$

$$v_0(y) = \begin{cases} f_{1,0} \frac{y^2}{2} + b_0 y + a_0, & y > 0, \\ -f_{2,0} \frac{y^2}{2} + d_0 y + c_0, & y < 0, \end{cases} \quad (35)$$

где $a_0, b_0, c_0, d_0, a_k, b_k, c_k, d_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_k, \tilde{d}_k$ – произвольные постоянные.

Из однородных граничных условий (6) – (7) будем иметь

$$\begin{aligned} u_k(-\alpha) = 0, \quad u_k(\beta) = 0, \quad u'_k(-\alpha) = 0, \quad u'_k(\beta) = 0, \\ v_k(-\alpha) = 0, \quad v_k(\beta) = 0, \quad v'_k(-\alpha) = 0, \quad v'_k(\beta) = 0, \\ v_0(-\alpha) = 0, \quad v_0(\beta) = 0, \quad v'_0(-\alpha) = 0, \quad v'_0(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Поскольку решение $u(x, y)$ удовлетворяет условию (2), то для функций (33) – (35) выполнены следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned} u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u'_k(0-0) = u'_k(0+0), \\ v_k(0-0) = v_k(0+0), \quad v'_k(0-0) = v'_k(0+0), \\ v_0(0-0) = v_0(0+0), \quad v'_0(0-0) = v'_0(0+0). \end{aligned}$$

Функции (33) – (35) удовлетворяют этим условиям только тогда, когда $c_k = a_k + b_k + (f_{2k} - f_{1k})/\lambda_k^2$, $d_k = a_k - b_k$, $\tilde{c}_k = \tilde{a}_k + \tilde{b}_k + (\tilde{f}_{2k} - \tilde{f}_{1k})/\lambda_k^2$, $\tilde{d}_k = \tilde{a}_k - \tilde{b}_k$, $c_0 = a_0$, $d_0 = b_0$.

Найденные значения $c_k, d_k, \tilde{c}_k, \tilde{d}_k, c_0, d_0$ подставим в (33) – (35) и удовлетворим эти функции граничным условиям (36). Тогда, получим относительно $a_0, b_0, f_{1,0}, f_{2,0}, a_k, b_k, f_{1k}, f_{2k}, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{f}_{1k}, \tilde{f}_{2k}$ системы:

$$\begin{cases} f_{1,0} \frac{\beta^2}{2} + b_0 \beta + a_0 = 0, \\ -f_{2,0} \frac{\alpha^2}{2} - b_0 \alpha + a_0 = 0, \\ f_{1,0} \beta + b_0 = 0, \\ f_{2,0} \alpha + b_0 = 0, \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} -\frac{f_{1k}}{\lambda_k^2} + a_k e^{\lambda_k \beta} + b_k e^{-\lambda_k \beta} = 0, \\ -\frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} + (a_k + b_k + \frac{f_{2k} - f_{1k}}{\lambda_k^2}) \cos \lambda_k \alpha - (a_k - b_k) \sin \lambda_k \alpha = 0, \\ a_k e^{\lambda_k \beta} - b_k e^{-\lambda_k \beta} = 0, \\ (a_k + b_k + \frac{f_{2k} - f_{1k}}{\lambda_k^2}) \sin \lambda_k \alpha + (a_k - b_k) \cos \lambda_k \alpha = 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} -\frac{\tilde{f}_{1k}}{\lambda_k^2} + \tilde{a}_k e^{\lambda_k \beta} + \tilde{b}_k e^{-\lambda_k \beta} = P_1, \\ -\frac{\tilde{f}_{2k}}{\lambda_k^2} + (\tilde{a}_k + \tilde{b}_k + \frac{\tilde{f}_{2k} - \tilde{f}_{1k}}{\lambda_k^2}) \cos \lambda_k \alpha - (\tilde{a}_k - \tilde{b}_k) \sin \lambda_k \alpha = P_2, \\ \lambda_k \tilde{a}_k e^{\lambda_k \beta} - \lambda_k \tilde{b}_k e^{-\lambda_k \beta} = P_3, \\ \lambda_k (\tilde{a}_k + \tilde{b}_k + \frac{\tilde{f}_{2k} - \tilde{f}_{1k}}{\lambda_k^2}) \sin \lambda_k \alpha + \lambda_k (\tilde{a}_k - \tilde{b}_k) \cos \lambda_k \alpha = P_4, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= \beta(a_k e^{\lambda_k \beta} - b_k e^{-\lambda_k \beta}), \\ P_2 &= \alpha((b_k - a_k) \cos \lambda_k \alpha - (a_k + b_k + \frac{f_{2k} - f_{1k}}{\lambda_k^2}) \sin \lambda_k \alpha), \\ P_3 &= (1 + \beta \lambda_k) e^{\lambda_k \beta} a_k - (1 - \beta \lambda_k) e^{-\lambda_k \beta} b_k, \\ P_4 &= (a_k - b_k) \cos \lambda_k \alpha + (a_k + b_k + \frac{f_{2k} - f_{1k}}{\lambda_k^2}) \sin \lambda_k \alpha + \\ &+ \lambda_k \alpha (b_k - a_k) \sin \lambda_k \alpha + \lambda_k \alpha (a_k + b_k + \frac{f_{2k} - f_{1k}}{\lambda_k^2}) \cos \lambda_k \alpha. \end{aligned} \quad (40)$$

Определитель однородной линейной системы (37) $\Delta_{\alpha\beta}(0) = -\frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha + \beta) \neq 0$ при любых положительных α, β . Следовательно, она имеет только нулевое решение $a_0 = b_0 = f_{1,0} = f_{2,0} = 0$.

Если определитель однородной линейной системы (38) при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{2}{\lambda_k^2} \Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{2}{\lambda_k^2} (\text{sh } \lambda_k \beta - \sin \lambda_k \alpha + \sin \lambda_k \alpha \text{ ch } \lambda_k \beta - \cos \lambda_k \alpha \text{ sh } \lambda_k \beta) \neq 0, \quad (41)$$

то она имеет только нулевое решение $a_k = b_k = f_{1k} = f_{2k} = 0$. В силу этих найденных значений система (39) примет вид линейной однородной системы с определителем $\frac{2}{\lambda_k^2} \Delta_{\alpha\beta}(k)$, который в силу условия (41) отличен от нуля. Поэтому система (39) имеет только нулевое решение $\tilde{a}_k = \tilde{b}_k = \tilde{f}_{1k} = \tilde{f}_{2k} = 0$. Тогда из (33) – (35) следует, что

$$v_0(y) = 0, \quad v_k(y) = u_k(y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad -\alpha \leq y \leq \beta.$$

На основании (12) – (14), (30) – (32) имеем:

$$2 \int_0^1 u(x, y)(1 - x) dx = 0, \quad 4 \int_0^1 u(x, y) \sin \lambda_k x dx = 0,$$

$$\begin{aligned}
4 \int_0^1 u(x, y)(1-x) \cos \lambda_k x dx &= 0, & 2 \int_0^1 f_1(x)(1-x) dx &= 0, \\
4 \int_0^1 f_1(x) \sin \lambda_k x dx &= 0, & 4 \int_0^1 f_1(x)(1-x) \cos \lambda_k x dx &= 0, \\
2 \int_0^1 f_2(x)(1-x) dx &= 0, & 4 \int_0^1 f_2(x) \sin \lambda_k x dx &= 0, \\
4 \int_0^1 f_2(x)(1-x) \cos \lambda_k x dx &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу полноты системы функций (11) в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что $u(x, y) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$, а $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$. В силу (2), (3) функция $u(x, y)$ непрерывна в \overline{D} , а $f_1(x) \in C(0, 1)$ и $f_2(x) \in C(0, 1)$, поэтому $u(x, y) \equiv 0$ в \overline{D} , а $f_1(x) \equiv 0$ и $f_2(x) \equiv 0$ на $(0, 1)$.

Предположим, что условие (41) нарушено при $k = p$ и некоторых α и β , то есть $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда система (38) имеет ненулевое решение. А обратная задача (2) – (7) (где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, $\chi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$\begin{aligned}
u_p(x, y) &= u_p(y)x \sin \lambda_p x, \\
u_p(y) &= \begin{cases} f_{2p} \frac{(1 - \cos \lambda_p \alpha)(\operatorname{ch} \lambda_p(y - \beta) + \lambda_p^2)}{\lambda_p^2 (\cos \lambda_p \alpha \operatorname{ch} \lambda_p \beta + \sin \lambda_p \alpha \operatorname{sh} \lambda_p \beta - \cos \lambda_p \alpha)}, & y > 0, \\ \frac{f_{2p}}{\lambda_p^2} + f_{2p} \frac{(\operatorname{ch} \lambda_p \beta - 1) \cos \lambda_p y + \operatorname{sh} \lambda_p \beta \sin \lambda_p(y + \alpha) - \operatorname{sh} \lambda_p \beta \sin \lambda_p y}{\lambda_p^2 (\cos \lambda_p \alpha \operatorname{ch} \lambda_p \beta + \sin \lambda_p \alpha \operatorname{sh} \lambda_p \beta - \cos \lambda_p \alpha)}, & y < 0, \end{cases} \\
f_{1p}(x) &= f_{2p} \frac{1 - \cos \lambda_p \alpha}{\cos \lambda_p \alpha \operatorname{ch} \lambda_p \beta + \sin \lambda_p \alpha \operatorname{sh} \lambda_p \beta - \cos \lambda_p \alpha} x \sin \lambda_p x, \\
f_{2p}(x) &= f_{2p} x \sin \lambda_p x,
\end{aligned}$$

где f_{2p} - произвольная отличная от нуля постоянная.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если существует решение задачи (2) – (7), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено условие (41).

Решение задачи (2) – (7) при некоторых условиях на заданные функции определяется в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x, y) = v_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) x \sin \lambda_k x,$$

где $u_k(y)$, $v_k(y)$ и $v_0(y)$ находятся по формулам (33) – (35).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН. 1943. Т.39. №5. С. 195 – 198.
- [2] Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР, 1964. Т.157. №3. С. 520 – 521.
- [3] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шихатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука. 1980. 286 с.
- [4] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.
- [5] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208с.
- [6] Сабитов К.Б. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка//Докл. РАН, 2009. Т.427. №5. С. 593 – 596.
- [7] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области// Докл. РАН, 2009. Т.429. №4.

- [8] *Сабитова Ю.К.* Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. Стерлитамак. СГПА. 2007. 20с.
- [9] *Ильин В.А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова. 1976. Т.142. С. 148 – 155.

УДК 517.2+517.5

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В
ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ФУНКЦИЙ ТИПА РУМЬЕ

Михайлов К. А. (Владикавказ, ЮМИ)

Введение

Возможность разложения в ряды из экспонент бесконечно дифференцируемых функций на фиксированном интервале вещественной прямой исследовалась в работе В. В. Напалкова [1], а в статье И. Х. Мусина [2] рассматривалась задача о представлении такими рядами элементов весового пространства бесконечно дифференцируемых функций на всей вещественной прямой. Отметим также исследования Ю. Ф. Коробейника [3], в которых изучались абсолютно представляющие системы экспонент с чисто мнимыми показателями.

В настоящей работе изучаются абсолютно представляющие системы экспонент в пространствах ультрадифференцируемых функций типа Румье на конечном интервале, задаваемых уточненным порядком. Полученные результаты обобщают и уточняют

соответствующие аналоги, полученные в [4] для случая обычного порядка.

1. В настоящем пункте приводятся общие условия того, что система экспонент является абсолютно представляющей в указанных выше пространствах типа Румье.

Пусть $C^\infty(-1, 1)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых на интервале $(-1, 1)$ функций. Четную неотрицательную на \mathbb{R} , неубывающую на $[0, +\infty)$ функцию ω будем называть *каноническим весом* (см. [5, с.19]), если

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \omega(2t) = O(\omega(t)) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (\gamma) \quad \ln t = o(\omega(t)) \text{ при } t \rightarrow \infty, \\ (\beta) \quad & \int_1^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (\delta) \quad \varphi_\omega(t) := \omega(e^t) \text{ выпукла на } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Определим полунормированные пространства $(m, n \in \mathbb{N})$

$$\mathcal{E}_{m,n}^\omega := \left\{ g \in C^\infty(-1, 1) : \|g\|_{m,n}^\omega := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq 1-1/m} \frac{|g^{(\alpha)}(x)|}{e^{\frac{1}{n}\varphi_\omega(\alpha n)}} < \infty \right\},$$

где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varphi_\omega^*(y) := \sup_{x \geq 0} (xy - \varphi_\omega(x))$.

Рассмотрим $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(-1, 1) := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{m,n}^\omega$ — пространство ультрадифференцируемых функций типа Румье с естественной топологией $\text{proj}_m \text{ind}_n \mathcal{E}_{m,n}^\omega$. Наделенное такой топологией $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(-1, 1)$ является приведенным проективным пределом (DFS) -пространств (по поводу теории таких пространств см. [6]).

Возьмем $\rho \in (0, 1)$ и некоторый уточненный порядок $\rho(r)$. Можно считать, что $\omega_{\rho(r)}(t) := |t|^{\rho(t)}$ ($t \in \mathbb{R}$) является каноническим весом. Действительно, справедливость (β) и (γ) очевидна. Так как функция $R(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ медленно растущая [7, глава I, §2, с. 26], то $\omega_{\rho(r)}$ удовлетворяет условию (α) . Покажем, что существует другой уточненный порядок $\tilde{\rho}(r)$, для которого справедливо (δ) . Рассмотрим функцию

$$\tilde{\rho}(r) := \rho + \frac{\ln v(r)}{\ln r}, \text{ где } v(r) := \frac{1}{r} \int_1^r s^{\rho(s)-\rho} ds \quad \text{при } r > 1$$

и $\tilde{\rho}(r) := 0$ при $0 \leq r \leq 1$. Стандартно показывается, что $\tilde{\rho}(r)$ — уточненный порядок, функция $r^{\tilde{\rho}(r)}$ выпукла относительно $\ln r$ и не убывает при всех $r > R$, где R достаточно велико. Полагая $h(r) := r^{\tilde{\rho}(r)}$ при $r > R$ и $h(r) := R^{\tilde{\rho}(R)}$ при $0 \leq r \leq R$, получим, что h выпукла относительно $\ln r$ на $[0, +\infty)$. Последнее означает, что для уточненного порядка $\tilde{\rho}(r)$ выполнено условие (δ) . В силу того, что $r^{\tilde{\rho}(r)-\rho(r)} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, пространства $\mathcal{E}_{\{\omega_{\tilde{\rho}(r)}\}}(-1, 1)$ и $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ совпадают.

Не нарушая общности, далее будем считать, что $r^{\rho(r)}$ строго возрастающая при $r \geq 0$. Тогда определена обратная к ней функция $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, для которой $\psi(\omega_{\rho(r)}(r)) = \omega_{\rho(r)}(\psi(r)) = r$, $r \geq 0$.

Пусть далее Λ — возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Для $f \in H(\mathbb{C})$, $m, n \in \mathbb{N}$ положим

$$\|f\|_{m,n}^* := \sup_{z \in \mathbb{C}} K_{m,n}^f(z), \quad \widetilde{\|f\|}_{m,n} = \sup_{\lambda \in \Lambda} K_{m,n}^f(\lambda),$$

где

$$K_{m,n}^f(z) = \frac{|f(z)|}{e^{(1-\frac{1}{m})|\operatorname{Im}z| + \frac{1}{n}\omega_{\rho(r)}(|z|)}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно [5, глава V, теорема 5.4.4] сопряженное с $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ можно отождествить с изоморфным ему пространством целых функций

$$\tilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1) = \{f \in H(\mathbb{C}) : \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \|f\|_{m,n}^* < \infty\}.$$

Следуя [8], последовательность $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ненулевых элементов полного отделимого пространства F назовем *абсолютно представляющей системой* (АПС) в F , если любой элемент x из F представим в виде суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, абсолютно сходящегося к x по топологии F . В работе [9] был получен критерий того,

что данная последовательность является АПС в пределе приведенного проективного спектра (DFS) -пространств. Приведем его формулировку применительно к системе экспонент в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$.

Теорема 1. Пусть $\rho \in (0, 1)$, $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок. Для того чтобы $E(\Lambda) = \{e^{-i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ была АПС в $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$, необходимо, а если Λ распадается на две подпоследовательности $\Lambda^1 := \{\lambda_k^1\}_{k=1}^\infty$ и $\Lambda^2 := \{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющие условиям

$$(i) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k^1|}{\omega_{\rho(r)}(|\lambda_k^1|)} = \infty; \quad (ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k^2|}{\omega_{\rho(r)}(|\lambda_k^2|)} = 0,$$

то и достаточно, чтобы

$$\forall m_1 \exists m_2 \forall n_2 \exists n_1 \exists C < \infty : \|f\|_{m_2, n_2}^* \leq C \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\widetilde{f}\|_{m_1, n_1} \quad (1)$$

для всех $f \in \widetilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$, для которых $\|\widetilde{f}\|_{m_1, n} < \infty$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

2. Цель данного пункта — построение на основе теоремы 1 примера АПС экспонент в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$.

Пусть $\Lambda^1 = \{\pm i\pi k\}_{k=1}^\infty$, $\Lambda^2 = \{\pm \pi k\}_{k=1}^\infty$, $\Lambda := \Lambda^1 \cup \Lambda^2$. Положим $\Lambda_\sigma = \Lambda^2 \cup \{\pm i\mu_k\}_{k=1}^\infty$, где $\sigma > 0$ и $\mu_k = \pi \left[\frac{1}{\pi} \psi \left(\frac{\pi k}{\sigma} \right) \right]$, $k \in \mathbb{N}$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x . Очевидно, что $\{\pm i\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность Λ^1 .

Определим целые в \mathbb{C} функции

$$L(z) := \frac{\sin z \sin iz}{z^2}, \quad L_\sigma(z) := \frac{\sin z}{z} \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z^2}{\mu_k^2} \right), \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

полагая $L(0) := i$ и $L_\sigma(0) := 1$.

Для $\delta > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$U_\lambda := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < e^{-\delta\omega_{\rho(r)}(|\lambda|)} \right\}, \quad U_\delta := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad U_{\delta, \sigma} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda_\sigma} U_\lambda.$$

Далее, для $f \in \tilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$, $f \neq 0$ введем множество

$$\Gamma_f := \left\{ \gamma > 0 : \forall \varepsilon > 0 \limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{(1 - \gamma)|\operatorname{Im} z| + \varepsilon\omega_{\rho(r)}(|z|)} \leq 1 \right\}.$$

Для каждой f из $\tilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ множество Γ_f непусто и содержится в полуинтервале $(0, 1]$. Через γ_f обозначим точную верхнюю грань множества Γ_f . Из определения Γ_f следует, что тип σ_f функции f при порядке 1 совпадает с $1 - \gamma_f$.

Для $f \in \tilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$, $z \notin U_{\delta, \sigma}$, $\lambda \in \Lambda_\sigma$ рассмотрим

$$F(z, \lambda) := \frac{f(\lambda)}{L'_\sigma(\lambda)(z - \lambda)},$$

а для $z \notin U_\delta$, $w \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda$

$$G(z, w, \lambda) := \frac{f(\lambda)e^{iw\lambda}}{L'(\lambda)(z - \lambda)}.$$

Для доказательства следующих лемм были использованы основы метода, изложенного в [7, глава IV, §6].

Лемма 4. При любых фиксированных $\delta, \sigma \in (0, +\infty)$ для произвольной функции f из $\tilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ справедливо представление

$$f(z) = L_\sigma(z) \sum_{\lambda \in \Lambda_\sigma} F(z, \lambda), \quad z \notin U_{\delta, \sigma}.$$

Лемма 5. При любом $\delta \in (0, +\infty)$ для произвольной функции f из $\tilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ справедливо представление

$$f(z)e^{iwz} = L(z) \sum_{\lambda \in \Lambda} G(z, w, \lambda), \quad z \notin U_\delta, \quad |w| < \gamma_f.$$

При этом для каждого m такого, что $\|f\|_{m,n} < \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum_{\lambda \in \Lambda} G(z, w, \lambda)$ сходится равномерно и абсолютно внутри круга $\{w \in \mathbb{C} : |w| < \frac{1}{m}\}$.

Для $z \in \mathbb{C}$ с $\text{Im}z \neq 0$ обозначим

$$P_{\rho(r)}(\text{Re}z + i\text{Im}z) := \frac{|\text{Im}z|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega_{\rho(r)}(t)}{(t - \text{Re}z)^2 + \text{Im}^2z} dt .$$

Согласно [5, глава I, предложение 1.4.2(1)]

$$A := \limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{P_{\rho(r)}(z)}{\omega_{\rho(r)}(|z|)} < \infty . \quad (2)$$

Используя принцип Фрагмена-Линделефа [10, теорема 6.5.4], стандартно доказывается следующая

Лемма 6. Пусть $f \in \tilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ и при некоторых положительных постоянных B и α

$$|f(x)| \leq B e^{\alpha \omega_{\rho(r)}(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Тогда для любого $\gamma \in \Gamma_f$

$$|f(z)| \leq B D e^{(1-\gamma)|\text{Im}z| + \alpha A \omega_{\rho(r)}(|z|)} \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C},$$

где постоянная A определена в (2), а D зависит только от $\rho(r)$.

При доказательстве следующего результата используется и частично корректируется схема доказательства теоремы 2 из [5], предложенная А. В. Абаниным для случая обычного порядка.

Теорема 2. Последовательность $E(\Lambda) = \{e^{-i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $\Lambda = \{\pm i\pi k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\pm \pi k\}_{k=1}^{\infty}$, является абсолютно представляющей системой в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ при любом уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho \in (0, 1)$.

Приведем основные моменты доказательства. Нетрудно видеть, что подпоследовательности $\Lambda^1 = \{\pm i\pi k\}_{k=1}^\infty$ и $\Lambda^2 = \{\pm \pi k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условиям (i) и (ii) теоремы 1, соответственно. Поэтому $E(\Lambda)$ будет абсолютно представляющей в $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$ тогда и только тогда, когда выполнено (1).

Фиксируем произвольные $m_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in (0, 1/n_2)$. Найдем номер n_1 такой, что $3/n_1 < \sigma_0$, где $\sigma_0 = \min\{\sigma; \sigma \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{2}\}$. Возьмем $f \in \widetilde{A}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$, для которой $\|f\|_{m_1, n_1} < \infty$. Положим $\delta := 1/n_1$.

По лемме 1 для $z \notin U_{\delta, \sigma}$

$$f(z) = L_\sigma(z) \sum_{\lambda \in \Lambda_\sigma} F(z, \lambda).$$

Учитывая определение $\|f\|_{m_1, n_1}$ и выбор σ_0 и используя известные оценки для $|\sin z|$ [11, глава I, §5, теорема 5.7] и специального произведения $\prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z^2}{\mu_k^2}\right)$ [11, с. 68–71], получим, что существует такая постоянная $B_1 = B_1(m_1, n_2) > 0$, что для каждого $z \notin U_{\delta, \sigma}$

$$|f(z)| \leq B_1 \|f\|_{m_1, n_1} e^{|\operatorname{Im}z| + \frac{1}{n_2} \omega_{\rho(r)}(|z|)}.$$

Положим $B_2 := B_1 e^{2r_0 + \frac{2}{n_2} \omega_{\rho(r)}(r_0)}$, где $r_0 = e^{-\frac{1}{n_1} \omega_{\rho(r)}(\pi)}$ — наибольший из радиусов кружков U_λ , $\lambda \in \Lambda$. Тогда на всех окружностях $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| = e^{-\frac{1}{n_1} \omega_{\rho(r)}(|\lambda|)}\right\}$, где $\lambda \in \Lambda_\sigma$, имеем

$$|f(z)| \leq B_2 \|f\|_{m_1, n_1} e^{|\operatorname{Im}z| + \frac{1}{n_2} \omega_{\rho(r)}(|z|)}.$$

По принципу максимума модуля аналитической функции последнее неравенство продолжается (возможно с другой постоянной, зависящей только от $\rho(r)$) внутрь каждого круга $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < e^{-\frac{1}{n_1} \omega_{\rho(r)}(|\lambda|)}\right\}$, $\lambda \in \Lambda_\sigma$. Значит, существует такое $B_3 \in (0, \infty)$, что

$$|f(z)| \leq B_3 \|f\|_{m_1, n_1} e^{|\operatorname{Im}z| + \frac{1}{n_2} \omega_{\rho(r)}(|z|)} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$|f(x)| \leq B_3 \|\widetilde{f}\|_{m_1, n_1} e^{\frac{1}{n_2} \omega_{\rho(r)}(x)} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

При этом в силу выбора σ , n_1 и δ постоянная B_2 зависит лишь от m_1 и n_2 .

Покажем теперь, что $\frac{1}{m_1+2} \in \Gamma_f$. Предположим, что порядок функции f равен 1 и $\gamma_f < \frac{1}{m_1}$ (в противном случае $\frac{1}{m_1+2} \in \Gamma_f$ автоматически).

По лемме 2 для всех $z \notin U_\delta$ и $w \in \mathbb{C}$ с $|w| < \gamma_f$ справедливо представление

$$f(z)e^{iwz} = L(z) \sum_{\lambda \in \Lambda} G(z, w, \lambda),$$

где для каждого $z \notin U_\delta$ ряд $\sum_{\lambda \in \Lambda} G(z, w, \lambda)$ сходится равномерно и абсолютно внутри круга $K_1 := \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| < \frac{1}{m_1} \right\}$, и, таким образом, его сумма $S_z(w)$ — аналитическая в этом круге функция. Рассмотрим в K_1 замкнутый круг $\overline{K}_2 := \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| \leq \frac{1}{m_1+1} \right\}$. Тогда для выбранной функции f из $\widetilde{A}_{\omega_{\rho(r)}}(-1, 1)$ найдется такое $B_f < \infty$, что для $z \notin U_\delta$

$$|S_z(w)| \leq B_f \quad \text{при всех } w \in \overline{K}_2.$$

Снова, используя [11, глава I, §5, теорема 5.7], получим

$$|f(z)e^{iwz}| \leq \frac{B_f}{r_0^2} e^{|\operatorname{Im}z| + |\operatorname{Re}z|}, \quad z \notin U_\delta \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}, \quad w \in \overline{K}_2.$$

Положим $C_f := B_f r_0^{-2} e^{3r_0}$. Так как кружки из $U_\delta \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}$ не пересекаются, то, как и выше, с помощью принципа максимума модуля аналитической функции можно показать, что

$$|f(z)e^{iwz}| \leq C_f e^{|\operatorname{Im}z| + |\operatorname{Re}z|} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C} \text{ и } w \in \overline{K}_2.$$

Отсюда, в частности, следует, что при $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$ и $w = -\frac{1}{m_1+1} \operatorname{sgn} x$ выполняется неравенство

$$|f(ix)| \leq C_f e^{\left(1 - \frac{1}{m_1+1}\right)|x|}. \quad (4)$$

Для индикатрисы роста $h_f(\varphi)$ функции $f(z)$ имеет место неравенство $h_f(\varphi) \leq (1 - \gamma_f)|\sin \varphi|$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$. Так как тип функции f при порядке 1 равен $\sigma_f = 1 - \gamma_f$, то по теореме 5.6 из [11, глава I]

$$\max_{\varphi \in [0, 2\pi)} h_f(\varphi) = 1 - \gamma_f,$$

причем максимум будет достигаться при $\varphi_{1,2} = \pm\pi/2$. С другой стороны, из (4) следует, что $h_f(\pm\pi/2) \leq 1 - \frac{1}{m_1+1}$. Следовательно, $\frac{1}{m_1+1} \leq \gamma_f$, а, значит, $\frac{1}{m_1+2} \in \Gamma_f$.

Тогда, учитывая (3), на основании леммы 3 получим при $m_2 := m_1 + 2$ и любом $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| \leq B_2 D \|\widetilde{f}\|_{m_1, n_1} e^{\left(1 - \frac{1}{m_2}\right)|\operatorname{Im} z| + \frac{A}{n_2} \omega_{\rho(r)}(|z|)}.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{m_2, n_2}^* \leq B_3 D \|\widetilde{f}\|_{m_1, n_1},$$

где постоянная $B_3 D$ зависит только от m_1 , n_2 , ρ и уточненного порядка $\rho(r)$.

Итак, условие (1) теоремы 1 выполнено. Поэтому $E(\Lambda)$ является абсолютно представляющей системой в $\mathcal{E}_{\{\omega_{\rho(r)}\}}(-1, 1)$, и теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю, профессору А. В. Абанину, за помощь при подготовке работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Напалков В. В.* Достаточные множества в одном классе целых функций // Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного. Уфа: Башкирский филиал АН СССР. Отдел физики и матем. 1980. С. 110–115.

- [2] *Мусин И. Х.* О представлении бесконечно дифференцируемых функций рядами экспонент // *Мат. заметки.* 2003. Т 37:3. С. 402–415.
- [3] *Korobeinik Yu. F.* On absolutely representing systems in spaces of infinitely differentiable functions // *Studia Math.* 2000. V. 139. N 2. P. 175–188.
- [4] *Абанин А. В., Шершнева О. В.* Об одной системе экспонент в пространствах Жеврея // *Изв. Вузов. Сев. Кав. регион. Естественные науки.* 2001. N3. С. 3–6.
- [5] *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультра-распределения. М.: Наука, 2007.
- [6] *Жаринов В.В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // *Успехи мат. наук.* 1979. Т.34, N 4. С. 97–131.
- [7] *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [8] *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной задаче I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // *Матем. сб.* 1975. Т 97. 139:2. С. 193–229.
- [9] *Абанин А. В., Михайлов К. А.* Достаточные условия для абсолютно представляющих систем подпространств в (DFS) -спектрах // *Математический форум.* Т. 3. Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2009 (в печати).
- [10] *Boas R. P.* Entire functions. NY: Acad. press, 1954.
- [11] *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.

UDC 539.3

LONGITUDINAL WAVE SCATTERING
ON TUNNEL CYLINDRICAL CAVITIES
WITH ELASTIC INCLUSIONS OF SECTOR CROSS-SECTION
IN ISOTROPIC MEDIA

Moiseyenko R. P. (Donetsk national university, Ukraine)

Introduction

Elastic wave scattering by an obstacle is the topic of the long standing interest in the dynamics of solid. This class of problems has its background in the mechanics of composites, vibroacoustics and seismology. The methods used to solve such problems can be applied to solve the protective construction problems. The problems with an obstacle (cylindrical or spherical cavity) of the canonical shape are mainly solved and are described in [1]-[4]. Elastic wave scattering processes on obstacles of non-canonical geometry are to be solved. It is presented numerical-analytical technique for solving boundary-value problems concerned the diffractive elastic waves scattering on tunnel cylindrical cavities with elastic inclusions of sector cross-section.

§ 1. Problem statement

The infinite isotropic elastic solid V_1 containing tunnel cylindrical cavity with the radius R_* is considered. Main massif is characterized by Lamé elastic constants μ_1, λ_1 and density ρ_1 . The cavity is partially filled by the inclusion V_2 of sector cross-section with physico-mechanical parameters μ_2, λ_2, ρ_2 . Longitudinal plane wave with the circular frequency ω falls on cylindrical cavity with inclusion. Given massif with cavity relative to system of normalized to R_* dimensionless rectangular Cartesian coordinates x_1, x_2, x_3 and to

cylindrical coordinates r, θ, x_3 as it is shown on Fig.1; the axe Ox_3 is oriented along cavity's axe. The propagation direction of incident plane wave with potentials $\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)}$ is the positive x_1 - direction.

The conditions of ideal mechanical contact are formulated on the boundary $\Gamma_2 = \{r = R, \theta \in [-\varphi_0; \varphi_0]\}$. An inner boundary cavity's surface $\Gamma_1 = \{r = R, \theta \in [\varphi_0; 2\pi - \varphi_0]\}$, which doesn't contact with elastic inclusion, is assumed to be free from tractions. Radial inclusion regions $\Gamma_3 = \{\theta = \pm\varphi_0, r \in [0; R]\}$ are covered with non-stretched membranes.

When the incident wave interacts with obstacle the scattered and refracted by inclusion wave fields described by potentials $\Phi^{(j)}, \Psi^{(j)}$ ($j = \overline{2, 3}$) are generated.

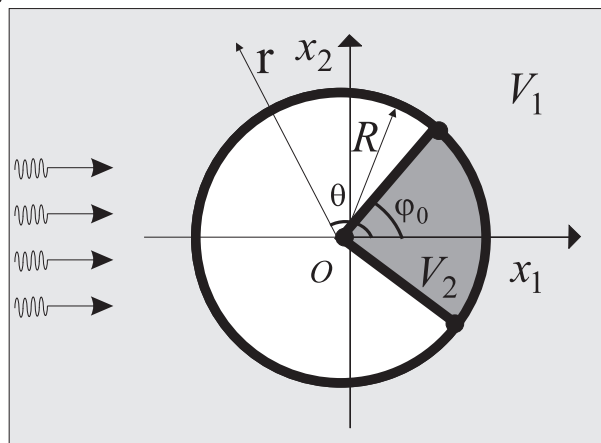


Fig. 1

Total wave field amplitude characteristics in V_1 are $u_r = u_r^{(1)} + u_r^{(2)}$, $u_\theta = u_\theta^{(1)} + u_\theta^{(2)}$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{rr}^{(2)}$, $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^{(1)} + \sigma_{r\theta}^{(2)}$.

The boundary conditions are given by

$$(u_r)_{\Gamma_2} = (u_r^{(3)})_{\Gamma_2}, (u_\theta)_{\Gamma_2} = (u_\theta^{(3)})_{\Gamma_2} \quad (1)$$

$$(\sigma_{rr})_{\Gamma_2} = (\sigma_{rr}^{(3)})_{\Gamma_2}, (\sigma_{r\theta})_{\Gamma_2} = (\sigma_{r\theta}^{(3)})_{\Gamma_2},$$

$$(\sigma_{rr})_{\Gamma_1} = (\sigma_{r\theta})_{\Gamma_1} = 0, \quad (2)$$

$$(u_r^{(3)})_{\Gamma_3} = (\sigma_{\theta\theta}^{(3)})_{\Gamma_3} = 0 \quad (3)$$

§ 2. Numerical-analytical solution for diffraction edge problem

Complex wave potentials describing incident wave field are equal to

$$\Phi^{(1)} = A \exp(i \alpha x_1), \quad \Psi^{(1)} = 0$$

where A - incident wave amplitude; $\alpha = \omega/R_*c_1^{(2)}, \beta = \omega/R_*c_2^{(2)}$; $c_1^{(1)} = (\lambda_1 + 2\mu_1)^{1/2}/\rho_1^{1/2}, c_2^{(1)} = \mu_1^{1/2}/\rho_1^{1/2}$.

In order to obtain the boundary potential expression it is used an expansion of the Jacoby-Anger form:

$$\Phi^{(1)} = A \sum_{n=0}^{\infty} l_n i^n J_n(\alpha r) \cos n\theta, \quad (4)$$

where $l_0 = 1, l_n = 2, n \geq 1$.

Complex wave potentials $\Phi^{(j)}, \Psi^{(j)}$ ($j = \overline{2,3}$) are to be defined from equations

$$\Delta \Phi^{(j)} + \alpha_j^2 \Phi^{(j)} = 0, \quad \Delta \Psi^{(j)} + \beta_j^2 \Psi^{(j)} = 0,$$

where

$$\alpha_2 = \alpha, \alpha_3 = \omega/R_*c_1^{(3)}, \beta_2 = \beta, \beta_3 = \omega/R_*c_2^{(3)},$$

$$c_1^{(j)} = (\lambda_{j-1} + 2\mu_{j-1})^{1/2}/\rho_{j-1}^{1/2}, \quad c_2^{(j)} = \mu_{j-1}^{1/2}/\rho_{j-1}^{1/2}$$

α_j, β_j are dimensionless wave numbers for longitudinal and shear waves;

$c_1^{(j)}, c_2^{(j)}$ are the longitudinal and shear elastic wave velocities in massif isotropic material respectively;

The potentials $\Phi^{(2)}, \Psi^{(2)}$ are of the form corresponding to divergent cylindrical waves with different circular wave numbers n and satisfy the radiation condition

$$\Phi^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n1} H_n^{(1)}(\alpha r) \cos n\theta, \quad \Psi^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n2} H_n^{(1)}(\beta r) \sin n\theta, \quad (5)$$

where

ω is the circular wave frequency; $H_n^{(1)}$ - cylindrical Hankel functions; the coefficients A_{n1}, A_{n2} are to be find from boundary conditions.

The potentials describing refracted wave field $\Phi^{(3)}, \Psi^{(3)}$ are introduced taking into account the problem geometry

$$\Phi^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n1} J_{\nu_n}(\alpha_3 r) \cos \nu_n \theta, \quad \Psi^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n2} J_{\nu_n}(\beta_3 r) \sin \nu_n \theta, \quad (6)$$

where

$$\nu_n = (2n + 1)\pi/2/\varphi_0,$$

B_{n1}, B_{n2} - undefined coefficients.

This potential form provide edge condition (3) exact satisfaction.

The relationship [1] between the potentials and the amplitude functions of mode of deformation is used to obtain amplitude boundary representations. By taking into account aforementioned formulas the amplitude boundary representations may be written as

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^2 A_{nj} \varphi_{urnj}^{(2)} + \varphi_{urn}^{(1)} \right) \cos(n\theta), \\ u_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^2 A_{nj} \varphi_{u\theta nj}^{(2)} + \varphi_{u\theta n}^{(1)} \right) \sin(n\theta), \\ \sigma_{rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^2 A_{nj} \varphi_{\sigma rnj}^{(2)} + \varphi_{\sigma rn}^{(1)} \right) \cos(n\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^2 A_{nj} \varphi_{\sigma\theta\theta nj}^{(2)} + \varphi_{\sigma\theta\theta n}^{(1)} \right) \cos(n\theta), \\ \sigma_{r\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^2 A_{nj} \varphi_{\sigma r\theta nj}^{(2)} + \varphi_{\sigma r\theta n}^{(1)} \right) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$\varphi_{urn}^{(1)} = Al_n i^n \alpha (nJ_n(\alpha r)/\alpha r - J_{n+1}(\alpha r)), \dots,$$

$$\varphi_{\sigma r\theta n}^{(1)} = Al_n i^n (nJ_n(\alpha r)/r^2 - \alpha(-J_{n+1}(\alpha r) + nJ_n(\alpha r)/\alpha r)/r),$$

$$\varphi_{urnj}^{(2)} = \begin{cases} \alpha(-H_{n+1}^{(1)}(\alpha r) + nH_n^{(1)}(\alpha r)/\alpha r) & (j = 1), \\ nH_n^{(1)}(\beta r)/r & (j = 2); \end{cases}, \dots,$$

$$\varphi_{\sigma r \theta nj}^{(2)} = \begin{cases} nH_n^{(1)}(\alpha r)/r^2 - \alpha n(-H_{n+1}^{(1)}(\alpha r) + \\ + nH_n^{(1)}(\alpha r)/\alpha r)/r & (j = 1), \\ ((1/2)\beta^2 H_n^{(1)}(\beta r) + \beta(-H_{n+1}^{(1)}(\beta r) + \\ + nH_n^{(1)}(\beta r)/\beta r)/r - n^2 H_n^{(1)}(\beta r) & (j = 2); \end{cases}$$

$$\varphi_{urnj}^{(3)} = \begin{cases} \alpha_3(-J_{\nu_{n+1}}(\alpha_3 r) + \nu_n J_{\nu_n}(\alpha_3 r)/\alpha_3 r) & (j = 1), \\ \nu_n J_{\nu_n}(\beta_3 r)/r & (j = 2); \end{cases}, \dots,$$

$$\varphi_{\sigma r \theta nj}^{(3)} = \begin{cases} \nu_n J_{\nu_n}(\alpha_3 r)/r^2 - \alpha_3 \nu_n(-J_{\nu_{n+1}}(\alpha_3 r) + \\ + \nu_n J_{\nu_n}(\alpha_3 r)/\alpha_3 r)/r & (j = 1), \\ ((1/2)\beta_3^2 J_{\nu_n}(\beta_3 r) + \beta_3(-J_{\nu_{n+1}}(\beta_3 r) + \\ + \nu_n J_{\nu_n}(\beta_3 r)/\beta_3 r)/r - \nu_n^2 J_{\nu_n}(\beta_3 r) & (j = 2); \end{cases}$$

The system of functional equations for A_{nj} , B_{nj} ($n = \overline{0, N}$, $j = \overline{1, 2}$) is obtained by substituting respective reduced wave field characteristics representations (7) into the edge conditions (1)-(2). In order to algebrize this system the method of least squares is applied. The method application consists in the quadratic discrepancy function minimization

$$\begin{aligned} J(A_{0j}, \dots, A_{Nj}, B_{0j}, \dots, B_{Nj}, \overline{A_{0j}}, \dots, \overline{A_{Nj}}, \overline{B_{0j}}, \dots, \overline{B_{Nj}}) = \\ = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (|\sigma_{rr} - \sigma_{rr}^{(3)}|^2 + |\sigma_{r\theta} - \sigma_{r\theta}^{(3)}|^2 + |u_r - u_r^{(3)}|^2 \\ + |u_\theta - u_\theta^{(3)}|^2) d\theta + \int_{\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} (|\sigma_{rr}|^2 + |\sigma_{r\theta}|^2) d\theta, \end{aligned}$$

i.e. in conditions formulation of form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{A_{nj}}} J(A_{0j}, \dots, A_{Nj}, B_{0j}, \dots, B_{Nj}, \overline{A_{0j}}, \dots, \overline{A_{Nj}}, \overline{B_{0j}}, \dots, \overline{B_{Nj}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{B_{nj}}} J(A_{0j}, \dots, A_{Nj}, B_{0j}, \dots, B_{Nj}, \overline{A_{0j}}, \dots, \overline{A_{Nj}}, \overline{B_{0j}}, \dots, \overline{B_{Nj}}) &= 0, \\ (n = \overline{(0, N)}) \end{aligned} \tag{8}$$

§ 3. Numerical results

Numerical analysis of diffraction field characteristics using described technique is held for wave propagation on ($\varphi_0 = \pi/2, \varphi_0 = \pi/4, \varphi_0 = 0$) elastic inclusion of sector cross-section in the massif with the characteristics: $\lambda_1 = 2, \mu_1 = 1, \rho_1 = 1. \lambda_2 = 4, \mu_2 = 1, \rho_2 = 0.5$. Calculations for scattered wave field characteristics were held using aforementioned method for several incident wavelength value $\lambda_* = 1, \lambda_* = 2$. Displacement amplitude functions were depicted on the inside massif V_1 enveloping the cavity's cross-section $3R^*3R$ region fig. 2–7. Wave field intensification is shown by change the light color to the dark color on the figures. From numerical analysis it is obtained that the shade zone besides cavity is more homogeneous for the case of inclusion characterized by angular measure $\varphi_0 = \pi/4$.

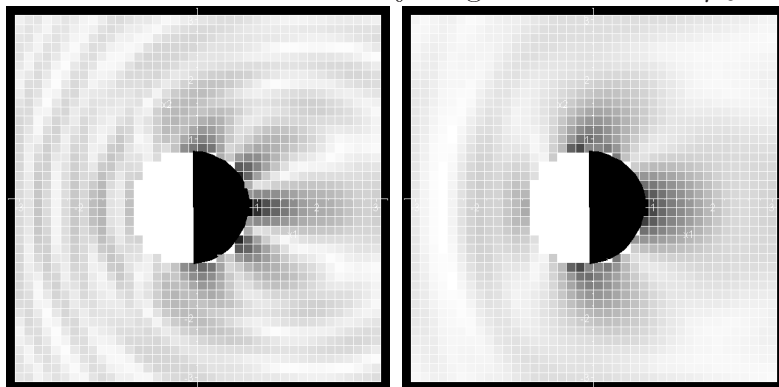


Fig.2 $\varphi_0 = \pi/2, \lambda_* = 1$ *Fig.3* $\varphi_0 = \pi/2, \lambda_* = 2$

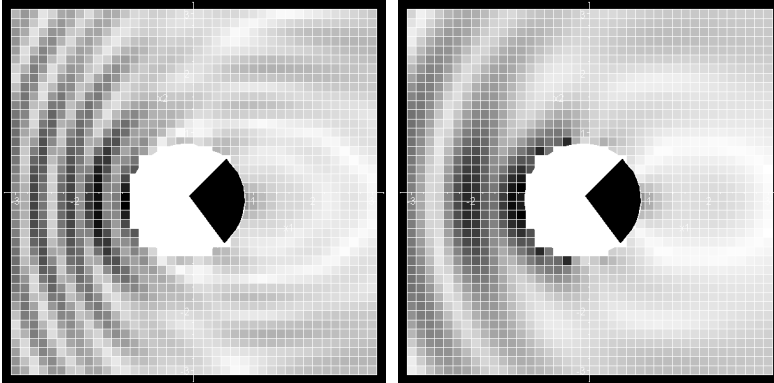


Fig.4 $\varphi_0 = \pi/4, \lambda_* = 1$ Fig.5 $\varphi_0 = \pi/4, \lambda_* = 2$

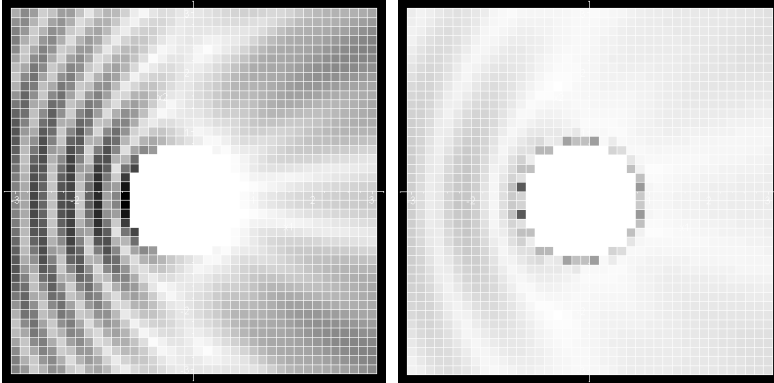


Fig.6 $\varphi_0 = 0, \lambda_* = 1$ Fig.7 $\varphi_0 = 0, \lambda_* = 2$

References

- [1] Гузь А. Н. , Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. - Киев: Наук. думка, 1978. -307 с.
- [2] Liu Y., Wu R. S., Ying C. F. Scattering of elastic waves by an elastic or viscoelastic cylinder // Geophys. J. Int.- 2000.- 142, N 27-28.- P. 439-460.
- [3] Pao Y. H., Mow C. C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration.- New York: Crane Rassak Co, 1973.- 689 p.
- [4] Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides.- 1978.- 618 p.

УДК 519.863

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ПАЕВЫХ
ИНВЕСТИЦИОННЫХ ФОНДОВ ДЛЯ КОММЕРЧЕСКОГО
БАНКА

Морозкин Ю. Н. (Уфа, БашГУ)

Введение

Для достижения максимальной эффективности на фондовом рынке коммерческие банки создают портфели ценных бумаг, тем самым, уменьшая риск своих операций, а также повышая их рентабельность и прибыльность. Особое значение портфельное инвестирование приобретает во время финансового кризиса.

Одной из наиболее развивающихся в настоящее время форм портфельного инвестирования выступают паевые инвестиционные фонды, которые создаются управляющей компанией. В ПИФ входят различного рода ценные бумаги, являясь, таким образом, более надежным и хорошо диверсифицированным объектом вложения средств.

Паевые инвестиционные фонды являются для коммерческих банков более выгодным и эффективным способом инвестирования средств на фондовом рынке, т.к. состоят из широко диверсифицированных ценных бумаг, и тем самым имеют меньший риск по сравнению с инвестициями в отдельную ценную бумагу. В работе моделируется портфель ценных бумаг коммерческого банка, состоящий из паевых инвестиционных фондов, позволяющий в значительной мере снизить инвестиционные риски.

§ 1. Определение доходности и риска паевых инвестиционных фондов банка

Для формирования портфеля из паевых инвестиционных фондов и выбора ПИФов, способных минимизировать риск при достаточном уровне дохода, необходимо определить доходность и риски паевых инвестиционных фондов. Для этого определим дисперсию, стандартное отклонение, а так же ковариацию и корреляцию. Для определения этих показателей были взяты данные о стоимости ПИФов «Газпромбанк - Управление активами» с 31.10.2008 по 30.09.2009 года.

Среднее квадратическое отклонение определим по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (1)$$

где σ^2 - дисперсия.

Дисперсия - это мера разброса возможных исходов относительно ожидаемого значения. Чем выше дисперсия, тем больше разброс, а следовательно риск. Определяем дисперсию по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (r_i - \bar{r})^2}{n - 1} \quad (2)$$

и находим стандартное отклонение (табл. 1).

Таблица 1. Расчет дисперсии и стандартного отклонения								
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄	П ₅	П ₆	П ₇	П ₈
Дисп-я	1,82	4,65	82,83	33,13	133,46	16,36	268,28	391,55
Ст. откл-е	1,35	2,156	9,1	5,76	11,55	4,044	16,4	19,79

Таким образом, с учетом анализа дисперсии и стандартного отклонения, определяем, что менее рискованными ПИФаами являются «Казначейский» и «Облигации», состоящие из федеральных, муниципальных, субфедеральных и корпоративных облигаций. Наиболее рискованными являются паевые инвестиционные

фонды «Индекс ММВБ», «Акции», «Фонд развивающихся отраслей» и «Электроэнергетика», имеющие в своем составе ценные бумаги, ориентированные в большей степени на определенный сегмент рынка.

Зная ожидаемые доходности и показатели риска (стандартное отклонение), необходимо произвести еще ряд расчетов по определению коэффициентов ковариации и корреляции. После расчета данных коэффициентов станет возможным формирование портфелей, соответствующих нашим требованиям по риску и доходности[2].

Ковариация - это мера, учитывающая дисперсию индивидуальных значений доходности бумаги и силу связей между изменениями доходностей данной бумаги и других ценных бумаг.

Будем рассчитывать ковариацию по формуле:

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum(r_x - r_{xc}) \cdot (r_y - r_{yc})}{n - 1}, \quad (3)$$

где r_x и r_y - доходности активов X и Y; r_{xc} и r_{yc} - ожидаемые доходности активов X и Y; n - число наблюдений.

Для измерения силы взаимосвязи между двумя активами используется коэффициент корреляции:

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (4)$$

Таким образом для определения корреляции между ПИФами, необходимо рассчитать произведения отклонений доходностей от средних, попарно взятых ПИФов.

	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄	П ₅	П ₆	П ₇	П ₈
П ₁	1	0,897	-0,086	0,012	-0,1	-0,19	-0,04	-0,214
П ₂	0,897	1	0,002	0,064	-0,029	-0,2	0,054	-0,33
П ₃	-0,086	0,002	1	0,95	0,97	0,24	0,93	0,290
П ₄	0,012	0,064	0,95	1	0,93	0,168	0,99	0,48
П ₅	-0,106	-0,03	0,97	0,93	1	0,25	0,91	0,2
П ₆	-0,191	-0,2	0,24	0,168	0,25	1	0,27	-0,06
П ₇	-0,042	0,054	0,93	0,99	0,91	0,27	1	0,49
П ₈	-0,214	-0,33	0,29	0,48	0,2	-0,06	0,49	1

Как видно из таблицы 2, корреляции ежемесячных доходностей между некоторыми паевыми инвестиционными фондами являются отрицательными, что позволяет создать оптимальный портфель из ПИФ с меньшим риском.

§ 2. Построение минимально - дисперсионной границы и определение эффективного множества

Для нахождения оптимального портфеля необходимо определить допустимое множество соотношений "риск-доход" для инвестора, которое достигается путем построения минимально-дисперсионной границы портфелей, т.е. границы, на которой лежат портфели с минимальным риском при заданной доходности.

Эффективная граница - это граница, которая определяет эффективное множество портфелей. Портфели, лежащие слева от эффективной границы применить нельзя, т.к. они не принадлежат допустимому множеству. Портфели, находящиеся справа (внутренние портфели) и ниже эффективной границы являются неэффективными, т.к. существуют портфели, которые при данном уровне риска обеспечивают более высокую доходность, либо более низкий риск для данного уровня доходности.

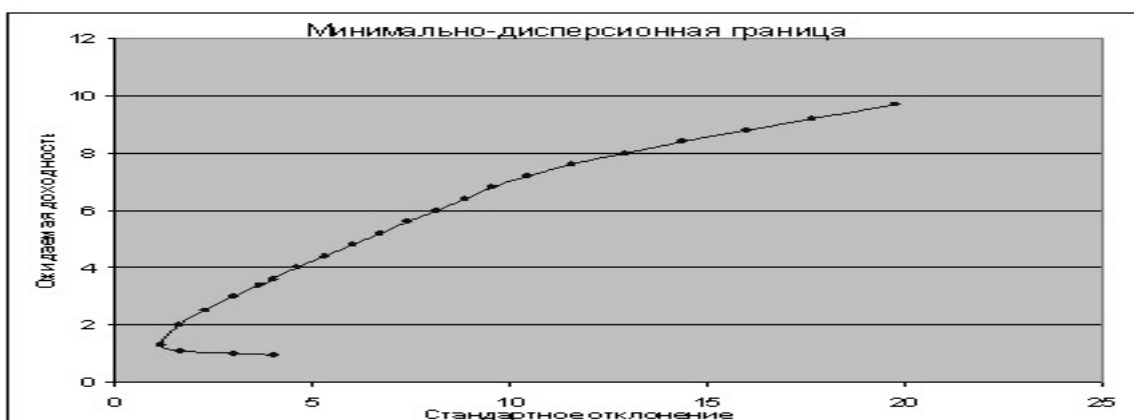


Рис. 1: Минимально-дисперсионная граница

Для построения минимально-дисперсионной границы и определения «эффективной границы» нам будут необходимы значения ожидаемых доходностей, рисков (стандартных отклонений) и ковариации активов, которые были определены. Имея эти данные, можно приступить к нахождению «эффективных портфелей».

Рассчитаем ожидаемую доходность, дисперсию и стандартное отклонение средневзвешенного портфеля, т.е. такого портфеля, в котором доля каждого ПИФа составит 12,5%. Средняя (ожидаемая) месячная доходность средневзвешенного портфеля 3,88% при риске 6,647%. Рассчитаем среднюю доходность и риск для портфелей с различными долями и на основе на полученных данных построим минимально-дисперсионную границу (рис. 1).

Как видно из рис. 1, «эффективная граница» берет свое начало только в точке минимально-дисперсионного портфеля, т.е. портфеля, которому соответствует минимальный риск. В данном случае это портфель с доходностью 1,3% и риском 1,14%, с долями 84,5% в «Казначейский», 14% в «Акции второго эшелона» и 1,5% в «Электроэнергетика».

Портфели, лежащие на нижней линии являются неэффективными, т.к. любому из этих портфелей можно найти замену в виде другого портфеля с наименьшим риском при более высоком уровне доходности[3].

§ 3. Определение оптимального портфеля из эффективного множества

При нахождении оптимального портфеля, необходимо взять во внимание такое понятие как «полезность». Более высокие значения полезности присваиваются портфелям с высокой ожидаемой

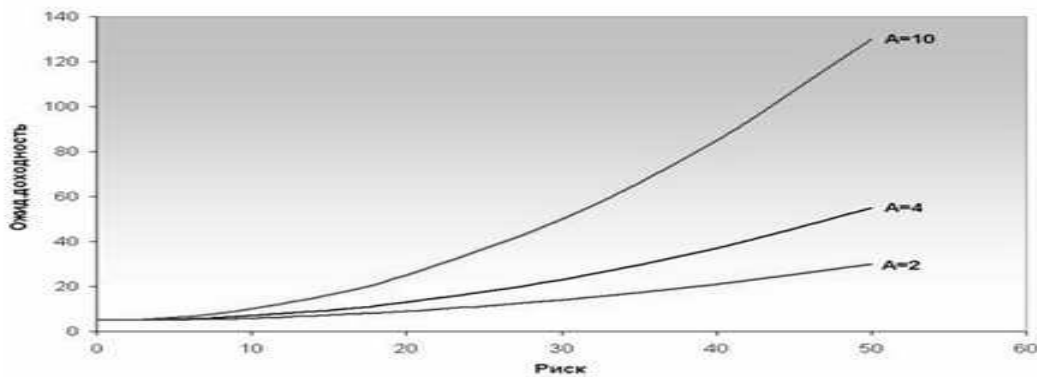


Рис. 2: Кривые безразличия

доходностью, а низкие значения полезности присваиваются портфелям с высоким риском. Формула полезности имеет следующий вид:

$$U = E(r) - 0,005 \cdot A \cdot \sigma^2 \quad (5)$$

где $E(r)$ - ожидаемая доходность; U - полезность; A - отношение инвестора к риску.

Из соотношения видно, что полезность увеличивается по мере роста ожидаемой доходности и уменьшается по мере роста риска. Размер, на который снижается полезность, зависит от значения A , т.е. степени отношения инвестора к риску. Чем выше значение A , тем более консервативен инвестор, т.е. менее склонен к риску. Нейтральные к риску инвесторы имеют значение $A=0$.

Для того чтобы найти оптимальный портфель из эффективного множества, необходимо построить кривые безразличия. Точка касания кривой безразличия с эффективной границей будет соответствовать доходности и стандартному отклонению оптимального портфеля, удовлетворяющим отношению инвестора к риску.

Данные кривые можно построить для любого типа инвестора. Например, для более консервативного инвестора, с уровнем избегания риска $A=10$, кривая будет иметь более крутой угол наклона. Для менее консервативного инвестора, кривая будет более пологой (рис. 2). Отметим свойства кривых безразличия[1]:

1. все портфели, лежащие на одной заданной кривой являются равноценными для инвестора;
2. инвестор будет считать любой портфель, лежащий на кривой, которая находится выше и левее, более привлекательным, чем любой другой портфель, который находится на кривой расположенной ниже и правее.

Рассчитаем показатели доходности для 3 инвесторов с различным отношением к риску. Первый инвестор более нейтрален к риску, число, характеризующее его отношение к риску, равно 2. Второй же предпочитает не брать на себя большой риск, потому $A=4$. И 3 инвестор, с коэффициентом $=10$, стремится минимизировать риск.

Как видно из графика (рис.3), кривая безразличия с коэффициентом отношения инвестора к риску, равному 10, касается эффективной границы в точке соответствующей ожидаемой доходности 4,8 и риску 6, кривая безразличия с уровнем отношения к риску, равному 4, касается эффективной границы в точке, соответствующей ожидаемой доходности 7,2 и стандартному отклонению 10,43. А кривая безразличия с коэффициентом отношения инвестора к риску 2 касается эффективной границы в точке, соответствующей ожидаемой доходности в размере 8,4 и стандартным отклонением равным 14,38.

Таким образом, мы определили состав оптимального портфеля для каждого инвестора.

Банку, стремящемуся минимизировать риски, подходит портфель, из 37% ПИФ «Газпромбанк-Облигации», 45% ПИФ «Газпромбанк-Акции» и 18% «ПИФ Электроэнергетика», и имеющий среднюю доходность 4,8 и риск, равный 6. Банку с умеренным отношением к риску, необходимо инвестировать свои средства в портфель, состоящий из 64% ПИФ «Акции» и 36% ПИФ «Электроэнергетика», с доходностью 7,2 и стандартным отклонением 10,43. А если банк стремится увеличить доходность от вложений в паевые инвестиционные фонды, то оптимальным будет портфель, состоящий из 33% в ПИФ «Акции» и 64% в ПИФ «Электроэнергетика». Такой портфель при стандартном отклонении 14,38 может обеспечить доходность 8,4

Мировой финансовый кризис позволил определить эффективность вложений в паевые инвестиционные фонды. Конечно, боль-

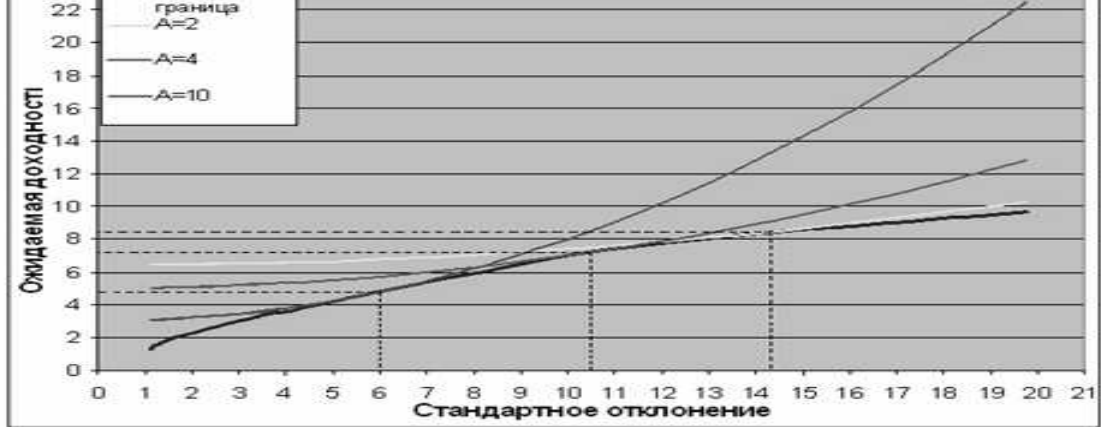


Рис. 3: Минимально-дисперсионная граница

шинство ПИФ показали отрицательную динамику доходности, но она не так велика, если сравнивать с отдельно взятыми ценными бумагами.

Падение мировых фондовых рынков привело к значительному росту вновь регистрируемых паевых инвестиционных фондов, которые нацелены на упавшие в цене ценные бумаги.

Необходимо отметить, что портфель из паевых инвестиционных фондов является менее рискованным, чем портфель, состоящий из акций, т.к. паевые инвестиционные фонды уже являются широко диверсифицированными активами, тем самым, являясь наиболее привлекательным для банков объектом инвестирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Боровкова В. А.* Рынок ценных бумаг. 2-е издание. -СПб.: Питер, 2008. - 400 с.
- [2] *Морозкин Ю. Н., Мухаметдинов И. Т.* Формирование оптимального портфеля ценных бумаг для коммерческого банка. // Современные финансовые проблемы экономического развития: Сборник научных статей. Вып. 2. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. С. 54-59.
- [3] *Морозкин Ю. Н., Мухаметдинов И. Т., Хайруллин Б. Ф.* Принципы математического моделирования оптимального портфеля состоящего из паевых инвестиционных фондов. // ЭВТ в обучении и моделировании. Сборник научных трудов. Бирск. - 2009. - С. 153-156.

УДК 519.862.6

ОЦЕНКА КРЕДИТНОЙ ИСТОРИИ ЗАЕМЩИКА ПРИ
МОДЕЛИРОВАНИИ КОРРЕКТИРОВОЧНЫХ
КОЭФФИЦИЕНТОВ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА ДЛЯ
ФИЗИЧЕСКИХ ЛИЦ

Морозкин Ю. Н., Хайруллин Б. Ф. (Уфа, БашГУ)

Введение

Активное развитие потребительского кредитования требует от банков выработки быстрых и высокотехнологичных методик для повышения эффективности процесса кредитования, которые позволяют банку принимать обоснованные кредитные решения и снижать кредитные риски. В работе смоделированы корректировочные коэффициенты коммерческого банка, в зависимости от добросовестности кредитной истории заемщика.

Для оценки кредитной истории заемщика в банковской практике используются три характеристики[4]:

- 1). добросовестная кредитная история;
- 2). недобросовестная кредитная история;
- 3). кредитная история отсутствует

Кредитование третьей группы заемщиков целесообразно для банка на базовых условиях. Фактор кредитной истории для таких заемщиков не влияет на параметры кредитования, которые в данном случае остаются в рамках базовых. Рассмотрим первые два варианта более подробно.

§ 1. Добросовестная кредитная история.

Заемщик ранее кредитовался в банках. Свои обязательства по основному долгу и причитающимся процентам и комиссиям выполнял в установленные кредитным соглашением сроки в полном

объеме [4]. С точки зрения минимизации рисков такой заемщик интересен для банка. Оценку максимальной суммы кредита для такого заемщика можно увеличить, на некую величину β_k , процентную ставку можно уменьшить на величину β_i . Таким образом, если погашения займа клиентом будет проводится согласно условиям графика платежа «основной долг равными долями» - оценку максимальной суммы кредита можно выразить соотношением [2]:

$$K_{\max} \leq \beta_k \cdot \frac{1}{1 + \beta_i i \cdot n} (\gamma \cdot DC \cdot n - DO) \quad (1)$$

где i - ставка кредитования; n - период кредитования; γ - кредитный коэффициент, который рассчитывается на основе чистого среднемесячного дохода заемщика и кредитной политики банка с учетом прогноза макроэкономических показателей банковской системы региона [1]; DO - сумма других денежных обязательств заемщика на момент предоставления кредита, таких, как потенциальные платежи по действующим кредитным договорам и договорам поручительства; DC - чистый среднемесячный доход клиента.

Если погашение займа будет проводится «аннуитетными платежами» - оценку максимальной суммы кредита можно выразить соотношением [2]:

$$K_{\max} \leq \beta_k \frac{1 - (1 + \beta_i \cdot i)^{-n}}{n} (\gamma \cdot DC \cdot n - DO) \quad (2)$$

Величины коэффициентов β_k , β_i определяются в целях регулирования рисков и повышения рентабельности потребительского кредитования. Их значения зависят от сумм, сроков и процентных ставок предыдущих кредитов заемщика в банке-кредиторе. Агрегированный показатель для всех вышеперечисленных факторов - средняя процентная маржа (разница между ставкой по кредиту заемщика и себестоимостью ресурсов банка [4]), полученная банком от работы с заемщиком в прошлом:

$$M_{\%} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_l}{l}, \quad (3)$$

где m_1, m_2, \dots, m_l - процентное значение маржи, полученной банком в $1, 2, \dots, l$ платеж заемщика в банке, l - количество платежных периодов заемщика в банке. Таким образом, значения β_k, β_i находятся в определенной зависимости от $M\%$

Через \tilde{M} обозначим значение процентной маржи, соответствующее коэффициентам нижней границы процентной ставки $i_{\Delta-}$ и верхней границе суммы кредита $K_{\Delta+}$. Тогда систему функций для определения скорректированных параметров кредитования при добросовестной кредитной истории можно выписать в виде:

$$\beta_i = \left(1 - (1 - i_{\Delta-}) \frac{M\%}{\tilde{M}} \right), \beta_i \in [i_{\Delta-}; 1), i_d \in [i_{\min}; i), \quad (4)$$

$$\beta_K = \left(1 + (K_{\Delta+} - 1) \frac{M\%}{\tilde{M}} \right), \beta_K \in (1; K_{\Delta+}], K_d \in (K; K_{\max}], \quad (5)$$

где $M\% \in (0; +\infty)$.

§ 2. Недобросовестная кредитная история

Заемщик ранее кредитовался в банках. Свои обязательства по основному долгу и причитающимся процентам и/или комиссиям не выполнял в установленные кредитным соглашением сроки в полном объеме [4]. Для минимизации кредитных рисков в этом случае кредитные учреждения могут ввести в свои модели оценки заемщиков соответствующие поправки в параметры кредитования φ_i, φ_k .

Если погашение займа будет проводится «аннуитетными платежами» - оценку максимальной суммы кредита можно выразить соотношением [2]:

$$K_{\max} \leq \varphi_k \cdot \frac{1}{1 + \varphi_i i \cdot n} (\gamma \cdot DC \cdot n - DO). \quad (6)$$

а в случае погашение займа «аннуитетными платежами» [2]:

$$K_{\max} \leq \varphi_k \frac{1 - (1 + \varphi_i \cdot i)^{-n}}{n} (\gamma \cdot DC \cdot n - DO). \quad (7)$$

Значения φ_i, φ_k зависят от количества и сроков просрочек, возникших у заемщика в прошлом. Для оценки показателя просроченной задолженности определим коэффициент средней просроченной задолженности:

$$G = \frac{g_1 + g_2 + \dots + g_p}{T_{pl} \cdot dn}, \quad (8)$$

где g_1, g_2, \dots, g_l количество дней просрочки в $1, 2, \dots, p$ раз возникновения у заемщика просроченной задолженности, dn - количество дней в расчетном периоде, T_{pl} - количество платежей по кредиту, которые необходимо завершить заемщику по графику погашения на момент анализа.

Значения φ_i, φ_k находятся в определенной зависимости от G . Через \tilde{G} обозначим значение просроченной задолженности, соответствующее верхней границе процентной ставки $i_{\Delta+}$ и нижней границе суммы кредита $K_{\Delta-}$.

Тогда систему функций для определения скорректированных параметров кредитования при добросовестной кредитной истории можно выписать в виде:

$$\varphi_i = \left(1 + (i_{\Delta+} - 1) \frac{G}{\tilde{G}} \right), \varphi_i \in (1; i_{\Delta+}], i_{nd} \in (i; i_{\max}], \quad (9)$$

$$\varphi_k = \left(1 - (1 - K_{\Delta-}) \frac{G}{\tilde{G}} \right), \varphi_k \in [K_{\Delta-}; 1], K_{nd} \in [K_{\max}; K), \quad (10)$$

где $G \in (0; +\infty]$.

Целью кредитной работы банка является максимизация маржи $M\%$ от процентных доходов по предоставленным кредитам при условии формирования кредитного портфеля высокого качества, то есть предоставление кредитов таким заемщикам, величина G по которым равна нулю или близка к этому значению.

Коэффициенты $i_{\Delta-}, i_{\Delta+}, K_{\Delta-}, K_{\Delta+}$ показывают отношение банка к риску. Они так же, как и коэффициент γ определяются каждым банком индивидуально, с учетом основные тенденции раз-

вития прогнозируемых макроэкономических показателей банковской системы региона [1].

Например, стагнация или падения темпа экономического развития приводят к повышению банковского кредитного риска, что ведет к уменьшению льготных коэффициентов $i_{\Delta-}$, $K_{\Delta+}$ и к увеличению коэффициентов $i_{\Delta+}$, $K_{\Delta-}$ характеризующих недобросовестную кредитную историю заемщика и, следовательно, повышенный риск коммерческого банка. Таким образом, для принятия решения в отношении величин $i_{\Delta-}$, $i_{\Delta+}$, $K_{\Delta-}$, $K_{\Delta+}$ банк должен оценить значения $M\%$ и G .

§ 3. Вычислительный эксперимент.

Пусть заемщик уже брал кредит в банке в размере 400 000 рублей под 18% годовых на срок 3 года. При этом он имеет добросовестную кредитную историю, то есть на протяжении кредитного договора выполнял свои обязательства в срок и в полном объеме. Пусть ресурсы банка привлекались с использованием срочных депозитов физических лиц под 10% годовых. Тогда по формуле (5) можно рассчитать процентную маржу банка. Платежный календарь заемщика, с учетом стоимости привлеченных ресурсов представлен в таблице 1.

Таблица 1. График погашения								
№	Dk	%	%(пр)	$\sum(\%)$	$\sum(\% \text{ пр})$	$\sum(\text{од})$	$\sum(\text{уп})$	m
1	400000	18	10	5128,77	2849,32	11112,00	16240,77	2279,4
—	— — — —	—	—	— —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —
12	277768	18	10	4234,82	2359,13	11112,00	15346,82	1875,6
—	— — — —	—	—	— —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —
24	144424	18	10	2207,91	1226,61	11112,00	13319,91	981,30
—	— — — —	—	—	— —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —
36	11080	18	10	169,39	94,10	11080,00	11249,39	75,29
	Итого			110318	61353	400000	510318	48965

Таким образом, по формуле (5) найдем среднюю процентную маржу:

$$M_{\%} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_l}{i} = \frac{48965}{36} = 1360$$

Предположим, что чистый среднемесячный доход заемщика $DC = 41\,100$ рублей. Сумма других денежных обязательств заемщика на момент предоставления кредита $DO = 0$. Пусть прогноз основных показателей баланса кредитных организаций региона, демонстрирует ускорение роста. Кредитный коэффициент [4], согласно политике коммерческого банка, возьмем $\gamma = 0,54$.

Заемщик собирается взять кредит на 36 месяцев. Допустим, кредит может быть выдан под 18% годовых или, примерно, 1,5% в месяц. Договор предусматривает погашение займа равными долями ежемесячно. Тогда максимальную сумму кредита K_{\max} , которая может быть выдана заемщику, можно оценить следующим образом [3]:

$$K_{\max} \leq \frac{1}{1 + 0,015 \cdot 36} \cdot 798984 \leq \frac{798984}{1,54} \approx 518820$$

рублей.

Пусть кредитный комитет с учетом среднесрочного макроэкономического прогноза основных показателей банковской системы региона установил нижнюю границу процентной ставки $i_{\min} = 14\%$ годовых. Тогда коэффициент $i_{\Delta-} = 1 - \frac{0,14-0,18}{0,18} = 0,78$.

Значение процентной маржи, соответствующее нижней границе процентной ставки, определяется из расчета совокупных выданных кредитов за t предыдущих лет. В нашем случае примем $\tilde{M} = 4500$. Коэффициент верхней границы суммы кредита примем равным: $K_{\Delta+} = 1,15$.

Тогда, согласно (4), (5) получим:

$$\beta_i = \left(1 - (1 - 0,78) \frac{1360}{3500} \right) = 0,914;$$

$$\beta_K = \left(1 + (1,15 - 1) \frac{1360}{3500} \right) = 1,0585;$$

Таким образом, с учетом политики банка и добросовестной кредитной истории заемщика можно скорректировать процентную ставку, уменьшая ее с 0,18% годовых до $\beta_i \cdot 0,18 = 0,914 \cdot 0,18 = 16,5\%$ годовых.

В таком случае согласно (1) рассчитаем максимальную сумму кредита:

$$K_{\max} \leq \frac{1}{1 + 0,01375 \cdot 36} \cdot 798984 \leq \frac{798984}{1,495} \approx 534437$$

Данную оценку можно также скорректировать с учетом повышающего коэффициента:

$$K_d = \beta_k \cdot K = 1,0585 \cdot 5344437 = 565701$$

То есть у клиента, с учетом добросовестной кредитной истории, оценка максимальной суммы кредита может быть увеличена на 9%.

Аналогично можно рассчитать коэффициенты φ_i, φ_k согласно формулам (9), (10) с учетом недобросовестной кредитной истории заемщика. В этом случае у заемщика процентная ставка будет больше, а максимальная сумма кредита меньше.

Таким образом, оценка максимально возможной суммы кредита зависит от разработанного плана погашения кредита и достоверной оценки кредитоспособности заемщика, а применение банком рассчитанных в работе корректировочных коэффициентов позволит привлечь в банк добросовестных заемщиков более выгодными условиями кредитования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Марданов Р. Х., Морозкин Ю. Н.* Математическое моделирование и прогнозирование основных статей баланса банковской

системы региона // Труды Средневолжского математического общества, Том 7. - 2005. - №1 - С. 340-347.

- [2] *Морозкин Ю. Н.* Математическое моделирование некоторых аспектов кредитования // Вестник Башкирского университета. Уфа - 2006. №4 - С. 13-16.
- [3] *Морозкин Ю. Н.* Применение математического моделирования в задачах оптимизации процессов кредитования // Препринт № 100. - Саранск: СВМО, 2007. - 28 с.
- [4] *Морозкин Н. Д., Хайруллин Б. Ф., Морозкин Ю. Н.*, Оценка максимальной суммы кредита и математическое моделирование корректировочных коэффициентов с учетом кредитной истории заемщика. // Вестник Чувашского университета. Чебоксары - 2007. №4 - С. 402-408.

УДК 534.113

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОДАТЧИКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ ГРУЗА

Муртазина Р. Ф. (Уфа, БГУ)

Введение

Рассматривается цилиндрический стержень, один конец которого ($x = 0$) закреплен, а другой ($x = l$) свободен. В какой-то момент времени t_0 свободный конец подвергается удару груза массы M , движущегося вдоль оси со скоростью v , после чего груз отлетает. Решается задача определения момента времени t_0 удара, длины стержня l , массы груза m и скорости v по данным датчика, который снимает значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ смещения сечения стержня с абсциссой x_1 в различные моменты времени t . Модуль упругости стержня E , площадь его поперечного сечения S и объемная

плотность ρ считаются известными. Задача может быть решена теоретически с помощью уравнения продольных колебаний однородного стержня.

В [1] и [9] решены задачи, аналогичные данной. Но в [1] датчик снимает показания смещения $u(x_1, t)$, а в [9] значение частной производной смещения по x в точке x_1 . Кроме того, в обеих задачах груз после удара как бы соединяется со стержнем.

Ближкие по постановке задачи рассмотрены в работах [2–6]. В [2–3] найдены закрепления механических систем по собственным частотам колебаний, в [4] предложен метод диагностики подземных трубопроводов, в [5] решено волновое уравнение для случая, когда на одном из концов известна функция $u(0, t)$, в [6] рассмотрены обратные динамические задачи для дифференциальных уравнений теории упругости. Однако поставленная здесь задача отличается от перечисленных как по постановке, так и по методу решения.

Как известно, уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид [7,8]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1)$$

Граничное условие на левом конце ($x = 0$) будет, очевидно,

$$u(0, t) = 0 \quad (2)$$

Уравнение движения груза под действием силы реакции стержня, которая равна по величине усилию в сечении $x = l$ стержня и направлена в противоположную сторону, имеет вид

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (3)$$

Это и будет граничное условие на конце $x = l$. Уравнению (3)

можно придать вид

$$ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (4)$$

если обозначить через $m = \frac{M}{\rho Sl}$ отношение массы движущегося груза к массе стержня

Начальные условия записываются следующим образом:

$$u|_{t=t_0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad 0 \leq x < l, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v, \quad t = t_0, \quad x = l \quad (6)$$

Второе начальное условие означает, что в момент удара движущегося груза все промежуточные сечения стержня имеют скорость, равную нулю, а скорость конца стержня равна скорости груза.

Решение начально-краевой задачи (1), (2), (4), (5), (6) известно (см. например, [7], стр.81-85). Здесь рассматривается обратная к (1),(2),(4),(5),(6) задача. В терминах начально-краевой задачи (1),(2),(4),(5),(6) интересующую нас обратную задачу можно сформулировать так: известна величина a и значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке x_1 при изменении временного параметра t . Требуется определить l, t_0, m, v .

Решение обратной задачи

В общем, решение данной задачи не отличается от решения задачи [9]. Удар груза о стержень продолжается до тех пор, пока $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$ не обращается в нуль. Продолжительность удара τ зависит от отношения массы ударяющего тела к массе стержня $m = \frac{M}{\rho Sl}$. Продолжительность удара увеличивается с увеличением m :

Отношение масс	Продолжительность удара
$m < 1.7283$	$2l < a\tau < 4l$
$1.7283 < m < 4.1511$	$4l < a\tau < 6l$
$4.1511 < m < 7.35$	$6l < a\tau < 8l$

Определим сначала момент t_0 удара груза и длину стержня l . Для этого нужно воспользоваться тем, что скорость распространения продольных волн стержня постоянна и равна a (см., например, [2], стр.76, 84). До удара груза стержень находился в состоянии покоя. При ударе по стержню возникают продольные колебания. Первоначально по стержню распространяется только обратная волна $\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\varphi(at - at_0 + x))\right)$. В какой-то момент времени t_1 в интервале $t_0 < t < t_0 + l/a$ в точке $x = x_1$ датчик фиксирует значение производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Момент t_1 - это момент перехода с $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = 0$ к $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} < 0$. При $t = t_0 + l/a$ обратная волна достигнет закрепленного конца и при $(t_0 + l/a) < t < (t_0 + 2l/a)$ к ней прибавится отраженная волна. В некоторый момент t_2 датчиком будет зафиксирован 1-ый разрыв функции $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$ в интервале $(t_0 + l/a) < t < (t_0 + 2l/a)$ (В [1] t_2 - точка минимума функции $u(x,t)$). При $t = t_0 + 2l/a$ прямая волна отразится от конца $x = l$. В какой-то момент t_3 датчиком будет зафиксирован 2-ой разрыв функции $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$ в интервале $(t_0 + 2l/a) < t < (t_0 + 3l/a)$ (В [1] t_3 - точка максимума функции $u(x,t)$). За время $T = t_3 - t_2$ волна пройдет расстояние $S = 2(l - x_1)$. Поскольку она движется со скоростью a , имеем $a = S/T$. Откуда

$$l = x_1 + a(t_3 - t_2)/2 \quad (7)$$

Зная l , легко найти t_0 . После момента удара по стержню ($t = t_0$) распространяется только обратная волна

$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\varphi(at - at_0 + x))\right)$. Она достигнет точки $x = x_1$ в момент времени t_1 . За время $t_1 - t_0$ волна со скоростью a пройдет расстояние $l - x_1$. Следовательно,

$$t_0 = t_1 - (l - x_1)/a \quad (8)$$

Определение m и v . Как известно ([7], стр. 82-84):

$u(x_1, t) = -\varphi(a(t - t_0) + x_1) = -\frac{mlv}{a} \left(1 - \exp\left(-\frac{at - at_0 + x_1 - l}{ml}\right)\right)$ при $t_0 < t < t_0 + l/a$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{\partial}{\partial x}(-\varphi(a(t - t_0) + x))\right|_{x=x_1} = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at - at_0 + x_1 - l}{ml}\right)$$

при $t_0 < t < t_0 + l/a$. Выбрав два известных значения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ в точке $x = x_1$ при различных значениях $t = t_1^*$ и $t = t_2^*$ ($t_1^*, t_2^* \in (t_0, t_0 + l/a)$), получим систему двух уравнений от двух неизвестных m и v :

$$\left.\frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at_1^* - at_0 + x_1 - l}{ml}\right) \quad (9)$$

$$\left.\frac{\partial u(x, t_2^*)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at_2^* - at_0 + x_1 - l}{ml}\right) \quad (10)$$

В качестве t_1^* и t_2^* можно выбрать, например следующие значения:

$$t_1^* = \frac{4l - 3x_1}{4a} + t_0, \quad t_2^* = \frac{2l - x_1}{2a} + t_0 \quad (11)$$

Обозначим $\left.\frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x}\right|_{x=x_1}$ через k_1 и $\left.\frac{\partial u(x, t_2^*)}{\partial x}\right|_{x=x_1}$ через k_2 .

Подставив значения (11) в (9), (10) получим следующую систему уравнений:

$$k_1 = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) \quad (12)$$

$$k_2 = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{2ml}\right) \quad (13)$$

Обозначим $\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right)$ через y . Тогда система (12–13) запишется в виде:

$$k_1 = -\frac{v}{a}y \quad (14)$$

$$k_2 = -\frac{v}{a}y^2 \quad (15)$$

Из системы (14–15) видно, что $y = \frac{k_2}{k_1}$. Следовательно, $\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) = \frac{k_2}{k_1}$. Откуда $-\frac{x_1}{4ml} = \ln \frac{k_2}{k_1}$ и

$$m = -\frac{x_1}{4l \ln \frac{k_2}{k_1}} \quad (16)$$

Из (11) получим: $-\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) = \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$ и следовательно:

$$v = -\frac{a \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}}{\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right)} \quad (17)$$

Таким образом, поставленная обратная задача решена. Неизвестные l, t_0, m, v последовательно находятся по формулам (7), (8), (11), (16), (17).

Пример. Пусть $a = 2$, $x_1 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$, $\frac{\partial u(1, \frac{9}{8})}{\partial x} = -0,49$, $\frac{\partial u(1, \frac{5}{4})}{\partial x} = -0,48$. Требуется найти соответствующие l, t_0, m, v .

Из формул (7), (8), (11), (16), (17) последовательно получаем:

$$l = x_1 + a(t_3 - t_2)/2 = 1 + 2(4 - 2) = 3$$

$$t_0 = t_1 - (l - x_1)/a = 1 - (3 - 1)/2 = 0$$

$$t_1^* = \frac{4l-3x_1}{4a} + t_0 = \frac{9}{8}, \quad t_2^* = \frac{2l-x_1}{2a} + t_0 = \frac{5}{4}$$

$$m = -\frac{x_1}{4l \ln \frac{k_2}{k_1}} = -\frac{1}{12 \ln \frac{-0.48}{-0.49}} \approx 4$$

$$v = -\frac{a \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x}}{\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right)} = -\frac{2 \cdot (-0.49)}{\exp\left(-\frac{1}{48}\right)} \approx 1$$

Заключение

Поставленная задача для стержня может быть применена для диагностирования места и времени разрыва трубопровода, так как она моделирует в первом приближении задачу о месте и времени разрыва трубопровода по кольцевому шву под действием удара тяжелым предметом. Хотя стержень и цилиндрическая оболочка - это разные объекты, моделирование трубопровода стержнем оправдано в настоящей статье тем, что при ударе по торцу цилиндрической оболочки и по концу стержня продольные колебания имеют схожее поведение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахтямов А. М.* Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня. // *Контроль. Диагностика.* 2007. № 11. с. 59–60.
- [2] *Ахтямов А. М.* Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // *Акустический журнал.* 2003. Т. 49. № 3. с. 325–331.
- [3] *Сафина Г. Ф.* Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их ассиметричных колебаний // *Контроль. Диагностика.* 2005. № 12. с. 51–55.

- [4] *Сидоров Б. В., Мартынов С. А.* Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // *Контроль. Диагностика.* 2005. № 12. с. 18–19.
- [5] *Чабакаури Г. Д.* Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закреплённом втором конце в случае ограниченной энергии // *Дифференциальные уравнения.* 2002. Т. 38. № 2. с. 277–284.
- [6] *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. // Новосибирск: Наука, 1990.
- [7] *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 768 с.
- [8] *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике: учеб. Пособие. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 688 с.
- [9] *Ахтямов А. М., Муртазина Р. Ф.* Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью показаний тензодатчика // *Контроль. Диагностика.* 2009. № 1. с. 36–39.
- [10] *Болотин В. В.* Колебания линейных систем. // Том 1. , М.:Машиностроение, 1978.

УДК 517.5

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Мухаметова Г. З. (Уфа, УГАТУ)

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных возникают во многих задачах из различных областей естествознания, более того, к ним приводят важные задачи теории случайных процессов (см. [2]). Наиболее подробно в настоящее время исследованы (см. [5]) линейные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных. В данной работе используется специальный метод, основанный на теории симметричных интегралов (см. [4]), для получения явного решения определенного класса нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

§ 1. Стохастические уравнения Ито

В настоящей работе исследуются эволюционные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и их потраекторные аналоги, т. е. уравнения вида

$$du(t, x) = Lu(t, x)dt + Mu(t, x)d\nu(t), \quad (1)$$

где L и M – интегро-дифференциальные операторы (по x), $\nu(t)$ – либо стандартный винеровский процесс, либо произвольная непрерывная функция неограниченной вариации, а само равенство (1) понимается в смысле стохастического дифференциального исчисления Ито.

На протяжении всей статьи примем следующие соглашения: верхние индексы обозначают номера координат; нижние индексы – дифференцирование по данной переменной.

Рассмотрим разбиения T_n , $n \in \mathbb{N}$, отрезка $[0, t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots \leq t_k^{(n)} \leq \dots \leq t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lambda_n = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Через $\nu^{(n)}(s)$, $s \in [0, t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $\nu(s)$ и отвечающую разбиению T_n . Обозначим $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $[\Delta t_k^{(n)}] = [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$, $\Delta \nu_k^{(n)} = \nu(t_k^{(n)}) - \nu(t_{k-1}^{(n)})$.

Определение. *Симметричным интегралом* называется

$$\int_0^t f(s, \nu(s)) * d\nu(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, \nu^{(n)}(s)) ds \Delta \nu_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений T_n , $n \in \mathbb{N}$.

§ 2. Явные формулы для решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим стохастические уравнения Ито вида

$$\eta(t, x) - \eta(0, x) = \int_0^t \left[a(s, x, \eta) \frac{\partial^2 \eta(s, x)}{\partial x^2} + b(s, x, \eta) \frac{\partial \eta(s, x)}{\partial x} + c(s, x, \eta) \right] ds + \int_0^t \left[\sigma(s, x, \eta) \frac{\partial \eta(s, x)}{\partial x} + h(s, x, \eta) \right] d\nu(s), \quad (2)$$

где второй интеграл в правой части уравнения (2) есть стохастический интеграл Ито, $\nu(s)$ – стандартный винеровский процесс. Решением этого уравнения будет любая функция вида $\eta(s, x) = \varphi(s, x, \nu(s))$, для которой имеют смыслы интегралы в правой части уравнения (2) и которое обращает это уравнение в тождество.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Возьмем уравнение (2), с некоторым начальным условием $\eta(0, x) = \psi(x, \nu(0))$. Тогда решение $\eta(s, x) = \varphi(s, x, \nu(s))$ этого уравнения определяется из системы обычных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_u = \sigma(\varphi)\varphi_x + h(\varphi), \\ \varphi_s = \varphi_{xx} \left[a(\varphi) - \frac{1}{2}\sigma^2(\varphi) \right] + (\varphi_x)^2 \left[-\sigma(\varphi)\sigma_\varphi(\varphi) \right] + \\ \quad + \varphi_x \left[b(\varphi) - \frac{1}{2}\sigma_\varphi(\varphi)h(\varphi) - \frac{1}{2}\sigma(\varphi)\sigma_x(\varphi) - \sigma(\varphi)h_\varphi(\varphi) \right] + \\ \quad + c(\varphi) - \frac{1}{2}h_\varphi(\varphi)h(\varphi) - \frac{1}{2}\sigma(\varphi)h_x(\varphi), \quad \varphi(0, x, X(0)) = \eta(0, x). \end{array} \right. \quad (3)$$

Доказательство. Известно, что формулу Ито (см. [1]) можно записать в виде:

$$\int_0^t h(s, \nu(s)) * dX(s) = \int_0^t h(s, \nu(s)) d\nu(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} h(s, u) |_{u=\nu(s)} ds, \quad (4)$$

где интеграл в левой части есть стохастический интеграл Стратоновича, который совпадает с детерминированным (потраекторным) симметричным интегралом, определенным выше, а первое слагаемое в правой части равенства – это стохастический интеграл Ито. Условимся в дальнейшем опускать переменные s, x, u при коэффициентах уравнений. В силу формулы (4), стохастический интеграл Ито в правой части уравнения (2) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\sigma(s, x, \varphi) |_{u=\nu(s)} \varphi_x |_{u=\nu(s)} + h(s, x, \varphi) |_{u=\nu(s)} \right] d\nu(s) = \\ & = \int_0^t \left[\sigma(s, x, \varphi) |_{u=\nu(s)} \varphi_x |_{u=\nu(s)} + h(s, x, \varphi) |_{u=\nu(s)} \right] * d\nu(s) - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} \left[\sigma(s, x, \varphi) \varphi_x + h(s, x, \varphi) \right] \Big|_{u=\nu(s)} ds. \quad (5)$$

Следовательно, второй интеграл в правой части (5) равен

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \left[\sigma_\varphi(s, x, \varphi) \varphi_u \varphi_x + \sigma(s, x, \varphi) \varphi_{xu} + h_\varphi(s, x, \varphi) \varphi_u \right] \Big|_{u=\nu(s)} ds.$$

Обозначим

$$P(s, x, \nu(s)) = \sigma(s, x, \varphi) \Big|_{u=\nu(s)} \varphi_x \Big|_{u=\nu(s)} + h(s, x, \varphi) \Big|_{u=\nu(s)},$$

тогда уравнение (2) примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, \nu(t)) - \varphi(0, x, \nu(0)) &= \int_0^t P(s, x, \nu(s)) * d\nu(s) + \\ &+ \int_0^t \left[a(s, x, \varphi) \Big|_{u=\nu(s)} \varphi_{xx} \Big|_{u=\nu(s)} + b(s, x, \varphi) \Big|_{u=\nu(s)} \varphi_x \Big|_{u=\nu(s)} + \right. \\ &\quad \left. + c(s, x, \varphi) \Big|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2} \sigma_\varphi(s, x, \varphi) \varphi_u \varphi_x \Big|_{u=\nu(s)} - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_{xu} \Big|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2} h_\varphi(s, x, \varphi) \varphi_u \Big|_{u=\nu(s)} \right] ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что решение $\eta(s, x) = \varphi(s, x, \nu(s))$ уравнения (6) с достаточно гладкой функцией $\varphi(s, x, u)$ существует, и при этом предположении вычислим симметричный интеграл (см. [4]) в правой части уравнения (6):

$$\begin{aligned} \int_0^t P(s, x, X(s)) * d\nu(s) &= \int_{\nu(0)}^{\nu(t)} P(t, x, u) du - \\ &- \int_0^t \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} (P(s, x, u))_s du ds = \int_{\nu(0)}^{\nu(t)} P(t, x, u) du - \\ &- \int_0^t \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} \left[\sigma_s(s, x, \varphi) \varphi_x + \sigma_\varphi(s, x, \varphi) \varphi_s \varphi_x + \sigma(s, x, \varphi) \varphi_{sx} + \right. \end{aligned}$$

$$+ h_s(s, x, \varphi) + h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s \Big] du ds. \quad (7)$$

Левую часть уравнения (6) мы можем записать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, \nu(t)) - \varphi(0, x, \nu(0)) &= \left[\varphi(t, x, \nu(t)) - \varphi(t, x, \nu(0)) \right] + \\ &+ \left[\varphi(t, x, \nu(0)) - \varphi(0, x, \nu(0)) \right] = \\ &= \int_{\nu(0)}^{\nu(t)} \varphi_u(t, x, u) du + \int_0^t \varphi_s(s, x, \nu(0)) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив соотношения (7) и (8) в уравнение (6), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\nu(0)}^{\nu(t)} \varphi_u(t, x, u) du + \int_0^t \varphi_s(s, x, \nu(0)) ds &= \int_{\nu(0)}^{\nu(t)} P(t, x, u) du - \\ &- \int_0^t \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} \left[\sigma_s(s, x, \varphi)\varphi_x + \sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s\varphi_x + \right. \\ &+ \left. \sigma(s, x, \varphi)\varphi_{sx} + h_s(s, x, \varphi) + h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s \right] du ds + \\ &+ \int_0^t \left[a(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_{xx}|_{u=\nu(s)} + b(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_x|_{u=\nu(s)} + \right. \\ &+ c(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}\sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u\varphi_x|_{u=\nu(s)} - \\ &\left. - \frac{1}{2}\sigma(s, x, \varphi)\varphi_{xu}|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u|_{u=\nu(s)} \right] ds, \end{aligned}$$

или, группируя слагаемые, имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\nu(0)}^{\nu(t)} \left[\varphi_u(t, x, u) - P(t, x, u) \right] du = \\ &= \int_0^t \left[-\varphi_s(s, x, \nu(0)) - \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} \left[\sigma_s(s, x, \varphi)\varphi_x + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s\varphi_x + \sigma(s, x, \varphi)\varphi_{sx} + h_s(s, x, \varphi) + h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s \Big] du + \\
& + a(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_{xx}|_{u=\nu(s)} + b(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_x|_{u=\nu(s)} + \\
& + c(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}\sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u\varphi_x|_{u=\nu(s)} - \\
& - \frac{1}{2}\sigma(s, x, \varphi)\varphi_{xu}|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u|_{u=\nu(s)} \Big] ds. \quad (9)
\end{aligned}$$

Заметим, что правая часть равенства (9) есть функция ограниченной вариации, в то время как левая нет. Следовательно, мы можем приравнять интегранды в обеих частях равенства (9) к нулю, получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\varphi_u = P(s, x, u), \\
\varphi_s(s, x, \nu(0)) = a(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_{xx}|_{u=\nu(s)} + \\
+ b(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_x|_{u=\nu(s)} + \\
+ c(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}\sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u\varphi_x|_{u=\nu(s)} - \\
- \frac{1}{2}\sigma(s, x, \varphi)\varphi_{xu}|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u|_{u=\nu(s)} - \\
- \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} [\sigma_s(s, x, \varphi)\varphi_x + \sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s\varphi_x + \\
+ \sigma(s, x, \varphi)\varphi_{sx} + h_s(s, x, \varphi) + h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s] du.
\end{array} \right.$$

Далее, воспользовавшись первым уравнением системы, интеграл из правой части второго уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{\nu(0)}^{\nu(s)} \left[\sigma_s(s, x, \varphi)\varphi_x + \sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s\varphi_x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma(s, x, \varphi)\varphi_{sx} + h_s(s, x, \varphi) + h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_s \Big] du = \\
& = \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} (\varphi_u)_s du = \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} \varphi_{su} du = \varphi_s|_{u=\nu(s)} - \varphi_s(s, x, \nu(0)).
\end{aligned}$$

Тогда второе уравнение системы запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi_s|_{u=\nu(0)} & = a(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_{xx}|_{u=\nu(s)} + b(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_x|_{u=\nu(s)} + \\
& + c(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}\sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u\varphi_x|_{u=\nu(s)} - \\
& - \frac{1}{2}\sigma(s, x, \varphi)\varphi_{xu}|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u|_{u=\nu(s)} - \\
& - \varphi_s|_{u=\nu(s)} + \varphi_s(s, x, \nu(0)).
\end{aligned}$$

Следовательно, наша система уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\varphi_u = \sigma(s, x, \varphi)\varphi_x + h(s, x, \varphi), \\
\varphi_s|_{u=\nu(s)} = a(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_{xx}|_{u=\nu(s)} + \\
+ b(s, x, \varphi)|_{u=\nu(s)}\varphi_x|_{u=\nu(s)} + c(s, x, \varphi)|_{u=X(s)} + \\
- \frac{1}{2}\sigma_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u\varphi_x|_{u=\nu(s)} - \\
- \frac{1}{2}\sigma(s, x, \varphi)\varphi_{xu}|_{u=\nu(s)} - \frac{1}{2}h_\varphi(s, x, \varphi)\varphi_u.
\end{array} \right. \quad (10)$$

Преобразуем второе уравнение системы (10), воспользовавшись первым уравнением. Имеем:

$$\varphi_u = \sigma(\varphi)\varphi_x + h(\varphi),$$

дифференцируя обе части этого равенства по x , получаем:

$$\varphi_{xu} = \sigma_x(\varphi)\varphi_x + \sigma_\varphi(\varphi)(\varphi_x)^2 + \sigma(\varphi)\varphi_{xx} + h_x(\varphi) + h_\varphi(\varphi)\varphi_x.$$

Поэтому второе уравнение системы (10) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_s = & a(\varphi)\varphi_{xx} + b(\varphi)\varphi_x + c(\varphi) - \frac{1}{2}\sigma_\varphi(\varphi)\varphi_x \left[\sigma(\varphi)\varphi_x + h(\varphi) \right] - \\ & - \frac{1}{2}\sigma(\varphi) \left[\sigma_x(\varphi)\varphi_x + \sigma_\varphi(\varphi)(\varphi_x)^2 + \sigma(\varphi)\varphi_{xx} + h_x(\varphi) + h_\varphi(\varphi)\varphi_x \right] - \\ & - \frac{1}{2}h_\varphi(\varphi) \left[\sigma(\varphi)\varphi_x + h(\varphi) \right], \end{aligned}$$

откуда, с учетом начального условия, и получаем систему (3). Таким образом, решение уравнения (6) свелось к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Теорема доказана.

§ 3. Построение общего решения для одного класса уравнений

Система (3) имеет слишком общий вид, и решение в явном виде построить для нее очень затруднительно. Рассмотрим случай, когда система (3) имеет явное решение. Возьмем $\sigma = 1$, $h = \frac{1}{\eta(s,x)}$, а коэффициенты a , b и c зависят только от s , x : $a = a(s, x)$, $b = b(s, x)$, $c = c(s, x)$. При этих условиях уравнение (2) примет вид:

$$\begin{aligned} \eta(t, x) - \eta(0, x) = & \int_0^t \left[a(s, x) \frac{\partial^2 \eta(s, x)}{\partial x^2} + b(s, x) \frac{\partial \eta(s, x)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + c(s, x) \right] ds + \int_0^t \left[\frac{\partial \eta(s, x)}{\partial x} + \frac{1}{\eta(s, x)} \right] d\nu(s), \quad (11) \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием $\eta(0, x) = \psi(x, \nu(0))$. Система

(3) для него запишется в виде:

$$\begin{cases} \varphi_u = \varphi_x + \frac{1}{\varphi}, \\ \varphi_s = \varphi_{xx} \left[a - \frac{1}{2} \right] + \varphi_x \left[b + \frac{1}{\varphi^2} \right] + c + \frac{1}{2\varphi^3}, \\ \varphi(0, x, \nu(0)) = \eta(0, x). \end{cases} \quad (12)$$

Заметим, что начальное условие для нее можно записать в несколько ином виде: $\varphi|_{s=0} = \psi(x, u)$. Общее решение (см. [3]) первого уравнения системы (12) имеет вид: $F(s, u+x, \varphi^2-2u) = 0$. Предположим, что это равенство разрешимо относительно последней переменной, тогда $\varphi = (f(s, u+x) + 2u)^{1/2}$. Для того, чтобы определить вид функции $f(x, y)$, подставим соотношение для φ во второе уравнение системы (11), получаем:

$$\begin{aligned} f_s \left[f + 2u \right] &= \frac{1}{4} \left[2a - 1 \right] \left[- (f_y)^2 + 2f f_{yy} + 4u f_{yy} \right] + \\ &+ f_y \left[bf + 2ub + 1 \right] + 2c \left[f + 2u \right]^{3/2} + 1, \end{aligned} \quad (13)$$

где $f = f(s, y)$, $y = u + x$; $f|_{s=0} = \psi^2(x, u) - 2u$. Используя соотношение (13), составим следующее уравнение

$$\begin{aligned} g_s \left[g + 2u \right] &= \frac{1}{4} \left[2a - 1 \right] \left[- (g_x)^2 + 2g g_{xx} + 4u g_{xx} \right] + \\ &+ g_x \left[bg + 2ub + 1 \right] + 2c \left[g + 2u \right]^{3/2} + 1 \end{aligned} \quad (14)$$

на неизвестную функцию $g = g(s, x)$, $g|_{s=0} = \psi^2(x, 0)$. Пусть функция $\tilde{g}(s, x)$ является решением уравнения (14). Тогда $f = \tilde{g}(s, u+x)$, следовательно,

$$\varphi(s, x, u) = \left[\tilde{g}(s, u+x) + 2u \right]^{1/2}.$$

Таким образом, случайная функция

$$\eta(s, x) = \left[\tilde{g}(s, \nu(s) + x) + 2\nu(s) \right]^{1/2}$$

является решением уравнения (11).

Таким образом, основным результатом данной статьи можно считать тот факт, что решение определенных классов нелинейных эволюционных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и их потраекторных аналогов удается свести к решению системы обычных дифференциальных уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
- [2] *Каллианпур Г.* Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987.
- [3] *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вычашая школа, 1974.
- [4] *Насыров Ф. С.* Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений. // Вестник УГАТУ, 2003. Т. 4. № 2. С. 55–66.
- [5] *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов. М.: Наука, 1983.

УДК 519.8

СИСТЕМНАЯ МОДЕЛЬ ГОСУДАРСТВА ПО КОНСТИТУЦИИ РФ

Нурисламова Л. Ф. (Уфа, БГУ)

Система определяется как совокупность взаимосвязанных объектов, образующих новое качество, несводимое к свойствам объектов. М. Месарович и Я. Такахара [1] полагают вполне оправданным рассматривать математическую теорию систем для формализации любых системных понятий. В этой работе решается задача формализации Конституции РФ [2], построение системной модели государства по его основному закону - Конституции. Конституция представляет собой нормативный правовой акт, имеющий высшую юридическую силу и регулирующий правоотношения, которые возникают между личностью, обществом и государством. Нобелевский лауреат по экономике Джеймс Бьюкенен [3] определяет конституцию как набор согласованных правил, по которым общество осуществляет последующие действия. Это общественный договор, заключенный ради выгоды и пользы всех его участников.

На начальном этапе при построении системы определяется её структура. Формирование структуры – это та часть задачи, которая выявляет расположение объектов системы и устанавливает связи между ними, ”наиболее важный этап процесса разработки модели как раз и состоит в выборе структуры модели интересующей нас системы” [1]. Опираясь на текст Конституции РФ, определим структуру государства. Для этого воспользуемся структурой организации, предложенной Минцбергом [4], которую он применял к производственным фирмам. Государство также является организацией - организацией общества, поэтому мы вправе применить модель Минцберга. Минцберг предлагает организацию разделить на пять взаимосвязанных частей: стратегическую верши-

ну, срединную линию, операционное ядро, техноструктуру и вспомогательный персонал.

Основу организации составляют операторы – люди, выполняющие базовую работу по производству товаров и предоставлению услуг. Они образуют операционное ядро. Операционное ядро – сердце любой организации, та часть, где создаётся основная продукция, благодаря которой она существует. Также в организации должен быть человек (или люди), который бы руководил операторами, контролировал бы их действия. Он на диаграмме занимает стратегическую вершину и несёт всю полноту ответственности за организацию. Между стратегической вершиной и операционным ядром находится срединная линия. Если размеры организации слишком велики, то одного руководителя недостаточно. В этом случае в предприятии имеются менеджеры срединной линии, которые выполняют ряд задач прямого контроля, распространяющегося вверх и вниз. С двух сторон к иерархии прилегают техноструктура и вспомогательный персонал. Аналитики образуют так называемую техноструктуру, расположенную вне иерархии линейных полномочий. Они не заняты в основной деятельности, они её стандартизируют, контролируют качество произведённой продукции, разрабатывают планы, составляют графики. Вспомогательный персонал занимается дополнительным обслуживанием организации.

Построенная структура государства должна быть строгой, в ней не должно быть разночтений. Поэтому структура Минцберга не совсем подходит в нашем случае, так как каждый орган государственной власти не получается точно расположить в одной из частей организации. Например, рассмотрим должность Уполномоченного по правам человека. Её можно отнести как к техноструктуре, так и к вспомогательной части. С одной стороны, Уполномоченный по правам человека выполняет контрольную функцию, обеспечивая соблюдение прав и свобод гражда-

нина. С другой стороны, он рассматривает жалобы граждан на решения или действия органов государственной власти, органов местного самоуправления и в это время выполняет вспомогательную функцию, заключающуюся в обслуживании граждан.

Для снятия таких противоречий, используем модель Дж. Бьюкенена, который проводит принципиальное различие между двумя стадиями политического процесса: конституционной и постконституционной. На конституционной стадии создаются правила и нормы, то есть законы государства, а на постконституционной – идёт игра по этим правилам. В соответствии с двумя стадиями выделяются две функции государства – защищающая и производящая. "Государство защищающее" возникает на конституционной стадии и обеспечивает соблюдение прав, обеспечивает игру по конституционным правилам. Оно контролирует соблюдение законов. "Государство производящее" обеспечивает граждан теми общественными благами, которыми рынок обеспечивает плохо или не обеспечивает вовсе.



Рис. 1.

Совместив модель Минцберга и Бьюкенена, получим диаграмму, представленную на рис.1. Исходя из функций органов власти и

организаций, расположим их в соответствующей им части структуры. Структура государства по Конституции РФ представлена на рис.2.

Заранее оговорим особенности нашей структуры. Согласно Конституции РФ, Россия есть демократическое государство, в котором проводится принцип разделения властей, признаются и гарантируются права и свободы каждого человека, ограничено вмешательство государства в деятельность экономических субъектов, граждан, общественных организаций. Многие органы власти самостоятельны относительно друг друга. Нет жёсткого прямого контроля и подчинения, поэтому в построенной структуре используются волнистые стрелки. В случае, если какие-либо органы власти или должностные лица входят в институт государственной власти, то они перечисляются в квадратных скобках. Разумеется, перечисляются только те органы, про которые сказано в Конституции РФ.

Рассмотрим основные функции некоторых органов и организаций, указанных в структуре.

Президент является главой государства. Он является гарантом Конституции РФ, прав и свобод человека и гражданина. Он не входит ни в одну из ветвей власти. Президент обеспечивает согласованное функционирование и взаимодействие всех органов власти. Именно поэтому он занимает стратегическую вершину. Деятельность Президента многогранна, поэтому для реализации им конституционных полномочий существует Администрация Президента. Президент также возглавляет и формирует Совет Безопасности РФ и является Верховным главнокомандующим Вооружёнными Силами РФ, он назначает и освобождает полномочных представителей Президента.

Далее, следуя вниз по иерархии, располагается Правительство РФ, под ним - исполнительные органы власти субъектов РФ. Президент обладает следующими функциями по отношению к Прави-

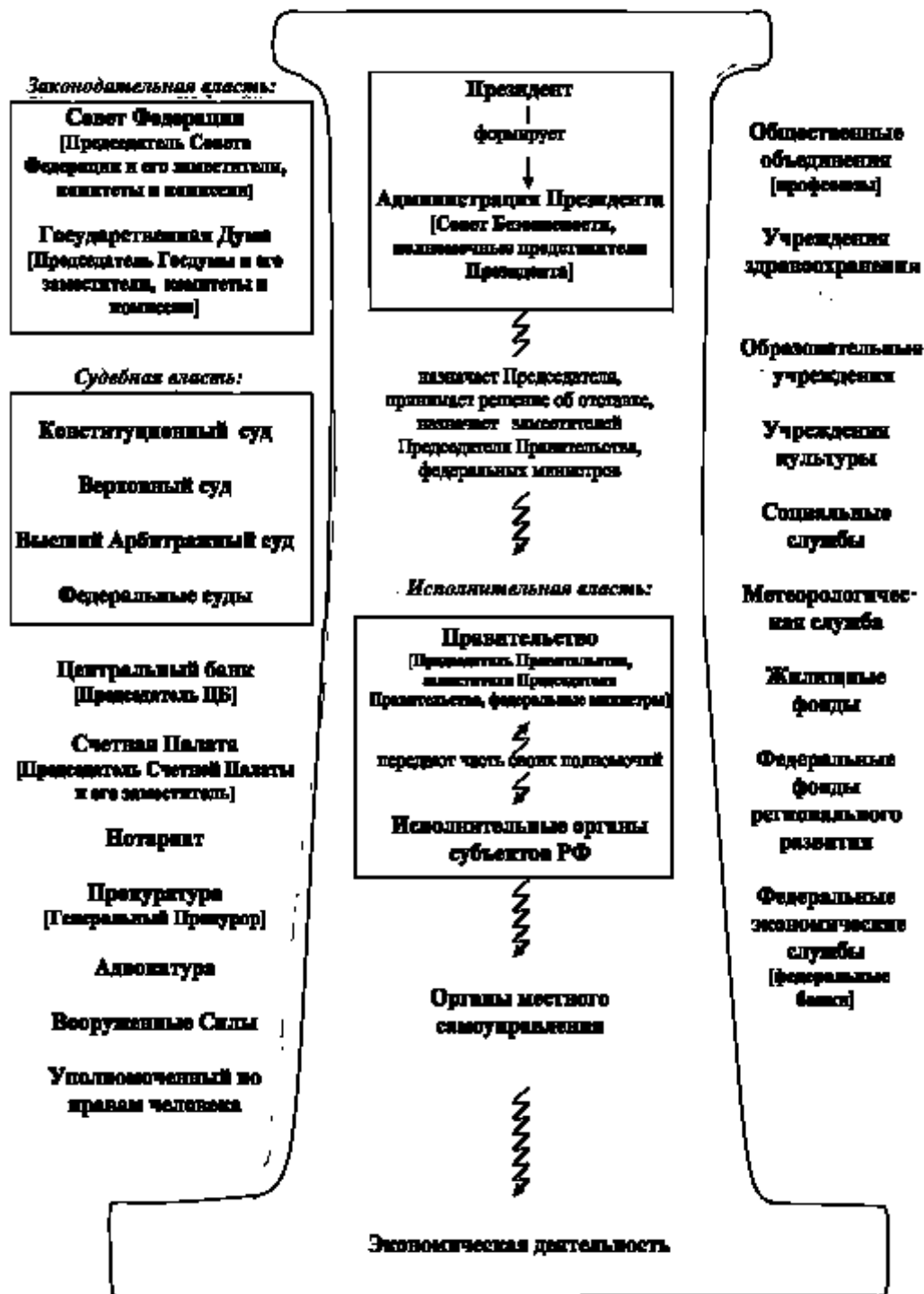


Рис. 2.

тельству: назначает с согласия Государственной Думы Председателя Правительства, принимает решение об отставке Правительства, по предложению Председателя Правительства назначает на должности заместителей Председателя Правительства, федеральных министров. Правительство осуществляет исполнительную власть РФ. Правительство РФ состоит из Председателя Правительства, заместителей Председателя Правительства и федеральных министров. Если законодательные органы разрабатывают законы, то исполнительные - приводят в исполнение правила и нормы, прописанные в Конституции и других нормативно-правовых актах. Правительство осуществляет оперативное текущее государственное управление по всей стране, исполнительные органы субъектов РФ осуществляют государственное управление внутри своего субъекта. Местное самоуправление решает задачи, носящие местный характер. Местное самоуправление в пределах своих полномочий самостоятельно. Органы местного самоуправления не входят в систему органов государственной власти. Они самостоятельно управляют муниципальной собственностью, формируют, утверждают и исполняют местный бюджет, устанавливают местные налоги и сборы и решают другие вопросы местного значения.

Как было уже сказано, операционное ядро в структуре организации – это подсистема, за счёт которой она существует. Таким образом, в структуре государства это место занимает экономика, экономическая деятельность граждан. Экономическая деятельность создает товары и услуги, которые необходимы для удовлетворения нужд и потребностей людей.

Справа от иерархии расположено "государство защищающее". К нему принадлежат органы, которые занимаются созданием законов, защищают права и интересы граждан, обеспечивают и контролируют их соблюдение.

Федеральное Собрание – парламент Российской Федерации – является представительным и законодательным органом Российс-

кой Федерации. Представительным органом Федеральное Собрание является потому, что оно представляет интересы граждан. Парламент является органом государственной власти, имеющий право издавать федеральные нормативные акты, которые обладают высшей юридической силой по сравнению с иными нормативными актами, кроме Конституции РФ. Федеральное Собрание состоит из двух палат - Совета Федерации и Государственной Думы, которые заседают раздельно. Обе палаты обладают определёнными контрольными полномочиями по отношению к другим федеральным органам государственной власти. Федеральные законы принимает Государственная Дума, а Совет Федерации их одобряет. Таким образом, органы законодательной власти создают законы – правила и нормы по которым живет общество, а органы исполнительной власти реализуют их исполнение.

Третьей ветвью государственной власти является судебная власть, основная функция которой - осуществление правосудия. Суд должен осуществлять защиту прав в соответствии с Конституцией и наказывать тех, кто нарушает права других. Существует три высших судебных органа Российской Федерации: Конституционный Суд РФ, Верховный Суд РФ, Высший Арбитражный Суд РФ. Конституционный Суд Российской Федерации решает дела о соответствии Конституции федеральных законов, нормативных актов субъектов Российской Федерации, международных договоров, договоров между органами государственной власти РФ и других нормативных актов, а также даёт толкование Конституции Российской Федерации. Верховный Суд Российской Федерации является высшим судебным органом по гражданским, уголовным, административным и иным делам, подсудным судам общей юрисдикции; осуществляет надзор за их деятельностью; даёт разъяснения по вопросам судебной практики. Высший Арбитражный Суд Российской Федерации является высшим судебным органом по разрешению экономических споров и иных

дел, рассматриваемых арбитражными судами, осуществляет судебный надзор за их деятельностью.

Кратко рассмотрим остальные органы. Счётная Палата является государственным органом финансового контроля, образует систему контроля за исполнением федерального бюджета. Все органы государственной власти, местного самоуправления, Центральный Банк, предприятия, организации должны предоставлять по запросам Счётной Палаты информацию, необходимую для её деятельности. Прокуратура РФ осуществляет надзор за соблюдением Конституции РФ и других законов. Нотариат защищает и охраняет собственность граждан, защищает права и законные интересы граждан. В качестве основной функции Центрального Банка РФ Конституция определяет защиту и обеспечение устойчивости рубля. Также ЦБ осуществляет денежную эмиссию, издает свои нормативные акты. Вооружённые Силы РФ составляют основу обороны РФ, они предназначены для отражения агрессии, для вооружённой защиты целостности и неприкосновенности территории.

Справа от иерархии расположено "государство производящее". В этой части перечислены некоммерческие организации. Они созданы государством в образовательных, культурных и научных целях, в целях охраны здоровья граждан, удовлетворения их интересов и реализации своих целей, для оказания социальной, экономической поддержки. Например, социальные службы оказывают социально-бытовые, социально-медицинские услуги гражданам, находящимся в трудной жизненной ситуации. Жилищные фонды создают благоприятные и безопасные условия для проживания граждан. Федеральный фонд регионального развития сформирован с целью повышения уровня экономического развития субъектов Российской Федерации.

Таким образом, были рассмотрены объекты государства, принцип их организации и функции. Структура была получена, исходя

из основного закона государства - Конституции. В случае же, если представить все нормативно-правовые акты в виде системы, в виде определённого организованного и взаимосвязанного целого, то Конституция располагается во главе этой системы. Законы и иные правовые акты, принимаемые в Российской Федерации не должны противоречить Конституции Российской Федерации. Вслед за Конституцией РФ по силе действия располагаются кодексы, затем законы, уставы, постановления и другие нормативные акты.

Исходя из выше сказанного, можно сказать, что лингвистическое описание позволяет построить структуру, выделив объекты и описав их причинно-следственные связи. На примере Конституции РФ мы получили системную модель государства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Месарович М., Такакара Я.* Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.
- [2] Конституция Российской Федерации. Государственные символы России. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2009.
- [3] *Бьюкенен Дж. М.* Сочинения. Конституция экономической политики. Расчёт согласия. Границы свободы / Нобелевские лауреаты по экономике. Т. 1 / Фонд экономической инициативы. М.: Таурис Альфа, 1997.
- [4] *Минцберг Г.* Структура в кулаке: создание эффективной организации. СПб.: Питер, 2004.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ДВУМ СОБСТВЕННЫМ
ЗНАЧЕНИЯМ

Орлов А. А. (Уфа, БашГУ)

Введение

В последнее время обществом стали предъявляться большие требования к диагностике технических систем. Возникающие техногенные катастрофы и опасности связанные с изношенностью основных фондов, потребовали необходимости создания новых методов инженерного обследования и диагностики технического состояния строительных и других объектов. Стало ясно что математические модели в акустической диагностике закреплений следует разрабатывать с помощью механики, затем формулировать как обратные задачи математической физики и спектральной теории операторов, которые уже решаются с помощью последовательного применения методов дифференциальных уравнений. Рассматривается задача о колебаниях гладкой струны с вязким трением на концах. С помощью преобразования Лиувилля задача приводится к спектральной задаче.

§ 1. Постановка прямой задачи

Рассмотрим спектральную задачу:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0 \quad (1)$$

$$y'(0) - h(\lambda)y(0) = 0 \quad (2)$$

$$y'(1) + H(\lambda)y(1) = 0 \quad (3)$$

где $x \in [0, 1]$, λ - спектральный параметр, $h(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, $H(\lambda) = b_0 + b_1\lambda$ - многочлены первой степени.

Составляем характеристический определитель:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) \end{vmatrix}$$

$$u_1(y) = \dot{y}(0, \lambda) - h(\lambda)y(0, \lambda)$$

$$u_2(y) = \dot{y}(1, \lambda) + H(\lambda)y(1, \lambda)$$

$y_1(x, \lambda) = \cos\lambda x$, $y_2(x, \lambda) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda}$ - линейно независимые решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющие в точке $x = 0$ условиям:

$$y_1(0, \lambda) = 1, \dot{y}_1(0, \lambda) = 0, y_2(0, \lambda) = 0, \dot{y}_2(0, \lambda) = 1 \quad (4)$$

Согласно (4):

$$u_1(y_1) = \dot{y}_1(0, \lambda) - h(\lambda)y_1(0, \lambda) = -h(\lambda)$$

$$u_1(y_2) = \dot{y}_2(0, \lambda) - h(\lambda)y_2(0, \lambda) = 1$$

$$u_2(y_1) = \dot{y}_1(1, \lambda) + H(\lambda)y_1(1, \lambda) = -\lambda\sin\lambda + H(\lambda)\cos\lambda$$

$$u_2(y_2) = \dot{y}_2(1, \lambda) + H(\lambda)y_2(1, \lambda) = \cos\lambda + H(\lambda)\frac{\sin\lambda}{\lambda}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -h & 1 \\ -\lambda\sin\lambda + H\cos\lambda & \cos\lambda + \frac{H\sin\lambda}{\lambda} \end{vmatrix} = -h(\cos\lambda + \frac{H\sin\lambda}{\lambda}) + \lambda\sin\lambda - H\cos\lambda = -h\cos\lambda - hH\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \lambda\sin\lambda - H\cos\lambda$$

§ 2. Решение прямой задачи

Собственные значения λ_i являются корнями характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, поэтому удовлетворяют уравнению

$$-h\cos\lambda - hH\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \lambda\sin\lambda - H\cos\lambda = 0$$

§ 3. Постановка обратной задачи

Рассматривается отыскание двух коэффициентов краевых условий по двум собственным значениям.

Рассмотрим спектральную задачу (1), (2), (3), где $x \in [0, 1]$, λ - спектральный параметр, $h(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, $H(\lambda) = b_0 + b_1\lambda$ - многочлены первой степени.

Требуется найти два из коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1 многочленов $h(\lambda)$ и $H(\lambda)$, если остальные два коэффициента известны.

§ 4. Решение обратной задачи

Доказана следующая теорема:

Теорема: Если известны коэффициенты $a_0, a_1, (b_0, b_1)$ то любые два различных собственных значения $\lambda_i, (i = 1, 2)$ однозначно определяют остальные коэффициенты $b_0, b_1, (a_0, a_1)$.

Доказательство: Пусть известны коэффициенты a_0, a_1 . Докажем что два различных собственных значения λ_i однозначно определяют коэффициенты b_0, b_1 .

Обозначим через $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ линейно независимые решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющие в точке $x = 0$ условиям (4). Числа λ_i являются корнями характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, поэтому удовлетворяют следующему уравнению

$$\begin{vmatrix} -h(\lambda_i) & 1 \\ \dot{y}_1(1, \lambda_i) + H(\lambda_i)y_1(1, \lambda_i) & \dot{y}_2(1, \lambda_i) + H(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) \end{vmatrix} = 0$$

$$-H(\lambda_i)(h(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) + y_1(1, \lambda_i)) - (h(\lambda_i)\dot{y}_2(1, \lambda_i) + \dot{y}_1(1, \lambda_i)) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

Обозначим через $y(x) = h(\lambda_i)y_2(x, \lambda_i) + y_1(x, \lambda_i)$

Значение функции $y(x)$ в точке $x = 1$ отлично от нуля. Действительно, предположив противное, то есть что

$$y(1) = h(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) + y_1(1, \lambda_i) = 0 \quad (6)$$

получим

$$\dot{y}(1) = h(\lambda_i)\dot{y}_2(1, \lambda_i) + \dot{y}_1(1, \lambda_i) = 0 \quad (7)$$

В силу единственности решения задачи Коши (1), (2), (3) имеем

$$y(x) = h(\lambda_i)y_2(x, \lambda_i) + y_1(x, \lambda_i) \equiv 0$$

А это противоречит условиям (4). Значит,

$$h(\lambda_i)y_2(x, \lambda_i) + y_1(x, \lambda_i) \neq 0 \quad (8)$$

Поэтому из (5) следует равенство

$$b_0 + b_1\lambda_i = -\frac{h(\lambda_i)\dot{y}_2(1, \lambda_i) + \dot{y}_1(1, \lambda_i)}{h(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) + y_1(1, \lambda_i)} \quad (9)$$

Равенства (9) представляет собой систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных коэффициентов b_0 и b_1 . Определитель этой системы - определитель Вандермонда. Поэтому система (9) имеет единственное решение, и однозначно определяются коэффициенты b_0 и b_1 . Если известны коэффициенты b_0 и b_1 однозначность определения коэффициентов a_0 и a_1 доказывается аналогично.

Если известны коэффициенты $a_0, b_1, (a_1, b_0)$, то любые два различных собственных значения $\lambda_i (i = 1, 2)$ определяют 2 значения для коэффициентов $a_1, b_0, (a_0, b_1)$.

Так же если известны коэффициенты $a_1, b_1, (a_0, b_0)$, для них находятся два значения.

Результаты исследования были обобщены в таблицу:

Изн. коэф.	Неизв. коэф.	Выводы
a_0, a_1	b_0, b_1	Неизвестные коэффициенты определяются однозначно.
b_0, b_1	a_0, a_1	Неизвестные коэффициенты определяются однозначно.
a_0, b_1	a_1, b_0	Для каждого из неизвестных коэффициентов находятся 2 решения
a_1, b_0	a_0, b_1	Для каждого из неизвестных коэффициентов находятся 2 решения
a_1, b_1	a_0, b_0	Для каждого из неизвестных коэффициентов находятся 2 решения
a_0, b_0	a_1, b_1	Для каждого из неизвестных коэффициентов находятся 2 решения

Таким образом, поставленная обратная задача решена. С физической точки зрения задача имеет смысл в том, что по тембру звучания струны можно определить характер её закрепления, это прикладное значение широко используется в акустических методах диагностики.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахтямов А. М.* Математическое моделирование и численное исследование в диагностике закреплений и нагруженности механических систем. // Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Уфа - 2004.
- [2] *Ахтямов А. М.* Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений. // Дифференциальные уравнения. 1999.
- [3] *Ахтямов А. М.* К единственности решения одной обратной спектральной задачи. // Дифференциальные уравнения. 2003.

- [4] Вибрации в технике: Справочник. Под ред. В.В.Болотина. 1978.
- [5] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. // М. Наука, 1969.

УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Павленко В. А. (Уфа, ИМ ВЦ УНЦ РАН)

Введение

В данной работе рассматривается компактное многообразие X с отмеченным подмножеством Y . Предполагается, что Y представимо в виде объединения конечного числа гладких подмногообразий, пересекающихся трансверсально (такие подмногообразия мы называем стратифицированными). Мы вводим специальный класс функций на X , которые мы называем полиоднородными. Эти функции определены и являются гладкими на $X \setminus Y$ и допускают асимптотическое разложение определенного вида вблизи Y . Затем мы определяем относительные отображения многообразий с отмеченными стратифицированными подмногообразиями. Основными результатами работы являются достаточные условия на относительное отображение, при которых поднятие и опускание полиоднородной функции при таком отображении является полиоднородной функцией.

Объекты такого рода естественно возникают при исследовании эллиптических уравнений на компактном многообразии, вырождающихся на гладком подмногообразии. В частности, результаты данной работы играют важную роль при построении алгеб-

ры псевдодифференциальных операторов, приспособленной к исследованию задач такого типа. Такой подход к исследованию вырождающихся эллиптических уравнений является обобщением b -исчисления, развитого Мельроузом [1] (см. также [2]).

Автор благодарен Ю.А. Кордюкову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00389-а.

§ 1. Стратифицированные подмногообразия

В этом разделе мы введем понятие стратифицированного многообразия и некоторые связанные с ним понятия.

Определение 3. Стратифицированным подмногообразием Y многообразия X размерности n будем называть произвольное объединение конечного числа гладких подмногообразий Y_1, Y_2, \dots, Y_r размерности $n-1$, которые пересекаются трансверсально: для любой точки $p_0 \in Y$ такой, что $p_0 \in Y_j$, если $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$, и $p_0 \notin Y_j$, если $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, существует такая локальная система координат $U_{p_0} \subset X \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ с координатами $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, определенная в окрестности U_{p_0} точки p_0 , что точка p_0 имеет координаты $(0, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ и для любого $d = 1, 2, \dots, k$ пересечение $Y_{i_d} \cap U$ задается уравнением $x_d = 0$.

Мы всегда будем предполагать, что каждое из подмногообразий Y_1, Y_2, \dots, Y_r связно. Мы будем называть их гранями стратифицированного подмногообразия Y .

§ 2. Полиоднородные функции

Данный раздел посвящен определению полиоднородных функций на многообразии с отмеченным стратифицированным подмногообразием.

Определение 4. Индексным множеством называется любое множество $E \subset \mathbb{C} \times \mathbb{N}_0$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. E ограничено снизу, т.е. существует такое $N_1 \in \mathbb{R}$, что для любого $(z, p) \in E$ справедливо неравенство: $\operatorname{Re} z \geq N_1$;
2. $(z, p) \in E, p \geq q \Rightarrow (z, q) \in E$;
3. для любого $N_2 \in \mathbb{R}$ множество $E \cap \{(z, p) : \operatorname{Re} z \leq N_2\}$ конечно;
4. $(z, p) \in E, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (z + j, p) \in E$.

Определение 5. Скажем, что на стратифицированном подмногообразии $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ задано индексное семейство \mathcal{E} , если любой его грани $Y_j, j = 1, 2, \dots, r$, поставлено в соответствие индексное множество $\mathcal{E}(Y_j) = E_j$.

Замечание. Назовем нулевым индексным множеством $E = 0$ множество $\{(l, 0); l \in \mathbb{N}_0\}$.

Нулевым индексным семейством на Y назовем такое индексное семейство \mathcal{E} , что $\mathcal{E}(Y_j) = 0$ для любого $j = 1, 2, \dots, r$.

Определение 6. Пусть X — гладкое многообразие, Y — гладкое подмногообразие многообразия X . Определяющей функцией для Y назовём функцию $\varrho : X \rightarrow \mathbb{R}$, которая обладает следующими свойствами:

1. $\varrho^{-1}(0) = Y$;
2. ϱ — всюду гладкая;
3. $d\varrho \neq 0$ на Y .

Определение 7. Пусть дано компактное многообразие X и его стратифицированное подмногообразие $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$. Пусть $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$ — некоторое индексное семейство на Y . Предположим, что $p_0 \in Y$ принадлежит ровно одной грани Y_1 , которая имеет определяющую функцию ϱ . Функция u , определенная

на X и гладкая на $X \setminus Y$, называется полиоднородной в окрестности U_{p_0} точки p_0 относительно индексного множества E_1 , т.е. $u \in \mathcal{A}_{phg}^{E_1}(U_{p_0})$, если существуют такие функции $a_{z,k} \in C^\infty(U_{p_0})$, что

$$u(p) \sim \sum_{(z,k) \in E_1} a_{z,k}(p) \varrho^z(p) \ln^k |\varrho(p)|,$$

где знак \sim означает, что для любого натурального N

$$u - \sum_{(z,k) \in E_1 \text{ Re } z \leq N} a_{z,k} \varrho^z \ln^k |\varrho| \in \dot{C}^N(U_{p_0}),$$

где

$$\dot{C}^N(U_{p_0}) = \{f \in C^N(U_{p_0}); \left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right|_{Y_1} = 0; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0 : \alpha \leq N\}.$$

Эквивалентным образом можно сказать, что $f \in \dot{C}^N(U_{p_0})$ тогда и только тогда, когда для любого $m = 1, 2, \dots, N$ и для любого набора векторных полей V_1, V_2, \dots, V_m , касающихся подмногообразия Y , существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|V_1 V_2 \dots V_m f(p)| < C |\varrho(p)|^{N+1},$$

для любого $p \in U_{p_0}$.

Выше было сформулировано определение полиоднородной функции в терминах определяющих функций. Теперь мы сформулируем определение полиоднородной функции в терминах локальных координат.

Определение 8. Пусть дано компактное многообразие X и его стратифицированное подмногообразие $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$. Пусть $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$ — некоторое индексное семейство на Y . Предположим, что $p_0 \in Y$ принадлежит в точности одной грани Y_1 . Выберем локальную систему координат в окрестности точки p_0 таким образом, что Y_1 задается уравнением $x = 0$. Функция u , определенная на X и гладкая на $X \setminus Y$, называется полиоднородной в

окрестности U_{p_0} точки p_0 относительно индексного множества E_1 , т.е. $u \in \mathcal{A}_{phg}^{E_1}(U_{p_0})$, если существуют такие гладкие функции $a_{z,k}(y)$, что

$$u(x, y) \sim \sum_{(z,k) \in E_1} a_{z,k}(y) x^z \ln^k |x|,$$

где знак \sim означает, что для любых α и β , любого компакта $K \subset U_{p_0}$ и любого натурального N существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta KN}$, что:

$$\left| (x\partial_x)^\alpha \partial_y^\beta \left(u(x, y) - \sum_{(z,k) \in E_1, \operatorname{Re} z \leq N} a_{z,k}(y) x^z \ln^k |x| \right) \right| < C|x|^{N+1},$$

$(x, y) \in K.$

Теперь мы дадим определение полиоднородной функции в окрестности точки, принадлежащей в точности l граням для произвольного числа l . Определение будет дано индуктивно по l . При $l = 1$ определение было дано выше. Теперь предположим, что мы дали определение полиоднородной функции, определенной в окрестности точки, принадлежащей в точности k граням при $k < l$.

Определение 9. Пусть дано компактное многообразие X и его стратифицированное подмногообразие $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$. Пусть $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$ — некоторое индексное семейство на Y . Предположим, что точка $p_0 \in Y$ принадлежит граням Y_1, Y_2, \dots, Y_l , которые имеют определяющие функции $\varrho_1, \dots, \varrho_l$ соответственно, и не принадлежит другим граням данного подмногообразия. Функция u , заданная на многообразии X и гладкая на $X \setminus Y$, называется полиоднородной в окрестности U_{p_0} точки p_0 относительно набора индексных множеств (E_1, E_2, \dots, E_l) , т.е. $u \in \mathcal{A}_{phg}^{(E_1, E_2, \dots, E_l)}(U_{p_0})$, если существуют такие полиоднородные функции $a_{z,k} \in \mathcal{A}_{phg}^{E_2, \dots, E_l}(U_{p_0})$ в окрестности U_{p_0} с отмеченным стратифицированным подмного-

образом $Y_2 \cup \dots \cup Y_r$, что

$$u(p) \sim \sum_{(z,k) \in E_1} a_{z,k}(p) \varrho_1^z(p) \ln^k |\varrho_1(p)|,$$

где знак \sim означает, что для любого натурального N :

$$u(p) - \sum_{(z,k) \in E_1} a_{z,k}(p) \varrho_1^z(p) \ln^k |\varrho_1(p)| \in \dot{C}^N(U_{p_0}, \mathcal{A}_{phg}^{E_2, \dots, E_l}(U_{p_0})),$$

Замечание. В приведенном выше определении утверждение $f \in \dot{C}^N(U_{p_0}, \mathcal{A}_{phg}^{E_2, \dots, E_l}(U_{p_0}))$ означает, что для любого m , для любого набора векторных полей V_1, V_2, \dots, V_m , касающихся подмногообразия Y и для любого натурального N , существуют такие M_2, \dots, M_l , что выполнена следующая оценка с некоторой постоянной C :

$$|V_1 V_2 \dots V_m f(p)| < C |\varrho_2(p)|^{-M_2} \dots |\varrho_l(p)|^{-M_l} |\varrho_1(p)|^{N+1}.$$

Определение 10. Пусть дано компактное многообразие X и его стратифицированное подмногообразие $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$. Пусть $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$ — некоторое индексное семейство на Y . Предположим, что точка $p_0 \in Y$ принадлежит граням Y_1, Y_2, \dots, Y_l , и не принадлежит другим граням данного подмногообразия. Выберем локальную систему координат $(x_1, x_2, \dots, x_l, y)$, такую, что $Y_j, j = 1, 2, \dots, l$, задаётся уравнением $x_j = 0$. Функция u , заданная на многообразии X и гладкая на $X \setminus Y$, называется полиоднородной в окрестности U_{p_0} точки p_0 относительно набора индексных множеств (E_1, E_2, \dots, E_l) , т.е. $u \in \mathcal{A}_{phg}^{(E_1, E_2, \dots, E_l)}(U_{p_0})$, если существуют такие полиоднородные функции $a_{z,k}(x_2, \dots, x_l, y) \in \mathcal{A}_{phg}^{E_2, \dots, E_l}(U_{p_0})$, что:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_l, y) \sim \sum_{(z,k) \in E_1} a_{z,k}(x_2, \dots, x_l, y) x_1^z \ln^k |x_1|,$$

где знак \sim означает, что для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, любого компакта K , любого числа β и для любого натурального N_1 найдутся числа

M_2, \dots, M_l , что существует такая постоянная $C = C_{\alpha_1 \dots \alpha_l \beta N}$ такая, что:

$$\left| (x_1 \partial_{x_1})^{\alpha_1} \dots (x_l \partial_{x_l})^{\alpha_l} \partial_y^\beta \left(u(x_1, x_2, \dots, x_l, y) - \sum_{(z,k) \in E_1} \sum_{Rez \leq N} a_{z,k}(x_2, \dots, x_l, y) x_1^z \ln^k |x_1| \right) \right| < C |x_2|^{-M_2} \dots |x_l|^{-M_l} |x_1|^{N_1+1}, \quad (x, y) \in K.$$

Можно доказать, что определение полиоднородной функции не зависит от выбора локальной системы координат, определяющих функций и нумерации граней. Также можно показать, что определения в терминах локальных координат и в терминах определяющих функций эквивалентны.

Класс полиоднородных функций на многообразии X со стратифицированным подмногообразием Y относительно индексного семейства \mathcal{E} обозначается $\mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}}(X, Y)$.

§ 3. Относительные отображения

В этом разделе мы даем определение относительного отображения многообразий с отмеченными стратифицированными подмногообразиями.

Определение 11. Пусть X, X^0 — гладкие многообразия, $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ и $Y^0 = Y_1^0 \cup \dots \cup Y_{r^0}^0$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и X^0 соответственно. Рассмотрим гладкое отображение $f : X \rightarrow X^0$. Предположим для определенности, что точка $p_0 \in X$ принадлежит граням Y_1, \dots, Y_k и не принадлежит другим граням подмногообразия Y , и точка $f(p_0) \in X^0$ принадлежит граням Y_1^0, \dots, Y_ℓ^0 и не принадлежит другим граням подмногообразия Y^0 . Пусть $\varrho_{Y_1}, \dots, \varrho_{Y_k}$ и $\varrho_{Y_1^0}, \dots, \varrho_{Y_\ell^0}$ — определяющие функции граней Y_1, \dots, Y_k и Y_1^0, \dots, Y_ℓ^0 соответственно.

Отображение f называется относительным отображением в точке p_0 , если в некоторой окрестности U_{p_0} точки p_0 справедливо представление:

$$\varrho_{Y_i^0} \circ f = a_i \prod_{j=1}^k \varrho_{Y_j}^{\alpha_{ij}},$$

где $a_i \in C^\infty(U_{p_0})$, $a_i \neq 0$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}_0$; $i = 1, \dots, l$.

Отображение f называется относительным отображением, если оно является относительным отображением в каждой точке данного многообразия.

Замечание. Числа α_{ij} зависят только от граней Y_i^0 и Y_j и будут обозначаться как $e_f(Y_i^0, Y_j)$.

Сформулируем определение на языке координат

Определение 12. Пусть X, X^0 — гладкие многообразия, $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ и $Y^0 = Y_1^0 \cup \dots \cup Y_r^0$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и X^0 соответственно. Рассмотрим гладкое отображение $f : X \rightarrow X^0$. Предположим для определенности, что точка $p_0 \in X$ принадлежит граням Y_1, \dots, Y_k и не принадлежит другим граням подмногообразия Y , и точка $f(p_0) \in X^0$ принадлежит граням Y_1^0, \dots, Y_ℓ^0 и не принадлежит другим граням подмногообразия Y^0 . В окрестности точек $p_0, f(p_0)$ зададим локальные системы координат: $(x_1, \dots, x_n); (f_1, \dots, f_n)$ соответственно, такие что грани $Y_j, j = 1, 2, \dots, k$, и $Y_i^0, i = 1, 2, \dots, l$, задаются уравнением $x_j = 0$ и $f_i = 0$ соответственно.

Отображение f называется относительным отображением в точке p_0 , если в некоторой окрестности U_{p_0} точки p_0 для любого $f_i, i = 1, \dots, l$ справедливо представление:

$$f_i(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = a_i(x) \prod_{j=1}^k x_j^{\alpha_{ij}},$$

где $a_i \in C^\infty(U_{p_0})$, $a_i \neq 0$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}_0$; $i = 1, \dots, l$.

Из этого определения следует, что прообраз точки, принадлежащей Y_0 при относительном отображении f , принадлежит Y .

Можно показать, что определение относительного отображения не зависит от выбора локальной системы координат и определяющей функции. Также можно показать, что определения относительного отображения в терминах локальных координат и в терминах определяющих функций эквивалентны.

§ 4. Основные теоремы

Данный раздел содержит формулировки основных результатов работы о поднятии и опускании полиоднородных функций при относительных отображениях.

Определение 13. Пусть X, X^0 — некоторые множества. Поднятием функции φ на X при отображении $f : X \rightarrow X^0$ называется функция $f^*\varphi$ на X^0 , задаваемая формулой $f^*\varphi = \varphi \circ f$.

Замечание. Если X и X^0 являются гладкими многообразиями, и f — гладким отображением, то поднятие любой функции $\varphi \in C^\infty(X)$ является гладкой функцией на X^0 .

Теорема 1. Пусть X, X^0 — гладкие многообразия, $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ и $Y^0 = Y_1^0 \cup \dots \cup Y_r^0$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и X^0 соответственно, $f : X \rightarrow X^0$ — относительное гладкое отображение. Предположим, что $u \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}^0}(X^0, Y^0)$ — полиоднородная функция на X^0 с индексным семейством $\mathcal{E}^0 = (E_1^0, \dots, E_r^0)$. Тогда $f^*u \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}}(X, Y)$, где индексное семейство $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$ имеет следующий вид:

$$E_j = \{(\eta + \gamma_{ij}z, q) : (z, q) \in E_i^0, \eta \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, r^0\},$$

где $j = 1, 2, \dots, r$, $\gamma_{ij} = e_f(Y_i^0, Y_j)$.

Замечание. В данной теореме принадлежность функции f^*u пространству $C^\infty(X \setminus Y)$ следует из того, что прообраз подмногообразия Y^0 при относительном отображении f содержится в Y .

Определение 14. Пусть X, X^0 — гладкие компактные многообразия. Пусть задано гладкое отображение $f : X \rightarrow X^0$. Опусканием обобщённой функции $u \in \mathcal{D}'(X)$ называется обобщённая функция $f_*u \in \mathcal{D}'(X^0)$, задаваемая формулой:

$$\langle f_*u, \varphi \rangle = \langle u, f^*\varphi \rangle, \quad \varphi \in C^\infty(X^0).$$

Любая полиоднородная функция $u \in \mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, Y)$ на X с индексным семейством $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$, удовлетворяющим условию

$$\inf\{\operatorname{Re} z : (z, q) \in E_j, j = 1, 2, \dots, r\} > -1, \quad (1)$$

является регулярной функцией на X и потому определяет элемент пространства $\mathcal{D}'(X)$. Тем самым, определено ее опускание $f_*u \in \mathcal{D}'(X^0)$ при любом гладком отображении $f : X \rightarrow X^0$.

Теорема 2. Пусть X, X^0 — гладкие компактные многообразия, $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ и $Y^0 = Y_1^0 \cup \dots \cup Y_{r^0}^0$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и X^0 соответственно, $f : X \rightarrow X^0$ — относительно гладкое отображение. Предположим, что ограничение отображения f на $X \setminus Y$ является расслоением над $X^0 \setminus Y^0$. Пусть $u \in \mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, Y)$ — полиоднородная функция на X с индексным семейством $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$, удовлетворяющим условию (1). Тогда $f_*u \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}^0}(X^0, Y^0)$, где индексное семейство $\mathcal{E}^0 = (E_1^0, \dots, E_{r^0}^0)$ имеет следующий вид:

$$E_i^0 = \{(z/\gamma_{ij}, q) : (z, q) \in E_j, j = 1, 2, \dots, r\},$$

где $i = 1, 2, \dots, r^0$, $\gamma_{ij} = e_f(Y_i^0, Y_j)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Melrose R. B.* The Atiyah-Patodi-Singer index theorem. Research Notes in Mathematics, 4. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993
- [2] *Grieser D.* Basics of the b-calculus. *Approaches to singular analysis (Berlin, 1999)*, 30-84, Oper. Theory Adv. Appl., 125, Birkhauser, Basel, 2001.

УДК 519.2

КОМПЬЮТЕРНОЕ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ
(НА ПРИМЕРЕ ЗДАНИЯ НФ БАШГУ)

А.В. Пыжьянов, И.А. Шагапов,
(Нефтекамск, НФ БашГУ)

Развитие игровой индустрии в последнее время идет с всё нарастающей скоростью и возможностями, которые дают современные игровые программы, позволяют изображать реальные объекты с почти кинематографическим качеством. Физика, изображение, эффекты – это те составляющие, которые помогают проникнуться в атмосферу происходящего, погружают человека в мир, созданный руками человека.

Благодаря фантазии разработчиков мы, будучи дома, можем пройтись по пляжам затерянных островов, побегать по сугробам далеких миров, летать на космических кораблях.

Как следствие после таких прогулок по вымышленным местам большинству игроков хочется очутиться в местах знакомых им очень давно, то есть сделать то, что они пытались сделать в детстве. Сегодня такие желания вполне «выполнимы». Одним из таких возможностей является компьютерное 3D-моделирование, чему и посвящена данная работа.

В качестве объекта моделирования было выбрано здание второго корпуса НФ БашГУ, мысли о «воссоздании» которого витали давно. Изначальные идеи базировались на создании модели в 3dsMax. Но из-за большой «требовательности» этой программы и отсутствии прямой возможности «пройтись» по готовому объекту выбор ПО пал на «Unreal Level Editor». Данная программа напрямую ориентирована на задачи такого типа, причем она позволяет использовать объекты, разработанные в 3dsMax и программировать их.

UnrealEd (Unreal Editor, UEd) — редактор уровней и других ресурсов для игр на игровом движке Unreal Engine, который практически всегда идет в поставке с самой игрой (редактор могут назвать иначе, например Rune Editor для игры Rune, но это все равно модифицированный Unreal Editor). Редактор представляет собой единое приложение для редактирования уровней игры и всего с ними связанного, например, создания скриптовых сцен, импорт ресурсов из сторонних приложений и так далее. Всё, что нужно для создания полноценного уровня, есть в редакторе, никакие дополнительные утилиты не требуются.

Для создания уровней используется CSG и создаваемое на его основе BSP-дерево, как и во многих других движках, но оно примечательно тем, что изначально весь уровень заполнен материей, и создатель уровня вырезает в нем «комнаты».



Рис.1 Окно редактора Unreal Level Editor 3.0

Это сильно упрощает создание закрытых уровней, поскольку для создания простой комнаты достаточно вырезать куб, а не делать

стены, пол и потолок по отдельности. При необходимости, можно вырезать огромный куб и сделать так, чтобы на его стены проецировалась текстура неба (т. н. скайбокс).

На начальном этапе была проведена большая работа по «изучению объекта», в частности, «сняты» все метрические данные, составлена подробная карта, разработана текстура и т.д. Затем на основе собранных данных поэтапно был построен сам объект.

С помощью инструмента Subtract вырезаются первые «комнаты», с которых проще всего продолжать постройку остального здания.

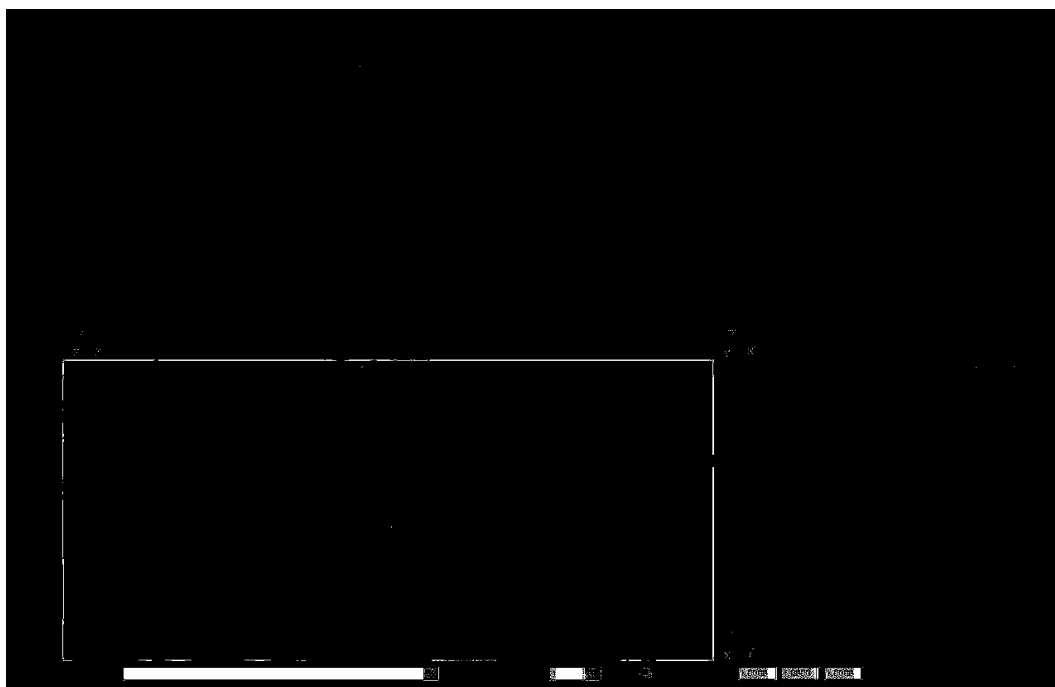


Рис.2 Построение первого этажа

На данном этапе построены все необходимые комнаты первого этажа, вырезаны дверные и оконные проемы, лестничные пролеты на обоих концах.

Аналогично строится второй этаж. Далее строится (вырезается) внешнее пространство вокруг здания. Заметим, что как само здание, так и внешнее пространство нуждается в «расстановке»

мебели, «посадке» деревьев и т.д.

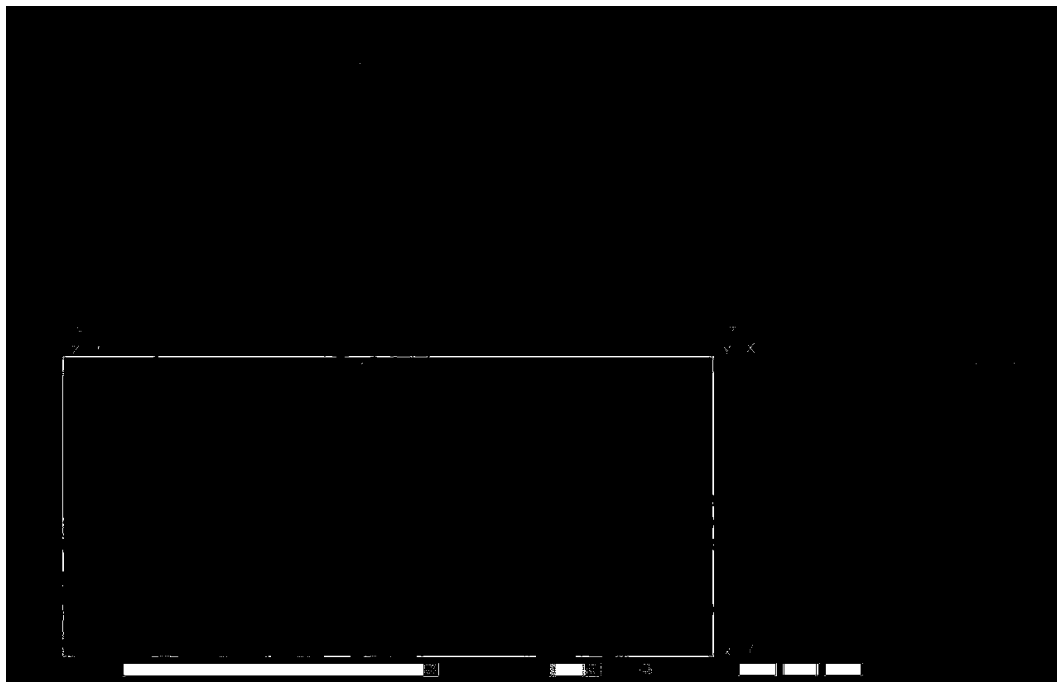


Рис.3 Построение второго этажа

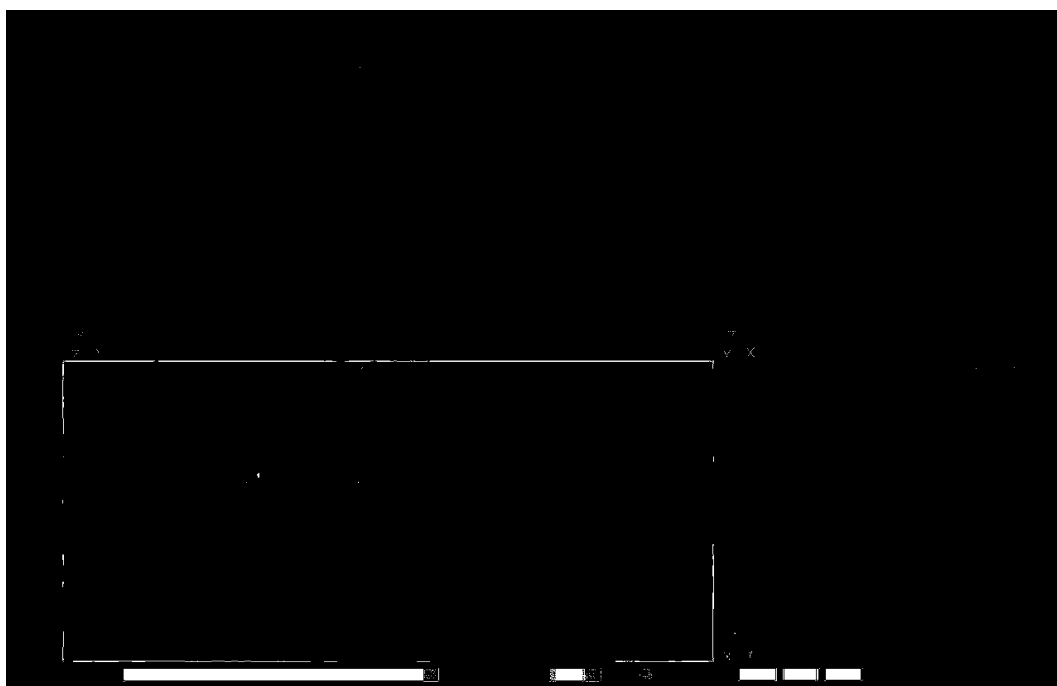


Рис.4 Здание без текстуры

Создается узнаваемый вид здания НФ БашГУ.

Рис.5 Текстурирование полигонов

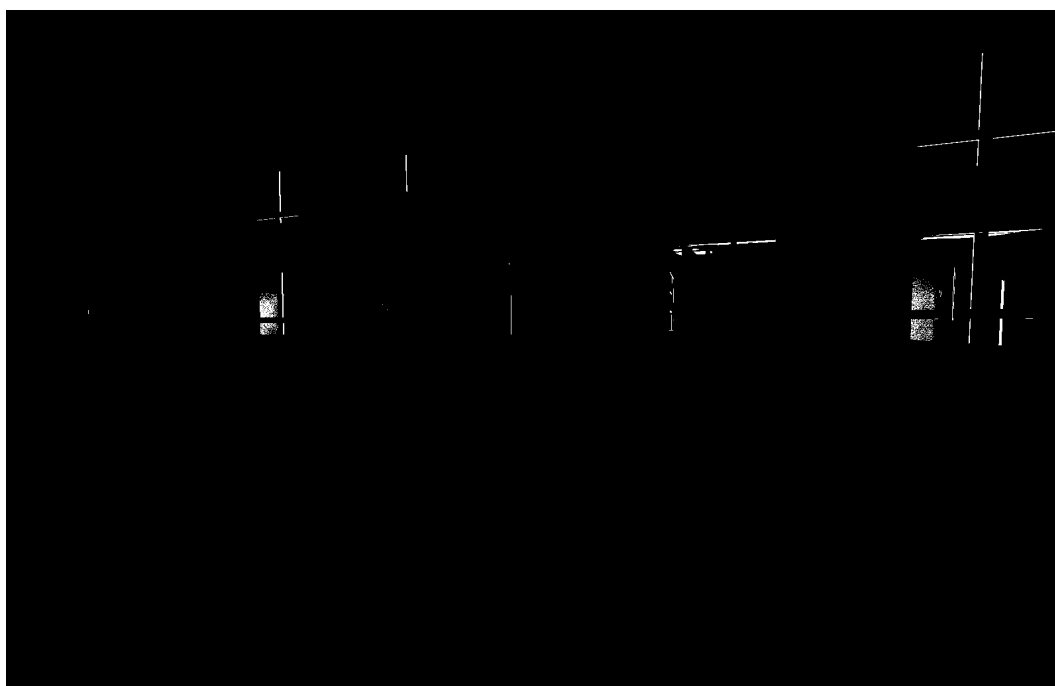


Рис.6 Модель построена

В построенной модели реализованы все основные атрибуты здания, включая: текстуру, прозрачность окон, мебель, внешний пейзаж. По нашему мнению, они получились реалистичными и узнаваемыми.

Пользователь данной модели «видит» с точки зрения «3D-наблюдателя», причем этот наблюдатель подчиняется основным физическим законам (гравитации, инерции и т.д.).

Основным показателем данного продукта является возможность «прогулки» по всем этажам, аудиториям данного здания.

Приложения.

По нашему мнению продукты данного типа можно использовать в следующих случаях:

а) использовать вместо классических плоских карт, ведь здесь объект можно видеть целиком, почти как есть;

б) еще до реального построения объект можно сконструировать, текстурировать, расставить необходимые предметы и оценить результаты;

в) изучать объект виртуально, на нем разрабатывать различные маршруты передвижения, проигрывать различные ситуации, строить сценарии и репетировать их (например, сотрудниками МВД, МЧС).

г) восстановление объекта (уже несуществующего) по имеющейся о нем информации (возможно, неполной).

УДК 532.546; 533.15

ВЛИЯНИЕ УПРУГИХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА СПЕКТР ЧАСТОТ ЕЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Сафина Г. Ф. (НФ БашГУ)

Введение

Круговые цилиндрические оболочки являются элементами сложных механических систем, широко используемых в технике. Исследование зависимости спектра частот осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки от коэффициентов относительной жесткости ее упругих закреплений является актуальным в связи с необходимостью решений задач акустической диагностики трубопроводов, виброзащиты топливных систем, а также проблемы сохранения безопасного спектра частот колебаний механических систем при изменениях параметров их закреплений.

Влияние ряда краевых условий на величины собственных значений задачи осесимметричных колебаний цилиндрических оболочек рассмотрено в работе [1]; обратная зависимость - зависимость краевых условий от собственных частот исследована в работах [2,3]. В продолжении исследований указанных работ, в данной работе исследуется влияние упругих закреплений цилиндрической оболочки на собственные частоты ее осесимметричных колебаний и определяются закрепления оболочки, сохраняющие заданный диапазон частот ее колебаний.

§ 1. Прямая задача

Дифференциальное уравнение осесимметричных колебаний круговой цилиндрической оболочки известно [1] и имеет вид:

$$y^{IV}(x) - \lambda^4 y(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь λ — собственное значение задачи, зависящее от частоты свободных осесимметричных колебаний ω [1]:

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} - \frac{E h}{D R^2},$$

R, D - радиус, цилиндрическая жесткость, E, ρ - модуль упругости и плотность материала, h - толщина оболочки с учетом каркаса.

Для оболочки, свободно опертой на упругие в своих плоскостях и абсолютно податливые вдоль оси оболочки круговые ребра, имеем следующие краевые условия

$$\begin{aligned} U_1 = y''(0) = 0; \quad U_2 = y'''(0) + B_0 l^{-3} y(0) = 0; \\ U_3 = y''(l) = 0; \quad U_4 = y'''(l) - B_l l^{-3} y(l) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где B — относительная жесткость ребер, причем в сечении $x = 0$ имеем B_0 , в сечении $x = l$ — B_l .

Поскольку $\lambda^4 > 0$, то при двух мнимых и двух действительных корнях характеристического уравнения общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \sin \lambda x, \quad (3)$$

где C_i — произвольные постоянные, зависящие от краевых условий.

Подставляя решение (3) в краевые условия (2) получим систему однородных уравнений, приравнивая характеристический определитель которой имеем следующее частотное уравнение

$$\begin{aligned} \alpha^6(1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha) + \alpha^3(B_0 + B_l)(\operatorname{sh} \alpha \cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha) + \\ + 2 B_0 B_l \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\alpha = \lambda l$ — безразмерный параметр, зависящий от вида решения дифференциального уравнения и краевых условий. Из уравнения (4) при определенных значениях коэффициентов B_0 и B_l относительной жесткости упругих закреплений оболочки можно определять значения собственных частот ее осесимметричных колебаний.

§ 2. Влияние коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений оболочки на спектр частот ее колебаний

Исследуем зависимость собственных частот осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки от коэффициентов краевых условий. Будем менять значения B_0 и B_l относительных жесткостей упругих закреплений трубы и вычислять соответствующие этим закреплениям собственные значения λ_k спектральной задачи.

По результатам решения прямой задачи с дифференциальным уравнением (1) и краевыми условиями (2) установлено, что увеличение коэффициентов B_0 и B_l относительной жесткости краевых ребер оболочки ведет к увеличению собственных частот ее осесимметричных колебаний.

Проведены вычисления собственных значений λ_k при увеличении коэффициента относительной жесткости закрепления на одном конце трубы и фиксированном значении коэффициента на другом его конце. Например, на рисунке 1(а) для задачи (1), (2) рассмотрены зависимости собственного значения λ_1 колебаний оболочки от коэффициента B_l при фиксированном коэффициенте $B_0 = 1$ краевых условий. На рисунке 1(б) подобная зависимость показана для собственного значения λ_2 .

Исследования проведены при различных физических параметрах цилиндрической оболочки. Увеличение собственных значений λ_1 и λ_2 ведет к увеличению соответствующих собственных частот ω_1 и ω_2 спектра осесимметричных колебаний оболочки.

Показано, что такое изменение касается всего спектра частот колебаний трубы. Результаты вычислений, например, первых пяти собственных значений λ_k спектральной задачи (1), (2) при различных коэффициентах B_l относительной жесткости упругого закрепления на конце $x = l$ оболочки при фиксированном коэффициенте $B_0 = 1$ на конце $x = 0$, приведены в таблице 1.

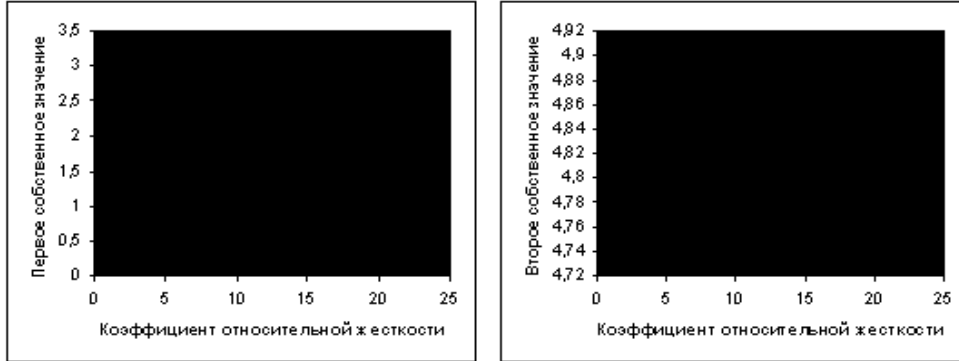


Рис. 1: Зависимость собственного значения λ_1 (а) , собственного значения λ_2 (б) задачи (1), (2) от коэффициента B_l (при $B_0 = 1$) краевых условий

Таблица 1: Зависимость значений λ_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) спектральной задачи (1), (2) от коэффициента B_l (при $B_0 = 1$) краевых условий

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$B_0 = 1, B_l = 1$	1,5641	4,7488	7,8573	10,9971	14,1378
$B_0 = 1, B_l = 2$	1,7501	4,7583	7,8594	10,9978	14,1379
$B_0 = 1, B_l = 5$	2,1249	4,7869	7,8656	11,0001	14,1392
$B_0 = 1, B_l = 7$	2,2908	4,8062	7,8698	11,0016	14,1400
$B_0 = 1, B_l = 10$	2,4779	4,8355	7,8769	11,0039	14,1410
$B_0 = 1, B_l = 20$	2,8661	4,9348	7,8975	11,0115	14,1446
$B_0 = 1, B_l = 30$	3,0903	5,0347	7,9194	11,0192	14,1482

Аналогичную зависимость между величинами относительной жесткости и соответствующими собственными значениями спектральной задачи можно получить при одновременном изменении коэффициентов относительной жесткости краевых ребер оболочки. На рисунках 2(а) и 2(б) показаны графики зависимостей значений собственного значения λ_1 и собственного значения λ_1 рассматриваемой задачи от одновременно меняющихся значений коэффициентов B_0 и B_l краевых условий.

В таблице 2 приведены значения первых пяти собственных значений λ_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) спектральной задачи (1), (2) от коэф-

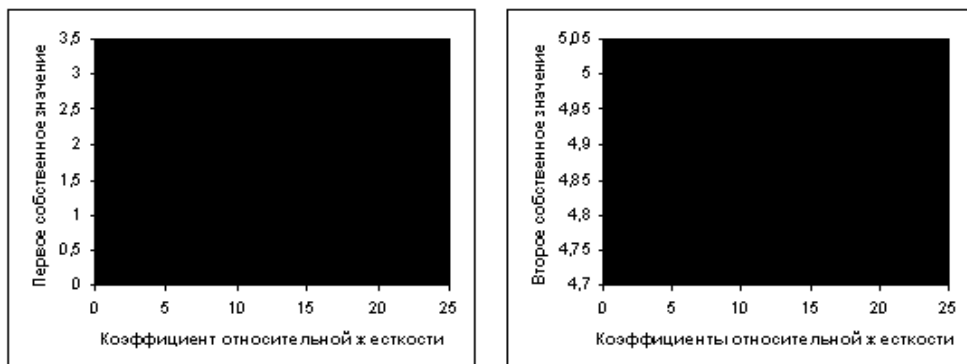


Рис. 2: Зависимость собственного значения λ_1 (а), собственного значения λ_2 (б) задачи 1), (2) от коэффициентов B_0 и B_l краевых условий

фициента B_l (при $B_0 = 1$) краевых условий.

Таблица 2: Зависимость значений λ_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) спектральной задачи (1), (2) от коэффициентов B_0 и B_l краевых условий

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$B_0 = 2, B_l = 2$	1,8589	4,7676	7,8614	10,9986	14,1385
$B_0 = 3, B_l = 3$	2,0560	4,7862	7,8656	11,0001	14,1392
$B_0 = 5, B_l = 5$	2,0560	4,8231	7,8739	11,0031	14,1407
$B_0 = 7, B_l = 7$	2,5351	4,8596	7,8822	11,0061	14,1421
$B_0 = 10, B_l = 10$	2,7666	4,9133	7,8946	11,0107	14,1442
$B_0 = 20, B_l = 20$	2,8961	5,0004	7,9155	11,0182	14,1478
$B_0 = 30, B_l = 30$	3,0846	5,0842	7,9365	11,0258	14,1513

Таким образом, по решениям прямой спектральной задачи установлено, что увеличение коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений краев оболочки ведет к собственным частотам спектра осесимметричных колебаний оболочки.

Проведенные исследования важны для решения задачи сохранения заданного диапазона частот колебаний оболочки. Последняя же проблема разрешима при решении обратной задачи к данной прямой задаче.

§ 1. Обратная задача. Сохранение спектра частот колебаний оболочки

Поставим к прямой спектральной задаче обратную:

по собственным частотам свободных осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки найти относительные жесткости упругих закреплений, сохраняющих заданный диапазон частот ее колебаний.

Решение обратной задачи рассмотрено нами в работах [2, 3], в которых доказана теорема о двойственности определения коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений оболочки и рассмотрен метод восстановления краевых условий задачи по двум частотам колебаний оболочки. Но рассмотренный метод не учитывал возможность абсолютно жестких закреплений краев оболочки.

В данной статье приведем более общий метод решения обратной спектральной задачи, который учитывает и абсолютно жесткие закрепления трубы, т.е. случай, когда $0 \leq B_{0,l} \leq \infty$. Краевые условия (2) задачи (1) представим в виде:

$$\begin{aligned} U_1(x) = y''(0) = 0; & \quad U_2(x) = a_1 y'''(0) + a_0 y(0) = 0; \\ U_3(x) = y''(l) = 0; & \quad U_4(x) = b_1 y'''(l) - b_0 y(l) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$B_0 l^{-3} = a_0 a_1^{-1}, \quad B_1 l^{-3} = b_0 b_1^{-1}. \quad (6)$$

При абсолютно жестком закреплении ребер оболочки в краевых условиях (2) остаются только вторые слагаемые. Этому же соответствует случай $a_1 = 0, b_1 = 0$ в краевых условиях (5).

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов форм $U_2(x)$ и $U_4(x)$ краевых условий (5), через $A = \left\| \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 & b_1 \end{array} \right\|$, а миноры, составленные из i -го и j -го столбцов этой матрицы, — через M_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 4$). Тогда отыскание краевых условий равносильно нахождению линейной оболочки $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, построенной на векторах

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b} = (0, 0, -b_0, b_1)^T.$$

В таких обозначениях обратная задача состоит в восстановлении матрицы A с точностью до линейной эквивалентности.

Из условия равенства нулю характеристического определителя получим следующее частотное уравнение

$$M_{13} f_1(\lambda_j) + (M_{14} - M_{23}) f_2(\lambda_j) + M_{24} f_3(\lambda_j) = 0, \quad (j = 1, 2), \quad (7)$$

в котором

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_j) &= 2 \operatorname{sh} \lambda l \sin \lambda l; \\ f_2(\lambda_j) &= \lambda^3 (\operatorname{ch} \lambda l \sin \lambda l - \operatorname{sh} \lambda l \cos \lambda l); \\ f_3(\lambda_j) &= \lambda^6 (\operatorname{ch} \lambda l \cos \lambda l - 1). \end{aligned}$$

Рассмотрим λ_1 и λ_2 — два собственных значения спектральной задачи (1), (5). Тогда равенства (7) представляют собой систему двух уравнений от трех неизвестных M_{13} , $(M_{14} - M_{23})$, M_{24} . Если ранг системы уравнений (7) равен двум, то система имеет единственное решение с точностью до постоянного множителя. Определив все неизвестные миноры M_{ij} , можно найти матрицу A с точностью до линейных эквивалентных матриц, т.е. восстановить краевые условия задачи (5).

Применение метода рассмотрим на примере (для определенности примем, что $l = 1$). Известны собственные значения задачи (1), (5): $\lambda_1 = 3, 14$, $\lambda_2 = 6, 28$. Система (7) при этих значениях λ_j имеет решение:

$$M_{13} = 0,323 \cdot 10^{11} K; \quad M_{24} = 0,004 K; \quad M_{14} - M_{23} = K.$$

Поскольку $M_{14} - M_{23}$ является произвольной постоянной, а M_{13} значительно больше (на множитель 10^{11}) остальных неизвестных, то с достаточно большой точностью можно считать, что $M_{13} = 1$, $M_{24} = 0$, $M_{14} - M_{23} = 0$. Матрица A в этом случае примет вид:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Значит, коэффициенты относительной жесткости упругих краевых ребер трубопровода следующие: $B_0 = \infty$ и $B_l = \infty$. Снова заметим, что относительные жесткости упругих краевых ребер определены верно. Числа λ_1 и λ_2 , рассмотренные в примере, совпадают с первыми двумя корнями частотного уравнения (7) при значениях $M_{13} = 1$, $M_{14} = 0$, $M_{23} = 0$, $M_{24} = 0$. Этот пример показывает, что, зная первые две собственные частоты осесимметричных колебаний трубопровода, по рассмотренному методу можно определить и абсолютно жесткое его закрепление.

В работе предложено решение задачи сохранения заданного безопасного спектра частот колебаний оболочки с помощью соответствующих изменений в коэффициентах относительной жесткости ее упругих закреплений. Получены аналитические формулы для коэффициентов упругих закреплений, которые позволяют определять значения B_0 и B_l , необходимые для сохранения заданного спектра частот осесимметричных колебаний оболочки. Показано, что при усилении закрепления на одном из концов оболочки необходимо соответствующим образом ослабить закрепление на другом ее конце для того, чтобы спектр частот остался прежним.

Заключение

Таким образом, проведено исследование влияния параметров упругих закреплений оболочки на спектр частот ее осесимметричных колебаний. Показано, что увеличение коэффициентов относительной жесткости упругих краевых ребер ведет к увеличению значений спектральной задачи и к увеличению спектра собственных частот.

Разработан метод определения параметров закреплений цилиндрической оболочки по собственным частотам ее осесимметричных колебаний, включающий в себя и случай абсолютно жесткого закрепления краевых ребер. Построенный алгоритм решения обратной задачи позволяет при изменениях параметров

упругих закреплений обеспечивать заданный диапазон частот колебаний оболочки. Построенный алгоритм может быть также применен для диагностики недоступных для визуального осмотра закреплений элементов механических систем и строительных конструкций, составляющими которых являются круговые цилиндрические оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Антоненко Э.В.* Частоты свободных колебаний гладких подкрепленных цилиндрических оболочек с упруго подкрепленными краями // Прикладная механика. 1989. Т 25, Вып.8. – С.122-126.
- [2] *Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф.* Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки // Техническая акустика. 2004. № 19. – С.1–8.
- [3] *Сафина Г.Ф.* Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки по двум частотам ее осесимметричных колебаний // Труды IV региональной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Уфа – 2004. – С.173–182.

УДК 532.546; 533.15

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ЗУБЧАТЫМИ ПЕРЕДАЧАМИ

Сафина Г. Ф., Зарипов Р. Р.
(Нефтекамск, НФ БашГУ)

Введение

Современные механизмы и машины трудно представить без зубчатых передач, которые являются их важнейшими элементами. Хорошо известно, что при определенных скоростях вращающиеся системы с зубчатыми передачами становятся динамически неустойчивыми и возможно появление больших колебаний.

Задача, рассмотренная в данной работе, относится к прямым спектральным задачам. Исследования спектра частот колебаний любой механической системы важно для решения обратной задачи сохранения безопасного спектра частот при изменениях параметров системы. Колебаниям систем с зубчатыми передачами посвящено много работ, в том числе [1-3]. В отличие от них в представленной работе рассмотрена прямая задача по определению собственных частот систем с тремя и четырьмя зубчатыми передачами и исследовано влияние параметров систем на спектр частот их крутильных колебаний.

Зубчатые передачи разделяют по взаимному расположению осей на передачи: с параллельными осями — цилиндрические, с пересекающимися осями — конические, цилиндроконические и плоскоцилиндрические; с перекрещивающимися осями — зубчато-винтовые. На рисунке 1, например, представлена зубчатая передача: а) прямозубая; б) косозубая; в) шевронная; г) коническая; д) с круговым зубом; е) с внутренним зацеплением. В данной работе рассмотрены зубчатые передачи с цилиндрическими колёсами.

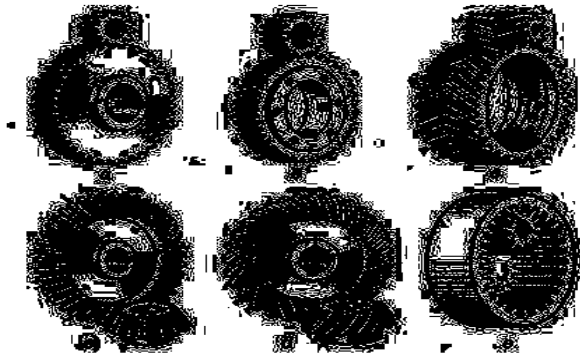


Рис. 1: Виды зубчатых передач

Определение собственных частот систем с зубчатыми передачами

Рассмотрим систему с зубчатыми передачами. Пусть углы поворота вала в местах насадки шестерён будут соответственно $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Жесткости участков вала, которые могут вызвать угол закручивания данного участка равный одному радиану, обозначим: k_1, k_2, \dots, k_{n-1} . Моменты инерции шестерён обозначим I_1, I_2, \dots, I_n .

Поставим прямую задачу: определить собственные частоты крутильных колебаний системы с зубчатыми передачами, состоящего из n ($n=1, 2, 3, 4, \dots$) шестерён с известными моментами инерции масс, укрепленных на стальном валу с известными жесткостями. Для получения уравнения колебательного движения такой механической системы применим уравнения Лагранжа, которые имеют вид [1]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}_i} \right) - \frac{dT}{d\varphi_i} + \frac{dV}{d\varphi_i} = 0,$$

где T, V — кинетическая и потенциальная энергии системы.

Уравнения Лагранжа стандартным способом сводятся к системе n -дифференциальных уравнений крутильных колебаний меха-

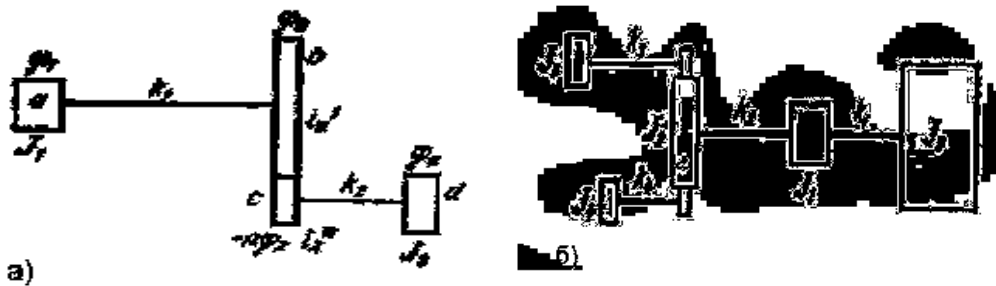


Рис. 2: Системы с зубчатыми передачами

нической системы с любым числом шестерен. В работе рассмотрены механические системы с тремя (рисунок 2(а)) и четырьмя зубчатыми передачами (рисунок 2 (б)).

Для механической системы с тремя шестернями дифференциальные уравнения крутильных колебаний примут вид:

$$\begin{cases} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \\ I_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} - k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + k_3(\varphi_3 - \varphi_4) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — моменты инерции шестерён, k_1, k_2 — жесткости участков вала на кручении. Подставляя решения

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= M_1 \sin(pt + \alpha), \\ \varphi_2 &= M_2 \sin(pt + \alpha), \\ \varphi_3 &= M_3 \sin(pt + \alpha) \end{aligned}$$

в систему (1), получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 M_1 p^2 - k_1(M_1 - M_2) = 0, \\ I_2 M_2 p^2 + k_1(M_1 - M_2) + k_2(M_2 - M_3) = 0, \\ I_3 M_3 p^2 + k_2(M_2 - M_3) = 0, \end{cases}$$

где M_1, M_2, M_3 — амплитуды колебаний, p_k — собственные частоты колебаний.

Постепенно исключая амплитуды из последней системы уравнений, получим следующее частотное уравнение для механиче-

ской системы с тремя зубчатыми передачами

$$p^4 - \left(k_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} + k_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \right) p^2 + k_1 k_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} = 0. \quad (2)$$

Корни уравнения (2) и соответствуют двум главным видам колебаний: низшему, имеющему один узел колебаний (две соседние шестерни вращаются в одну сторону), и высшему, имеющему два узла колебания (крайние шестерни вращаются в одну сторону).

Рассмотрены также крутильные колебания механической системы с четырьмя шестернями. Система дифференциальных уравнений для такой механической системы примет вид

$$\begin{cases} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \\ I_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} - k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) = 0; \\ I_4 \frac{d^2 \varphi_4}{dt^2} - k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) + k_4 (\varphi_4 - \varphi_5) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь снова I_1, I_2, I_3, I_4 — моменты инерции шестерён, k_1, k_2, k_3 — жесткости участков вала на кручении.

Подставляя в систему уравнений (3) решения

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= M_1 \sin(pt + \alpha), \\ \varphi_2 &= M_2 \sin(pt + \alpha), \\ \varphi_3 &= M_3 \sin(pt + \alpha), \\ \varphi_4 &= M_4 \sin(pt + \alpha), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{cases} I_1 M_1 p^2 - k_1 (M_1 - M_2) = 0, \\ I_2 M_2 p^2 + k_1 (M_1 - M_2) + k_2 (M_2 - M_3) = 0, \\ I_3 M_3 p^2 + k_2 (M_2 - M_3) + k_3 (M_3 - M_4) = 0, \\ I_4 M_4 p^2 + k_3 (M_3 - M_4) = 0. \end{cases}$$

Проведя аналогичные преобразования с последней системой уравнений получим частотное уравнение для механической системы с

четырьмя зубчатыми передачами:

$$\begin{aligned}
 & p^6 - \left(k_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} + k_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3 + k_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4}} \right) p^4 + \\
 & + \left(k_1 k_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} + k_2 k_3 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} + k_1 k_3 \frac{I_1 + I_3 + I_4}{I_1 I_3 I_4} \right) p^2 + \\
 & + k_1 k_2 k_3 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Применение метода решения прямой задачи по определению собственных частот крутильных колебаний зубчатых передач рассмотрено на конкретных примерах. Составлена также программа решения спектральной задачи, использующая команды математического пакета Maple.

Влияние характеристик системы с зубчатыми передачами на спектр частот ее крутильных колебаний

Исследуем влияние на спектр частот крутильных колебаний системы с зубчатыми передачами таких характеристик, как моменты инерции масс шестерен и жесткостей участков вала на кручении.

По решению прямой задачи для механической системы с тремя зубчатыми передачами получено, что увеличение жесткостей вала на кручении ведет к увеличению собственных частот колебаний системы. В таблице 1, например, приведены значения частот p_1 и p_2 , соответствующие одновременно увеличивающимся значениям жесткостей k_1 и k_2 участков вала на кручении при известных моментах инерции масс шестерен: $I_1 = 0.2 \text{ Н м с}^2$, $I_2 = 0.3 \text{ Н м с}^2$, $I_3 = 0.1 \text{ Н м с}^2$.

Подобная зависимость собственных частот колебаний механической системы от меняющегося значения жесткости k_2 второй шестерни и фиксированном значении жесткости k_1 первой шестерни представлена в таблице 2.

Исследования спектра частот показали также, что при увеличении моментов инерции масс шестерен, спектр частот крутильных колебаний уменьшается.

Таблица 1: Зависимость собственных частот p_1 и p_2 от одновременно меняющихся жесткостей k_1 и k_2 участков вала на кручении

	k_1 (кН м)	k_2 (кН м)	p_1 (c^{-1})	p_2 (c^{-1})
	0.1	0.1	0.816	1.225
	0.2	0.2	1.154	1.732
	0.3	0.3	1.414	2.212
	0.4	0.4	1.632	2.449
	0.5	0.5	1.826	2.739

Таблица 2: Зависимость собственных частот p_1 и p_2 от коэффициента жесткости k_2 и фиксированном значении k_1 участков вала на кручении

	k_1 (кН м)	k_2 (кН м)	p_1 (c^{-1})	p_2 (c^{-1})
	0.1	0.1	0.816	1.225
	0.1	0.2	0.848	1.667
	0.1	0.3	0.855	2.025
	0.1	0.4	0.858	2.330
	0.1	0.5	0.860	2.600

В таблице 3, например, дана зависимость собственных частот колебаний системы с тремя зубчатыми передачами от одновременно меняющихся моментов инерции масс всех трех шестерен, а в таблице 4 — от меняющегося момента инерции массы первой шестерни и фиксированных значениях моментов инерции масс двух других шестерен. Здесь приняты жесткости вала на кручении: $k_1 = 0.1$ кН м, $k_2 = 0.2$ кН м.

Аналогичные результаты получены и по исследованию влияния характеристик системы с четырьмя зубчатыми передачами на спектр частот ее колебаний.

Заключение

В работе исследована прямая задача определения собственных частот систем с зубчатыми передачами по известным моментам инерции масс дисков и коэффициентам жесткости участков вала на кручении.

Таблица 3: Зависимость собственных частот p_1 и p_2 от моментов инерции масс I_1 , I_2 , I_3 всех шестерен

	I_1 (Н м с ²)	I_2 (Н м с ²)	I_3 (Н м с ²)	p_1 (с ⁻¹)	p_2 (с ⁻¹)
	0.1	0.1	0.1	1.126	2.175
	0.1	0.1	0.2	1.000	2.000
	0.1	0.1	0.3	0.938	1.946
	0.1	0.1	0.4	0.902	1.919
	0.1	0.1	0.5	0.878	0.904

Таблица 4: Зависимость собственных частот p_1 и p_2 от момента инерции массы I_1 первой шестерни при фиксированных моментах инерции масс I_2 , I_3 других шестерен

	I_1 (Н м с ²)	I_2 (Н м с ²)	I_3 (Н м с ²)	p_1 (с ⁻¹)	p_2 (с ⁻¹)
	0.1	0.1	0.1	1.126	2.175
	0.1	0.1	0.2	1.000	2.000
	0.1	0.1	0.3	0.938	1.946
	0.1	0.1	0.4	0.902	1.919
	0.1	0.1	0.5	0.878	0.904

Решение сведено к системе n -обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных собственных частот крутильных колебаний механической системы. Из системы дифференциальных уравнений получены частотные уравнения для механической системы с тремя, четырьмя зубчатыми передачами.

Исследовано влияние на спектр частот крутильных колебаний моментов инерции масс шестерен и жесткостей участков вала на кручении. Показано, что увеличение жесткостей ведет к увеличению собственных частот, а увеличение моментов инерции масс шестерен — к уменьшению частот крутильных колебаний систем с зубчатыми передачами.

В связи с постоянно возрастающими требованиями к геометрии, колебаниям зубчатых передач и условиям их эксплуатации в настоящее время совершенствуются методы обработки зубчатых

колес, создаются новые методы диагностики характеристик механических систем с зубчатыми передачами.

Определение частот p_k из уравнений (2) и (4), позволяет также рассчитать критические скорости вращения систем с зубчатыми передачами. Знание же скоростей ведет к предупреждению поступления разного рода нарушений нормального хода машины, которые обычно выражаются в появлении биений или вибрации всей установки в целом.

Проведенные исследования по решению прямой спектральной задачи важны при исследовании обратной задачи диагностирования характеристик систем с зубчатыми передачами, а также при решении задачи сохранения спектра частот их крутильных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. //М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Бабаков И.В. Теория колебаний. //М: Дрофа, 2004.
- [3] Кудрявцев В.Н. Зубчатые передачи. //М.-Л., 1957.

UDC 539.3

PROPAGATION OF NORMAL ELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC WAVEGUIDES OF COMPLEX CROSS SECTION

Troian R. R. (Donetsk national university, Ukraine)

Introduction

The problem of normal elastic waves propagation in anisotropic cylinders from materials of hexagonal systems with the canonical circular or ring form of section is investigated on many aspects.

The dispersion spectrums of normal elastic waves are investigated for cylindrical waveguides with non classic sections to a lesser degree. In this work the method and the analysis of the normal waves in cylindrical waveguides with not canonical section, particularly compound circular waveguides with sector cut of any angular measure in section are presented. The carried out researches are of interest for search of new fundamental laws and specific effects in waveguide properties of cylinders anisotropic in an axial direction. The inclusion presence is considered to be the mechanism of dispersion spectrum properties controlling. The laws found out as a result of this research can be used at hypersonic techniques designing.

§ 1. Statement of the problem

Extended transverse-isotropic cylindrical waveguides with longitudinal axis of elastic symmetry are considered. The sector cut of any angular measure is contained in concentric ring section with circular inclusion. The waveguide in dimensionless cylindrical coordinates system (r, θ, z) occupies area $V_1 = \{0 \leq r \leq R_2, -\alpha \leq \theta \leq \alpha, -\infty < z < \infty\}$. The contour of waveguide V_1 section is $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}$, where $\Gamma_{0i} = \{r = R_i, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$, $\Gamma_+ = \{0 \leq r \leq R_2, \theta = \alpha\}$, $\Gamma_- = \{0 \leq r \leq R_2, \theta = -\alpha\}$. The analysis of full dispersion spectrum for considered waveguides is based on exact analytical integration of the wave dynamics equations of linear hexagonal system medium. They give amplitude functions $u_j^{(0)}$ in elastic displacements vector components $u_j = \text{Re} \left(u_j^{(0)} \cdot \exp \left(-i \left(\omega t - \tilde{k} x_3 \right) \right) \right)$ for harmonical waves. In the matrix-operational form the stationary motion equations are given by

$$\|L_{ij}\| \overline{\Phi^{(0)}} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}),$$

where $\overline{\Phi^{(0)}} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})^T$, $L_{11} = c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2$, $L_{12} = L_{21} = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2$, $L_{13} = L_{31} = ik(c_{13} + c_{44})\partial_1$, $L_{22} =$

$c_{66}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2$, $L_{23} = L_{32} = ik(c_{13} + c_{44})\partial_2$, $L_{33} = c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - c_{33}k^2 + \Omega^2$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $k = \tilde{k}R_*$, $\Omega = \omega R_* (\rho/c_*)^{1/2}$, c_{pj} - dimensionless related to c_* elastic constants, ρ - density, R_* - normalizing parameter for u_j , x_j .

The boundary conditions on the fixed surfaces Γ_{01} are of the form

$$(u_r)_{\Gamma_{01}} = (u_\theta)_{\Gamma_{01}} = (u_z)_{\Gamma_{01}} = 0.$$

The conditions of ideal mechanical contact on a cylindrical contact surface of external ring components and internal circular cylindrical inclusion are given

$$(u_r^a)_{\Gamma_{02}} = (u_r^b)_{\Gamma_{02}}, (u_\theta^a)_{\Gamma_{02}} = (u_\theta^b)_{\Gamma_{02}}, (u_z^a)_{\Gamma_{02}} = (u_z^b)_{\Gamma_{02}},$$

$$(\sigma_{rr}^a)_{\Gamma_{02}} = (\sigma_{rr}^b)_{\Gamma_{02}}, (\sigma_{r\theta}^a)_{\Gamma_{02}} = (\sigma_{r\theta}^b)_{\Gamma_{02}}, (\sigma_{rz}^a)_{\Gamma_{02}} = (\sigma_{rz}^b)_{\Gamma_{02}}.$$

The surfaces of sector cuts Γ_\pm have thin flexible not extensible coverings and corresponding conditions are given by

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\Gamma_\pm} = (u_r)_{\Gamma_\pm} = (u_z)_{\Gamma_\pm} = 0.$$

§ 2. Method of solution

Waves are shared on the symmetric (S-type), when $u_r(r, -\theta) = u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, -\theta) = -u_\theta(r, \theta)$, $u_z(r, -\theta) = u_z(r, \theta)$, and antisymmetric (A-type) with $u_r(r, -\theta) = -u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, -\theta) = u_\theta(r, \theta)$, $u_z(r, -\theta) = -u_z(r, \theta)$ conventionally. At a stage of construction the basic dispersion relation for full spectrum of the normal elastic waves, connected with the systems of the wave equations integration, the technique of generalized wave potentials φ_j introduction is used. Generalized potentials φ_j are related to complex amplitude functions of wave displacements $u_j^0(x_1, x_2, x_3)$ with formulas $u_1^{(0)} = \partial_1\varphi + \partial_2\psi$, $u_2^{(0)} = \partial_2\varphi - \partial_1\psi$, $u_3^{(0)} \equiv \chi$.

First two equations of motion for hexagonal system medium could be given in the form $grad F_1 + rot [(0, 0, F_2)] = 0$ after wave potentials introduction. Using the property of vector-function, that is given as sum of potential and rotational parts ($F_1 = 0, F_2 = 0$), we get:

$$\begin{cases} L_\varphi^{(1)}\varphi + L_\chi^{(1)}\chi = 0, \\ L_\varphi^{(2)}\varphi + L_\chi^{(2)}\chi = 0, \\ L_\psi^{(1)}\psi = 0, \end{cases}$$

where $L_\varphi^{(1)} = c_{11}D^2 + \beta_1$, $L_\chi^{(1)} = ik(c_{13} + c_{44})$, $L_\varphi^{(2)} = ik(c_{13} + c_{44})D^2$, $L_\psi^{(1)} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}D^2 + \beta_1$, $L_\chi^{(2)} = c_{44}D^2 + \beta_2$, $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\beta_1 = \Omega^2 - c_{44}k^2$, $\beta_2 = \Omega^2 - c_{33}k^2$.

Integrating the system using operator method we obtain $\varphi(x_1, x_2) = L_\chi^{(2)}(F_1(x_1, x_2) + F_2(x_1, x_2))$, $\chi(x_1, x_2) = -L_\varphi^{(2)}(F_1(x_1, x_2) + F_2(x_1, x_2))$, $\psi(x_1, x_2) = F_3(x_1, x_2)$; functions F_j are defined from the metaharmonic equations $D^2F_j + \gamma_j^2F_j = 0$ ($j = \overline{1, 3}$).

At research of S-waves in the area of circular inclusion metaharmonical functions are introduced in the form:

$$F_j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^+ J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) \cos(\nu_n^+ \theta) (j = \overline{1, 2}),$$

$$F_3(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n4}^+ J_{\nu_n^+}(\gamma_4 r) \sin(\nu_n^+ \theta),$$

where $\nu_n^+ = (2n + 1)\pi/2\alpha$; $J_{\nu_n^+}(\gamma_j r)$ - cylindrical Bessel functions of the first kind. For S-waves in ring area of the waveguide functions F_j are of the form

$$F_j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{nj}^+ J_{\nu_n^+}(\gamma_j r) + B_{nj}^+ Y_{\nu_n^+}(\gamma_j r)) \cos(\nu_n^+ \theta) \quad (j = \overline{1, 2}),$$

$$F_3(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n4}^+ J_{\nu_n^+}(\gamma_4 r) + B_{n4}^+ Y_{\nu_n^+}(\gamma_4 r)) \sin(\nu_n^+ \theta).$$

Such introductions provide exact satisfaction to edge conditions on parts of a boundary surface Γ_{\pm} of sector cut.

The equations for obtaining critical frequencies of normal waves and the dispersion equations are received from edge conditions by using method of orthogonal series. The sequence of dispersion equations in case of S-waves are given by functional determinants of the twelfth order for each value of the generalized circle wave number.

§ 3. Numerical results

The numerical results for S-waves in waveguides from ceramics PZT-4 with normalized material constants $c_{11}=13.9$, $c_{33}=11.5$, $c_{44}=2.56$, $c_{12}=7.78$, $c_{13}=7.43$, $\rho=7.5$ and PZT-A5 with normalized material constants $c_{11}=11.2$, $c_{33}=10.6$, $c_{44}=2.49$, $c_{12}=6.42$, $c_{13}=6.22$, $\rho=7.62$ and parameters $c_* = 10^{10} N/m^2$, $R_* = 1.0$ m, $\alpha = 3\pi/4$, $n=0$ are presented.

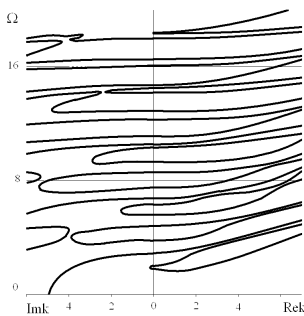


Fig. 1

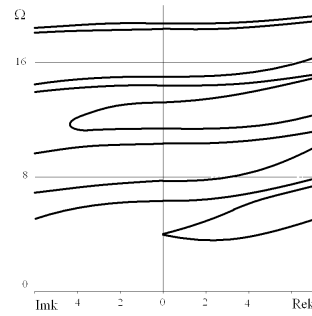


Fig. 2

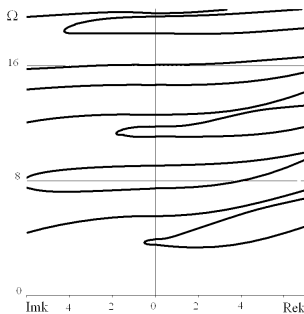


Fig. 3 The results for compound waveguide,

with material of the inclusion PZT-4 and material of the external ring component is PZT-A5 are depicted on fig. 1, if $R1/R2=0.5$. Dispersion spectrums for solid circular waveguides with sector cut from ceramics PZT-4 and PZT-A5 are presented on fig.2 and fig.3 respectively. It is shown, that the presence of inclusion allows to increase the modes density and to decrease the frequency, when traveling waves appear.

References

- [1] *J. Mirsky*. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinder. - J. Acoust. Soc. Amer., 37, 1022-1026 (1965).
- [2] *V. Damljanovic, R.L. Weaver*. Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross-section. - J. Acoust. Soc. Amer., 115, 1572-1581 (2004).
- [3] *Shulga N.A.* Propagation of harmonic waves in anisotropic piezoelectric cylinders. Homogeneous piezoceramics waveguides. Int. Appl. Mech., 38, 933-953 (2002).
- [4] *Storozhev V.I.* Numerically-analytical method of elastic waves investigation in orthotropic cylinder of nonlinear section. Theoret. and applied mech., 25, 97-102 (1995)

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Удалова Г. Ю. (Самара, СГАСУ)

Введение

Вопросы разрешимости различных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений изучались во многих

работах. Отметим здесь прежде всего работы А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2], В.В. Иванова [4], А.М. Денисова [3], В.В. Васина [4] и др.

В последние годы в работах К.Б. Сабитова [7], [8] предложен новый подход - метод спектральных разложений для обоснования единственности и существования прямых задач для уравнений смешанного типа. Таким методом решены обратные задачи К.Б. Сабитовым и Э.М. Сафиним [5] для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Естественно, встает вопрос о постановке обратной задачи для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа.

Основной целью данной работы является обоснование однозначной разрешимости обратной задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью методом спектрального анализа. Установлен критерий единственности решения задачи. Само решение построено в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

§ 1. Постановка задачи.

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = f(x) \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β - заданные положительные числа и следующую задачу:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup \{y = -\alpha\} \cup D_+ \cup \{y = \beta\}), u_y \in C^2(D_- \cup D_+), \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, 1), \quad (3)$$

$$Lu(x, y) = f(x), (x, y) \in D_- \cup \{y = -\alpha\} \cup D_+ \cup \{y = \beta\}, \quad (4)$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0, -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), u(x, \beta) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ - заданные достаточно гладкие функции,

$$\psi'(0) = \psi'(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = g'(0) = g'(1) = 0, \quad (8)$$

$$D_- = D \cap \{y < 0\}, D_+ = D \cap \{y > 0\}.$$

§ 2. Критерий единственности решения задачи.

Пусть $u(x, y)$ и $f(x)$ решение задачи (2) - (7) при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$. Рассмотрим следующую систему функций

$$X_k(x) = 1, \sqrt{2} \cos \pi kx, \quad k = 1, 2, \dots, 0 \leq x \leq 1, \quad (9)$$

которая ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0, 1]$ [6].

Введем функции

$$u_0(y) = \int_0^1 u(x, y) dx, \quad (10)$$

$$u_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos \pi kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

На основании (10) и (11) введем следующие функции

$$u_{0,\varepsilon}(y) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) dx, \quad (12)$$

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \cos \pi kx dx \quad (13)$$

Дважды дифференцируя функции (12) и (13) при $y < 0$ и $y > 0$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{0,\varepsilon}(y) = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (u_{xx} - f(x)) dx, \quad y < 0, \quad (14)$$

$$u''_{0,\varepsilon}(y) = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (f(x) - u_{xx}) dx, \quad y > 0, \quad (15)$$

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (u_{xx} - f(x)) \cos \pi kx dx, \quad y < 0, \quad (16)$$

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (f(x) - u_{xx}) \cos \pi kx dx, \quad y > 0, \quad (17)$$

Проинтегрировав формулы (14) – (17) по частям два раза с учетом условия (5), получим

$$u''_0(y) = - \int_0^1 f(x) dx, \quad y < 0, \quad (18)$$

$$u''_0(y) = \int_0^1 f(x) dx, \quad y > 0, \quad (19)$$

$$u''_k(y) = -\sqrt{2}(\pi k)^2 \int_0^1 u(x, y) \cos \pi kx dx - \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos \pi kx dx, \quad y < 0, \quad (20)$$

$$u''_k(y) = \sqrt{2}(\pi k)^2 \int_0^1 u(x, y) \cos \pi kx dx + \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos \pi kx dx, \quad y > 0. \quad (21)$$

Отсюда следует, что функции $u_k(y)$, $k = 0, 1, \dots$ являются решением дифференциальных уравнений

$$u''_0(y) = -f_0, \quad y < 0, \quad (22)$$

$$u''_0(y) = f_0, \quad y > 0, \quad (23)$$

$$u_k''(y) + (\pi k)^2 u_k(y) = f_k, \quad y < 0, \quad k \in N, \quad (24)$$

$$u_k''(y) - (\pi k)^2 u_k(y) = f_k, \quad y > 0, \quad k \in N, \quad (25)$$

где

$$f_0 = \int_0^1 f(x) dx, \quad (26)$$

$$f_k = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos \pi k x dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Дифференциальные уравнения (22) – (25) имеют общие решения

$$u_0(y) = -f_0 \frac{y^2}{2} + a_0 y + b_0, \quad y < 0, \quad (28)$$

$$u_0(y) = f_0 \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, \quad y > 0, \quad (29)$$

$$u_k = a_k \cos \pi k y + b_k \sin \pi k y + \frac{f_k}{(\pi k)^2}, \quad y < 0, \quad k \in N, \quad (30)$$

$$u_k = c_k e^{\pi k y} + d_k e^{-\pi k y} + \frac{f_k}{(\pi k)^2}, \quad y > 0, \quad k \in N, \quad (31)$$

где $a_0, b_0, c_0, d_0, a_k, b_k, c_k, d_k$ - произвольные постоянные. С учетом равенств $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$ и условий (2), (5) – (7), решения (28) – (31) примут вид:

$$u_0(y) = -f_0 \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, \quad y < 0, \quad (32)$$

$$u_0(y) = f_0 \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, \quad y > 0, \quad (33)$$

$$u_k = (c_k + d_k) \cos \pi k y + (c_k - d_k) \sin \pi k y + \frac{f_k}{(\pi k)^2}, \quad y < 0, \quad k \in N, \quad (34)$$

$$u_k = c_k e^{\pi k y} + d_k e^{-\pi k y} + \frac{f_k}{(\pi k)^2}, \quad y > 0, \quad k \in N, \quad (35)$$

где

$$\begin{cases} -\frac{\alpha^2}{2}f_0 - \alpha c_0 + d_0 = 0, \\ \alpha f_0 + c_0 = 0, \\ \frac{\beta^2}{2}f_0 + \beta c_0 + d_0 = 0, \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} (\cos \pi k \alpha - \sin \pi k \alpha)c_k + (\cos \pi k \alpha + \sin \pi k \alpha)d_k + \left(\frac{1}{\pi k}\right)^2 f_k = 0, \\ (\sin \pi k \alpha + \cos \pi k \alpha)c_k + (\sin \pi k \alpha - \cos \pi k \alpha)d_k = 0, \\ e^{\pi k \beta} c_k + e^{-\pi k \beta} d_k + \left(\frac{1}{\pi k}\right)^2 f_k = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Определитель системы (36) равен

$$\frac{1}{2}\Delta_{\alpha,\beta}(0) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2), \quad (38)$$

а определитель системы (37)

$$-\frac{2}{(\pi k)^2}\Delta_{\alpha,\beta}(k) = -\frac{2}{(\pi k)^2}(1 - \cos \pi k \alpha \operatorname{ch} \pi k \beta + \sin \pi k \alpha \operatorname{sh} \pi k \beta). \quad (39)$$

При условиях

$$\Delta_{\alpha,\beta}(0) \neq 0, \quad \Delta_{\alpha,\beta}(k) \neq 0 \quad (40)$$

системы (36) и (37) имеют только нулевые решения $c_0 = d_0 = f_0 = 0$, $c_k = d_k = f_k = 0$. Тогда из равенств (10), (11), (26), (27), (32) – (35) получаем

$$\int_0^1 u(x, y) dx = 0, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

$$\sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos \pi k x dx = 0, \quad \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos \pi k x dx = 0, \quad k \in N.$$

Отсюда в силу полноты системы (9) в пространстве $L_2[0, 1]$ и условий (2) и (3), следует, что $u(x, y) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$. Пусть для некоторых α и β условия (40) не выполнены, тогда однородная задача (2) – (7), где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, имеет ненулевые решения.

Таким образом доказана

Теорема 1. Если существует решение $u(x, y)$ и $f(x)$ задачи (2) – (7), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (40) при всех $k \in N$.

§ 3. Существование решения задачи.

Найдем решение задачи (2) – (7). Продифференцируем уравнение (1) и условия (5) по переменной y . Обозначая $u_y = v$, получим

$$Lv = v_{xx} + (\operatorname{sgn} y)v_{yy} = 0, \quad (41)$$

$$v_x(0, y) = v_x(1, y) = 0, \quad (42)$$

Из (1) при $y = \beta$ и $y = -\alpha$ имеем соответственно

$$v_y(x, \beta) = f(x) - \varphi''(x), \quad (43)$$

$$v_y(x, -\alpha) = \psi''(x) - f(x). \quad (44)$$

Будем искать частные, не равные нулю решения уравнения (41) в виде

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \quad (45)$$

Подставляя (45) в уравнение (41) и разделяя переменные, получим следующие два уравнения

$$X''(x) = -\mu X(x), \quad x \in (0, 1), \quad (46)$$

$$Y''(y) = \mu(\operatorname{sgn} y)Y(y), \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta). \quad (47)$$

Поскольку $Y(y) \neq 0$ при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$, то из (42) и (45) следует, что

$$X'(0) = X'(1) = 0. \quad (48)$$

Известно, что спектральная задача (46) и (48) имеет решение

$$X_k(x) = \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (49)$$

Тогда дифференциальное уравнение (47) имеет решения

$$Y_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y}, & y > 0 \\ c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y, & y < 0, \quad k \in N, \end{cases}$$

$$Y_0(y) = \begin{cases} a_0 y + b_0, & y > 0 \\ c_0 y + d_0, & y < 0, \end{cases}$$

где a_k, b_k, c_k и d_k – произвольные постоянные, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Решение задачи (41) – (44) будем искать в виде

$$v(x, y) = Y_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \cos \lambda_k x. \quad (50)$$

Учитывая равенства $u_y = v$, (2) и (8), получим

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi(x) + \frac{a_0}{2}(y^2 - \beta^2) + b_0(y - \beta) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [a_k(e^{\lambda_k \beta} - e^{\lambda_k y}) - b_k(e^{\lambda_k \beta} - e^{\lambda_k y})] \cdot \\ \cdot \cos \lambda_k x, & y > 0, \\ \psi(x) - \frac{a_0}{2}(y^2 - \alpha^2) + b_0(y + \alpha) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [(a_k + b_k)(\sin \lambda_k y + \sin \lambda_k \alpha) - \\ - d_k(\cos \lambda_k y - \cos \lambda_k \alpha)] \cos \lambda_k x, & y < 0, \end{cases} \quad (51)$$

где a_k, b_k, d_k – неизвестные постоянные. Используя условия (6) и (51) имеем

$$f(x) = \begin{cases} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k e^{\lambda_k \beta} - b_k e^{-\lambda_k \beta}) \cos \lambda_k x + \\ + \varphi''(x), & y > 0, \\ a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k ((a_k + b_k) \sin \lambda_k \alpha + d_k \cos \lambda_k \alpha) \cdot \\ \cdot \cos \lambda_k x + \psi''(x), & y < 0. \end{cases} \quad (52)$$

Разложим функции $\varphi''(x), \psi''(x), g(x)$ по системе (9):

$$\varphi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{(2)} \cos \lambda_k x, \quad (53)$$

$$\psi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^{(2)} \cos \lambda_k x, \quad (54)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cos \lambda_k x, \quad (55)$$

где

$$\varphi_0^{(2)} = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \varphi_k^{(2)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad (56)$$

$$\psi_0^{(2)} = \int_0^1 \psi(x) dx, \quad \psi_k^{(2)} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad (57)$$

$$g_0 = \int_0^1 g(x) dx, \quad g_k = \sqrt{2} \int_0^1 g(x) \cos \lambda_k x dx. \quad (58)$$

Из условий (5) – (7), используя последние разложения, найдем коэффициенты $a_k, b_k, d_k, k = 0, 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{2[g_0(\beta + \alpha) + \psi_0 - \varphi_0]}{\Delta_{\alpha,\beta}(0)}, \quad (59)$$

$$b_0 = \frac{2\alpha(\varphi_0 - \psi_0) + g_0(\beta^2 - \alpha^2)}{\Delta_{\alpha,\beta}(0)}, \quad (60)$$

$$a_k = \frac{\cos \lambda_k \alpha \left(g_k - \frac{\psi_k^{(2)} - \varphi_k^{(2)}}{\lambda_k} \right)}{\Delta_{\alpha,\beta}(k)} + \quad (61)$$

$$+ \frac{\sin \lambda_k \alpha \left(g_k + \frac{\psi_k^{(2)} - \varphi_k^{(2)}}{\pi k} \right) - g_k e^{-\lambda_k \beta}}{\Delta_{\alpha,\beta}(k)},$$

$$b_k = \frac{\cos \lambda_k \alpha \left(g_k + \frac{\psi_k^{(2)} - \varphi_k^{(2)}}{\lambda_k} \right)}{\Delta_{\alpha, \beta}(k)} \quad (62)$$

$$- \frac{\sin \lambda_k \alpha \left(g_k - \frac{\psi_k^{(2)} - \varphi_k^{(2)}}{\lambda_k} \right) - g_k e^{\lambda_k \beta}}{\Delta_{\alpha, \beta}(k)},$$

$$d_k = \frac{\cos \lambda_k \alpha \frac{\psi_k^{(2)} - \varphi_k^{(2)}}{\lambda_k} - \sin \lambda_k \alpha \frac{\psi_k^{(2)} - \varphi_k^{(2)}}{\lambda_k} - g_k \operatorname{sh} \lambda_k \beta}{\Delta_{\alpha, \beta}(k)}. \quad (63)$$

При выполнении условий (40) это решение единственно.

Таким образом, формально построено решение задачи (2) – (7). Для обоснования существования решения сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. *Если 1) $\alpha = p \in N$; 2) $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$, то существует постоянная C_0 , вообще зависящая от α , такая что при больших k и любых $\beta > 0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{\lambda_k \beta}. \quad (64)$$

На основании леммы 2 доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Если $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0, 1]$, $g(x) \in C^2[0, 1]$ и выполнены условия (8), (40) и (64), то существует единственное решение задачи (2) – (7), которое определяется формулами (51) и (52).*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.

- [2] *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т.* Некорректные задачи математической физики и анализа. // М.: Наука, 1980. 286 с.
- [3] *Денисов А. М.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
- [4] *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. // М.: Наука, 1978. 206 с.
- [5] *Сафин Э. М.* Обратная задача для уравнения смешанного типа в прямоугольной области со смешанными граничными условиями // Труды международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" - Уфа: Гилем, 2008. Т. 2. С. 168–173.
- [6] *Сабитов К. Б.* Уравнения математической физики // Учебное пособие для вузов // М.: Высшая школа, 2005. 255 с.
- [7] *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007 Т. 413. № 1. С 23–26
- [8] *Сабитов К. Б.* Критерий единственности решения краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа // Труды международной научной конференции, посвященной юбилею академика В.А. Ильина. - Уфа: Гилем, 2008. Т. 2. С. 154–161.

УДК 532.5.296:534.12

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НУЛЕЙ ГОЛОМОФНЫХ
ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ В КРУГЕ

Хабибуллин Ф. Б. (Уфа, БашГУ)

Пусть \mathbb{D} — единичный круг комплексной плоскости \mathbb{C} , а H — некоторый класс голоморфных в \mathbb{D} функций, выделяемых ограничением на их рост вблизи границы круга посредством весовых субгармонических функций p медленного роста с мерами Рисса ν_p . Получены условия, при которых заданная последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ является точной последовательностью нулей для голоморфной функции из H . Результаты формулируются в терминах определенного мажорирования числа точек из Λ , попавших в множества $S_n \subset \mathbb{D}$, покрывающие единичный круг, мерами Рисса $\nu_p(S_n)$. Весовые функции p , определяющие класс H , не обязательно радиальные. В то же время и для радиальных ограничений результаты являются новыми.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 09-01-00046_а.

Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность комплексных точек, возможно повторяющихся, в единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на комплексной плоскости \mathbb{C} и Λ не имеет предельных точек в \mathbb{D} ; H — некоторый класс голоморфных в \mathbb{D} функций. Для подмножества $S \subset \mathbb{D}$ через $n_{\Lambda}(S)$ обозначаем число точек последовательности Λ , лежащих в S , т. е. n_{Λ} — мера.

Множество, или последовательность, всех нулей голоморфной в \mathbb{D} ненулевой функции f (пишем $f \not\equiv 0$), перенумерованную с учетом кратности (каждая точка в \mathbb{D} считается столько раз, какова кратность нуля функции f в этой точке), обозначаем Zero_f . Λ — нулевая последовательность, или нулевое множество, для

класса H , если существует ненулевая функция $f \in H$ такая, что $\text{Zero}_f = \Lambda$.

Последовательность Λ — нулевая подпоследовательность, или нулевое подмножество, для класса H , если существует ненулевая функция $f \in H$, обращающаяся в нуль на Λ в том смысле, что кратность нуля функции f в каждой точке из Ω не меньше числа повторений этой точки в последовательности Λ . Если H — линейное пространство, то нулевую подпоследовательность для H называем также *последовательностью, или множеством, неединственности для H* .

Всюду положительность числа, функции, меры и т. п. понимаем как ≥ 0 , а > 0 суть строгая положительность; аналогичное соглашение предлагается и для отрицательности. Для $a \in \mathbb{R}$, как обычно, $a^+ := \max\{a, 0\}$, $[a]$ — целая часть числа a , а для $a > 0$ полагаем $\log^\alpha a := (\log a)^\alpha$. Если функция f не равна тождественно значению $a \in [-\infty, +\infty]$, то пишем $f \not\equiv a$. Для подмножества $D \subset \mathbb{C}$ через ∂D , $\text{diam } D$ и $\text{dist}(S, D)$ обозначаем соответственно границу множества D , диаметр D и евклидово расстояние от подмножества $S \subset \mathbb{C}$ до D .

Пространство всех голоморфных в \mathbb{D} функций обозначаем через $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

Рассматриваются следующие весовые классы голоморфных в единичном круге функций.

Пусть $M: \mathbb{D} \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Класс всех функций $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, удовлетворяющих оценке $|f(z)| \leq C_f \exp M(z)$, $z \in \mathbb{D}$, где $C_f \geq 0$ — постоянная, обозначаем $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$.

Всюду далее $\Sigma = \{S_k\}$ — локально конечное семейство³ борелевских предкомпактных подмножеств S_k в \mathbb{D} , $k = 1, 2, \dots$

Через $SH(\mathbb{D})$ обозначаем конус всех субгармонических функций в \mathbb{D} , включая в него и тождественную $-\infty$; $SH^+(\mathbb{D})$ — подконус всех положительных функций из $SH(\mathbb{D})$.

³Локальная конечность означает, что каждый компакт из \mathbb{D} пересекается лишь с конечным числом подмножеств S_k .

Естественно ожидать (см., к примеру результат Ф. А. Шамояна [1, Теорема 2.2]), что если для некоторой функции $p \in SH(\mathbb{D})$ с мерой Рисса ν_p при достаточно «мелком» покрытии $\Sigma = \{S_k\}$ последовательности Λ для каждого $S_k \in \mathbb{D}$ число точек последовательности Λ попавших в S_k , мажорируется величиной $\nu_p(S_k)$, то Λ — последовательность нулей для некоторого пространства, близкого к $\text{Hol}(\mathbb{D}; p)$ или совпадающего с ним. Основные результаты работы представляют собой явную количественную форму этого наблюдения. Для нашего исследования привлекается симбиоз результатов из [2] и [3]. Здесь и далее мы не останавливаемся подробно на истории вопроса, поскольку она достаточно детально освещена в работах [2] и [3].

Через $D(t)$ обозначаем открытый круг с центром в нуле радиуса t . Для меры ν , определенной в круге $D(t)$, полагаем $\nu^{\text{rad}}(t) := \nu(D(t))$.

Основной наш интерес будет сосредоточен на трех типах классов функций (не обязательно алгебрах!), определяемых достаточно медленно растущими вблизи единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ весами p (грубо говоря, медленнее функции $z \mapsto 1/(1 - |z|)$ при $z \rightarrow \partial\mathbb{D}$). Определим здесь еще два специальных класса функций для произвольных весовых функций $M: \mathbb{D} \rightarrow [-\infty, +\infty)$.

1. Через A_M^∞ обозначаем класс функций $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, удовлетворяющих оценке

$$|f(z)| \leq C_f \exp(c_f M(z)), \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

для некоторых положительных постоянных c_f, C_f . Если M — положительная функция, то A_M^∞ — алгебра. В частности, если $\limsup_{z \rightarrow \partial\mathbb{D}} M(z) = +\infty$, эту алгебру иначе можно определить как

$$A_M^\infty := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \limsup_{z \rightarrow \partial\mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{M(z)} < +\infty \right\}. \quad (2)$$

2. Пространство $H_{M+\log}$ определялось в [2] как множество всех

голоморфных в \mathbb{D} функций f , удовлетворяющих ограничению

$$|f(z)| \leq C_f \left(\frac{1}{1-|z|} \right)^{c_f} \exp M(z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3)$$

с некоторыми постоянными $C_f, c_f \geq 0$. Иначе это довольно “жесткое” пространство можно определить как

$$H_{M+\log} := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \limsup_{z \rightarrow \partial\mathbb{D}} \frac{\log |f(z)| - M(z)}{\log \frac{1}{1-|z|}} < +\infty \right\}. \quad (4)$$

Всюду далее на весовую функцию $p \not\equiv -\infty$ всегда будет накладываться условие

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} p(te^{i\theta}) d\theta dt < +\infty. \quad (5)$$

Если при этом p — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_p , то условие (5) эквивалентно ограничению (см. начало доказательства [3, теорема 2])

$$\int_0^1 (1-t)^2 d\nu_p^{\text{rad}}(t) < +\infty. \quad (6)$$

Так, для радиальной функции p , для которой по определению $p(z) = p(|z|)$ при всех $z \in \mathbb{D}$, условие (5) выглядит совсем просто:

$$\int_0^1 p(t) dt < +\infty. \quad (7)$$

Кроме того, будут накладываться и определенные условия регулярности вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(z + \varepsilon(1-|z|)e^{i\theta}) d\theta + a \log \frac{1}{1-|z|} \leq bp(z) + C, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (8)$$

где a, b, C — некоторые постоянные, границы выбора которых будут обусловлены конкретными рассматриваемыми пространствами и методом работы [2]. Для радиальной возрастающей функции p это условие регулярности у нас будет выглядеть как

$$p(t + \varepsilon(1 - t)) + a \log \frac{1}{1 - t} \leq bp(t) + C, \quad 0 \leq t < 1. \quad (9)$$

Простейшими примерами радиальных возрастающих весов p , удовлетворяющих одновременно условиям вида (7) и (9), будут служить

[L] логарифмический вес $p: z \mapsto \log^\alpha \frac{1}{1 - |z|}$, $\alpha > 0$, $z \in \mathbb{D}$,

[P] степенной вес $p: z \mapsto \frac{1}{(1 - |z|)^\beta}$, $0 < \beta < 1$, $z \in \mathbb{D}$,

Следует отметить, что для алгебр A_p^∞ с весовыми функциями вида [P], когда $\beta > 1$, законченные описания нулевых множеств были получены еще в [1], а для “жестких” пространств $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где M — это логарифмический вес из [L] с $0 < \alpha < 1$ полное описание нулевых последовательностей было дано К. Сейпом в [4]. В то же время для рассматриваемых в данной работе даже конкретных пространств и алгебр, определяемых весовыми функциями вида [L] и [P] соответственно с $\alpha \geq 1$ и $0 < \beta \leq 1$, еще немало открытых вопросов по описанию нулевых множеств.

Пусть функция $p \in SH(\mathbb{D})$ удовлетворяет одному из эквивалентных условий (5)–(6).

Сначала для лучшей обзорности мы приведем сводку упрощенных результатов работы в предположении, что множества S_k из системы Σ попарно не пересекаются, а $p: [0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ — возрастающая непрерывная в нуле справа выпуклая от логарифма⁴ на $(0, 1)$ функция и выполнено условие (7). Продолжим ее на \mathbb{D} как радиальную функцию $p(z) \equiv p(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, сохранив для

⁴Это означает, что композиция $p \circ \exp$ выпуклая на $(-\infty, 0)$.

продолженной функции прежнее обозначение p . В частности, она станет уже субгармонической ввиду ее возрастания и выпуклости от логарифма на $(0, 1)$. Мера Рисса продолженной субгармонической функции p обозначаем через ν_p . Плотность меры Рисса такой функции легко выписывается в полярных координатах через начальную функцию $p: [0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$, а именно:

$$d\nu_p(z) = \frac{1}{2\pi} d\theta \otimes d(tp'_-(t)), \quad z = te^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad (10)$$

где p'_- — левая производная, \otimes — произведение мер.

При $a > 0$ введем функцию

$$b_p^{[a]}(r) := \frac{1}{1-r} \int_{(r-a(1-r))^+}^{1^-} (1-t) dp(t), \quad 0 \leq r < 1. \quad (11)$$

В ее конечности легко убедиться ввиду (7) интегрированием по частям.

Теорема(радиальная) *Пусть последовательность точек Λ содержится в объединении $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Тогда*

(Z₁) *если для $a = 1$ существуют $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, и $b, C \geq 0$, при которых выполнено (9), а*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } S_k}{\text{dist}(S_k, \partial\mathbb{D})} < +\infty, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{\Lambda}(S_k)}{\nu_p(S_k)} < +\infty, \quad (12)$$

то Λ — нулевая последовательность для алгебры $A_M^{\infty}(\mathbb{D})$ с радиальным весом $M = p + b_p^{[6]}$;

(Z₂) *если для $a = 1$ при любом $b > 1$ найдутся $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, $C \geq 0$, при которых выполнено (9), а*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } S_k}{\text{dist}(S_k, \partial\mathbb{D})} = 0, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{\Lambda}(S_k)}{\nu_p(S_k)} < 1, \quad (13)$$

то Λ — нулевая последовательность для класса $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где

$$M := c_{\Lambda} p + B_{\Lambda} b_p^{[6]}, \quad (14)$$

положительное число c_Λ меньше 1, а $B_\Lambda \geq 0$ — постоянная;

(Z₃) если $c b = 1$ для некоторых ε , $0 < \varepsilon < 1$, $C \geq 0$ и $a < 0$ выполнено (9),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{diam } S_k}{\text{dist}(S_k, \partial \mathbb{D})} \nu_p(S_k) < +\infty, \quad \text{и, кроме того, } n_\Lambda(S_k) \leq \nu_p(S_k) \quad (15)$$

при всех достаточно больших k , то Λ — нулевая последовательность для класса $H_{M+\log}(\Omega)$, где M — функция из (14) с $c_\Lambda = 1$, а $B_\Lambda \geq 0$ — постоянная.

Утверждения (Z₁)–(Z₃) этой теоремы неединственности — следствия соответственно теорем 1, 2 и 3 (см. краткие обоснования после их доказательств).

§ 1. Нерадиальная теорема о последовательностях нулей для алгебр A_M^∞ и ее следствия

Последовательность точек Λ в \mathbb{D} можно естественным образом рассматривать как меру n_Λ на \mathbb{D} . Пусть p — субгармоническая в \mathbb{D} функция с мерой Рисса ν_p , $p \neq -\infty$. При заданном локально конечном семействе $\Sigma = \{S_k\}$ борелевских предкомпактных подмножеств⁵ S_k в \mathbb{D} , $k = 1, 2, \dots$, покрывающем Λ , всюду в этом и следующих параграфах будем считать, что меры n_Λ и ν_p представлены в виде сумм положительных мер

$$n_\Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(k)}, \quad \nu_p = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{(k)} \quad (16)$$

и меры $\lambda^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ сосредоточены на S_k в том смысле, что

$$\lambda^{(k)}(\mathbb{D} \setminus S_k) = \nu^{(k)}(\mathbb{D} \setminus S_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

⁵Здесь уже, вообще говоря, пересекающихся.

Для $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ и числа $a > 0$ введем в рассмотрение полярный прямоугольник

$$\square(z; a) := \left\{ \zeta = te^{i\psi} : (r - a(1 - r))^+ \leq t < 1, |\sin(\psi - \theta)| < a(1 - r) \right\} \quad (18)$$

относительного размера a и функцию

$$b_{\nu_p}^{[a]}(z) := \frac{1}{(1 - |z|)^2} \int_{\square(z; a)} (1 - |\zeta|)^2 d\nu_p(\zeta). \quad (19)$$

Кроме того, будем использовать специальное обозначение для усреднений

$$A_M^{[\varepsilon]}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(z + \varepsilon(1 - |z|)e^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (20)$$

при условии интегрируемости функции $M: \mathbb{D} \rightarrow [-\infty, \infty]$ по окружностям.

Теорема 1. Пусть p — положительная субгармоническая функция с мерой Рисса ν_p и выполнено условие (5) или эквивалентное ему ограничение (6). Кроме того, предполагаем, что функция p удовлетворяет нерадиальному условию регулярности типа (8), а именно:

(LD₀) существуют число ε , $0 < \varepsilon < 1$ и постоянные $B, C \geq 0$, для которых

$$A_p^{[\varepsilon]}(z) + \log \frac{1}{1 - |z|} \leq Bp(z) + C, \quad z \in \Omega. \quad (21)$$

Если система подмножеств $\Sigma = \{S_k\}$, покрывающая последовательность Λ , удовлетворяет ограничению

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } S_k}{\text{dist}(S_k, \partial\mathbb{D})} < +\infty, \quad (22)$$

а для разбиений мер (16) выполнено условие

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{(k)}(S_k)}{\nu_p^{(k)}(S_k)} < +\infty, \quad (23)$$

то Λ — последовательность нулей для алгебры $A_M^\infty(\mathbb{D})$, где

$$M = p + b_{\nu_p}^{[6]}. \quad (24)$$

Доказательство. В [2, теорема 13.1]⁶ доказано, что именно в условиях теоремы 1 последовательность точек Λ является последовательностью неединственности, или подпоследовательностью нулей, для алгебры A_p^∞ (даже без эквивалентных условий (5)–(6)), т.е. для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где $M := B_1 p$ — субгармоническая функция, B_1 — некоторое положительное число. Кроме того, для функции M и для ее меры Рисса ν_M по-прежнему выполнены эквивалентные условия (5)–(6) с заменой p на M . При этих условиях в [3, теорема 2, п. (U)] утверждается, что каждая подпоследовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ будет уже последовательностью нулей для пространства

$$\text{Hol}\left(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_{\nu_M}^{[6]}\right), \quad (25)$$

где постоянная C_ε зависит только от ε . Но из условия регулярности (LD₀) следует, что при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ найдутся постоянные $B, C \geq 0$, с которыми выполнено неравенство $A_M^{[\varepsilon]}(z) \leq BM(z) = BB_1 p(z) + C$, $z \in \mathbb{D}$. В силу положительности функций p и $b_{\nu_p}^{[6]}$ это означает что пространство (25) вложено в пространство $\text{Hol}\left(D; B_2(p + b_{\nu_p}^{[6]})\right)$ при $B_2 = \max\{BB_1, C_\varepsilon\}$. Но это подпространство алгебры A_M^∞ с M вида (24). Теорема доказана. •

Выведем из теоремы 1 часть (Z₁) радиальной теоремы из введения. Для непересекающихся S_k в качестве мер $\lambda^{(k)}$ и $\nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, берем сужения мер соответственно n_Λ и ν_p на S_k . Тогда условия (12) влекут за собой выполнение условий (22)–(23) теоремы 1. В силу возрастания функции p условия на нее, при которых

⁶Надо использовать версию этой теоремы с условием (Sd2), в котором предполагается, что классы функций определены на выпуклой области, а в данном случае это круг \mathbb{D} .

имеет место (9), даже сильнее условия регулярности (LD₀) теоремы 1. Условие (5) для радиальной функции — это (7). Наконец, в начале доказательства [3, теорема 3] показано, что для радиальной возрастающей выпуклой от логарифма функции p (в [3, теорема 3] вместо p фигурирует буква M) справедливо неравенство

$$b_{\nu_p}^{[6]}(z) \leq b_p^{[6]}(z), \quad 6/7 \leq |z| = r < 1. \quad (26)$$

Это и показывает, что часть (Z₁) радиальной теоремы — прямое следствие теоремы 1.

Рассмотрим радиальную теорему применительно к конкретным логарифмическому и степенному весам p из пп. [L] и [P]. При этом для подмножества $S \subset \mathbb{D}$ через $S(t)$ обозначаем общую длину совокупности дуг, образованных пересечением $S \cap \partial D(t)$, при соответствующем условии измеримости этого пересечения.

Следствие 1. Пусть p — логарифмический вес из п. [L] введения и $\alpha \geq 1$. Если выполнено условие (22) для системы $\Sigma = \{S_k\}$ попарно непересекающихся подмножеств S_k и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(S_k)}{\int_0^1 S_k(t) \frac{1}{(1-t)^2} \left(1 + \frac{(\alpha-1)t}{1-t} \log^{-1} \frac{1}{1-t}\right) \log^{\alpha-1} \frac{1}{1-t} dt} < +\infty, \quad (27)$$

то Λ — последовательность нулей для алгебры $A_p^\infty(\mathbb{D})$. В частности, при $\alpha = 1$ в знаменателе дроби из (27) стоит $\int_0^1 S_k(t) \frac{1}{(1-t)^2} dt$, а при $\alpha > 1$ это знаменатель удобнее заменить на $\int_0^1 S_k(t) \frac{1}{(1-t)^3} \log^{\alpha-2} \frac{1}{1-t} dt$.

Доказательство. Действительно, условие $\alpha \geq 1$ обеспечивает выполнение посылки в (Z₁), касающейся (9), а (27) — это переписанное в полярных координатах второе неравенство из (12). Наконец, нам потребуется

Лемма. Для логарифмического веса p из п. [L] при любом $\alpha > 0$ с целой частью $[\alpha]$ для функции $b_p^{[6]}$ из (11) справедлива

оценка⁷

$$b_p^{[6]}(r) \leq 7 \sum_{k=1}^{[\alpha]} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) \log^{\alpha-k} \frac{1}{1-r} + C_\alpha, \quad 0 \leq r < 1. \quad (28)$$

Доказательство леммы. При выборе логарифмического веса p из п. [L] для функции из (11) непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned} b_p^{[6]}(r) &= \frac{1}{1-r} \int_{(r-6(1-r))^+}^{1^-} (1-t) d\left(\log^\alpha \frac{1}{1-t}\right) \\ &= \frac{\alpha}{1-r} \int_{(r-6(1-r))^+}^{1^-} \log^{\alpha-1} \frac{1}{1-t} dt = -\frac{\alpha}{1-r} \int_{(r-6(1-r))^+}^{1^-} \log^{\alpha-1} \frac{1}{1-t} d(1-t) \end{aligned}$$

для всех $0 \leq r < 1$. Если $\alpha < 1$, то правая часть ограничена и все доказано. Если же $\alpha > 1$, то, интегрируя по частям интеграл в правой части, получаем

$$b_p^{[6]}(r) \leq 7\alpha \log^{\alpha-1} \frac{1}{1-r} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1-r} \int_{(r-6(1-r))^+}^{1^-} \log^{\alpha-2} \frac{1}{1-t} d(1-t).$$

Далее повторяем такую процедуру интегрирования по частям до тех пор, пока показатель степени подынтегрального логарифма не станет меньше или равен нулю. В итоге такого оценивания выделиться сумма логарифмических функций из (28) и еще одно интегральное слагаемое с множителем

$$\begin{aligned} & - \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - [\alpha])}{1-r} \int_{(r-6(1-r))^+}^{1^-} \log^{\alpha-[\alpha]-1} \frac{1}{1-t} d(1-t) \\ & = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - [\alpha])}{1-r} \int_{(r-6(1-r))^+}^{1^-} \log^{\alpha-[\alpha]-1} \frac{1}{1-t} dt, \end{aligned}$$

⁷Как обычно, $\sum_{k=m} n \cdot := 0$ при $n < m$.

которое при $r \geq 6/7$ ограничено постоянной, зависящей только от α , ввиду ограниченности подынтегрального выражения, а при $0 \leq r < 6/7$ в силу интегрируемости этого выражения на $[0, 1)$ и неравенства $1/(1-r) \leq 7$ для дроби перед интегралом. Лемма доказана. ●

По этой лемме радиальный вес $M = p + b_p^{[6]}$ при нашем выборе веса p ограничен сверху функцией $Cp + C$, где C — постоянная. Следовательно, в данном случае алгебра A_M^∞ вложена в алгебру A_p^∞ и даже совпадает с ней. Теорема доказана. ●

Следствие 2. Пусть p — степенной вес из п. [P] и $\beta > 0$. Если выполнено условие (22) для системы $\Sigma = \{S_k\}$ попарно непересекающихся подмножеств S_k и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(S_k)}{\int_0^1 S_k(t) \frac{dt}{(1-t)^{\beta+2}}} < +\infty, \quad (29)$$

то Λ — последовательность нулей для алгебры $A_p^\infty(\mathbb{D})$.

Доказательство этого следствия опускаем. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущего. Кроме того, отметим, что для специального диадического разбиения Σ единичного круга этот результат содержится в работе Ф. А. Шамомяна (см. [1, теорема 2.2, п. 2°], [2, § 19]).

§ 2. Нерадиальные теоремы о последовательностях нулей для весовых пространств

На субгармоническую положительную весовую функцию p как в [2] накладываем дополнительное условие регулярности⁸

⁸Используем нумерацию из [2].

(LD₀¹) при $a = 1$ для любого числа $b > 1$ найдутся числа ε , $0 < \varepsilon < 1$, и C_b , с которыми выполнено (8), т. е. в обозначении (20) для усреднения $A_p^{[\varepsilon]}$ имеет место ограничение

$$A_p^{[\varepsilon]}(z) + \log \frac{1}{1 - |z|} \leq bp(z) + C_b, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (30)$$

Основной результат этого параграфа касается уже весовых пространств, не являющихся алгебрами.

Теорема 2. Пусть $p \in SH^+(\mathbb{D})$ и выполнены условия (5) и (LD₀¹). Если для семейства $\Sigma = \{S_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, возможно пересекающихся множеств S_k , покрывающего последовательность Λ , справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } S_k}{\text{dist}(S_k, \partial \mathbb{D})} = 0, \quad (31)$$

а разбиения (16) мер μ_Λ и ν_p удовлетворяет ограничению

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{(k)}(S_k)}{\nu_p^{(k)}(S_k)} < 1 \quad (32)$$

то для некоторого числа $a_\Lambda < 1$ последовательность Λ — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где

$$M = a_\Lambda p + Bb_{\nu_p}^{[6]}, \quad (33)$$

а перед определенной в (19) функцией $b_{\nu_p}^{[6]}$ стоит постоянная B .

В частности, если p — логарифмический вес вида [L] с $\alpha > 1$, то второе слагаемое в правой части (33) исчезает и Λ — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; a_\Lambda p)$ с некоторой постоянной $a_\Lambda < 1$.

Доказательство. В [2, теорема 15.1] доказано, что именно в условиях теоремы 2 последовательность точек Λ является последовательностью неединственности, или подпоследовательностью нулей, для пространства $H_p^1 := \cup_{0 \leq a < 1} \text{Hol}(\mathbb{D}, cp)$ (даже без эквивалентных условий (5)–(6)), т. е. при некотором $c < 1$ для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где $M := cp$ — субгармоническая функция. Кроме

того, для функции M и для ее меры Рисса ν_M по-прежнему выполнены эквивалентные условия (5)–(6) с заменой p на M . При этих условиях в [3, теорема 2, п. (U)] утверждается, что каждая подпоследовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ будет уже последовательностью нулей для пространства (25). Очевидно, $b_M^{[6]} \leq cb_p^{[6]}$. Кроме того, в силу условия регулярности (LD_0^1) при достаточно малом значении числа $b > 1$, для которого выполнено ограничение $cb < 1$, имеет место неравенство

$$A_M^{[\varepsilon]} \leq bcp(z) + C, \quad (34)$$

где $a_\Lambda := bc < 1$, C — постоянная. Таким образом, пространство из (25) вложено в весовое пространство $\text{Hol}(\mathbb{D}; a_\Lambda p + Bb_{\nu_p}^{[6]})$ для некоторой постоянной B , а Λ — последовательность нулей для этого пространства, что и требовалось.

В частном случае

$$p(z) = \log^\alpha \frac{1}{1 - |z|}, \quad \alpha > 1, \quad (35)$$

выполнены условия (5) и (LD_0^1) , а из оценки (28) леммы предыдущего параграфа для логарифмического веса (35) имеем

$$b_{\nu_p}^{[6]}(z) = O\left(\log^{\alpha-1} \frac{1}{1 - |z|}\right), \quad z \rightarrow \partial\mathbb{D}. \quad (36)$$

Отсюда при том же выборе веса p можно найти постоянную $a \in (a_\Lambda, 1)$, с которой неравенство $a_\Lambda p(z) + Bb_{\nu_p}^{[6]}(z) \leq ap(z)$ выполнено при всех $z \in \mathbb{D} \setminus D(t)$ при определенном $t < 1$. в силу ограниченности голоморфных функций в круге $D(t)$ этого достаточно, чтобы пространство $\text{Hol}(\mathbb{D}; a_\Lambda p + Bb_{\nu_p}^{[6]})$ включалось в $\text{Hol}(\mathbb{D}; ap)$. Теорема доказана. \bullet

Выведем из теоремы 2 часть (Z_2) радиальной теоремы из введения. Для непересекающихся S_k в качестве мер $\lambda^{(k)}$ и $\nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, берем сужения мер соответственно n_Λ и ν_p на S_k . Тогда

условия (13) влекут за собой выполнение условий (31)–(32) теоремы 2. В силу возрастания функции p условия на нее, при которых имеет место (9), даже сильнее условия регулярности (LD_0^1) теоремы 2. Условие (5) для радиальной функции — это (7). Наконец, как уже отмечалось, справедливо неравенство (26). Это и показывает, что часть (Z_2) радиальной теоремы — прямое следствие теоремы 2.

Из части (Z_2) радиальной теоремы из введения можно легко получить следствия, подобные следствиям 1 и 2 для логарифмических и степенных весов p вида [L] и [P] соответственно. Здесь мы на этом не останавливаемся.

§ 3. Нерадиальные теоремы о последовательностях нулей для пространств типа $H_{p+\log}$.

На весовую функцию p , определяющую пространство $H_{p+\log}$, в [2] накладывалось дополнительное условие регулярности⁹

(LD_0^0) существуют числа ε , $0 < \varepsilon < 1$, и $C \geq 0$, для которых в обозначении (20) для усреднений справедливо неравенство

$$A_p^{[\varepsilon]}(z) \leq p(z) + C \log \frac{1}{1 - |z|} + C, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (37)$$

Теорема 3. Пусть $p \in SH(\mathbb{D})$ и, вообще говоря, не обязательно положительная функция, для которой выполнены условия (5) и (LD_0^0) . Если для семейства $\Sigma = \{S_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, возможно пересекающихся множеств S_k , покрывающего последовательность Λ , справедливо равенство (31) и выполнены еще два условия:

[Λ] для представлений (16)–(17) мер μ_Λ и ν_p при всех достаточно больших номерах k имеет место неравенство $\lambda^{(k)}(S_k) \leq \nu_p^{(k)}(S_k)$,

⁹Используем нумерацию из [2].

[B] для меры

$$\sigma := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{diam } S_k}{\text{dist}(S_k, \partial\mathbb{D})} \nu_p^{(k)} \quad (38)$$

выполнено условие Бляшке

$$\int_0^1 (1-t) d\sigma^{\text{rad}}(t) < +\infty, \quad (39)$$

то Λ — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где в обозначении (19)

$$M(z) := p(z) + C \log \frac{1}{1-|z|} + B b_{\nu_p}^{[6]}(z), \quad C, B — \text{постоянные.} \quad (40)$$

В частности, если $\sigma(\mathbb{D}) < +\infty$, то выполнения равенства (31) можно и не требовать.

Доказательство. В [2, теорема 16.1] доказано, что именно в условиях теоремы 3 последовательность точек Λ является последовательностью неединственности, или подпоследовательностью нулей, для пространства $H_{p+\log}$ (даже без эквивалентных условий (5)–(6)), т.е. при некотором $C \geq 0$ для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где $M(z) := p(z) + C \log \frac{1}{1-|z|}$, $z \in \mathbb{D}$, — субгармоническая функция. Кроме того, для функции M и для ее меры Рисса ν_M по-прежнему выполнены эквивалентные условия (5)–(6) с заменой p на M . При этих условиях в [3, теорема 2, п. (U)] утверждается, что каждая подпоследовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ будет уже последовательностью нулей для пространства (25). В данном случае справедливо неравенство $b_M^{[6]} \leq b_p^{[6]} + C_1$, C_1 — постоянная, поскольку по оценке (28) леммы из § 1, примененной с $\alpha = 1$ имеем $b_{\log \frac{1}{1-|\cdot|}}^{[6]} \leq C_1$. Кроме того, в силу условия регулярности (LD_0^0) имеет место неравенство

$$A_M^{[\varepsilon]} \leq p(z) + C_2, \quad (41)$$

где C_2 — постоянная. Таким образом, пространство из (25) вложено в весовое пространство $\text{Hol}(\mathbb{D}; p + C_3 \log \frac{1}{1-|\cdot|} + Bb_{\nu_p}^{[6]})$ для некоторых постоянных C_3, B , а Λ — последовательность нулей для этого пространства, что и требовалось установить. •

Выведем из теоремы 3 часть (Z_3) радиальной теоремы из введения. Для непересекающихся S_k в качестве мер $\lambda^{(k)}$ и $\nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, берем сужения мер соответственно n_Λ и ν_p на S_k . Тогда условия (15) влекут за собой выполнение условий соответственно [B] и [Λ] теоремы 3. В силу возрастания функции p условия на нее, при которых имеет место (9), даже сильнее условия регулярности (LD_0^0) теоремы 3. Условие (5) для радиальной функции — это (7). Наконец, как уже отмечалось, справедливо неравенство (26). Это и показывает, что часть (Z_3) радиальной теоремы — прямое следствие теоремы 3.

Следствие 3 Пусть p — логарифмический вес из п. [L] введения и при этом $1 \leq \alpha \leq 2$. Если для системы $\Sigma = \{S_k\}$ попарно непересекающихся подмножеств S_k конечна сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{diam } S_k}{\text{dist}(S_k, \partial\mathbb{D})} \int_0^1 S_k(t) \frac{1}{(1-t)^2} \left(1 + \frac{(\alpha-1)t}{1-t} \log^{-1} \frac{1}{1-t} \right) \log^{\alpha-1} \frac{1}{1-t} dt \quad (42)$$

и в обозначениях, введенных перед следствием ??,

$$n_\Lambda(S_k) \leq \int_0^1 S_k(t) \frac{1}{(1-t)^2} \left(1 + \frac{(\alpha-1)t}{1-t} \log^{-1} \frac{1}{1-t} \right) \log^{\alpha-1} \frac{1}{1-t} dt, \quad (43)$$

то Λ — последовательность нулей для пространства $H_{p+\log}$. В частности, при $\alpha = 1$ интегралы в (42) и (43) имеют вид $\int_0^1 S_k(t) \frac{1}{(1-t)^2} dt$, а при $1 < \alpha \leq 2$ их можно заменить на $\int_0^1 S_k(t) \frac{1}{(1-t)^3} \log^{\alpha-2} \frac{1}{1-t} dt$.

Доказательство опускаем, поскольку идейно оно повторяет отдельные элементы доказательства следствия 1. Отметим лишь, что ограничение $\alpha \leq 2$ по лемме из доказательства следствия

1 обеспечивает выполнение условия (9) в том виде, в каком оно требуется в п. (Z_3) радиальной теоремы. При $\alpha > 2$ это условие, равно как и ограничение (LD_0^0) , уже неверно.

В заключение отметим, что на основе [2, теорема 17.1] наши теоремы можно развить и дальше на более сложно устроенные пространства. Кроме того, по схеме из [2, § 18], опираясь на результаты работы [3], можно получить новые теоремы устойчивости для последовательностей нулей в весовых пространствах голоморфных функций в круге. Эти результаты в дальнейшем будут изложены в более подробной версии нашей работы.

Список литературы

- [1] Шамоян Ф. А., *Факторизационная теорема М. М. Джрбабяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста*, Изв. АН Арм. ССР. Математика **XIII** (1978), № 5–6, 405–422.
- [2] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова “Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II”, *Алгебра и анализ*, **20**:1 (2008), 190–236.
- [3] Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин “Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **201**: (2009), 95–126.
- [4] К. Seip, “An extention of the Blaschke condition”, *J. London Math. Soc.*, **51** (1995), 545–558.

УДК 517.9

О СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ОБЛАСТИ С МАЛЫМ
ОТВЕРСТИЕМ

Черданцева К. И. (Уфа, БашГУ)

Рассмотрим следующую эллиптическую краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\psi_0 &:= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_0 \right) + a\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_0 &= 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω – ограниченная, связная область в \mathbb{R}^n с бесконечно дифференцируемой границей, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_{ij}, a \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cos(x_j, n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

– кономальная производная, а оператор \mathcal{L} – эллиптический. То есть существуют положительные постоянные μ_1 и μ_2 такие, что

$$\mu_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 |\xi|^2 \quad (2)$$

для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}$. Задачу (1) будем называть предельной.

Возмутим предельную задачу вырезанием в Ω малого отверстия и заданием условия Неймана на границе этого отверстия. А именно, пусть Ω содержит начало координат, ω – ограниченная, связная область в \mathbb{R}^n с бесконечно дифференцируемой границей, также содержащая начало координат. Обозначим $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in$

$\omega\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$. Здесь и далее $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Краевую задачу

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_\varepsilon \right) + a \psi_\varepsilon &= \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon && \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_\varepsilon := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cos(x_j, n) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_\varepsilon &= 0 && \text{при } x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

будем называть возмущенной.

Пусть Q – произвольная область в \mathbb{R}^n . Под символами $\|\cdot\|_Q$ и $\|\cdot\|_{1,Q}$ будем понимать норму в $L_2(Q)$ и $W_2^1(Q)$, соответственно:

$$\begin{aligned} \|f\|_Q &= \left(\int_Q f^2(x) dx \right)^{1/2}, \\ \|f\|_{1,Q} &= \left(\int_Q (\nabla f(x))^2 dx + \int_Q f^2(x) dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Известно [[1], Глава 4, §1, Теорема 3], что собственные значения краевых задач (1), (3) вещественны, а собственные функции могут быть выбраны вещественными.

Решения краевых задач на собственные значения (1), (3) понимаются в обобщенном смысле (см. [1], [2],[3]). А именно, под собственной функцией краевой задачи (1) понимаем не равную нулю функцию $\psi_0 \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a \psi_0 \bar{v} dx = \lambda_0 \int_\Omega \psi_0 \bar{v} dx, \quad (4)$$

для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$. Аналогично, под собственной функцией краевой задачи (3) понимаем не равную нулю функцию

$\psi_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a \psi_\varepsilon \bar{v} dx = \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \psi_\varepsilon \bar{v} dx, \quad (5)$$

для любой функции $v \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$.

Решения неоднородных краевых задач

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_j} \right) + a \Psi_0 &= \lambda \Psi_0 + f && \text{при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \Psi_0 &= 0 && \text{при } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + a \Psi_\varepsilon &= \lambda \Psi_\varepsilon + f && \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \Psi_\varepsilon &= 0 && \text{при } x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

где $f_0, f_\varepsilon \in L_2(\Omega)$ рассматриваются также в обобщённом смысле. А именно, под решением краевой задачи (6) понимается элемент $\Psi_0 \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a \Psi_0 \bar{v} dx = \lambda \int_{\Omega} \Psi_0 \bar{v} dx + \int_{\Omega} f \bar{v} dx, \quad (8)$$

для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$. Аналогично, под решением краевой задачи (7) понимается элемент $\Psi_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a \Psi_\varepsilon \bar{v} dx = \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \Psi_\varepsilon \bar{v} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v} dx, \quad (9)$$

для любой функции $v \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$.

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 7. Пусть Q – произвольный компакт на комплексной плоскости, Ψ_ε – решение краевой задачи (7) при $\lambda \in Q$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любых $\varepsilon < \varepsilon_0$ справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|\Psi_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C_1(\|\Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon} + \|f\|_{\Omega_\varepsilon}). \quad (10)$$

Доказательство. В интегральное тождество (9) подставим функцию $v = \Psi_\varepsilon$:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\Psi}_\varepsilon}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} a \Psi_\varepsilon \bar{\Psi}_\varepsilon dx + \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \Psi_\varepsilon \bar{\Psi}_\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{\Psi}_\varepsilon dx. \quad (11)$$

Из условия эллиптичности (2) следует оценка

$$\mu_1 |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\Psi}_\varepsilon}{\partial x_i} \leq \mu_2 |\nabla \Psi_\varepsilon|^2, \quad (12)$$

тогда в силу (11), (12) имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \|\nabla \Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon}^2 &\leq C_2(\|\Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon}^2 + \|f\|_{\Omega_\varepsilon} \|\Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon}) \\ &\leq C_2 \|\Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon}^2 + C_2 \|f\|_{\Omega_\varepsilon} \|\Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon} + \|f\|_{\Omega_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Разделив на μ_1 и прибавив к обеим частям $\|\Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon}^2$, получаем

$$\|\Psi_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2 \leq C_1^2(\|\Psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon} + \|f\|_{\Omega_\varepsilon})^2,$$

где $C_1 = \sqrt{\frac{C_2+1}{\mu_1}}$. Из последнего неравенства следует оценка (10). Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть λ_ε – собственное значение краевой задачи (3), сходящееся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к собственному значению λ_0 предельной задачи (1), а ψ_ε – нормированная в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_ε . Тогда из любой

последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \rightarrow 0$, такую что

$$\|\psi_{\varepsilon_{k_m}} - \psi_0\|_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}} \rightarrow 0,$$

где ψ_0 – нормированная в $L_2(\Omega)$, собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0 .

Доказательство. В работе (см. [4]) показано, что существует линейный ограниченный оператор продолжения l_ε пространства $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ в $W_2^1(\Omega)$ такой, что для любой функции $u \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$

$$\|l_\varepsilon u\|_{1,\Omega} \leq C \|u\|_{1,\Omega_\varepsilon} \quad (13)$$

где постоянная C от ε не зависит.

В силу (13) и (10) при $f \equiv 0$ имеем оценку

$$\|l_\varepsilon \psi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C_5 \|\psi_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C_1 C_5 \|\psi_\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon} = C. \quad (14)$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Из неравенства (14) следует, что $l_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}$ ограниченная функция в $W_2^1(\Omega)$. Ограниченное множество в гильбертовом пространстве $W_2^1(\Omega)$ слабо компактно и вложение $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ компактно, следовательно существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю, такая, что при $m \rightarrow \infty$

$$l_{\varepsilon_{k_m}} \psi_{\varepsilon_{k_m}} \rightarrow \psi_* \in W_2^1(\Omega) \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega) \text{ и сильно в } L_2(\Omega). \quad (15)$$

По условию леммы,

$$\lambda_{\varepsilon_{k_m}} \rightarrow \lambda_0. \quad (16)$$

Для доказательства теоремы, покажем, что функция ψ_* удовлетворяет тождеству (4) для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$. Для этого, подставим в тождество (5) функцию $l_{\varepsilon_{k_m}} \psi_{\varepsilon_{k_m}}$ и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Интегральное тождество (5) для $l_{\varepsilon_{k_m}} \psi_{\varepsilon_{k_m}}$ и тестовой функции $v \in W_2^1(\Omega)$ имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}} a_{ij} \frac{\partial l_{\varepsilon_{k_m}} \psi_{\varepsilon_{k_m}}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}} a l_{\varepsilon_{k_m}} \psi_{\varepsilon_{k_m}} \bar{v} dx = \lambda_{\varepsilon_{k_m}} \int_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}} l_{\varepsilon_{k_m}} \psi_{\varepsilon_{k_m}} \bar{v} dx.$$

Прибавим к обеим частям полученного тождества интеграл

$$F = \sum_{i,j=1}^n \int_{\omega_{\varepsilon_{km}}} a_{ij} \frac{\partial l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\omega_{\varepsilon_{km}}} a l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} \bar{v} dx - \lambda_{\varepsilon_{km}} \int_{\omega_{\varepsilon_{km}}} l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} \bar{v} dx$$

и последнее слагаемое интеграла F перенесем вправо. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} \bar{v} dx \\ = \lambda_{\varepsilon_{km}} \int_{\Omega} l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} \bar{v} dx + F. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как мера $|\omega_{\varepsilon_{km}}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, то нормы $\|\nabla v\|_{\omega_{\varepsilon_{km}}} \rightarrow 0$ и $\|v\|_{\omega_{\varepsilon_{km}}} \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\omega_{\varepsilon_{km}}} a_{ij} \frac{\partial l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \leq C_6 \|\nabla(l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}})\|_{\Omega} \|\nabla v\|_{\omega_{\varepsilon_{km}}} \xrightarrow{\varepsilon_{km} \rightarrow 0} 0, \\ \int_{\omega_{\varepsilon_{km}}} a l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} \bar{v} dx \leq C_7 \|(l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}})\|_{\Omega} \|v\|_{\omega_{\varepsilon_{km}}} \xrightarrow{\varepsilon_{km} \rightarrow 0} 0, \\ \lambda_{\varepsilon_{km}} \int_{\omega_{\varepsilon_{km}}} l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} \bar{v} dx \leq C_8 \|(l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}})\|_{\Omega} \|v\|_{\omega_{\varepsilon_{km}}} \xrightarrow{\varepsilon_{km} \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|F\|_{\Omega_{\varepsilon_{km}}} \xrightarrow{\varepsilon_{km} \rightarrow 0} 0. \quad (18)$$

В (17) переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, используя при этом (15), (16), (18) получаем, что функция ψ_* удовлетворяет интегральному тождеству (4). Причем $\|\psi_*\|_{\Omega} \neq 0$ в силу равенства $\|\psi_{\varepsilon}\|_{\Omega_{\varepsilon}} = 1$,

(14) и (15). Следовательно, получаем, что $\psi_* = \psi_0$. То есть, при $m \rightarrow \infty$ верна сходимость

$$\|l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} - \psi_0\|_{\Omega} \xrightarrow{\varepsilon_{km} \rightarrow 0} 0. \quad (19)$$

Покажем, что собственная функция $\psi_{\varepsilon_{km}}$ сходится к функции ψ_0

$$\|\psi_{\varepsilon_{km}} - \psi_0\|_{\Omega_{\varepsilon_{km}}}^2 \leq \|l_{\varepsilon_{km}} \psi_{\varepsilon_{km}} - \psi_0\|_{\Omega}^2 \xrightarrow{\varepsilon_{km} \rightarrow 0} 0.$$

Получили справедливость нашего утверждения. Лемма доказана.

Перейдём к доказательству ключевой леммы о сходимости решений возмущённых краевых задач (7) к решениям краевой задачи (6).

Лемма 9. Пусть Q компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных значений предельной задачи (1). Тогда 1) существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ и любом $\lambda \in Q$ существует единственное решение Ψ_ε возмущенной задачи (7) и справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|\Psi_\varepsilon\|_{1, \Omega_\varepsilon} \leq C \|f\|_{\Omega_\varepsilon}; \quad (20)$$

2) для решения задачи (7) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\|\Psi_\varepsilon - \Psi_0\|_{\Omega_\varepsilon} \rightarrow 0, \quad (21)$$

где Ψ_0 – решение предельной задачи (6).

Доказательство. В силу известной альтернативы Фредгольма (см., например, [1, Гл.4]), для доказательства существования и единственности решения возмущенной задачи (7), достаточно показать, что выполнена оценка (20). Предположим, что оценка (20) не верна, т.е. существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$, $f_k \in L_2(\Omega_{\varepsilon_k})$, и λ_k такие, что для решений задачи (7) при $\varepsilon = \varepsilon_k$, $f = f_k$, $\lambda = \lambda_k$ имеет место неравенство

$$\|\Psi_{\varepsilon_k}\|_{1, \Omega_{\varepsilon_k}} \geq k \|f_k\|_{\Omega_{\varepsilon_k}}. \quad (22)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\|\Psi_{\varepsilon_k}\|_{\Omega_{\varepsilon_k}} = 1. \quad (23)$$

Тогда, из (10), (22) и (23) следует, что

$$\|\Psi_{\varepsilon_k}\|_{1, \Omega_{\varepsilon_k}} \leq C(1 + \|f_k\|_{\Omega_{\varepsilon_k}}), \quad (24)$$

$$\|f_k\|_{\Omega_{\varepsilon_k}} < \frac{C(1 + \|f_k\|_{\Omega_{\varepsilon_k}})}{k} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0. \quad (25)$$

Продолжим функцию Ψ_{ε_k} из пространства $W_2^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ в $W_2^1(\Omega)$ ограниченным оператором продолжения l_{ε_k} так что

$$\|l_{\varepsilon_k} \Psi_{\varepsilon_k}\|_{1, \Omega} \leq C \|\Psi_{\varepsilon_k}\|_{1, \Omega_{\varepsilon_k}} \leq C_1(1 + \|f_k\|_{\Omega_{\varepsilon_k}}) \quad (26)$$

Поскольку Q компакт, из (24), компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ (см., например, [1, Глава 3, §5, Теорема 3]) и слабой компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве (см., например, [1, Глава 2, §3, Теорема 3]) следует, что существует подпоследовательность индексов $\{k'\}$, а также существуют λ^* и Ψ^* такие, что на этой подпоследовательности при $k' \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость

$$\lambda_{k'} \rightarrow \lambda^* \in Q, \quad (27)$$

$$l_{\varepsilon_{k'}} \Psi_{\varepsilon_{k'}} \rightarrow \Psi^* \in W_2^1(\Omega) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega) \text{ и слабо в } W_2^1(\Omega). \quad (28)$$

Из (23) и (28) следует, что

$$\Psi^* \neq 0. \quad (29)$$

Из (25), (27)–(29) следует

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a \Psi^* \bar{v} dx = \lambda^* \int_{\Omega} \Psi^* \bar{v} dx.$$

для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$. Поскольку $\Psi^* \neq 0$ в силу (23), то λ^* – собственное значение предельной задачи (1). С другой стороны, $\lambda^* \in Q$. Однако, по условию доказываемой теоремы Q не

содержит собственных значений предельной задачи (1). Из полученного противоречия следует оценка (20).

Докажем пункт 2). Из (13), (20) следует оценка

$$\|l_\varepsilon \Psi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C \|\Psi_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C_1 \|f\|_{\Omega_\varepsilon}. \quad (30)$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Из оценки (30), слабой компактности ограниченного множества в $W_2^1(\Omega)$, компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ вытекает, что существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k'}\}_{k'=1}^\infty$ такая, что при $k' \rightarrow \infty$ справедливо соотношение (28). Далее, доказательство проводится аналогично схеме доказательства пункта 1). Получаем, что Ψ^* – решение предельной задачи (6). В силу единственности решения этой задачи получаем, что $\Psi^* = \Psi_0$. Отсюда в силу произвола в выборе последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ и сходимости (28) следует

$$\|l_\varepsilon \Psi_\varepsilon - \Psi_0\|_\Omega \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Покажем, что собственная функция Ψ_ε сходится к функции Ψ_0

$$\|\Psi_\varepsilon - \Psi_0\|_{\Omega_\varepsilon}^2 \leq \|l_\varepsilon \Psi_\varepsilon - \Psi_0\|_\Omega^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Получили справедливость нашего утверждения. Лемма доказана.

Из леммы 8 и ортогональности собственных функций как предельной задачи (1), так и возмущенной задачи (3) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 10. Пусть совокупная кратность собственных значений λ_0 краевой задачи (1) равна N . Тогда, если к нему сходится собственное значение λ_ε краевой задачи (3), то его кратность не превышает N .

Доказательство. Докажем это от противного. Пусть кратность собственного значения λ_0 равна N , а кратность собственного значения λ_ε сходящегося к λ_0 равна $M > N$. Пусть собственная функция $\psi_{\varepsilon,1}$ соответствует собственному значению λ_ε . По лемме 8 из

любой последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_1}\}_{k_1=1}^{\infty} \rightarrow 0$ такую, что

$$\|\psi_{\varepsilon_{k_1},1} - \psi_{0,1}\|_{\Omega_{\varepsilon_{k_1}}} \rightarrow 0,$$

где $\psi_{0,1}$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0 . Выберем собственную функцию $\psi_{\varepsilon_{k_1},2}$ соответствующую собственному значению λ_{ε} ортогональную к функции $\psi_{\varepsilon_{k_1},1}$. По лемме 8 из любой последовательности $\{\varepsilon_{k_1}\}_{k_1=1}^{\infty} \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_2}\}_{k_2=1}^{\infty} \rightarrow 0$ такую, что

$$\|\psi_{\varepsilon_{k_2},2} - \psi_{0,2}\|_{\Omega_{\varepsilon_{k_2}}} \rightarrow 0,$$

где $\psi_{0,2}$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0 . Так как $\psi_{\varepsilon_{k_1},2}$ и $\psi_{\varepsilon_{k_1},1}$ ортогональны, следовательно функции $\psi_{0,1}$ и $\psi_{0,2}$ ортогональны. Продолжая это построение, на шаге $i = N + 1$ выберем собственную функцию $\psi_{\varepsilon_{k_{N+1}},N+1}$ соответствующую собственному значению λ_{ε} ортогональную к функциям $\psi_{\varepsilon_{k_i},i}$ для любого $i = 1, \dots, N$. По лемме 8 из любой последовательности $\{\varepsilon_{k_N}\}_{k_N=1}^{\infty} \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_{N+1}}\}_{k_{N+1}=1}^{\infty} \rightarrow 0$ такую, что

$$\|\psi_{\varepsilon_{k_{N+1}},N+1} - \psi_{0,N+1}\|_{\Omega_{\varepsilon_{k_{N+1}}}} \rightarrow 0,$$

где $\psi_{0,N+1}$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0 и ортогональная $\psi_{0,i}$ для любого $i = 1, \dots, N$, что противоречит тому, что λ_0 собственное значение кратности N . Лемма доказана.

Целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть λ_0 – собственное значение краевой задачи Неймана (1) кратности N . Тогда

1) совокупная кратность собственных значений $\lambda_{\varepsilon,i}$ краевой задачи (3) сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, равна N ;

2) из любой последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \rightarrow 0$ такую что для соответствующих $\lambda_{\varepsilon,i}$ собственных функций $\psi_{\varepsilon,i}$ краевой задачи (3), нормированных в $L_2(\Omega_{\varepsilon})$, имеет место сходимость

$$\|\psi_{\varepsilon_{k_m},i} - \psi_{0,i}\|_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}} \rightarrow 0, \quad (31)$$

где $\psi_{0,i}$, $i = 1, \dots, N$ – ортонормированные собственные функции, соответствующие собственному значению λ_0 .

Замечание. В силу лемм 8, 9 получаем, что совокупная кратность собственных значений $\lambda_{\varepsilon,i}$ задачи (3), сходящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к собственным значениям λ_0 задачи (1) не превышает N – кратности λ_0 . То есть, для доказательства теоремы 1 остается показать, что кратность собственного значения $\lambda_{\varepsilon,i}$ возмущенной задачи (3) не меньше N .

Перейдем к выводу представления для решений краевых задач (6), (7). Подставим в интегральные тождества (4), (5) вместо v функции $\psi_{0,s}$ и $\psi_{\varepsilon,s}$, соответственно:

$$\|\psi_{\delta,s}\|_{1,\Omega_{\delta}}^2 = \lambda_{\delta,s} \|\psi_{\delta,s}\|_{\Omega_{\delta}}^2 = \lambda_{\delta,s}, \quad \delta \geq 0, \quad \Omega_0 = \Omega. \quad (32)$$

Обозначим, через $(\cdot, \cdot)_{\Omega_{\delta}}$ скалярное произведение в $L_2(\Omega_{\delta})$. Из равенства (32) и (см, например, [1, Гл. 4, §1, П. 3]) вытекает, что система

$$\frac{\psi_{\delta,1}}{\sqrt{\lambda_{\delta,1}}}, \dots, \frac{\psi_{\delta,s}}{\sqrt{\lambda_{\delta,s}}}, \dots, \quad \delta \geq 0 \quad (33)$$

является ортонормированным базисом в $W_2^1(\Omega_{\delta})$. Следовательно, любая функция из $W_2^1(\Omega_{\delta})$ раскладывается в ряд Фурье по ортонормированному базису (33):

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(u, \psi_{\delta,s})_{1,\Omega_{\delta}}}{\lambda_{\delta,s}} \psi_{\delta,s}, \quad \delta \geq 0. \quad (34)$$

Рассмотрим интегральные тождества (8), (9), подставляя в них вместо v соответствующие собственные функции $\psi_{\delta,s}$, получаем

следующие равенства:

$$(\Psi_\delta, \psi_{\delta,s})_{1,\Omega_\delta} = \lambda(\Psi_\delta, \psi_{\delta,s})_{\Omega_\delta} + (f, \psi_{\delta,s})_{\Omega_\delta}, \quad \delta \geq 0.$$

В правую часть последних равенств подставим разложение (34) для функций Ψ_δ . В результате имеем

$$(\Psi_\delta, \psi_{\delta,s})_{1,\Omega_\delta} = \frac{\lambda}{\lambda_{\delta,s}}(\Psi_\delta, \psi_{\delta,s})_{1,\Omega_\delta} + (f, \psi_{\delta,s})_{\Omega_\delta}, \quad \delta \geq 0.$$

Отсюда выводим

$$(\Psi_\delta, \psi_{\delta,s})_{1,\Omega_\delta} = \frac{\lambda_{\delta,s}}{\lambda_{\delta,s} - \lambda}(f, \psi_{\delta,s})_{\Omega_\delta}, \quad \delta \geq 0.$$

Подставим полученное выражение для чисел $(\Psi_\delta, \psi_{\delta,s})_{1,\Omega_\delta}$ в разложение Фурье функций Ψ_δ в (34). В результате представления для решения краевых задач (8), (9) имеют вид

$$\Psi_\delta(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(f, \psi_{\delta,s})_{\Omega_\delta}}{\lambda_{\delta,s} - \lambda} \psi_{\delta,s}(x), \quad \delta \geq 0. \quad (35)$$

В силу замечания, достаточно показать, что совокупная кратность N_ε собственных значений $\lambda_{\varepsilon,i}$, сходящихся к λ_0 , при $\varepsilon \rightarrow 0$ не может быть меньше N – кратности собственного значения λ_0 :

$$\lambda_{0,p} < \lambda_0 = \lambda_{0,p+1} = \dots = \lambda_{0,p+N} < \lambda_{0,p+N+1},$$

где $\lambda_{0,0}$ любое число меньше $\lambda_{0,1}$.

Докажем это от противного. Предположим, что существует последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$, такая что $N_{\varepsilon_k} < N$. Не ограничивая общности можно считать $N_{\varepsilon_k} = M < N$. Пусть

$$\lambda_{\varepsilon,p+1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,p+M} \quad (36)$$

– последовательность собственных значений краевой задачи (3), сходящихся к λ_0 , при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу леммы 8 существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \rightarrow 0$ такая, что

$$\|\psi_{\varepsilon_{k_m},p+i} - \psi_{0,p+i}\|_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}} \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (37)$$

Положим

$$\begin{aligned} f &:= \psi_{0,p+M+1}, \\ G_0(\lambda) &:= (\Psi_0(\cdot, \lambda), \psi_{0,p+M+1})_{\Omega}, \\ G_\varepsilon(\lambda) &:= (\Psi_\varepsilon(\cdot, \lambda), \psi_{\varepsilon,p+M+1})_{\Omega_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Пусть $S(t, z)$ – открытый круг на комплексной плоскости радиуса t с центром в точке z . Так как собственные значения не имеют конечных точек накопления, то существует $T > 0$, такое, что $\overline{S(T, \lambda_0)}$ не содержит собственных значений краевой задачи (1), отличных от λ_0 . В силу леммы 9 для любого $t \leq T$ и при $m \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\|G_{\varepsilon_{k_m}} - G_0\|_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}} \xrightarrow{\varepsilon_{k_m} \rightarrow 0} 0, \quad \lambda \in \partial S(t, \lambda_0). \quad (38)$$

Из представления (35) следует, что

$$\begin{aligned} G_0(\lambda) &= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}, \\ G_\varepsilon(\lambda) &= \sum_{i=1}^M \frac{|(\psi_{0,p+M+1}, \psi_{\varepsilon,p+i})_{\Omega_\varepsilon}|^2}{\lambda_{\varepsilon,p+i} - \lambda} + g_\varepsilon(\lambda), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$g_\varepsilon(\lambda) = \sum_{s=1}^p \frac{|(\psi_{0,p+M+1}, \psi_{\varepsilon,s})_{\Omega_\varepsilon}|^2}{\lambda_{\varepsilon,s} - \lambda} + \sum_{s=p+M+1}^{\infty} \frac{|(\psi_{0,p+M+1}, \psi_{\varepsilon,s})_{\Omega_\varepsilon}|^2}{\lambda_{\varepsilon,s} - \lambda}. \quad (40)$$

Покажем, что $g_{\varepsilon_{k_m}}(\lambda)$ голоморфная функция при $\lambda \in S(t, \lambda_0)$ для любого $t < T$. Заметим, что при m достаточно больших в круге $\overline{S(T, \lambda_0)}$ не содержится других собственных значений кроме (36). В противном случае существовала бы еще одна подпоследовательность на которой эти собственные значения сходились бы к $\lambda_* \in \overline{S(T, \lambda_0)}$, отличному от λ_0 , что противоречит лемме 9. Следовательно, ряд (40) мажорируется числовым рядом

$$(T - t)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} |(\psi_{0,p+M+1}, \psi_{\varepsilon_{k_m},s})_{\Omega_{\varepsilon_{k_m}}}|^2. \quad (41)$$

Поскольку система $\{\psi_{\varepsilon_{km},s}\}_{s=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в $L_2(\Omega_{\varepsilon_{km}})$, то для любой $f \in L_2(\Omega_{\varepsilon_{km}})$ имеет место равенство Парсеваля-Стеклова (см., например, [1, Гл. 2, §2, П. 7])

$$\|f\|_{\Omega_{\varepsilon_{km}}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2, \quad f_i = (f, \psi_{\varepsilon_{km}})_{\Omega_{\varepsilon_{km}}}.$$

Из (41) и равенства Парсеваля-Стеклова следует, что

$$|g_{\varepsilon}(\lambda)| \leq (T - t)^{-1} \|\psi_{0,p+M+1}\|_{\Omega} = (T - t)^{-1},$$

то есть, ряд (40) равномерно сходится при $\lambda \in S(t, \lambda_0)$. Следовательно в силу теоремы Вейерштрасса (см., например, [5, Теорема 1, Глава 1, §5]) функция g_{ε} является голоморфной при $\lambda \in S(t, \lambda_0)$.

В силу сходимости (38) G_{ε} сходится к G_0 по мере, а следовательно существует подпоследовательность $G_{\varepsilon_{km}}$ сходящаяся к G_0 почти всюду. Тогда, при $t < T$ в силу представления (39) все G_{ε} ограничены и по теореме Лебега (см., например, [6, §5, п.7]) получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\partial S(t, \lambda_0)} G_{\varepsilon_{km}}(\lambda) d\lambda = \int_{\partial S(t, \lambda_0)} G_0(\lambda) d\lambda. \quad (42)$$

А в силу (39) и теоремы о вычетах имеем

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} G_0(\lambda) d\lambda = 2\pi i, \quad (43)$$

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} G_{\varepsilon_{km}}(\lambda) d\lambda = 2\pi i \sum_{i=1}^M |(\psi_{0,p+M+1}, \psi_{\varepsilon_{km},i+p})_{\Omega_{\varepsilon_{km}}}|^2. \quad (44)$$

Из (44), (37) следует, что при $m \rightarrow \infty$:

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} G_{\varepsilon_{km}}(\lambda) d\lambda \rightarrow 2\pi i \sum_{i=1}^M |(\psi_{0,p+M+1}, \psi_{0,p+i})|_{\Omega_{\varepsilon_{km}}}^2 = 0. \quad (45)$$

Равенства (43), (45) противоречат (42). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976, 392 с.
- [2] *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 407 с.
- [3] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.
- [4] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* О продолжении функций из пространств С. Л. Соболева во внешность и внутрь области // Вестник ЛГУ. 1984. Сер. математика, механика, астрономия. Вып.2, №7. С. 27-37.
- [5] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987, 749 с.
- [6] *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967, 37 с.

УДК 517.977.52

О ПРИМЕНЕНИИ ДИСКРЕТНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ НЕФТЕПЕРЕРАБОТКИ И НЕФТЕХИМИИ

Чикуров А. В., Искакова З.М. (Уфа, УГНТУ)

В процессе производства нефтехимическому предприятию приходится сталкиваться с рядом возмущающих воздействий (изменения планового задания, состава и количества сырья, выход из

строю отдельных установок и др.), что приводит к необходимости оперативного управления [1].

В условиях изменения потребности в отдельных видах продукции и требований к их составу возникает необходимость перераспределения внутренних потоков завода, т.е. изменение коэффициентов отборов продуктов, получаемых на технологических установках. Для решения подобной задачи обычно используют методы линейного программирования. Однако в этом случае модель оперативного управления упрощённо принимается линейной, и математические описания отдельных технологических процессов представляются в виде линейных зависимостей, связывающих количественные и качественные показатели потоков на входе и выходе с управляющими воздействиями.

Более точные математические модели являются нелинейными, т.е. имеет место многомерная нелинейная задача оптимального управления. Предлагается использовать дискретный принцип максимума Понтрягина для определения оптимальной стратегии управления разделением внутренних потоков с целью получения продуктов заданного количества и качества.

Рассматриваемая ХТС (общая схема завода) представляется в виде ориентированного графа $G(V, E)$ – материально-потокowego графа, дуги которого соответствуют материальным потоками между установками. Считаем, что система находится в стационарном режиме. Рассмотрим простейший случай, когда не предъявляется требований к составу получаемой продукции, т.е. оптимизируемыми переменными являются только величины расходов внутренних потоков X . Известны сырьевые потоки X^{feed} , заданы требуемые продуктовые потоки X^{prod*} . (иными словами известны истоки и стоки материально-потокowego графа).

Условимся также, что граф не содержит циклов (соответствующая технологическая схема не содержит рециклических потоков). В этом случае можно легко определить вычислительную по-

следовательность расчёта системы (ВПРС) [3]. ВПРС необходима для задания начального распределения потоков (если оно уже не задано), причем коэффициенты разделения α можно принимать произвольным образом (при выполнении условия $\sum \alpha = 1$ для каждого узла).

Далее рассмотрим граф $F(V, \overline{E})$, вершины которого совпадают с вершинами исходного, а дуги ориентированы противоположно дугам исходного графа. Назовём этот граф *сопряжённым* по отношению к исходному. Для него также будем определять величины потоков λ , соответствующих каждой дуге. Очевидно, что стоки сопряжённого графа соответствуют истокам исходного и наоборот. При этом величины входящих в сопряжённый граф потоков определяются из условия трансверсальности:

$$\lambda^{feed} = X^{prod*} - X^{prod}, \quad (1)$$

где X^{prod} – текущие значения выходящих потоков (стоков) исходного графа.

Последовательность расчёта узлов сопряжённого графа будет обратной ВПРС исходного графа.

Далее можно найти λ для остальных дуг сопряжённого графа, учитывая соотношения между потоками в исходном графе. Рассмотрим некоторый j -й узел, который имеет в сопряжённом графе m выходов и n входов. Для него выходящие потоки рассчитываются по следующей формуле:

$$\lambda_i^{out} = \sum_{k=1}^m \frac{x_i^{in}}{x_k^{out}} \cdot \lambda_k^{in}, i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Применим дискретный принцип максимума. Каждый j -й узел исходного графа описывается вектором входящих потоков $X_{(j)}^{in}$ и вектором выходящих потоков $X_{(j)}^{out}$, вектором управляющих воздействий (коэффициентов разделения) $\alpha_{(j)}$. Математическое описание узла имеет вид:

$$X_{(j)}^{out} = f(X_{(j)}^{in}, \alpha_{(j)}). \quad (3)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае функция f линейна. Для сопряжённого графа математическое описание каждого узла определяется по формуле (2).

Для каждого узла можно рассчитать значение функции Гамильтона-Понтрягина:

$$H_{(j)} = \sum_{i=1}^m x_i^{out} \cdot \lambda_i^{in}. \quad (4)$$

Значение функции $H_{(j)}$ определяется для текущих значений x_i и λ_i и для некоторых близких значений x_i (игольчатое возмущение коэффициентов разделения α).

Число возможных вариантов варьирования управляющих переменных α зависит от числа выходов, которое имеет данный узел. Будем считать, что вне зависимости от общего числа выходов узла, один из выходящих потоков увеличивается на некоторую величину Δx (уменьшающуюся на каждом шаге), а другой уменьшается на ту же величину. При этом все прочие выходящие потоки узла остаются неизменными. Каждый такой вариант изменения назовём *простейшей стратегией управления узла*. Очевидно, что более сложные варианты могут быть представлены как суперпозиции простейших стратегий управления. Число простейших стратегий для узла, имеющего m выходов равно:

$$S = A_m^2 = \frac{m!}{(m-2)!} \quad (5)$$

Из всех полученных для данного узла значений H выбираем наибольшее. Согласно принципу максимума ему соответствует оптимальная стратегия управления для данного узла (обеспечивающая получение необходимого количества продуктов на выходе системы).

Затем осуществляется коррекция потоков в соответствии с выбранной оптимальной стратегией управления, и вся процедура повторяется вновь до получения необходимого количества продуктовых потоков или достижения Δx некоторой предельного малого значения ϵ .

Заметим, что задача в общем случае имеет неединственное решение и конкретная схема распределения, которую даёт описанный алгоритм зависит от начального распределения потоков в исходном графе.

Очевидно, что для сопряжённого графа величины потоков могут оказаться и отрицательными величинами. В силу линейности функции H об оптимальном выборе управления для данного узла можно судить по знаку λ : отрицательное значение λ указывает на избыток в соответствующем потоке исходного графа, положительное - на недостаток.

Из условия трансверсальности (1) видим, что модуль λ указывает на величину избытка (недостатка) расхода соответствующего потока относительно оптимального распределения. При осуществлении коррекции распределения на основе оптимальной стратегии управления следует учитывать, что величина Δx не может быть одинаковой для каждого узла, в противном случае возможно обнуление (или даже получение отрицательных значений) некоторых X . В общем случае коррекция значений X осуществляется по формуле:

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} + \Delta x \cdot \xi(|\lambda|) \quad (6)$$

где p – номер шага; ξ – некоторая функция, устанавливающая зависимость между модулем λ и величиной необходимой коррекции X . Описанный алгоритм может быть использован при решении более сложных задач, когда предъявляются требования не только к количеству продуктов, но и к их качеству.

Кроме того, определённую сложность представляет наличие в графе циклов, что приводит к необходимости итерационного рас-

чёта материального баланса системы.

Реализация алгоритма поиска оптимального распределения потоков в виде конкретного программного продукта может быть использована диспетчером завода для корректировки текущего распределения внутренних потоков в соответствии с изменением производственного плана. Подобный программный продукт в качестве исходных данных будет общую схему завода (в виде материально-потокowego графа) и текущее распределение потоков. Результатом вычислений может быть та же схема с числовой и цветовой индикацией избытка (недостатка) различных компонентов в каждом потоке.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Абдуллаев А. А. Алиев Р. А. Уланов Г. М.* Принципы построения автоматизированных систем управления промышленными предприятиями с непрерывным характером производства. М.: Энергия, 1975.
- [2] *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
- [3] *Мухленов И. П.* Химико-технологические системы. Синтез, оптимизация и управление. Л.: Химия, 1986.

УДК 519.67

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

**Шакуров И. Р., Асадуллин Р. М. (Уфа, БГПУ
им.М.Акумуллы)**

Введение

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) широко используются для математического моделирования процессов и явлений в различных областях науки и техники. Переходные процессы в радиотехнике, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций, движение космических объектов, модели экономического развития исследуются с помощью ОДУ. При нахождении решений систем ДУ важную роль играют первые интегралы.

Нахождение первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений является одной из главных задач теории дифференциальных уравнений. Практически в каждом учебнике по ДУ рассматривается вопрос нахождения первых интегралов. Из рассмотренных мной источников (в том числе и по Интернету) наиболее детально этот вопрос изучен в монографии Еругина Н.П. "Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений Краснова с соавторами "Сборник задач по ОДУ". Общих методов построения первых интегралов в литературе нет и быть не может, поскольку нахождение всех первых интегралов равносильно решению системы ОДУ, и, как известно, общий метод решения существует только для линейных систем ОДУ.

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (1)$$

Первым интегралом системы (1) называются соотношения, полученные разрешением уравнений, дающих общее решение системы, относительно произвольных постоянных [1].

В работе Еругина представлен алгоритм нахождения первых интегралов. Недостатком такого алгоритма является то, что первые интегралы ищутся, после того как система ОДУ решена. Естественным будет вопрос, нельзя ли придумать метод (алгоритм) согласно которому для ОДУ можно найти первый интеграл не решая его.

В отсутствие общих методов нахождения первых интегралов представляет интерес рассмотрение частных случаев для определенного рода систем. В данной работе представлен общий метод нахождения первых интегралов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида. Также рассматриваются вопросы восстановления различного вида систем по известному первому интегралу.

Для нахождения первых интегралов и коэффициентов системы будем использовать, необходимое и достаточное условие существования первого интеграла.

Пусть $W(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ - первый интеграл системы (1). Тогда необходимым и достаточным условием существования первых интегралов является выполнение соотношения:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial y_i} \cdot f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

В работе рассматриваются системы с полиномиальными правыми частями, допускающие первые полиномиальные интегралы и алгоритмы их построения.

§ 1. Алгоритм нахождения полиномиальных первых интегралов

Дана система ОДУ с полиномиальными правыми частями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{p_i} a_{m_{1k}^i \dots m_{nk}^i} x_1^{m_{1k}^i} \dots x_n^{m_{nk}^i}, i = 1, \dots, n \quad (2)$$

где p_i - число слагаемых в i -м уравнении; $a_{m_{1k}^i \dots m_{nk}^i}$ - известные буквенные коэффициенты; $M_k^i = m_{1k}^i \dots m_{nk}^i$ - мультииндекс.

Будем искать полиномиальный первый интеграл в виде

$$W = \sum_{s=1}^q b_{m_{1s} \dots m_{ns}} x_1^{m_{1s}} \dots x_n^{m_{ns}} \quad (3)$$

коэффициенты $b_{m_{1s} \dots m_{ns}}$ - неизвестные коэффициенты.

Алгоритм строим следующим образом:

Шаг 1. Используя необходимое и достаточное условие существования первых интегралов для системы (2), запишем равенство:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{s=1}^q \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{m_{1s} \dots m_{ns}} x_1^{m_{1s}} \dots x_n^{m_{ns}}) \right) \cdot \sum_{k=1}^{p_i} a_{m_{1k}^i \dots m_{nk}^i} x_1^{m_{1k}^i} \dots x_n^{m_{nk}^i} = 0.$$

Шаг 2. Выделяем коэффициенты при соответствующих равных степенях и приравниваем их к нулю. В результате получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $b_{m_{1s} \dots m_{ns}}$.

$$B(a) \cdot b = 0,$$

где $B(a)$ - матрица с известными коэффициентами; b - неизвестные коэффициенты, которые необходимо найти. Система имеет не тривиальное решение, т.к. $\det(B(a)) = 0$.

Шаг 3. Полученную в шаге 2 систему решаем относительно неизвестных $b_{m_{1s} \dots m_{ns}}$.

Шаг 4. Подставляем полученные $b_{m_{1s} \dots m_{ns}}$ в исходную формулу первого интеграла. И записываем первый интеграл в виде

$$\sum_{s=1}^q b_{m_{1s} \dots m_{ns}} x_1^{m_{1s}} \dots x_n^{m_{ns}} = C.$$

Рассмотрим пример из [1], в котором применим каждый шаг алгоритма для нахождения первого интеграла. В работе Еругина Н.П. первые интегралы найдены в виде $(x_2 - x_3)^2 + x_1^2 = C$.

Пример 1. Для системы [1]

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = 2 \cdot x_1 + x_2 \end{cases}$$

будем искать квадратичный интеграл в виде

$$W = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3.$$

Шаг 1. Для системы используем необходимое и достаточное условие. Имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3;$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = 2a_{22}x_2 + a_{12}x_1 + a_{23}x_3;$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_3} = 2a_{33}x_3 + a_{23}x_2 + a_{13}x_1.$$

тогда:

$$(2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \cdot (x_2 - x_3) + (2a_{22}x_2 + a_{12}x_1 + a_{23}x_3) \cdot (x_1 + x_2) + (2a_{33}x_3 + a_{23}x_2 + a_{13}x_1) \cdot (2 \cdot x_1 + x_2) = 0.$$

Шаг 2. Выделим коэффициенты при одинаковых степенях и приравняем к нулю.

$$x_1^2 : a_{12} + 2a_{13} = 0;$$

$$x_2^2 : a_{12} + a_{23} + 2a_{22} = 0;$$

$$x_3^2 : -a_{13} = 0;$$

$$x_1x_2 : 2a_{22} + a_{12} + 2a_{11} + 2a_{23} + a_{13} = 0;$$

$$x_2x_3 : a_{13} - a_{12} + 2a_{33} + a_{23} = 0;$$

$$x_1x_3 : a_{23} - 2a_{11} + 4a_{33} = 0;$$

Шаг 3. Определитель системы равен нулю, следовательно, система имеет нетривиальное решение. Решая систему, находим, что

$$a_{13} = 0, a_{12} = 0, a_{33} = -\frac{a_{23}}{2}, a_{11} = -\frac{a_{23}}{2}, a_{22} = -\frac{a_{23}}{2}, a_{23} = a_{23}.$$

Шаг 4. Для данной системы первым интегралом будем выражение

$$-\frac{1}{2}a_{23} \cdot x_1^2 - \frac{1}{2}a_{23} \cdot x_2^2 - \frac{1}{2}a_{23} \cdot x_3^2 + a_{23} \cdot x_2x_3 = C.$$

После небольших преобразований можем видеть, что первый интеграл найденный нашим методом, полностью совпадает с первым интегралом, найденным в [1].

§ 2. Обратная задача восстановления системы по известному полиномиальному первому интегралу

Пример 2. Задан полиномиальный первый интеграл вида $W = xyz$.

Для системы вида(4)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \quad (4)$$

Требуется найти коэффициенты a_{ij} . Для этого записываем равенство (необходимое и достаточное условие существования первых интегралов)

$$yz(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)+xz(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)+xy(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z) = 0.$$

Далее, раскрыв скобки и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов системы (4).

Из этого равенства получаем, что коэффициенты должны удовлетворят следующему соотношению $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$, а остальные равны нулю.

§ 3. Некорректность алгоритма использования первых интегралов системы ОДУ

Практическое применение первых интегралов заключается в замене в вычислительной схеме одного (или нескольких) из уравнений системы ОДУ первыми интегралами.

Рассмотрим следующую модельную систему ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями $x(0) = 0.5, y(0) = 0.5$.

Легко показать (с помощью алгоритма описанного выше), что для системы (5) первым интегралом будет выражение

$$x^2 + y^2 = 0.5.$$

Найденным первым интегралом мы заменяем одно из уравнений системы (5).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ x^2 + y^2 &= 0.5 \end{aligned} \quad (6)$$

Полученную систему решим численным методом [4], а именно, первое уравнение решаем методом Эйлера с шагом $h = 0.1$

и найдем x , а из второго уравнения найдем y из формулы $y = \sqrt{0.5 - x^2}$.

Результат решения на Maple запишем в таблицу

t	x	y
0.1	0.550	0.444
0.2	0.594	0.383
0.3	0.633	0.316
0.4	0.664	0.242
0.5	0.689	0.161
0.6	0.705	0.059
0.7	0.711	0.070I
0.8	0.711+0.007I	0.056-0.090I
0.9	0.716-0.002I	0.012+0.114I
1.0	0.717+0.009I	0.052-0.131I

Видим, что на седьмом шаге принимает комплексное значение. Это связано, прежде всего, с погрешностью метода Эйлера $O(h)$. На седьмом шаге $x = 0.711$, в квадрате дает значение большее, чем 0.5 и подкоренное выражение становится отрицательным. Точные значения x в квадрате не превышают 0.5.

Приведенный выше пример показывает некорректность алгоритма. Замена одного из уравнений системы ОДУ первым интегралом (снижение порядка системы ОДУ) не всегда оказывается эффективным.

Изменим алгоритм, заменим первое уравнение первым интегралом, а второе оставим без изменения

$$x^2 + y^2 = 0.5,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x.$$

Из первого уравнения находим x , а из второго y (методом Эйлера). Результат решения на Maple запишем в таблицу

t	x	y
0.1	0.545	0.450
0.2	0.586	0.395
0.3	0.622	0.337
0.4	0.652	0.275
0.5	0.675	0.210
0.6	0.693	0.142
0.7	0.703	0.073
0.8	0.707	0.002
0.9	0.704	-0.068
1.0	0.693	-0.139

Из таблицы видно, что таким образом составленная система решается корректно, т.к. решая уравнение $\frac{dy}{dt} = -x$ методом Эйлера, погрешность получаем минимальную. Все значения y в квадрате не превышают 0.5.

Аналогичный результат был получен и для системы ОДУ приведенный в учебнике [1].

Отметим, что если MAPLE позволяет решить систему (2), пусть и некорректно, то на Pascal'e решение обрывается.

Рассмотренный пример показывает важность выбора корректного алгоритма решения системы ОДУ с использованием первого интеграла.

В работе рассматривались только полиномиальные первые интегралы и системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. А что же касается остальных систем ОДУ и первых интегралов к ним, то, наверняка, можно составить алгоритм, опираясь на свойства первых интегралов и на свойства систем ОДУ специального вида. Поэтому мы в праве ожидать в этой области новых идей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979, 570с.
- [2] *Дьяконов В. П.* Математическая система Maple. М: Салон, 1998, 350с.
- [3] *Краснов М. Л, Киселев А. И* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 1978, 280с.
- [4] *Лапчик М. П, Рагулина М. И, Хеннер Е. К* Численные методы. М: Академия, 2008, 384с.

УДК 330+519.86

СТАВКА ДИСКОНТИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ РОССИЙСКИХ КОРПОРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ КРИЗИСА

Ямалетдинова Г. Х. (Уфа, БашГУ)

Введение

Изменение условий функционирования бизнеса вследствие кардинальной перемены конъюнктуры мирового рынка привело к значительному сокращению стоимости российских компаний и стоимости вложенного капитала. При оценке стоимости российских компаний специалисты, как правило, применяют модели оценки, используя данные зарубежных экономик, что приводит к существенному искажению результатов оценки. Цель работы – объективно оценить стоимость капитала (ставку дисконтирования) на основе данных российских предприятий, а также оценить влияние кризиса на изменение стоимости капитала.

§ 1. Основы оценки бизнеса

Оценка бизнеса базируется на основе трех подходов: затратного, сравнительного и доходного. В соответствии со ст. 14 ФСО №1 “сравнительный подход - совокупность методов оценки стоимости объекта оценки, основанных на сравнении объекта оценки с объектами - аналогами объекта оценки, в отношении которых имеется информация о ценах. Объектом - аналогом объекта оценки для целей оценки признается объект, сходный объекту оценки по основным экономическим, материальным, техническим и другим характеристикам, определяющим его стоимость”.

При оценке стоимости компании сравнительным подходом самым важным моментом в процессе оценивания является подбор наиболее сопоставимых аналогов. Под сопоставимым аналогом понимается объект, предлагающийся к продаже, либо объект, который уже был реализован с характеристиками, близкими к объекту оценки. В качестве параметров сопоставимости при оценке бизнеса выступают:

1. Вид деятельности.
2. Местоположение.
3. Размер предприятия.
4. Величина выручки/прибыли.
5. Величина всех активов.
6. Величина чистых активов.
7. Структура активов/пассивов.
8. Производственные показатели (годовая мощность предприятия по определенному продукту, производственные площади и др.).

В настоящее время в открытом доступе сложно подобрать необходимое количество аналогов, которые были бы сопоставимы с

объектом оценки по всем параметрам. Поэтому получить объективные результаты сравнительным подходом зачастую оказывается невозможным.

Согласно ст. 15 ФСО №1 “затратный подход - совокупность методов оценки стоимости объекта оценки, основанных на определении затрат, необходимых для воспроизводства либо замещения объекта оценки с учетом износа и устареваний. Затратами на воспроизводство объекта оценки являются затраты, необходимые для создания точной копии объекта оценки с использованием применявшихся при создании объекта оценки материалов и технологий. Затратами на замещение объекта оценки являются затраты, необходимые для создания аналогичного объекта с использованием материалов и технологий, применяющихся на дату оценки”.

При оценке бизнеса затратным подходом предприятие рассматривается как единый имущественный комплекс, производится оценка только имущества и обязательств предприятия. Здесь не учитываются такие важные показатели, как: инвестиционная политика предприятия, прогнозируемая величина прибыли, анализ и прогноз рынка сырья и товаров, анализ и прогноз общей макроэкономической ситуации.

В соответствии со ст. 13 ФСО №1 “доходный подход - совокупность методов оценки стоимости объекта оценки, основанных на определении ожидаемых доходов от использования объекта оценки”.

Результаты оценки компании доходным подходом наиболее привлекательны для инвестора, поскольку именно здесь производится оценка рисков по проекту, анализируются текущее и будущее состояния компании, прогнозируются будущие доходы и расходы. Основным методом оценки доходным подходом является метод дисконтирования денежных потоков (ДДП). В рамках этого метода используется ставка дисконтирования.

§ 2. Ставка дисконтирования и её значимость в оценке

бизнеса

Ставка дисконтирования – это ожидаемая ставка дохода на вложенный капитал в сопоставимые по уровню риска объекты инвестирования. С математической точки зрения, ставка дисконта – это ставка, по которой будущие положительные и отрицательные денежные потоки приводятся к их текущей стоимости.

Расчет стоимости бизнеса по методу ДДП производится по следующей формуле:

$$\begin{aligned} V &= \frac{CF_1}{1+r} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{CF_n}{(1+r)^n} + \frac{Vost}{(1+r)^n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+r)^i} + \frac{Vost}{(1+r)^n}, \text{ где:} \end{aligned}$$

CF_i - денежный поток предприятия в период времени i , $i \in [1;n]$;

r - ставка дисконтирования;

$Vost$ - остаточная стоимость бизнеса в постпрогнозный период времени;

n - период прогнозирования, лет.

Однако в формуле не учитывается то факт, что денежные потоки компания получает равномерно в течение всего года. Из формулы следует, что прибыль/убыток компания получит только в конце года и дисконтируется денежный поток именно на конец периода. Для того чтобы приблизить формулу к действительности, когда денежные потоки аккумулируются равномерно в течение года, формула преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= \frac{CF_1}{(1+r)^{0,5}} + \frac{CF_2}{(1+r)^{1,5}} + \dots + \frac{CF_n}{(1+r)^{n-0,5}} + \frac{Vost}{(1+r)^n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+r)^{i-0,5}} + \frac{Vost}{(1+r)^n}. \end{aligned}$$

Как видим из формулы, денежные притоки/оттоки бизнеса дисконтируются на середину периода, что оптимизировало модель оценки и объективизировало результаты оценки. Для более точной оценки возможно проводить дисконтирование поквартально или ежемесячно, однако реализация данной идеи полностью зависит от качества и полноты исходных данных. Если имеются достоверные и детальные прогнозные данные в разбивке на небольшие периоды (месяц, квартал), то для получения более точных результатов возможно использование указанного метода.

Расчет остаточной стоимости в соответствии с моделью Гордона производится по формуле:

$$V_{ost} = \frac{CF_n * (1 + g)}{r - g}, \text{ где:}$$

CF_n - денежный поток предприятия в последний прогнозный период времени n ;

g - долгосрочный темп роста.

Модель Гордона построена на основе следующих предположений:

1. Прогнозный период длится до тех пор, пока темпы роста денежных потоков компании не стабилизируются.
2. Величины амортизационных отчислений и капиталовложений в постпрогнозный период равны между собой.

Данные предположения приводят к следующим выводам:

1. Прогнозный период должен быть не меньше длительности инвестиционных вливаний.
2. По достижении определенного уровня развития предполагается, что компании будет держать позиции на одном уровне со стабильным невысоким приростом g .

3. Инвестиции в компанию необходимы лишь для обновления оборудования и иных основных средств.

Таким образом, величина стоимости компании, как в прогнозном, так и в постпрогнозном периодах, при использовании метода ДДП во многом определяется требуемой нормой доходности на вложенный капитал с учетом предполагаемого риска инвестиций в компанию.

В оценочной практике ставка дисконтирования r , как правило, рассчитывается по модели WACC (Weighted average cost of capital):

$$r = k_d(1 - t_c)W_d + k_pW_p + k_sW_s, \text{ где:}$$

k_d - стоимость привлечения заемного капитала;

t_c - ставка налога на прибыль;

k_p - стоимость привлечения привилегированных акций;

k_s - стоимость привлечения собственного капитала (обыкновенных акций);

W_d - доля заемного капитала в структуре капитала предприятия;

W_p - доля привилегированных акций в структуре капитала предприятия;

W_s - доля собственного капитала.

Стоимость привлечения собственного капитала определяется по модели CAPM (Capital Asset Pricing Model):

$$k_s = R_f + \beta(R_m - R_f), \text{ где:}$$

k_s - требуемая инвестором ставка дохода на собственный капитал для долларового денежного потока;

R_f - безрисковая ставка дохода;

β - коэффициент бета (является мерой систематического риска, связанного с макроэкономическими и политическими процессами, происходящими в стране);

R_m - общая доходность рынка в целом (среднерыночного портфеля ценных бумаг).

Многие российские оценочные фирмы в настоящее время рассчитывают ставку дисконтирования, опираясь на данные зарубежных компаний. Как правило, в качестве базовой точки для расчета принимается экономика США или Европы. Безрисковая ставка дохода, премия за риск вложения в акции, коэффициент β – все эти данные, собранные на данных зарубежных экономик, являются источниками искажений и ошибок в итоговой величине ставки дисконта при оценке стоимости предприятий РФ. Для приведения полученных результатов к российским условиям производятся корректировки на страновой риск, валютный риск (связан с тем, что денежные потоки иностранных компаний номинированы не в рублях). Однако, чем больше входных данных и корректировок используется при построении модели, тем выше риск искажения результатов.

К примеру, недочет в ставке дисконта на 5% при стабильном положительном денежном потоке может привести к неверной оценке стоимости компании на 30%. Если же оценивается предприятие со значительными капитальными затратами в первые периоды прогнозирования (1-2 периода в минусе), недооценка ставки дисконта на 5% может привести к ошибочной оценке стоимости бизнеса уже на 60%!

В связи с вышеизложенным, расчет ставки дисконтирования на основе только российских данных и определение реальной величины исследуемого показателя являются востребованными.

§ 3. Расчет ставки дисконтирования для российских компаний: допущения и результаты

При расчете ставки дисконтирования по моделям WACC и CAPM в качестве исходных данных были использованы данные исключительно из российских источников.

Расчет произведен при следующих допущениях:

1. Стоимость привлечения привилегированных акций k_p равна

стоимости привлечения обыкновенных акций k_s (рассчитано по модели CAPM).

2. Собственный капитал состоит только из обыкновенных акций, т.е. доля привилегированных акций W_p равна нулю.
3. Стоимость заемного капитала k_d представляет собой средневзвешенную ставку по рублевым кредитам.
4. Ставка налога на прибыль t_c в соответствии с действующим законодательством РФ составляет 20%;
5. Доля заемного капитала W_d рассчитана на базе отчетностей 50 российских корпораций, на основе котировок акций которых составлен индекс РТС. В качестве заемного капитала принято значение чистого заемного капитала, представляющего собой сумму краткосрочных и долгосрочных займов предприятия (стр. 510 + стр. 610 бухгалтерского баланса). Причина расчета именно чистого заемного капитала, а не заемного капитала в целом состоит в следующем: в состав заемного капитала организации (раздел 4 и 5 баланса) входят, кроме кредитов и займов, еще и задолженности поставщикам, персоналу, учредителям и другие пассивы, стоимость привлечения которых не равна средневзвешенной ставке привлечения кредитов. Многие обязательства компаний носят постоянный характер (задолженность поставщикам, персоналу и др.). При этом компания не вносит плату за этот капитал, если иное не отражено в договорах между контрагентами (к примеру, плата за нарушения срока платежа по договору с поставщиком). Исключены из общего перечня банки (ОАО Сбербанк России и ОАО Банк ВТБ). Дело в том, что средства, являющиеся для банка привлеченными (заемными), являются депозитными вложениями других предприятий. А выданные кредиты являются активами банков, а не пассивами, как у некредитных организаций. Таким образом,

стоимость привлечения заемного капитала для некредитных организаций есть ставка кредита, а для банка – ставка по депозиту/вкладу. Поэтому при расчете ставки дисконтирования нельзя смешивать данные по кредитным и некредитным организациям.

6. В качестве безрисковой нормы доходности R_f принята доходность 30-ти летних бескупонных облигаций РФ.
7. Общая доходность рынка в целом R_m определена на основе среднемесячных значений доходности индекса РТС за 12 лет.
8. Коэффициент β равен 1, т.к. рассматривается рынок в целом, а не один актив.

Результаты анализа следующие: рассчитаны средние значения ставок дисконтирования предприятий РФ по состоянию на 01.07.08г. и на 01.07.09г.; выявлены изменения структуры и стоимости капитала российских корпораций; оценено воздействие кризисных явлений на стоимость капитала российских компаний.

Стоимость привлечения собственного капитала для российских корпораций по состоянию на 01.07.2008г. и на 01.07.2009г.

Дата	R_f	β	R_m	k_s
01.07.2008г.	7,34%	1	34,62%	34,6%
01.07.2009г.	11,69%	1	20,09%	20,1%

Ставка дисконтирования для российских корпораций по состоянию на 01.07.2008г. и на 01.07.2009г.

Таким образом, ставка дисконтирования до наступления кризиса составляла 28,6%, а спустя год – 18,1%. Как видим, наряду с увеличением рисков на предприятиях и во всей мировой экономике в целом, произошло в большинстве случаев сокращение

Дата	k_d	t_c	W_d	k_s	W_s	r
01.07.2008г.	11,3%	24,0%	23,1%	34,6%	76,9%	28,6%
01.07.2009г.	15,6%	20,0%	26,4%	20,1%	73,6%	18,1%

требуемой нормы доходности на вложенный капитал, т.е. изменилось само соотношение риск-доходность (оно увеличилось). Поэтому инвесторы вынуждены соглашаться на более низкую прибыль в стремлении максимально сократить рост текущего риска относительно его прежнего уровня. С наступлением более благоприятной макроэкономической ситуации для развития бизнеса, величина ставки дисконтирования будет вновь приближаться к докризисному уровню.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ежеквартальные отчеты за 2 кв. 2008г. и 2 кв. 2009г. ОАО АФК Система, ОАО Аэрофлот, ОАО Акрон, ОАО Автоваз, ОАО Башнефть, ОАО Северсталь, ОАО Сибирьтелеком, ОАО ЦентрТелеком, ОАО ФСК ЕЭС, ОАО Газпром, ОАО ГМК Норильский никель, ОАО РусГидро, ОАО ЛУКОЙЛ, ОАО ММК, ОАО Магнит, ОАО Холдинг МРСК, ОАО Мосэнерго, ОАО Мечел, ОАО МТС, ОАО Компания М.видео, ОАО НЛМК, ОАО Новороссийский морской торговый порт, ОАО ВолгаТелеком, ОАО НОВАТЭК, ОАО ОГК-2, ОАО ОГК-3, ОАО ОГК-4, ОАО ОПИН, ОАО Фармстандарт, ОАО Полюс Золото, ОАО Полиметалл, ОАО Распадская, ОАО НК Роснефть, ОАО Ростелеком, ОАО Сбербанк России, ОАО Газпром нефть, ОАО Сильвинит, ОАО Сургутнефтегаз, ОАО Северо-Западный Телеком, ОАО СОЛЛЕРС, ОАО Татнефть им. В. Д. Шашина, ОАО АК Транснефть, ОАО Уфанефтехим, ОАО Уралкалий, ОАО Уралсвязьинформ, ОАО Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ОАО Банк ВТБ, ОАО Вимм-Билль-Данн Продукты Питания.

- [2] Сайт Центрального банка РФ, раздел “Статистика”, www.cbr.ru.
- [3] Федеральный стандарт оценки “Общие понятия оценки, подходы к оценке и требования к проведению оценки (ФСО №1)”.

УДК 541.127

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ПРОБЛЕМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ
ИГРОВОГО ПРИЛОЖЕНИЯ "СУДОКУ"

Яндиминова Е. П. (Нефтекамск, НФ БашГУ)

Введение

Создание компьютерных игр далеко от собственно игры в них: оно требует знания программирования, дизайна, выдумки и творчества. Часто при их программировании возникают проблемы, сложность решения которых на порядок превосходит простоту правил игры. Строгими обоснованиями наилучших алгоритмов решения занимаются крупные математики.

Правила игры "Судoku" следующие. Игровое поле - квадрат размером 9x9, разделённый на меньшие квадраты со стороной в 3 клетки. Изначально в некоторых клетках уже стоят цифры, так как незаполненное игровое поле не имеет смысла, пока не будет задана задача. Цель игры - расставить в свободных клетках, количество которых зависит от сложности задачи, цифры от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом малом квадрате каждая цифра встречалась бы только один раз.

Все существующие на данный момент игровые приложения "Судoku" написанные под персональные компьютеры и мобильные телефоны, предоставляют пользователям лишь ограниченный набор комбинаций игры. Это, во-первых, быстро наскучает любите-

лям головоломки (при частой игре встречаются комбинации, ранее уже решаемые), во-вторых, увеличивает объем занимаемой памяти с увеличением числа хранящихся в приложении начальных задач.

Опытным путем можно убедиться, что не из всех, произвольно расположенных на игровом поле цифр можно получить комбинацию, удовлетворяющую правилам игры. Другими словами, не всякая начальная задача имеет решение.

Таким образом, при построении алгоритмов для игрового приложения "Судоку" возникает проблема: как при каждой новой игре программно генерировать начальную задачу, отличную от предыдущих, имеющую хотя бы одно решение, не пользуясь при этом ограниченным архивом готовых начальных задач. Игровое приложение в результате сможет переноситься одним, небольшим по объему занимаемой памяти, ехе-файлом.

Математическая модель

Для разрешения проблемы построим математическую модель.

Представим игровое поле квадратной матрицей A девятого порядка, элементами которой возьмем цифры из готового решения произвольной задачи, то есть любую комбинацию "Судоку".

Например.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 4 & 9 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 8 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 8 & 7 & 7 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 9 & 8 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 2 & 5 & 8 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Будем преобразовывать эту матрицу следующим образом:

- а) случайно вращать и случайно транспонировать;
- б) случайно переставлять строки и столбцы внутри групп столбцов и строк;
- в) случайно переставлять сами группы столбцов и строк.

Посредством суперпозиции таких преобразований, выполненных произвольное число раз в произвольном порядке, получим большое количество различных комбинаций, по расчетам английского математика Бертхама Фельгенхауэра, равное 6 670 903 752 021 072 936 960.

Понятно, что при перечисленных преобразованиях матрица А продолжает удовлетворять правилам игры.

Например.

1. Матрицу А, взятую ранее, транспонируем.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 4 & 9 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 8 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 8 & 7 & 7 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 9 & 8 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 9 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 2 & 5 & 8 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 9 & 2 & 4 & 1 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 8 & 5 & 4 & 3 & 9 \\ 8 & 9 & 4 & 1 & 3 & 7 & 2 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 \\ 4 & 8 & 2 & 7 & 6 & 9 & 5 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 6 & 3 & 5 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Сделаем перестановки $123 \rightarrow 312$, $123 \rightarrow 321$, $123 \rightarrow 213$ для первой, второй и третьей групп столбцов соответственно.

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 9 & 2 & 4 & 1 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 8 & 5 & 4 & 3 & 9 \\ 8 & 9 & 4 & 1 & 3 & 7 & 2 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 \\ 4 & 8 & 2 & 7 & 6 & 9 & 5 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 6 & 3 & 5 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 & 2 & 9 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 8 & 5 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 1 & 4 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 9 & 6 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 9 & 1 & 8 & 5 & 3 & 4 & 7 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 & 9 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 9 & 8 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Переставим вторую и третью группы строк.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 & 2 & 9 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 8 & 5 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 1 & 4 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 9 & 6 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 9 & 1 & 8 & 5 & 3 & 4 & 7 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 & 9 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 9 & 8 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 & 2 & 9 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 8 & 5 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 8 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 & 9 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 9 & 8 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 3 & 1 & 4 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 9 & 6 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 9 & 1 & 8 & 5 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

В полученной преобразованиями матрице A обнуляем случайные элементы (количество обнуляемых элементов зависит от уров-

ня сложности) и называем ее матрицей В.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 8 & 0 & 7 & 3 & 0 & 6 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 4 & 0 & 7 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 9 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 9 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 1 & 0 & 5 & 3 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, если вернуться к проблеме программирования игрового приложения "Судоку цифры начальной задачи в ячейки игрового поля при каждой новой игре выводятся из матрицы В. Начальная задача при этом имеет хотя бы одно решение, хранящееся как матрица А.

Проблема решена.

УДК 51-78, 510.8, 512.579

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
МУЗЫКАЛЬНЫХ ТОНОВ И РАЗРАБОТКА С ПОМОЩЬЮ
ПРОГРАММЫ MUTAVOR

Tobias Schlemmer (Dresden, TU Dresden)

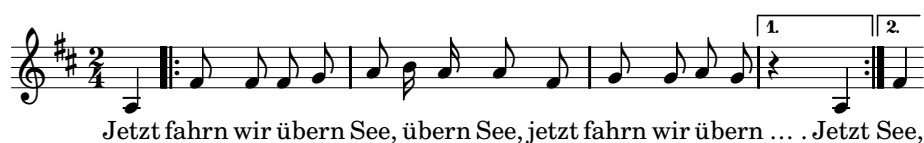


Рис. 1: Строка немецкой песни.

Введение

Одним из элементарных понятий музыкой является тон. Тоны можно рассматривать мерами математики, физики, психологии и других наук. В математической музыкологии существуют несколько теорий о математической структуре музыкальных композиций. RUDOLF WILLE предложил в 80-ых гг. XX века подход к изучению алгебраических свойств множеств тонов и музыкальных интервалов.

Модифицированный подход применяется к программе MUTAVOR, которая одресует старую проблему настройки музыкальных инструментов, возникающую из двух пространств высоты тонов – частоты с линейно распределёнными обертонами и её логарифма – высоты звука.

§ 1. Системы тонов

Определение 1. Рассмотрим множество T , абелеву группу $\mathbb{I} = (I, +, \mathfrak{p})$ и отображение $d : T \times T \rightarrow I$ такое, что для всех $t_1, t_2, t_3 \in T$ выполнены следующие тождества:

$$\delta(t_1, t_2) + \delta(t_2, t_3) = \delta(t_1, t_3) \quad (1)$$

$$\delta(t_1, t_2) = -\delta(t_2, t_1). \quad (2)$$

Триплет $\mathbb{T} = (T, \delta, \mathbb{I})$ называется *структурой тонов*, элементы множества T — *тоны* и элементы множества I — *интервалы*.

Если дополнительно верно условие

$$\delta(t_1, t_2) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } t_1 = t_2, \quad (3)$$

то \mathbb{T} называется *системой тонов*.



Рис. 2: Системы тонов.

Примеры. Рис. 2 показывает систему тонов, которая часто используют в наше время. Числа под нотами можно рассмотреть как иную систему тонов. Такие системы нужны для применения в компьютерных программах.



Рис. 3: Система тонов немецкой песни.

Структуру тонов, которая не является системой тонов, можно увидеть на рис. 1. Она — строка немецкой детской песни. В рис. 3 видна система тонов, возникающая из этой песни.

С такими понятиями можно удобно определить системы тонов и много дополнительных понятий музыкологии.

Рассмотрим в следующем систему тонов $\mathbb{T} = (T, \delta, \mathbb{I})$. Каждое множество $K \subseteq T$ называется *многозвучием*. Для любых двух

тонов $t_1, t_2 \in T$ определяем операцию *транспозиции* тона t_1 в тон t_2 с помощью формулы

$$t_1 + \delta(t_1, t_2) := t_2. \quad (4)$$

Тогда мы говорим, что t_2 является *транспозицией* тона t_1 на *интервал* $\delta(t_1, t_2)$. Такая транспозиция не обязательно существует для любого тона t_1 и любого интервала $\mathbf{i} \in I$. Если для фиксированного интервала $\mathbf{i} \in I$ существует такая транспозиция, то \mathbb{T} называется *\mathbf{i} -транспозицируема*. Если это верно для всех $\mathbf{i} \in I$, то $\mathbf{i} \in I$ называется *транспонируема*.

В музыке часто идентифицируют тоны, интервал между ними является кратым октаве. Определим бинарные отношения Φ_T и Φ_I такие, что

$$\Phi_T = \{(t_1, t_2) \mid \exists n \in \mathbb{Z} : \delta(t_1, t_2) = n\mathfrak{D}\} \text{ и} \quad (5)$$

$$\Phi_I = \{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \mid \exists n \in \mathbb{Z} : \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 + n\mathfrak{D}\}, \quad (6)$$

где \mathfrak{D} — октава, а $n\mathfrak{D} = \mathfrak{D} + \mathfrak{D} + \dots + \mathfrak{D}$ (n раз), если n неотрицательно, или $n\mathfrak{D} = -(|n|\mathfrak{D})$ иначе. Легко показывается, что Φ_T и Φ_I — отношения эквивалентности. Более того, Φ_I является отношением конгруенции по группе \mathbb{I} . Их классы эквивалентности мы назовём *классы тонов* (Φ_T) и *классы интервалов* (Φ_I). Если мы определяем дальше

$$\delta_{\Phi}([t_1]_{\Phi_T}, [t_2]_{\Phi_T}) := [\delta(t_1, t_2)]_{\Phi_I}, \quad (7)$$

то $(T/\Phi_T, \delta_{\Phi}, \mathbb{I}/\Phi_I)$ является системой тонов относительно определения 1. Мы назовем такую систему *система класс тонов*. Любое множество классов тонов называется *гармонией*.

Многозвучия (гармонии) транспонируем на данный интервал (класс интервалов), если мы транспонируем каждый его тонов (её классов тонов). Множество всех транспозиций данной гармонии называется *формой гармонии*.



Рис. 4: 4-звучия $\{-3, 0, 4, 12\}$ (лево) и a -минор-гармонии $\{[0], [4], [9]\}$ (право)

Пример 1. В нижней системе тонов из рис. 2 октава является числом 12. Можно выирать 4-звучие $\{-3, 0, 4, 12\}$ (рис. 4). Музыканты называют это многозвучие „ a минор“. Классы тонов этого многозвучия являются

$$[-3] = -3 + 12 \cdot \mathbb{Z}, \quad [0] = 0 + 12 \cdot \mathbb{Z}, \quad (8)$$

$$[4] = 4 + 12 \cdot \mathbb{Z} \text{ и } [12] = 12 + 12 \cdot \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Очевидно $[0] = [12]$. В музыкальном языке это пишется $[c'] = [c'']$. Следовательно получается a -минор-гармония $\{[0], [4], [9]\}$ (рис. 4). Множество всех минор-гармонии является форма гармонии „минор“ (рис. 5).



Рис. 5: Форма гармонии „минор“

§ 2. Строя

Строй музыкальных инструментов является отображение из одной структуры тонов (исходная система; напр. система нот) в целевую систему тонов. Компьютерная программа MUTAVOR разрешает музыкантам использовать меняемые строя, т. е. строя, которые могут отображать тоны одной и той же высотой в различных моментах времени на различных тонов.

Для имплементации таких меняемых настроек используют специальные логики (напр. рис. 6). Основа таких логиках строя является фундаментальная система тонов, который определяет октаву,

```

LOGIK      TonNetz Taste N = C_Dur
           [ FORM nTerz -> Transpo ( Abstand )
             FORM nDur  -> Transpo ( Abstand )
             FORM nMoll -> Transpo ( Abstand ) ]

INTERVALL  Terz = 5:4           Quint = 3:2           Oktave = 2:1

TON        c = f + quint - oktave   des = as - quint
           d = g + quint - oktave   es  = g  - terz
           e = c + terz
           f = a - terz             fis = d  + terz
           g = c + quint            as  = c  - terz + oktave
           a = 440                  b   = f  - quint + oktave
           h = g + terz

TONSYSTEM  C_dur = 60 [ c,des,d,es,e,f,fis,g,as,a,b,h ] oktave

UMSTIMMUNG Transpo(x) = @ + x [ ]

HARMONIE   nTerz={0,4,*7,*10}   nDur  ={0,*4,7}           nMoll ={0,5,8}

```

Рис. 6: Пример меняемых настроек: Сеть тонов

классы тонов с помощью репрезентантов внутри одной октавы, их порядок и положение этого система на клавиатуре инструмента стандарта MIDI. Можно и определить в каких случаях MUTAVOR перестроит инструменты.

Итак MUTAVOR используется систем для имплицитного определения систем тонов с помощью атомов и правил. Из-за этого мы говорим о логиках строя.

§ 2. Пауза

Для каждой логики важно знать, как она работает. На первый взгляд, MUTAVOR работает как отображение из структуры тонов в систему тонов. Но если хотим точный перевод логики в наши алгебраические структуры, нам необходимо посмотреть на мелочи.

В клавиатуре существуют два класса клавиш: 7 белые и 5 чёрные клавиши (рис. 7). Если кто-нибудь хочет составлять систему тонов с семью тонами в октаве, тогда последовательность клавиш



Рис. 7: Клавиатура

мешает играть, если используют все клавиши (рис. 8 и 9). Для этого язык *Mutabora* разрешает, что несколько клавиши молчат в логике. Но это значит, что в целевой системе тонов существует некоторая пауза. Но пауза пока не существует в теории, о которой мы говорим.

LOGIK

Obertoene Taste 0 = Obertoene []

INTERVALL

i1=1:1 i2=2:1 i3=3:1 i4=4:1 i5=5:1 i6=6:1 i7=7:1
 i8=8:1 i9=9:1 i10=10:1 i11=11:1 i12=12:1 i13=13:1 i14=14:1
 i15=15:1 i16=16:1 i17=17:1 i18=18:1 i19=19:1 i20=20:1 i21=21:1
 i22=22:1 i23=23:1 i24=24:1 i25=25:1 i27=27:1 i28=28:1 i30=30:1

TON

AA=110
 o2=AA+i2 o3=AA+i3 o4=AA+i4 o5=AA+i5 o6=AA+i6 o7=AA+i7
 o8=AA+i8 o9=AA+i9 o10=AA+i10 o11=AA+i11 o12=AA+i12 o13=AA+i13
 o14=AA+i14 o15=AA+i15 o16=AA+i16 o17=AA+i17 o18=AA+i18 o19=AA+i19
 o20=AA+i20 o21=AA+i21 o22=AA+i22 o23=AA+i23 o24=AA+i24 o25=AA+i25
 o27=AA+i27 o28=AA+i28 o30=AA+i30

TONSYSTEM

Obertoene = 60 [AA,,o2,,o3,o4,,o5,,o6,,o7,o8,,o9,,o10,o11,,o12,,
 o13,,o14,o15,,o16,,o17,o18,,o19,,o20,,o21] i1

Рис. 8: Пример настроек с паузами: Строе обертонов

Строка в рис. 1 принадлежит песне, которую поют как игра. Многоточие стоит вместо слова „See“, место которого невозможно оставлять свободно в немецком языке. Итак, немцы всегда думают слово „See“ когда (не) поют эту паузу. И вместе с словом думают также тон. Но кто реально поёт этот тон, тот проигрывает.

Этот пример показывает, что можно рассмотреть паузу как тон без звука. Значит тон с громкостью ≤ 0 фон или $-\infty$ фон. Такие паузы дают композиторам возможность включить в композиции

неожиданные эффекты.

```
Obertoene = 60 [ AA,,o2,,o3,o4,,o5,,o6,,o7,o8,,o9,,o10,o11,,o12,,  
o13,,o14,o15,,o16,,o17,o18,,o19,,o20,,o21 ] i1
```

Рис. 9: Паузы в логике строя: Пустые места („,,“) определяют клавиши, которые молчат

Но в случае MUTABORA это понятие паузы не поможет. У нас нет определения высоты паузы. Другой подход мог бы, вводить паузы как новый тон. Этот подход на много сложнее потому, что надо ввести и дополнительными интервалы. С этим и возникает вопрос о транспонируемости. Известные предложения систем тонов с паузами потеряют либо коммутативность, либо ассоциативность сложения интервалов, либо транзпозицируемость.

§ 3. Заключение

В музыкологии можно найти много примеров и инспирации для математических проблем. Данный метод занимается алгебраическим моделированием музыкальных структур. С другой стороны, несколько из систем тонов можно представить с помощью компьютерного языка MUTAVOR. Хотя в таких системах существует некоторое понятие паузы, его в теории нет.

Итак, дополнительные исследования свойств пауз нужны, чтобы расширить теорию на структуры тонов с паузами и другие понятия музыки. Есть много возможностей расширить как теорию, так и инспирацию теории MUTAVOR.

Остается и анализ русской теории музыки и пересмотр и приспособление перевода названий понятий на русский музыкальный язык. Эта работа нужна и для перевода программы MUTAVOR на русский язык.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *B. Ganter, H. Henkel, R. Wille* MUTAVOR - A Computer-Controlled Musical-Instrument for the Study of Pitches //

- Acustica 57(4-5), 284-289 (1985).
- [2] *W. Neumaier, R. Wille* Extensionale Standardsprache der Musiktheorie: Eine Schnittstelle zwischen Musik und Informatik // Informatik Spektrum (1989)
 - [3] *T. Schlemmer, St. E. Schmidt* A Formal Concept Analysis of Harmonic Forms and Interval Structures // CEUR Workshop Proceedings 433, 9–12 (2009).
 - [4] *J. Th. Winkler* Algebraische Modellierung von Tonsystemen // Beiträge zur begrifflichen Wissensverarbeitung – Verl. Allg. Wiss. – HRW e.K., 2009, ISBN 3-935-924-07-0
 - [5] MUTABOR – компьютерная программа, GPL, <http://www.math.tu-dresden.de/~mutabor/>

УДК 517.946

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТАЛЛОКОМПЛЕКСНОГО КАТАЛИЗА

Тихонова М. В. (Уфа, БашГУ)

Введение

Использование металлокомплексного катализа в тонком органическом синтезе, а также в различных промышленных процессах, в том числе фармацевтических производствах, представляет собой, как говорят, "горячую" область химии, на которой сосредоточено внимание большого числа исследовательских групп как в академических, так и промышленных организациях. Без преувеличения можно сказать, что уже достигнуты грандиозные успехи. Одним из основных достижений является то, что катализ комплексами металлов позволяет ускорять медленно идущие реакции.

Важным объектом исследования являются алюминийорганические соединения (АОС). АОС в сочетании с методами металлокомплексного катализа открывают целый ряд возможностей в органическом синтезе. Поэтому исследование механизмов реакций металлокомплексного катализа является актуальной задачей современной химии.

Существенным инструментом в исследованиях сложных реакций играет раздел науки, называемый химической кинетикой, который занимается изучением химических процессов, их механизмов и закономерностей развития во времени.

Целью данной работы является исследование кинематических моделей металлокомплексного катализа на примере реакции, взятой из работы кандидата химических наук - Печаткиной С. В. [2]

§ 1. Построение кинетической модели

Рассмотрим механизм реакции гидроалюминирования олефинов алкилаланом $HALBu_2^i$, которая представляет собой закрытую систему:

$$\begin{aligned} A_1 + 2A_2 &= \frac{1}{2}A_{16} + A_3 & w_1 &= k_1x_1x_2^2 \\ A_{16} + 2A_2 &= 2A_7 & w_2 &= k_2x_2^2x_{16} \\ \frac{1}{2}A_{16} + 2A_5 &= A_{10} + A_{11} & w_3 &= k_3x_{16}^{1/2}x_5^2 \\ A_{10} + 2A_2 &= A_{11} + \frac{1}{2}A_{16} & w_4 &= k_4x_2^2x_{10}, \end{aligned}$$

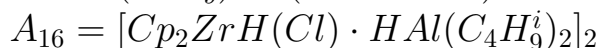
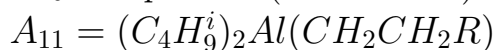
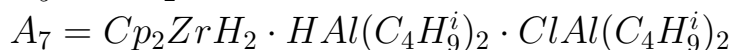
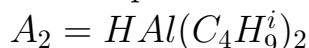
где

w_j - скорость j -й стадии,

x_i - мольная доля i -го компонента (соответствует A_i),

k_j - константа скорости j -й реакции.

В качестве A_i выступают вещества:



Для построения кинетической модели составим стехиометрическую G и молекулярную A матрицы и выпишем систему дифференциальных уравнений для необратимых реакций[1]:

$$\dot{x} = (G^T)^+ \cdot w(x), \tag{1}$$

где

x - вектор столбец концентраций веществ,

G^T) - транспонированная стехиометрическая матрица,

$w(x)$ - вектор столбец скоростей стадий.

То есть учитывается только левая часть химических уравнений, берутся во внимание только положительные коэффициенты стехиометрической матрицы G.

Для данной реакции:

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_5 & A_7 & A_{10} & A_{11} & A_{16} \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} Cp & Zr & Cl & H & Al & C & R \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 18 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 39 & 2 & 16 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 1 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 40 & 2 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

Система ДУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -w_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2w_1 - 2w_2 - 2w_4 \\ \frac{dx_3}{dt} = w_1 \\ \frac{dx_5}{dt} = -2w_3 \\ \frac{dx_7}{dt} = 2w_2 \\ \frac{dx_{10}}{dt} = w_3 - w_4 \\ \frac{dx_{11}}{dt} = w_3 + w_4 \\ \frac{dx_{16}}{dt} = \frac{1}{2}w_1 - w_2 - \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_4 \end{array} \right. \quad (1^*)$$

Необходимо выполнение законов сохранения. Это:

- закон постоянства массы атомов по стадиям:

$$GA = 0, \quad (2)$$

- закон сохранения массы различных атомов:

$$A^T x = X, \quad (3)$$

где X - вектор-столбец количества атомов различных видов .

Для данной реакции:

$$2A_1 + 2A_7 + 2A_{10} + 4A_{16} = const_1$$

$$A_1 + A_7 + A_{10} + 2A_{16} = const_2$$

$$2A_1 + A_3 + A_7 + A_{10} + 2A_{16} = const_3$$

$$19A_2 + 18A_3 + 3A_5 + 39A_7 + 4A_{10} + 22A_{11} + 40A_{16} = const_4$$

$$A_2 + A_3 + 2A_7 + A_{11} + 2A_{16} = const_5$$

$$8A_2 + 8A_3 + 2A_5 + 16A_7 + 2A_{10} + 10A_{11} + 16A_{16} = const_6$$

$$A_5 + A_{10} + A_{11} = const_7$$

§ 2. Построение кинетической кривой методом Рунге-Кутта 4 порядка

В данной работе для получения, распределения технологических параметров во времени и в пространстве (в пределах объекта) был использован метод решения СДУ методом Рунге-Кутта 4 порядка[3] с проверкой на каждом шаге закона сохранения массы различных атомов (3).

Для систему ДУ (1) схема метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности, с учетом того, что правые части уравнений не зависят явно от времени, запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6} \cdot (p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4), & \bar{w}_h &= \{t_n = n \cdot h, n = 0, 1, \dots\} \\ p_1 &= f(x_n), & f(x) &= (G^T)^+ w(x), \\ p_2 &= f(x_n + \frac{h}{2} \cdot p_1), & c_0 &= \text{вектор-столбец концентраций веществ в начальном момент времени} \\ p_3 &= f(x_n + \frac{h}{2} \cdot p_2) & h &= \text{шаг по времени.} \\ p_4 &= f(x_n + \frac{h}{2} \cdot p_3), \\ x_0 &= c_0 \end{aligned}$$

Результат программной реализации этого метода при параметрах $k_1=120$, $k_2=2$, $k_3=1$, $k_4=10$ и начальных условиях $A_1(0)=0.39$, $A_2(0)=0.2$, $A_5(0)=0.41$, $A_3(0)=A_7(0)=A_{11}(0)=A_{16}(0)=0$, $A_{10}(0)=0$ приведен на (рис.1).

Исходя из построенных кинетических кривых, можно сделать

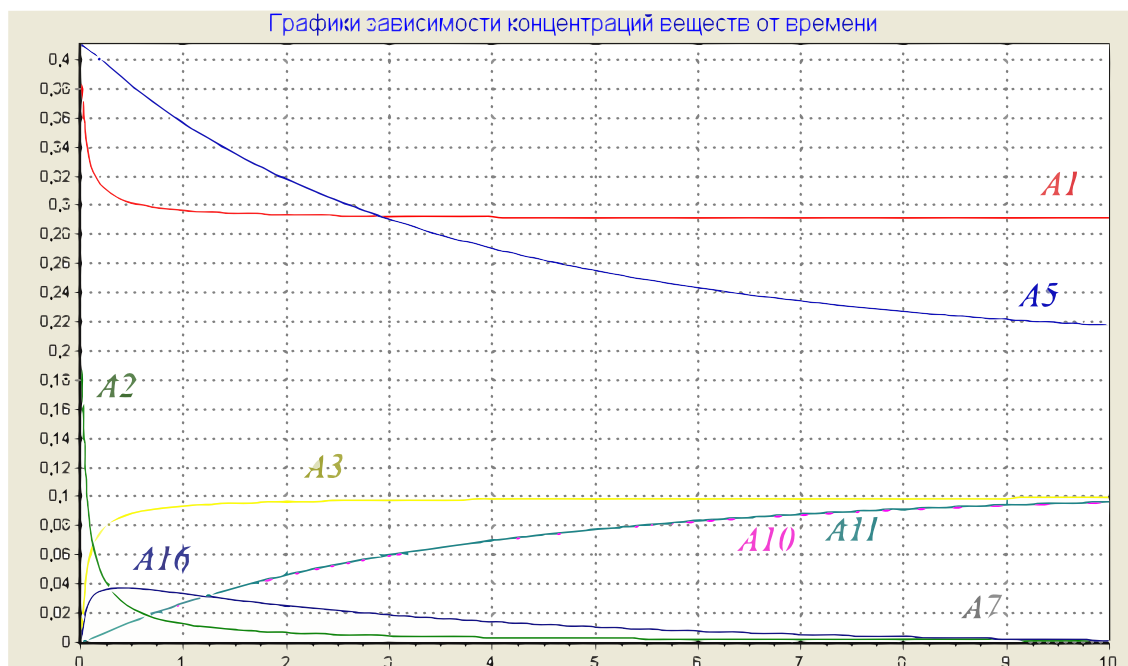


Рис. 1: Кинетические кривые

вывод, что расчет произведен верно, так как соблюдается баланс скоростей химической реакции.

§ 3. Проверка корректности кинетической модели

Из СДУ (1*) видно, что

$$\frac{dx_1}{dt} \leq 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} \leq 0$$

$$\frac{dx_3}{dt} \geq 0$$

$$\frac{dx_5}{dt} \leq 0$$

$$\frac{dx_7}{dt} \geq 0$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} \geq 0$$

$\forall t$

Следовательно, вещества A_1 , A_2 , A_5 являются убывающими функциями, а вещества A_3 , A_7 и A_{11} - возрастающими. Покажем, что построенная кинетическая модель корректна и значения кон-

центраций веществ A_1, A_2, A_5 , а также A_{10} и A_{16} не могут стать меньше нуля. А значения концентраций веществ A_3, A_7 и A_{11} , а также A_{10} и A_{16} не могут принять значения, превышающие единицу.

Области непрерывного изменения времени ставим в соответствие сетку: $\bar{w}_h = \{t_n = n \cdot h, n = 0, 1, \dots\}$

Действительно, если в какой-то момент времени концентрация вещества A_1 обратится в ноль, то есть, если $\exists n : t_n \in \bar{w}_h, x_{1n} = 0$, то по схеме Рунге-Кутты получим:

$$\begin{aligned} f_1(x_{1n}) &= -w_1 = -k_1 x_{1n} x_{2n}^2 = 0 \Rightarrow \\ p_1 &= f_1(x_{1n} = 0), \\ p_2 &= p_3 = p_4 = 0 \Rightarrow \\ x_{1,n+1} &= x_{1n} + \frac{h}{6} \cdot (p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4) = x_{1n} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, при достижении нуля, концентрация вещества A_1 останется равной нулю и отрицательные значения принять не может. Аналогичные рассуждения применяются и к веществам A_2, A_5 , а также A_{10} и A_{16} .

Для A_{10} , если $\exists n : t_n \in \bar{w}_h, x_{10n} = 0$, то

$$f_{10}(x_{10n}) = w_3 - w_4 = k_3 x_{16n}^{1/2} x_{5n}^2 - k_4 x_{2n}^2 x_{10n} = k_3 x_{16n}^{1/2} x_{5n}^2 \geq 0 \Rightarrow$$

концентрация вещества A_{10} останется на нуле или будет возрастать в зависимости от значений концентраций веществ A_{16} и A_5 в данный момент времени.

То, что значения концентраций веществ A_3, A_7 и A_{11} не могут превысить единицу, вытекает из закона сохранения массы различных атомов (3)

Таким образом, в правых частях системы дифференциальных уравнений члены, которые входят со знаком минус, содержат исследуемое вещество, что не позволяет при его нулевой концентрации продолжить веществу уменьшаться, а члены, которые входят в уравнение со знаком плюс, исходного вещества не содержат, что не позволяет при его единичной концентрации продолжить веществу увеличиваться.

§ 4. Исследование концентрации веществ на максимум

Исходя из приведенных выше рассуждений, в кинетической модели, представленной системой уравнений (1*), через экстремум, а точнее через максимум, могут проходить только вещества A_{10} и A_{16} .

Вещества A_1 , A_2 и A_5 на протяжении всего процесса расходуются на образование веществ A_3 , A_7 , A_{10} , A_{11} и A_{16} .

Рассмотрим уравнение для A_{16} из системы (1*):

$$\begin{aligned} \frac{dx_{16}}{dt} &= \frac{1}{2}w_1 - w_2 - \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_4 = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (2k_2x_2^2x_{16} + k_3x_{16}^{1/2}x_5^2 - (k_1x_1x_2^2 + k_4x_2^21_{10})). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$a = 2k_2x_2^2, b = k_3x_5^2, c = (k_1x_1x_2^2 + k_4x_2^21_{10}).$$

Тогда для каждого момента времени:

$$\frac{dx_{16}}{dt} = -\frac{a}{2} \cdot (\sqrt{x_{16}} + \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2+4ac}{8a}, \text{ где } a, b, c \geq 0$$

Рассмотрим достаточное условие существования экстремума:

Пусть $\exists \tilde{t} : \frac{dx_{16}}{dt} = 0 \Rightarrow$ при $a > 0$

$$\sqrt{x_{16}^*} = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < 0, \Rightarrow \sqrt{x_{16}^*} \notin [0, 1],$$

$$\sqrt{x_{16}^{**}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} > 0$$

Исходя из иллюстрации, точка $\sqrt{x_{16}^{**}}$ будет точкой максимума (рис. 2).

Таким образом, можно сформулировать необходимое условие существования экстремума для вещества A_{16} :

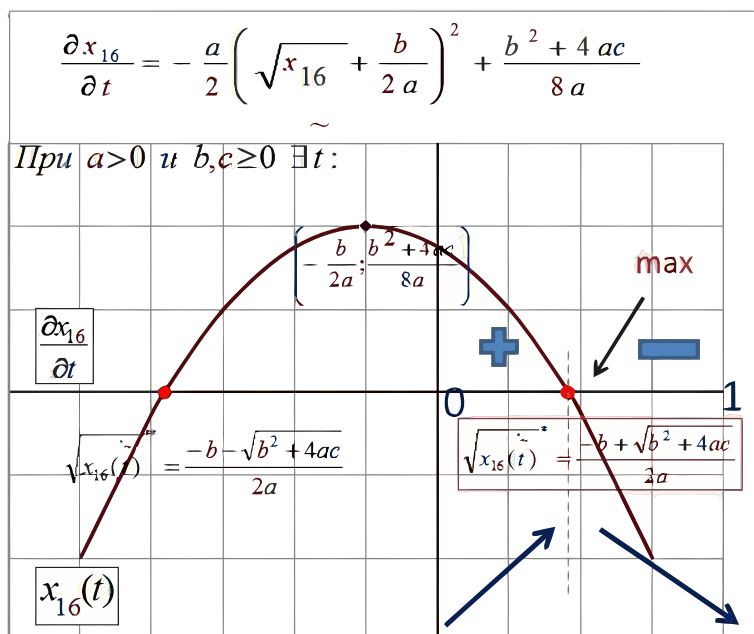


Рис. 2: Достаточное условие максимума

Если функция $x_{16}(t)$ имеет экстремум, то:

1) $\exists \tilde{t} : \sqrt{x_{16}(\tilde{t})} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ и

2) $\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \leq 1$, где

$a = 2k_2x_2^2, b = k_3x_5^2, c = (k_1x_1x_2^2 + k_4x_2^2x_{10})$.

Рассмотрим неравенство $\sqrt{x_{16}} > 1 \Rightarrow x_{16} > 1 \Rightarrow$ Противоречие.

Таким образом, $0 \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \leq 1, \forall t$.

Следовательно, вещество x_{16} всегда имеет экстремум.

На примере проделанного анализа данной реакции обосновалась возможность предвидения каталитического действия и поведения химических продуктов во времени и разработки рациональных принципов управления химическими процессами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Яблонский Г. С., Спивак С. И.* Математические модели химической кинетики. // Изд. "Знание", Москва, 1977
- [2] *Печаткина С. В.* Механизм реакции гидроалюминирования олефинов алкилаланами, катализируемой Cr_2ZrCl_2 . Уфа, 2004
- [3] *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. // Изд. "Наука", Москва, 1989

УДК 534.112

РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

Утяшев И. М. (Уфа, БГУ)

Введение

Иногда возникает необходимость в обнаружении некоторого объекта и момента его появления в определенном месте, а также локализации его местоположения на некоторой линии. В этом случае можно использовать лазеры с определенными датчиками. Однако в некоторых условиях, например, в мутной воде, этот метод оказывается неэффективным. В настоящей работе именно для таких условий предлагается метод обнаружения, основанный на установке струнных растяжек в требуемых местах. Струнные растяжки ставятся вдоль контура, за который не должен проникнуть посторонний объект. При прохождении через контур происходит контакт с растяжкой. Если задачей является обнаружение объекта на данной линии, фиксация времени его появления и точного расположения на линии, то на струне в некоторой точке около места ее закрепления устанавливается датчик, который снимает поперечные смещения струны в любой момент времени. Ниже предлагается метод, который позволяет по показаниям датчика определять время и точное местоположение на одной из линий контура.

§ 1. Постановка задачи

Математическая постановка задачи заключается в следующем. На бесконечной струне в точках $x = \alpha$, $x = \beta$ установлены датчики, которые фиксируют величины $u(\alpha, t)$, $u(\beta, t)$, поперечных

колебаний струны в любой момент времени t . В некоторый момент времени t_0 между точками $x = \alpha$, $x = \beta$ в некоторой точке x_0 происходит касание объекта и струны. Возникает возбуждение струны, которое распространяется в обе стороны. В некоторые моменты t_α , t_β возбуждение достигает точек $x = \alpha$, $x = \beta$. Требуется определить момент времени t_0 возбуждения струны и место x_0 касания объекта и струны по показаниям датчиков $u(\alpha, t)$, $u(\beta, t)$. Данная задача принадлежит к классу обратных ретроспективных задач [1]. Близкие по тематике задачи рассматривались в работах [2,3], где определялись масса и скорость объекта, а также момент времени удара по концу стержня с помощью показаний датчика фиксирующего продольные смещения стержня в одной из его точек. В отличие от данных работ, в настоящей работе рассматривается не стержень конечной длины с одним датчиком, а бесконечная струна с двумя датчиками. Поэтому решение задачи имеет существенное отличие.

§ 2. Решение обратной ретроспективной задачи

Как известно, движение поперечных волн бесконечной струны с известными начальными условиями описывается уравнениями:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (2)$$

а ее решение представляется в виде формулы Даламбера [4-7]:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz; \quad (3)$$

Будем для определенности считать, что начальная скорость равна нулю, тогда слагаемое $\psi(x) = 0$, а начальное отклонение задано в виде равнобедренного треугольника. Такой про-

филь можно получить, если оттянуть струну в середине отрезка $[x_1, x_2]$. На рис.1 даны последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$. Для решения поставленной задачи нам потребуется наглядное представление о характере процесса распространения волны. Его можно получить с помощью фазовой плоскости (x, t) (см. [4]). Проведем характеристики через точки $P(x_1, t)$ и $Q(x_2, t)$; они разобьют полуплоскость $(-\infty < x < +\infty, t \geq 0)$ на шесть областей (см. рис.2). Отклонение $u(x, t)$ дается формулой (3). Поэтому в областях I, III, V отклонение равно нулю. В области II решением является "правая волна" $u = 0,5\varphi(x - at)$, в области IV – "левая волна" $u = 0,5\varphi(x + at)$, а в области VI решение есть сумма "левой" и "правой" волн.

Как мы предположили выше, при касании струны с объектом в точке x_0 начальное отклонение струны имеет вид треугольника с вершиной в точке x_0 (см. рис. 3). Тогда решение записывается в следующем виде [4]:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - x_0 + at) + \varphi(x - x_0 - at)}{2} \quad (4)$$

В момент t_0 волна имела вид $u(x, t) = (\varphi(x - x_0 + at) + \varphi(x - x_0 - at))/2$, затем при $t > 0$ волна разделяется и начинает расходиться (распространяться в 2 стороны).

В момент времени t_α волна достигает точку $\alpha \in (-\infty < x < +\infty)$, а в момент t_β – точку $\beta \in (-\infty < x < +\infty)$. Значит, волна проходит дистанцию $x_0 - \alpha$ за время $t + \alpha - t_0$ и имеет вид $u = \varphi(x - x_0 - at)/2$, а дистанцию $x_0 - \beta$ – за время $t_\beta - t_0$ и имеет вид $u = \varphi(x - x_0 + at)/2$. Из уравнения для времени

$$t = t_0 + S/a,$$

где S – пройденный путь, a – скорость;
получаем систему уравнений для точек α и β :

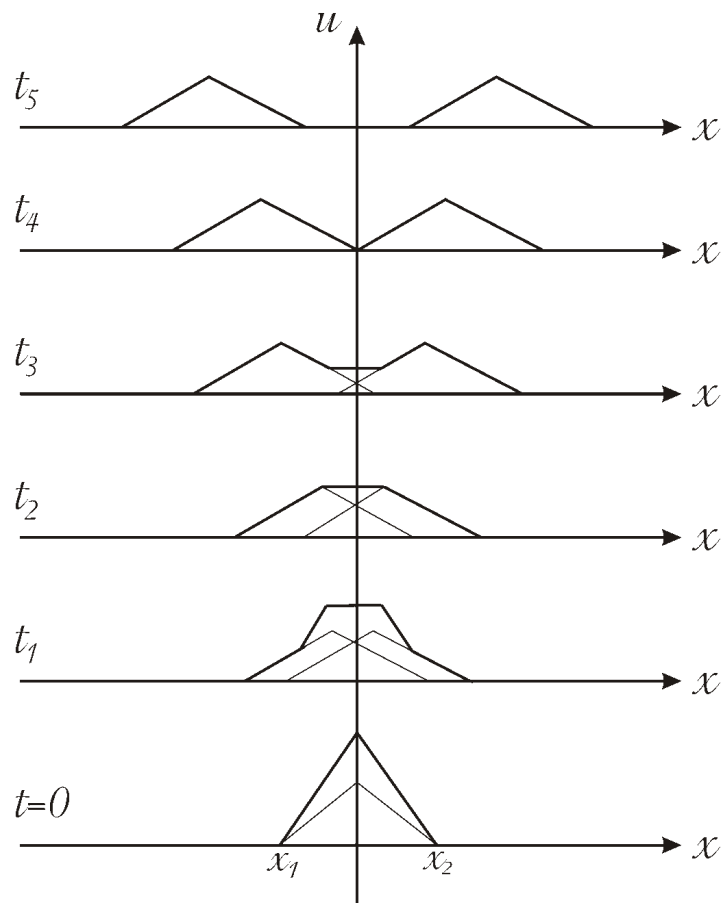


Рис. 1: Положение струны через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$

$$\begin{cases} t_0 = t_\alpha - \frac{x_0 - \alpha}{a}, \\ t_0 = t_\beta - \frac{\beta - x_0}{a} \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$x_0 = \frac{\alpha + \beta - a(t_\beta - t_\alpha)}{2}, \quad \alpha, \beta \in (-\infty, +\infty);$$

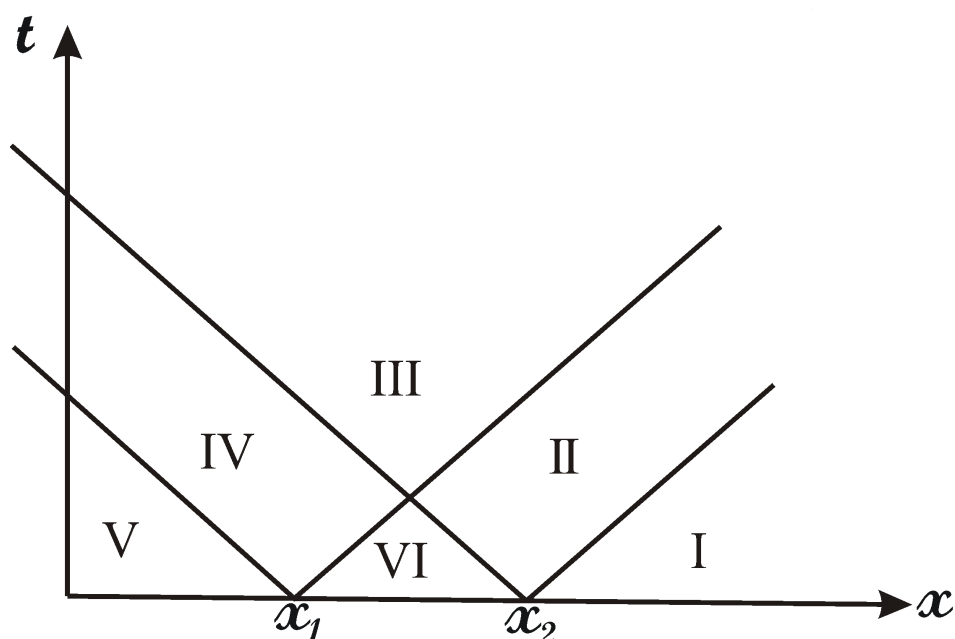


Рис. 2: Фазовая плоскость (x, t)

$$t_0 = \frac{a(t_\alpha + t_\beta) + \alpha - \beta}{2a}, \quad t_\alpha, t_\beta \in (0, +\infty)$$

Последние формулы для x_0 , t_0 и дают искомое решение поставленной выше задачи об определении момента времени и места касания объекта со струной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела М.: Физматлит, 2007. С. 224.
- [2] Ахтямов А. М. Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня //Контроль. Диагностика. 2007. № 11. С. 59-60.

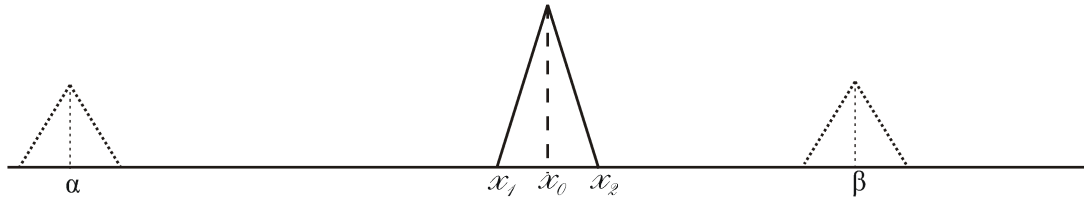


Рис. 3: Отклонение струны в виде треугольника

- [3] *Ахтямов А. М., Муртазина Р. Ф.* Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью показаний тензодатчика //Контроль. Диагностика, 2009. № 1.
- [4] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Москва, 1977. С. 55-58.
- [5] *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. С. 768.
- [6] *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике: учеб. Пособие. 3-е изд. М.: Наука, 1980. С. 151.
- [7] *Болотин В. В.* Колебания линейных систем. Т. 1. М.:Машиностроение, 1978.

СОДЕРЖАНИЕ

ДИНАМИКА ПУЗЫРЬКОВ У СТЕНКИ Аганин А. А., Ильгамов М. А., Малахов В. Г. (Уфа, ИМ УНЦ РАН, Казань, ИММ КНЦ РАН).....	3
ИСТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОПЛА Агишева У. О. (БГУ, Уфа) Галимзянов М. Н. (ИМех УНЦ РАН, Уфа).....	39
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЖИЛОЙ НЕДВИЖИМОСТИ Азнабаев А. М. (Уфа, БашГУ)	46
ОДНОЗНАЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТРУНЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ Ахтямова А.А. (Уфа, БашГУ)	56
О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ Аюпова А. Р. (Нефтекамск, НФ БашГУ)	60
СФЕРА РИМАНА И СФЕРИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ Байгускаров Т. Ю. (Уфа, БГУ).....	67
ДИНАМИКА ПУЗЫРЬКОВ У СТЕНКИ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЫСТРОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВОГО ТОПЛИВА В ГРАНУЛЯРНОЙ НАСЫПКЕ Балапанов Д. М. (Уфа, Институт механики УНЦ РАН).....	73
ИСТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОПЛА С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ Бузина В. А. (БГУ, Уфа) Галимзянов М. Н. (ИМех УНЦ РАН, Уфа).....	83

КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИ-
НЕЙНОСТЬЮ

Бузина Е. А. (Уфа, Институт математики с ВЦ) 90
СОЗДАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОИСКА ПОХОЖИХ ДО-
КУМЕНТОВ

Вильданов А. Н. (Нефтекамск, НФ БашГУ) 193
ДИНАМИКА СЛАБЫХ ВОЛН СЖАТИЯ В ЖИДКОСТИ, СО-
ДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКОВУЮ ЗАВЕСУ

Гадельшин Р. Р., Галимзянов М. Н. (Уфа, БашГУ) . . 101
НАХОЖДЕНИЕ ПОЛИНОМА ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРА-
МЕТРА В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНОГО НУЛЕВОГО СОБСТВЕН-
НОГО ЗНАЧЕНИЯ

Галеева Д. Р. (Уфа, БашГУ) 111
НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГРУН-
ТА ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ПОДВОДНЫХ ТРУБОПРОВО-
ДОВ МЕТОДОМ НАКЛОННО НАПРАВЛЕННОГО БУРЕНИЯ

Гафарова Ю. А. (Уфа, БашГУ) 115
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖ-
ДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гилимшина В. Ф. (Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы) 123
ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Давлетов А.Р. 130
КОЛЕБАНИЯ ПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ПРИ
НАЛИЧИИ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ

Давлетшин А. И., Топорков Д. Ю.
(Казань, ИММ КазНЦ РАН) 136
НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО-
ГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Егорова И. П. (Самара, СГАСУ) 145
РЕШЕНИЕ $(2+1D)$ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА

В ПРИСУТСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ	
Екомасов А. Е. (Уфа, БГУ)	
Муртазин Р. Р. (Уфа, БГУ)	154
ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В АЛЮМИНИЕВОМ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРЕ	
Закиева Г.Н. (Нефтекамский филиал БашГУ, г.Нефтекамск, Россия)	159
О СВЯЗИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ	
Игнатьева Г. А., Ахтямов А. М. (Уфа, БГУ)	166
КОНСТРУКЦИЯ ЦЕЛЫХ "ФУНКЦИЙ ТИПА СИНУСА"	
Исаев К. П., Путинцева А. А., Трунов К. В. (Уфа, БашГУ)	174
НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ЦИЦЕЙКИ	
Искандарова М. Н. (Уфа, УГАТУ)	183
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ ПРИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОМ РАЗВИТИИ С УЧЕТОМ ИНДЕКСА РАЗВИТИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА (ИРЧП)	
Исламов И. Я. (Уфа, БашГУ)	193
БЮДЖЕТ СТУДЕНТА: МОЖНО ЛИ ИМ УПРАВЛЯТЬ?	
Казакова Д. С. (Уфа, БашГУ)	200
ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА	
Костригина О. С. (Уфа, УГАТУ)	209
ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ, ЧАСТИЧНО СОСТОЯЩИМИ ИЗ ИНЕРТНОГО ГАЗА	
Кучер А.М. (ИМиЕН, СГПА им. З.Биишевой, г. Стерлитамак)	
Гималтдинов И.К. (ИМиЕН, СГПА им. З.Биишевой, филиал ГОУ ВПО УГАТУ, г. Стерлитамак)	215

НАХОЖДЕНИЕ ПОЛИНОМА ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В СЛУЧАЕ НЕРАСПАДАЮЩИХСЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ	
Кумушбаев Р.Р. (Уфа, БашГУ)	227
НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ	
Манапова А. Р. (Уфа, БГУ)	231
ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА	
Мартемьянова Н. В. (Самара, ПГСГА)	239
ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА РУМЬЕ	
Михайлов К. А. (Владикавказ, ЮМИ)	247
LONGITUDINAL WAVE SCATTERING ON TUNNEL CYLINDRICAL CAVITIES WITH ELASTIC INCLUSIONS OF SECTOR CROSS-SECTION IN ISOTROPIC MEDIA	
Moiseyenko R. P. (Donetsk National Univ., Ukraine) ...	257
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ПАЕВЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ФОНДОВ ДЛЯ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА	
Морозкин Ю. Н. (Уфа, БашГУ)	264
ОЦЕНКА КРЕДИТНОЙ ИСТОРИИ ЗАЕМЩИКА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ КОРРЕКТИРОВОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЛИЦ	
Морозкин Ю. Н., Хайруллин Б. Ф. (Уфа, БашГУ) ..	272
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОДАТЧИКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ ГРУЗА	
Муртазина Р. Ф. (Уфа, БГУ)	279
ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	

Мухаметова Г. З. (Уфа, УГАТУ)	287
СИСТЕМНАЯ МОДЕЛЬ ГОСУДАРСТВА ПО КОНСТИТУЦИИ РФ	
Нурисламова Л. Ф. (Уфа, БГУ)	297
ВОССТАНОВЛЕНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ДВУМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ	
Орлов А. А. (Уфа, БашГУ)	306
НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ	
Павленко В. А. (Уфа, ИМ ВЦ УНЦ РАН).....	311
КОМПЬЮТЕРНОЕ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ (НА ПРИМЕРЕ ЗДАНИЯ НФ БАШГУ)	
А.В. Пыжьянов, И.А. Шагапов (НФ БашГУ)	321
ВЛИЯНИЕ УПРУГИХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА СПЕКТР ЧАСТОТ ЕЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ	
Сафина Г. Ф. (НФ БашГУ)).....	327
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ЗУБЧАТЫМИ ПЕРЕДАЧАМИ	
Сафина Г. Ф., Зарипов Р. Р. (НФ БашГУ).....	336
PROPAGATION OF NORMAL ELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC WAVEGUIDES OF COMPLEX CROSS SECTION	
Troian R. R. (Donetsk National Univ., Ukraine)	343
ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	
Удалова Г. Ю. (Самара, СГАСУ)	348
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НУЛЕЙ ГОЛОМОФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ В КРУГЕ	
Хабибуллин Ф. Б. (Уфа, БашГУ).....	359
О СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ОБЛАСТИ С МАЛЫМ ОТВЕР-	

СТИЕМ

- Черданцева К. И. (Уфа, БашГУ)..... 377**
О ПРИМЕНЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ НЕФТЕПЕРЕРАБОТКИ И НЕФТЕХИМИИ
- Чикуров А. В., Искакова З.М. (Уфа, УГНТУ)..... 391**
ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ
- Шакуров И. Р., Асадуллин Р. М. (Уфа, БГПУ) 397**
СТАВКА ДИСКОНТИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ РОССИЙСКИХ КОРПОРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ КРИЗИСА
- Ямалетдинова Г. Х. (Уфа, БашГУ) 405**
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ИГРОВОГО ПРИЛОЖЕНИЯ "СУДОКУ"
- Яндимирова Е. П. (НФ БашГУ) 415**
АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МУЗЫКАЛЬНЫХ ТОНОВ И РАЗРАБОТКА С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ MUTAVOR
- Tobias Schlemmer (Dresden, TU Dresden) 420**
КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТАЛЛОКОМПЛЕКСНОГО КАТАЛИЗА
- Тихонова М. В. (Уфа, БашГУ) 428**
РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН
- Утяшев И. М. (Уфа, БашГУ) 438**

Научное издание

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ
И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»,
посвященная 100-летию БашГУ
(1 октября – 6 ноября 2009 года)**

МАТЕМАТИКА. ТОМ 1

Сборник научных статей

Редактор Гамбарова Р. М.
Корректор Николаева А. И.

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 09.11.2009 г. Бумага офсетная.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times. Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 17,1. Уч.-изд. л. 16,36. Тираж 100 экз.
Изд. № 67. Заказ 8. Цена договорная.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г. Уфа, ул. Фрунзе, 32.

Отпечатано: ИП Раянов В. Р., ХТФ БашГУ,
450014, г. Уфа, ул. Мингажева, 100. Тел.: (347)2746828

ДЛЯ ЗАМЕТОК

А ЭТО ДЛЯ ЗАМЕЧАНИЙ