

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и
молодых ученых
«Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании»
Том VI**

Е.Г. Екомасов

**Солитоны модифицированного уравнения
синус-Гордона
*Учебное пособие***

**Уфа
РИЦ БашГУ
2009**

УДК 517.957; 537.611;

ББК 22.334

E45

Учебное пособие издано при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (гос. Контракт №02.741.12.2037), РФФИ (проект №09-01-06820-моб-г), а также при финансовой поддержке БашГУ

Редакционная коллегия:

Д.х.н., проф. Талипов Р.Ф.

Д.ф.-м.н., проф. Вахитов Р.М.

Д.ф.-м.н., проф. Хабибуллин Б.Н.

Е.Г. Екомасов

E45 Солитоны модифицированного уравнения синус–Гордона. Учебное пособие. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. – 94 с.

В пособии исследуется влияние затухания, внешней силы и пространственной модуляции параметров на динамику кинков модифицированного уравнения синус-Гордона и условия возбуждения при этом сильно нелинейных волн (солитонов и бризеров).

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области нелинейных дифференциальных уравнений теоретической и математической физики.

Рецензент доктор физико–математических наук

Бычков И.В.

УДК 517.957; 537.611;

ББК 22.334

© Екомасов Е.Г.,

©БашГУ, 2009 г.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы динамика топологических солитонов (например, кинков) привлекает все большее внимание исследователей [1-4]. Это связано и с тем, что, хотя первоначально солитоны возникли при изучении интегрируемых систем, очень скоро они стали применяться и для неинтегрируемых систем, описывающих много физических приложений [5-7]. Например, солитоны уравнения синус–Гордона (УСГ) в физике твердого тела описывают ДГ в магнетиках, дислокации в кристаллах, флюксоны в Джозефсоновских контактах и переходах и т.п.

Во многих случаях поведение солитонов можно описать в модели точечной частицы, тогда их временная эволюция будет подчиняться простым дифференциальным уравнениям. Однако часто учет влияния возмущений приводит к существенному изменению структуры солитонов, которые уже нужно описывать как деформируемые частицы [1]. Много работ посвящено изучению влияния зависящей от времени неоднородной внешней силы, см. например [8-10]. Однако, не менее интересен и случай пространственной модуляции (неоднородности) параметров самой системы [11-12]. В слабо неоднородном случае можно считать, что наличие возмущений не меняет существенно форму солитонов модифицированного уравнения синус–Гордона (МУСГ), влияя в основном на их динамику [11]. В сильно неоднородном случае форма солитонов МУСГ претерпевает сильное изменение, наблюдается возбуждение внутренних солитонных мод и излучение возбуждений, отрывающихся от солитона в виде свободных волн. Наиболее интересен случай, когда размер кинка и размер, характеризующий неоднородность параметров одного и того же порядка, тогда форма кинка претерпевает сильное изменение при прохождении через неоднородную область [1,13]. Исследование влияния больших возмущений на решение МУСГ, в общем, случае можно проводить только с помощью численных методов [13, 20-24].

ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА

1.1 Решения уравнения синус–Гордона

Уравнение синус - Гордона можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin U = 0 \quad (1.1)$$

Решение (1.1) в виде кинка, или топологического солитона, имеет вид:

$$U_k(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp[-sg(v)(x - vt)] \quad (1.2)$$

где $s = \pm 1$ - топологический заряд кинка. Принято называть $s = +1$ - кинком, а $s = -1$ - антикинком. Параметр v - скорость кинка, причем его значение не должно превышать предельной скорости равной 1. В зависимости от скорости кинка должна меняться и его ширина $g(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Энергию кинка в безразмерных единицах можно записать

как:

$$E_K = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.3)$$

Также было найдено решение уравнения синус-Гордона в виде солитона имеющего в статическом случае вид:

$$U_S(x) = \operatorname{arctg} \left[\frac{a}{ch(xb)} \right] \quad (1.4)$$

где a - высота солитона, b - ширина солитона. Солитон- это структурно устойчивая уединенная волна распространяющаяся в нелинейной среде.

Еще одно решение уравнения синус - Гордона называется бризером или динамическим солитоном. Оно представляет собой пространственно локализованную осциллирующую нелинейную функцию, которая для случая солитона с неподвижным центром тяжести имеет вид:

$$U_B(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \right) \frac{\sin(wt)}{ch(x\sqrt{1-w^2})}}{\left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \right) \frac{\sin(wt)}{ch(x\sqrt{1-w^2})}} \right] \quad (1.5)$$

где W - внутренняя частота колебаний бризера, $U_{\max} = 4 \operatorname{arctg}(\sqrt{1-w^2} / w)$ - амплитуда бризера. Энергия бризера имеет вид :

$$E_B = 16\sqrt{1-w^2} \quad (1.6)$$

При $w \rightarrow 0$, решение «разваливается» на свободный «кинк» и «антикинк». В этом связь динамических двухпараметрических солитонов «бризеров» с однопараметрическими топологическими солитонами «кинками». Двухпараметрические солитоны начинали исследовать гораздо позже из-за их более сложной структуры и трудности учета их вклада. В настоящее время не вызывает сомнений необходимость учета вклада таких солитонов в различные свойства конденсированных сред. Бионы представляют собой наиболее общий вид солитонных возбуждений, включая линейные волны и кинки, как предельный случай. Особенно важна роль двухпараметрических солитонов в кинетике, в частности, при описании процессов, связанных с

возникновением солитонов. В силу топологического характера, кинки могут рождаться только парами, при внешнем воздействии на систему. При этом, неизбежным этапом процесса являются бийонные состояния. Элементарные возбуждения, возникающие под воздействием внешних полей, образуют вначале малоамплитудные бийоны, с ростом амплитуды последних, они преобразуются в связанные состояния кинка и антикинка, образуя при дальнейшем росте энергии, свободные топологические солитоны. Аналогично, при аннигиляции кинки также проходят «бийонную фазу». В общем случае, возбужденные состояния нелинейных конденсированных сред можно описать в терминах газа, содержащего частицы трех сортов: линейные волны, кинки, бийоны, которые взаимодействуют друг с другом и находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Взаимодействие солитонных решений не является простой суперпозицией отдельных решений. Это проявляется в том, что, при прохождении кинков друг через друга, они взаимодействуют между собой, при этом изменяется фаза их движения. Решение, с учетом такого взаимодействия, можно представить в виде:

$$U = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\exp\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right) - \exp\left(\frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}} - \ln(v^2)\right)}{1 + \exp\left(\frac{2x}{\sqrt{1-v^2}}\right)} \right) \quad (1.7)$$

При взаимодействии кинков возникает сдвиг фаз равный:

$$\Delta q = \sqrt{1-v^2} \ln(v^2), \quad (1.8)$$

т.е. при прохождении кинков друг через друга они ускоряются.

В последние годы появились работы [14], посвященные нахождению новых мультисолитонных решений уравнения синус-Гордона. В частности, найдено новое решение в виде взаимодействующих кинка и бризера, или «wobble», имеющее вид:

$$U(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \sin(wt) + \frac{1}{2} e^{\operatorname{er}} \left(e^{-\sqrt{1-w^2}x} + r^2 e^{\sqrt{1-w^2}x} \right)}{ch\left(\sqrt{1-w^2}x\right) + \frac{\sqrt{1-w^2}}{w} r e^{\operatorname{er}} \sin(wt)} \quad (1.9)$$

где $r = \frac{1-e\sqrt{1-w^2}}{1+e\sqrt{1-w^2}}$, W - частота варьируется от -1 до 1, $e = +1$ - кинк и

$e = -1$ - антикинк. Энергия решения типа «wobble» имеет вид:

$$E_{wobble} = 8 \frac{1}{\sqrt{1-v_K^2}} + 16 \frac{\sqrt{1-w^2}}{\sqrt{1-v_B^2}} \quad (1.10)$$

Существуют и двумерные решения [15, 16] для уравнения синус-Гордона вида:

$$U_{tt} - \Delta_{rr} U + \sin U = 0 \quad (1.11)$$

Решение (1.11) искали в виде: $u = a(t)A(r)$, $a(t) = u_m \cos(wt)$, $u_m \approx \sqrt{1-w^2}$,

$A(r)$ есть решение следующего уравнения: $A_{rr}(r) + \frac{2}{r} A_r(r) - (1-w^2)A = 0$.

Полученное решение можно записать в виде:

$$U(r,t) = U_m \frac{A_i(\operatorname{er})}{A_i(0)} \cos(\sqrt{1-e^2}t) \quad (1.12)$$

где $U_m = \sqrt{8e}A_i(0)$, причем $U_m \ll 1$. Это решение имеет название «пульсон» и оно обладает следующими свойствами: амплитуда слабо затухает со временем (т.е. оно является долгоживущим), имеет пространственную симметрию. Графическое представление решения типа пульсон представлено на рис. 1.1.

1.2 Линейная теория возмущений

Простая теория, позволяющая исследовать влияние малых внешних возмущений на поведение солитонов (кинков или антикинков), описываемых УСГ, разработана Фогелем и др. [7,11]. Эта теория основана на разложении малого изменения волновой функции солитона по полной системе собственных функций самосопряженного дифференциального оператора, имеющего среди собственных функций одну функцию, представляющую стационарную волну, распространяющуюся с той же скоростью, что и свободный солитон.

Ниже, изложим основные идеи этого метода. Рассмотрим уравнение МУСГ, содержащее малое возмущение $F(x)$,

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = F(x). \quad (1.13)$$

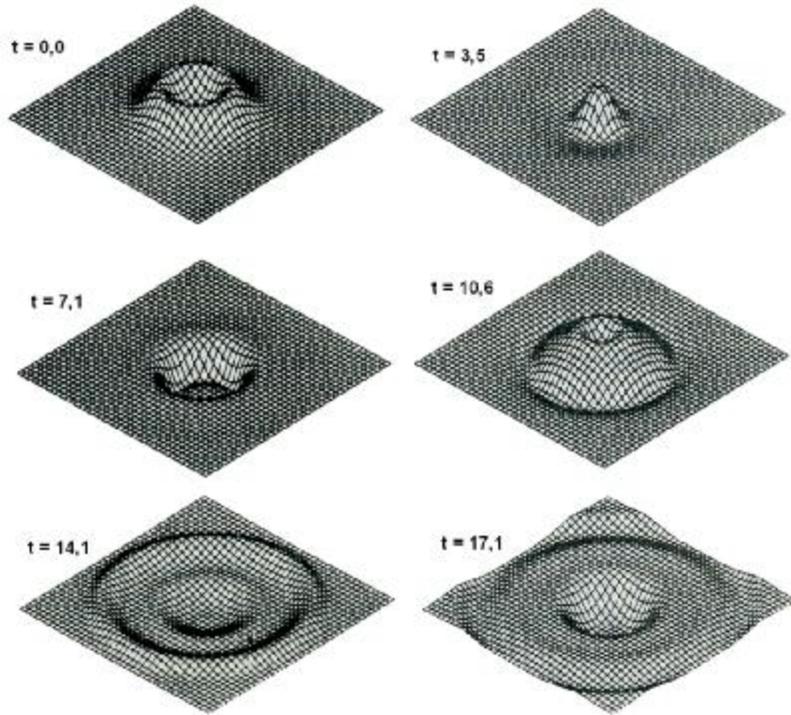


Рис. 1.1. Графическое представление решения (1.11) типа пульсона $f(x, y) = \sin(U)$.

Будем искать решение уравнения (1.13) в виде

$$u(x, t) = j_0(hx) + \Phi(x, t), \quad h = \pm 1, \quad (1.14)$$

где $\Phi(x, t)$ - малая поправка к функции,

$$j_0(hx) = 4 \arctg[\exp(hx)], \quad (1.15)$$

являющаяся решением невозмущенного УСГ. Оно соответствует кинку (при $h = 1$) и антикинку (при $h = -1$), движущимся в системе координат h, t , с постоянной скоростью n .

В равенстве (1.14) введены сокращенные обозначения

$$x = g(x - nt), \quad g = (1 - n^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.16)$$

Подставив (1.14) в уравнение (1.13) и сохраняя члены первого порядка малости, получим уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 - 2sch^2x \right] \Phi(x, t) = F(x). \quad (1.17)$$

Перейдем в систему координат x, t , движущуюся со скоростью n . Будем далее называть ее *системой координат солитона*. Тогда уравнение (1.17) примет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 - 2sch^2x \right] \Phi(x, t) = F[g(x + nt)]. \quad (1.18)$$

Для решения полученного неоднородного уравнения, можно использовать собственные функции и собственные значения уравнения Шредингера

$$Lf_k(x) = \Omega^2(k) f_k(x) \quad (1.19)$$

с самосопряженным оператором

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (1.20)$$

в котором потенциал

$$V(x) = 1 - 2sch^2x \quad (1.20 \text{ a})$$

принадлежит к безотражательному типу.

Собственные значения (1.19) состоят из нулевого дискретного уровня $\Omega_0 = 0$ и непрерывного спектра

$$\Omega_k^2 = 1 + k^2. \quad (1.21)$$

Соответствующие собственные функции определяются выражениями

$$f_0(x) = 2schx, \quad (\Omega_0 = 0), \quad (1.22)$$

$$f_k(x) = \frac{k + ithx}{\sqrt{2p}} \exp(ikx), \quad (\Omega_k). \quad (1.23)$$

Из выражений (1.15) и (1.22) следует равенство

$$hf_0(x) = \frac{d}{dx} j_0(hx). \quad (1.24)$$

Малое смещение координаты x функции (1.15) можно выразить в первом порядке равенством

$$j_0[h(x + a)] = j_0(hx) + haf_0(x). \quad (1.25)$$

Функцию $af_0(x)$ можно рассматривать как оператор смещения координаты солитона x на величину a . Поэтому функцию (1.22) можно назвать *трансляционной модой*.

Собственные функции (1.22) и (1.23) самосопряженного оператора (1.20) удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x)dx = 8, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)f_k(x)dx = 0, \quad (1.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^*(x)f_{k_1}(x)dx = d(k - k_1)$$

и полноты

$$\frac{1}{8}f_0(x)f_0(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)f_k(x_1)dk = d(x - x_1). \quad (1.27)$$

Разложим неизвестную функцию $\Phi(x, t)$ уравнения (1.18) по полной системе базисных функций (1.22) и (1.23)

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{8}y(0, t)f_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(k, t)f_k(x)dk. \quad (1.28)$$

В этом выражении множитель у трансляционной моды $\frac{1}{8}y(0, t)$ описывает движение «центра массы» кинка, а коэффициент $y(k, t)$ определяет изменение его формы. Подставив (1.28) в (1.18) и использовав условия ортогональности (1.26), получим систему уравнений

$$\frac{d^2y(0, t)}{dt^2} = \int_{-\infty}^{\infty} F[g(x+nt)]f_0(x)dx$$

$$\frac{d^2y(k, t)}{dt^2} + \Omega_k^2 y(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F[g(x+nt)]f_k^*(x)dx, \quad (1.29)$$

которая определяет в первом порядке изменение волновой функции солитона под влиянием внешнего возмущения F .

1.3 Пространственная модуляция периодического потенциала

Рассмотрим далее простой частный случай внешних возмущений для МУСГ

$$u_{tt} - u_{xx} + [1 - g(x)]\sin u = 0, \quad (1.30)$$

в котором малая функция $g(x) \ll 1$ учитывает изменение периодического потенциала. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$u(x, t) = j_0(hx) + \Phi(x, t), \quad (1.31)$$

где $j_0(hx)$ - определенное выражением (1.15) решение невозмущенного уравнения; $\Phi(x, t)$ - малая поправка, обусловленная возмущением.

Подставив (1.31) в уравнение (1.30) и сохраняя члены первого порядка малости, получим уравнение в собственной системе солитона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + [1 - sch^2x]\Phi = g(g[x+nt])\sin j_0(hx), \quad (1.32)$$

где

$$\sin j_0(hx) = 2th(hx)/chx. \quad (1.32a)$$

Разложим неизвестную функцию $\Phi(x, t)$ по полной системе функций (1.22) и (1.23)

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{8}y_0(t)f_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(k, t)f_k(x)dk \quad (1.33)$$

Подставив это выражение в уравнение (1.32) и используя ортонормируемость базисных функций, получим систему уравнений

$$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = 4h \int_{-\infty}^{\infty} g(g[x+nt]) \frac{shx}{ch^3x} dx, \quad (1.34)$$

$$\frac{d^2y(k, t)}{dt^2} + \Omega_k^2 y(k, t) = 2h \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(g[x+nt]) \frac{shx}{ch^3x} dx. \quad (1.35)$$

Исследуем решения этих уравнений для простейшего частного случая, когда функция g задана в виде функции:

$$g = aq(x)g(x+nt), \quad (1.36)$$

$q(x)$ - ступенчатая функция,

$$q(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.36a)$$

Подставив (1.36) в (1.34), получаем уравнение

$$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = 2hasch^2(gnt). \quad (1.37)$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии

$$\frac{dy_0(-\infty)}{dt} = 0,$$

находим

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = \frac{2ah}{ng} [1 + th(gnt)]. \quad (1.38)$$

Поскольку величина

$$x_0(t) = y_0(t)/8h \quad (1.38a)$$

характеризует изменение координаты солитона в его координатной системе, то величина

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{a}{4ng} [1 + th(ngt)]. \quad (1.39)$$

При $t = -\infty$ эта скорость совпадает со скоростью свободного солитона. При увеличении t скорость возрастает, если $a < 0$, и убывает, если $a > 0$. При $t = \infty$ скорость солитона принимает значение

$$n_{\text{лаб}}(\infty) = 1 - \frac{a}{2gn^2}. \quad (1.40)$$

Развиваемая здесь теория справедлива только при выполнении неравенства $a \ll 2n^2$.

Поправка к функции (1.23), вносимая функциями непрерывного спектра, получается в результате громоздких вычислений. Она наиболее существенна только при $t = 0$, когда центр солитона проходит через область, в которой g изменяется от нуля до a . Представление об изменении функции солитона можно получить, сравнив решения уравнения при $g = a$

$$j_a(x) = 4 \operatorname{arctg} [\exp(\sqrt{1-ax})] \quad (1.41)$$

и при $g = 0$. Разность этих функций в первом порядке по величине a определяется равенством

$$j_a(x) - j_0(x) = -\frac{ax}{chx}. \quad (1.41 \text{ а})$$

1.4 Движение кинка уравнения синус-Гордона в поле внешних возмущений

Следуя [1] можно привести еще одну простую теорию, позволяющую исследовать влияние малых внешних возмущений на поведение солитонов (кинков или антикинков), описываемых МУСГ. Допустим, что одномерная система, динамика которой подчиняется уравнению синус-Гордона испытывает слабое внешнее воздействие. Обозначим $f(x)$ - плотность действующей силы. Тогда модифицированное уравнение синус-Гордона можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = f(x). \quad (1.42)$$

Сила $f(x)$ предполагается малой ($|f(x)| \ll 1$), что позволяет рассматривать ее как возмущение. Тогда можно считать, что наличие силы $f(x)$ не меняет существенно форму солитона УСГ, влияя в основном на его динамику.

Ограничимся рассмотрением малых скоростей движения солитона ($n^2 \ll 1$) - нерелятивистским приближением. Тогда в силу сказанного, можно искать решение уравнения (1.42) в виде функции $u = u_s(x - q)$, удовлетворяющей граничным условиям для перегиба (кинка):

$$u_s(-\infty) = 2p, \quad u_s(\infty) = 0. \quad (1.43)$$

Параметр этого решения (q -центр солитона) медленно изменяется по мере движения солитона. Скоростью солитона считаем $n = \frac{dq}{dt}$.

Ясно, что скорость n определяет полевой импульс солитона P . По определению, для УСГ имеем

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx, \quad (1.44)$$

поэтому для перегиба

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial u_s}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} \right)^2 dx \equiv n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} \right)^2 d(x - q), \quad (1.45)$$

Чтобы соотношение (1.45) имело вид механического соотношения между количеством движения и его скоростью, необходимо эффективную массу кинка определить формулой

$$m^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1.46)$$

Для вывода уравнения, определяющего изменение импульса P со временем, проще всего поступить следующим образом. Умножим (1.42) на $\frac{\partial u}{\partial x}$ и перегруппируем члены в получившемся соотношении:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (u_t u_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 - 1 + \cos u \right] = -f(x) u_x. \quad (1.47)$$

Затем проинтегрируем (1.47) по всей оси x и воспользуемся определением (1.44), а также граничными условиями на бесконечности:

$$\frac{dP}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (1.48)$$

В главном приближении по малому возмущению в правую часть (1.48) можно подставить $u = u_s(x - q)$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial q}$ и получаем

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial q}, \quad W(q) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u_s(x - q) dx. \quad (1.49)$$

Уравнение (1.49) имеет вид одного из уравнений Гамильтона, в котором $W(q)$ играет роль потенциальной энергии солитона во внешнем поле. Если плотность силы $f(x)$ имеет потенциальное происхождение, то ее можно представить в виде $f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Тогда

$$W(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial x} u_s dx = -2pU(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \frac{\partial u_s(x-q)}{\partial x} dx. \quad (1.50)$$

Первое слагаемое в правой части (1.50) – постоянная величина, которую можно не учитывать при записи потенциальной энергии солитона $W(q)$.

Соотношение (1.49) позволяет обобщить выражение для функции Гамильтона, в случае малых импульсов солитона принимающую вид

$$H(q, p) = E_0 + \frac{p^2}{2m^*} + W(q). \quad (1.51)$$

С помощью (1.51) записывается стандартная пара уравнений Гамильтона:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P}. \quad (1.52)$$

Таким образом, движение центра солитона приобретает форму уравнений движения частицы с массой m^* в потенциальном поле $W(q)$. Характер зависимости эффективного потенциала $W(q)$ от потенциала внешнего поля $U(x)$ определяется соотношением ширины солитона l (при $f(x)=0$ в нашем случае $l=1$) и размера L , характеризующего неоднородность потенциала $U(x)$. Если $l \ll L$, то в правой части (1.50) функция $U(x)$ может быть вынесена из-под знака интеграла и взята в точке $x = q$:

$$W(q) = 2pU(q). \quad (1.53)$$

В обратном предельном случае, когда $l \gg L$, результат зависит от поведения функции $U(x)$. Если она описывает ступеньку высотой $\Delta U = U(\infty) - U(-\infty)$ с центром в точке x_0 , то

$$W(q) = \Delta U u_s(x_0). \quad (1.53 \text{ a})$$

Это тоже ступенька высотой $2p\Delta U$ и шириной $\Delta = l = 1$.

Если $U(x)$ описывает потенциальную яму или потенциальный бугор высотой U_0 , то из соотношения (1.50) вытекает другая оценка:

$$W(q) = -U_0 \frac{\partial u_s(x-q)}{\partial x}, \quad (1.54)$$

есть функция с колоколообразным графиком, высота (глубина) которой $2pU_0$, а ширина по-прежнему определяется шириной солитона $\Delta = l = 1$.

Ясно, что если ширина возбуждения (ширина солитона) l того же порядка величины, что и область изменения эффективной потенциальной энергии $W(q)$, то уравнение (1.52) весьма усреднено описывает динамику солитона. В меру внешнего воздействия (U_0 или ΔU) форма солитона претерпевает изменение при прохождении через сильнонеоднородную область внешнего потенциала, кроме того, следует ожидать излучения возбуждений поля, отрывающихся от солитона в виде свободных волн.

Для описания подобных процессов, главным образом излучения, необходимо дополнительное исследование эффектов, «не ухватываемых» уравнениями (1.52).

Допустим, что уравнение (1.43) заменено следующим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [1 + e(x)] \sin u = 0, \quad (1.55)$$

где, можно считать, функция $e(x)$ ответственна за пространственное изменение нижнего края спектра линейных колебаний.

Полагая возмущение малым ($|e| \ll 1$), учитываем его воздействие на динамику солитона. Повторяя путь, приведший нас к формуле (1.48), получаем

$$\frac{dP}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e(x) \frac{\partial \cos u}{\partial x} dx. \quad (1.56)$$

Выражение (1.56) удобно переписать в виде

$$\frac{dP}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} e(x) \frac{\partial}{\partial x} V(x) dx, \quad (1.57)$$

где $V(x) = 1 - \cos u$. Подставляя в правую часть (1.56) $u = u_s(x-q)$, приходим опять к соотношению типа (1.49):

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial q}, \quad W(q) = - \int_{-\infty}^{\infty} e(x) V_s(x-q) dx. \quad (1.58)$$

Наконец, если в качестве солитонного решения принять $u_s^0(x) = 4 \arctg \exp(-x)$, то

$$V_s(x) = 2sch^2(x - q). \quad (1.59)$$

Таким образом, ситуация повторяется в том смысле, что область локализации неоднородности потенциала $W(q)$ определяется большим из параметров l и L , где L - это расстояние, на котором существенно изменяется функция $e(x)$. Если $l \ll L$, то

$$W(q) = -4e(q), \quad (1.60)$$

если $l \gg L$, то получаем

$$W(q) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} e(x) dx sch^2(-x_0), \quad (1.60 \text{ а})$$

где x_0 - центр локализации функции $e(x)$.

ГЛАВА 2. ЭВОЛЮЦИЯ КИНКОВ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПАРАМЕТРОВ В ВИДЕ СТУПЕНЬКИ

2.1. Основные уравнения и метод решения

Рассмотрим кинки следующего МУСГ:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\tilde{K}}{2} \sin 2q = h \sin q + a \frac{\partial q}{\partial \tilde{t}} \quad (2.1)$$

где q - функция от координаты \tilde{x} и времени \tilde{t} , $\tilde{K} = \tilde{K}(\tilde{x})$ - некоторая функция, характеризующая локальную неоднородность параметров системы, h - параметр характеризующий величину внешней силы, a - параметр характеризующий диссипацию в системе. Заметим, что существуют реальные физические системы соответствующие выбранному уравнению (2.1). Например, доменные границы в реальных ферро- и антиферромагнетиках, движущиеся под действием внешнего магнитного поля [13,17]. Тогда \tilde{K} - имеет физический смысл одноосной магнитной анизотропии и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Функцию \tilde{K} будем моделировать функцией в виде ступеньки высотой или глубиной \tilde{K} :

$$\tilde{K} = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \leq \tilde{x}_0; \\ \tilde{K}, & \tilde{x} > \tilde{x}_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Случай $|1 - \tilde{K}| \ll 1$, $a = h = 0$ рассмотрен ранее аналитически, с помощью теории возмущений для солитонов, в параграфе 1.3. Будем считать в дальнейшем, что \tilde{K} может принимать произвольные значения, как больше, так и меньше единицы. Для случая больших значений \tilde{K} , рассмотренных в данной главе, будем использовать численные методы - метод итераций для явной схемы [13].

Схема проведенного численного эксперимента такова. В начальный момент времени имеется покоящийся кинк, являющийся решением невозмущенного уравнения (2.1):

$$q_0(\tilde{x}) = 2 \arctg(e^{\tilde{x}}), \quad (2.3)$$

граничные условия для которого имеют вид: $q(\pm \infty) = 0, p$. Наличие внешней силы приводит к разгону за некоторое конечное время кинка до стационарной скорости, соответствующей с большой точностью известной формуле [13]:

$$\tilde{v}_{неод} = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}, \quad (2.4)$$

где $c = h/a$. Затем, разогнанный до стационарной скорости кинк, пересекает область неоднородности параметра \tilde{K} и наблюдается его эволюция. Возможно также изучение динамики кинка, движущегося по инерции, с постоянной скоростью в бездиссипативной среде. Все результаты, представленные в данной главе, получены для случаев малой диссипации и внешней силы.

2.2 Выход кинка на стационарную скорость

При наличии затухания $a \neq 0$ и внешней силы $h \neq 0$, скорость кинка при больших временах $\tilde{t} \rightarrow \infty$ должна стремиться к стационарному значению. Включаем внешнюю силу h , постоянной величины, и изучим эволюцию кинка со временем, находя зависимости его координаты центра $\tilde{x}(\tilde{t})$, скорости $\tilde{v}(\tilde{t})$ и ширины $\tilde{d}(\tilde{t})$. Из рис.2.1 видно, что зависимость $x(t)$ при малых значениях \tilde{t} близка к параболической (т.е. $x \approx \frac{at^2}{2}$), а при больших значениях \tilde{t} становится линейной (т.е. $x \approx v_{неод}t$). Заметим, что зависимость $v(t)$ (см. рис. 2.2) хорошо описывается эмпирической формулой:

$$\tilde{v} = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{v_{nped}}\right)^2}}, \quad (2.5)$$

где a – параметр, имеющий физический смысл ускорения и определяемый из численного значения $v(t)$, зависимость от параметра h которой приведена на рис. 2.3 и близкая к линейной. Зная параметр a , подставляя его в уравнение (2.5), можно получить аналитические зависимости скорости кинка от времени (см. рис. 2.4).

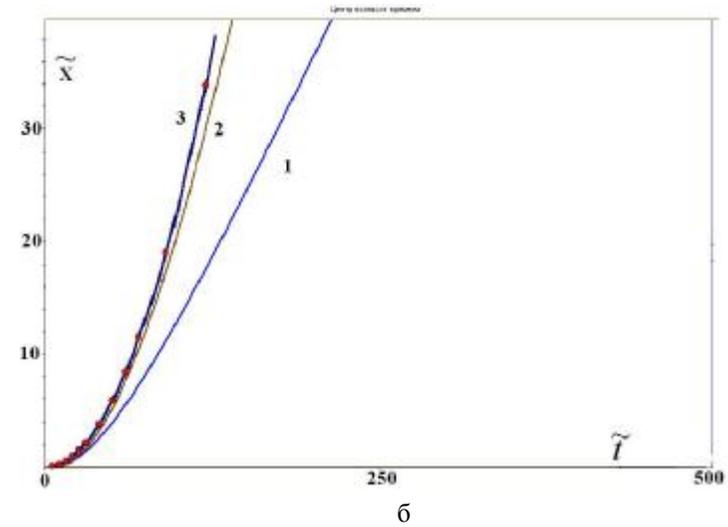
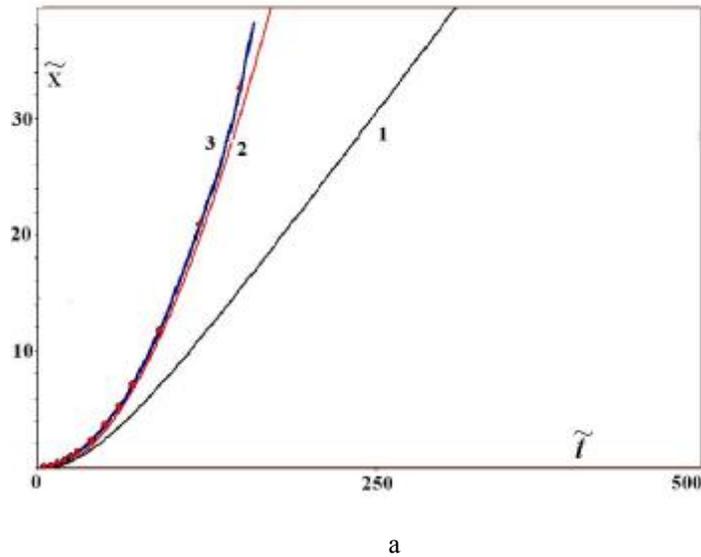


Рис. 2.1. Зависимость координаты центра кинка \tilde{x} от времени \tilde{t} (1 - $a = 2 \cdot 10^{-2}$, 2 - $a = 10^{-2}$, а) - $h = 0.003$ (3 - вычисленная по формуле $x \approx \frac{at^2}{2}$, $a = 0.003$), б) - $h = 0.005$ (3 - вычисленная по формуле $x \approx \frac{at^2}{2}$, $a = 0.0045$).

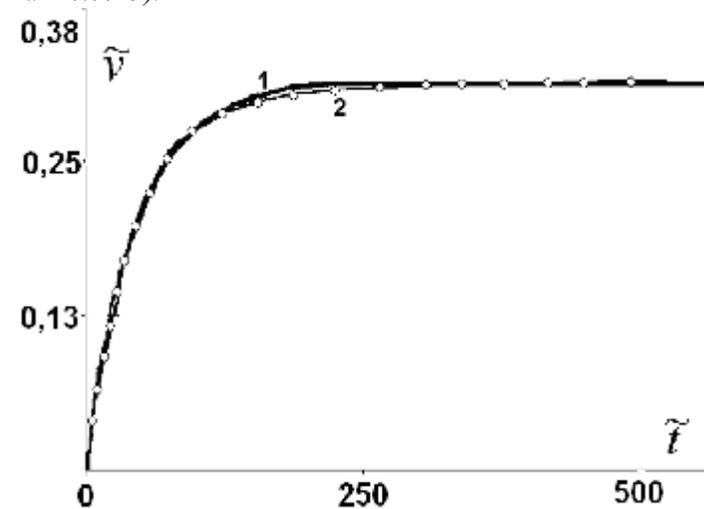


Рис. 2.2. Зависимость скорости \tilde{v} от времени \tilde{t} $h = 0,007$ для $a = 2 \cdot 10^{-2}$ (1 – численная, 2 – аналитическая, вычисленная по формуле (2.5) $a=0.006$).

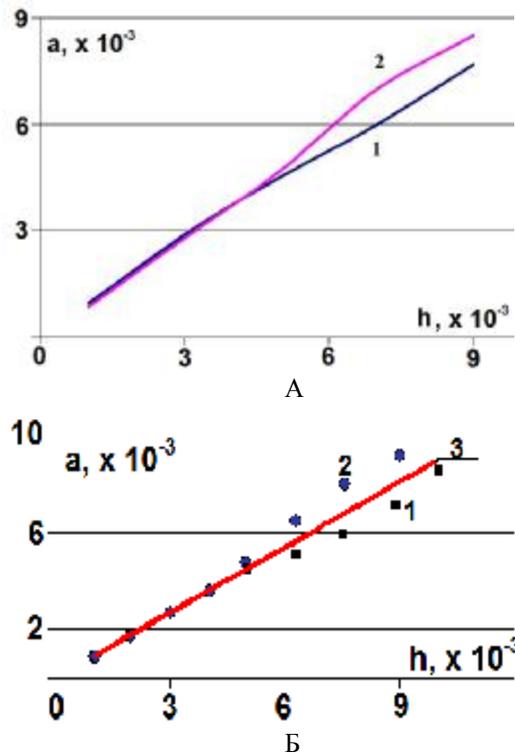


Рис. 2.3. Зависимость параметра a от параметра h : А) - (1 - $a = 2 \cdot 10^{-2}$, 2 - $a = 10^{-2}$), Б) - (1 - $a = 2 \cdot 10^{-2}$, 2 - $a = 10^{-2}$, 3 - аналитическая, вычисленная по формуле $a = Dh$).

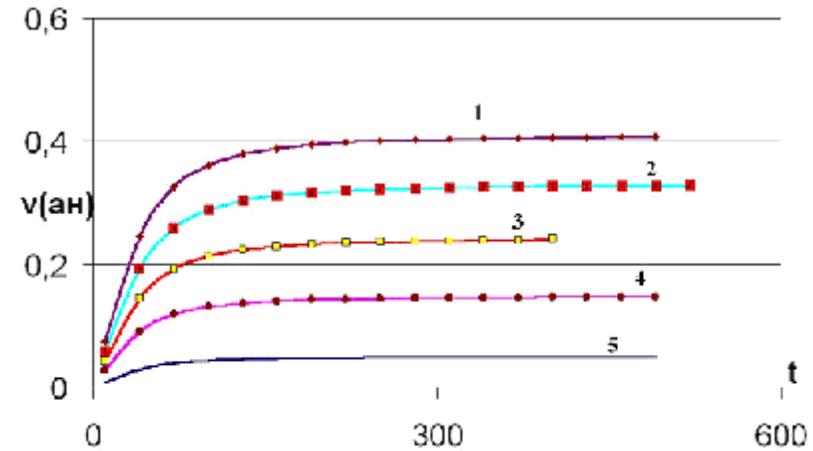


Рис. 2.4. Зависимость аналитической скорости кинка (2.5) от времени (1 - $h = 0,009$, 2 - $h = 0,007$, 3 - $h = 0,005$, 4 - $h = 0,003$, 5 - $h = 0,001$).

2.3 Динамика кинка

Результаты расчетов показывают, что при прохождении кинком области неоднородности параметра \tilde{K} или «дефекта», появляются малоамплитудные волны, распространяющиеся вправо и влево от него. В момент прохождения этой области скорость кинка резко уменьшается или увеличивается, после чего выходит на некоторую другую стационарную скорость (рис. 2.5), соответствующую выражению (2.4) ($\tilde{v}(\tilde{K} = 0.5) = 0.71$, $\tilde{v}(\tilde{K} = 1.5) = 0.49$). Причем, с увеличением начальной скорости наезд на область ступеньки, происходит уменьшение изменения скорости кинка. С увеличением $|1 - \tilde{K}|$, наоборот изменение скорости при прохождении через область ступеньки увеличивается.

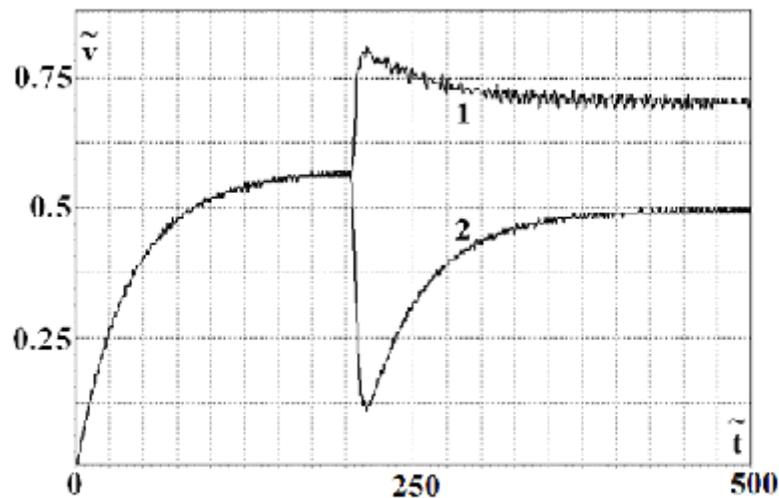


Рис. 2.5. Зависимость скорости центра кинка от времени (1- $\tilde{K} = 0,5$; 2- $\tilde{K} = 1,5$), при прохождении через неоднородную область $a = 10^{-2}$, $h = 0,014$).

На рис. 2.6 представлены зависимости ширины кинка от времени. Аналитическая ширина кинка вычислялась по известной формуле:

$$\tilde{d} = \sqrt{1 - \tilde{v}^2} \quad (2.6)$$

Из них видно, что при стационарном движении до области дефекта численная и вычисленная аналитически d совпадают, однако после преодоления границы этой области различие между ними становится существенным. Это связано с изменением не только скорости движения, но и с изменением структуры кинка. Наличие колебаний ширины кинка после преодоления области дефекта указывает на возбуждение внутренних мод колебаний, которые можно отнести к пульсационной или “internal shape mode” в терминах современной теории неинтегрируемого модифицированного уравнения синус - Гордона [10].

При сравнении рис.2.6 а и 2.6 б видно, что в случае $\tilde{K} = 0.5$ амплитуда пульсационной моды колебаний больше, а частота меньше, по сравнению со случаем $\tilde{K} = 1.5$. Так же стоит отметить, что при

прохождении через область дефекта, в выражении (2.6) $d_0(\tilde{K} \neq 1)$, вообще говоря, отличается от $d_0(\tilde{K} = 1)$. Данный факт нами не учитывался при построении кривой 2 рис. 2.6.

Так же рассмотрено прохождение кинка через область дефекта по инерции. В данном случае, схема численного эксперимента следующая: когда кинк разогнался до стационарной скорости, отключалась внешняя сила, а затухание занулялось, после чего, спустя время $\Delta \tilde{t} = 20$, на значительном расстоянии от него появлялась область дефекта. Из сравнения полученных результатов можно сделать вывод о том, что существует качественное отличие от случая, когда присутствует внешняя сила и затухание. Для случая $\tilde{K} = 0.5$ можно утверждать, что, при наличии затухания и внешней силы, имеется локальный максимум скорости центра кинка в момент прохождения области локализации ступеньки $\tilde{v} = 0.83$, после чего скорость уменьшается, и выходит на стационарное значение. В случае же движения кинка по инерции, в момент прохождения области дефекта, скорость центра кинка быстро увеличивается и больше не меняется из-за отсутствия затухания. Для случая $\tilde{K} = 1.5$ наблюдается такая же картина, только теперь после прохождения области дефекта скорость кинка уменьшается. Отметим так же, что при движении кинка по инерции после прохождения неоднородной области скорости движения центра кинка принимают значения $\tilde{v}(\tilde{K} = 0.5) = 0.83$ и $\tilde{v}(\tilde{K} = 1.5) = 0.22$ близкие значениям, определяемыми аналитической формулой

$$\tilde{v}_{\text{после}} = \tilde{v}_{\text{до}} - \frac{1}{2}(\tilde{K} - 1) \left(\frac{1}{\tilde{v}_{\text{до}}} - \tilde{v}_{\text{до}} \right), \quad (2.7)$$

найденной в [11] с помощью теории возмущения.

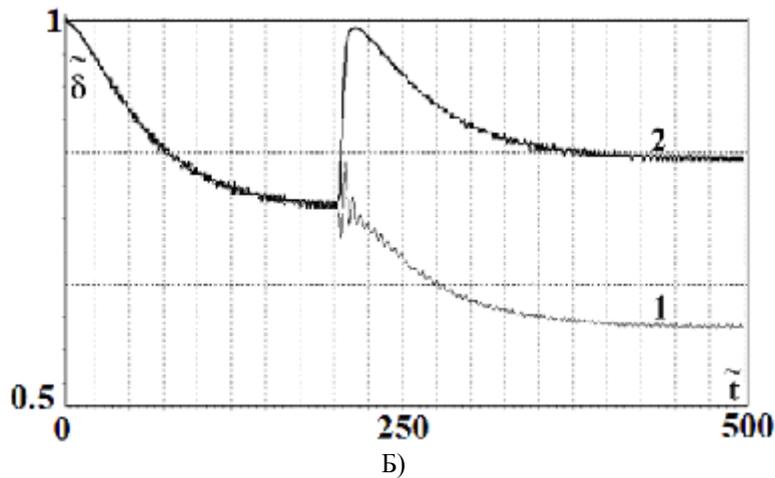
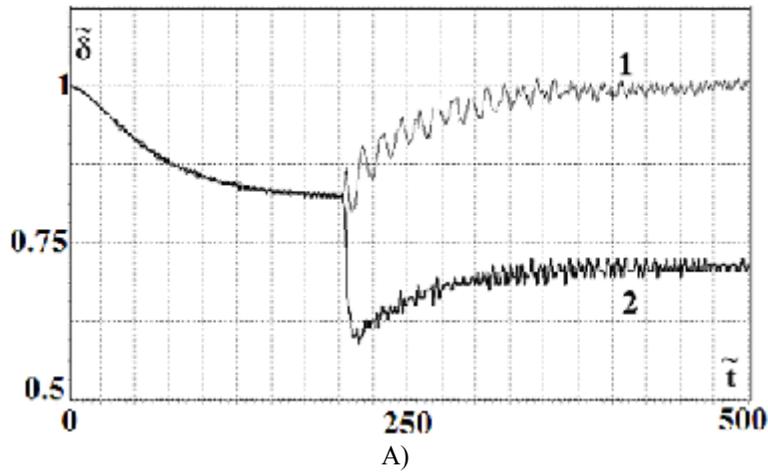


Рис. 2.6. Зависимость ширины \tilde{d} кинка от времени, найденная 1-численно; 2- по аналитической формуле (2.6), при прохождении через неоднородную область ($a = 10^{-2}$, $h = 0,014$); А)– $\tilde{K} = 0.5$, Б)– $\tilde{K} = 1.5$.

В рассматриваемом случае для $\tilde{K} > 1$ существует минимальная скорость \tilde{v}_{\min} , необходимая для преодоления области ступеньки. Чисто физически, это связано с тем, что при преодолении «барьера», часть кинетической энергии кинка, должна пойти на увеличение потенциальной энергии в связи с изменением значений параметров. Была вычислена эта

минимальная скорость для случаев движения, при наличии внешней силы и по инерции (рис. 2.7), и проведено сравнение с аналитическим выражением [11], справедливым для случая малых значений ($\tilde{K} - 1$):

$$\tilde{v}_{\min} = \sqrt{\frac{\tilde{K} - 1}{2}}. \quad (2.8)$$

Из рис.2.7 видно, что скорости (кривые 1 и 2), необходимые для преодоления области «барьера» в обоих случаях отличаются незначительно, что указывает на слабую зависимость от внешней силы и затухания в нашем случае.

Если в случае $\tilde{v} < \tilde{v}_{\min}$ $\tilde{K} > 1$, при движении кинка по инерции происходит его упругое отражение от области ступеньки, в результате чего он просто меняет направление движения на противоположное, то при $h \neq 0$, $a \neq 0$ возможен случай затухающих колебаний в области дефекта (или «пиннинг» кинка). При этом, наблюдается еще и излучение, в виде малоамплитудных волн.

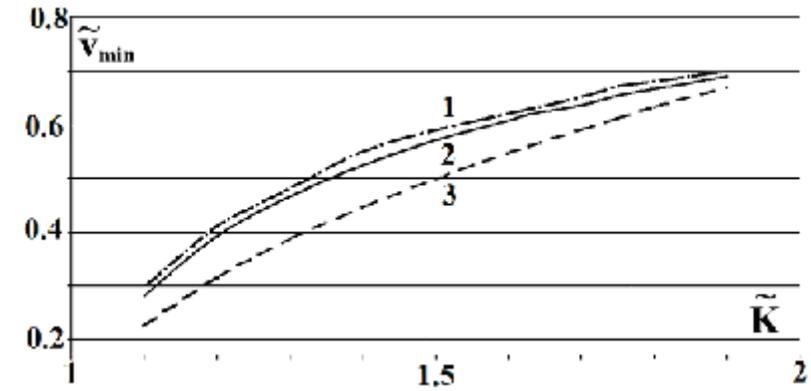


Рис. 2.7. Зависимость минимальной скорости кинка - \tilde{v}_{\min} , необходимой для преодоления неоднородной области от параметра \tilde{K} (1-численная, движение по инерции, 2-численная при $h \neq 0$, 3-аналитическая найдена по формуле (2.8)).

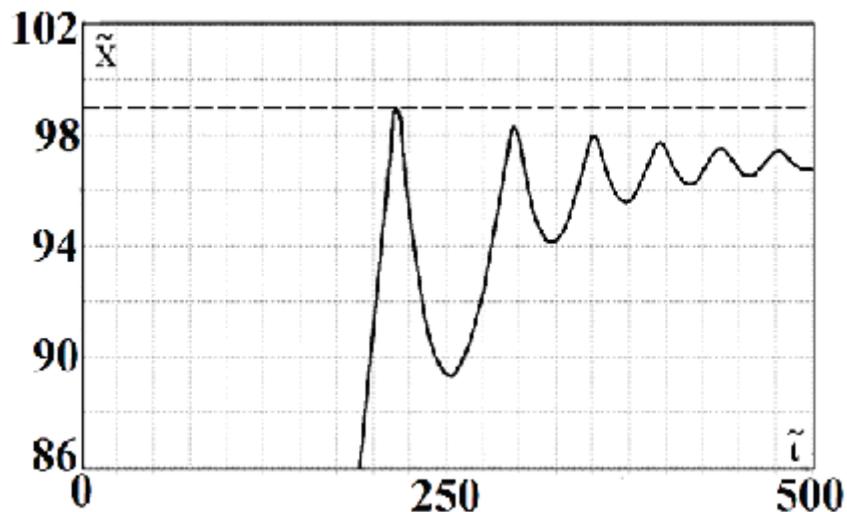


Рис. 2.8. Зависимость координаты центра кинка \tilde{x} от времени при его пиннинге вблизи области дефекта (--- граница неоднородной области, $\tilde{K} = 2$, $a = 10^{-2}$, $h = 0,014$).

Из зависимости координаты и скорости центра кинка от времени для рассмотренных случаев получено, что центр кинка достигает границы области дефекта лишь в начальный момент времени, последующие же колебания происходят вблизи этой области (рис. 2.8). Наблюдаемые колебания можно считать близкими к гармоническим лишь спустя некоторое время ($\Delta\tilde{t} \sim 200$). На рис. 2.9 приведена зависимость частоты трансляционной моды колебаний кинка $\tilde{\omega}_1$ от величины \tilde{K} , вычисленная из зависимости $\tilde{x}(\tilde{t})$. Из рис. 2.9 видно, что, во-первых, на начальном участке зависимость близка к $\omega_1(\tilde{K}) \sim \tilde{K}^{1/2}$, во-вторых, с увеличением \tilde{K} частота колебаний увеличивается и стремится к стационарному значению. После остановки наблюдаются кинки со структурой «подстроенной» под область неоднородности \tilde{K} .

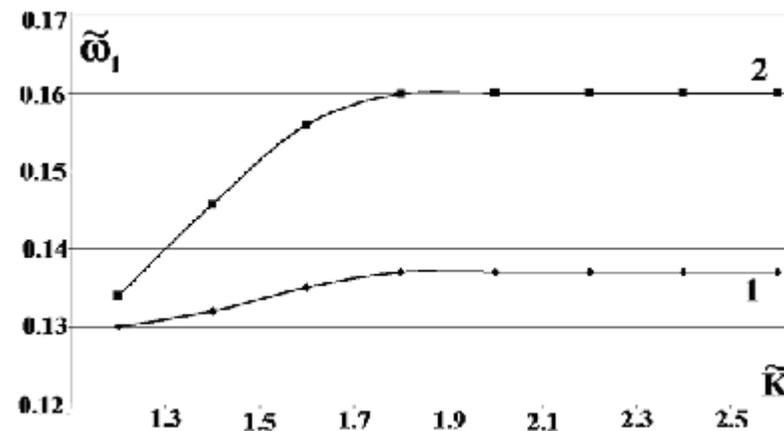


Рис. 2.9. Зависимость частоты трансляционной моды колебаний кинка от величины \tilde{K} . (1- $h = 0.01$, $a = 10^{-2}$, 2- $h = 0.014$, $a = 10^{-2}$).

ГЛАВА 3. ЭВОЛЮЦИЯ КИНКОВ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПАРАМЕТРОВ В ВИДЕ БАРЬЕРА ИЛИ ЯМЫ

В данной главе уравнение (2.1) решаем для случая, когда \tilde{K} будем моделировать простой функцией в виде прямоугольной или треугольной ямы (или барьера), глубиной (или высотой) \tilde{K} и шириной \tilde{W} . Случай $|1 - \tilde{K}| \ll 1$, $a = h = 0$ рассмотрен ранее с помощью теории возмущений для солитонов в работе [12]. Будем считать в дальнейшем, что \tilde{K} может принимать произвольные значения, как больше, так и меньше единицы. Для случая больших изменений \tilde{K} , рассмотренных в данной главе, будем использовать численный метод, описанный в предыдущей главе. Рассмотрим в дальнейшем два возможных случая. Первый случай – кинк находится вдали от области неоднородности. Затем, разогнанный до стационарной скорости кинк, пересекает область неоднородности параметра \tilde{K} и наблюдается его эволюция. Возможно также для сравнения изучение динамики кинка, движущегося по инерции с постоянной скоростью в бездиссипативной среде. Второй возможный случай – кинк в начальный момент времени расположен в центре области неоднородности. Все

результаты, представленные в данной главе, проводились для случая малой диссипации.

3.1 Динамика кинка

В результате численных расчетов найдены искомые зависимости $q(x,t)$ для различных значений H_z , параметров и формы дефекта. Вычислена минимальная скорость \tilde{v}_{\min} , необходимая для преодоления области дефекта. Ее зависимость от нормированной глубины прямоугольного и треугольного дефектов \tilde{K} , для различных ее ширин \tilde{W} приведена на рис.3.1, где $\tilde{v}_{\min} = v_{\min} / c$. Из них видно, что области дефекта типа барьера ($\tilde{K} > 1$) и ямы ($\tilde{K} < 1$) существенно несимметричны, так что \tilde{v}_{\min} при одинаковых размерах дефекта, в первом случае больше, чем во втором. Такое поведение становится понятным, если рассмотреть зависимость скорости кинка от времени (рис.3.2). При преодолении области дефекта типа ямы, в начальный момент скорость кинка увеличивается, увеличивая и кинетическую энергию кинка, облегчая преодоление “дефекта”. В другом случае, при подходе к дефекту типа барьер, скорость кинка вначале наоборот уменьшается.

В работе [12] для дефекта прямоугольной формы в виде барьера, с помощью теории возмущений была получена аналитическая зависимость \tilde{v}_{\min} от \tilde{K} и \tilde{W}

$$v_{\min}^2 = (K - 1) \tanh(\tilde{W}) \quad (3.1)$$

Численный результат для случая малых значений параметров дефекта (например, для кривой 1 рис.3.1а $\tilde{K} \leq 1.5$) хорошо совпадает с аналитическим. Заметное уменьшение значений \tilde{v}_{\min} , по сравнению с аналитическими, для больших значений \tilde{K} и \tilde{W} можно объяснить более точным учетом, в нашем случае, изменения структуры кинка из-за взаимодействия с дефектом. Интересно также, что сравнение результатов численных расчетов для случая барьера с величиной \tilde{v}_{\min} , получаемого из равенства кинетической энергии кинка и ее потенциальной энергии взаимодействия с дефектом, дают так же хорошее совпадение для случая малых значений параметров дефекта (например, если взять $\tilde{K} = 1.5$, $\tilde{W} = 0.5$, тогда из рис. 3.1а $\tilde{v}_{\min} \cong 0.351$, а аналитическая формула дает $v_{\min} \cong 0,354$). В предельном случае $\tilde{W} \rightarrow \infty$, теория возмущений дает простое выражение $\tilde{v}_{\min} \cong \sqrt{\Delta K}$, что также находится в хорошем согласии с численными результатами.

Была так же найдена зависимость \tilde{v}_{\min} от площади дефекта \tilde{S} для прямоугольной и треугольной формы. На рис. 3.3 приведена зависимость $\tilde{v}_{\min}(\tilde{S})$ для дефекта типа ямы. Видно, что \tilde{v}_{\min} в обоих случаях не сильно отличаются друг от друга. То есть, можно предположить, что сильное влияние на \tilde{v}_{\min} оказывает не столько форма, сколько площадь дефекта. Заметим также, что для малых дефектов, значение \tilde{v}_{\min} близко к аналитическому $\tilde{v}_{\min} = \sqrt{\frac{\tilde{S}}{2}}$.

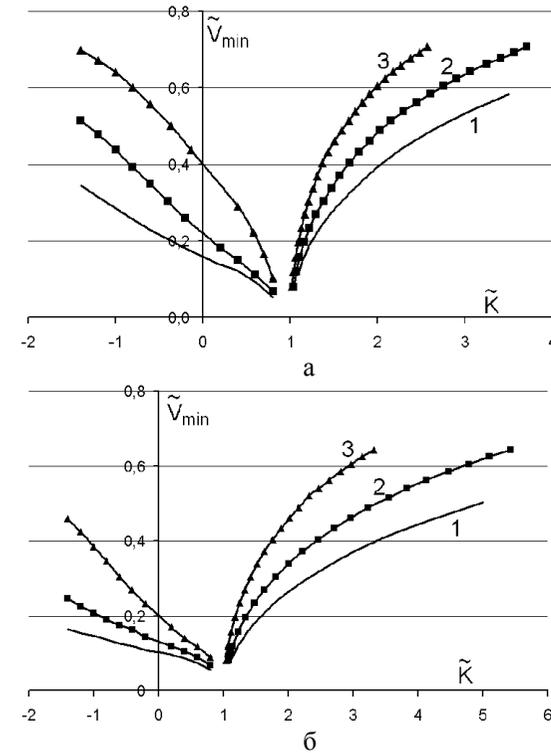


Рис 3.1. Зависимость минимальной скорости \tilde{v}_{\min} от параметра \tilde{K} . а) - Случай дефекта прямоугольной формы (1- $\tilde{W} = 0.3$, 2- $\tilde{W} = 0.5$, 3- $\tilde{W} = 1$), б) - Случай дефекта треугольной формы (1- $\tilde{W} = 0.3$, 2- $\tilde{W} = 0.5$, 3- $\tilde{W} = 1$).

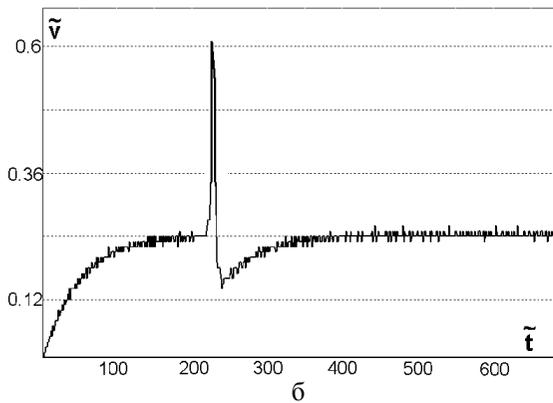
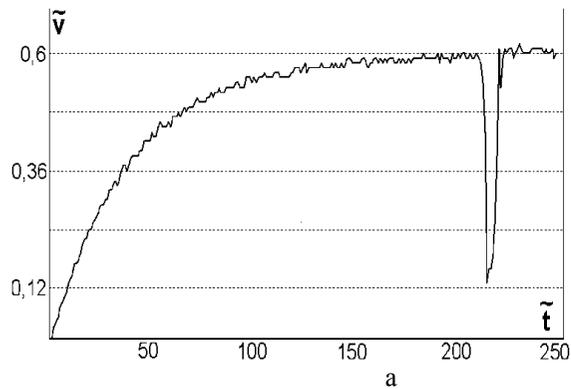


Рис.3.2. Зависимость скорости \tilde{v} от времени, в случае дефекта прямоугольной формы.

а)- Случай дефекта типа барьер ($\tilde{W} = 1, \tilde{K} = 2$),

б)- Случай дефекта типа яма ($\tilde{W} = 1, \tilde{K} = 0,5$).

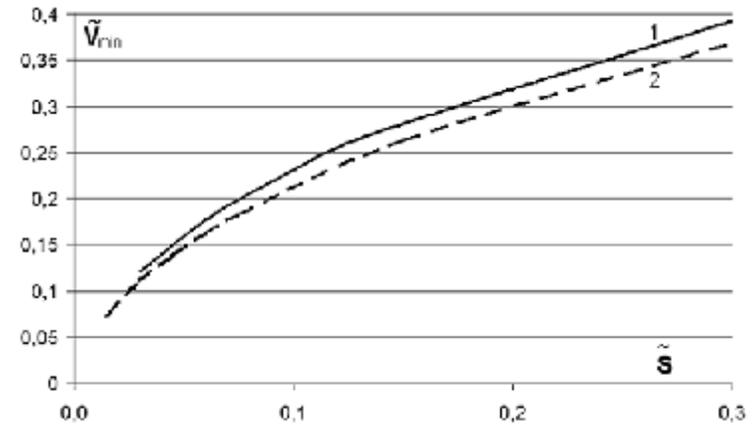


Рис.3.3. Зависимость минимальной скорости прохождения кинка через дефект \tilde{v}_{\min} от площади \tilde{S} . 1-прямоугольная форма, 2-треугольная форма.

3.2 Пининг кинка

Рассмотрим изменение структуры кинка, для случая $\tilde{V} < \tilde{V}_{\min}$, когда он не может преодолеть область неоднородности параметров, в результате чего имеет место пининг (захват) кинка в этой области. Вначале рассмотрим динамику пининга кинка в области неоднородности параметра \tilde{K} типа барьер, высотой $\tilde{K} = 2$ и шириной $\tilde{W} = 1$, при значении внешней силы $h = 0,014$. На рис. 3.4 приведена зависимость ширины и координаты его центра от времени. Заметим также, что предельным случаем барьера с бесконечной шириной, является ступенька. Сравнивая полученные результаты с результатами, полученными для случая неоднородности параметров типа ступенька [11], можно сделать вывод о том, что динамика захвата, вблизи области типа барьер и ступенька, отличается незначительно, и качественные отличия в изменении структуры кинка отсутствуют.

Рассмотрим теперь пининг кинка в области неоднородности параметра \tilde{K} типа яма. Для примера, возьмем случай с $\tilde{K} = -1,5, \tilde{W} = 1$. Внешнюю силу возьмем по величине равную рассмотренному выше случаю $h = 0,014$. Пининг, в области потенциальной ямы, существенно отличается от рассмотренного выше случая барьера. Теперь наблюдается сильное изменение структуры кинка, а излучаемые волны уже нельзя назвать

малоамплитудными. Также, в данном случае, возникает проблема вырождения точки центра кинка. Это существенно осложняет вычисление таких величин как положение центра, скорость и ширина кинка. Для решения данной проблемы было использовано введение понятия центра массы, т.е. значение q , соответствующее среднему арифметическому узлов, лежащих в пределах $(0+p/10; p-p/10)$. Так, на рис. 3.5 представлены зависимость положения центра масс и ширины кинка от времени. Из рисунка видно, что помимо трансляционной моды колебаний кинка имеет место и пульсационная мода.

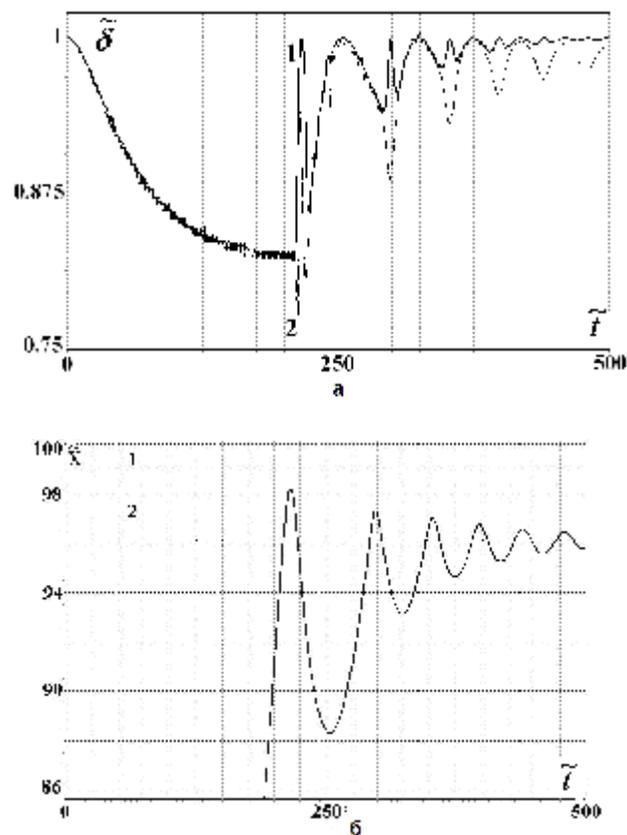


Рис. 3.4. Зависимость от времени (а)- ширины (1- аналитическая; 2-численная) и (б)- координаты центра кинка (1-2- граница области неоднородности параметра \tilde{K}) при пининге в области неоднородности параметра \tilde{K} типа барьер.

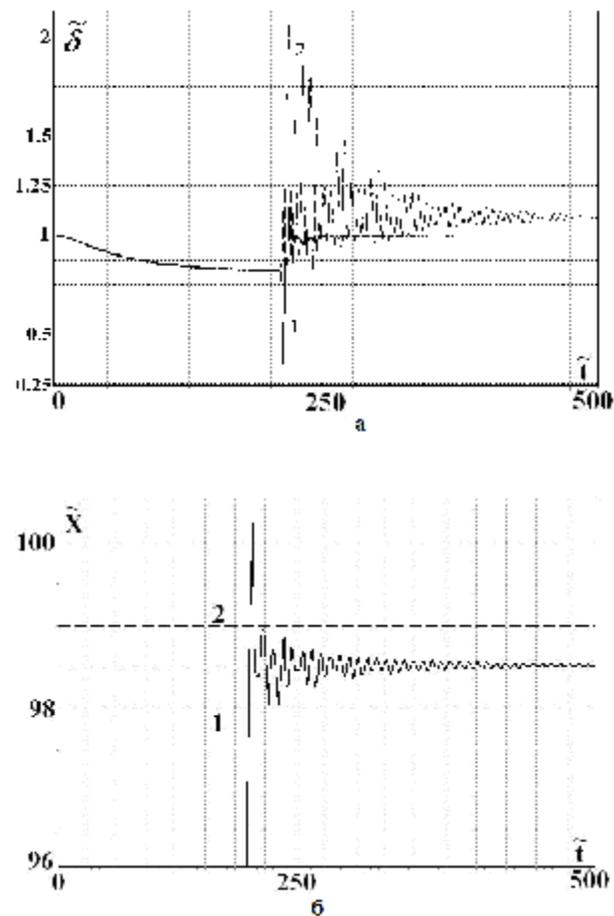


Рис. 3.5. Зависимость от времени ширины (а, 1-аналитическая; 2-численная) и координаты центра кинка (б,1-2- граница области неоднородности) при пининге в области неоднородности параметра \tilde{K} типа яма.

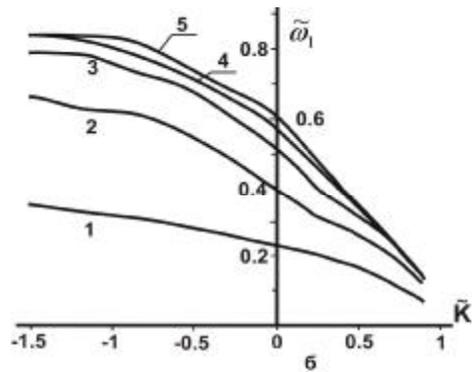
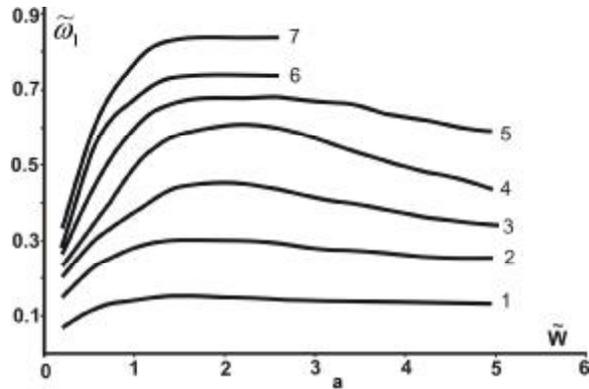


Рис. 3.6. Зависимость частоты трансляционной моды колебаний кинка $\tilde{\omega}_1$ от а- ширины \tilde{W} для случая 1- $\tilde{K}=0.9$, 2- $\tilde{K}=0.6$, 3- $\tilde{K}=0.3$, 4- $\tilde{K}=0$, 5- $\tilde{K}=-0.3$, 6- $\tilde{K}=-0.6$, 7- $\tilde{K}=-1.2$; б- глубины \tilde{K} для случая 1- $\tilde{W}=0.2$, 2- $\tilde{W}=0.6$, 3- $\tilde{W}=1$, 4- $\tilde{W}=1.4$, 5- $\tilde{W}=1.8$) в области неоднородности параметра \tilde{K} типа яма.

Зависимость частоты трансляционной и пульсационной мод колебаний кинка от величины параметров \tilde{W} и \tilde{K} приведены на рис. 3.6-3.8. Из рис. 3.6а видно, что зависимость частоты трансляционной моды колебаний кинка $\tilde{\omega}_1$ от \tilde{W} до значения $\tilde{K} \leq -0.6$ имеет вид аналогичный, полученному в работе [12] с максимумом, который наиболее ярко выражен при значении $\tilde{K} = 0$. При последующем уменьшении \tilde{K} для данных значений ширины максимум отсутствует. Хотя, полученная численно

$\tilde{\omega}_1(\tilde{K})$ достаточно сильно отличается от зависимости, полученной аналитически по теории возмущений для солитонов [12]:

$$w^2 = -[\tilde{K}-1] \sec^2 [\tilde{W}] \tanh^2 [\tilde{W}], \quad (3.2)$$

они достаточно близки в случае малых значений неоднородности параметра \tilde{K} , что и следовало ожидать (рис.3.7). Так же видно (рис. 3.8), что частота пульсационной моды колебания ДГ $\tilde{\omega}_2$ лежит, как и предсказывает теория выше трансляционной, а с уменьшением \tilde{K} асимптотически стремится к единице.

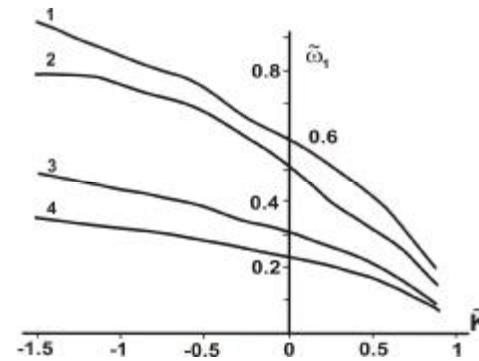


Рис. 3.7. Зависимость аналитической $\tilde{\omega}_A$ (кривые 1, 3) и вычисленной частоты трансляционной моды колебаний кинка $\tilde{\omega}_1$ (кривые 2,4) от значения \tilde{K} (1,2- $\tilde{W}=1$, 3,4- $\tilde{W}=0,2$).

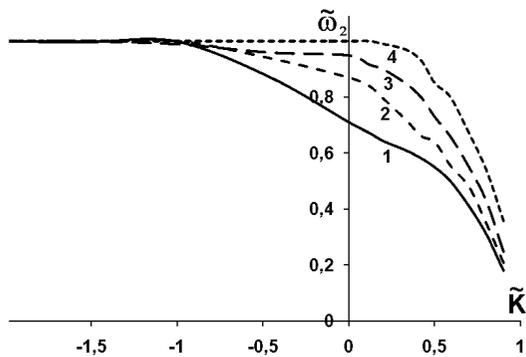


Рис. 3.8. Зависимость частоты пульсационной моды колебаний кинка $\tilde{\omega}_2$ от значения параметра \tilde{K} (1- $\tilde{W}=0,3$, 2- $\tilde{W}=0,5$, 3- $\tilde{W}=0,7$, 4- $\tilde{W}=1$).

3.3 Колебания кинка локализованного в области дефекта

Рассмотрим динамику кинка уравнения (2.1), локализованного в начальный момент времени в области неоднородности параметра \tilde{K} типа яма ($\tilde{K} < 1$), при включении внешней силы. Вначале рассмотрим случай $h = const$. После включения силы, структура кинка подстраивается под внешнее возмущение. Наблюдаются затухающие колебания кинка (рис. 3.9). В итоге он останавливается на некотором расстоянии от центра неоднородной области (т.е. у кинка меняется положение равновесия). Для различных значений параметров (\tilde{K}, \tilde{W}) измерено максимальное отклонение положения центра кинка \tilde{x}_m от значения внешней силы h (рис. 3.10). Из этой зависимости можно найти значения $h = h_c$, при котором происходит срыв кинка со статического положения равновесия. Полученные величины h_c совпадают с результатами, полученными ранее [13]. На рис. 3.11 представлена зависимость значения h_c от \tilde{W} для различных значений \tilde{K} . Откуда видно, что с ростом \tilde{W} значения h_c увеличивается. Этот результат качественно совпадает с результатом, полученным в работе [12] для малых значений \tilde{W} .

При $h < h_c$, полученная зависимость частоты трансляционной моды колебаний W_1 от \tilde{K} и \tilde{W} аналогична, полученной в предыдущем параграфе для случая наезда кинка на дефект (рис. 3.12). Существенное отличие заключается в том, что теперь используется намного большее по величине значение h , а начальная амплитуда колебаний, в данном случае, значительно меньше. Практически не заметно и излучение свободных волн. Заметим, что при h близких к h_c , в начальный момент времени, существует заметная нелинейность колебаний.

Если $h > h_c$, то кинк уходит из области дефекта и, в зависимости от значений величин \tilde{W} и \tilde{K} , в этой области возникают локализованные нелинейные волны, которые будут подробнее рассмотрены дальше.

Рассмотрим теперь случай $h \neq const$. Схему проведенного вычислительного эксперимента можно описать следующим образом. Вначале включаем $h = h_0$ постоянной величины. После подстройки структуры кинка, включается переменная гармоническая сила $h = h_0 \sin(\omega t)$ с частотой W и можно получить изменение структуры, ширины кинка, положение и скорость его центра от времени (рис. 3.13).

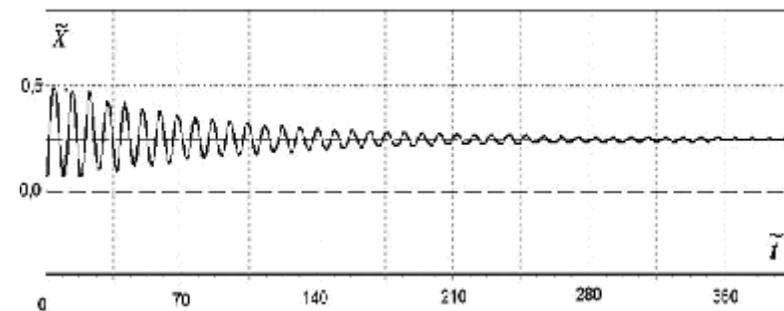


Рис. 3.9. Зависимость отклонения положения центра кинка \tilde{x} от времени, для случая $\tilde{K} = -1.2$, $\tilde{W} = 1$, $h = 0,1$.

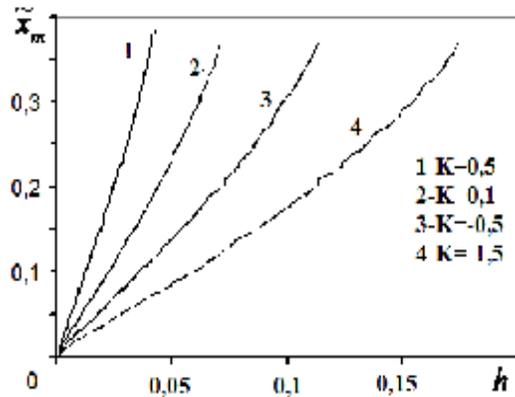


Рис. 3.10. Зависимость максимального отклонения положения центра кинка \tilde{x}_m от значения h , при $\tilde{W} = 0.6$.

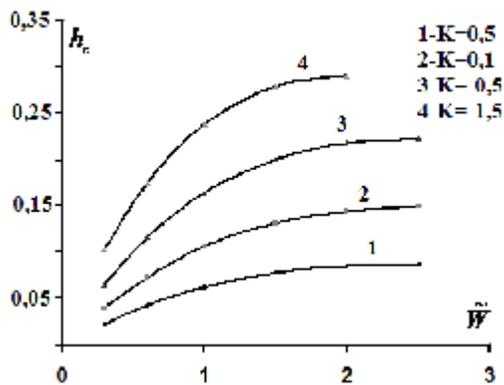


Рис. 3.11. Зависимость величины h_c , при которой происходит срыв кинка с дефекта от \tilde{W} для различных значений \tilde{K} .

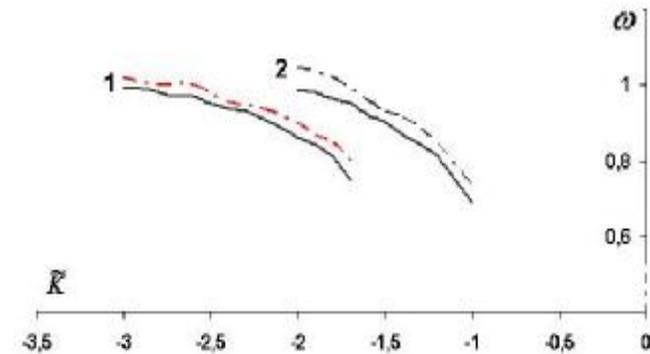


Рис. 3.12. Зависимость частоты трансляционной моды колебаний ω_1 от \tilde{K} (для случаев 1- $\tilde{W} = 1,5$; 2- $\tilde{W} = 2,5$), сплошная линия – получена при наезде кинка на дефект, пунктирная линия – получена для покоящегося в начальный момент в области дефекта кинка.

Сначала рассмотрим влияние величины амплитуды h_0 на динамику кинка. Наблюдалось несколько разных режимов колебаний кинка. При малых амплитудах для небольших дефектов наблюдается режим близкий к гармоническим колебаниям, как и для случая отсутствия дефекта (рис. 3.13). При увеличении величины амплитуды, может установиться более сложный режим, когда кинк колеблется попеременно у двух положений равновесия с неизменной частотой (рис. 3.14 а). При дальнейшем увеличении величины амплитуды до некоторого $h_0 = h_{oc}$, существует режим, при котором кинк срывается из области дефекта (рис. 3.14 б). Сравнение величины при постоянной h_c и гармонической h_{oc} показывает, что $h_{oc} < h_c$. При величине h_0 близкой к h_{oc} , наблюдается следующее: кинк совершает медленное поступательное движение, выходя из области дефекта, и одновременно совершает практически гармонические колебания около движущегося положения равновесия (рис. 3.14 в).

На рис. 3.15 б, для случая гармонического режима колебаний, приведена зависимость максимального отклонения положения центра кинка \tilde{x}_m от h_0 при различных значениях \tilde{W} и постоянном значении параметров \tilde{K}, \tilde{W} . Из рисунка видно, что \tilde{x}_m практически линейно зависит от величины h_0 при неизменном значении \tilde{W} .

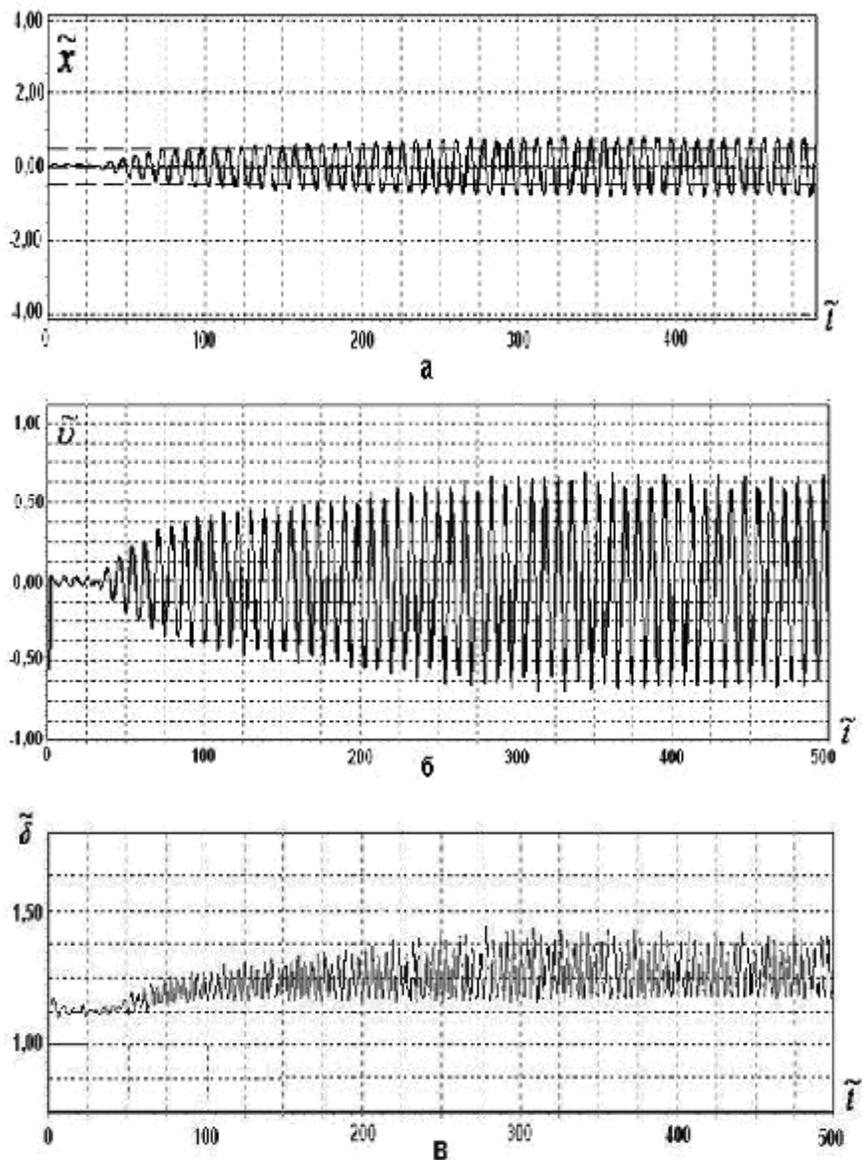


Рис. 3.13. Зависимость а - координаты центра \tilde{x} , б - скорости \tilde{v} и в - ширины \tilde{d} кинка от времени для случая $\tilde{K} = -1,2$, $\tilde{W} = 1$, $w = 0,74$, $h_0 = 0,03$.

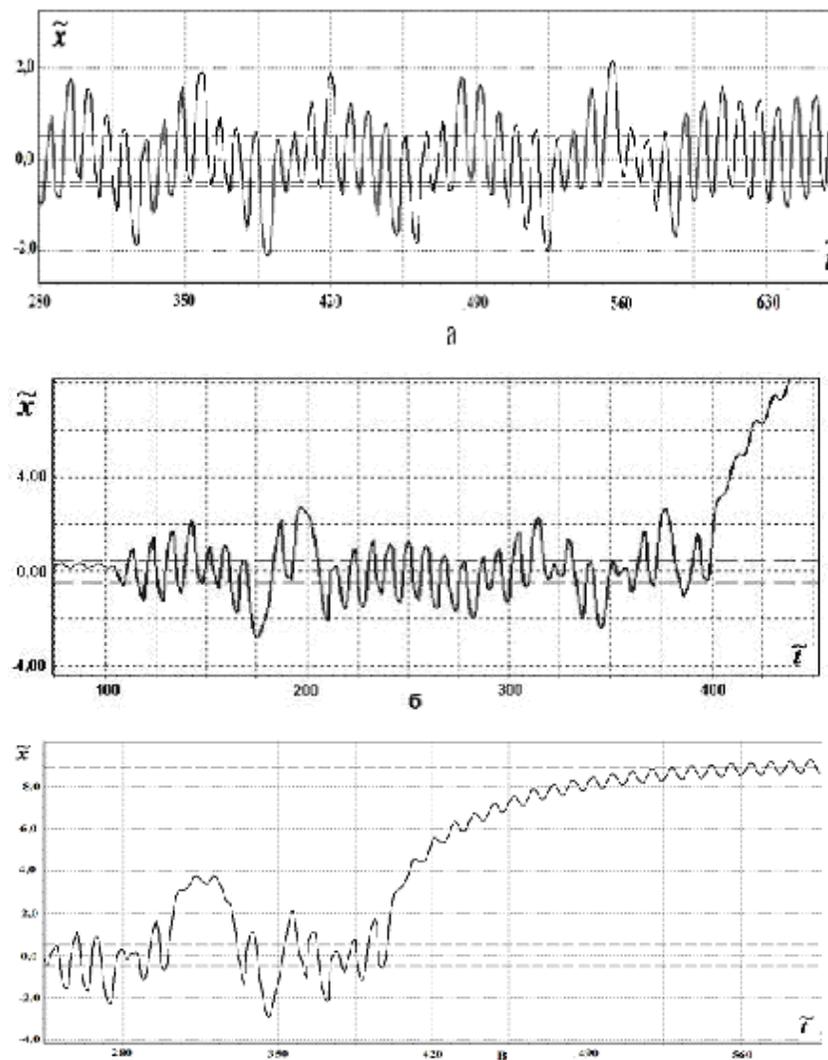


Рис.3.14. Зависимость координаты центра кинка \tilde{x} от времени при $\tilde{K} = -1,2$, $\tilde{W} = 1$, $w = 0,7$ для случая а- $h_0 < h_{oc}$; б- $h_0 > h_{oc}$, в- $h \approx h_{oc}$.

Теперь рассмотрим влияние частоты W на динамику кинка. Для различных параметров (\tilde{K}, \tilde{W}) вычислено максимальное отклонение положения центра кинка, в зависимости от величины частоты W , при

постоянном значении его амплитуды h_0 (рис. 3.15а). Из рисунка видно, что существует резонансное значение W , при котором это отклонение максимально. Из физических соображений следует, что эта частота должна соответствовать некоторой собственной частоте колебаний на дефекте и, следовательно, частоте трансляционной моды колебаний кинка, найденной в предыдущем параграфе другим способом. Сравнение этих частот показывает их хорошее совпадение в пределах точности численных расчетов.

3.4 Изменение фазы кинка

Так как наличие дефекта приводит к некоторой задержке движущегося кинка, то следовательно должно наблюдаться и изменение фазы кинка.

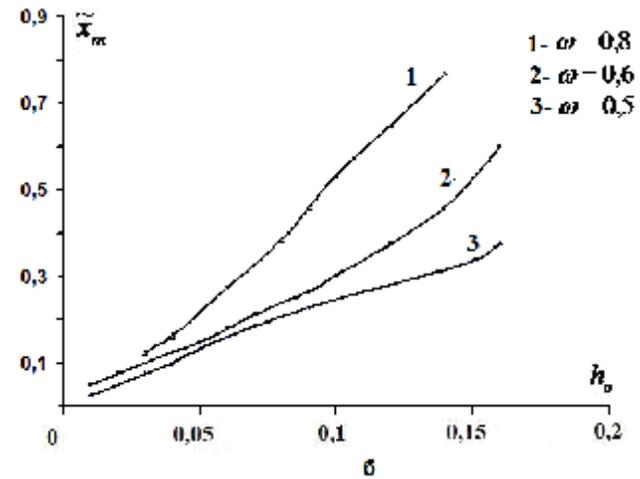
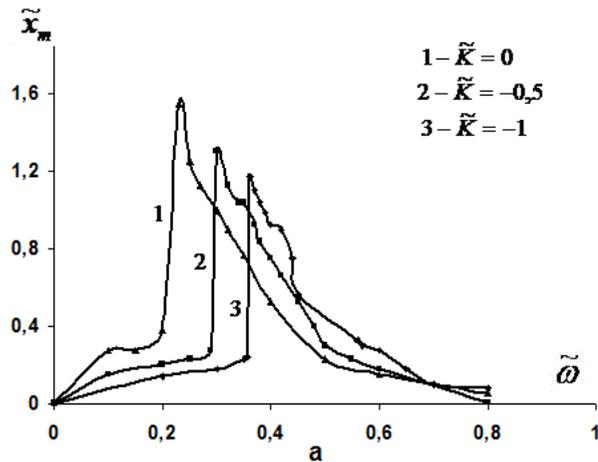


Рис. 3.15. Зависимость максимального отклонения положения центра кинка \tilde{x}_m а) от частоты W при $\tilde{W} = 0.3$, б) от амплитуды h_0 при $\tilde{W} = 1$, $\tilde{K} = -1.2$.

Схема численного эксперимента по определению изменения фазы такова: в начальный момент времени мы включаем силу, которая приводит к разгону за некоторое конечное время кинка до стационарной скорости, соответствующей с большой точностью известной формуле (2.4). В дальнейшем, кинк движется в однородном материале и находим координату центра кинка (\tilde{x}_1) через определенное время ($t=500$). Все результаты в данном параграфе приведены для случая $a = 2 \cdot 10^{-2}$, $h \neq 0$ и дефекта, приводящего неоднородности параметров, описываемых функцией прямоугольного вида.

Затем, аналогично, разгоняем кинк до стационарного значения скорости, дальше он пересекает область дефекта. Для этого случая, в тоже самое время, что и для первого, находим координату центра кинка (\tilde{x}_2). Далее мы отнимаем значение координаты центра кинка в первом случае (\tilde{x}_1) от координаты центра кинка, во втором случае (\tilde{x}_2) и эту величину будем называть изменением фазы $\Delta\tilde{f} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$ кинка.

На рис. 3.16 приведена зависимость $\Delta\tilde{f}$ от параметра \tilde{K} для дефекта типов потенциальная яма ($\tilde{K} < 1$) и барьер ($\tilde{K} > 1$) при различных скоростях наезда на эту область. Из рисунка видно, что полученная зависимость $\Delta\tilde{f}$ в

области $\tilde{K} < 1$, $\Delta\tilde{j}$, при одинаковых значениях $|1 - \tilde{K}|$, принимает большую величину, нежели в области $\tilde{K} > 1$.

На рис. 3.17 - 3.18 приведено сравнение аналитической [12]

$$\Delta\tilde{j} = \tilde{W}(\Delta\tilde{A} + \Delta\tilde{K}) \frac{1 - \tilde{v}^2}{2\tilde{v}^2}. \quad (3.3)$$

и численной зависимостей $\Delta\tilde{j}$ от величины скорости \tilde{v} . Видно, что аналитическое выражение качественно описывает наши результаты в области малых параметров и для небольших скоростей.

На рис. 3.19 приведена зависимость $\Delta\tilde{j}$ от величины скорости \tilde{v} . Из рисунка видно, что с увеличением \tilde{v} величина изменения фазы $\Delta\tilde{j}$ стремится к нулю, т.е. кинк практически не задерживается в области дефекта. Также получено неплохое совпадение для случая $\tilde{K} = 1.4$ численного значения с аналитическим значением, полученным с помощью выражения (3.3), в области больших скоростей.

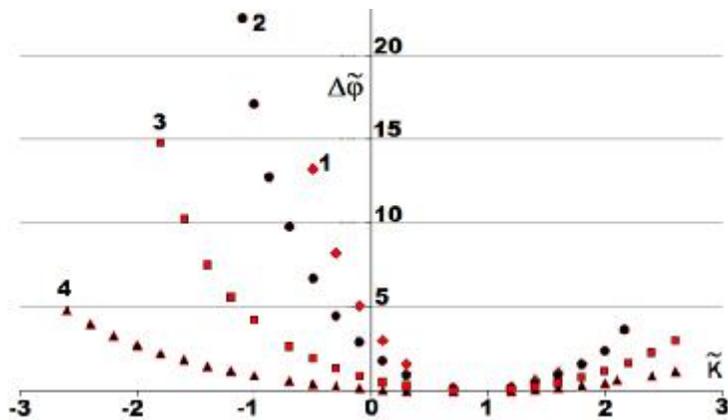


Рис. 3.16. Зависимость Δj от величины параметра \tilde{K} , для $\tilde{W} = 1$ (1- $\tilde{v} = 0.55$; 2- $\tilde{v} = 0.64$; 3- $\tilde{v} = 0.75$; 4- $\tilde{v} = 0.83$).

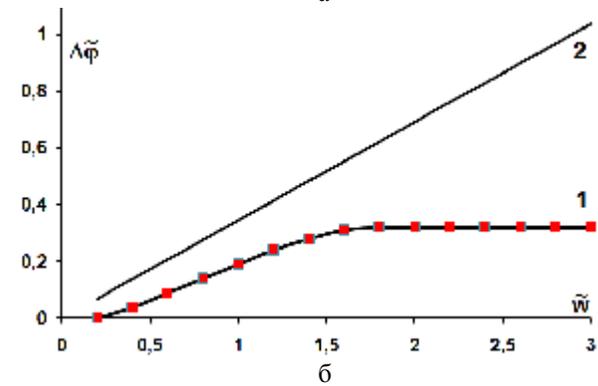
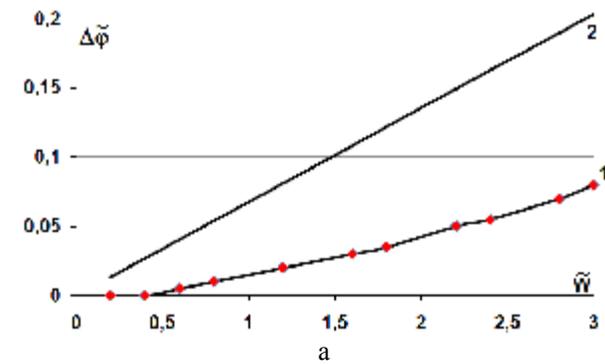
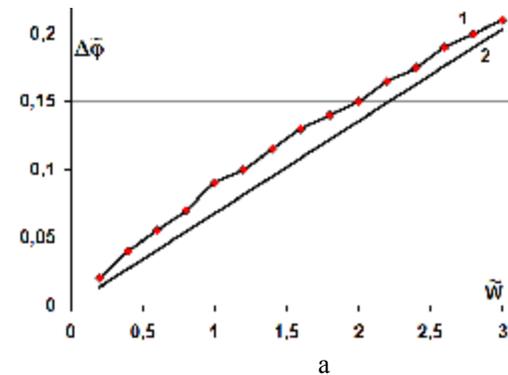


Рис 3.17. Зависимость $\Delta\tilde{j}$ от величины параметра \tilde{W} для $\tilde{K} = 0.7$ (1-численная, 2 –аналитическая, полученная по формуле (3.3)). а)- $\tilde{v} = 0.83$, б)- $\tilde{v} = 0.55$.



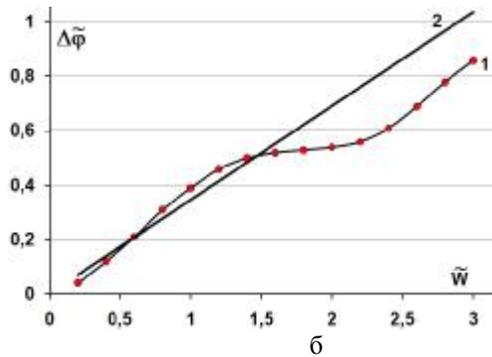


Рис 3.18. Зависимость $\Delta\tilde{f}$ от величины параметра \tilde{W} для $\tilde{K} = 1.3$ (1-численная, 2 –аналитическая, полученная по формуле (3.3). а)- $\tilde{v} = 0.83$, б)- $\tilde{v} = 0.55$.

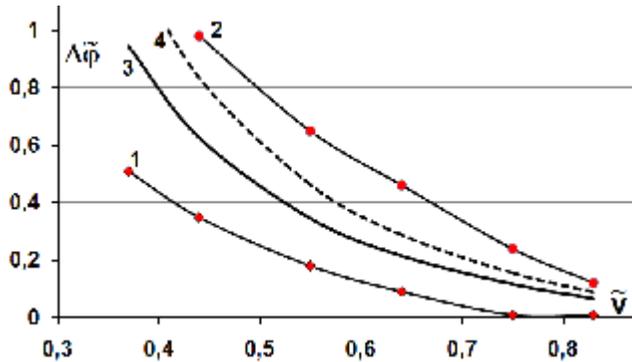


Рис 3.19. Зависимость $\Delta\tilde{f}$ от величины скорости \tilde{v} для $\tilde{W} = 1$, $\tilde{K} = 0.7$ (1 - численная, 3 – аналитическая, полученная по формуле (3.2), $\tilde{W} = 1$, $\tilde{K} = 1.4$ (2 - численная, 4 – аналитическая, полученная по формуле (3.3).

ГЛАВА 4. ВОЗБУЖДЕНИЕ СОЛИТОНОВ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА

4.1. Случай одномерной неоднородности параметров

4.1.1 Случай одной области неоднородности параметров

При рассмотрении динамики прохождения кинка через область неоднородности параметра \tilde{K} , описываемой функцией в виде треугольной ямы или барьера глубиной \tilde{K} и шириной \tilde{W} , было обнаружено, что в

некоторых случаях ($\tilde{K} < 1$), в этой области возникают локализованные нелинейные волны. Причем, в зависимости от величины \tilde{K} и \tilde{W} , наблюдались различные сценарии эволюции таких нелинейных волн. На рис. 4.1 приведена типичная динамика прохождения кинка через область неоднородности параметра \tilde{K} и эволюция, возникающей в области неоднородности параметра \tilde{K} , локализованной нелинейной волны, для случая $\tilde{K} = -1.5$. Видно, что при достаточном приближении кинка к области неоднородности параметра \tilde{K} ($\tilde{t} = 204$, когда значение q в этой области заметно отличается от p), впереди кинка появляется солитон. После прохождения кинка возникает нелинейная волна солитонного вида, амплитуда которой, максимальная в центре неоднородности параметра \tilde{K} , колеблется от q^{\max} до $-q^{\max}$, а величина амплитуды сильно зависит от \tilde{K} и \tilde{W} (и стремится к нулю при $\tilde{K} \rightarrow 0$). На рис.4.2 приведена зависимость значения q в центре области неоднородности параметра \tilde{K} от времени - $q^*(\tilde{t})$ для рассмотренного на рис.4.1 случая. Совпадение полученной численно зависимости $q^*(\tilde{t})$ с формулой [16]:

$$q^* = A \exp(-a(\tilde{t} - \tilde{t}_0)) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \tilde{w}^2}}{\tilde{w}} * \sin(\tilde{w}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)) \operatorname{sech} \left(g \sqrt{1 - \tilde{w}^2} (\tilde{x}) \right) \right), \quad (4.1)$$

где $A = 0.7$, $a = 10^{-2}$, $\tilde{w} = 0.5$, $\tilde{x} = 0$, $\tilde{t}_0 = 212$, описывающей решение уравнения синус – Гордона типа покоящегося бризера с учетом затухания, позволяют, в дальнейшем, считать полученную в данном случае локализованную нелинейную волну затухающим покоящимся бризером. Из рис.4.1 видно, что затухание бризера происходит и вследствие излучения свободных волн. Однако, полученный из аппроксимации зависимости q^* от времени декремент затухания оказался практически равным задаваемому a , т.е. вклад излучения бризера в затухание мал.

На рис. 4.3 – 4.4 приведены зависимости амплитуды бризера в начальный момент времени A_{\max} от величины \tilde{K} и \tilde{W} , полученные при движении кинка ($h = 0.025$). Из рисунков видно, что при уменьшении области неоднородности параметра \tilde{K} максимальное значение q^* убывает и стремится к нулю.

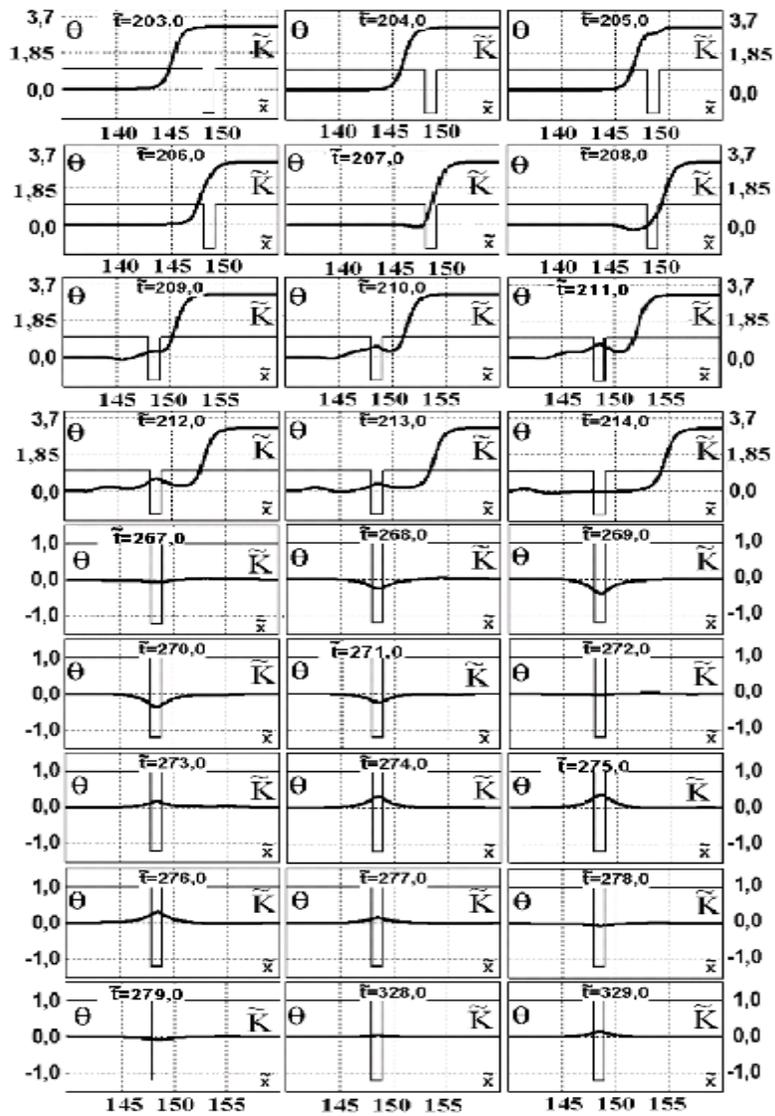


Рис.4.1. Зарождение и эволюция покоящегося бризера в области неоднородности параметра \tilde{K} для случая $\tilde{K} = -1.2$, $\tilde{W} = 1$, $h = 0.025$, $a = 10^{-2}$.

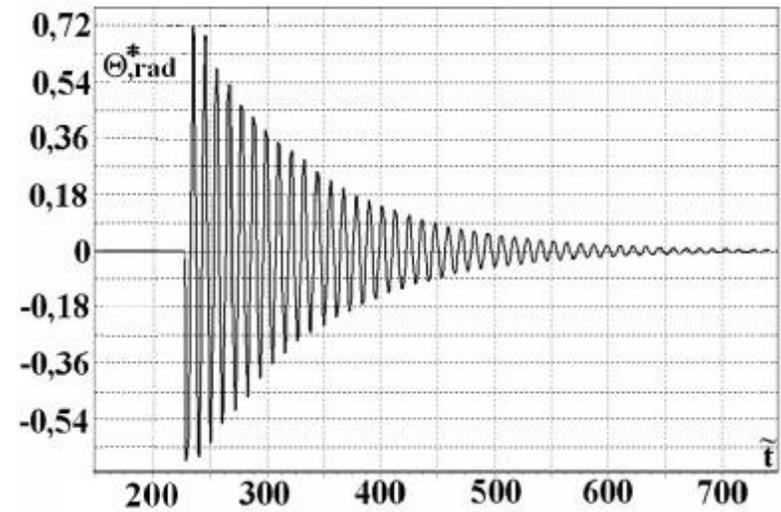


Рис. 4.2. Зависимость значения q^* в центре области неоднородности параметра \tilde{K} от времени \tilde{t} для случая изображенного на рис.4.1.

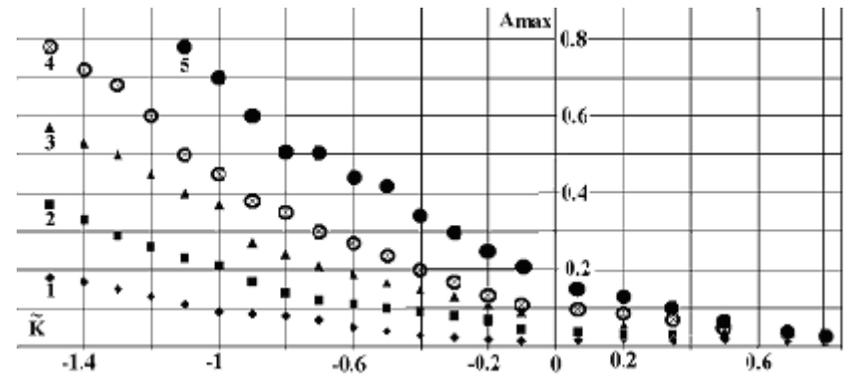


Рис. 4.3. Зависимость максимальной амплитуды затухающего бризера A_{\max} от \tilde{K} при $h = 0.025$ ($1 - \tilde{W} = 0.4$, $2 - \tilde{W} = 0.6$, $3 - \tilde{W} = 0.8$, $4 - \tilde{W} = 1.2$, $5 - \tilde{W} = 1.4$).

Зависимость $A_{\max}(\tilde{K})$ для малых $|\tilde{K}-1|$ близка к линейной, а при увеличении \tilde{K} описывается степенной функцией, близкой к квадратичной для рассмотренных небольших \tilde{W} области неоднородности параметра \tilde{K} . Зависимость $A_{\max}(\tilde{W})$ для больших \tilde{W} имеет явную тенденцию выхода на стационар. Такое поведение можно объяснить тем, что в этом случае практически весь бризер расположен внутри области неоднородности параметра \tilde{K} и увеличение ее ширины \tilde{W} уже не приводит к заметным изменениям начальных параметров бризера.

На рисунках 4.5 и 4.6 приведена зависимость частоты колебаний q^* для бризера \tilde{w}_B от \tilde{K} и \tilde{W} , которую можно получить из анализа зависимости $q^*(\tilde{r})$. Из рисунков видно, что с уменьшением области неоднородности параметра \tilde{K} частота колебаний стремится к единице. Известно [16], что энергия решения типа бризера $E \sim (1-w_B^2)^{1/2}$, откуда следует, что с уменьшением области неоднородности параметра \tilde{K} энергия (как и амплитуда), полученного бризера стремится к нулю. Зависимость \tilde{w}_B от \tilde{K} и \tilde{W} можно приближенно описать формулой $\tilde{w}_B = 1 - bx^n$, где b – константа, n близка к 2 для $x = \tilde{W}$ и к 1/2 для $x = |\tilde{K}-1|$.

Сравнение показывает сильное отличие от ранее полученных зависимостей для частот трансляционной \tilde{w}_T и пульсационной \tilde{w}_Π мод колебаний кинка. Например, \tilde{w}_T и \tilde{w}_Π стремятся к нулю, в случае стремления площади неоднородности параметра \tilde{K} к нулю. При увеличении области неоднородности параметра \tilde{K} , до определенного значения, эволюция зарождающегося после прохождения кинка покоящегося бризера меняется.

Из рис. 4.7 видно, что начиная с $\tilde{r} = 320$, колебания продолжают только в области положительных значений q . Отметим, что частота колебаний солитона, в который преобразуется бризер, существенно больше бризерной (рис. 4.7). Заметим, что при изменении значений \tilde{K} и \tilde{W} солитон может зародиться и в области отрицательных значений q .

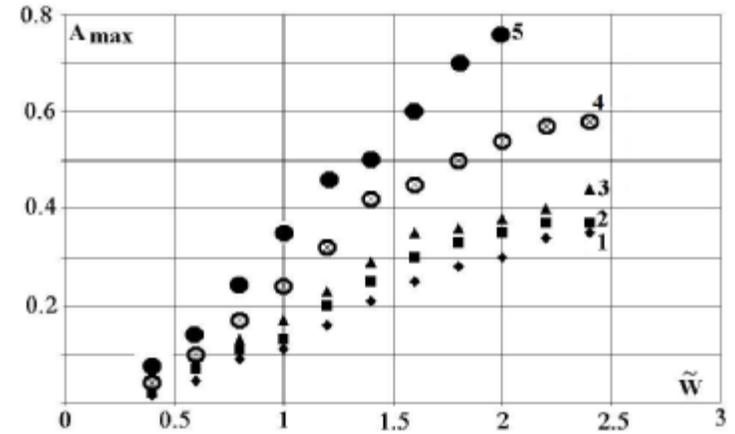


Рис.4.4. Зависимость максимальной амплитуды затухающего бризера A_{\max} от \tilde{W} при $h = 0.025$ ($1 - \tilde{K} = -0.1$, $2 - \tilde{K} = -0.2$, $3 - \tilde{K} = -0.3$, $4 - \tilde{K} = -0.5$, $5 - \tilde{K} = -0.8$).

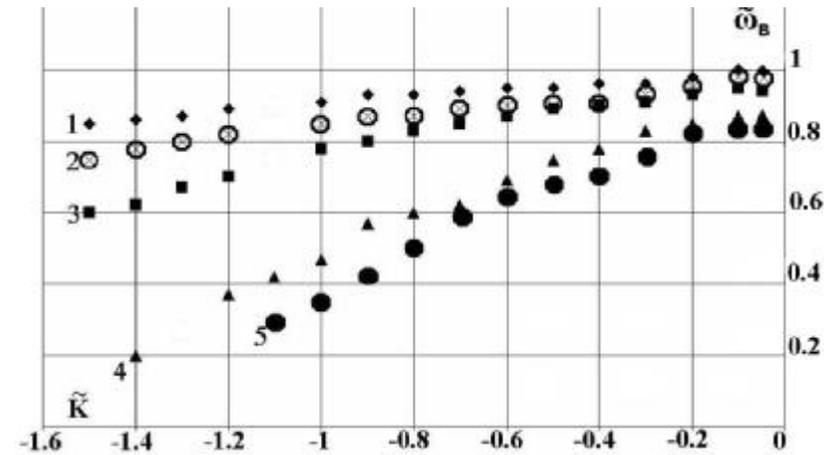


Рис. 4.5. Зависимость частоты колебаний бризера \tilde{w}_B от \tilde{K} при $h = 0.025$ ($1 - \tilde{W} = 0.4$, $2 - \tilde{W} = 0.6$, $3 - \tilde{W} = 0.8$, $4 - \tilde{W} = 1.2$, $5 - \tilde{W} = 1.4$).

При дальнейшем увеличении области неоднородности параметра \tilde{K} после прохождения кинка, сразу появляется колеблющийся солитон (рис.4.8). На рис.4.9 - 4.10 приведены зависимости частоты колебаний q^*

для случая солитона \tilde{W}_S от \tilde{K} и \tilde{W} . Из рисунков видно, что теперь частота колебаний стремится к единице при увеличении площади области неоднородности параметра \tilde{K} . На рис.4.11 представлена зависимость амплитуды A остановившегося солитона от \tilde{W} , полученная численно и предположенная в работе [17]. Из рис. 4.11 видно, что имеется качественное совпадение этих амплитуд, а вычисленную зависимость можно приближенно описать формулой $\cos A = 1.8 / \tilde{K}\tilde{W}$.

На рис.4.12 приведена область параметров, определяющих существование каждого из рассматриваемых сценариев эволюции нелинейной волны, и приведено сравнение с аналитическим выражением, предложенным в экспериментальной работе [18] из феноменологических соображений.

Далее рассмотрим случай, когда через область неоднородности параметров материала проходит начальное возмущение, в виде некоторого шума. Отметим, что после прохождения области неоднородности на ней наблюдается образование только солитона (см. рис. 4.13), в случае когда значение \tilde{K} и \tilde{W} лежат в области III рис. 4.12. Также был рассмотрен случай, когда в начальный момент времени кинк локализован в центре области неоднородности \tilde{K} . Приложение внешней силы, достаточной чтобы сдвинуть кинк из этой области, приводит к зарождению солитонов и бризеров, аналогично случаю движущегося кинка.

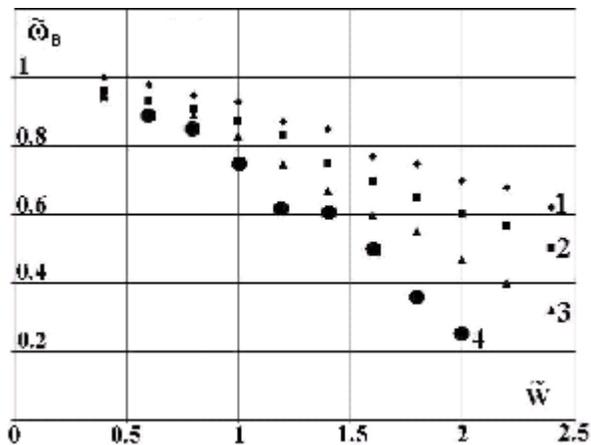


Рис. 4.6. Зависимость частоты колебаний бризера $\tilde{\omega}_B$ от \tilde{W} при $h = 0.025$ ($1 - \tilde{K} = 0.4$, $2 - \tilde{K} = 0.6$, $3 - \tilde{K} = 0.8$, $4 - \tilde{K} = 1.2$).

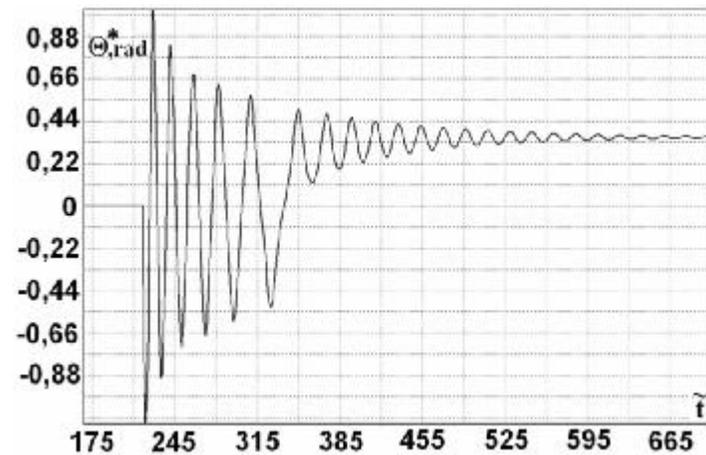


Рис. 4.7. Зависимость значения q^* в центре области неоднородности параметра \tilde{K} от времени (бризер переходящий в солитон) $\tilde{K} = -1.5$, $\tilde{W} = 1.2$, $h = 0.025$.

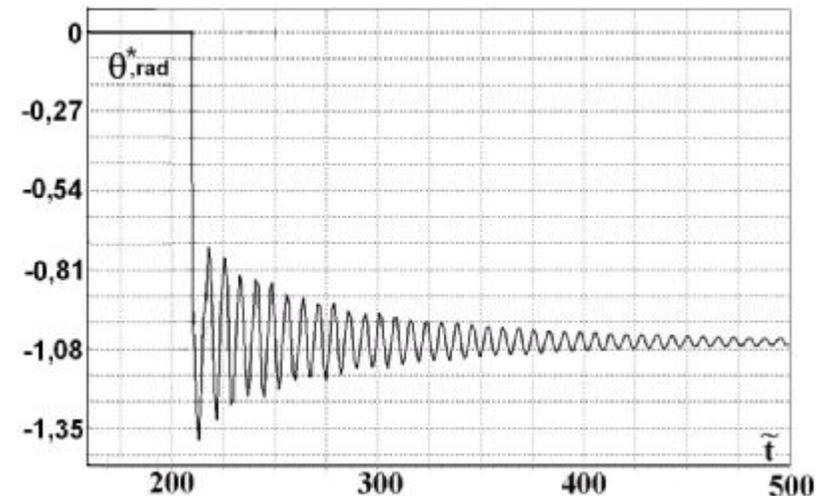


Рис.4.8. Зависимость значения q^* в центре области неоднородности параметра \tilde{K} от времени (солитон) $\tilde{K} = -2.4$, $\tilde{W} = 1.2$, $h = 0.025$.

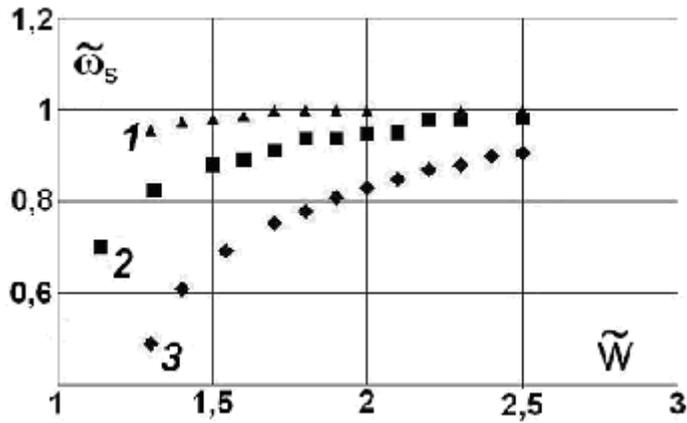


Рис. 4.9. Зависимость частоты колебаний $\tilde{\omega}_S$ при $h=0.025$ от параметра \tilde{W} (1 – $\tilde{K} = -2.5$, 2 – $\tilde{K} = -2$, 3 – $\tilde{K} = -1.5$).

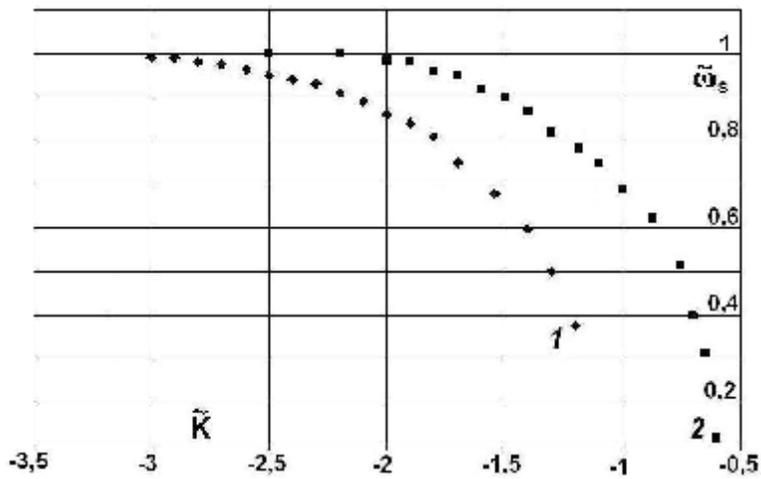


Рис. 4.10. Зависимость частоты колебаний $\tilde{\omega}_S$ при $h=0.025$ от параметра \tilde{K} (1 – $\tilde{W} = 1.5$, 2 – $\tilde{W} = 2.5$).

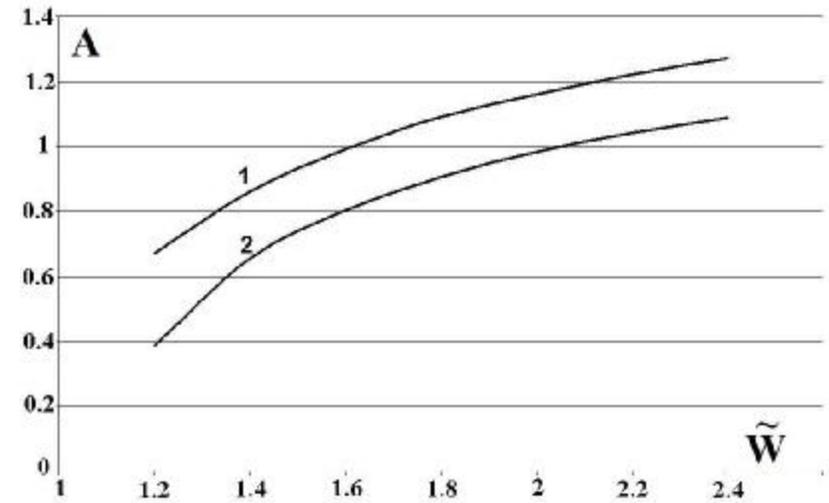


Рис. 4.11. Зависимость амплитуды A остановившегося солитона от \tilde{W} при $\tilde{K} = -1.8$: 1 – численное решение, 2 – полученное из аналитического выражения $\cos A = 2 / \tilde{K}\tilde{W}$ [18].

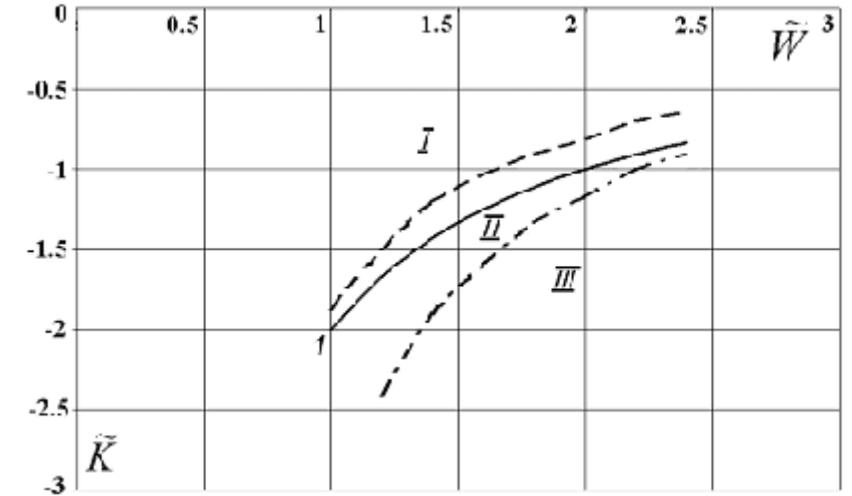


Рис. 4.12. Область параметров, определяющих существование бризера (I), бризера переходящего в солитон (II), солитона (III), аналитическое выражение для случая статического солитона $\tilde{K}\tilde{W} = 2$ [18] (1).

4.1.2 Случай двух областей неоднородности параметров

Интересно также рассмотреть коллективные эффекты влияния (например, двух дефектов) на динамику кинков и возбуждение сильно нелинейных волн. Когда два дефекта расположены на достаточно большом расстоянии друг от друга они действуют независимо на движение кинка.

Однако, когда расстояние между дефектами уменьшается, существует коллективное взаимодействие дефектов и движущегося кинка. Функцию $\tilde{K}(\tilde{x})$ будем моделировать в виде:

$$\tilde{K}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} < 0, \tilde{W} < \tilde{x} < \tilde{W} + \tilde{d}, \tilde{x} > 2\tilde{W} + \tilde{d} \\ 1 - \tilde{K}, & 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{W}, \tilde{W} + \tilde{d} \leq \tilde{x} \leq 2\tilde{W} + \tilde{d} \end{cases} \quad (4.2)$$

В этом случае значение параметра \tilde{d} можно интерпретировать как расстояние между двумя дефектами. Все результаты в данном параграфе приведены для случая движения кинка по инерции $a = 0, h = 0$. При варьировании условий численного эксперимента, возможно возбуждение солитонов различного типа, которые могут привести к возникновению мультисолитонных решений.

Схему использованного численного эксперимента можно описать следующим образом. В начальный момент времени ($\tilde{t} = 0$) имеется точное статическое решение уравнения (2.1) в виде кинка, движущегося со стационарной скоростью, и в некоторый момент времени происходит наезд на область дефекта (рис. 4.13).

Появление второго дефекта, в зависимости от расстояния от него до первого дефекта, может оказать значительное влияние на динамику кинка в области первого дефекта и приводить к появлению интересных эффектов. При этом, в зависимости от скорости наезда, возможно несколько вариантов поведения кинка: отражение, захват в области дефекта, прохождение через область дефектов.

Вначале рассмотрим случай прохождения кинка через область дефекта со скоростями выше пороговой. В этом случае в области дефектов возбуждаются солитоны бризерного типа (рис. 4.15 - 4.16). При этом, для заданных параметров \tilde{W} и \tilde{K} существуют предельные значения параметра \tilde{d} : \tilde{d}_{\min} и \tilde{d}_{\max} , определяющие критерии существования разных типов решений. Если расстояние между дефектами лежит в определенном интервале $\tilde{d}_{\min} < \tilde{d} < \tilde{d}_{\max}$, то возбуждаемые бризеры представляют собой связанное четырехкинковое состояние. И наблюдается два режима колебаний: изохронный (частота бризеров одинакова и постоянна) и неизохронный. Таким образом, режим колебаний системы из двух бризеров, зависит от способа возбуждения, т.е. от начальной разности фаз колебаний

бризеров (что определяется скоростью наезда кинка). При изменении расстояния между двумя дефектами, связанные бризеры колеблются синфазно или антифазно (рис.4.15 и 4.16). При уменьшении расстояния между двумя дефектами \tilde{d} меньше \tilde{d}_{\min} , связанные бризеры сливаются в одно целое, аналогично случаю одного дефекта (рис. 4.17).

При прохождении кинком первого дефекта вида (4.2) с начальной скоростью меньше пороговой $u_0 < u_{\min}$, кинк с течением времени оказывается локализованным в области одного из дефектов, при этом происходит возбуждение его пульсационной и трансляционной мод. Наряду с этим, в области другого дефекта образуется солитон типа «бризер». Кинк и бризер представляют собой связанное трехкинковое состояние типа «тритон» (см. рис. 4.18). Подобное состояние в определенный период времени ($\tilde{t} = 325 - 360$) хорошо описывается точным решением уравнения синус - Гордон под названием «Wobble», полученным в работе (1.9).

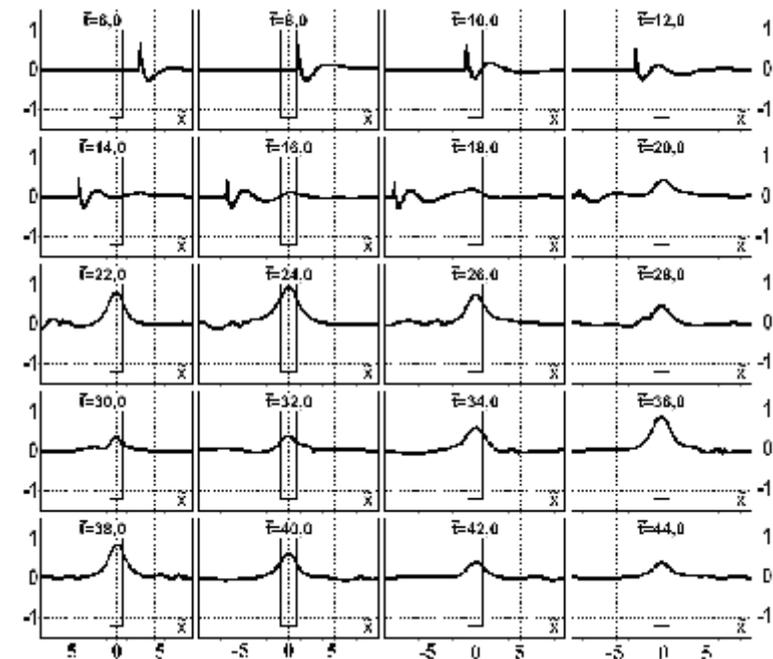


Рис. 4.13. Зарождение и эволюция солитона в области дефекта для случая, $\tilde{W} = 1,7, \tilde{K} = -1,2, h = 0.03$.

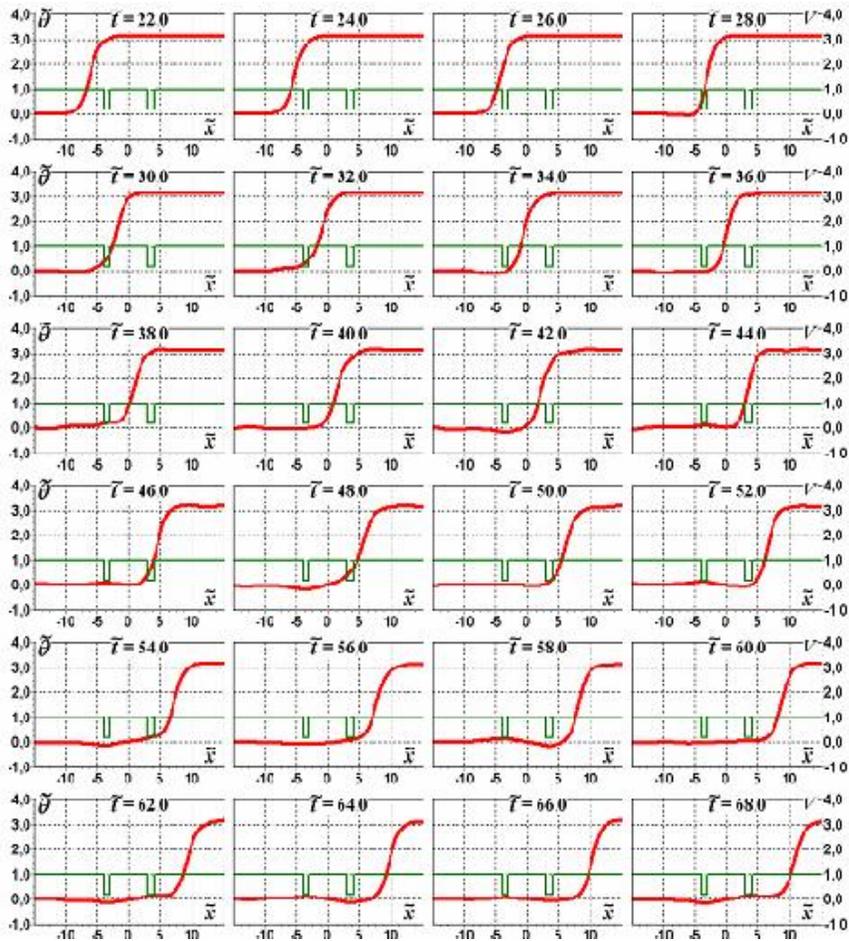


Рис. 4.14. Зависимости $q(\tilde{x})$ в различные моменты времени \tilde{t} при начальной скорости кинка $v_0 = 0,4$ и параметрах $\tilde{W} = 1$, $\tilde{K} = 0,8$, $\tilde{d} = 6$.

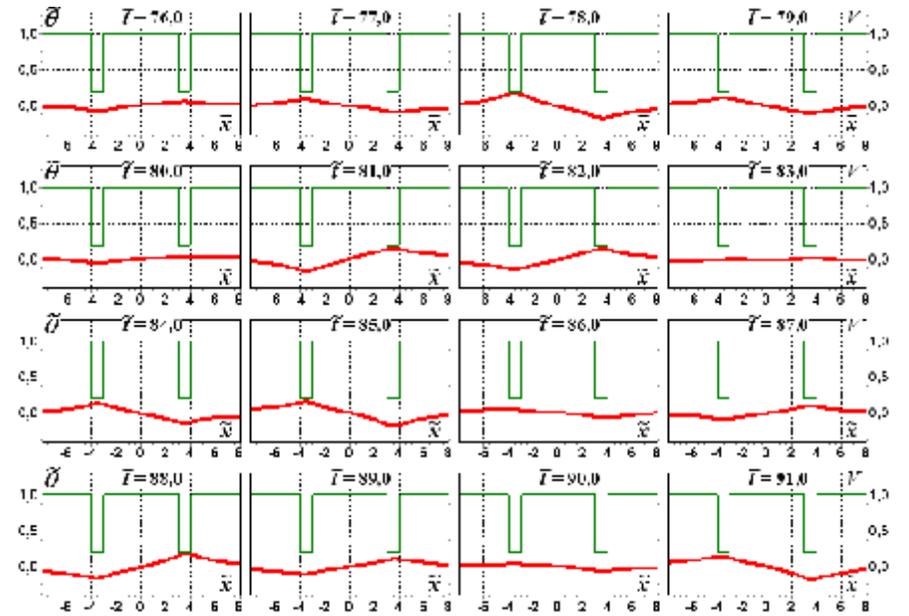


Рис.4.15. Зависимости $q(\tilde{x})$ в различные моменты времени \tilde{t} при начальной скорости кинка $v_0 = 0,4$ и параметрах $\tilde{W} = 1$, $\tilde{K} = 0,8$, $\tilde{d} = 6$.

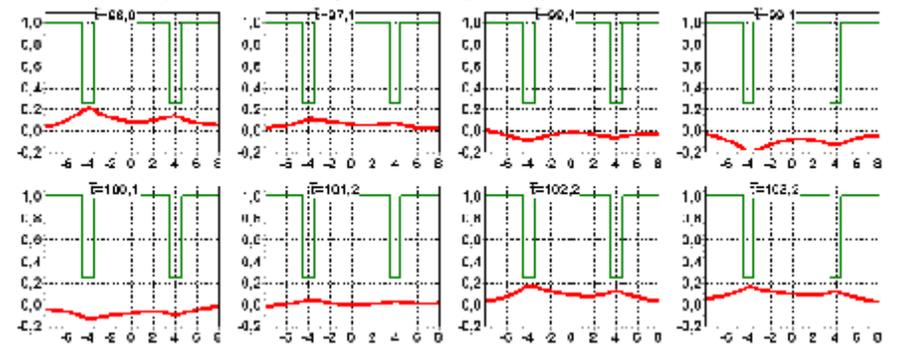


Рис.4.16. Зависимость $q(\tilde{x})$ в различные моменты времени \tilde{t} при параметрах $\tilde{W} = 1$, $\tilde{K} = 7,5$, $\tilde{d} = 7$, $u_0 = 0,6$.

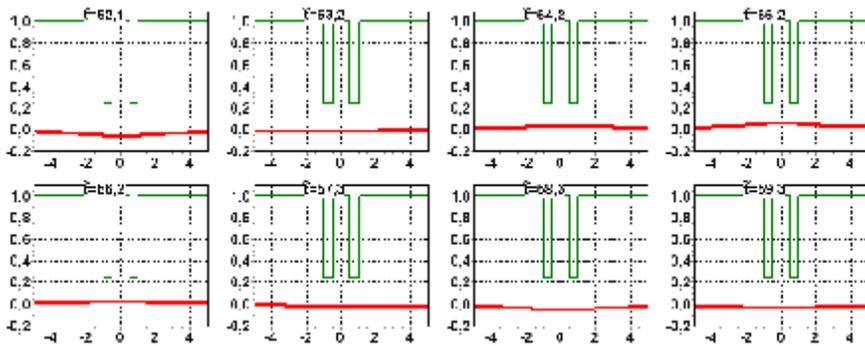


Рис.4.17. Зависимость $q(\tilde{x})$ в различные моменты времени \tilde{t} при параметрах $\tilde{W} = 0.5$, $\tilde{K} = 0.75$, $\tilde{a} = 1$.

4.2 Случай двумерной неоднородности параметров

4.2.1 Зарождение изгибных волн на кинке

Рассмотрим солитоны следующего МУСГ:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\tilde{K}}{2} \sin 2q = h \sin q + a q \quad (4.3)$$

Решаем уравнение (4.3), с учетом того, что теперь $q(x,y,t)$ и $\tilde{K} = \tilde{K}(x,y)$. Неоднородность параметра \tilde{K} задаем в форме параллелепипеда шириной \tilde{W}_x и длиной \tilde{W}_y вдоль осей x и y и глубиной \tilde{K} , причем рассмотрим случай $\tilde{K} < 1$ и $\tilde{K} > 1$.

Для исследования нелинейной динамики используем метод итераций для явной схемы, аналогично, как и в одномерном случае. Построенный алгоритм численного решения уравнения (4.3) работал следующим образом. В начальный момент времени задавалось начальное распределение в виде кинка $q(x,y) = 2 \arctg(e^x)$, граничные условия по \tilde{x} имеют вид: $\theta(\pm\infty) = 0, \pi$. Область локальной неоднородности \tilde{K} задавалась на расстоянии, достаточном для достижения скорости кинка стационарного значения \tilde{u} . В результате численных расчетов найдены искомые зависимости $q(x,y,t)$ для различных значений параметров.

Вначале рассмотрим случай прохождения кинка через двумерную область типа яма ($\tilde{K} \leq 1$). Для примера приведем результаты численного

счета для случая $\tilde{W}_x = 1$, $\tilde{W}_y = 2$, $\tilde{K} = -0.5$, $\tilde{u} = 0.75$, $h=0,073$. На рис.4.18

изображено положение центра кинка, соответствующее значению $q = \frac{p}{2}$

(жирная линия) в разные моменты времени.

В результате прохождения, после первоначальных сильных колебаний участка кинка задержанного дефектом, через некоторый промежуток времени (в общем случае зависящем от параметров уравнения) на кинке появляются две уединенные изгибные волны одинаковой амплитуды, движущиеся в противоположных направлениях. Величина амплитуды уединенной волны в рассмотренных случаях практически не меняется со временем. Отметим также, что одновременно с возбуждением изгибных колебаний кинка, происходит излучение свободных волн.

Рассматривая случай разных начальных скоростей кинка, можно получить зависимость средней скорости движения изгиба вдоль кинка $v(u)$, которая удовлетворяет закону $\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = 1$ в пределах погрешности полученных величин. Зависимость величины амплитуды уединенной изгибной волны \tilde{q}_0 от скорости кинка \tilde{u} представлена на рис.4.19. Видно, что амплитуда \tilde{q}_0 резко уменьшается при $\tilde{u} \rightarrow 1$. Зависимость величины амплитуды уединенной изгибной волны \tilde{q}_0 от \tilde{K} (близкая к параболической) представлена на рис.4.20.

Численное моделирование позволяет получить также полный вид нелинейной волны (см. рис 4.21) в различные моменты времени. Из рисунков подробно видно весь процесс образования уединенных изгибных волн описанный выше. Кроме того, виден процесс образования 2D бризера, рождающегося после прохождения кинком области неоднородности и являющегося источником излучения свободных волн. Последние, обладая скоростью большей чем кинк, обгоняют его и наблюдаем результат взаимодействия двух волн – небольшое искривление перед передним фронтом уединенной изгибной волны. Последний факт - положение уединенной изгибной волны относительно этого изгиба не меняются в разные моменты времени и доказывает то, что полная скорость этой волны равна скорости свободных волн. Т.е. мы наблюдаем возбуждение трансляционной моды внутренних мод кинка. Заметим также, что по значениям параметров мы находимся в области существования покоящегося бризера (см. рис. 4.12.), обнаруженного в одномерном случае.

Рассмотрим теперь случай $\tilde{K} \geq 1$. Для примера приведем результаты численного счета для случая $\tilde{W}_x = 2$, $\tilde{W}_y = 2$, $\tilde{K} = 2.5$ и $h=0,073$. На рис.4.22 изображено положение центра ДГ, соответствующее значению

$q = \frac{p}{2}$ (жирная линия) в разные моменты времени. Полученные результаты, резко отличающиеся от предыдущего случая. Теперь на кинке наблюдаются два расходящихся солитоноподобных искривления. Это связано с тем, что центральный участок кинка, тормозясь при прохождении, первой половины области локальной неоднородности, затем резко ускоряется и в результате начинают отставать области кинка, прилегающие к дефекту. Полный вид структуры кинка, в различные моменты времени представлен на рис. 4.23.

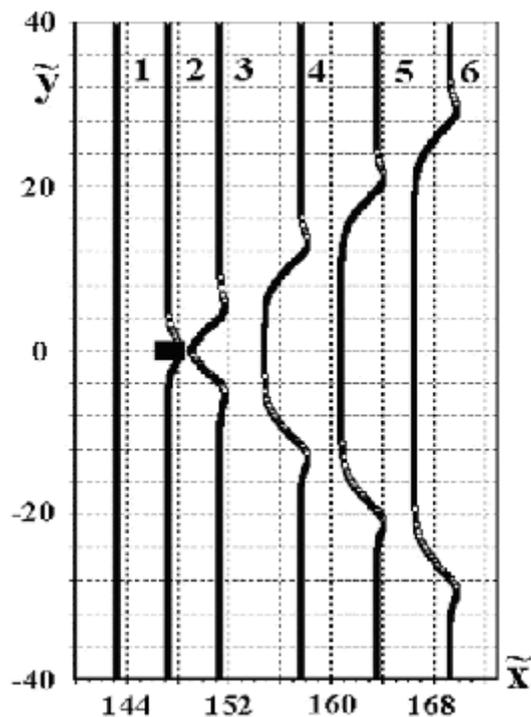


Рис. 4.18. Зависимость положения центра кинка $q = p/2$ от координат (\tilde{x}, \tilde{y}) для случая $\tilde{W}_x = 2$, $\tilde{W}_y = 2$, $\tilde{K} = -1.5$, $\tilde{u} = 0.75$ ($1-t = 230$, $2-t = 236$, $4-t = 252$, $5-t = 262$, $6-t = 272$), черный прямоугольник – место локализации неоднородности \tilde{K} .

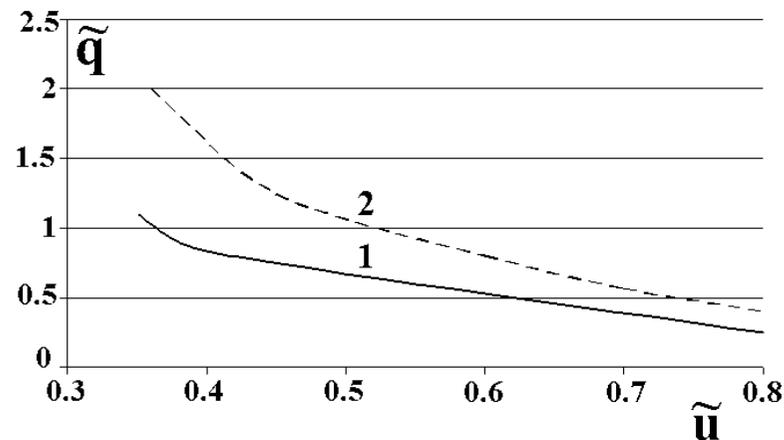
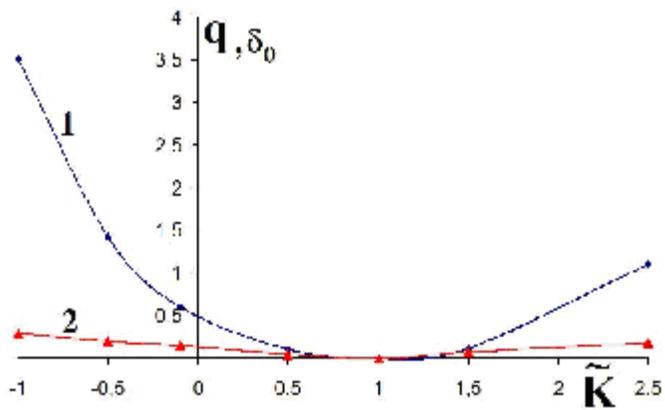


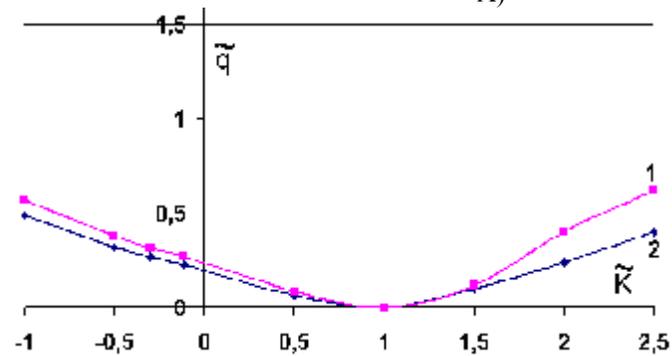
Рис. 4.19. Зависимость амплитуды уединенного изгиба \tilde{q} от скорости кинка \tilde{u} ($1-\tilde{W}_x = 1$, $\tilde{W}_y = 2$, $\tilde{K} = -0.5$; $2-\tilde{W}_x = 0.4$, $\tilde{W}_y = 2$, $\tilde{K} = -1.5$).

Зависимость положения центра кинка $q = p/2$ от координат (\tilde{x}, \tilde{y}) для случая $\tilde{W}_x = 2$, $\tilde{W}_y = 2$, $\tilde{K} = 3.5$, $\tilde{u} = 0.75$ приведена на рис.4.24. Видно, что, в данном случае, увеличение значения \tilde{K} привело к появлению уединенной изгибной волны вида «солитон на солитоне», две половинки которого разъезжаются в разные стороны с одинаковой скоростью.

Рассмотрим теперь случай, когда имеются две одинаковые области неоднородности параметра \tilde{K} . Это позволяет рассмотреть взаимодействие двух уединенных изгибных волн. Вначале, для примера, приведем результаты численного счета для случая $-\tilde{W}_x = 2$, $\tilde{W}_y = 2$, $\tilde{K} = 3.5$.

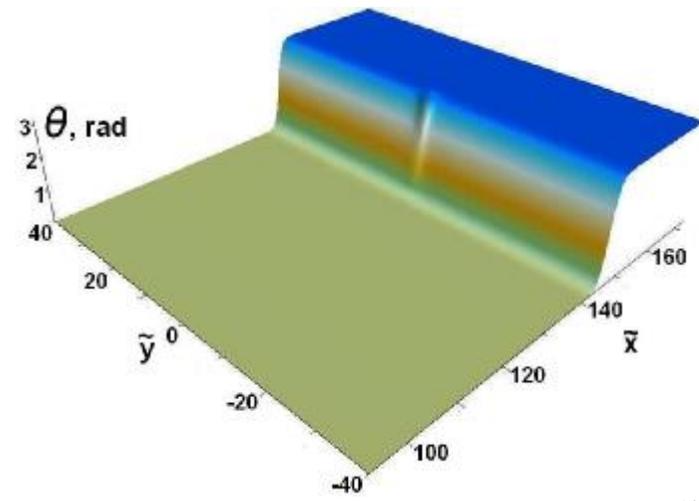


А)

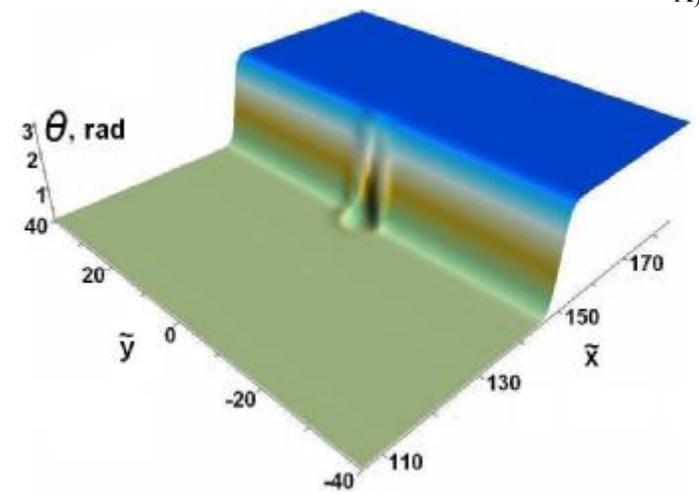


Б)

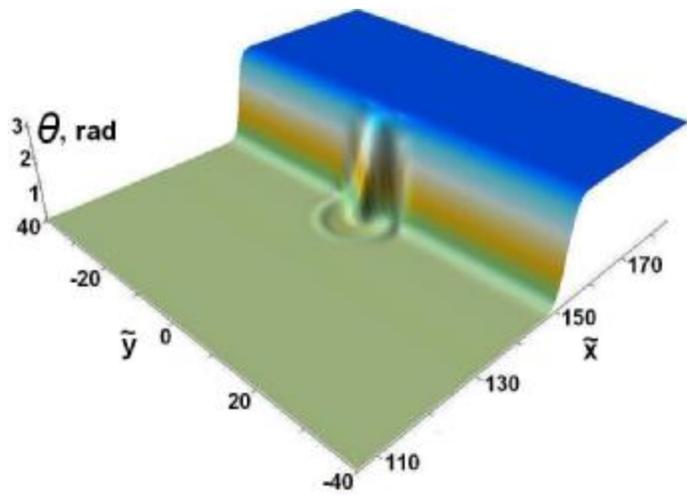
Рис. 4.20. Зависимость амплитуды уединенного изгиба q от глубины \tilde{K} А)– $\tilde{W}_x = 1, \tilde{u} = 0.55$ (1– $\tilde{W}_y = 3, 2- \tilde{W}_y = 1$), Б)– $\tilde{W}_x = 1, \tilde{u} = 0.3$ (1– $\tilde{W}_y = 1, 2- \tilde{W}_y = 0.6$).



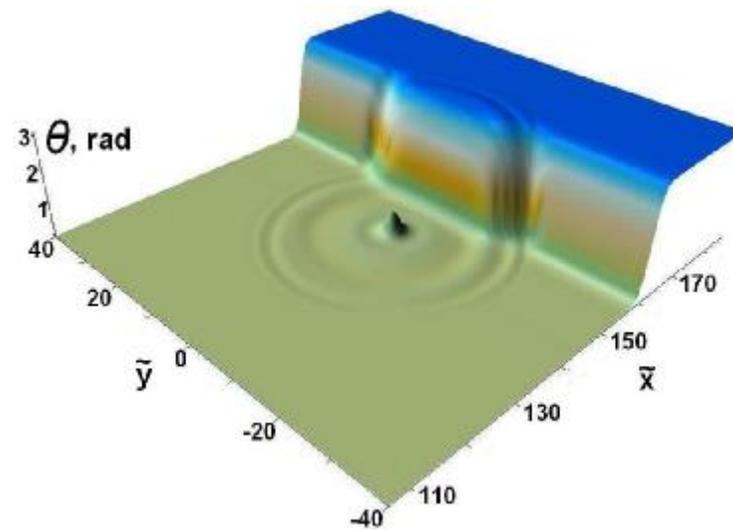
А)



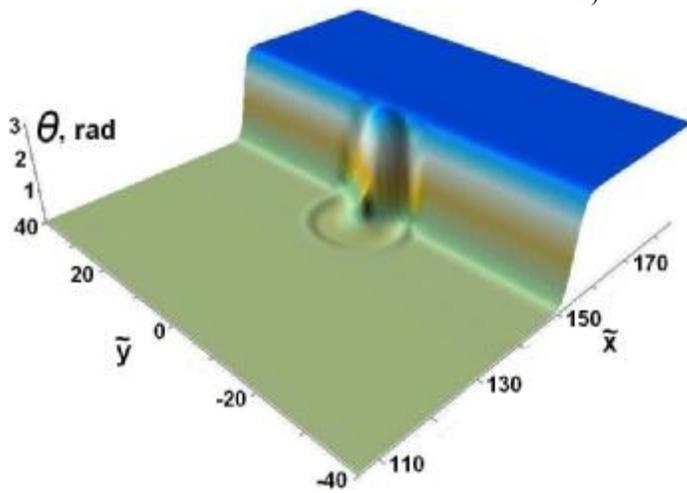
Б)



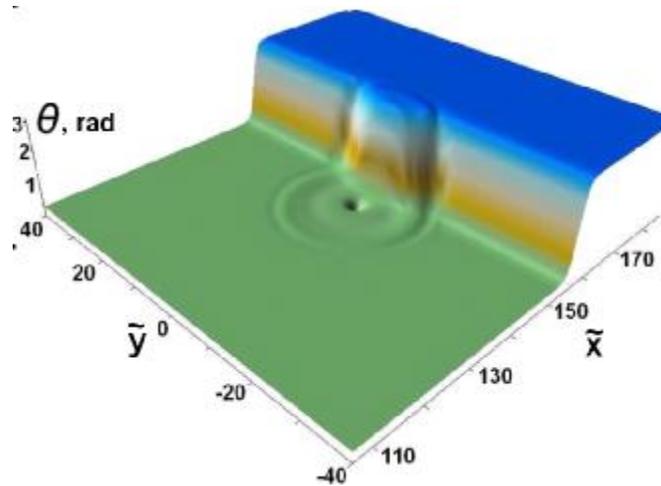
В)



Д)



Г)



Е)

Рис. 4.21. Структура нелинейной волны при пересечении кинком области неоднородности \tilde{K} типа ямы для случая рис. 4.18 в разные моменты времени. (А)– $\tilde{t} = 206$, В)– $\tilde{t} = 210$, В)– $\tilde{t} = 212$, Г)– $\tilde{t} = 214$, Д)– $\tilde{t} = 222$, Е)– $\tilde{t} = 232$).

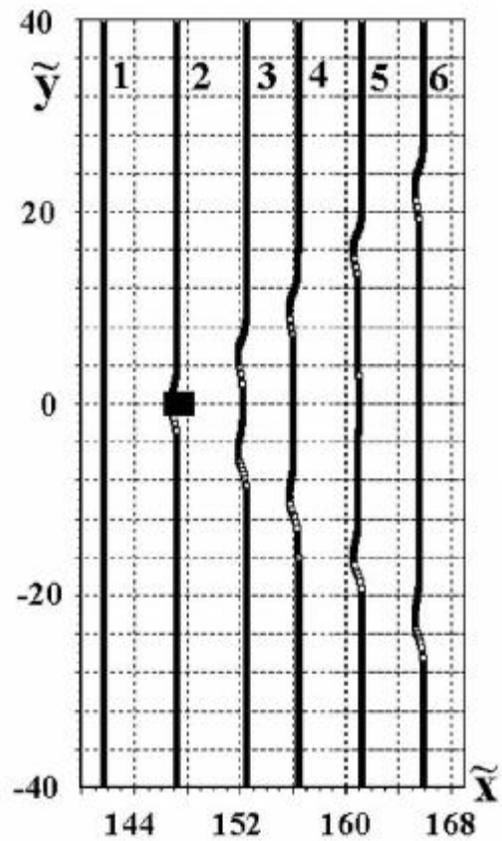
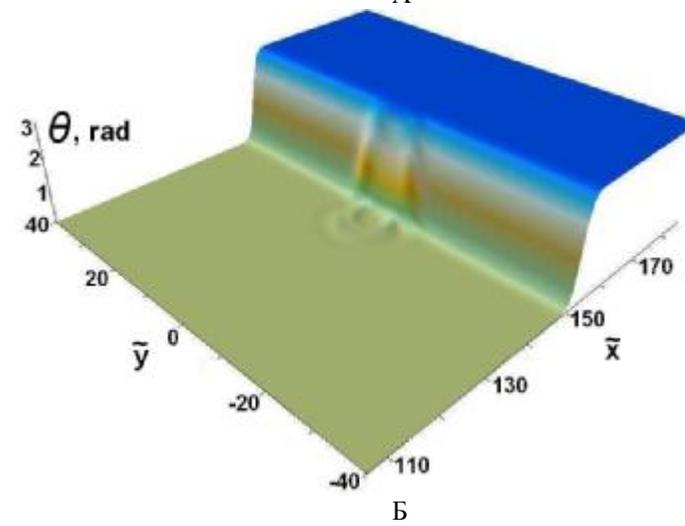
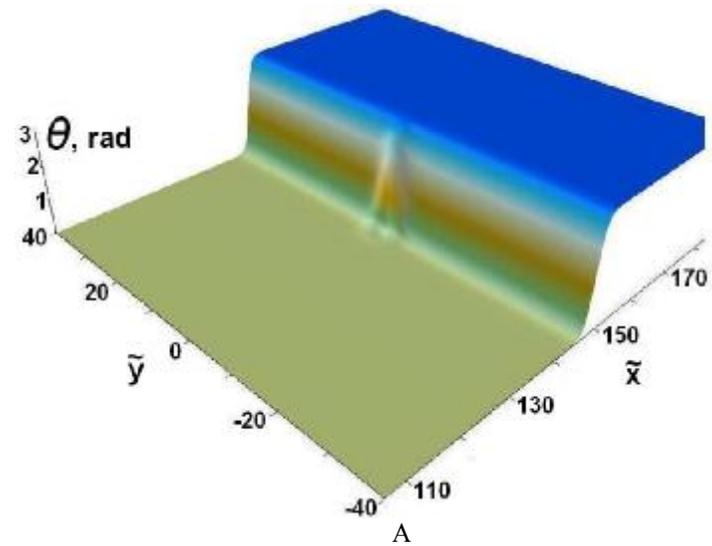


Рис. 4.22. Зависимость положения центра кинка $q = p/2$ от координат (\tilde{x}, \tilde{y}) для случая $\tilde{W}_X = 2$, $\tilde{W}_Y = 2$, $\tilde{K} = 2.5$, $\tilde{u} = 0.75$ ($1-t = 228$, $2-t = 236$, $3-t = 244$, $4-t = 250$, $5-t = 258$, $6-t = 266$).



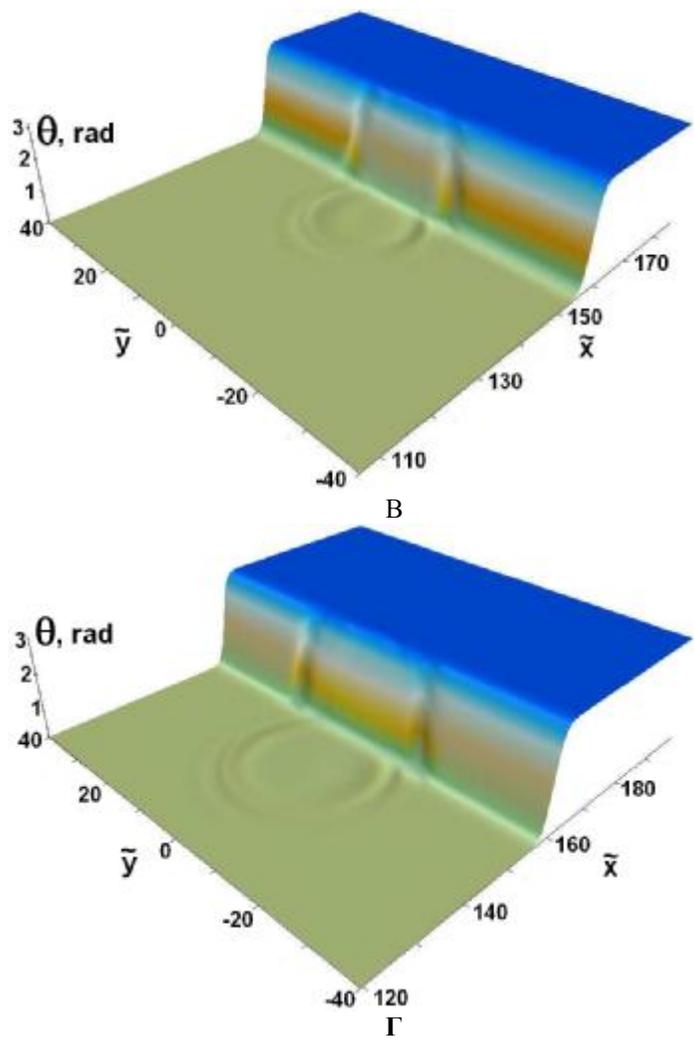


Рис. 4.23. Структура нелинейной волны при пересечении кинком области неоднородности параметра \tilde{K} типа барьер для случая рис.4.21 в разные моменты времени (А)– $\tilde{t} = 210$, Б)– $\tilde{t} = 214$, В)– $\tilde{t} = 220$, Г)– $\tilde{t} = 224$).

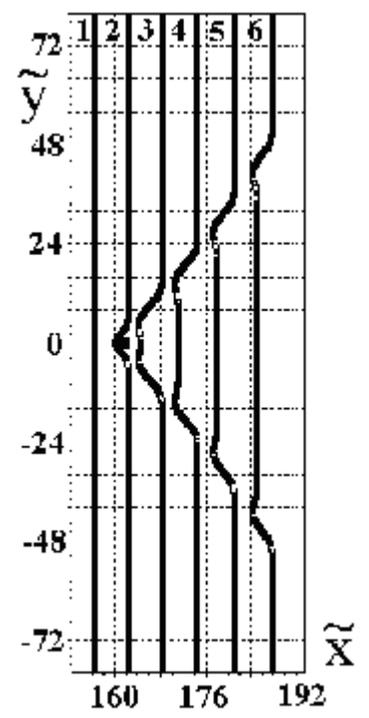
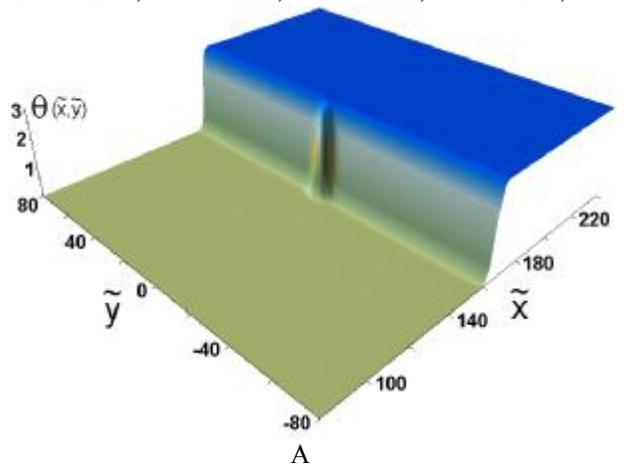


Рис. 4.24. Зависимость положения центра кинка $q = p/2$ от координат (\tilde{x}, \tilde{y}) для случая $\tilde{W}_X = 2$, $\tilde{W}_Y = 2$, $\tilde{K} = 3.5$, $(1-t = 250$, $2-t = 260$, $3-t = 270$, $4-t = 282$, $5-t = 296$, $6-t = 312$).



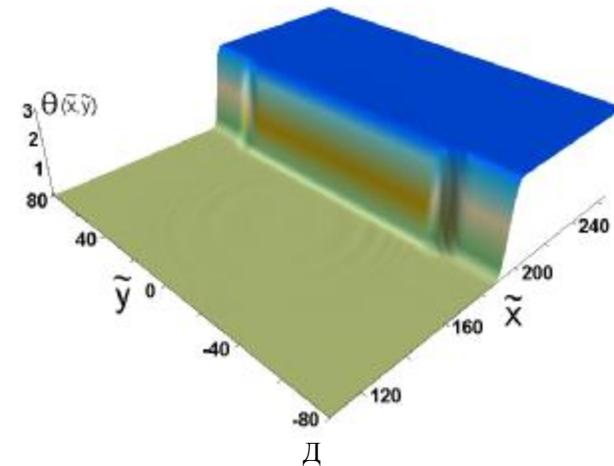
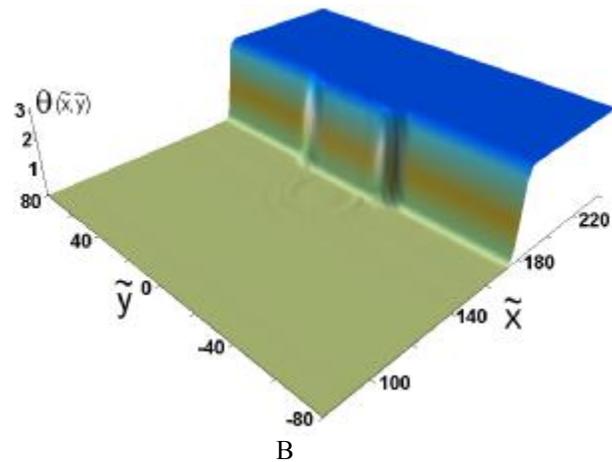
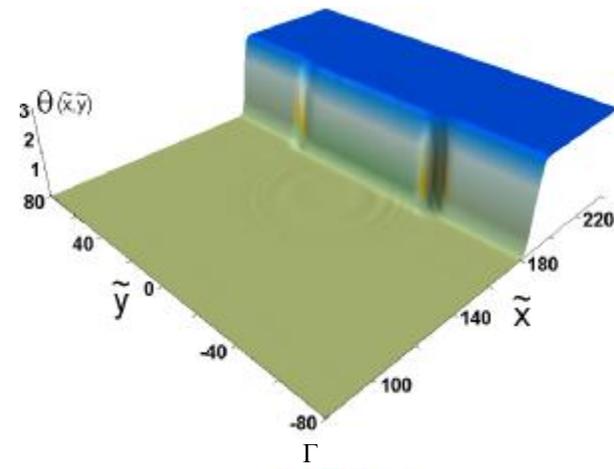
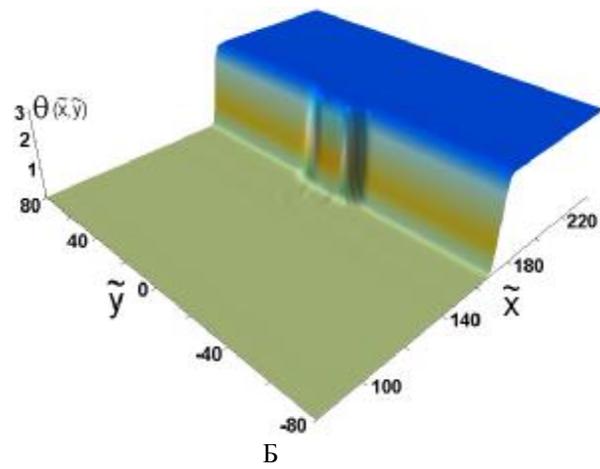


Рис. 4.25. Структура нелинейной волны при пересечении кинком области неоднородности параметра \tilde{K} типа барьер для случая рис. 4.24 в разные моменты времени (А)– $\tilde{t} = 260$, Б)– $\tilde{t} = 278$, В)– $\tilde{t} = 292$, Г)– $\tilde{t} = 308$, Д)– $\tilde{t} = 324$).

На рис.4.26 изображено положение центра кинка, соответствующее значению $q = \frac{p}{2}$ (жирная линия) в разные моменты времени. Полный вид структуры кинка в различные моменты времени представлен на рис. 4.27. Из рисунка 4.26 видно, что искривления взаимодействуют как кинки уравнения синус–Гордона.

Рассмотрим теперь случай $\tilde{K} < 1$. Для примера приведем результаты $\tilde{W}_X = 2$, $\tilde{W}_Y = 2$, $\tilde{K} = -1.5$. Из рис.4.28 видно, что взаимодействие также происходит как между кинками уравнения синус-Гордона. В результате эволюции первоначальной уединенной изгибной волны получаем как бы «кинк на кинке». Отметим, что подобный термин был введен для описания наблюдаемого на экспериментах в редкоземельных ортоферритах [18] искривления доменной границы.

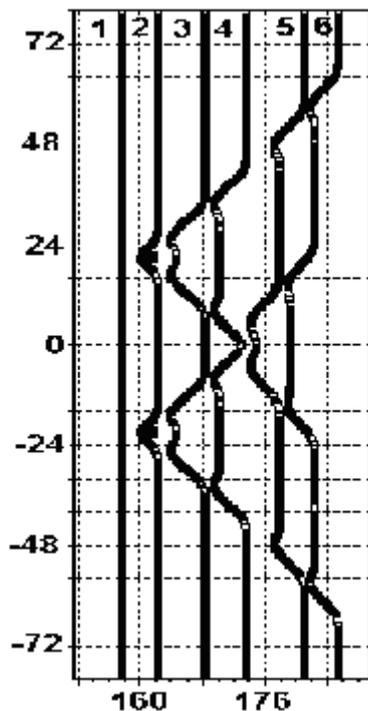
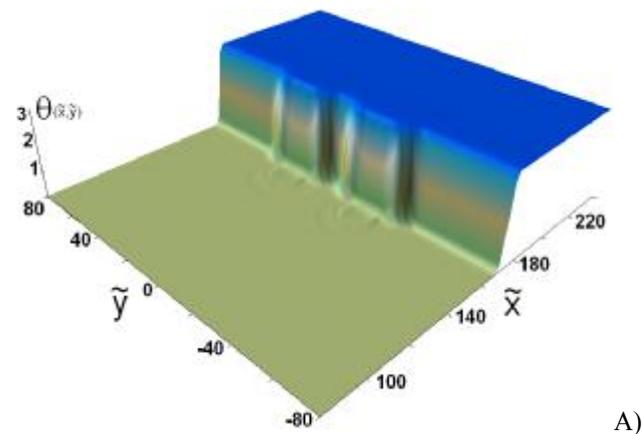
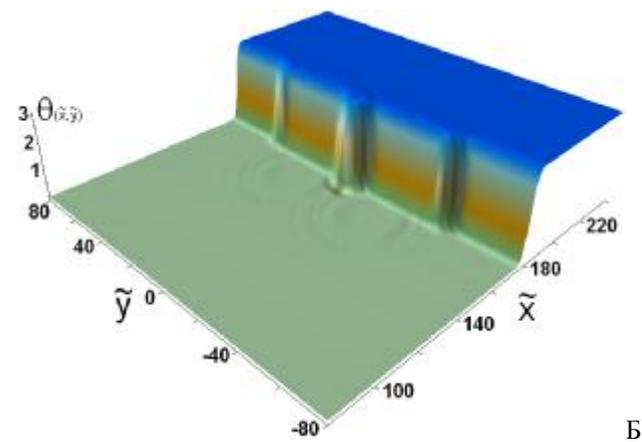


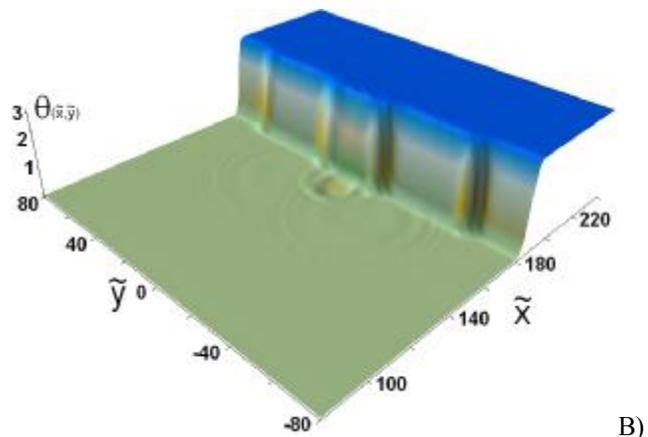
Рис. 4.26. Зависимость положения центра кинка $q = p/2$ от координат (\tilde{x}, \tilde{y}) для случая $\tilde{W}_X = 2$, $\tilde{W}_Y = 2$, $\tilde{K} = 3.5$, $(1 - \tau = 252$, $2 - \tau = 260$, $3 - \tau = 270$, $4 - \tau = 280$, $5 - \tau = 296$, $6 - \tau = 306$).



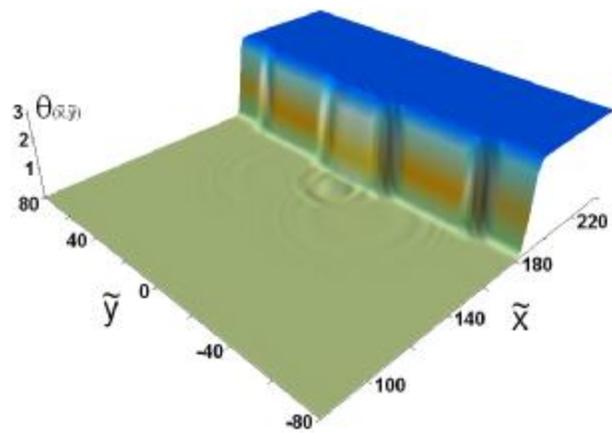
А)



Б)



В)



Г)

Рис. 4.27. Структура нелинейной волны при пересечении кинком области неоднородности параметра \tilde{K} типа барьер для случая рис.4.26 в разные моменты времени (А)– $\tilde{t} = 284$, Б)– $\tilde{t} = 294$, В)– $\tilde{t} = 306$, Г)– $\tilde{t} = 308$).

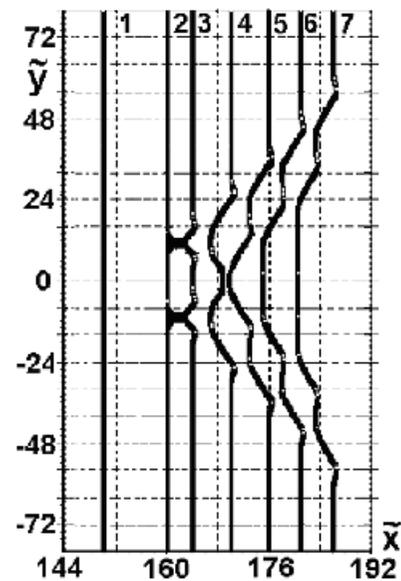
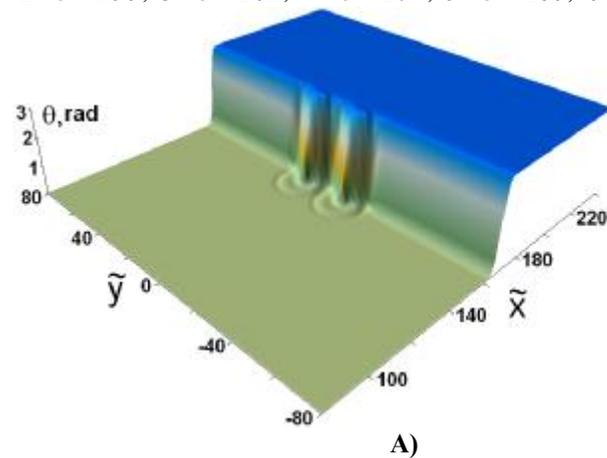
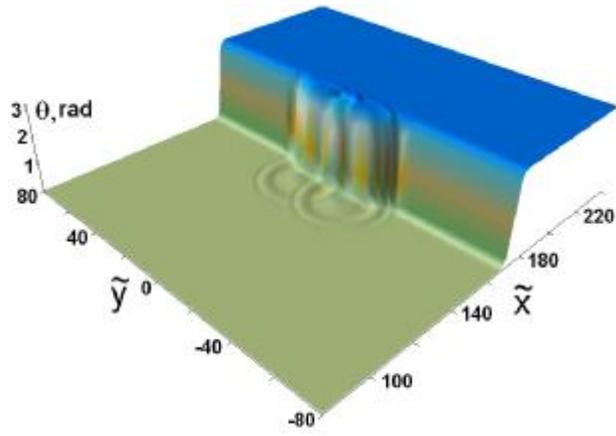


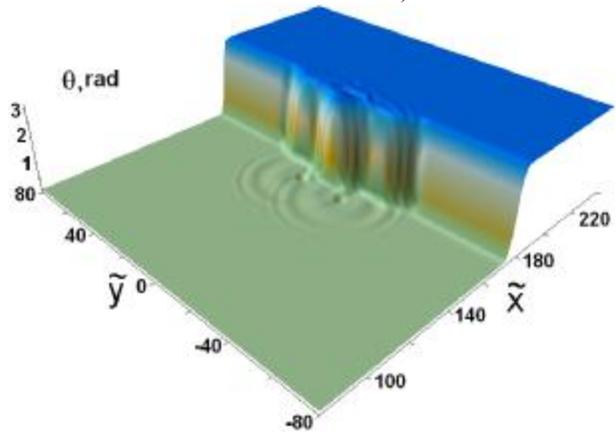
Рис. 4.28. Зависимость положения центра кинка $q = p/2$ от координат (\tilde{x}, \tilde{y}) для случая $\tilde{W}_X = 2$, $\tilde{W}_Y = 2$, $\tilde{K} = -1.5$, ($1-t = 242$, $2-t = 256$, $3-t = 262$, $4-t = 274$, $5-t = 286$, $6-t = 294$, $7-t = 308$).



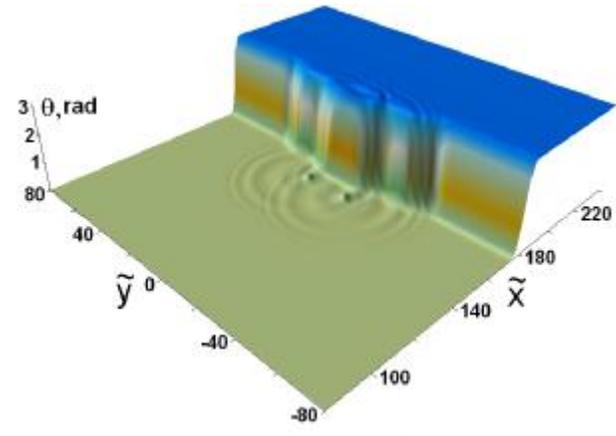
А)



Б)



В)



Г)

Рис. 4.29. Структура нелинейной волны при пересечении кинком области неоднородности параметра \tilde{K} типа яма для случая рис. 4.28 в разные моменты времени (А)– $\tilde{t} = 256$, Б)– $\tilde{t} = 262$, В)– $\tilde{t} = 294$, Г)– $\tilde{t} = 308$).

4.2.2 Зарождение солитонов на двумерном дефекте

Рассмотрим, что происходит в области дефекта при движении через него кинка, по инерции ($\tilde{a} = 0, \tilde{h} = 0$) и при наличии внешней силы и затухания ($\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$), с постоянной начальной скоростью $\tilde{v} = 0.57$. На рис.4.21 и 4.23 обнаружен процесс образования двумерного солитона, рождающегося после прохождения кинком области дефекта и являющегося источником излучения свободных (объемных) волн. На рис.4.30 - 4.32 приведен вид функции $q(x, y, t)$ для различных значений параметров K и W .

На первом этапе ($\tilde{t} = 26 \div 32$, причем в зависимости от рассмотренных случаев временной период может меняться), после прохождения центра кинка, в области дефекта происходит формирование солитона в виде уединенной нелинейной волны с колоколообразным видом осциллирующей функции $q(x, y, t)$, симметричной по \tilde{x} и \tilde{y} (рис. 4.33) при симметричных значениях параметров W_x и W_y . Однако, если взять случай с несимметричными параметрами W_x и W_y , то вид осциллирующей функции $q(x, y, t)$, будет несимметричным по координатам \tilde{x} и \tilde{y} (рис. 4.34). При

увеличении значений параметров происходит увеличение несимметричности по координатам \tilde{x} и \tilde{y} 2D солитона.

На втором этапе ($\tilde{t} > 32$) прослеживается периодический характер поведения функции $q(x^*, y^*, t)$. Для симметричного случая с периодом $T^* = 6.4$ (рис. 4.36 кривая 1). Для несимметричных случаев с периодом $T^* = 7.7$ (рис. 4.37 кривая 1) и $T^* = 13.3$ (рис. 4.38 кривая 1). Т.е. можно сказать, что с увеличением размеров области дефекта происходит увеличение периода колебания и, соответственно, уменьшения ее частоты. При этом, амплитуда колебаний уменьшается со временем, за счет излучения солитоном свободных волн. Отметим, что подобная картина наблюдается и при движении кинка через область дефекта с $h \neq 0$, $a \neq 0$, но с некоторыми изменениями. Например, для симметричного случая с периодом $T^* = 6.4$ (рис. 4.36 кривая 2), несимметричных случаев с периодом $T^* = 7.65$ (рис. 4.37 кривая 2) и $T^* = 14.2$ (рис. 4.38 кривая 2) максимальная амплитуда несколько уменьшается. Т.е., параметры солитона, в нашем случае, слабо зависят от величины h . Правда, для симметричного случая 4.30 обе кривые практически совпадают.

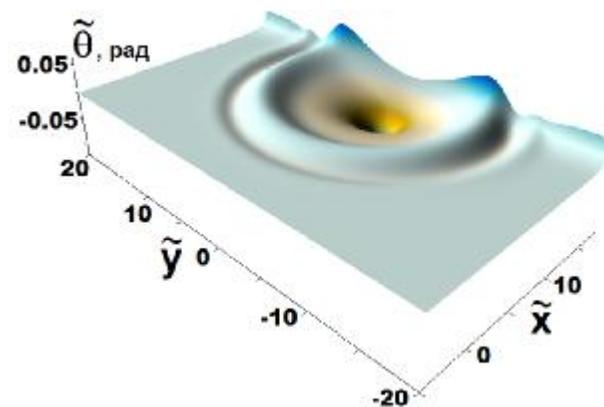
Отметим, что у уравнения синус–Гордона имеется 2D решение, описывающее локализованные пространственные колебания, называемое пульсоном [15,16]. Сравнивая численные результаты с аналитическими результатами [15], можно связать полученную магнитную неоднородность в случае симметричных значений параметров \tilde{W}_x , \tilde{W}_y с решением уравнения синус–Гордона типа «слабоизлучающего пульсона».

На рис.4.39 приведены зависимости максимальной амплитуды колебания пульсона в центре дефекта \tilde{q}_{\max} от времени. Видно, что амплитуда пульсона достаточно слабо уменьшается со временем. При этом, при движении под действием внешней силы и без нее характер кривых остается прежним.

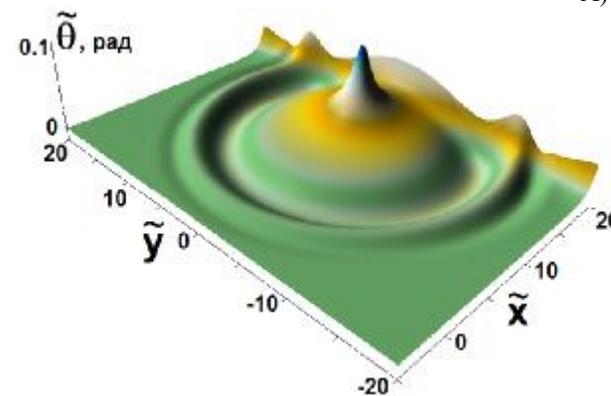
Зависимость максимального значения угла \tilde{q}_{\max} в центре дефекта от скорости кинка \tilde{v} представлена на рис.4.40 кривая 1. Из рисунка видно, что зависимость имеет максимум. Результаты численных расчетов также показали, что значение T^* для пульсона не зависит от начальной скорости кинка, а является функцией от параметров \tilde{W}_x , \tilde{W}_y , \tilde{K} .

Также было обнаружено, что после образования слабоизлучающего пульсона, он, в свою очередь, излучает объемные волны, которые затухают со временем. Данный вид излучения нельзя описать функцией гармонического вида, т.е. излучение имеет существенно нелинейную

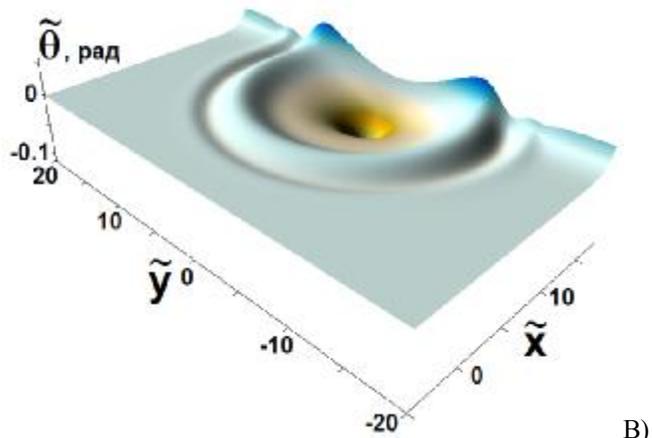
природу (рис. 4.41). Можно предположить, что в данном случае наблюдается излучение движущихся 2D бризеров. Однако этот вопрос требует еще проведения дополнительных расчетов и изучения.



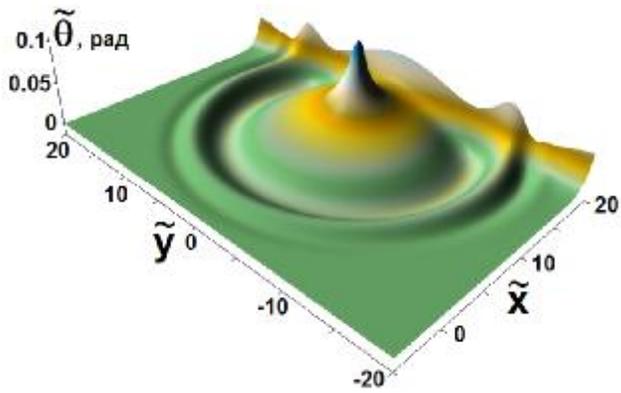
А)



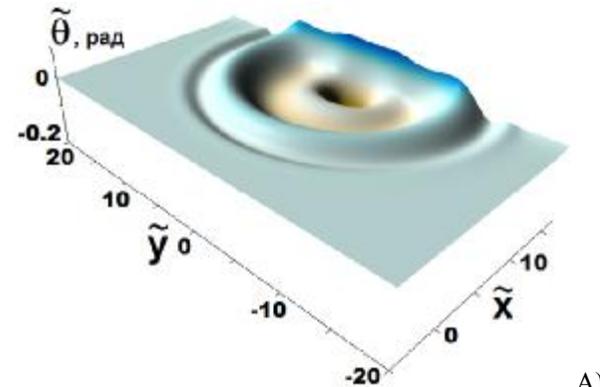
Б)



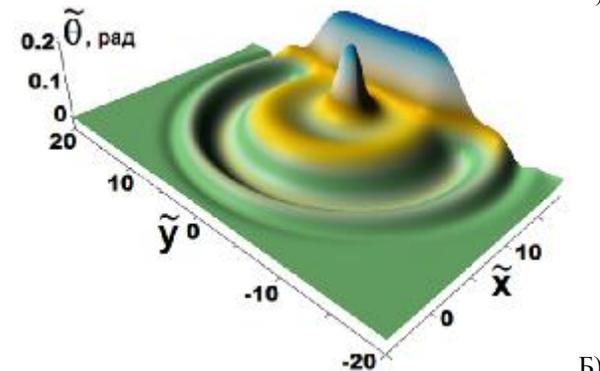
В)



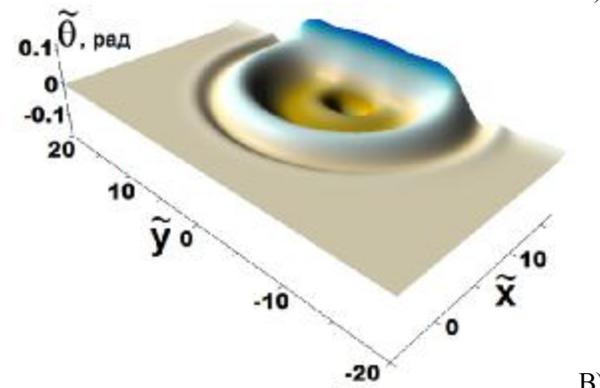
Г)



А)

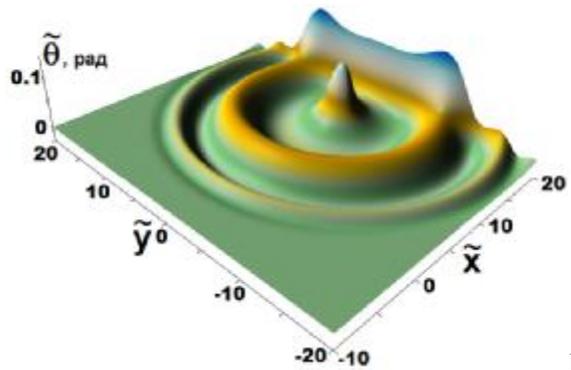


Б)



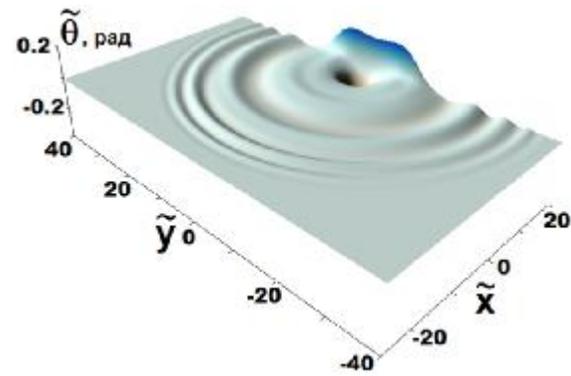
В)

Рис. 4.30. Структура солитона в разные моменты времени для случая $\tilde{W}_x=1$, $\tilde{W}_y=1$, $\tilde{K}=-1$, $\tilde{v}=0.57$ по инерции (А)- $t=36$, Б)- $t=39,2$ для $\tilde{a}=0, \tilde{h}=0$) (В)- $t=36$, Г)- $t=39,4$ для $\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$).

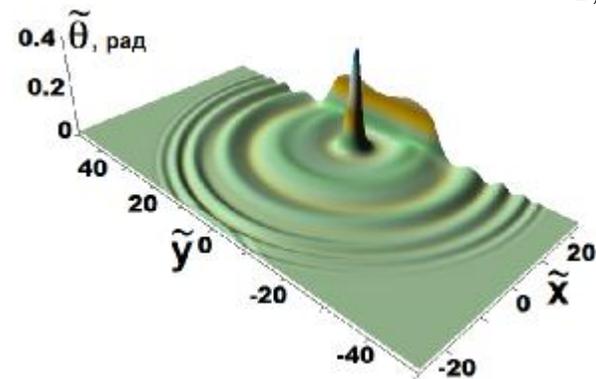


Г)

Рис. 4.31. Структура солитона в разные моменты времени для случая $\tilde{W}_x=1$, $\tilde{W}_y=3$, $\tilde{K}=-1$, $\tilde{v}=0.57$ (А)- $t=36$, Б)- $t=39$ для $\tilde{a}=0, \tilde{h}=0$), (В)- $t=36$, Г) - $t=40$ для $\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$).

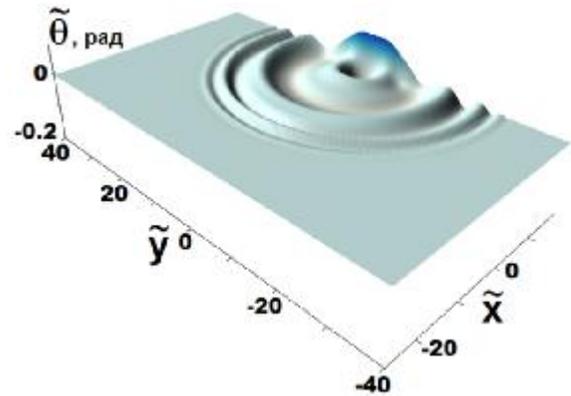


В)

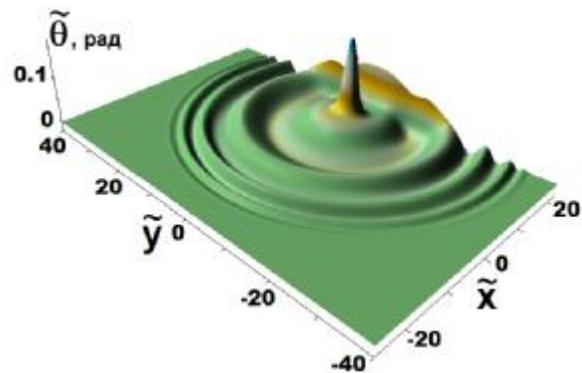


Г)

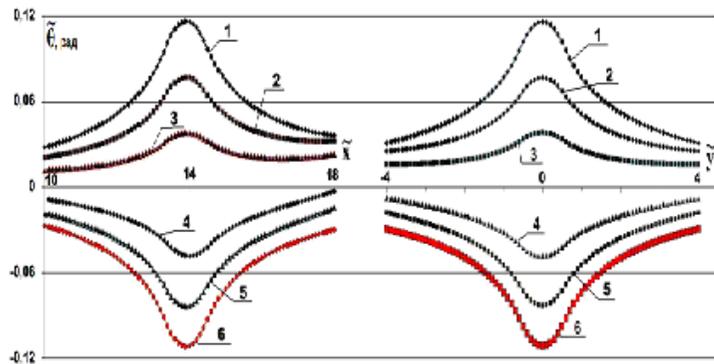
Рис. 4.32. Структура солитона в разные моменты времени для случая $\tilde{W}_x=2$, $\tilde{W}_y=3$, $\tilde{K}=-1$, $\tilde{v}=0.57$. С полем (А)- $t=50$, Б)- $t=56,6$ по инерции (В)- $t=58.8$, Г)- $t=66$).



А)



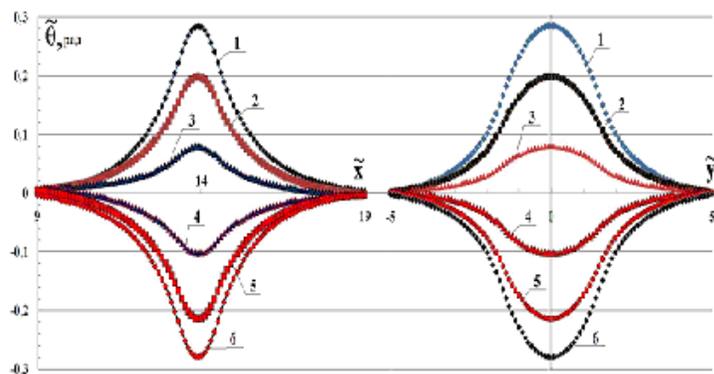
Б)



А

Б

Рис. 4.33. Зависимость величины функции $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ (А) и $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}, \tilde{t})$ (Б) в области дефекта в разные моменты времени для случая $n = 0,57$, $\tilde{W}_x = 1$, $\tilde{W}_y = 1$, $\tilde{K} = -1$, $(1-\tilde{t} = 47.4, 2-\tilde{t} = 48.4, 3-\tilde{t} = 49, 4-\tilde{t} = 49.8, 5-\tilde{t} = 50.4, 6-\tilde{t} = 51.2)$.



А

Б

Рис. 4.34. Зависимость величины функции $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ (А) и $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}, \tilde{t})$ (Б) в области дефекта в разные моменты времени для случая $n = 0,57$, $\tilde{K} = -1$, $\tilde{W}_x = 1$, $\tilde{W}_y = 3$, $(1-\tilde{t} = 47.4, 2-\tilde{t} = 48.4, 3-\tilde{t} = 49, 4-\tilde{t} = 49.8, 5-\tilde{t} = 50.4, 6-\tilde{t} = 51.2)$.

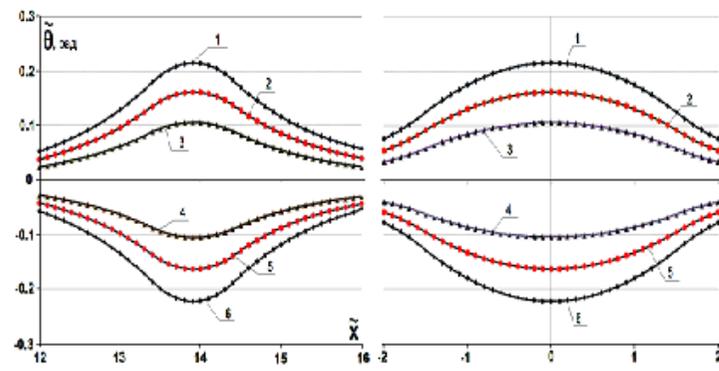


Рис. 4.35. Зависимость величины функции $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ (А) и $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}, \tilde{t})$ (Б) в области НКМА в разные моменты времени для случая $n = 0,57$, $\tilde{K} = -1$, $\tilde{W}_x = 2$, $\tilde{W}_y = 3$, $(1-\tilde{t} = 39.8, 2-\tilde{t} = 40.6, 3-\tilde{t} = 41, 4-\tilde{t} = 42.2, 5-\tilde{t} = 42.6, 6-\tilde{t} = 43.4)$.

С полем

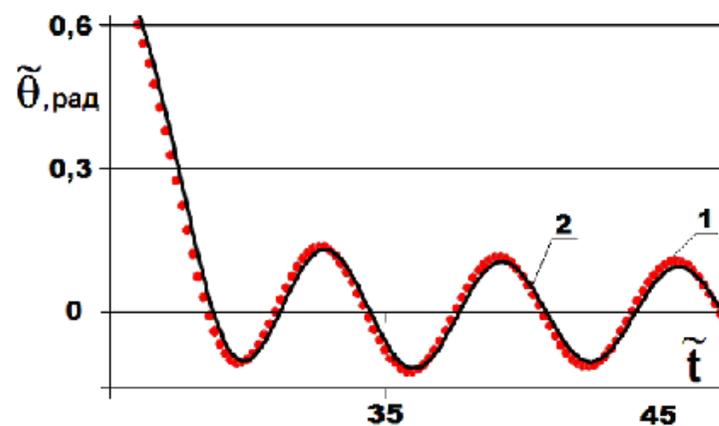


Рис. 4.36. Зависимость значения максимального угла $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ от времени \tilde{t} для случая рис. 4.30. (1 – движение по инерция при $\tilde{a} = 0, \tilde{h} = 0$ $T = 6.4, w = 0.98$, 2 – движение при $\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$ $T = 6.4, w = 0.98$) ($\tilde{W}_x = 1, \tilde{W}_y = 1, \tilde{K} = -1, \tilde{v} = 0.57$).

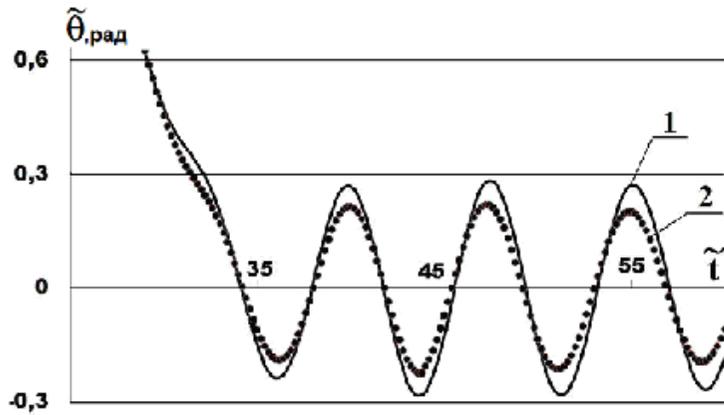


Рис. 4.37. Зависимость значения угла $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ от времени \tilde{t} для случая рис. 4.31. (1 – движение по инерция при $\tilde{a}=0, \tilde{h}=0$ $T=7.7, w=0.87$, 2 – движение при $\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$ $T=7.2, w=0.87$).

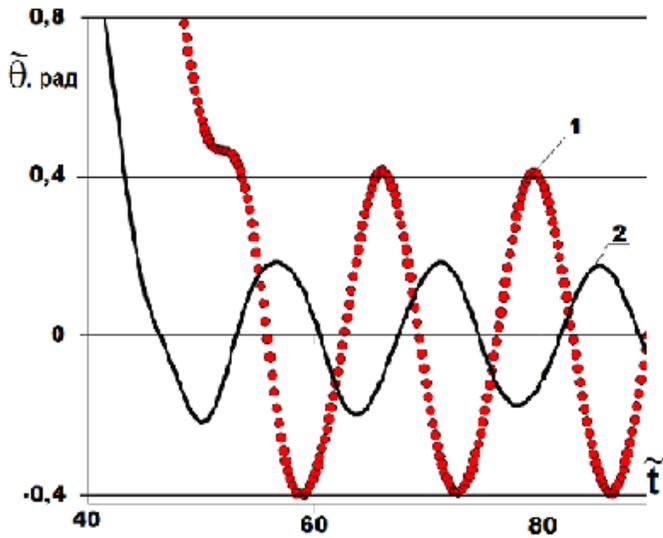


Рис. 4.38. Зависимость значения максимального угла $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ от времени \tilde{t} для случая рис.4.32. (1 – движение по инерция при $\tilde{a}=0, \tilde{h}=0$ $T=13.3, w=0.47$, 2 – движение при $\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$ $T=14.2, w=0.44$) ($\tilde{W}_x=2, \tilde{W}_y=3, \tilde{K}=-1, \tilde{v}=0.57$).

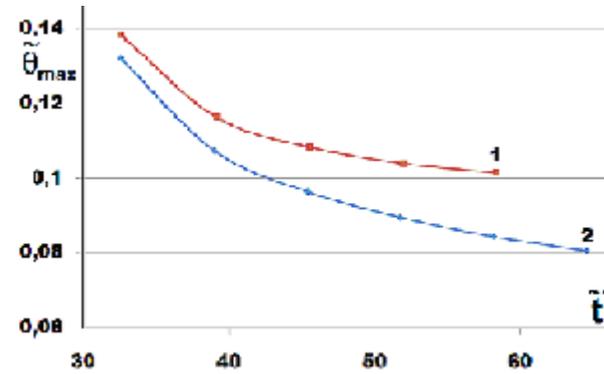


Рис. 4.39. Зависимость значения максимального угла $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ от времени \tilde{t} для случая рис.4.30. (1 – движение по инерция при $\tilde{a}=0, \tilde{h}=0$, 2 – движение при $\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$) (для случая- $\tilde{W}_x=1, \tilde{W}_y=1, \tilde{K}=-1, \tilde{v}=0.57$).

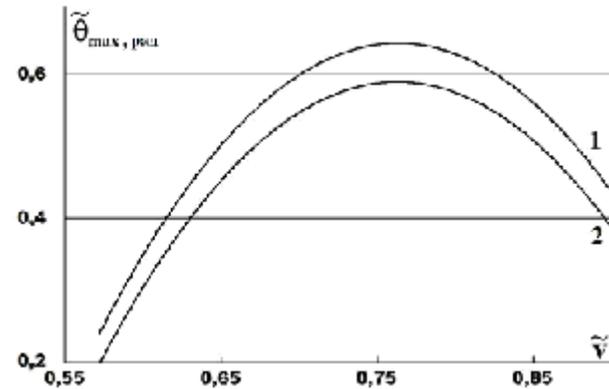


Рис. 4.40. Зависимость максимального значения \tilde{q}_{\max} в точке с координатами $\tilde{x}^*=13.9, \tilde{y}^*=0$ от скорости ДГ \tilde{v} для случая рис. 4.32. (1- движение по инерция при $\tilde{a}=0, \tilde{h}=0$, 2- движение при $\tilde{a} \neq 0, \tilde{h} \neq 0$).

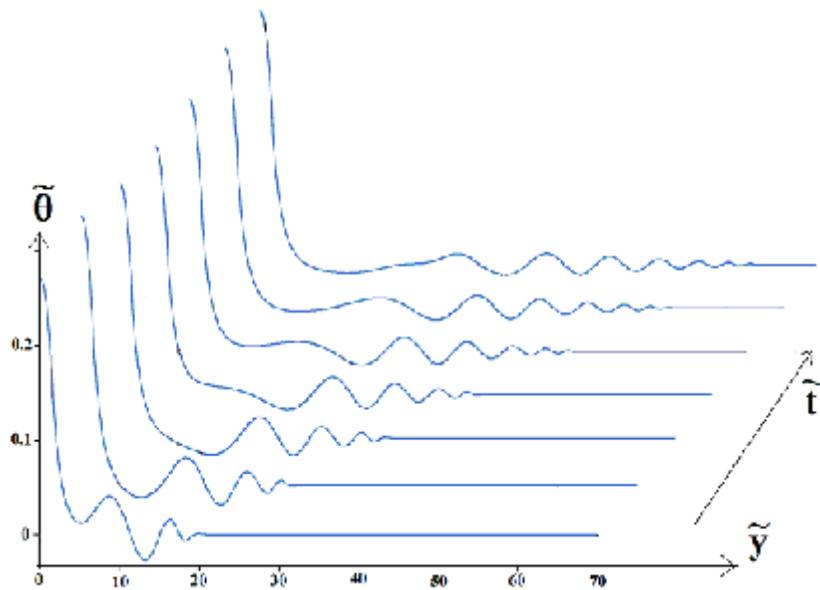


Рис. 4.41. Зависимость величины функции $\tilde{q}(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{t})$ в разные моменты времени для случая $\tilde{W}_x = 1$, $\tilde{W}_y = 3$, $\tilde{K} = -1$, ($1 - \tilde{t} = 39.8$, $2 - \tilde{t} = 47.4$, $3 - \tilde{t} = 55$, $4 - \tilde{t} = 62.8$, $5 - \tilde{t} = 70.6$, $6 - \tilde{t} = 78.4$).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, Введение в нелинейную физическую механику.- Киев: Наукова думка. (1989).
2. M. Remoissenet, Waves called solitons// Springer, Berlin. (1996).
3. A.C.Scott Nonlinear science// Oxford University, Oxford. (1999).
4. P.L. Christiansen, M.P. Sorensen and A.C.Scott Nonlinear science at the dawn of the 21st century// Springer, Berlin. (2000).
5. О.М. Браун, Ю.С. Кившарь, Модель Френкеля-Контровой: Концепции, методы, приложения. - М.: Физматлит. (2008). С. 519.
6. К.Лонгрен, Э.Скотт, Солитоны в действии. - М.: Мир. (1981).
7. А.С. Давыдов, Солитоны в молекулярных системах. - Киев: Наукова думка. (1984).
8. N.R. Quintero, A. Sanches, F.G. Mertens// Phys. Rev. E. v.62, №1. (2000). p.60 – 64.
9. J.A. Gonzales, A. Bellorin, I.E. Guerrero// Phys. Rev. E v.60, №1. (1999). p.37 – 40.
10. J.A. Gonzales, A. Bellorin, I.E. Guerrero// Phys. Rev. E. v.65, 065601(R) (2002). p.1-4.
11. M.B. Fogel, S.E. Trullinger, A.R. Bishop, J.A. Krumhandl// Phys.Rev.B. v.15, №3. (1976). p.1578-1592.
12. D.I. Paul. J.Phys// Solid State Phys. v.12. №3. (1979). p. 585-593.
13. Екомасов Е.Г., Шабалин М.А., Азаматов Ш. А., Временная эволюция кинков модифицированного уравнения синус-Гордона при наличии пространственной неоднородности параметров. Препринт. - Уфа: РИО БашГУ. (2005). с. 40.
14. Ferreira L.A., Piette B. // Physical Review. E 77, 036616. (2008).
15. Боголюбовский И.Л., Махоньков В.Г.// Письма в ЖЭТФ 25, 2, 120 (1977).

16. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, Солитоны и нелинейные волновые уравнения.- М.-Мир.1988.-694 с.
17. V.G. Bar'yakhtar, M.V. Chetkin, B.A. Ivanov, S.N. Gadetskii Dynamics of Topological Magnetic Solitons// Springer Tracts in Modern Physics, v.129, Berlin. (1994).
18. А.М. Балбашов, А.В. Залесский, В.Г. Кривенко, Е.В. Сеницын// Письма в ЖТФ. Т.14, 4. (1988). С.293-297.
19. М.В. Четкин, С.Н. Гадецкий// Письма в ЖЭТФ. т.38, 5. (1983). С.260-262.
20. E.G. Ekomasov // PMM. V.101, Suppl. 1. (2006). P. S48-S50.
21. E.G. Ekomasov, M.A. Shabalin, Sh.A. Azamatov, A.F. Buharmetov// Functional Materials. V. 13, No. 3. (2006). С. 443–446.
22. E.G. Ekomasov, Sh.A. Azamatov, R.R. Murtazin // Functional Materials. V. 15, No. 2. (2008). P. 235-238.
23. Е.Г. Екомасов, Ш.А. Азаматов, Р.Р. Муртазин// ФММ. Т.108, №6. (2009). С. 566-571.
24. Е.Г. Екомасов, Ш.А. Азаматов, Р.Р. Муртазин // ФММ. Т. 105, № 4. (2008). С. 341-349.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава первая	
Теория возмущений для модифицированного уравнения синус–Гордона	
1.1. Решения уравнения синус–Гордона.....	3
1.2. Линейная теория возмущений.....	6
1.3. Пространственная модуляция периодического потенциала.....	9
1.4. Движение кинка уравнения синус–Гордона в поле внешних возмущений.....	11
Глава вторая	
Эволюция кинков модифицированного уравнения синус–Гордона при наличии пространственной неоднородности параметров в виде ступеньки	
2.1. Основные уравнения и метод решения.....	15
2.2. Выход кинка на стационарную скорость	16
2.3. Динамика кинка.....	20
Глава третья	
Эволюция кинков модифицированного уравнения синус–Гордона при наличии пространственной неоднородности параметров в виде барьера или ямы.....	26
3.1. Динамика кинка.....	27
3.2. Пининг кинка.....	30
3.3. Колебания кинка локализованного в области дефекта.....	35
3.4. Изменение фазы кинка.....	41

Глава четвертая

Возбуждение солитонов модифицированного уравнения синус–Гордона

4.1.	Случай одномерной неоднородности параметров.....	45
4.1.1.	Случай одной области неоднородности параметров.....	45
4.1.2.	Случай двух областей неоднородности параметров.....	55
4.2.	Случай двумерной неоднородности параметров.....	59
4.2.1.	Зарождение изгибных волн на кинке.....	59
4.2.2.	Зарождение солитонов на двумерном дефекте.....	78
Литература.....		90