

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Башкирский государственный университет»

А.М. Ахтямов

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Международная школа-конференция для студентов,
аспирантов и молодых учёных
«Фундаментальная математика и её приложения в естествознании»

Сборник трудов. Том VII

Уфа
РИЦ БашГУ
2009

УДК 51+330.101(030)

ББК 65.01(92)

А 95

Книга издана при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (гос. контракт № 02.741.12.2037)

Редакционная коллегия:

д-р хим. наук, проф. **Р.Ф. Талипов** (*проректор по науке БашГУ*);
д-р физ.-мат. наук, проф. **Р.М. Вахитов** (*отв. редактор*);
д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.Н. Хабибуллин** (*редактор*);
д-р хим. наук, проф. **Р.М. Ахметханов** (*редактор*);
д-р физ.-мат. наук, проф. **Е.Г. Екомасов** (*редактор*);
канд. физ.-мат. наук, доц. **В.В. Картак**;
канд. хим. наук, доц. **И.Р. Латыпова**;
инж. **А.С. Хамаев**; инж. **Е.Р. Гареева**

А х т я м о в А. М. Математические модели экономических процессов: Монография. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. — 140 с.

Даётся обзор динамических моделей экономики и предлагаются новые математические модели. На основе этих моделей объясняются некоторые экономические процессы и выводятся новые экономические закономерности.

Для специалистов по математическим методам в экономике, преподавателей, научных работников, аспирантов и магистрантов.

© РИЦ БашГУ, 2009

© А. М. Ахтямов, 2009

Оглавление

Введение

0.1	Классификация динамических моделей экономики	6
0.2	Основные результаты, полученные в монографии	8
1	Математическая модель естественного роста	11
1.1	Естественный рост и задача Бернулли о кредитовании	12
1.2	Рост населения Земли и истощение ресурсов	14
1.3	Рост денежного вклада в сбербанке	16
1.4	Инфляция и правило величины 70	17
1.5	Рост выпуска дефицитной продукции	19
2	Модели естественного роста с учетом насыщения	21
2.1	Рост с учетом насыщения	21
2.2	Рост населения Земли с учетом насыщения	22
2.3	Рост выпуска продукции в условиях конкуренции	24
2.4	Рост обеспеченности новым товаром	24
2.5	Модель «социальной диффузии»	25
3	Математические модели экономики в форме линейных дифференциальных уравнений	26
3.1	Модель выбытия фондов	26
3.2	Рост производства с учетом инвестиций	27
3.3	Объяснение некоторых парадоксов инвестирования на основе безлаговой модели	30
3.4	Оптимальный график линейного инвестирования	40

3.5	Оптимальный график инвестирования	41
3.6	Модель колебания рыночных цен	46
4	Математические модели в форме систем дифференциальных уравнений	50
4.1	Динамическая модель Леонтьева	50
4.2	Модель изменения рыночной цены и спроса на электроэнергию	53
5	Математические модели в форме разностных уравнений	56
5.1	Паутинообразная модель рынка	56
5.2	Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса	58
5.3	Регрессионные модели	61
5.4	Эконометрика и оценка адекватности модели	67
5.5	Авторегрессионные модели	70
6	Случайные процессы в экономике	74
6.1	Цепи Маркова и их приложения в экономике	74
6.2	Понятие случайного процесса	82
6.3	Стационарный процесс и динамические системы	84
6.4	Простейший поток событий	89
6.5	Теорема Хинчина о суммарном потоке	91
6.6	Уравнения Колмогорова.	92
7	Системы массового обслуживания	97
7.1	Простейшая задача массового обслуживания	97
7.2	Понятие системы массового обслуживания	100
7.3	Одноканальная система с отказами	102
7.4	Многоканальная система с отказами	104
7.5	Одноканальная система с ограниченной очередью	108
7.6	Одноканальная система с неограниченной очередью	110

7.7	Многоканальная система с ограниченной очередью	116
7.8	Многоканальная система с неограниченной очередью	124
7.9	Нерешенные проблемы (вместо заключения)	134

Введение

0.1 Классификация динамических моделей экономики

Динамическими моделями экономики называют модели, описывающие экономику в развитии (в отличие от статических, характеризующих ее состояние в определенный момент). Модель является динамической, если как минимум, одна ее переменная относится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные.

С помощью динамических моделей экономики решаются, в частности, задачи планирования и прогнозирования экономических процессов.

Математическое описание динамических моделей экономики производится с помощью *дифференциальных уравнений* (в моделях с непрерывным временем), *разностных уравнений* (в моделях с дискретным временем), а также *случайных процессов* (в моделях со случайными величинами).

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только сами функции, но и их производные.

Применение дифференциальных уравнений в экономике основано на механическом смысле производной, согласно которому производная $\frac{dy(t)}{dt}$ выражает скорость изменения функции $y(t)$.

Если в уравнение входит первая производная и не входят производные более высокого порядка, то это уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка*. Если же в урав-

нение входит вторая производная и не входят производные более высокого порядка, то оно называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. Аналогично определяются дифференциальные уравнения третьего порядка, четвертого порядка и т. д. Вообще, *порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной (искомой функции), входящей в это уравнение. Во многих случаях (см. предыдущий параграф) искомые функции являются функциями времени t .

В экономических исследованиях значения величин часто берутся в определенные дискретные моменты времени. Например, о выполнении плана судят по показателям на конец планируемого периода. Поэтому вместо скорости $\frac{dy(t)}{dt}$ изменения некоторой величины $y(t)$ приходится брать среднюю скорость $\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$ за определенный конечный интервал времени Δt .

Если выбрать масштаб времени так, что длина рассматриваемого периода Δt равна 1, то скорость $\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$ изменения величины можно представить как разность

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t),$$

которую часто называют *первой разностью*. При этом различают *правую* и *левую*, в частности,

$$\Delta y(t) = y(t) - y(t-1)$$

— левая, а приведенная выше — правая.

Можно определить *вторую разность*:

$$\Delta^2 y(t) = \Delta(\Delta y(t)) = \Delta y(t+1) - \Delta y(t) = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)$$

и разности высших порядков Δ^n .

С помощью разностей дается понятие разностного уравнения. *Разностным уравнением* называют уравнение, связывающее между собой конечные разности в выбранной точке:

$$f[y(t), \Delta y(t), \Delta^2 y(t), \dots, \Delta^n y(t)] = 0.$$

Разностное уравнение всегда можно рассматривать как соотношение, связывающее значения функции в ряде соседних точек

$$y(t), y(t + 1), \dots, y(t + n).$$

При этом разность между последним и первым моментами времени называется *порядком разностного уравнения*.

При численном решении дифференциальных уравнений их часто заменяют разностными. Это возможно, если решение разностного уравнения стремится к решению соответствующего дифференциального уравнения, когда интервал Δt стремится к нулю.

Заметим, что в настоящей работе не дается описание способов и методов решения дифференциальных и разностных уравнений. Цель настоящей работы — познакомить с динамическими моделями экономики и их применениями. А со способами решения дифференциальных и разностных уравнений читатель может ознакомиться, например, в книге автора «Математика для социологов и экономистов».

0.2 Основные результаты, полученные в монографии

Основу теоретических предпосылок динамических моделей экономического роста в зависимости от инвестиций составляют модель акселератора Дж. Б. Кларка, модель мультипликатора Дж. М. Кейнса, макроэкономическая модель Харрода-Домара, динамические модели Самуэльсона-Хикса и В.В. Леонтьева.

В монографии дан обзор некоторых известных динамических моделей экономики.

В первой главе рассматриваются математические модели, основанные на дифференциальном уравнении естественного роста

$$y'(t) = k y(t).$$

Это математическая модель Мальтуса, модель Бернулли о кредитовании, модель роста выпуска продукции в условиях конкурен-

ции и другие. На основе этих динамических моделей объясняются некоторые инфляционные процессы, известное правило величины 70 и некоторые другие процессы экономики.

Во второй главе приводятся математические модели, основанные на дифференциальном уравнении

$$y'(t) = a \left(1 - \frac{y(t)}{b} \right) y(t).$$

Это макроэкономическая модель Харрода-Домара, модель Ферхюльста, модель роста выпуска продукции в условиях конкуренции. Изучается график соответствующего решения — логистическая кривая. На основе этого изучения дается анализ развития соответствующих экономических процессов.

В третьей главе изучаются математические модели, основанные на линейных дифференциальных уравнениях первого и второго порядков. Опровергаются утверждения о том, что наблюдаемая иногда инерция падения производства при росте инвестиций связана исключительно с лагом (запаздыванием сроков ввода в действие новых мощностей от сроков инвестирования). На основе простейшей безлаговой модели $y'(t) + k y(t) = u(t)$ автором доказывается, что инерция падения роста производства при росте инвестиций закономерна и при отсутствии лага (запаздывании), т.е. при моментальном вводе в действие новых мощностей при поступлении инвестиций. На основе той же модели объясняется еще один из «парадоксов инвестирования», связанный с отсутствием роста производства при весьма значительных денежных вливаниях в рост производства. Получены также оптимальные графики линейного и кусочно постоянного инвестирования. Найден и самый оптимальный график инвестирования. В этой же главе автором предложена модель для изучения колебания рыночных цен и проанализировано от чего зависят эти колебания.

В четвертой главе изучаются математические модели, основанные на системе дифференциальных уравнений. Рассмотрите-

вается динамическая модель Леонтьева. Математическая модель «хищник–жертва» применяется автором к изучению динамики спроса и цены на электроэнергию.

В пятой главе рассматриваются паутинообразная модель рынка и модель Самуэльсона-Хикса — модели, представленные в форме разностных уравнений. Приводятся также регрессионные и авторегрессионные модели. На основе построенных моделей находятся некоторые новые закономерности экономических процессов и объясняются некоторые парадоксы инвестирования.

В шестой главе изучаются случайные процессы в экономике. Исследуются марковские процессы, возникающие в экономике. Находятся математические ожидания роста производства в зависимости от математического ожидания процесса инвестирования.

В седьмой главе рассматриваются применения дифференциальных уравнений Колмогорова к системам массового обслуживания. Выводятся основные формулы теории массового обслуживания и рассматриваются соответствующие экономические задачи.

Глава 1

Математическая модель естественного роста

Рассмотрена математическая модель естественного роста, представляющее собой дифференциальное уравнение $y'(t) = ky(t)$, решением которого является экспоненциальная функция. Показаны пять примеров применения этой модели — задача Бернулли о долге, рост населения, рост денежных вкладов в банке, инфляционные процессы, рост выпуска дефицитной продукции. В первом случае применение дифференциального уравнения позволяет увидеть как быстро растут невыплачиваемые долги, во втором использование этого уравнения позволяет понять будущие проблемы человечества, связанные с «демографическим взрывом», в третьем — почему возникают денежные реформы, из четвертого примера становится понятным правило величины 70 и инфляционные процессы, из пятого — как быстро можно добиться больших объемов выпуска продукции в условиях постоянных инвестиций в производство и ненасыщаемости рынка.

1.1 Естественный рост и задача Бернулли о кредитовании

В природе и обществе встречаются многочисленные процессы, в ходе которых некоторые величины изменяются по следующему закону: *в течение любого промежутка времени фиксированной длительности Δt значение величины меняется в одно и то же число раз.*

Обозначим через $m(t)$ массу колонии бактерий в момент времени t . Если нет ограничений в количестве питательных веществ и объеме сосуда и притом отсутствуют живые существа, поедающие эти бактерии, то за равные промежутки времени масса колонии будет возрастать в одно и то же число раз.

Аналогично обстоят дела в любой совокупности живых существ при условии, что нет ограничений в пище и в пространстве и нет истребляющих их врагов. Растение куроплеп трижды в год дает по 15 000 семян; следовательно от одного растения могло бы произойти более $15000^3 = 3375$ миллиардов растений. Сельдь откладывает 30 000 икринок, карп — свыше миллиона, треска от 4 до 6 миллионов, солитер — около 42 миллионов, аскарида — приблизительно 64 миллиона. Даже при медленном размножении какого-либо вида животных территория могла бы быть в сравнительно короткое время буквально наводнена им, если бы борьба за существование между видами не ставила предела этому распространению. Если бы это препятствие на какое-то время исчезло, мы наблюдали бы неслыханное размножение животных. Расчеты показывают, что потомство одной пары мух за два года при беспрепятственном размножении имело бы массу, превосходящую массу Земли. Известны случаи, когда некоторые виды животных и растений, попав в благоприятные условия, размножались столь быстро, что становились бедствием (саранча в Африке, кролики в Австралии, водяной гиацинт в США и т. д.).

Процессы, в которых величина увеличивается за равные про-

межутки времени в одно и то же число раз, называют *процессами естественного роста*.

Сумма вклада в сбербанке за данный промежуток времени возрастает в одно и то же число раз (скажем, за год на 5%). Эта сумма подчинена закону естественного роста.

При распаде ядер во время цепной реакции образуются нейтроны. Чем больше свободных нейтронов в данном объеме, тем чаще они сталкиваются с ядрами и тем больше новых нейтронов появляется. Процесс увеличения количества свободных нейтронов также представляет собой процесс естественного роста.

Если допустить, что значение величины $y(t)$ меняется в одно и то же число раз не в течение промежутка фиксированной длительности Δt , а мгновенно, то мы приходим к процессу, при котором скорость изменения величины $v(t)$ в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Уравнение, описывающее этот процесс, можно записать так: $v(t) = k y(t)$. Так как $v(t) = y'(t)$, то получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\boxed{y'(t) = k y(t)}. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называют *дифференциальным уравнением естественного роста*. Впервые его получил Якоб Бернулли.

Им же была решена следующая задача

∇ **Пример (задача о кредитовании)**. Пусть заимодавец платит кредитору $p\%$ процентов от занятой суммы y_0 за год; сколько он должен уплатить за год на каждую единицу занятой суммы, если проценты нарастают *непрерывно*?

Решение. Поскольку проценты нарастают непрерывно, то скорость $y'(t)$ изменения величины долга $y(t)$ в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Следовательно, закон изменения долга описывается дифференци-

альным уравнением (1.1).

Общим решением уравнения (1.1) является показательная функция

$$y(t) = C e^{kt}.$$

Поскольку ежегодный прирост величины $y(t)$ составляет $p\%$, то скорость изменения величины составляет $p/100$ от $y(t)$ и коэффициент $k = p/100$. Кроме того, по условию задачи $y(0) = y_0$. Поэтому сумма, которую заимодавец должен уплатить кредитору от занятых y_0 денежных единиц за t лет, составит

$$\boxed{y(t) = y_0 \exp(pt/100)}. \quad (1.2)$$

От каждой единицы занятой суммы заимодавец обязан уплатить $y(t) = \exp(pt/100)$. А за год эта сумма составит $y(1) = \exp(p/100)$ денежных единиц. ▲

Уравнение (1.2) с $k = p/100$ может быть применено не только при изучении кредитования. Оно применяется всякий раз, когда скорость изменения некоторой величины $y(t)$ прямо пропорциональна ее значению в данный момент времени t , а ежегодный прирост равен $p\%$.

1.2 Рост населения Земли и истощение ресурсов

Дифференциальное уравнение (1.1) было предложено Мальтусом в 1798 году для прогнозирования роста населения Земли.

Постоянная k в социальных и биологических науках именуется *мальтузианским коэффициентом линейного роста*.

▽ **Пример (истощение ресурсов)**. В настоящее время для обеспечения пищей одного человека необходима площадь 0,1 га. На земном шаре 4 000 млн. га пахотной земли. Поэтому население его должно быть, если не учитывать в будущем новых источников пищи, ограничено количеством 40 000 млн. человек.

Когда будет достигнут этот предел насыщения населения, если оно непрерывно растёт со скоростью 1,8% в год?

Решение. Согласно формуле (1.2), закон роста населения можно выразить следующим образом:

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100).$$

За $t = 0$ возьмем 1999 год, когда население Земли составило $6 \cdot 10^9$ человек. Тогда $y(t) = 6 \cdot 10^9 \cdot e^{0,018t}$. Ищем такое t , чтобы

$$y(t) = 40 \cdot 10^9.$$

Тогда

$$40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 \cdot e^{0,018t}.$$

Откуда

$$e^{0,018t} = \frac{40 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} \approx 6,667.$$

Логарифмируя последнее равенство, имеем

$$0,018t \approx \ln 6,667 \approx 1,897.$$

Откуда $t \approx 105$ лет.

Итак, примерно в 2104 году мир достиг бы предела насыщения, если бы сохранился темп роста населения. ▲

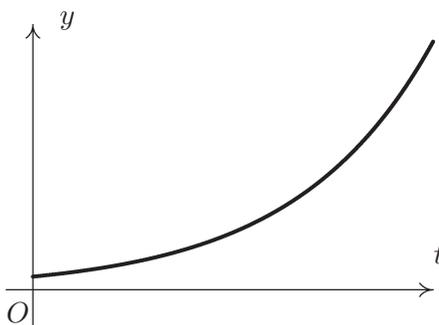
Решение уравнения (1.1) выражается с помощью экспоненциальной функции e^{kt} , которая очень быстро возрастает. График этой функции представлен на рисунке 1.1.

Если t растёт в арифметической прогрессии, т. е. принимает возрастающую последовательность значений

$$t = 0, \quad t = 0 + 1 = 1, \quad t = 1 + 1 = 2, \quad t = 2 + 1 = 3, \quad \dots,$$

то соответствующие значения e^{kt} образуют геометрическую прогрессию

$$1, \quad q, \quad q^2, \quad q^3, \quad \dots, \quad \text{где } q = e^k.$$

Рис. 1.1: График функции $y = C e^{kx}$

Поскольку $k > 0$, имеем $q > 1$. Откуда следует, что $e^{kt} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. (Вспомните восточную легенду о вознаграждении, потребованном изобретателем шахмат.)

Из решения этой задачи видно, что согласно модели Мальтуса население Земли растет очень быстро. Говоря о росте населения ученые употребляют термин «демографический взрыв». Этот термин вполне уместен, поскольку рост населения описывается тем же дифференциальным уравнением, что и ядерный взрыв. (Число распадов ядра при цепной реакции растет экспоненциально, столь же быстро растет и выделяемая энергия: $y(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.)

Таким образом, согласно Мальтусу, человечество находится в ловушке — если оно не наладит регулирования рождаемости, то оно обречено на безработицу, голод и обнищание широких масс.

1.3 Рост денежного вклада в сбербанке

Как было отмечено выше, денежная сумма на денежном вкладе в сбербанке подчиняется закону естественного роста. Поэтому функция (1.2) может быть использована для приближенной оценки накопившейся в сбербанке суммы.

▽ **Пример (рост денежного вклада в сбербанке).** В какую сумму обратилась бы копейка в 2000 году, если бы ее по-

ложили в сберегательный банк в первый год нашей эры под 5% годовых? Предполагается, что денежные реформы не проводятся, а приращение начисляется непрерывно.

Решение. Так как скорость изменения денежного вклада составляет 0,05 от накопившейся суммы, то коэффициент $k = 0,05$. Поэтому соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'(t) = 0,05 y(t).$$

Решением является функция $y(t) = 1 \cdot e^{0,05 \cdot t}$.

При $t = 2000$ получим $y(2000) = 1 \cdot e^{0,05 \cdot 2000} = e^{100} \approx 2,688 \cdot 10^{43}$ (коп.) или $y(100) \approx 2,688 \cdot 10^{41}$ (руб.). ▲

Полученное число содержит 41 цифру. Значит, речь идет о сумме, которая намного превосходит все денежные запасы земного шара.

Этот пример поучителен тем, что позволяет понять одну из причин денежных реформ. Действительно, сберегательные банки во избежание инфляции не должны сильно увеличивать денежную массу государства; долги же сбербанков населению, как мы увидели, очень быстро растут. Поэтому порой и возникает необходимость в проведении денежных реформ.

1.4 Инфляция и правило величины 70

В экономической теории при изучении понятия темпа инфляции приводится так называемое правило величины 70 (см. [47]). Оно позволяет быстро подсчитать количество лет t , необходимых для удвоения уровня цен. Надо только разделить число 70 на ежегодный уровень инфляции $p\%$:

$$t = 70/p.$$

Например, при ежегодном уровне инфляции в 5% уровень цен удвоится через 14 ($70/5$) лет. При 10%-ной инфляции уровень цен

удвоится через семь ($70/10$) лет. При инфляции в 12% уровень цен удвоится примерно через шесть ($70/12$) лет. Правило величины 70 может быть использовано и в случае, когда нужно установить, сколько потребуется времени, чтобы удвоились личные сбережения в сбербанке.

▽ **Пример (вывод правила величины 70).** Вывести правило величины 70 и ответить на вопрос: почему в правиле фигурирует именно число 70, а ни какое-либо другое?

Решение. При ежегодном уровне инфляции в $p\%$ коэффициент пропорциональности k будет равен $p/100$. Поэтому общий уровень цен согласно уравнению естественного роста можно вычислять по формуле

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100).$$

При удвоении уровня цен будем иметь:

$$\begin{aligned} 2y_0 &= y(t), \\ 2y_0 &= y_0 \exp(pt/100). \end{aligned}$$

Найдем, теперь, количество лет t , необходимых для удвоения уровня цен. Для этого выразим из последней формулы t . В результате получим:

$$t = \frac{100 \cdot \ln 2}{p}.$$

Поскольку $\ln 2 \approx 0,7$, то можно принять, что

$$t \approx 70/p.$$

Формула получена. В числителе этой формулы стоит 70, так как $100 \cdot \ln 2 \approx 70$. Если бы речь шла об утроении цен, то в числителе соответствующей формулы стояло бы не 70, а 110, так как в этом случае имели бы

$$t = (100 \cdot \ln 3)/p,$$

а $100 \cdot \ln 3 \approx 110$. ▲

Заметим, что число денежных единиц всегда выражается целым числом. Поэтому изменение денежной массы является разрывной функцией от времени, и, казалось бы, при выводе правила величины 70 нельзя применить модель, основанную на понятии производной. Но при достаточно большой денежной массе эту разрывную функцию можно с достаточной точностью приблизить дифференцируемой функцией (экспонентой). Сделанная при этом ошибка оказывается малой. Поэтому инфляционные процессы довольно точно описываются уравнением естественного роста.

1.5 Рост выпуска дефицитной продукции

∇ **Пример (модель естественного роста выпуска).** Найти закон роста выпуска дефицитной продукции в условиях ненасыщаемости рынка.

Решение. Обозначим через $y(t)$ количество продукции, произведенной в момент времени t . Будем предполагать, что продукция продается по фиксированной цене p и моментально реализуется. Тогда в момент времени t доход составит $py(t)$. Поскольку предприятие получает прибыль от реализации своей продукции в течение долгого времени, то ему выгодно расширять производство. Пусть на инвестиции $i(t)$ в производство расходуется m -я часть указанного дохода, т. е.

$$i(t) = \frac{p}{m} y(t). \quad (1.3)$$

В результате расширения производства будет получен прирост дохода, m -я часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска, причем скорость выпуска $y'(t)$ пропорциональна увеличению инвестиций, т. е.

$$y'(t) = a i(t). \quad (1.4)$$

Подставив (1.4) в (1.3), получим дифференциальное уравнение естественного роста

$$y'(t) = k y(t), \quad k = a p/m.$$

Решением его является экспоненциальная функция $y = C e^{kt}$, которая показывает как быстро можно добиться огромных объемов выпуска дефицитной продукции, если постоянно направлять часть дохода в расширение производства. ▲

Харрод и Домар считали, что можно добиться устойчивого роста не только объемов выпуска дефицитной продукции предприятия, но и также всей мировой рыночной экономики. Харрод считал, что устойчивый темп роста производства обеспечивается естественным ростом населения и естественным ростом производительности труда. Третьим фактором роста Харрод считал размеры накопления капитала, норма накопления которого должна быть постоянной.

Мы рассмотрели пять примеров социально-экономических процессов — задачу о долге, рост населения, рост денежных вкладов в банке, инфляционные процессы, естественный рост выпуска продукции. Математической моделью всех этих процессов служит уравнение вида $y'(t) = k y(t)$. В первом случае применение дифференциального уравнения позволяет увидеть как быстро растут невыплачиваемые долги, во втором использование этого уравнения позволяет понять будущие проблемы человечества, связанные с «демографическим взрывом», в третьем — почему возникают денежные реформы, из четвертого примера становится понятным правило величины 70 и инфляционные процессы, из пятого — как быстро можно добиться больших объемов выпуска продукции в условиях постоянных инвестиций в производство и ненасыщаемости рынка.

Глава 2

Модели естественного роста с учетом насыщения

2.1 Рост с учетом насыщения

В соответствии с законом Мальтуса (1.1) численность населения должна расти экспоненциально, что не всегда справедливо, ибо не согласуется с реальностью. Хотя имеющий в настоящее время место «демографический взрыв» представляет собой серьезную опасность для человечества, дифференциальное уравнение (1.1), разумеется, слишком упрощенно изображает реальную ситуацию, и его решение далеко от истинного течения процесса. При использовании моделей естественного роста в социальных науках надо иметь в виду, что темпы роста, описываемые первоначально экспоненциальной функцией, в дальнейшем замедляются, наступает период насыщения. Экстраполяция этих показателей при условиях естественного роста часто приводит к заведомому абсурду. Например, рост числа научных работников в индустриально развитых странах в недавнем прошлом описывался экспоненциальной функцией. Экстраполяция привела бы к тому, что уже в ближайшие десятилетия численность научных работников должна была бы превзойти население страны.

Для преодоления противоречия с реальностью необходимо принять во внимание эти факторы и соответствующим образом мо-

дифицировать модель роста.

Дж. Кьютелет предположил, что k в уравнении (1.1) должна быть не постоянной, а убывающей функцией, зависящей от $y(t)$:

$$\boxed{y'(t) = k(y) y(t)}. \quad (2.1)$$

На основании этого в 1836 году его ученик Ферхюльст предложил использовать для роста населения уравнение

$$\boxed{y'(t) = a \left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) y(t)}, \quad (2.2)$$

т. е. считать, что $k(y) = a \left(1 - \frac{y(t)}{b}\right)$.

2.2 Рост населения Земли с учетом насыщения

Определить как будет меняться рост населения Земли $y(t)$ в условиях насыщения.

Решение. Согласно Ферхюльсту величина $y(t)$ в условиях насыщения удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2). Решим это уравнение. Разделяя переменные в уравнении (2.2), находим

$$\frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{b}\right)} = a dt.$$

Проинтегрировав это соотношение, имеем

$$\ln |y| - \ln |b - y| = a t + \ln |C|.$$

Отсюда получим, что

$$\boxed{y(t) = \frac{b C e^{at}}{1 + C e^{at}}}. \quad (2.3)$$

Таким образом рост в условиях насыщения описывается функцией (2.3). ▲

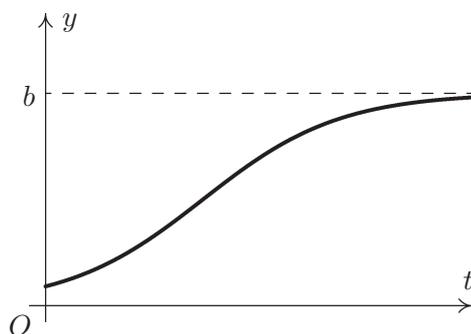
Рис. 2.1: График функции $y(t) = \frac{bC e^{at}}{1 + C e^{at}}$

График функции (2.3) называется *логистической кривой*. Он изображен на рис. 2.1.

Из этого рисунка хорошо видно, что при малых t логистический рост схож с естественным ростом, однако при больших t характер роста меняется, темпы роста замедляются. При $t \rightarrow +\infty$ кривая асимптотически приближается к прямой $y = b$, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{bC e^{at}}{1 + C e^{at}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(bC e^{at})'}{(1 + C e^{at})'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{bC a e^{at}}{C a e^{at}} = b. \end{aligned}$$

Прямая $y(t) = b$ является стационарным решением уравнения (2.2) и соответствует случаю $k(y) = a \left(1 - \frac{y(t)}{b} \right) = 0$. Значит, для модели (2.2) объем выпускаемой продукции в единицу времени стремится к конечному значению b («взрыва» не происходит).

Модель Ферхюльста применяется и к другим социально-экономическим явлениям. Рассмотрим ее применение в сфере экономического роста.

2.3 Рост выпуска продукции в условиях конкуренции

Найти закон роста продукции в условиях конкуренции и насыщаемости рынка.

Решение. По условию задачи, происходит насыщаемость рынка. Согласно Ферхюльсту величина $y(t)$ в условиях насыщаемости удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2). Поэтому рост продукции $y(t)$ в условиях насыщаемости рынка будет также описываться уравнением Ферхюльста и соответствующее решение выражаться формулой (2.3). ▲

В предыдущем параграфе была описана модель Харрода-Домара, согласно которому экономика имеет устойчивый темп роста. В реальности происходит замедление темпов экономического роста. Так, если период с 1948 года по 1973 год был периодом быстрого экономического роста США, при этом ежегодные темпы производительности труда, например, составляли 2,43 %, то с 1973 года по 1983 год производительность труда увеличивалась только на 0,75 % в год. Поэтому логистический рост более точно описывает развитие экономики, чем модель Харрода-Домара.

2.4 Рост обеспеченности новым товаром

Найти закон обеспеченности новым необходимым товаром (удельный вес семей или людей, владеющих данным товаром) с течением времени.

Решение. Спрос на необходимые товары с течением времени возрастает: сначала медленно, затем быстро и, наконец, снова замедляется за счет насыщения. Это значит, что скорость увеличения спроса прямо пропорциональна обеспеченности и насыщению товаром. Если b — насыщенность товаром (предельное значение обеспеченности товаром), то зависимость обеспеченности от вре-

мени выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy(t)}{dt} = k y (b - y), \quad (2.4)$$

т. е. скорость увеличения обеспеченности $\frac{dy}{dt}$ пропорциональна достигнутой обеспеченности y и необеспеченности $(b - y)$.

Легко заметить, что уравнение (2.4) является уравнением Ферхюльста, записанным в другой форме. ▲

2.5 Модель «социальной диффузии»

В социальных науках уравнение Ферхюльста используется для описания распространения в определенных социальных группах образцов поведения, моды, информации (рекламы), культурных новшеств. Правда, при изучении социальных групп, это уравнение чаще именуют уравнением Дж. Коулмена, который применительно к социальным группам уточнил смысл коэффициентов a и b из уравнения Ферхюльста. Он предложил следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = \psi \beta \left(1 - \frac{y(t)}{b} \right) y(t),$$

где y — число сторонников новшества в данный момент времени; b — общая численность рассматриваемой группы; β — число контактов, завязываемых каждым сторонником новшества в единицу времени; ψ — коэффициент, меняющийся от 0 до 1 и отражающий то, что не каждый контакт сторонника с не сторонником предполагает агитирование последнего, а также то, что не каждая агитация заканчивается успехом.

Отметим, что эмпирические исследования (см, например, Coleman J. S. Introduction to mathematical sociology. N. Y.: Free press of Glencoe, 1964) подтверждают, что распространение сторонников новшеств изменяется согласно уравнению Ферхюльста (Коулмена).

Глава 3

Математические модели экономики в форме линейных дифференциальных уравнений

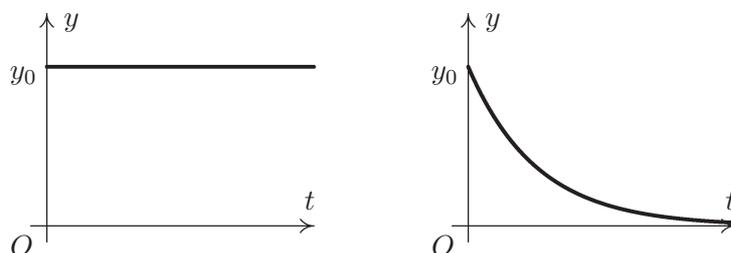
3.1 Модель выбытия фондов

Рассмотрим теперь еще одну математическую модель, описывающую рост количества продукции $y(t)$ на некотором предприятии, произведенной в момент времени t . В отличие от модели естественного роста, когда $k = \text{const}$ и в отличие от модели Дж. Кьютелета (2.1), когда $k = k(y)$, будем предполагать, что коэффициент k зависит от времени t : $k = -k(t)$. (Знак «минус» означает, что фонды не увеличиваются, а выбывают.) Такое происходит, например, когда предприятие не вкладывает вырученные деньги в производство, и при этом с течением времени на предприятии происходит изнашивание оборудования и орудий труда, т. е. происходит выбытие фондов.

Тогда рост количества продукции $y(t)$ на некотором предприятии, произведенной в момент времени t описывается не уравнением (2.2), а уравнением

$$\boxed{y'(t) = -k(t) y(t), \quad y(0) = y_0.} \quad (3.1)$$

Рассмотрим два случая. Первый, когда $k(t) = 0$ и второй, когда

Рис. 3.1: Графики функций $y(t) = C$ и $y(t) = y_0 e^{-t}$

$k(t) = 1$.

1. Пусть фонды в указанный промежуток времени не выбывают ($k(t) = 0$). Здравый смысл подсказывает, что ввиду отсутствия капиталовложений производство расти не будет, а ввиду отсутствия выбытия фондов оно не должно убывать. Таким образом, объем производства должен остаться на прежнем уровне. Так и происходит согласно дифференциальному уравнению $y'(t) = 0$. Решением этого уравнения является произвольная константа $y(t) = C$. Так как $y(0) = y_0$, то $y(x) = y_0$ (см. рис. 3.1).

2. При постоянном выбытии фондов (например, при $k(t) = 1$) должно происходить падение производства. Решение соответствующего дифференциального уравнения дает именно это:

$$\frac{dy}{y} = -dt; \quad \ln |y| = -t + \ln |C|;$$

$$y(t) = y_0 e^{-t} \text{ (убывающая функция).}$$

Соответствующий график приведен на рис. 3.1.

3.2 Рост производства с учетом инвестиций

Уравнение Дж. Кьютелета $y(t) = k(y) y(t)$ исходит из замкнутости популяции и не учитывает миграции популяции, зависящей, вообще говоря, от y и t .

Если изучается население страны, то эта модель становится

неприемлемой. Учет миграции приводит к уравнению

$$y'(t) = k(y) y(t) + u(t, y). \quad (3.2)$$

Здесь $u(t, y)$ — величина, характеризующая миграцию. Она равна разности между количеством иммигрантов и эмигрантов. Если $u(t, y) > 0$, то это означает, что количество иммигрантов в момент времени t превышает количество эмигрантов.

В моделях экономического роста уравнение (3.2) характеризует рост выпуска продукции с учетом внешних инвестиций $u(t, y) > 0$.

Объединим две последние модели — модель выбытия фондов и модель роста производства с учетом банковских инвестиций. Пусть предприятие производит нужную для государства продукцию. Как и в модели выбытия фондов будем предполагать, что на предприятии происходит быстрое изнашивание оборудования и орудий труда и само предприятие не вкладывает вырученные деньги в производство ($k = -k(t)$). Денежные вложения в производство осуществляет лишь банк. Причем, в момент времени t поток капиталовложений составляет $u(t)$ условных единиц и мгновенно преобразуется в расширение производства. Тогда стоимость продукции $y(t)$ на некотором предприятии, произведенной в момент времени t , описывается уравнением

$$\boxed{y'(t) + k(t) y(t) = u(t)}. \quad (3.3)$$

Дифференциальное уравнение (3.3) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Знание его экономического смысла позволяет часто предугадывать свойства решения только по виду уравнения. Действительно, например, пусть задано линейное дифференциальное уравнение

$$y' - y = e^x, \text{ или } y' = y + e^x.$$

Коэффициент при y является коэффициентом выбытия фондов. Он равен (-1) . Следовательно, фонды не выбывают, а растут. Государственные капиталовложения в предприятие положительны

(функция $e^x > 0$). Здравый смысл подсказывает, что при таких условиях должен происходить рост производства. Поэтому, не решая самого дифференциального уравнения, мы можем сказать, что его решением является растущая функция. Так оно и есть на самом деле. После замены $y = uv$ и соответствующих математических выкладок получим, что решением этого дифференциального уравнения является $y(x) = C e^x + x e^x$ (растущая функция).

Аналогичный вывод мы можем сделать и для линейного дифференциального уравнения

$$y' - \frac{x}{1+x^2} y = x.$$

Коэффициент выбытия фондов ($-\frac{x}{1+x^2}$) отрицателен, значит фонды прибывают. Инвестиции x растут. Следовательно, должен происходить рост производства. Решением уравнения должна быть растущая функция. После соответствующего решения действительно получим растущую функцию

$$y(x) = \left(\sqrt{1+x^2} + C \right) \sqrt{1+x^2}.$$

Слагаемое u в уравнении $y'(t) = -k y(t) + u$, выражавшее поток «внешних капиталовложений», может означать и другие внешние воздействия на предприятие. Слагаемое u может быть и отрицательным. В этом случае оно может выражать, например, какой-либо уход денег из предприятия (например, расходы или выплаты по налогам, издержки производства, потребительские расходы и т. п.). Поскольку издержки часто зависят не только от времени t , но и от объема выпуска продукции $y(t)$ в момент времени t , то u является, вообще говоря, функцией от двух переменных t и y . Коэффициент k , как мы видели, также может зависеть и от переменной t и от переменной y . Таким образом, более общее уравнение роста может быть выражено более общим, вообще говоря, уже нелинейным, дифференциальным уравнением

$$y'(t) = k(t, y) y(t) + u(t, y). \quad (3.4)$$

В частных случаях это уравнение может оказаться и уравнением с разделяющимися переменными, и линейным уравнением, и уравнением Бернулли. Знание его экономического смысла позволяет предугадывать свойства решения.

Если в микроэкономике наиболее употребимым линейным дифференциальным уравнением является уравнение (3.3), то в макроэкономике используется уравнение

$$\boxed{y(t) = k \frac{dy(t)}{dt} + c(t)}. \quad (3.5)$$

Здесь t выражает время, $y(t)$ — национальный доход, $c(t)$ — потребление (более точно, непроемленное потребление, прирост материальных оборотных средств, государственных материальных резервов, потери), $k \frac{dy(t)}{dt}$ — накопление основных производственных фондов.

Уравнение (3.5) характеризует тот факт, что национальный доход разделен на две части: накопление $k \frac{dy(t)}{dt}$ (первое слагаемое в правой части уравнения) и потребление $c(t)$ (второе слагаемое в правой части уравнения), причем накопление производится государством пропорционально приросту национального дохода в тот же момент времени. Коэффициент k выражает капиталоемкость национального дохода (отношение производственного накопления к приросту национального дохода).

Модель, основанная на уравнении (3.5) является простейшей моделью экономической динамики. С помощью нее находят динамику национального дохода $y(t)$ в зависимости от траектории потребления $c(t)$.

3.3 Объяснение некоторых парадоксов инвестирования на основе безлаговой модели

На основе математического моделирования предлагается объяснение двух «парадоксов инвестирования». Доказана закономер-

ность того, что при восходящем графике инвестирования получается меньший рост объемов производства, чем при нисходящем графике инвестиций с тем же объемом инвестирования. Объяснен также еще «один парадокс инвестирования», связанный с тем, что иногда при весьма значительных инвестициях не наблюдается роста объема производства.

1. Первый парадокс инвестирования. Прогнозированию объема выпуска продукции в зависимости от инвестиций посвящено большое количество работ [20, 32]. Однако до сих пор у аналитиков вызывают вопросы некоторые последствия инвестирования.

В статье «Призрак роста» [54] авторы указывают на «противоречие», складывающееся с инвестированием производства в 2004 году. Подтверждая расчеты о значительном росте инвестиций, авторы пишут: «анализ, впрочем, оставляет больше вопросов, чем дает внятных ответов. Скажем, отрасли отечественного производства, работающие на покрытие инвестиционного спроса — машиностроение, черная металлургия, промышленность строительных материалов, — во втором полугодии 2004 года не только не ожились, но напротив, либо замедлялись, либо стагнировали» [54, с.13].

Авторы объясняют это «противоречие» временным лагом: «тяжелые отрасли не работают «с колес», у них есть запасы, только по мере исчерпания которых импульс от растущего инвестиционного спроса может переломить динамику выпуска» [54, с.13].

Все это справедливо, но лишь отчасти. Причина, на наш взгляд, кроется в другом. Причина — не во временном лаге, а в инерции падения объемов выпуска продукции. Ниже нами будет показано, что даже в том случае, когда временной лаг отсутствует (т.е. отрасли работают «с колес»), наблюдается та же картина: при восходящем графике инвестирования, объемы производства оказываются меньше, чем при нисходящем графике с тем же объе-

мом инвестирования. Причем, это — не противоречие, а закономерность. Доказательство этого факта мы проведем на использовании простейшей безлаговой математической модели динамики выпуска продукции с учетом инвестирования и выбытия фондов. Эта модель представляет собой следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка [28, С.177–178]:

$$y'(t) + k(t)y(t) = u(t), \quad y(0) = y_0, \quad (3.6)$$

где $y(t)$ — общая стоимость продукции в регионе, произведенной в момент времени t , $k(t)$ — коэффициент выбытия фондов (с течением времени в регионе происходит изнашивание оборудования и орудий труда), $u(t)$ — поток капитальных вложений в регион, направленный на восстановление и расширение фондов.

Как и всякая математическая модель, данная модель обладает определенной идеализацией. В частности, она не учитывает временной лаг. Предполагается, что деньги моментально начинают работать (закупается оборудование, станки и т.п., которые сразу же подключаются к выпуску продукции). Предполагается также, что не существует ограничений на восстановление и расширение фондов, выпуск и реализацию продукции. Не учитываются возможность капитализации денег, вырученных от продажи выпущенной продукции, и инфляция.

Тем не менее, идеализация, принятая в математической модели инвестирования не только не мешает достижению целей, поставленных в статье, а наоборот, способствует прояснению того, может ли быть инерция падения производства при отсутствии инфляции, рискованных ситуаций, а также временного лага (запаздывания).

Известно, что при восходящем графике инвестирования может наблюдаться меньший рост объемов производства, чем при нисходящем графике инвестиций с тем же объемом инвестирования. Ниже показано, что это наблюдение — не частный случай, а закономерность.

Рассмотрим следующую *задачу инвестирования*. Для инвестирования региональных предприятий администрации региона выделена некоторая сумма денег U (объем инвестирования). Администрация региона решает профинансировать свои предприятия в течение некоторого промежутка времени $[0, T]$ (горизонт планирования) по одной из линейных схем:

$$u_i(t) = a_i t + b_i, \quad \text{где} \quad \int_0^T u_i(t) dt = U, \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

(величины $u_1(t)$, $u_2(t)$ — неотрицательны при всех t).

Пусть Y_1, Y_2 — объемы продукции региона (в стоимостном выражении), выпущенные соответственно по первой и второй схемам инвестирования за промежуток времени $[0, T]$. Покажем, что если $b_1 > b_2$, то $Y_1 > Y_2$.

Теорема 1. *Если в математической модели (3.6) коэффициент выбытия фондов постоянен и неотрицателен, а графики инвестирования представляют собой прямолинейные отрезки (3.7), где $b_1 > b_2$, то объем продукции, произведенной по первому графику инвестирования, будет больше объема продукции, произведенной по второму графику ($Y_1 > Y_2$).*

Доказательство. Найдем сначала графики выпуска продукции по различным вариантам инвестирования. При $k = 0$ решениями уравнения (3.6) являются функции:

$$y_i(t) = a_i t^2 / 2 + b_i t + y_0, \quad i = 1, 2.$$

Объем Y продукции, выпущенной за период времени $[0, T]$ представляет собой определенный интеграл $Y = \int_0^T y(t) dt$.

Отсюда получаем, что

$$Y_i = a_i T^3 / 6 + b_i T^2 / 2 + y_0 T, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

Сравним Y_1 и Y_2 . Поскольку выделенная сумма $\int_0^T u_i(t) dt$ для инвестирования равна U , то из формул (3.7) вытекает, что

$$\int_0^T (a_i t + b_i) dt = U, \quad i = 1, 2.$$

Откуда

$$a_i T^2/2 + b_i T = U, \quad i = 1, 2,$$

или $a_i = 2(U - b_i T)/T^2$.

Подставив последние выражения в (3.7), получим

$$Y_i = UT/3 + b_i T^2/6 + y_0 T.$$

Величины Y_1 и Y_2 отличаются только вторым слагаемым. Причем, если $b_1 > b_2$, то первое из вторых слагаемых больше. Следовательно, если $b_1 > b_2$, то $Y_1 > Y_2$. В случае $k = 0$ теорема доказана. В случае $k > 0$ теорема доказывается аналогично.

При $k > 0$ решениями (3.6) являются функции:

$$y_i(t) = (a_i kt + b_i k - a_i)/k^2 + C \exp(-kt), \quad i = 1, 2.$$

Объем Y_i продукции, выпущенной за период времени $[0, T]$ представляет собой определенный интеграл

$$Y_i = \int_0^T y_i(t) dt.$$

Отсюда получаем, что

$$Y_i = (a_i k T^2/2 + b_i k T - a_i T)/k^2 + (y_0 k^2 - b_i k + a_i)(1 - \exp(-kT))/k^3, \quad i = 1, 2.$$

Сравним Y_1 и Y_2 . Поскольку выделенная сумма $\int_0^T u_i(t) dt$ для инвестирования равна U , то из формул (3.7) вытекает, что

$$a_i = 2(U - b_i T)/T^2, \quad i = 1, 2.$$

Подставив последние выражения в (3.8), получим

$$Y_i = U(kT - 2) / (Tk^2) + 2b_i/k^2 + (y_0k^2 + 2U/T^2 - b_i(k + 2/T))(1 - \exp(-kT)) / k^3,$$

Числа Y_1 и Y_2 отличаются только слагаемыми с b_1 и b_2 :

$$2b_1/k^2 - b_1(k + 2/T)(1 - \exp(-kT)) / k^3$$

и

$$2b_2/k^2 - b_2(k + 2/T)(1 - \exp(-kT)) / k^3.$$

Если $b_1 > b_2$, что первое из этих слагаемых больше второго. Это следует из того, что выражение

$$K = 2k - (k + 2/T)(1 - \exp(-kT))$$

больше нуля (как только k и T больше нуля). Действительно, $K = 0$ при $k = 0$, а производная

$$\frac{dK}{dk} = 2(T^2 + 1)(1 - \exp(-kT)) / T^2$$

равна нулю при $k = 0$ и больше нуля в интервале $k > 0$ при фиксированных $T > 0$. Следовательно, $Y_1 > Y_2$ при $b_1 > b_2$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, если даны два линейных графика инвестирования, имеющие одинаковый объем инвестирования U , то больший объем продукции в стоимостном выражении будет получен по тому графику инвестирования, у которого больше начальная ордината.

Инерция падения производства. Теорема 1 объясняет инерцию падения объемов производства после прекращения падения инвестиций. Действительно, пусть $k = \text{const} > 0$ и объем производства падает до некоторого момента t_0 (лет). Инвестиции линейно убывают до этого же момента и затем *симметрично* растут. Спрашивается, будет ли расти ежегодный объем производства сразу после

момента t_0 . Ответ: нет, не будет. *Инерция падения объемов производства после прекращения падения инвестиций закономерна.* Действительно, выше было доказано, что больший объем продукции в стоимостном выражении будет получен по тому линейному графику инвестирования, у которого больше начальная ордината. Это тем более верно при падении объемов выпуска продукции, когда нисходящий график инвестирования сменяется восходящим, поскольку объем продукции, выпущенной в момент времени t_0 , меньше объема продукции, выпущенного в предыдущий момент времени ($t_0 - \varepsilon$).

Таким образом, если даны два линейных графика инвестирования, имеющие одинаковый объем инвестирования U , то больший объем продукции в стоимостном выражении будет получен по тому графику инвестирования, у которого больше начальная ордината. Этот факт очень наглядно объясняет один из парадоксов инвестирования, согласно которому при восходящем графике инвестирования мы можем получить меньший объем производства, чем при восходящем графике.

Отметим, что хотя модель (3.6) не учитывает возможность капитализации инвестиций (предполагается, что деньги вкладываются в только в реальный сектор экономики, а не в банки), она весьма точно описывает правильную стратегию выбора. Учет фактора капитализации только усиливает сделанный нами вывод. В [18] доказано, что «деньги лучше получать как можно раньше, так как уменьшается риск вложения средств и появляется возможность снова вложить средства в прибыльный пакет».

2. Второй парадокс инвестирования. Здесь мы попытаемся объяснить еще один парадокс инвестирования, связанный с тем, что иногда при весьма значительных инвестициях не наблюдается соответствующего роста объема производства.

Большинство аналитиков предполагает, что если инерция и есть, то она практически моментально преодолевается. Вот что

пишется авторами той же статьи «Призрак роста»: «Теперь глава МЭРТ может обещать главе государства, что, если инвестиции в основные фонды растут, значит, и рост производства рано или поздно должен восстановиться в полном объеме. Так что надо только подождать месяца три-четыре, и все образуется в лучшем виде» [54, с.13].

Приведем пример, который показывает, что быстрого роста продукции может и не произойти: бывают случаи, когда *инерция падения может затянуться на долгие годы*.

Пример 2. Пусть $T=55$, $k=0.1$, $y_0=10000$,

$$u(t) = \begin{cases} 1 - 0.5t, & \text{при } 0 \leq t \leq 2, \\ 0.5t - 1, & \text{при } 2 \leq t \leq 55. \end{cases}$$

Как видим, до момента $t = 2$ (года) инвестиции падают, а затем следует их подъем в течение 53 лет (скорость роста инвестиций $a = 0.1$ после второго года равна скорости их падения $a = -0.1$ до второго года).

Рассмотрим, как будет меняться в зависимости от j -го года стоимость ежегодных объемов выпуска продукции $Y_j = \int_{j-1}^j y(t) dt$ ($j=1,2,\dots,55$).

Решением уравнения (3.6) является функция

$$y(t) = \begin{cases} 60 - 5t + 9940 \exp(-0.1t), & \text{при } 0 \leq t \leq 2, \\ 5t - 70 + 8248.183686 \exp(0.2 - 0.1t), & \text{при } 2 \leq t \leq 55 \end{cases}$$

$(y(2) = 8188.183686)$.

Поэтому имеем $Y_1 = 9516.66$, $Y_2 = 8611.50$, \dots , $Y_{49} = 251.40$, $Y_{50} = 248.89$, $Y_{51} = 247.10$, $Y_{52} = 245.95$, $Y_{53} = 245.39$, $Y_{54} = 245.35$, $Y_{55} = 245.80$.

Следовательно, если время измеряется в годах, инерция падения ежегодных объемов в этом примере продолжается 52 года (со второго по 54-ый год).

Таким образом, инерция падения может длиться очень долго, несмотря на рост инвестиций.

Очевидно, что уменьшить длительность инерции падения может увеличение инвестиций или уменьшение коэффициента выбытия фондов (например, за счет восстановления простаивающих мощностей). Какие же факторы более эффективны для преодоления инерции — увеличение инвестиций или уменьшение коэффициента выбытия фондов? Рассмотрим два примера, которые позволят ответить на этот вопрос. Один из них отличается от примера 1 только тем, что после падения инвестиций следует линейный рост со скоростью в два раза большей (объемы инвестиций с началом роста также станут в два раза выше). Другой пример отличается от примера 1 тем, что после прекращения падения инвестиций, рост инвестиций остается тем же, но коэффициент выбытия фондов уменьшается в два раза.

Пример 2. Пусть $T = 55$, $k = 0.1$, $y_0 = 10000$,

$$u(t) = \begin{cases} 1 - 0.5t, & \text{при } 0 \leq t \leq 2, \\ t - 2, & \text{при } 2 \leq t \leq 55. \end{cases}$$

Как видим, до момента $t = 2$ (года) инвестиции падают, а затем следует резкий их подъем в течение 48 лет (скорость роста инвестиций в два раза больше скорости падения).

Рассмотрим, как будет меняться в зависимости от j -го года стоимость ежегодных объемов выпуска продукции $Y_j = \int_{j-1}^j y(t) dt$ ($j=1, 2, \dots, 55$).

Решением уравнения (3.6) является функция

$$y(t) = \begin{cases} 60 - 5t + 9940 \exp(-0.1t), & \text{при } 0 \leq t \leq 2, \\ 10t - 140 + 8308.183686 \exp(0.2 - 0.1t), & \text{при } 2 \leq t \leq 55, \end{cases}$$

($y(2) = 8188.183686$).

Поэтому имеем $Y_1=9516.66$, $Y_2=8611.50$, ..., $Y_{46}=422.28$, $Y_{47}=422.07$, $Y_{48}=422.83$, $Y_{49}=424.47$, $Y_{50} = 426.91$.

Следовательно, инерция падения ежегодных объемов в этом примере продолжается 45 лет (со второго по 47-ой год). Это на 7 лет меньше инерции падения в примере 2.

Рассмотрим теперь следующий пример.

Пример 3. Пусть $T = 55$, $k = 0.1$ до $t = 2$, $k = 0.2$ после $t = 2$, $y_0 = 10000$, инвестиции меняются также как в примере 1:

$$u(t) = \begin{cases} 1 - 0.5t, & \text{при } 0 \leq t \leq 2, \\ 0.5t - 1, & \text{при } 2 \leq t \leq 55. \end{cases}$$

До момента $t=2$ (года) инвестиции падают, а затем следует их подъем в течение 53 лет (скорость роста инвестиций $a=0.1$ после второго года равна скорости их падения $a=-0.1$ до второго года). С момента $t=2$ меняется коэффициент выбытия фондов. Он становится в два раза меньшим. Рассмотрим, как будет меняться в зависимости от j -го года стоимость ежегодных объемов выпуска продукции $Y_j = \int_{j-1}^j y(t) dt$ ($j=1,2,\dots,55$).

Решением уравнения (3.6) является функция

$$y(t) = \begin{cases} 60 - 5t + 9940 \exp(-0.1t), & \text{при } 0 \leq t \leq 2, \\ 2.5t - 22.5 + 8205.683685 \exp(0.4 - 0.2t), & \text{при } 2 \leq t \leq 55 \end{cases}$$

($y(2)=8188.183686$).

Поэтому имеем $Y_1 = 9516.66$, $Y_2 = 8611.50$, \dots , $Y_{33} = 77.18$, $Y_{34} = 76.34$, $Y_{35} = 76.10$, $Y_{36} = 76.37$.

Следовательно, инерция падения ежегодных объемов в этом примере продолжается 33 года (со второго по 35-ой год). Это на 19 лет меньше инерции падения в примере 1 и на 12 лет меньше инерции падения в примере 2.

Таким образом, *инерция падения объемов выпуска продукции при росте инвестиций зависит главным образом не от наличия временного лага, а от изменения коэффициента выбытия фондов k* . Ведь если бы в примере 2 коэффициент выбытия фондов k с момента $t=2$ стал бы тождественен нулю, то уже за второй год после

падения инвестиций было бы выпущено продукции $Y_4 = 8187.35$, что больше, чем в первом году роста инвестиций ($Y_3 = 8186.35$). Падения объемов производства не было бы уже в четвертом году (т.е. во втором году роста инвестиций).

3.4 Оптимальный график линейного инвестирования

Показано, что если коэффициент выбытия фондов постоянен и неотрицателен в течение всего временного горизонта, то лучшим графиком линейного инвестирования является тот, у которого больше начальная ордината (стартовые инвестиции). Аналогичный вывод сделан для кусочно-постоянных инвестиций с двумя ступеньками (последняя из которых имеет нулевую высоту). Здесь также показано, что лучшим графиком инвестирования является тот, у которого больше начальная ордината. Найден также самый оптимальный график линейного инвестирования с заданным временным горизонтом и объемом инвестирования.

Согласно принятым допущениям в математической модели (3.6)–(3.7), начальная и конечная ординаты инвестирования не могут быть отрицательными, а сами графики являются прямыми, а не ломанными. Отсюда следует, что самым наилучшим линейным графиком инвестирования является график с начальной ординатой $2U/T$, а наихудшим — линейный график с нулевой начальной ординатой.

Теорема 2. *Самым наилучшим линейным графиком инвестирования с временным горизонтом T и объемом U является отрезок прямой соединяющий точки с координатами $(0, 2U/T)$ и $(T, 0)$. А самым наихудшим графиком линейного инвестирования является отрезок прямой, соединяющий точки с координатами $(0, 0)$ и $(T, 2U/T)$.*

Доказательство. Объем U первого варианта инвестирования представляет собой площадь треугольника, вершины которого на-

ходятся в точках с координатами $(0, 0)$, $(T, 0)$, $(0, 2U/T)$. Согласно теореме 1 если даны два линейных графика инвестирования, имеющие одинаковый объем инвестирования U , то больший объем продукции в стоимостном выражении будет получен по тому графику инвестирования, у которого больше начальная ордината. Однако если начальная ордината будет больше $2U/T$, то абсцисса конечной точки инвестирования должна быть меньше T (это следует из того, что площадь прямоугольного треугольника U равна половине произведения его катетов). А это противоречит линейности графика (график становится ломанной). Таким образом, наилучший линейный график инвестирования есть отрезок прямой соединяющий точки с координатами $(0, 2U/T)$ и $(T, 0)$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

3.5 Оптимальный график инвестирования

равним теперь два следующих кусочно-постоянных графика инвестирования с временным горизонтом T и объемом U :

$$u_i(t) = \begin{cases} b_i, & \text{при } t \in [0, T_i], \\ 0, & \text{при } t \in [T_i, T], \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

Покажем, что если $b_1 > b_2 > 0$, то объем продукции Y_1 , полученный по первому графику инвестирования $u_1(t)$, будет больше объема продукции Y_2 , полученного по второму графику инвестирования $u_2(t)$.

Теорема 3. *Если в математической модели (3.6) коэффициент выбытия фондов неотрицателен, а инвестирование производится по формулам (3.9) с объемом инвестирования U , где $b_1 > b_2$, то объем продукции, произведенной по первому графику инвестирования, будет больше объема продукции, произведенной по второму графику ($Y_1 > Y_2$).*

Доказательство. Нетрудно проверить, что решением задач

Коши для уравнения (3.6) при $k = 0$ являются соответственно следующие функции

$$y_i(t) = \begin{cases} b_i t + y_0, & \text{при } 0 \leq x < T_i, \\ b_i T_i + y_0, & \text{при } T_i < x \leq T, \end{cases}, \quad i = 1, 2.$$

Найдем объемы продукции, произведенной за время $[0, T]$:

$$\begin{aligned} Y_i &= \int_0^T y_i(t) dt = b_i T_i^2 / 2 + y_0 T_i + (b_i T_i + y_0) (T - T_i) = \\ &= b_i T_i T - b_i T_i^2 / 2 + y_0 T, \end{aligned}$$

Согласно условию теоремы объем инвестирования для различных графиков инвестирования одинаков и равен U . Отсюда получаем $\int_0^{T_i} b_i dt = U$.

Следовательно, $T_i = U/b_i$. Подставив найденные числа T_i в выражения для Y_i , получим

$$Y_i = b_i T_i T - b_i T_i^2 / 2 + y_0 T = U T - \frac{1}{2 b_i} + y_0 T, \quad i = 1, 2.$$

Так как $b_1 > b_2 > 0$, то из последних представлений для Y_i следует, что $Y_1 > Y_2$. При $k = 0$ теорема доказана.

При $k > 0$ решениями дифференциального уравнения (3.6) являются функции

$$y_i(t) = (a_i k t + b_i k - a_i) / k^2 + C \exp(-k t), \quad i = 1, 2.$$

Объемы Y_i продукции, выпущенные за период времени $[0, T]$ представляют собой определенные интегралы от 0 до T от функций $y_i(t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} Y_i &= (a_i k T^2 / 2 + b_i k T - a_i T) / k^2 + \\ &+ (y_0 k^2 - b_i k + a_i) (1 - \exp(-k T)) / k^3, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Поскольку $a_i = 2 (U - b_i T) / T^2$, то

$$Y_i = U (k T - 2) / (T k^2) + 2 b_i / k^2 + \\ + (y_0 k^2 + 2 U / T^2 - b_i (k + 2 / T)) (1 - \exp(-k T)) / k^3, \quad i = 1, 2.$$

Числа Y_i отличаются только слагаемыми с b_i :

$$2 b_i / k^2 - b_i (k + 2 / T) (1 - \exp(-k T)) / k^3.$$

Обозначим последнее выражение через B_i :

$$B_i = b_i P_0 / k^3, \quad \text{где } P_0 = 2k - (k + 2/T) (1 - \exp(-k T)).$$

Если $b_1 > b_2 > 0$, то $B_1 > B_2$. Действительно, P_0 больше нуля (как только k и T больше нуля). Это не видно с первого взгляда ввиду того, что одно слагаемое в выражении для P_0 положительно, а другое — отрицательно. Поэтому покажем, $P_0 > 0$ с помощью первой и второй производных $P_1 = \frac{dP_0}{dk}$ и $P_2 = \frac{d^2P_0}{dk^2}$:

$$P_1 = \frac{dP_0}{dk} = 1 - (1 + k T) \exp(-k T),$$

$$P_2 = \frac{d^2P_0}{dk^2} = k T^2 \exp(-k T).$$

Как видим, во-первых, $P_2 > 0$ при $k > 0$ и $T > 0$; во-вторых, $P_2 = 0$ при $k = 0$ или $T = 0$. Значит, функция $P_1(k)$ возрастает в области $k > 0$ при любом фиксированном $T > 0$ и поэтому является положительной при $k > 0$ и $T > 0$. Отсюда следует, что функция $P_0(k)$ также возрастает в области $k > 0$ при любом фиксированном $T > 0$. К тому же, $P_0 = 0$ при $k = 0$ или $T = 0$, и следовательно, выражение P_0 само является положительным при $k > 0$ и $T > 0$. Откуда, $B_1 > B_2$, а значит и $Y_1 > Y_2$ при $b_1 > b_2$. Что и требовалось доказать.

Из предыдущей теоремы следует, что самым оптимальным двухступенчатым графиком инвестирования для математической

модели является тот, у которого абсцисса точки разрыва — наименьшая.

Теорема 4. *Самым наилучшим инвестированием с временным горизонтом T и объемом U является инвестирование в начальный момент.*

Значит, наилучшим графиком инвестирования для математической модели (3.6) является функция $U \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Напомним [35, с. 205], что под дельта-функцией Дирак понимал «функцию», равную нулю при всех $x \neq 0$ и обращающуюся в точке $x = 0$ в бесконечность так, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Именно функция $U \cdot \delta(x)$ из всех функций инвестирования с временным горизонтом T и объемом U дает наибольший объем выпуска продукции.

Отсюда следует, что в рамках модели (3.6) наилучшей функцией инвестирования с временным горизонтом T и объемом U является обобщенная функция $U \cdot \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Именно функция $U \cdot \delta(x)$ из всех функций инвестирования с временным горизонтом T и объемом U дает наибольший объем выпуска продукции.

Казалось бы, вывод, сделанный в теореме 4, весьма противоречив. Ведь в реальности громадные, но короткие по времени инвестиции, не приводят к большим объемам производства. В чем же дело? А дело в ограничениях самой модели. Ведь в рамках модели, как уже было заявлено выше, предполагается, что не существует ограничений на восстановление и расширение фондов, выпуск и реализацию продукции. В реальности же такие ограничения существуют. Можно было бы их назвать пределом освоения или, как предлагается в [51], максимальной достоверной инвестиционной

емкостью, или еще каким-нибудь термином. Однако, в подобных случаях в литературе чаще пишут об «инвестиционном потенциале» [51]. Мы также будем придерживаться этого термина, но применительно к каждому конкретному моменту. *Инвестиционным потенциалом в момент времени t* мы назовем инвестиции в момент времени t , которые отрасли или предприятия способны в этот момент трансформировать в модернизацию и развитие. Ясно, что если инвестиции больше инвестиционного потенциала, то все инвестиции не могут быть освоены быстро и поэтому не могут увеличить объем производства. Этим и объясняется *второй парадокс инвестирования: при значительных денежных вложениях в реальный сектор экономики может происходить лишь незначительное повышение объемов производства*. Так произошло с денежным потоком в Россию в 1999-2002 гг.: «Хлынувший в Россию поток «сырьевых» долларов привел не к инвестиционному буму, а к переизбытку ликвидности, что выразилось в крупных остатках свободных средств на счетах кредитных организаций в Центральном банке России (ЦБ), которые не «работали» в экономике даже в качестве оборотной кассы» [44].

Следовательно, для наилучшей отдачи от инвестирования все деньги следует перечислить в начальный момент времени.

Однако, все это верно только в рамках модели (3.6). В реальности же деньги не могут быть освоены моментально. Существует некоторый предел освоения денежных средств в момент времени t . Обозначим его через $P(t)$. Этот предел зависит от возможностей региона (емкости инвестирования [51]) и момента времени t . А значит, он представляет собой функцию t , которую мы назовем предельной функцией. Тогда из доказанных выше теорем следует, что, для того чтобы получить наибольшую прибыль, инвестиции $u(t)$ в момент времени t должны совпадать с предельной функцией.

Таким образом, в работе получены следующие результаты, ка-

сающиеся математической модели (3.6):

1. Если коэффициент выбытия фондов постоянен и неотрицателен в течение всего временного горизонта, то лучшим из графиков линейного инвестирования (3.7) с заданным объемом инвестирования является тот, у которого больше начальная ордината (стартовые инвестиции).

2. То же самое можно сказать и о кусочно-постоянных инвестициях с двумя ступеньками (последняя из которых имеет нулевую высоту). Лучшим из графиков кусочно-постоянного инвестирования (3.7) является тот, у которого больше начальная ордината.

3. Самым оптимальным графиком линейного инвестирования региона с временным горизонтом T и объемом U является отрезок прямой соединяющий точки с координатами $(0, 2U/T)$ и $(T, 0)$.

4. Наилучшим графиком инвестирования для математической модели (1) является функция $U \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

5. Для того чтобы получить наибольшую прибыль, инвестиции $u(t)$ в момент времени t должны совпадать со значением предельной функции $P(t)$.

Сделанные в работе выводы позволяют в рамках допущений математической модели (3.6) выбрать лучший график линейного или кусочно-постоянного инвестирования лишь по его виду, не решая дифференциального уравнения (3.6), не подсчитывая объемы выпуска самих производств, и не проводя подробный анализ и оценку денежных потоков от инвестиционной деятельности.

3.6 Модель колебания рыночных цен

Известное дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника применимо к любой системе, испытывающей колебания. Например, оно может быть интерпретировано и как уравнение колебаний отклонения рыночной цены товара от его есте-

ственной цены. Более точно эта интерпретация выглядит следующим образом. Пусть $s(t)$ — отклонение рыночной цены от ее естественного значения в момент времени t (при $s(t) = 0$ рыночная цена в момент времени t совпадает с равновесной). Найдем уравнение отклонения рыночной цены от ее естественного состояния. Для этого предположим, что на рынке товаров действуют две силы, аналогичные силам упругости и сопротивления для пружинного маятника, которые условно назовем силой (тяготения) Смита и силой сохранения. Чтобы пояснить, что понимается под силой Смита, приведем две его цитаты:

«Фактическая цена, за которую обычно продается товар, называется его рыночной ценой. Она может или превышать его естественную цену, или быть ниже ее, или же в точности совпадать с нею. . . Таким образом, естественная цена как бы представляет собой центральную цену, к которой постоянно тяготеют цены всех товаров. Различные случайные обстоятельства могут иногда держать их на значительно более высоком уровне и иногда несколько понижать их по сравнению с нею. Но каковы бы ни были препятствия, которые отклоняют цены от их устойчивого центра, они постоянно тяготеют к нему.»¹

Описанное в этих цитатах «тяготение» (в чем-то схожее с силой упругости пружины) будем называть *силой Смита* $F_1(t)$. Естественно предполагать, что сила Смита направлена в сторону точки O на оси Os и по величине пропорциональна отклонению цены $s(t)$:

$$F_1(t) = -b s(t).$$

Коэффициент пропорциональности b будем называть *коэффициентом Смита*.

Помимо силы Смита на рынке может действовать еще и аналог силы трения, которую мы назовем *силой сохранения* $F_2(t)$. Адам

¹Смит А. Исследование о природе и причинах Богатства народов. Книга первая. – М.: Ось-89, 1997, с. 56, 58.

Смит писал: «Одно и то же число рабочих в сельском хозяйстве производит в различные годы весьма различные количества зерна, вина, масла, хмеля и т. п., между тем как одно и то же количество прядильщиков и ткачей каждый год производит одинаковое или почти одинаковое количество полотна и сукна. . . Собственный опыт каждого человека говорит ему, что цена полотна или сукна не подвержена столь частым и столь большим колебаниям, как цена хлеба. Цена одного рода товаров изменяется лишь в зависимости от изменений в спросе; цена другого рода товаров изменяется не только в зависимости от изменений в спросе, но и в зависимости от гораздо больших и гораздо более частых колебаний количества товара, доставляемого на рынок для удовлетворения этого спроса.»²

Таким образом, сила сохранения тем больше, чем более реже происходят колебания цены. Эта сила зависит от вида товара (сезонных и других колебаний количества товаров на рынке), психологии продавца (меньшей или большей склонности к изменению цены) и других факторов. Естественно полагать, что сила сохранения по величине пропорциональна скорости $\frac{ds}{dt}$ и направлена в противоположную сторону ($F_2 = -r \frac{ds}{dt}$). Коэффициент r будем называть *коэффициентом сохранения*.

Используя закон Ньютона $ma = F_1 + F_2$ по аналогии с пружинным маятником, получаем дифференциальное уравнение отклонения $s(t)$ рыночной цены товара от ее естественной цены:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -r \frac{ds}{dt} - b s,$$

где m выбрано равным единице.

Обозначив $\frac{r}{2}$ через δ , а \sqrt{b} — через ω_0^2 , где δ — *коэффициент затухания*, а ω_0 — *циклическая частота свободных колебаний в отсутствии силы сохранения*.

²Там же, с. 58–59.

В новых обозначениях уравнение колебаний имеет вид

$$s''(t) + 2\delta s'(t) + \omega_0^2 s(t) = 0.$$

По аналогии с пружинным маятником получаем, что возможны три случая:

1. Если $\delta > \omega_0$, то имеет место *непериодическое затухание*:

$$s(t) = C_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}.$$

Функция $s(t)$ монотонно убывает с ростом t . Система, выведенная из состояния равновесия, асимптотически, т. е. при $t \rightarrow \infty$, возвращается в это состояние.

2. Если $\delta = \omega_0$, то также имеет место *непериодическое затухание*:

$$s(t) = e^{-\delta t} (C_1 + C_2 t).$$

3. Если $0 < \delta < \omega_0$, то система совершает затухающие колебания:

$$s(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi_0),$$

где A_0 и ϕ_0 — постоянные величины, а $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — собственная циклическая частота колебаний. ▲

Глава 4

Математические модели в форме систем дифференциальных уравнений

4.1 Динамическая модель Леонтьева

Напомним, что статическая модель межотраслевого баланса В. Леонтьева записывается следующим образом: $X = AX + Y$. Предложенная В. Леонтьевым динамическая межотраслевая модель является классическим примером использования систем дифференциальных уравнений в исследовании проблем экономического роста. Эта модель, включающая дополнительно матрицу коэффициентов капиталоемкости B , определяет траектории сбалансированного экономического развития. Качественные свойства этих траекторий зависят от матрицы $B(I - A)^{-1}$. При некоторых условиях величина, обратная наибольшему собственному значению матрицы, определяет максимально возможный («технологический») темп прироста экономики, а соответствующий этому значению собственный вектор характеризует необходимые пропорции между объемами производства продукции на «магистральном» (с максимальным темпом прироста) участке экономического развития.

Динамическая модель В. Леонтьева выражается системой диф-

ференциальных уравнений

$$\boxed{Y(t) = K \frac{dY(t)}{dt} + C(t).} \quad (4.1)$$

Здесь $Y(t)$ — вектор-столбец национального дохода, $C(t)$ — вектор-столбец потребления, K — матрица коэффициентов полной приростной капиталоемкости, т. е. полных затрат производственного накопления на единичные приросты элементов используемого национального дохода.

Система уравнений (4.1) является матричным аналогом дифференциального уравнения (3.5).

Заметим, что матрица K и матрица прямых материальных затрат A связаны уравнением:

$$K = B(E - A)^{-1},$$

где A — матрица коэффициентов прямых материальных затрат (в отличие от коэффициентов статического межотраслевого баланса, коэффициенты динамической модели включают также затраты на возмещение основных производственных фондов); B — матрица коэффициентов капиталоемкости приростов производства (затраты производственного накопления на единицу прироста соответствующих видов продукции); $(E - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полных потребностей в выпуске продукции для получения единиц соответствующих видов конечной продукции.

▽ **Пример (динамическая модель Леонтьева).**¹ Рассмотрим народное хозяйство в разрезе двух отраслей. Пусть $C(t) = 0$ (экономика замкнута, т. е. все потребляется самими отраслями):

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1,0 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Найти динамику роста национального дохода с учетом отраслевой структуры.

¹Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. — М.: Экономика, 1985, с. 127–128.

Решение. Вычислим матрицы $(E - A)^{-1}$ и $K = B(E - A)^{-1}$:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,54 & 0,77 \\ 0,77 & 2,05 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1,16 & 1,41 \\ 2,16 & 2,41 \end{pmatrix}.$$

Решая систему дифференциальных уравнений

$$Y(t) = K \frac{dY(t)}{dt},$$

находим все элементы решения

$$Y(t) = 40,4 \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,61 \end{pmatrix} e^{0,275t} + 9,6 \begin{pmatrix} 1,15 \\ -1,00 \end{pmatrix} e^{-14,2t}. \quad (4.2)$$

Проанализируем полученное решение. Технологический темп прироста равен 0,275; он соответствует корню Фронебиуса-Перрона $\tilde{\lambda} = 3,64$. Ему соответствует также собственный вектор $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,61 \end{pmatrix}$, определяющий структуру вектора $Y(t)$. Второе слагаемое в уравнении (4.2) очень быстро стремится к нулю. Поэтому темп прироста национального дохода и его отраслевая структура очень быстро приближаются соответственно к $\tilde{\lambda}$ и \tilde{Y} . Уже при $t = 30$ различия фактических и асимптотических структур становятся меньше 0,001. ▲

Первая модель В. Леонтьева содержала 44 отрасли, баланс США за 1947 год охватывал примерно 400 отраслей. Современные балансы создаются с помощью быстродействующих компьютеров. Создание таких балансов позволяет прогнозировать тенденции экономического роста и создавать сценарии экономического развития.

Так, в 1941–1942 гг. В. Леонтьев опроверг предсказания о том, что послевоенная конверсия промышленности неизбежно приведет к массовой безработице. Вопреки убеждениям о падении спроса на продукцию сталелитейной промышленности США, он доказал (и это подтвердилось): спрос на сталь возрастет благодаря

расширению строительства и массовой реконструкции. Этот прогноз был сделан благодаря учету межотраслевых взаимодействий, не улавливаемых, как правило, сторонниками правдоподобных, но упрощенных объяснений процессов, происходящих в экономике.

Заметим, что планирование, основанное на модели межотраслевого баланса не противоречит рыночной экономике. В. Леонтьев часто использовал сравнение экономики с кораблем: частная инициатива, как ветер в парусах, сообщает экономике свой импульс; планирование же, как руль, направляет экономику в нужную сторону.

4.2 Модель изменения рыночной цены и спроса на электроэнергию

С конца 2003 года в России функционирует сектор свободной торговли оптового рынка электроэнергией. С коммерческой и технологической сторон рынок электроэнергией состоялся. Заложена модель эффективного ценообразования, конкурентный рыночный механизм. Потребители и поставщики научились почасовому планированию за сутки до реального времени, разработке стратегий поведения на рынке.

В статье [34] приведены данные об объемах покупки электроэнергии и ценах на нее в секторе свободной торговли за конец 2003 года и 2004 год. Анализ этих данных позволяет сделать интересные выводы: Цены в секторе свободной торговли были не постоянными, а периодическими с примерным периодом равным неделе. Примерно такой же период имели колебания объемов покупки электроэнергии. Причем колебания цен и объемов покупки электроэнергии не совпадали по фазе. Все это, на наш взгляд, весьма напоминает картину с колебаниями хищных и нехищных рыб, обнаруженную известным математиком Вито Вольтеррой (1860-1940). Как известно, для объяснения колебаний рыбных уловов

в Адриатическом море, имеющих один и тот же период, но отличающихся по фазе, Вольтерра предложил математическую модель «хищник-жертва» [1, с.26]. Напомним, что математическая модель «хищник-жертва» представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}x' &= ax - cxy, & a > 0, & \quad c > 0, \\y' &= -by + dxy, & b > 0, & \quad d > 0,\end{aligned}$$

причем $x = x(t)$ — число жертв; $y = y(t)$ — число хищников; x' , y' — это производные этих функций по временной переменной t ; a, b, c, d — это некоторые числа.

Многие математические модели успешно применяется одновременно и в биологии, и в демографии, и в физике, и в экономике [3, с. 422-430]. На наш взгляд модель «хищник-жертва» также может быть применена не только в биологии и экологии, но и в экономике для анализа изменения объемов закупок в зависимости от цены (модель не содержит объемов предложения электроэнергии, так как для рынка электроэнергии они более-менее постоянны). Причем цена выступает в роли хищника. А объемы закупок - в роли жертвы («цена съедает спрос»).

Объясним это подробнее.

Обозначим объемы закупок электроэнергии в секторе свободной торговли через x , цену электроэнергии через y .

В случае если цена электроэнергии вдруг станет равной нулю ($y = 0$), то объемы закупок начнут расти взрывным образом (т.е. экспоненциально): x станет расти согласно уравнению естественного роста: $x' = ax$, $a > 0$. В случае отсутствия спроса ($x=0$) цена будет падать по закону $y' = -by$, $b > 0$.

Спрос тем быстрее уменьшается, чем больше проданной электроэнергии и чем больше ее цена. Другими словами, (цена тем быстрее снижает закупки, чем более насыщен рынок электроэнергии по этой цене (xy)). Поэтому если объемы закупок электроэнер-

гии ненулевые, то объемы закупок электроэнергии меняются по закону $x' = ax - cxy$ ($a > 0$, $c > 0$).

С другой стороны, прибыль, получаемая поставщиками от продажи электроэнергии, стимулирует увеличение цены. Прибыль пропорциональна количеству проданного товара по его цене (xy). Поэтому имеем $y' = -by + dxy$, ($b > 0$, $d > 0$).

Таким образом, мы получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= ax - cxy, & a > 0, & \quad c > 0, \\ y' &= -by + dxy, & b > 0, & \quad d > 0, \end{aligned}$$

причем $x \geq 0, y \geq 0$.

Модель «цена – объемы покупок» построена.

Условием стабильности x и y являются уравнения $x' = 0$, $y' = 0$, или, по-иному,

$$ax - cxy = 0, \quad -by + dxy = 0.$$

Координаты точки равновесия — это координаты точки пересечения прямых

$$a - cy = 0, \quad -b + dx = 0.$$

Поэтому получаем, что равновесный объем закупок $x = b/d$ и равновесная цена $y = a/c$.

Анализируя полученную систему дифференциальных уравнений аналогично тому, как это сделано с моделью «хищник-жертва» в [57, с. 433-438], приходим к выводу: если объем закупок или цена выведены из состояния равновесия, то происходят периодические колебания объемов закупок и цены, которые по прошествии какого-то времени вновь и вновь возвращают их в начальное состояние. Колебания объемов закупок и цены имеют один и тот же период, но отличаются по фазе.

Полученная модель достаточно точно описывает динамику цен и объемов закупок электроэнергии и позволяет предсказывать изменение конъюнктуры на рынке электроэнергии.

Глава 5

Математические модели в форме разностных уравнений

5.1 Паутинообразная модель рынка

Опишем еще одну модель, учитывающую запаздывание во времени. Эта модель позволяет исследовать устойчивость цен и объемов товаров на рынке.

Будем предполагать, что производители зерна определяют предложение s (*supply*) товара в текущем периоде на основе цены p (*price*), установившейся в предшествующем периоде, а спрос d (*demand*) на товар изменяется в зависимости от цены в данном периоде. Предположение о запаздывании предложения от цены вполне объяснимо. Действительно, решение об объеме производства принимается с учетом текущих цен, но производственный цикл имеет определенную продолжительность, и соответствующее этому решению предложение появится на рынке по окончании данного цикла.

Если спрос и предложение линейно зависят от p , то динамика цены описывается следующими уравнениями:

$$s(t) = a p(t - 1) + b, \quad d(t) = -m p(t) + n.$$

Здесь $n > b > 0$, так как при нулевой цене спрос превышает предложение; $a > 0$, так как функция предложения возрастающая;

$m > 0$, так как функция спроса убывающая.

Таким образом, если спрос $s(t)$ равен предложению $d(t)$, то получим линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$m p(t) + a p(t - 1) = n - b.$$

Частным решением этого уравнения является константа

$$\bar{p} = \frac{n - b}{m + a}.$$

Решая характеристическое уравнение $m \lambda + a = 0$, находим его корень $\lambda = -\frac{a}{m}$.

Общее решение разностного уравнения имеет вид

$$p(t) = C \left(-\frac{a}{m}\right)^t + \bar{p}.$$

Следовательно, динамика цен носит колебательный характер.

При этом, если $\frac{a}{m} < 1$, то $\left(-\frac{a}{m}\right)^t \rightarrow 0$ ($t \in \mathbb{N}$) и $p(t) \rightarrow \bar{p}$. Последовательность цен сходится к равновесному состоянию.

При $m = a$ значения $p(t)$ чередуются вокруг равновесного значения \bar{p} .

Если $\frac{a}{m} > 1$, то $\left(-\frac{a}{m}\right)^t \rightarrow \infty$ (равновесие неустойчиво). В реальности бесконечно возрастающих колебаний не происходит, так как при больших отклонениях от равновесия линейные зависимости спроса и предложения от цены становятся нереалистичными. В более реалистичской нелинейной модели устанавливаются колебания большой, но конечной амплитуды.

5.2 Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса

При рассмотрении применений дифференциальных уравнений мы исходили из предположения о мгновенном воздействии факторов, влияющих на рост. В действительности, это воздействие не мгновенно. Оно происходит с некоторым запаздыванием. В тех случаях, когда запаздывание оказывает существенное влияние на рассматриваемые процессы, его необходимо включать в соответствующее дифференциальное уравнение. В социально-экономических науках в целях простоты модели, связанные с запаздыванием, записывают уже не в виде дифференциальных, а в виде разностных уравнений, то есть в виде уравнений с дискретным временем.

Так модель Самуэльсона-Хикса предполагает, что рост потребления $c(t)$ (*consumption*) запаздывает от роста национального дохода y т. е., что

$$c(t) = m y(t - 1) + n, \quad (5.1)$$

где m (*marginal*) — предельная склонность к потреблению (показывает на сколько увеличится потребление при увеличении текущего дохода на единицу ($m = \Delta c / \Delta y$)), а n — автономное потребление.

Предполагается также, что предприниматели осуществляют инвестиции $i(t)$ (*investments*) после того, как убедятся в том, что приращение национального дохода устойчиво. Поэтому, принимая решение об объеме инвестиций, они ориентируются на приращение национального дохода не в текущем, а предшествующем периоде:

$$i(t) = a \left(y(t - 1) - y(t - 2) \right). \quad (5.2)$$

Здесь a (*accelerator*) — коэффициент, именуемый *акселератором*.

Условие равенства спроса и предложения имеет вид:

$$y(t) = c(t) + i(t). \quad (5.3)$$

Подставляя в (5.3) выражение для $c(t)$ из (5.1) $i(t)$ из (5.2), находим:

$$\boxed{y(t) = (a + m)y(t - 1) - ay(t - 2) + n.} \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) называется *уравнением Хикса*. Пусть величины a , m и n — постоянны. Тогда уравнение Хикса представляет собой линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

В реальной экономике $m < 1$, а $a > 1$. При таких значениях предельной склонности к потреблению m и акселератора a решение уравнения Хикса неустойчиво и носит колебательный характер: возрастание сменяется убыванием, убывание — возрастанием. Это означает, что даже при постоянном темпе капиталовложений экономика имеет неустойчивый характер (раз нарушенное равновесие больше не восстанавливается), а периоды подъема экономики чередуются с периодами спадов (кризисов).

Поясним это на числовом примере.

∇ **Пример (уравнение Хикса)**. Предположим, что $a = 1,25$, $m = 0,95$, $n = 0,1$. Тогда уравнение Хикса примет вид:

$$y(t) - 2,2y(t - 1) + 1,25y(t - 2) = 0,1. \quad (5.5)$$

Найдем частное решение. Положив $y(t) = \text{const} = C$ и подставив в (5.5), получим

$$C - 2,2C + 1,25C = 0,1, \quad C = 2.$$

Частное решение $\bar{y}(t) = 2$. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения.

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2,2\lambda + 1,25 = 0$$

равны $1,1 \pm 0,2i$.

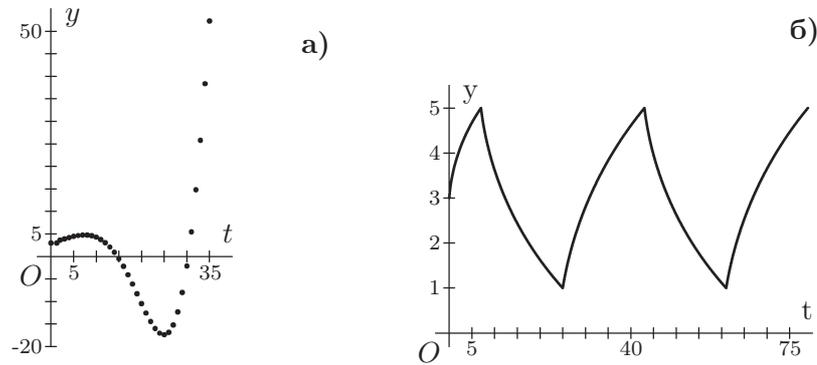


Рис. 5.1: Модель Самуэльсона-Хикса

Этим корням соответствуют линейно независимые решения вида

$$y_1(t) = \left(\sqrt{1,25}\right)^t \cos(\varphi t) \text{ и } y_2(t) = \left(\sqrt{1,25}\right)^t \sin(\varphi t),$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(2/11)$.

После округления получим

$$y_1(t) = 1,07^t \cos(0,18t) \text{ и } y_2(t) = 1,07^t \sin(0,18t).$$

Таким образом, общим решением однородного уравнения является функция $\tilde{y}(t) = 1,07^t \left(C_1 \cos(0,18t) + C_2 \sin(0,18t) \right)$, где C_1 и C_2 — произвольные константы. Следовательно, общим решением уравнения (5.5) будет функция

$$y(t) = 2 + 1,07^t \left(C_1 \cos(0,18t) + C_2 \sin(0,18t) \right).$$

График этой функции при $C_1 = C_2 = 1$ и $t \in \mathbb{N}$ изображен на рис. 5.1 а. ▲

Из последнего примера наглядно видно, что решение уравнения Хикса $y(t)$ очень быстро принимает неправдоподобные значения. В действительности такой сильной раскачки значений национального дохода не происходит. Размер национального дохода не может превышать величину национального дохода полной

занятости. Это ограничивает амплитуду колебаний объема национального дохода сверху. С другой стороны, объем инвестирования не может быть меньше отрицательной величины амортизации и это ограничивает амплитуду колебания величины национального дохода снизу. В результате колебания размера национального дохода принимают вид, изображенный на рисунке 5.1 б. Они имеют конечную амплитуду и характеризуют экономические циклы подъема и спада производства.

5.3 Регрессионные модели

Итальянский статистик Бенини (1907) был первым, кто с практической пользой применил в экономике метод множественной регрессии. Он удачно оценил функцию спроса на кофе, как функцию цен на кофе, с одной стороны, и на сахар — с другой. Получение подобных аналитических зависимостей между различными величинами — важная экономическая задача. Соответствующие формулы позволяют лучше понять ситуацию и спрогнозировать как она будет меняться в будущем.

Одним из наилучших способов получения таких формул — это метод наименьших квадратов.

Изложим идею этого способа.

Пусть мы хотим установить зависимость между двумя величинами x и y . Произведем соответствующие статистические исследования и занесем их результаты в таблицу:

x_1	x_2	x_3	\dots	x_i	\dots	x_n
y_1	y_2	y_3	\dots	y_i	\dots	y_n

Требуется наилучшим образом отразить общую тенденцию зависимости y от x , исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями статистических наблюдений. Такую зависимость стремятся представить в виде формулы $y = f(x)$.

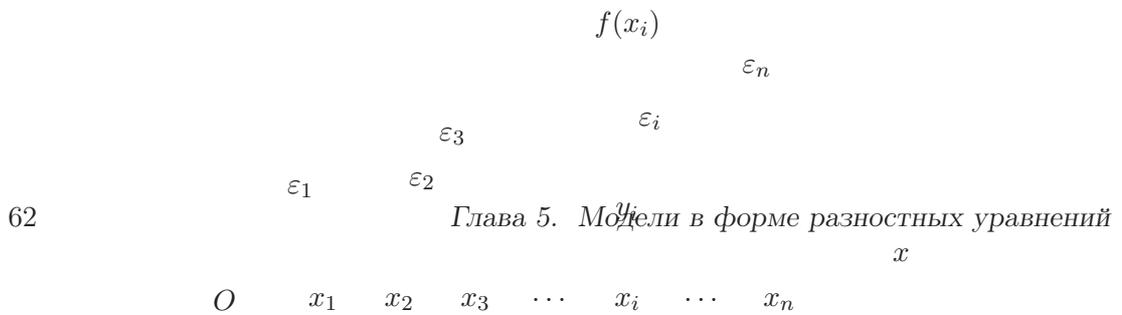


Рис. 5.2: Метод наименьших квадратов

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул*.

Задача нахождения эмпирических формул разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить вид зависимости $y = f(x)$, т.е. решить является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой. Для выбора функции $y = f(x)$ привлекаются соображения нематематического характера (теоретические предпосылки, соображения экспертов и т.п.), а также характер расположения точек (x_i, y_i) на плоскости.

Если вид функции $y = f(x)$ установлен, то переходят ко второму этапу — определению неизвестных параметров этой функции. Например, для зависимости $y = ax + b$ неизвестными параметрами являются a и b . В методе наименьших квадратов в качестве неизвестных параметров выбирают такие значения, чтобы сумма квадратов отклонений теоретических значений $f(x_i)$, найденных по эмпирической формуле $y = f(x)$, от соответствующих опытных значений y_i , т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

была минимальной.

Числа $f(x_i) - y_i$ будем обозначать ε_i и называть *погрешностями* (рис. 5.2).

На языке погрешностей метод наименьших квадратов состоит в следующем: нужно подобрать неизвестные параметры так, чтобы сумма квадратов погрешностей была возможно меньшей. Если эта минимальная сумма квадратов окажется малой, то тогда и сами погрешности будут малыми по абсолютной величине.

Следует отметить, что выбор в качестве отклонения S эмпи-

рических точек (x_i, y_i) от точек кривой $y = f(x)$ именно суммы квадратов погрешностей впервые предложил французский математик Лежандр. В принципе можно было взять в качестве S сумму погрешностей ε_i или сумму их абсолютных величин $|\varepsilon_i|$. Но делать это нецелесообразно, так как в первом случае $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ может быть малой или даже равняться нулю при значительном разбросе эмпирических точек, так как положительные отклонения ε_i компенсируются отрицательными. Во втором случае функция $\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|$ лишена этого недостатка, однако имеет другой — она не является дифференцируемой, что существенно затрудняет решение задачи.

Пусть в качестве функции $y = f(x)$ взята линейная функция $y = ax + b$. Задача сводится к отысканию таких параметров a и b , при которых функция

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

принимает наименьшее значение. Заметим, что S можно рассматривать как функцию от двух неизвестных параметров a и b . Подберем коэффициенты a и b так, чтобы функция S получила возможно меньшее значение. Для этого необходимо, чтобы соблюдались условия

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0.$$

После алгебраических преобразований эта система принимает

вид:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

Эта система называется системой нормальных уравнений. Она имеет единственное решение, так как ее определитель

$$D = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0$$

(что можно доказать методом математической индукции при $n \geq 2$).

Убедимся, что найденные значения дают минимум функции $S = S(a, b)$. Найдем частные производные

$$S''_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = A, \quad S''_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i = B, \quad S''_{bb} = 2n = C.$$

Поскольку

$$\Delta = AC - B^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0 \quad \text{и} \quad A = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0,$$

то согласно достаточному условию экстремума функция $S = S(a, b)$ имеет единственную точку минимума, определяемую из системы нормальных уравнений. Причем эта точка является точкой глобального минимума, поскольку она является единственной критической точкой.

Линейная зависимость характерна для многих случаев. Статистические исследования показывают, например, что реальный объем потребления y (в млрд. долл., 1982 г.) в США в период

за 1931–1990 годы зависел от численности населения в США x (10 млн.) линейно (причем, формула зависимости, найденная методом наименьших квадратов, имеет вид: $y = -1817,3 + 16,7x$, $12 < x < 25$). Объем частного потребления y (млрд. долл., 1982 г.) от располагаемого дохода x (млрд. долл.) в США в 1971–1990 гг. выражался зависимостью $y = -217,6 + 1,007x$, $1600 < x < 2900$

Гиперболическая зависимость. В ряде случаев теоретический анализ приводит к выводу нелинейной зависимости различных факторов. Рассмотрим, например, зависимость себестоимости единицы продукции y от объема производства этой продукции x . Себестоимость единицы продукции рассчитывается путем деления общей суммы затрат на объем произведенной продукции. Поэтому общая сумма затрат на производство равна произведению $x y$. В то же время затраты на производство можно условно подразделить на две части: 1) затраты, которые возрастают более или менее пропорционально увеличению объема произведенной продукции, — *условно-переменные* расходы (затраты на сырье и материалы, на топливо и электроэнергию для технологических целей, оплата труда основных производственных рабочих и т.п.); 2) затраты, либо совершенно не зависящие от объема продукции, либо зависящие от него в незначительной степени, — *условно-постоянные расходы* (оплата труда инженерно-технических работников и служащих, расходы на содержание зданий и сооружений и другие административно-управленческие и общехозяйственные расходы).

Обозначим переменные расходы в расчете на единицу продукции через a ; тогда их общая сумма составит $a x$. Общую сумму условно-постоянных расходов обозначим b . Тогда общая себестоимость продукции составит: $x y = a x + b$, откуда себестоимость единицы продукции будет равна: $a + \frac{b}{x}$.

Поскольку $b > 0$, то зависимость себестоимости единицы продукции от объема является обратной: с увеличением x себестои-

мость снижается. Однако это снижение не является равномерным, так как по мере увеличения x снижение y постепенно замедляется.

В случае гиперболической зависимости $y = f(x) = a + \frac{b}{x}$ отклонение S эмпирических точек (x_i, y_i) от точек кривой $y = f(x)$ заменяется выражением: $S = \sum_{i=1}^n (a + \frac{b}{x_i} - y_i)^2$.

Подберем коэффициенты a и b так, чтобы функция S получила возможно меньшее значение. Для этого необходимо, чтобы соблюдались условия $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$.

Отсюда

$$a n + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i, \quad a \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + b \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} y_i.$$

Решение этой системы нормальных уравнений и определяет параметры a и b .

Мы привели систему нормальных уравнений только для гиперболического вида зависимости. В некоторых случаях теоретический анализ дает основания предполагать другие зависимости (более подробно об этом см. в книгах автора [3, 12]). Параметры этих зависимостей также могут быть найдены с помощью метода наименьших квадратов. Так, при недостаточном количестве осадков урожайность будет, естественно, очень низкой, а по мере увеличения их количества урожайность будет повышаться. Однако это повышение не будет беспредельным, так как для каждой культуры в данных конкретных условиях есть какое-то оптимальное количество осадков, при котором достигается наиболее высокая урожайность. По мере того как количество осадков будет приближаться к оптимальной величине, рост урожайности будет постепенно замедляться и прекратится совсем при достижении этого оптимума. Дальнейшее увеличение количества осадков может привести к тому, что они окажутся излишними и вредными, в результате чего урожайность будет снижаться. Такого рода зависимость прибли-

женно можно выразить уравнением параболы. Аналогичный характер связи можно ожидать и в ряде других случаев, например, для зависимости уровня производительности труда рабочего от его возраста.

5.4 Эконометрика и оценка адекватности модели

Вначале регрессионный анализ применялся в биологии и важнейшим научным журналом, в котором освещалась эта тема, был журнал «Биометрика» («*Biometrika*»), выходящий с 1901 года. Между 1920 и 1930 гг. большое значение приобрело использование регрессионного анализа в экономике и возникла новая область науки — эконометрика. Термин «эконометрика» впервые был использован бухгалтером П. Цьемпой (1910). Цьемпа считал, что если к данным бухгалтерского учета применить методы алгебры и геометрии, то будет получено новое, более глубокое представление о результатах хозяйственной деятельности. Это употребление термина, как и сама концепция, не прижилось, но название «эконометрика» оказалось весьма удачным для определения нового направления в экономической науке. Название «эконометрика» для нового направления был введен Р. Фришем в 1926 году, которому позднее была присуждена Нобелевская премия. В 1933 году впервые вышел журнал «Эконометрика» («*Econometrika*»). От изучения частных регрессионных задач исследователи постепенно перешли к регрессионному анализу структуры, присущей глобальным экономическим системам (Дж. Кейнс, Я. Тинберген, Р. Клейн и другие, многие из которых получили Нобелевские премии). Регрессионные исследования стали популярны также и в социологии, психологии и менеджменте.

Слово «эконометрика» представляет собой комбинацию двух слов: «экономика» и «метрика». Таким образом, сам термин подчеркивает специфику, содержание эконометрики как науки: ко-

личественное выражение тех связей и соотношений, которые раскрыты и обоснованы экономической теорией.

Одним из важных вопросов, решаемых эконометрикой является следующий: насколько найденное уравнение адекватно, т.е. насколько оно соответствует реальному моделируемому процессу.

Дело в том, что по одним и тем же статистическим данным с помощью метода наименьших квадратов можно построить различные уравнения регрессии: линейное, квадратичное, логарифмическое, показательное и т.п. Какое из них будет наиболее точным? Какое из них наиболее качественно подгоняет фактические данные?

Очевидно, наилучшим будет то уравнение, у которого разброс между фактическими данными y_i и теоретическими значениями \hat{y}_i , вычисленными по уравнению регрессии, минимален. Следовательно, чем меньше сумма квадратов отклонений $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$, тем лучше уравнение регрессии.

Однако сумма квадратов отклонений фактических и теоретических значений является размерной величиной. Это неудобно. Ведь сопоставление регрессионных уравнений, содержащих различные переменные, измеренные в различных единицах измерения, на основе этой величины невозможно.

Для сопоставлений регрессионных уравнений используют безразмерную величину

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

которую называют *коэффициентом детерминации*. R^2 принимает значения между 0 и 1: $0 \leq R^2 \leq 1$.

Случай $R^2 = 1$ означает точную подгонку: все точки наблюдений y_i лежат на регрессионной кривой: $y_i = \hat{y}_i$. Чем ближе R^2 к 1, тем ближе к нулю отклонения фактических и теоретических данных $(y_i - \hat{y}_i)^2$ и тем лучше качество подгонки регрессионного уравнения.

Коэффициент детерминации R^2 не позволяет принять решение о пригодности регрессионного уравнения, хотя и дает некоторое представление о качестве подгонки. Решение о пригодности уравнения принимаются на основе статистических критериев — F-критерия, t-критерия.

Как правило, эти критерии применяются для уравнения линейной регрессии $\hat{y} = a + bx$. При этом выдвигается нулевая гипотеза, что $b = 0$.

F-критерий основан на том, что в случае $b = 0$ имеем совпадение факторной и остаточной дисперсий

$$D_{\text{факт}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{1}, \quad D_{\text{ост}} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{n - 2}.$$

При равенстве $D_{\text{факт}}$ и $D_{\text{ост}}$ отношение $F = D_{\text{факт}}/D_{\text{ост}}$ равно 1.

Вычисленное значение F-отношения признается достоверным (отличным от единицы), если оно больше табличного. В этом случае нулевая гипотеза об отсутствии связей признаков отклоняется и делается вывод о существенности этой связи:

$$F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}, \quad H_0 \text{ отклоняется.}$$

Если же величина F окажется меньше табличной, то вероятность нулевой гипотезы выше заданного уровня (например, 0,05) и она может быть отклонена без риска сделать неправильный вывод о наличии связи. В этом случае уравнение линейной регрессии считается статистически незначимым:

$$F_{\text{факт}} < F_{\text{табл}}, \quad H_0 \text{ не отклоняется.}$$

Как поступать в случае необходимости оценить адекватность нелинейных моделей? Многие нелинейные модели удается линеаризовать. Например, уравнение $y = a + b/x$ линеаризуется путем введения переменной $z = 1/x$, после чего оценивается уже линейное уравнение $y = a + bz$. Уравнение $y = a + b\sqrt{x}$ линеаризуется путем введения переменной $z = \sqrt{x}$. Уравнения $y = ax^b$, $y = ae^{bx}$

линеаризуются путем логарифмирования и введения соответствующих новых переменных.

Приведенные примеры не исчерпывают класс линеаризуемых функций. Аналогичным образом могут быть линеаризованы и многие другие функции.

5.5 Авторегрессионные модели

Дифференциальное уравнение (3.6) (см. 32), примененное нами для объяснения некоторых «парадоксов инвестирования», имеет нелинейное решение. Поэтому линейное регрессионное уравнение не подходит для практического моделирования зависимости между анализируемыми показателями. Хотя такие модели строятся некоторыми аналитиками довольно часто.

Одна из таких линейных моделей, например, была построена Гранбергом А.Г. и Зайцевой Ю.С. [30] для зависимости между среднедушевыми показателями ВРП и инвестиций в основной капитал на данных 1999-2002 г.г. В [30] на основе метода наименьших квадратов были получены регрессионные уравнения, в которых в качестве независимых факторов выступали инвестиции текущего года и предыдущих лет. Результаты тестирования на наличие мультиколлинеарности, а также на нормальность остатков не приводились.

Поэтому автор этой книги предложил своей аспирантке Е.А. Гафаровой построить другую модель в виде разностного уравнения, полученного на основе дифференциального уравнения (3.6) (см. 32) и моделей акселератора и мультипликатора (об этих моделях см. ниже). Было предложено также провести сравнительный анализ этих моделей на основе известных статистических данных.

Теоретическую экономическую основу исследований Е.А. Гафаровой зависимостей показателей экономического роста от инвестиций составили модели акселератора и мультипликатора. Мо-

дель акселератора (Дж. Б. Кларк) постулирует зависимость между валовыми капиталовложениями (I_t) в момент времени t и национальным доходом (Y_t)

$$I_t = \alpha \cdot \Delta Y_t,$$

где $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$; α - коэффициент акселерации.

Учитывая последнее соотношение модель акселератора можно переписать в виде:

$$Y_t = Y_{t-1} + \frac{1}{\alpha} \cdot I_t$$

Аналогичная модель получается при переходе от дифференциального уравнения (3.6) к соответствующему разностному уравнению.

Помимо акселератора в теории экономического роста используется модель мультипликатора (Дж. М. Кейнс), которая показывает, что увеличение инвестиций приводит к увеличению национального дохода общества:

$$\Delta I_t = m \cdot \Delta Y_t,$$

где m — мультипликатор.

Расписывая разности обоих переменных в модели мультипликатора и выражая из нее Y_t , получим: $Y_t = Y_{t-1} + \frac{1}{m} \cdot (I_t - I_{t-1})$.

Таким образом, модели акселератора и мультипликатора показывают, что национальный доход выступает как функция предыдущих собственных значений, а также текущего и предыдущего значений инвестиций. Однако приведенные уравнения не учитывают запаздывание инвестиций. Поэтому, при практическом моделировании на основе *временных рядов* целесообразно учитывать запаздывающие значения обоих показателей, т.е. рассматривать зависимость более общего вида:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_{t-1} + \dots + \alpha_p \cdot y_{t-p} + \beta_0 \cdot I_t + \beta_1 \cdot I_{t-1} + \dots + \beta_q \cdot I_{t-q} + \varepsilon_t,$$

где параметр q характеризует период инвестиционных запаздываний (лаг).

Как известно, динамические модели, содержащие лаги зависимых и независимых переменных, называются авторегрессионными уравнениями с распределенными лагами и обозначаются $ADL(p, q)$. Авторегрессионной эта модель называется потому, что искомая переменная y_t зависит от себя самой (вычисленные в другие моменты).

Важным моментом построения ADL-моделей является определение числа лагов p и q , входящих в модель. Для этого производится оценивание множества моделей и дальнейший отбор из них наилучшей. Построение начинается с наиболее общей модели, которая включает максимальное количество переменных и число лагов. Затем отобранная модель тестируется на наличие автокорреляции, гетероскедастичности остатков, соответствие их нормальному закону распределения и др.

Анализ Е.А. Гафаровой между объемами инвестиций в основной капитал на душу населения по 79 субъектам РФ, показал наличие высокой степени корреляции между переменными в модели [30]. Известно, что в таком случае оценки метода наименьших квадратов формально существуют, однако являются несостоятельными. Анализ разностного аналога дифференциального уравнения (3.6) также показал его несостоятельность.

Поэтому Е.А. Гафаровой для практического моделирования зависимости анализируемых показателей было рассмотрено авторегрессионное уравнение с распределенными лагами (ADL). Строгое математическое описание моделей ADL, специфика их построения приводится, например, в [33, С.501]. Отметим лишь, что в построенном уравнении рассматривается зависимость объемов производства в текущий момент времени от своих же значений в предыдущие моменты времени, а также от индекса инвестиций, взятых с большим лагом. Определение глубины запаздывания инвести-

ций проводилось на основе теста Грэнджера на причинность, а также анализа коррелограмм. При этом получено, что временной лаг инвестиций составляет более трех лет. Дальнейший отбор лаговых значений обоих показателей сопровождался построением множества ADL-моделей и отбором значимых факторов на основе *t*-статистики. Выбор же наилучшей модели проводился на основе информационных критериев Акаике и Шварца, а также с учетом выполнения условий некоррелированности, гомоскедастичности и нормальности остатков модели. Все расчеты проводились на сезонно скорректированных данных в программе Eviews. Качество окончательной модели оказалось хорошим. Полученное уравнение хорошо описывало наблюдаемый экономический процесс и обладало хорошими прогнозными характеристиками. На основе анализа экономических процессов при помощи авторегрессионных моделей Е.А. Гафаровой была успешно защищена кандидатская диссертация. Были найдены интересные зависимости. В частности, было показано, что сезонно очищенные уровни индекса производства продукции являются хорошим индикатором экономического роста и демонстрируют значительное падение прироста промышленной продукции в кризисный 1998 год. Начало 1999г. отмечалось повышением уровня данного показателя вплоть до середины 2000 года. В дальнейшей динамике имеет место циклическое изменение индекса, сопровождающееся меньшими падениями, но и меньшими приростами промышленного производства по сравнению с предыдущими годами. Е.А. Гафаровой было отмечено отсутствие роста анализируемого показателя в первой половине 2005 г., что позволило ей сделать вывод: не следует ожидать высоких значений в ближайшей перспективе. Так оно и оказалось впоследствии. Разразился мировой финансовый кризис.

Глава 6

Случайные процессы в экономике

6.1 Цепи Маркова и их приложения в экономике

Одним из примеров случайного процесса являются *цепи Маркова*. Они появились в исследованиях российского ученого А. А. Маркова в 1907 году и послужили началом создания теории марковских процессов, имеющей в настоящее время многочисленные приложения.

Понятие цепей Маркова поясним на следующем простом примере (пример заимствован из книги [17]).

▽ **Пример (о конъюнктуре рынка труда в условиях кризиса)**. Трудоспособный рабочий в условиях кризиса в стране может находиться в одном из следующих трех состояний:

- 1) работать по специальности;
- 2) работать не по специальности;
- 3) быть без работы.

Назавтра он может быть или в том же состоянии, или перейти в одно из других: потерять работу, если он работал; найти работу, если он был без работы и т. д.

При данном состоянии конъюнктуры на рынке труда можно говорить о переходных вероятностях p_{ij} того, что рабочий, находившийся в i -м из указанных трех состояний, окажется через день в j -м ($i = j$ означает, что он останется в прежнем состоянии).

Все эти вероятности в нашем примере пусть отвечают числам приведенным в следующей таблице

Исходное состояние	Вероятность завтрашнего состояния			
	1	2	3	Итого
1. Работа по специальности	0,8	0,1	0,1	1
2. Другая работа	0,1	0,6	0,3	1
3. Без работы	0	0,1	0,9	1

Мы хотим показать процесс *Маркова* в самом простом виде: при постоянных переходных вероятностях, или, как говорят, *однородный процесс Маркова*. В однородном процессе Маркова не учитывается, что переходные вероятности, вообще говоря, зависят от времени, например, в следствие сезонных колебаний на рынке труда.

Считая, что в изложенном процессе мы имеем дело с процессом *Маркова*, мы отвлекаемся и от некоторых других осложняющих обстоятельств. Мы считаем, что стаж работы или, наоборот, время безработицы не имеет значения: работающий давно так же рискует оказаться безработным, как и работающий с недавних пор, или безработному одинаково трудно найти работу, независимо от длительности безработицы (иное дело было бы, например, если бы на работу биржа труда направляла в порядке очереди).

Итак, имеем матрицу переходных вероятностей

$$P = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{vmatrix} \quad (6.1)$$

Здесь все элементы неотрицательны, а все суммы элементов по строкам равны единице.

Составим теперь матрицу переходных вероятностей для 2-дневного интервала. Если обозначить вероятность перехода из i -го состояния в j -е в матрице (6.1) через p_{ij} , то вероятность перехода из i -го состояния в некоторое k -е через 2 однодневных интервала можно составить по формуле полной вероятности

$$p_{ik(2)} = p_{i1}p_{1k} + p_{i2}p_{2k} + p_{i3}p_{3k}. \quad (6.2)$$

В матрице P_2 вероятностей 2-дневных переходов элемент $p_{ik(2)}$ стоит в i -й строке на k -м месте. Из формулы (6.2) поэтому следует, что эта матрица P_2 есть P^2 .

Теперь легко понять, что для находившегося в исходный момент в i -м состоянии вероятность через r дней оказаться в h -м состоянии измеряется h -м элементом в i -й строке матрицы $P_r = P^r$.

Вычислим в нашем примере $P_2 = P^2$, $P_3 = P^3$ и т. д. последовательным умножением.

В P^2 первый элемент первой строки равен

$$0,8 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0 = 0,65,$$

второй элемент той же строки равен

$$0,8 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,15.$$

Вычисляя аналогично остальные элементы матрицы, получим

$$P^2 = \begin{vmatrix} 0,65 & 0,15 & 0,20 \\ 0,14 & 0,40 & 0,46 \\ 0,01 & 0,15 & 0,84 \end{vmatrix}.$$

Умножая снова на P , получаем $P^3 = P^2 \cdot P^1$:

$$P^3 = \begin{vmatrix} 0,535 & 0,175 & 0,290 \\ 0,152 & 0,300 & 0,548 \\ 0,023 & 0,175 & 0,802 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что соотношение подобное $P^3 = P^2 \cdot P^1$ в теории марковских цепей носят фундаментальный характер и выражает связь между вероятностями перехода для трех последовательных моментов времени. Действительно, если $P(1) = P$ выражает матрицу переходных вероятностей (в первый день), матрица $P(2) = P(3 - 1) = P^2$ — матрицу переходных вероятностей во второй день, а матрица $P(3) = P^3$ — матрицу переходных вероятностей в третий день. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} P(2) &= P(1) \cdot P(2 - 1) = P \cdot P = P^2; \\ P(3) &= P(2) \cdot P(3 - 2) = P^2 \cdot P = P^3; \end{aligned}$$

Далее

$$P(4) = P(3) \cdot P(4 - 3) = P^3 \cdot P = P^4;$$

И, вообще,

$$\boxed{P(m) = P(s) \cdot P(m - s)}. \quad (6.3)$$

Соотношение (6.3) называется *уравнением Колмогорова-Чепмена* и выражает связь между вероятностями перехода для каких-либо трех последовательных промежутков времени. Матрица $P(4) = P^4 = P^3 \cdot P$, представляющая собой четвертую степень матрицы (6.1), имеет следующий вид:

$$P^4 = \begin{vmatrix} 0,44 & 0,19 & 0,37 \\ 0,15 & 0,25 & 0,60 \\ 0,04 & 0,19 & 0,77 \end{vmatrix}.$$

Теперь найдем сразу $P^8 = (P^4)^2$.

$$P^8 = \begin{vmatrix} 0,24 & 0,20 & 0,56 \\ 0,13 & 0,20 & 0,67 \\ 0,08 & 0,20 & 0,72 \end{vmatrix}.$$

Далее,

$$P^{16} = \begin{vmatrix} 0,13 & 0,20 & 0,67 \\ 0,11 & 0,20 & 0,69 \\ 0,10 & 0,20 & 0,70 \end{vmatrix}, \quad P^{32} = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{vmatrix}.$$

Теперь мы видим замечательную черту процессов *Маркова*:

вероятность оказаться через достаточно долгий срок в том или ином состоянии не зависит от начального состояния.

В нашем примере для находящегося в любом из трех состояний вероятность через месяц оказаться на работе по специальности составляет 0,1, на другой работе 0,2 и без работы 0,7.

Чтобы получить эти вероятности, нам пришлось, однако, проделать довольно большую вычислительную работу. Между тем ее можно было бы избежать. Заметим прежде всего, что после того, как вероятности по строкам стали одинаковы, дальнейших изменений при повышении степени P^r уже не будет.

В самом деле, представим себе, что P^{32} умножается снова на P . Так как строки в P^{32} состоят из одинаковых элементов, то то же будет и в P^{33} , так как строки P^{33} порождаются строками P^{32} . В первой строке P^{33} получим

$$0,1 \cdot 0,8 + 0,2 + 0 = 0,08 + 0,02 = 0,1;$$

$$0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,1 = 0,01 + 0,12 + 0,07 = 0,2;$$

$$1 - 0,1 - 0,2 = 0,7.$$

Еще яснее, что при возведении P^{32} в квадрат, умножая элементы строки (любой), например, на элементы некоторого столбца, мы умножаем их на одно и то же число, а так как по строкам сумма равна единице, то, складывая произведения, мы снова получим то же число. Ввиду сказанного можно найти P^∞ , поставив задачу следующим образом: каковы должны быть вероятности p_1, p_2, p_3 нахождения в момент времени t в том или ином состоянии, чтобы вероятности нахождения в момент $t + 1$ были теми же самыми?

Вероятности нахождения в том или ином состоянии в момент $t + 1$ мы получим, умножая матрицу-вектор $\|p_1 \ p_2 \ p_3\|$ на матрицу

P . Таким образом, надо найти такие p_1, p_2, p_3 , чтобы осуществилось равенство

$$\|p_1 \ p_2 \ p_3\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{array} \right\| = \|p_1 \ p_2 \ p_3\|. \quad (6.4)$$

Это означает, что p_1, p_2, p_3 должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} 0,8 p_1 + 0,1 p_2 = p_1, \\ 0,1 p_1 + 0,6 p_2 + 0,1 p_3 = p_2, \\ 0,1 p_1 + 0,3 p_2 + 0,9 p_3 = p_3. \end{cases}$$

Но сумма всех трех уравнений дает тождество $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + p_2 + p_3$.

Поэтому одно уравнение надо отбросить, как выводное из других. Зато надо присоединить обязательное условие $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (Сумма вероятностей равна единице, поскольку один из трех исходов обязательно произойдет).

Тогда после отбрасывания третьего уравнения системы и переноса переменные второго и третьего уравнений из правой части в левую окончательно имеем:

$$\begin{cases} -0,2 p_1 + 0,1 p_2 = 0, \\ 0,1 p_1 - 0,4 p_2 + 0,1 p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} -0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 0,1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,08 + 0,01 + 0,02 - 0,01 = 0,1.$$

Далее вычисляем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & -0,4 & 0,1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,01;$$

$$p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,1; \quad p_2 = 2p_1 = 0,2; \quad p_3 = 1 - 0,1 - 0,2 = 0,7.$$

Эти вероятности 0,1; 0,2; 0,7, которые называют еще финальными или предельными, совпадают с определенными выше путем возведения в степень P .

Очевидно, что как только достигнуты (или были заданы с самого начала) такие вероятности нахождения в том или ином состоянии, дальнейших изменений вероятностей состояний уже не будет — процесс станет *стабильным*. ▲

В общем случае *цепь Маркова* может быть определена как последовательность случайных величин

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_t, \dots,$$

которые принимают целочисленные значения (например, 1, 2, ..., n) и обладают тем свойством, что условное распределение вероятностей случайных величин X_t при заданных значениях

$$X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_{t-1} = k_{t-1},$$

зависит от k_{t-1}, k_t и не зависит от всех предыдущих значений, то есть

$$P_{X_1=k_1, X_2=k_2, \dots, X_{t-1}=k_{t-1}}(X_t = k_t) = P_{X_{t-1}=k_{t-1}}(X_t = k_t).$$

Это свойство цепи Маркова называется *марковским свойством*.

Если условные вероятности $P_{X_{t-1}=i}(X_t = j) = p_{ij}$, не зависят от t , то цепь *Маркова* называется *однородной*.

Величины p_{ij} называются *переходными вероятностями* и удовлетворяют условиям:

$$p_{ij} \geq 0, \quad p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = 1. \quad (6.5)$$

Матрица $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}$, составленная из этих вероятностей, называется *матрицей переходных вероятностей*.

Верна следующая

Эргодическая теорема Маркова. Если все $p_{kl} > 0$, то при любом i , $1 \leq i \leq l$, существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j, \quad (6.6)$$

не зависящие от начального состояния i , причем p_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Предельные вероятности p_j находятся единственным образом из матричного уравнения

$$\|p_1, p_2, \dots, p_n\| \cdot P = \|p_1, p_2, \dots, p_n\| \quad (6.7)$$

и условия $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Эта теорема установлена Марковым в 1907 году.

Заметим, что матричное уравнение (6.7) возникает в общих цепях Маркова так же естественно, как и уравнение (6.4) на с. 79.

Если число состояний n равно бесконечности, то утверждение (6.6) справедливо при некоторых дополнительных предположениях относительно переходных вероятностей p_{ij} .

Эргодическая теорема выражает достаточные условия (все $p_{ij} > 0$) того, что вероятность p_j того, что процесс будет находиться в j -м состоянии не зависит от того, из какого состояния процесс начал развиваться. Поэтому говорят, что марковские цепи (марковские процессы) «забывают свое прошлое», а вероятности p_j называют *предельными* или *финальными* вероятностями. Они выражают какую часть времени в среднем процесс будет находиться в этом состоянии. Например, если $p_1 = 0,1$ и процесс длится достаточно долго, то в среднем десятую часть времени процесс был в первом состоянии.

Заметим, что условие эргодической теоремы (все $p_{ij} > 0$) является достаточным, но не является необходимым. Существуют марковские цепи не обладающие свойством: все $p_{ij} > 0$, которые также способны «забывать свое прошлое»

Цепь *Маркова* является важной моделью случайных процессов.

6.2 Понятие случайного процесса

Случайной функцией называют функцию неслучайного аргумента s , которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Случайные функции обозначают прописными буквами $X(s)$, $Y(s)$ и т. д.

Если неслучайный аргумент истолковывается как время, то случайную функцию называют случайным или стохастическим процессом.

Случайным (стохастическим) процессом называют случайную функцию аргумента t , который истолковывается как время.

В каждый фиксированный момент времени t величина случайного процесса $X(t)$ является случайной величиной, которую называют *сечением* случайного процесса. С изменением времени t меняется и сечение. В результате изменения этих сечений и получается случайный процесс. Поэтому случайный процесс можно рассматривать как совокупность случайных величин $X(t)$, зависящих от t .

Например, если самолет должен лететь с заданной скоростью, то в действительности вследствие воздействия в каждый момент времени случайных факторов (колебание температуры, изменение силы ветра и др.), учесть влияние которых заранее нельзя, скорость изменяется. В этом примере скорость самолета — непрерывно изменяющаяся случайная величина, т. е. случайный процесс.

Заметим, что если аргумент t изменяется дискретно, то соответствующие ему случайные величины образуют *случайную последовательность*.

Одна из таких случайных последовательностей (цепей) была рассмотрена в предыдущем параграфе.

Возможно другое истолкование случайного процесса.

Реализацией (траекторией) случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию аргумента t , равной которой может

оказаться случайный процесс в результате испытания.

Например, если проводятся измерения Вашего сердцебиения, то результатом измерения является функция (электрокардиограмма). Электрокардиограмма является лишь одной из реализаций случайного сердечного процесса. Очевидно, при повторении измерения получится другая электрокардиограмма. Она будет представлять уже другую реализацию случайного процесса. Таким образом, если в опыте наблюдают случайный процесс, то в действительности наблюдают одну из возможных его реализаций.

Итак, случайный процесс можно рассматривать и как совокупность его возможных реализаций.

Реализации случайного процесса $X(t)$ обозначают строчными буквами $x_1(t)$, $x_2(t)$ и т. д., где индекс указывает номер испытания. Так первую кардиограмму обозначают $x_1(t)$, вторую — $x_2(t)$.

В примере с самолетом, случайный процесс изменения скорости в полете можно также трактовать как совокупность графиков скорости различных полетов.

Введем понятия математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайного процесса.

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$. При фиксированном значении аргумента, например при $t = t_1$, получим сечение — случайную величину $X(t_1)$ с математическим ожиданием $M(X(t_1))$ и дисперсией $D(X(t_1))$. (Полагаем, что математическое ожидание и дисперсия любого сечения существует.) Таким образом, каждое фиксированное значение аргумента определяет сечение — случайную величину, а каждой случайной величине соответствуют ее математическое ожидание и дисперсия. Отсюда следует, что каждому фиксированному значению аргумента t соответствуют определенные математическое ожидание и дисперсия; это означает, что математическое ожидание и дисперсия случайного процесса являются неслучайными функциями аргумента t ; их обозначают через $m_x(t)$ и $D_x(t)$ соответственно. Дадим теперь

определения математического ожидания и дисперсии.

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно математическому ожиданию сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$m_x(t) = M(X(t)).$$

Геометрически математическое ожидание случайного процесса можно истолковать как «среднюю кривую», около которой расположены другие кривые — реализации; при фиксированном значении аргумента математическое ожидание есть среднее значение сечения («средняя ордината»), вокруг которого расположены его возможные значения (ординаты).

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента: $D_x(t) = D(X(t))$.

Дисперсия характеризует степень рассеяния возможных реализаций (траекторий) вокруг математического ожидания случайного процесса («средней кривой»). При фиксированном значении аргумента дисперсия характеризует степень рассеяния возможных значений сечения вокруг математического ожидания сечения.

Средним квадратическим отклонением случайного процесса называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

6.3 Стационарный процесс и динамические системы

Среди случайных процессов целесообразно выделить класс функций, математические ожидания которых сохраняют одно и то же постоянное значение при всех значениях аргумента t и кор-

реляционные функции которых зависят только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Ясно, что для таких функций начало отсчета аргумента может быть выбрано произвольно. Такие случайные процессы называют стационарными.

Стационарные случайные процессы помогают в изучении динамических систем. Динамические системы часто выражаются дифференциальными уравнениями.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ на предприятии произвелось количество продукции y_0 и известно, что инвестиции в предприятие в каждый момент времени t равны $u(t)$. Коэффициент выбытия фондов в момент времени t равен $k(t)$. Тогда количество продукции $y(t)$ на предприятии, произведенной в момент времени t описывается задачей Коши (начально-краевой задачей):

$$y'(t) + k(t)y(t) = u(t), \quad y(0) = y_0. \quad (6.8)$$

Рассмотрим случай: $k(t) = 1$, $u(t) = 2$. С одной стороны фонды выбывают $k(t) = 1$, с другой стороны происходит расширение производства $u(t) = 2$. Спрашивается: на какой уровень объемов выпуска продукции предприятие выйдет при больших t ?

Решением задачи Коши $y'(t) + y(t) = 2$, $y(0) = y_0$ является функция $y(t) = 2 - (2 - y_0)e^{-t}$. Она стремится к 2 при $x \rightarrow 0$.

Как видим, если коэффициент k уравнения (6.8) известен, а в правой части уравнения задается функция $u(t)$, то можно решить дифференциальное уравнение и найти решение $y(t)$.

Другими словами говорят, если входная функция (инвестиции) системы (6.8) равны $u(t)$, то на выходе получим функцию $y(t)$ (объем выпущенной продукции). Так, для рассматриваемого случая можно сказать, что если на входе в систему инвестиции равны 2, то на выходе получим объем производства $y(t) = 2 - (2 - y_0)e^{-t}$. Причем, функция, выражающая объем производства, при больших t практически сливается с функцией $y = 2$.

А теперь зададимся вопросом: что будет если на вход в систему поступает не функция $u(t) = 2$, а случайный процесс $U(t)$ с

математическим ожиданием $m_u(t) = 2$? Можно ли ожидать, что на выходе будем иметь случайный процесс, который при больших t будет иметь математическое ожидание равное 2?

Ответ на этот вопрос положителен. Надо только потребовать, чтобы на входе случайный процесс был стационарным, а система была линейной с постоянными коэффициентами.

Сформулируем этот результат более точно и в более общей формулировке. Для этого нам понадобятся дополнительные определения.

Стационарной линейной динамической системой называют устройство, которое описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} a_0 Y^{(n)}(t) + a_1 Y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n Y(t) = \\ = b_0 X^{(m)}(t) + a_1 X^{(m-1)}(t) + \dots + b_m X(t), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $X(t)$ — входная стационарная случайная функция (воздействие, возмущение), $Y(t)$ — выходная случайная функция (реакция, отклик).

Если динамическая система устойчива, то при достаточно больших значениях t , т. е. по окончании переходного процесса, функцию $Y(t)$ можно считать стационарной.

Поставим перед собой задачу найти математическое ожидание выходного случайного процесса по математическому ожиданию входного стационарного случайного процесса.

Приравняем математические ожидания левой и правой частей уравнения (6.9). Учитывая, что $X(t)$ и $Y(t)$ при больших t имеют постоянные математические ожидания $m_y(t) = m_y = \text{const}$, $m_x(t) = m_x = \text{const}$, и то, что математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания, получим

$$a_n m_y = b_m m_x.$$

Отсюда искомое математическое ожидание выходного случайного

процесса при больших t равно

$$m_y = b_m m_x / a_n. \quad (6.10)$$

▽ **Пример 1 (математическое ожидание объемов выпускаемой продукции).** На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t) + Y(t) = U(t)$, подается стационарный случайный процесс $U(t)$ (инвестиции) с математическим ожиданием $m_u = 2$. Найти математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ (объемов продукции) на выходе системы в установившемся режиме (при больших t).

Решение. Согласно формуле (6.10) имеем $m_y = b_m m_u / a_n = 1 \cdot 2 / 1 = 2$. Таким образом, не решая самого дифференциального уравнения, описывающего динамику роста объемов продукции предприятия, мы можем предсказать, что если финансирование предприятия представляет собой стационарный случайный процесс с математическим ожиданием равным 2, а фонды постоянно выбывают с коэффициентом выбытия равным единице, то предприятие в конце концов выйдет на уровень выпуска продукции в среднем равным 2 (в денежном выражении). ▲

▽ **Пример 2 (прогнозирование объемов выпускаемой продукции в отсутствие финансирования).** На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t) + Y(t) = U(t)$, подается стационарный случайный процесс $U(t)$ с математическим ожиданием $m_u = 0$ (инвестиции уравновешивают сбор налогов, штрафы и другие расходы). Найти математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ (объемов продукции) на выходе системы в установившемся режиме (при больших t).

Решение. Согласно формуле (6.10) имеем $m_y = 1 \cdot 0 / 1 = 0$. Следовательно, если финансирование предприятия представляет собой стационарный случайный процесс с математическим ожида-

нием равным 0, а фонды постоянно выбывают с коэффициентом выбытия равным единице, то предприятие в конце концов выйдет на уровень выпуска продукции в среднем равным 0 (т.е. производить ничего не будет). ▲

Мы рассмотрели случай, когда практически отсутствует финансирование. Применение формулы (6.10) в случае, когда коэффициент выбытия фондов k равен нулю, невозможно, т.к. знаменатель дроби в этой формуле обращается в нуль. Однако мы можем рассмотреть случай, когда коэффициент выбытия фондов мал ($k = 0,01$).

▽ Пример 3 (прогнозирование объемов выпускаемой продукции при малом коэффициенте выбытия фондов).

На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t) + 0,01 Y(t) = U(t)$, подается стационарный случайный процесс $U(t)$ с математическим ожиданием $m_u = 2$. Найти математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ (объемов продукции) на выходе системы в установившемся режиме (при больших t).

Решение. Согласно формуле (6.10) имеем $m_y = \frac{2}{0,01} = 200$. Следовательно, если финансирование предприятия представляет собой стационарный случайный процесс с математическим ожиданием равным 2, а коэффициентом выбытия фондов равен 0,01, то предприятие в конце концов выйдет на уровень выпуска продукции в среднем равным 200 (т.е. производить достаточно большой объем продукции). ▲

Таким образом, не решая самого дифференциального уравнения, описывающего экономический процесс, мы можем найти его математическое ожидание (например, математическое ожидание объемов выпуска продукции предприятия) по очень простой арифметической формуле (6.10).

6.4 Простейший поток событий

Понятие процесса Пуассона тесно связано с законом распределения Пуассона и так называемым простейшим потоком событий.

Введем сначала понятия потока событий, простейшего потока и интенсивности потока.

Потоком событий называют последовательность однородных событий, которые наступают в случайные моменты времени. Примерами потоков могут служить: прибытие самолетов, поступление вызовов на пункт неотложной медицинской помощи, последовательность отказов элементов и многие другие.

Заметим, что поток событий, вообще говоря, не является случайным процессом. Ведь само событие (например, прибытие самолета) не является числом. Поэтому и о потоке событий нельзя говорить как о функции. Однако, если рассмотреть количественные характеристики потока (например, количество прибывающих самолетов в последовательные промежутки времени), то уже можно говорить о случайном процессе. Ниже будет рассмотрен один из таких случайных процессов, характеризующих поток событий. Но сначала необходимо ввести некоторые определения и понятия, связанных с потоками событий.

Потоком Пуассона называется поток событий, обладающий свойствами ординарности и отсутствия последействия.

Что же это за свойства?

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит, появились ли события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени, вычисленная при любых предположениях о том, что происходило до начала рассматриваемого промежутка (сколько событий появилось, в какой последовательности), равна безусловной вероятности. Таким образом, предыстория потока

не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем.

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность $P_i(\Delta t)$ ($i = 2, 3, \dots$) появления более одного события за малый промежуток времени Δt практически равна нулю: $P_i(\Delta t) \approx 0$, $i = 2, 3, \dots$

Из свойства ординарности следует, что среднее число событий (математическое ожидание), наступивших на временном промежутке от t до $t + \Delta t$, составит

$$\begin{aligned} M(\Delta t) &= 0 \cdot P_0(\Delta t) + 1 \cdot P_1(\Delta t) + 2 \cdot P_2(\Delta t) + 3 \cdot P_3(\Delta t) + \dots \approx \\ &\approx 0 + P_1(\Delta t) + 0 + 0 + \dots = P_1(\Delta t). \end{aligned}$$

Тогда среднее число событий в единицу времени на этом промежутке будет равно $\frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$, то последний называют *интенсивностью ординарного потока* и обозначают через $\lambda(t)$:

$$\boxed{\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t}}. \quad (6.11)$$

Если $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, то поток событий называется *стационарным*. Для стационарного потока его интенсивность λ характеризует среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

В виде формулы это можно записать так:

$$M(\Delta t) \approx \lambda \Delta t \quad (6.12)$$

Эта формула выражает свойство стационарности.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не

зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися. Например, вероятности появления k событий на промежутках времени $(0, 5)$, $(7, 12)$, $(T, T + 5)$ одинаковой длительности $t = 5$ ед. времени равны между собой.

Простейшим потоком событий (или *стационарным потоком Пуассона*) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Простейший поток встречается в природе среди потоков событий так же часто как и нормальное распределение среди распределений случайных величин. И если преобладание нормального распределения является следствием центральной предельной теоремы, то преобладание простейшего потока является следствием следующей теоремы, которую мы сформулируем в упрощенной форме.

6.5 Теорема Хинчина о суммарном потоке

Сформулируем в упрощенной формулировке одну очень важную для приложений теорему.

Теорема А. Я. Хинчина (о суммарном потоке). *Предположим, что интересующий нас поток является суммой очень большого числа независимых между собой стационарных потоков, каждый из которых мало влияет на сумму. Суммарный поток при дополнительном ограничении арифметического характера, гарантирующем ординарность суммарного потока, оказывается близким к простейшему.*

Эта теорема, доказанная А. Я. Хинчиным в более общей форме, представляет принципиальное значение для приложений.

Действительно, из того, что поток вызовов, поступающих на телефонную станцию, можно рассматривать как сумму большого числа независимых потоков, каждый из которых ничтожно мало

влияет на сумму, этот поток должен быть близок к простейшему. Точно так же поток грузовых судов, прибывающих в данный морской порт, составлен из большого числа потоков, отправленных из различных других портов, следовательно, поток судов также должен быть близок к простейшему. Число подобных примеров можно продолжать и далее.

Процессом Пуассона называют случайное число событий простейшего потока, наступивших за время t .

Название процесса своим происхождением обязано тому, что, сечение этого процесса есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λt :

Теорема (о процессе Пуассона). *Если рассматривается простейший поток событий с интенсивностью λ , то число k наступления события в произвольном временном промежутке от T до $T+t$ есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λt .*

6.6 Уравнения Колмогорова.

В теории массового обслуживания фундаментальное значение имеют уравнения Колмогорова. В общем случае уравнения Колмогорова рассматриваются для так называемых марковских процессов с непрерывным временем.

Рассмотрим систему S с конечным множеством состояний S_1, S_2, \dots, S_n , переходы в которой возможны в любые моменты времени. По аналогии с цепями Маркова для описания марковского процесса с непрерывным временем необходимо задание начального распределения вероятностей по состояниям и матрицы перехода. В процессах с непрерывным временем (т.е. для процессов, у которых переход возможен в любой момент времени) не имеет смысла говорить о вероятности перехода S_i в S_j в момент времени t , так как вероятность конкретного значения непрерывной

случайной величины равна нулю (так же как, например, длина нескольких точек на прямой). Здесь сказывается непрерывность времени. Поэтому говорят о вероятности перехода не в момент времени t , а на промежутке времени от t до $t + \Delta t$. Будем обозначать эту вероятность через $p_{ij}(t, \Delta t)$. Кстати, в примере о конъюнктуре рынка труда в условиях кризиса (см. с. 74) мы также говорили не о вероятностях перехода в момент времени, а о вероятностях перехода в промежутке времени (точнее, о вероятности перехода через в новое состояние через день: $\Delta t = 1$). Матрицу $\|p_{ij}(t, \Delta t)\|_{i,j=1,2,\dots,n}$ обозначим через $P(t, t + \Delta t)$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ мы приходим к понятию *плотности вероятности перехода* в момент времени t :

$$p_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (6.13)$$

Как и при рассмотрении примера о конъюнктуре рынка труда в условиях кризиса (см. с. 74) рассмотрим для начала систему, состоящую из трех состояний. Обозначим эти состояния через S_1, S_2, S_3 . Будем предполагать переходы из одного состояния в другое образуют простейший поток событий.

Вероятностью i -го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i . Если вероятности $p_i(t) = p_i = \text{const}$ (имеется стационарный режим) и $p_{ij}(t, t + \Delta t) > 0$, то согласно эргодической теореме Маркова получаем уравнение, аналогичное уравнениям (6.7), (6.4):

$$\boxed{\|p_1, p_2, p_3\| \cdot P(t, t + \Delta t) = \|p_1, p_2, p_3\|}. \quad (6.14)$$

Отсюда можно получить следующую систему уравнений [12]:

$$\boxed{\begin{cases} p_1(-\lambda_{12} - \lambda_{13}) + p_2\lambda_{21} + p_3\lambda_{31} = 0, \\ p_1\lambda_{12} + p_2(-\lambda_{21} - \lambda_{23}) + p_3\lambda_{32} = 0, \\ p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23} + p_3(-\lambda_{31} - \lambda_{32}) = 0. \end{cases}} \quad (6.15)$$

Полученную систему уравнений называют *системой уравнений Колмогорова для стационарного режима*. Она играет фундаментальную роль в теории массового обслуживания.

Для нестационарного режима выводится *система дифференциальных уравнений Колмогорова*.

$$\begin{cases} p_1(t) (-\lambda_{12} - \lambda_{13}) + p_2(t) \lambda_{21} + p_3(t) \lambda_{31} = p_1'(t), \\ p_1(t) \lambda_{12} + p_2(t) (-\lambda_{21} - \lambda_{23}) + p_3(t) \lambda_{32} = p_2'(t), \\ p_1(t) \lambda_{13} + p_2(t) \lambda_{23} + p_3(t) (-\lambda_{31} - \lambda_{32}) = p_3'(t). \end{cases} \quad (6.16)$$

Эта система легко обобщается для случая n состояний.

Полученная система носит название *системы дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний*.

Так же как и в случае эргодической теоремы Маркова для однозначного решения уравнений (6.7) на с. 81 требуются также добавить уравнение $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$. Однако, для однозначности решения системы уравнений этого будет еще мало, ведь дифференциальные уравнения имеют бесконечно много решений. Поэтому для однозначного решения системы дифференциальных уравнений требуется также задать начальные условия:

$$p_1(0) = p_1^0, \quad p_2(0) = p_2^0, \quad p_3(0) = p_3^0 \quad (p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 = 1).$$

Дифференциальные уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени. В теории массового обслуживания особый интерес представляют вероятности системы в стационарном режиме, т. е. когда $p_i(t) = p_i = \text{const}$ при $t > T$ для достаточно большого T . В этом случае $p_i'(t) = 0$ и поэтому из системы (6.16) получаем систему уравнений (6.15) с точными равенствами. Вот и обещанное объяснение по поводу того, почему в (6.15) можно писать точные равенства.

Если режим процесса не является стационарным, то при $t \rightarrow \infty$ у функций $p_i(t)$ все равно могут существовать предельные (финальные) вероятности p_i . В этом случае для достаточно больших

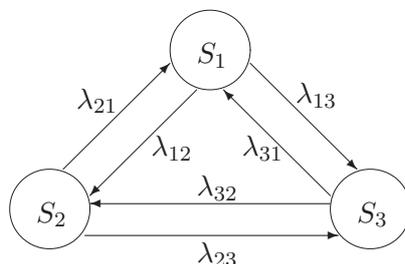


Рис. 6.1: Граф для трех состояний

t имеем $p_i(t) \approx p_i = \text{const}$. При этом, для p_i равенства в (6.15) будут точными, а для $p_i(t)$ приближенными. Они будут тем точнее, чем больше t .

При анализе процессов Маркова с конечным числом состояний удобно пользоваться *графами состояний*. Пусть, как и в рассмотренном выше случае, имеется система с тремя возможными состояниями S_1, S_2, S_3 . Эти возможные состояния будем считать вершинами графа. Тогда возможный переход из состояния S_i в состояние S_j обозначим стрелкой с началом в S_i и концом в S_j , около которой запишем интенсивность перехода (Рис. 6.1). Процесс в системе можно рассматривать как блуждание точки по графу с мгновенными переходами из состояния в состояние под воздействием потоков событий с интенсивностями λ_{ij} .

Пользуясь изображением графа, легко написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояния $p_i(t)$. При этом имеет место следующее

Правило составления дифференциальных уравнений Колмогорова с помощью графа состояний: *Производная по времени от $p_i(t)$ равна алгебраической сумме по всем стрелкам графа состояний, у которых S_i является или началом или концом. В этой сумме каждое слагаемое представляет собой произведение вероятности того состояния, из которого направле-*

на стрелка, на интенсивность потока событий, идущего вдоль данной стрелки; слагаемое берется со знаком плюс, если поток идет к S_i , и со знаком минус в противоположном случае.

Правило составления уравнений Колмогорова для стационарного режима мало отличается от составления дифференциальных уравнений. Следует лишь заменить в соответствующем тексте производную по времени на нуль.

Правило составления уравнений Колмогорова для стационарного режима. В правой части каждого уравнения пишем нуль, а в левой — алгебраическую сумму по всем стрелкам графа состояний, у которых S_i является или началом или концом. В этой сумме каждое слагаемое представляет собой произведение вероятности того состояния, из которого направлена стрелка, на интенсивность потока событий, идущего вдоль данной стрелки; слагаемое берется со знаком плюс, если поток идет к S_i , и со знаком минус в противоположном случае.

Глава 7

Системы массового обслуживания

7.1 Простейшая задача массового обслуживания

У одного банка было два отделения Верхнее и Нижнее. В каждом отделении было пять сотрудников. Однако при одинаковом потоке клиентов в Верхнем отделении образовывались длинные очереди, а в Нижнем — нет. Анализ их работы показал, что работа в Нижнем отделении была поставлена более правильно.

Дело в том, что в отделениях банка было три вида специалистов. Распределение которых в Нижнем отделении было более оптимальным.

Поясним это. Отделения банка, специализировались на обслуживании физических лиц (клиентов) и осуществляли прием денежных средств во вклады.

Каждый клиент банка сначала интересуется каковы проценты по тому или другому вкладу, через какое время можно получить первые начисления по процентам, какие филиалы существуют у банка, можно ли снять эти деньги за границей. Интересует его и множество других вопросов. Для того чтобы проконсультировать клиента в банке существует специальная должность — должность офис-менеджера. Офис-менеджеры выполняют консультативную работу.

Решившись на тот или иной вклад, клиент идет к друго-

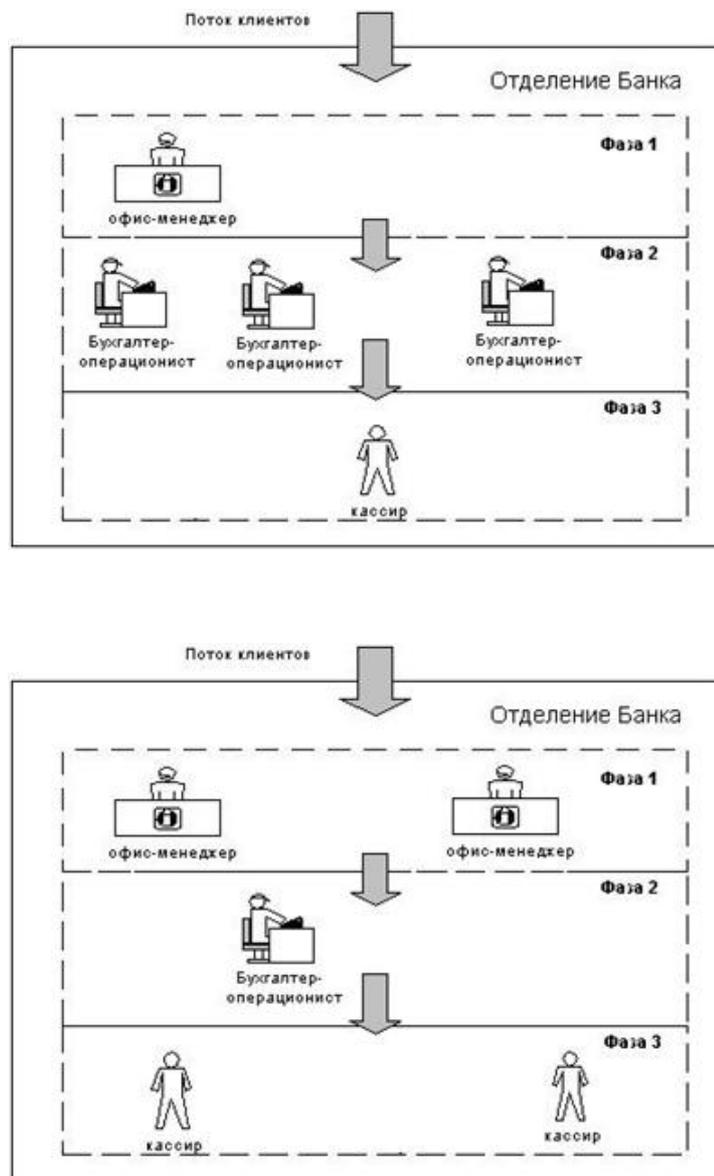


Рис. 7.1: Два отделения банка

му представителю банка — бухгалтеру-операционисту. Бухгалтер-операционист просит заполнить соответствующий бланк заявления, проверяет правильность его заполнения, а также соответствие его предъявленному удостоверению личности.

После этого бухгалтер-операционист сам подписывает этот бланк и передает его третьему представителю банка — кассиру. Кассир принимает деньги у клиента и выполняет соответствующие кассовые операции.

Таким образом, обслуживание клиента банка состоит из трех фаз. На первой фазе клиента встречают офис-менеджеры, выполняющие консультативную работу; на второй фазе — бухгалтеры-операционисты, выполняющие операционную работу; на третьей фазе — кассиры, выполняющие кассовые операции.

Длительность обслуживания клиентов в отделениях банка различными специалистами была неодинакова и характеризовалась следующей таблицей:

Банковские услуги	Общее время обслуживания клиентов, сек		
	Фаза 1	Фаза 2	Фаза 3
Открытие срочного вклада	300	150	300

Различие Верхнего и Нижнего отделений банка состояло в различном составе специалистов.

Обслуживанием клиентов в Верхнем отделении занимался один офис-менеджер, три бухгалтера-операциониста, один кассир.

В Нижнем же отделении обслуживанием клиентов занимались два офис-менеджера, один бухгалтер-операционист, два кассира (см. рис. 7.1).

В результате на первой и третьей фазах в Верхнем отделении уходило в два раза больше времени на обслуживание, чем в Нижнем. На этих фазах и образовывалась длинная очередь.

В Нижнем же отделении было более рациональное распределение специалистов. При одинаковом числе работников в отделениях, Нижнее отделение работало без очередей и не теряло клиентов (ведь при длинной очереди клиенты уходят в конкурирующий банк).

Мы рассмотрели простейший пример, где преимущества работы Нижнего отделения очевидны. На практике возникают более сложные ситуации. Бывает, что нужно добиваться не столько уменьшения очереди, сколько увеличения прибыли. В этом случае надо учитывать различие зарплаты каждой из категорий специалистов, требуемые расходные материалы и другие факторы. Как же организовать работу банка более рационально? Существует ли какая-нибудь специальная дисциплина в науке, решающая такие задачи? Да, существует. Это теория массового обслуживания.

Именно о ней и пойдет речь в настоящей главе.

7.2 Понятие системы массового обслуживания

Современное общество не может обойтись без разветвленной сети *систем массового обслуживания*. К таким системам относятся телефонные станции, магазины, поликлиники, предприятия общественного питания, билетные кассы, автозаправочные станции, парикмахерские и т. п. Несмотря на разнообразие, все эти системы имеют общие черты и общие проблемы. Рассматривая работу той или иной системы массового обслуживания, надо учитывать прежде всего число каналов обслуживания заявки, число заявок, поступающих на вход системы в единицу времени, длительность обслуживания заявки. Существенно, что число поступающих в систему заявок, моменты их поступления, длительность обслуживания заявки относятся, как правило, к категории *случайных факторов*. Поэтому теория массового обслуживания должна рассматриваться в рамках теории вероятностей.

Случайности принципиально нельзя устранить. Но их можно должным образом учесть и, как следствие, можно достаточно рационально организовать систему массового обслуживания. Подобные вопросы начали исследоваться в первой четверти 20-го века в работах известного датского ученого А. Эрланга в связи с проблемой перегрузки телефонных линий. Впоследствии новое направление в теории вероятностей получило развитие и в работах других ученых, в том числе российских, и было названо по предложению видного советского математика А. Я. Хинчина *теорией массового обслуживания* (в западной литературе теорию массового обслуживания называют *теорией очередей*).

Случайные процессы уже обсуждались в предыдущем параграфе. В частности, рассматривались и случайные процессы с конечным числом состояний. Переходы системы из одних состояний в другие происходят под действием потока заявок, поступающих на вход системы, и потока обслуживаний. Под последним понимается поток заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом системы.

Системами массового обслуживания называют системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо видов услуг, а, с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов.

Системы массового обслуживания классифицируют по разным признакам. Одним из признаков является ожидание требования начала обслуживания. В соответствии с этим признаком системы подразделяются на следующие виды: *системы с отказами* и *системы с очередью*

Если заявка поступает в систему с отказами в промежуток времени, когда все каналы заняты, то она получает отказ и выходит из игры.

Примером системы с отказами является телефонная линия. Если абонент занят, ваша заявка получает отказ, и вы можете пове-

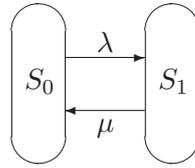


Рис. 7.2: Одноканальная система с отказами

снуть трубку. Повторно набирая телефонный номер, вы тем самым посылаете новую заявку.

В системах с очередью заявка, появившаяся в промежуток времени, когда все каналы обслуживания заняты, встает в очередь и ожидает пока не освободиться один из каналов.

По числу каналов обслуживания системы массового обслуживания делятся на одноканальные и многоканальные.

Ниже мы рассмотрим некоторые из систем массового обслуживания.

7.3 Одноканальная система с отказами

Рассмотрим один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью (средней скоростью) λ . Поток обслуживаний имеет интенсивность (средней скоростью) μ . В качестве примера такого канала может служить телефон. Соответствующая этому каналу (телефону) система массового обслуживания S имеет два состояния: S_0 — канал свободен, S_1 — канал занят. В данном случае первое состояние обозначено буквой не с индексом 1, а буквой с индексом 0, чтобы подчеркнуть, что состояние системы соответствует тому случаю, когда количество заявок равно 0 (заявки полностью отсутствуют). Граф состояний для этой системы представлен на рис. 7.2.

Пусть система находится в состоянии S_0 . Как только приходит заявка, один из каналов становится занятым — система переходит в состояние S_1 . Предположим теперь, что система находится в со-

стоянии S_1 — канал занят. Если канал освобождается, то система переходит в состояние S_0 . Поскольку поток заявок поступает с интенсивностью λ , а обслуживается с интенсивностью μ , то рядом со стрелкой, началом которой является S_0 приписано λ , а рядом со стрелкой, началом которой является S_1 приписано μ .

Всего состояний два: S_0 и S_1 . Поэтому, согласно правилу составления уравнений Колмогорова для стационарного режима (см. с. 96) уравнений тоже будет два. Причем, в правой части каждого уравнения пишем нуль, а в левой — алгебраическую сумму по всем стрелкам графа состояний, у которых S_i является или началом или концом. В этой сумме каждое слагаемое представляет собой произведение вероятности того состояния, из которого направлена стрелка, на интенсивность потока событий, идущего вдоль данной стрелки; слагаемое берется со знаком плюс, если поток идет к S_i , и со знаком минус в противоположном случае. Поскольку S_0 является началом стрелки с указанием интенсивности λ , то ей в первом уравнении (для состояния S_0) соответствует слагаемое $(-\lambda p_0)$. В то же самое время S_0 является концом стрелки с указанием интенсивности μ , и началом S_1 , поэтому ей в первом уравнении соответствует слагаемое $(+\mu p_1)$. Таким образом, первое уравнение (для состояния S_0) имеет вид: $\mu p_1 - \lambda p_0 = 0$. Аналогично составляется второе уравнение. В правой части равенства — нуль. В левой части — два слагаемых: первое равно $-\mu p_1$, т. к. S_1 является началом стрелки с указанием интенсивности μ ; второе равно $+\lambda p_0$, т. к. S_1 является концом стрелки с началом S_0 , и указанием интенсивности λ . В конечном счете получаем следующую систему из двух уравнений:

$$\mu p_1 - \lambda p_0 = 0, \quad \lambda p_0 - \mu p_1 = 0.$$

Система вырождается в одно уравнение $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$. Учитывая

условие $p_0 + p_1 = 1$, найдем предельные вероятности состояний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состояниях S_0 и S_1 .

Заявка получает отказ, если канал занят, т. е. когда система находится в состоянии S_1 . Вероятность, что система находится в S_1 , равна p_1 . Поэтому вероятность отказа, которую мы обозначим, через $P_{\text{отк}}$, равна $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$:

$$P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Отсюда находим вероятность Q того, что поступившая в систему заявка будет принята к обслуживанию:

$$Q = 1 - p = 1 - p_1 = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Поскольку λ (интенсивность потока заявок) равно среднему числу заявок, поступивших в единицу времени, то умножив λ на Q (вероятность того, что поступившая в систему заявка будет принята к обслуживанию), получим среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени. Эта величина (λQ) называется *абсолютной пропускной способностью* и обозначается A . Имеем

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}.$$

7.4 Многоканальная система с отказами

Рассмотрим n -канальную систему с отказами. Примером может служить система, состоящая из n телефонных линий. Именно такую систему рассматривал Эрланг. Соответствующий граф

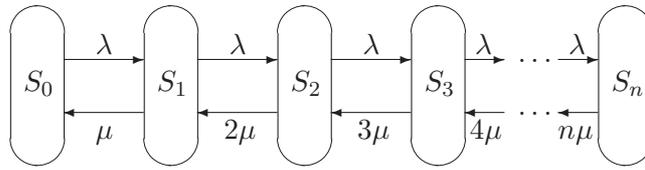


Рис. 7.3: Многоканальная система с отказами

состояний дан на рисунке 7.3. Для состояний системы использованы обозначения: S_0 — все каналы свободны; S_1 — занят один канал, остальные свободны; S_2 — заняты два канала, остальные свободны; \dots ; S_n — заняты все n каналов. Как и в предыдущем параграфе, λ — интенсивность потока заявок, μ — интенсивность потока обслуживаний.

Пусть система находится в состоянии S_0 . Как только приходит заявка, один из каналов становится занятым — система переходит в состояние S_1 . Если система находится в S_1 и приходит очередная заявка, то становятся занятыми уже два канала — система переходит из S_1 в S_2 . И так дальше. При этом, система переходит из любого состояния в соседнее в направлении *слева направо* с потоком заявок интенсивности λ . Вопрос о потоках событий, приводящих к переходам между соседними состояниями в направлении *справа налево*, немного более сложен. Если система находится в состоянии S_1 (занят один канал), то поток обслуживаний с интенсивностью μ освобождает этот канал и переводит систему в состояние S_0 . Предположим теперь, что система находится в состоянии S_2 , т.е. заняты два канала. Каждый канал освобождается под действием одного и того же потока обслуживаний интенсивностью μ . Система может перейти в состояние S_1 (занят один канал), когда закончит обслуживания хотя бы один из каналов. Суммарная интенсивность потоков обслуживаний на двух каналах равна 2μ . Поэтому суммарный поток обслуживаний, переводящий систему из состояния S_2 в S_1 будет 2μ . Аналогично суммарный поток обслуживаний, переводящий систему из состояния S_3 (три канала

заняты) в S_2 будет иметь интенсивность 3μ , и так далее.

Применяя правило составления уравнений Колмогорова для стационарного режима (см. с. 96) и пользуясь графом состояний, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \mu p_1 - \lambda p_0 &= 0, \\
 (\lambda + \mu) p_1 - \lambda p_0 - 2\mu p_2 &= 0, \\
 (\lambda + 2\mu) p_2 - \lambda p_1 - 3\mu p_3 &= 0, \\
 \dots & \\
 (\lambda + k\mu) p_k - \lambda p_{k-1} - (k+1)\mu p_{k+1} &= 0, \\
 \dots & \\
 (\lambda + (n-1)\mu) p_{n-1} - \lambda p_{n-2} - n\mu p_n &= 0, \\
 p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n &= 1.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Из первого уравнения находим $p_1 = (\lambda/\mu)p_0$. В дальнейших записях отношение λ/μ будет встречаться очень часто. Поэтому для компактности это отношение удобно обозначить одной буквой. Обычно это отношение обозначают через ρ . Число ρ в теории массового обслуживания выражает отношение интенсивности потока заявок к интенсивности потока обслуживаний и называется *интенсивностью нагрузки канала*.

С помощью нового обозначения последнюю формулу можно записать так: $p_1 = \rho p_0$. Подставим найденное выражение во второе уравнение. Тогда два слагаемых уничтожатся и мы получим: $p_2 = \frac{\rho^2}{2} p_0$. Продолжив, из первых n уравнений Колмогорова получим следующие n выражений:

$$\boxed{p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.} \tag{7.2}$$

Тогда из условия $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ следует, что

$$\boxed{p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}.} \tag{7.3}$$

Формулы (7.2), (7.3) для предельных вероятностей получили названия *формул Эрланга*.

Вероятность отказа системы есть предельная вероятность, что все n каналов системы заняты, т. е.

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (7.4)$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена вычисляется как вероятность противоположного события, которое состоит в том, что все каналы заняты:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (7.5)$$

Среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (абсолютная пропускная способность) будет равна

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right). \quad (7.6)$$

Для многоканальной системы обслуживания, помимо величин $P_{\text{отк}}$, Q , A , вводят еще одну характеристику \bar{k} — *среднее число занятых каналов*. Ее можно вычислить как математическое ожидание числа занятых каналов:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^n k p_k,$$

где p_k — предельные вероятности состояний, определяемые по формулам (7.2), (7.3). А можно найти и проще, если учесть, что A есть не что иное, как интенсивность потока обслуженных системой заявок в единицу времени. Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени, то среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = A/\mu,$$

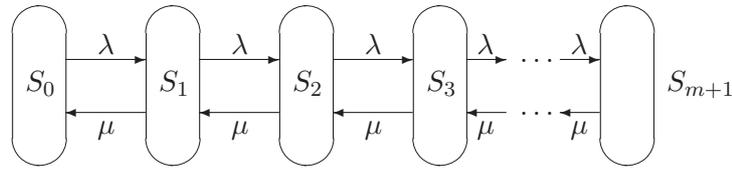


Рис. 7.4: Одноканальная система с ограниченной очередью

или, учитывая (7.6):

$$\bar{k} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

7.5 Одноканальная система с ограниченной очередью

Сначала рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ограниченной очередью. Т. е. будем считать, что число мест в очереди ограничено и равно m . Если все места заняты, то очередная заявка, поступающая в систему, получает отказ. Примером подобной системы может служить автозаправочная станция, имеющая одну колонку (один канал обслуживания) и площадку, на которой могут находиться одновременно не более m автомашин. Если все места на площадке заняты, то очередная машина, прибывшая к станции, не останавливается, а проезжает мимо.

Граф состояний рассматриваемой системы показан на рис. 7.4. Здесь: S_0 — канал свободен, очереди нет; S_1 — канал занят; S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; S_3 — канал занят, в очереди стоят две заявки; ...; S_{m+1} — канал занят, в очереди стоят m заявок. Как обычно, λ — интенсивность потока заявок, μ — интенсивность потока обслуживаний.

Применяя правило составления уравнений Колмогорова для стационарного режима (см. с. 96) и пользуясь графом состояний,

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \mu p_1 - \lambda p_0 &= 0, \\
 (\lambda + \mu) p_1 - \lambda p_0 - \mu p_2 &= 0, \\
 (\lambda + \mu) p_2 - \lambda p_1 - \mu p_3 &= 0, \\
 \dots & \\
 (\lambda + \mu) p_m - \lambda p_{m-1} - \mu p_{m+1} &= 0, \\
 p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n &= 1.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Из первого уравнения находим $p_1 = \rho p_0$. Подставим найденное выражение во второе уравнение. Тогда два слагаемых уничтожатся и мы получим: $p_2 = \rho^2 p_0$. Продолжив, из первых n уравнений Колмогорова получим следующие n выражений:

$$\boxed{p_k = \rho^k p_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m+1.} \tag{7.8}$$

Тогда из условия $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ следует, что

$$\boxed{p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{m+1})^{-1}.} \tag{7.9}$$

В скобках стоит сумма первых $m+2$ членов геометрической прогрессии с знаменателем прогрессии $q = \rho$. Поэтому последнюю формулу можно упростить, воспользовавшись формулой

$$S_n = \begin{cases} \frac{1 - \rho^{m+2}}{1 - \rho}, & \text{при } \rho \neq 1, \\ m+2, & \text{при } \rho = 1, \end{cases}$$

суммы первых $m+1$ членов геометрической прогрессии:

$$\boxed{p_0 = \begin{cases} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}, & \text{при } \rho \neq 1, \\ \frac{1}{m+2}, & \text{при } \rho = 1, \end{cases}} \tag{7.10}$$

Найдем вероятность $P_{\text{отк}}$ отказа в заявке. Заявка получает отказ, если приходит тогда, когда занят канал обслуживания и в

очереди стоят m заявок, т. е. когда система находится в состоянии S_{m+1} . Таким образом, вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ есть p_{m+1} :

$$\boxed{P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.} \quad (7.11)$$

Отсюда вероятность Q того, что заявка будет обслужена, равна

$$\boxed{Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} p_0.}$$

▽ **Пример.** На автозаправочную станцию прибывает в минуту в среднем одна машина ($\lambda = 1$ заявка в минуту) и что длительность заправки составляет в среднем 2 мин ($\mu = 1/2$). Чему равна вероятность отказа, если число мест в очереди $m = 3$?

Решение. Согласно формулам (7.10), (7.11) имеем:

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - 2}{1 - 2^5} = 1/31 \approx 0,032;$$

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0 = 2^4 \cdot 0,032 \approx 0,512.$$

|| Таким образом, вероятность отказа $> 1/2$. Это очень много. Поэтому на автозаправочной станции необходимо увеличить количество каналов обслуживания. ▲

7.6 Одноканальная система с неограниченной очередью

Рассмотрим теперь одноканальную систему массового обслуживания с неограниченной очередью. Примерами таких систем являются порт с одним причалом, где выгружаются прибывающие суда; телефон-автомат с одной будкой; кассир магазина, выбивающий чеки для покупателей. Граф состояний системы с неограниченной очередью отличается от системы с ограниченной очередью только тем, что неограниченно продолжается вправо (см. рис. 7.5). Здесь: S_0 — канал свободен, очереди нет; S_1 — канал

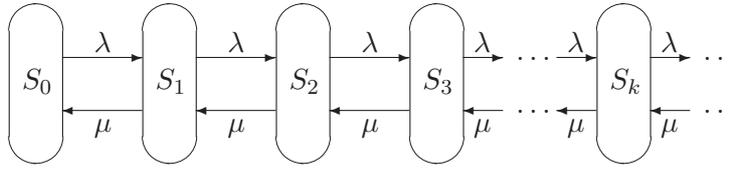


Рис. 7.5: Одноканальная система с неограниченной очередью

занят, очереди нет; S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; S_3 — канал занят, в очереди стоят две заявки; ...; S_{m+1} — канал занят, в очереди стоят m заявок.

Найдем предельную вероятность p_0 состояния S_0 . Из формулы 7.9 (109) вытекает, что

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{m+1} + \dots)^{-1}.$$

Отсюда и из формулы (7.10) на с. 109 можно получить более компактную формулу для p_0 . Действительно, устремив число мест в очереди m к бесконечности в формуле (7.10), получим, что при $(\rho) < 1$ верна следующая формула:

$$p_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - \rho}{1 - 0} = 1 - \rho.$$

Откуда следует, что вероятность того, что канал свободен равна

$$\boxed{p_0 = 1 - \rho.} \quad (7.12)$$

Формулы (7.8) очевидно сохраняют свою силу. Более того, если в случае системы с ограниченной очередью они были справедливы при $k = 1, 2, 3, \dots, m + 1$, то для случая неограниченной очереди они будут справедливы при любом k :

$$\boxed{p_k = (\rho)^k p_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots} \quad (7.13)$$

Таким образом доказана

Теорема 1. Если $\rho = \lambda/\mu < 1$, т. е. в единицу времени среднее число пришедших заявок меньше среднего числа обслуженных заявок, то предельные вероятности существуют и выражаются формулами (7.12) и (7.13).

Заметим, что при $\rho = \lambda/\mu > 1$ формула (7.12) теряет смысл («вероятность» p_0 становится отрицательной). Можно доказать следующий результат:

Теорема 2. *Если $\rho = \lambda/\mu > 1$, т. е. в единицу времени среднее число пришедших заявок больше среднего числа обслуженных заявок, то очередь растет до бесконечности.*

Из теорем 1 и 2 следует очень важный вывод: Может случиться так, что при малом увеличении среднего числа заявок, пришедших в единицу времени, очередь возрастет очень значительно. И наоборот, при казалось бы незначительном увеличении среднего числа заявок, обслуженных в единицу времени, очередь может значительно уменьшиться.

Это следует из того, что если $\rho = \lambda/\mu$ меньше единицы и близко к ней, то при увеличении λ на очень маленькое $\Delta\lambda$ может оказаться, что $(\lambda + \Delta\lambda)/\mu$ будет уже больше единицы и очередь будет неограниченно расти. Наоборот, если $\rho = \lambda/\mu$ ненамного больше единицы, то при увеличении μ на малое $\Delta\mu$, то $\lambda/(\mu + \Delta\mu)$ может оказаться меньше единицы и очередь значительно уменьшится. Подобные ситуации, возникающие на практике, рассмотрены в примере в конце настоящего параграфа, а также в параграфе «Применения» в примерах 4 и 5 (см. с. 126).

Помимо предельных вероятностей p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) важными показателями эффективности для системы являются также следующие:

$L_{\text{сист}}$ — среднее число заявок в системе;

$L_{\text{обсл}}$ — среднее число заявок, находящихся под обслуживанием;

$L_{\text{очер}}$ — среднее число заявок в очереди;

$T_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;

$T_{\text{очер}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди.

Выразим эти характеристики через ρ и λ .

Среднее число заявок в системе $L_{\text{сист}}$ есть взвешенное арифметическое среднее

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

Отсюда и из формул (7.12), (7.13) имеем

$$\begin{aligned} L_{\text{сист}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda/\mu)^k p_0 = 0 \cdot p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k p_0 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1 - \rho) = (1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k = \frac{\rho}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (7.14)$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием находят как взвешенное арифметическое среднее того, что под обслуживанием находится ноль заявок и того, что система занята одной заявкой:

$$L_{\text{обсл}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0 = \rho.$$

Таким образом,

$$L_{\text{обсл}} = \rho. \quad (7.15)$$

Среднее число заявок в очереди $L_{\text{очер}}$ находят как разность среднего числа в системе $L_{\text{сист}}$ и среднего числа заявок, находящихся под обслуживанием $L_{\text{обсл}}$:

$$L_{\text{очер}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{обсл}} = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (7.16)$$

Среднее время пребывания заявки в системе $T_{\text{сист}}$ или в очереди $T_{\text{очер}}$ равно среднему числу заявок в системе или очереди, деленному на интенсивность потока заявок (формулы Литтла):

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}, \quad (7.17)$$

$$T_{\text{очер}} = \frac{L_{\text{очер}}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \quad (7.18)$$

▽ **Пример.** В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов составляет 0,45 судов в сутки. Интенсивность разгрузки судов — 0,5 судов в сутки. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины (суда должны непременно разгрузиться именно в этом порту). Определить показатели эффективности причала и вероятность того, что хотя бы одно судно стоит в очереди.

Решение. Так как $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,45}{0,5} = 0,9 < 1$, то очередь не может бесконечно возрастать и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Предельная вероятность того, что причал пустует, определяется соотношением (7.12), приведенным на с. 111:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,9 = 0,1,$$

а вероятность того, что он занят,

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Предельная вероятность того, что при разгрузке одного судна у причала нет ни одного ожидающего судна, по формуле (7.13) на с. 111 равна

$$p_1 = \rho p_0 = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$$

Вероятность того, что хотя бы одно судно стоит в очереди равна единице минус вероятность противоположного события (т.е. того, что канал свободен или занят, но у причала нет ни одного ожидающего судна):

$$P_{\text{очер}} = 1 - p_0 - p_1 = 1 - 0,1 - 0,09 = 0,81.$$

Эту же вероятность можно вычислить и так:

$$P_{\text{очер}} = P_{\text{зан}} - p_1 = 0,9 - 0,09 = 0,81$$

(Вероятность очереди равна вероятности того, что канал занят минус вероятность того, что при разгрузке одного судна у причала нет ни одного ожидающего судна.)

Полученная вероятность велика, но не является практически достоверной.

Найдем теперь $L_{\text{сист}}$, $T_{\text{сист}}$, $L_{\text{очер}}$ и $T_{\text{очер}}$.

Среднее число заявок и среднее время пребывания в системе определяется по формулам (7.14) и (7.17)

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,9}{1 - 0,9} = 9;$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{9}{0,45} = 20 \text{ суток}$$

Среднее число судов, ожидающих очереди, и среднее время пребывания в очереди находим из формул (7.16) и (7.18):

$$L_{\text{очер}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0,9^2}{1 - 0,9} = 8,1.$$

$$T_{\text{очер}} = \frac{L_{\text{очер}}}{\lambda} = \frac{8,1}{0,9} = 9 \text{ суток.}$$

Вычисленные показатели свидетельствуют о перегруженности причала. Вероятность того, что хотя бы одно судно стоит в очереди, равна 0,81. Среднее время нахождения в очереди $T_{\text{очер}}$ равно 9 суток, а среднее время нахождения в очереди и в состоянии разгрузки $T_{\text{сист}}$ равно 20 суток. При таких показателях получаются огромные потери. Ведь сутки простоя зафрахтованного за рубежом судна в 5000–6000 тонн водоизмещения обходятся в несколько тысяч долларов. Неблагополучное положение причала усугубляется еще и тем, что при увеличении грузопотока к причалу чуть более, чем на 10%, получим неограниченный рост очереди ($\rho > 1$). Все это свидетельствует о необходимости немедленного строительства в порту дополнительных причалов. ▲

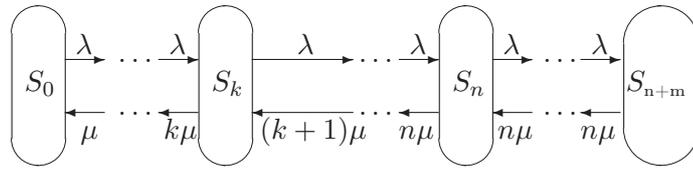


Рис. 7.6: Многоканальная система с ограниченной очередью

7.7 Многоканальная система с ограниченной очередью

Пусть поток заявок, поступающих в n -канальную систему массового обслуживания с ограниченной очередью, имеет интенсивность λ , а поток обслуживаний одной заявки — интенсивность μ . Граф состояний такой системы представлен на рис. 7.7 (с. 116).

Индекс при состояниях системы $S_0, S_1, \dots, S_k, \dots, S_n$ показывает число заявок, находящихся в системе. Например, состояние S_k означает, что из n каналов занято k . Индекс при состояниях системы S_{n+k} ($k = 1, 2, \dots, m$) показывает, что заняты все n каналов и k заявок стоит в очереди. Если максимальная длина очереди m , то состояние S_{n+m+1} системы невозможно (заявка уходит к другой системе). Интенсивность потока обслуживания, переводящая систему из одного состояния в другое справа налево, не остается постоянной, а по мере увеличения числа обслуживаемых заявок увеличивается пропорционально этому числу. При числе заявок больше n , интенсивность потока обслуживания равна $n\mu$.

Поскольку до граф состояний для многоканальной системы с очередью от состояния S_0 до состояния S_{n-1} не отличается от графа многоканальной системы с отказами, то первые $n-1$ уравнений Колмогорова для стационарного режима (см. с. 96) этой системы также не будут отличаться от первых $n-1$ уравнений (7.1). Отсюда же следует, что выражения для предельных вероятностей p_1, p_2, \dots, p_n в случае многоканальной системы с очередью будут такими же как и в формулах (7.2) для предельных вероятностей

многоканальной системы с отказами:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (7.19)$$

Применим правило составления уравнений Колмогорова (см. с. 96) для составления остальных уравнений для предельных вероятностей.

Для нахождения предельной вероятности p_{n+1} рассмотрим состояние S_n из графа состояний на рис. 7.6. S_n является началом стрелок с указанием интенсивностей λ и $n\mu$; поэтому в n -м уравнении в левой части уравнения будут два слагаемых со знаком минус ($-\lambda p_n - n\mu p_n$). В то же самое время S_n является концом стрелки с началом S_{n+1} и указанием интенсивности $n\mu$, а также концом стрелки с началом S_{n-1} и указанием интенсивности λ , поэтому в n -м уравнении в левой части уравнения будут два слагаемых со знаком плюс ($+n\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}$). Таким образом, уравнение для состояния S_n имеет вид:

$$-\lambda p_n - n\mu p_n + n\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} = 0.$$

Выражая в этом уравнении p_{n+1} через

$$p_{n-1} = \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} p_0 \text{ и } p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

получим

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0. \quad (7.20)$$

Аналогично составляются и уравнения для состояний S_k ($k = n+1, n+2, \dots, n+m-1$):

$$-\lambda p_k - n\mu p_k + \mu p_{k+1} + \lambda p_{k-1} = 0.$$

Выражая в этих уравнениях p_{k+1} через p_k и p_{k-1} , получаем:

$$p_{n+k} = \frac{\rho^{n+k}}{n^k \cdot n!} p_0, \quad k = 2, 3, \dots, m. \quad (7.21)$$

Уравнение для состояния S_{n+m} будет следующим:

$$\lambda p_{n+m-1} - n \mu p_{n+m} = 0.$$

Выразив из последнего уравнения p_{n+m} через

$$p_{n+m-1} = \frac{\rho^{n+m-1}}{n^{n+m-1} \cdot n!} p_0,$$

мы не получим ничего нового, поскольку формула для p_{n+m} полностью совпадет с последним выражением из (7.21), получившемся из рассмотрения состояния S_{n+m-1} .

Итак, все предельные вероятности с первой по $(n+m)$ -ю найдены. Осталось найти предельную вероятность p_0 . Ее мы найдем из условия, согласно которому сумма всех предельных вероятностей равна единице:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + \dots + p_{n+m} = 1.$$

Подставим в последнее уравнение найденные выражения (7.19), (7.21) для вероятностей p_k и вынесем p_0 за скобки. Получим

$$p_0 \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^{n+m} \cdot n!} \right) = 1. \quad (7.22)$$

При $\rho \neq n$ последние m слагаемых из выражения в скобках легко можно вычислить с помощью следующей формулы для первых членов m геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} b_1.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^{n+m} \cdot n!} &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \left(1 + \frac{\rho}{n} + \dots + \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m-1} \right) = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m}{1 - \frac{\rho}{n}}. \end{aligned}$$

Отсюда и получаем формулу для предельной вероятности p_0 :

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1 - \frac{\rho}{n}} \right)^{-1}, \quad \text{при } \rho \neq n \quad (7.23)$$

При $\rho = n$ из формулы (7.22) имеем

$$\begin{aligned} p_0 & \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^{n+m} \cdot n!} \right) = \\ & = p_0 \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \left(1 + \frac{\rho}{n} + \dots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-1} \right) \right] = \\ & = p_0 \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} (1 + 1 + \dots + 1^{m-1}) \right] = \\ & = p_0 \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1} m}{n \cdot n!} \right] = 1. \end{aligned}$$

Отсюда и получаем формулу для предельной вероятности p_0 при $\rho = n$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1} m}{n \cdot n!} \right)^{-1}, \quad \text{при } \rho = n. \quad (7.24)$$

Заметим, что формула (7.24) для предельной вероятности p_0 может быть записана и другими способами. Например, так

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n m}{n!} \right)^{-1}, \quad \text{при } \rho = n,$$

или так

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n-1} m}{(n-1)!} \right)^{-1}, \quad \text{при } \rho = n.$$

Такие записи встречаются в некоторых учебниках. Справедливость последних формул следует из того, что умножение или деление на единицу ($\frac{\rho}{n} = 1$) или любую ее степень не влияет на результат записи.

Вероятность отказа равна вероятности p_{n+m} того, что все n каналов заняты и в очереди — m заявок:

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \quad (7.25)$$

Отсюда вероятность Q того, что заявка будет обслужена, равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \quad (7.26)$$

Среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (абсолютная пропускная способность) будет равна

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right).$$

Среднее число заявок в очереди подсчитывается не так легко как остальные показатели. Формула для этого числа приводится ниже в виде теоремы. Доказательство приведено в книге автора [12]. Здесь мы его опускаем.

Теорема. *Среднее число заявок в очереди при $\rho \neq n$ выражается формулой*

$$L_{\text{очер}} = \frac{\rho^{n+1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m (m+1 - m \frac{\rho}{n}) \right]}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} p_0. \quad (7.27)$$

Если же $\rho = n$, то

$$L_{\text{очер}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{m(1+m)}{2}. \quad (7.28)$$

Заметим, что возможны и другие формы записи формулы для $L_{\text{очер}}$ при $\rho = n$. Например, такая:

$$L_{\text{очер}} = \frac{\rho^{n-1} p_0}{(n-1)!} \cdot \frac{m(1+m)}{2}.$$

Среднее число занятых каналов \bar{k} является интенсивностью потока обслуженных заявок в единицу времени:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda Q}{\mu} = \rho Q.$$

Отсюда и из формулы (7.26) следует, что

$$\boxed{\bar{k} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)}. \quad (7.29)$$

Среднее число заявок в системе равно сумме среднего числа заявок в очереди и среднего числа занятых каналов:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{очер}} + \bar{k}.$$

Здесь $L_{\text{очер}}$ и \bar{k} находятся соответственно по формулам (7.27) и (7.29).

Среднее время пребывания заявки в системе или очереди определяется по формулам Литтла как среднее число заявок, деленное на среднюю скорость потока заявок λ :

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}, \quad T_{\text{очер}} = \frac{L_{\text{очер}}}{\lambda}.$$

∇ Пример 1. На автозаправочную станцию прибывает в минуту в среднем одна машина ($\lambda = 1$ заявка в минуту). Длительность заправки на одной из ее площадок (каналов) составляет в среднем 2 мин ($\mu = 1/2$). Найдите чему равна вероятность отказа в заправке, если:

- а) число мест в очереди $m = 3$, а число площадок $n = 2$;
- б) число мест в очереди $m = 3$, а число площадок $n = 4$?

Решение. Для пунктов а) и б) необходимо применять разные формулы. Ведь для пункта а) $\rho = n$, а для пункта б) имеем $\rho \neq n$.

а) Применяем формулы (7.24), (7.28) на с. 119 и на с. 120 соответственно:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n-1} m}{(n-1)!} \right)^{-1} =$$

$$= (1 + 2 + 2 + 2 \cdot 3)^{-1} = \frac{1}{11}.$$

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = \frac{2}{11} \approx 0,182.$$

б) Во втором случае $\rho \neq n$. Поэтому применяем формулы (7.23), (7.25) при $n = 4$ и $m = 3$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1 - \frac{\rho}{n}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 2 + 2 + 2^2/3 + 2/3 + \frac{2^5}{4 \cdot 4!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{4}\right)^3}{1 - \frac{2}{4}} \right)^{-1} \approx 0,132.$$

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \approx 0,011.$$

Таким образом, в условиях нашего примера в случае одного канала обслуживания на автозаправочной станции вероятность отказа в обслуживании больше $1/2$ (см. с. 110). При увеличении количества каналов обслуживания вероятность отказа уменьшается. При двух каналах эта вероятность составляет уже $0,182$, а при четырех каналах отказ в обслуживании становится практически невозможным событием ($P_{\text{отк}} \approx 0,011$). ▲

▽ **Пример 2.** В порту имеется три причала для разгрузки судов. Интенсивность потока судов составляет $0,45$ судов в сутки. Интенсивность разгрузки судов — $0,5$ судов в сутки. Предполагается, что судно покидает причал, не разгрузившись, при очереди на разгрузку в три судна и более. Определить показатели эффективности порта.

Решение. Для условий примера имеем $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,45}{0,5} = 0,9$, $n = 3$, $m = 3$.

Вероятность того, что причал пустует, определяется соотношением (7.23), приведенным на с. 119:

$$p_0 = \left(1 + \frac{0,9}{1!} + \frac{0,9^2}{2!} + \frac{0,9^3}{3!} + \frac{0,9^{3+1}}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{0,9}{3}\right)^3}{1 - \frac{0,9}{3}} \right)^{-1} = 0,40.$$

Вероятность того, что судно покинет причал не разгрузившись подсчитывается по формуле (7.25) на с. 120:

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = \frac{0,9^6}{3^3 \cdot 3!} \cdot 0,40 \approx 0,001.$$

Таким образом, это событие является практически невозможным. Судно наверняка будет обслужено. Вероятность Q того, что судно будет обслужено (относительная пропускная способность порта), равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} \approx 1 - 0,001 = 0,999.$$

Среднее число судов, обслуживаемых за сутки (абсолютная пропускная способность) будет равна

$$A = \lambda Q = 0,45 \cdot 0,999 \approx 0,45.$$

Среднее число занятых причалов \bar{k} является интенсивностью потока обслуженных судов за сутки:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{0,45}{0,5} = 0,9.$$

Среднее число судов в очереди выражается формулой (7.27) на с. 120:

$$\begin{aligned} L_{\text{очер}} &= \frac{\rho^{n+1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m (m+1 - m \frac{\rho}{n}) \right]}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 = \\ &= \frac{0,9^4 \left[1 - (0,3)^3 (4 - 0,9) \right]}{3 \cdot 3! \cdot 0,7^2} \cdot 0,4 \approx 0,027. \end{aligned}$$

Среднее число судов в порту равно сумме среднего числа судов в очереди и среднего судов, находящихся под разгрузкой:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{очер}} + \bar{k} = 0,027 + 0,9 = 0,927.$$

Среднее время пребывания судна в порту или очереди определяется по формулам Литтла как среднее число судов, деленное на среднюю скорость потока заявок λ :

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{0,927}{0,45} \approx 2,06 \text{ суток},$$

$$T_{\text{очер}} = \frac{L_{\text{очер}}}{\lambda} = \frac{0,027}{0,45} \approx 0,06 \text{ суток}.$$

Вычисленные показатели свидетельствуют о том, что в нашем случае в порту с тремя причалами очереди из судов практически не образуется. Ведь среднее время пребывания судна в очереди $T_{\text{очер}} \approx 0,06$ суток. При таком показателе $T_{\text{очер}}$ порт практически не несет потерь, связанных с простоем судна. Все это свидетельствует о том, что нет необходимости строительства в порту дополнительных причалов. ▲

7.8 Многоканальная система с неограниченной очередью

Многоканальная система с неограниченной очередью аналогична системе с ограниченной очередью при условии, что длина очереди стремится к бесконечности.

Пусть поток заявок, поступающих в n -канальную систему массового обслуживания с неограниченной очередью, имеет интенсивность λ , а поток обслуживаний одной заявки — интенсивность μ . Граф состояний такой системы представлен на рис. 7.7 (с. 125).

Индекс при состояниях системы $S_0, S_1, \dots, S_k, \dots, S_n$ показывает число заявок, находящихся в системе. Например, состояние

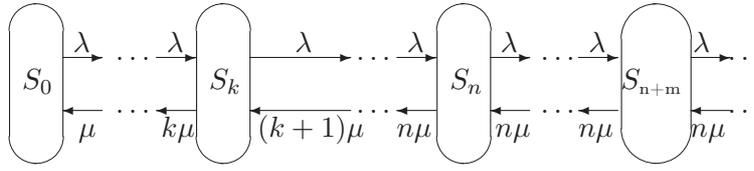


Рис. 7.7: Многоканальная система с неограниченной очередью

S_k означает, что из n каналов занято k . Индекс при состояниях системы S_{n+m} ($m = 1, 2, \dots$) показывает, что заняты все n каналов и m заявок стоит в очереди. Интенсивность потока обслуживания, переводящая систему из одного состояния в другое справа налево, не остается постоянной, а по мере увеличения числа обслуживаемых заявок увеличивается пропорционально этому числу. При числе заявок больше n , интенсивность потока обслуживания равна $n\mu$.

Теорема 1. Если $\rho = \lambda/\mu < n$, то предельные вероятности существуют и выражаются формулами

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad (7.30)$$

$$p_{n+k} = \frac{\rho^{n+k}}{n^k \cdot n!} p_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \dots \quad (7.31)$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}. \quad (7.32)$$

Формулы (7.30), (7.31) совпадают с формулами (7.19), (7.21), полученными в предыдущем параграфе и выводятся так же. Формула (7.32) вытекает из формулы (7.23) при помощи предельного перехода $m \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Если $\rho > n$, то очередь растет до бесконечности.

Из теорем 1 и 2 следует очень важный вывод: Может случиться так, что при малом увеличении среднего числа заявок, пришедших в единицу времени, очередь может возрасти очень значительно. И наоборот, при казалось бы незначительном увеличении среднего числа заявок, обслуженных в единицу времени, очередь может значительно уменьшиться.

Это следует из того, что если $\rho = \lambda/\mu$ меньше и близко к n , то при увеличении λ на очень маленькое $\Delta\lambda$ может оказаться, что $(\lambda + \Delta\lambda)/\mu$ будет уже больше n и очередь будет неограниченно расти. Наоборот, если ρ ненамного больше n , то при увеличении μ на малое $\Delta\mu$, то $\lambda/(\mu + \Delta\mu)$ может оказаться меньше n и очередь значительно уменьшится. Подобные ситуации, возникающие на практике, рассмотрены ниже.

▽ Пример 1 (задача о сокращении очередей). Посетители магазина, случайно подходящие к прилавку, за которым их обслуживают, обычно выстраиваются в очередь. Коллектив продавщиц универмага может в среднем за час обслужить μ посетителей; в среднем в течение 1 ч обслуживания может быть не больше λ посетителей. Найдите вероятность того, что число посетителей, стоящих в очереди, будет больше четырех (вероятность длинной очереди). Рассмотреть два случая: а) когда $\frac{\lambda}{\mu} = 0,25$; б) когда $\frac{\lambda}{\mu} = 0,95$.

В ситуации б) найдите как изменится вероятность длинной очереди, если число продавщиц увеличить на 10%.

Решение. Из формул (7.12),(7.13) на с. 111 вытекает, что вероятность того, что в данный момент времени в очереди стоят и ожидают обслуживания k посетителей, равна:

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right). \quad (7.33)$$

В случае а): $p_0 = 1 - 0,25 = 0,7500$; $p_1 = 0,25 \cdot 0,75 = 0,1875$; $p_2 = 0,25^2 \cdot 0,75 = 0,0469$; $p_3 = 0,25^3 \cdot 0,75 = 0,0117$; $p_4 = 0,25^4 \cdot 0,75 = 0,0029$. Обозначим через X число посетителей, стоящих в очереди. Тогда

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \\ &= 1 - (0,75 + 0,1875 + 0,0469 + 0,0117 + 0,0029) = 0,001. \end{aligned}$$

Таким образом, когда пропускная способность системы обслуживания в 4 раза превышает потребности, вероятность появления длинной очереди небольшая.

В случае б): $p_0 = 1 - 0,95 = 0,0500$; $p_1 = 0,95 \cdot 0,05 = 0,0475$; $p_2 = 0,95^2 \cdot 0,05 = 0,0451$; $p_3 = 0,95^3 \cdot 0,05 = 0,0429$; $p_4 = 0,95^4 \cdot 0,05 = 0,0407$.

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \\ &= 1 - (0,05 + 0,0475 + 0,0451 + 0,0429 + 0,0407) = \\ &= 0,7738, \end{aligned}$$

почти 8 шансов из 10, что в очереди будет более чем 4 посетителя.

Обращаем внимание на факт: соотношение $\frac{\lambda}{\mu}$ увеличилось только в $\frac{0,95}{0,25} = 3,8$ раза, а вероятность того, что в очереди будет более 4 посетителей, увеличилась в $\frac{0,7738}{0,001} = 773,8$ раза.

Найдем теперь как изменится вероятность длинной очереди, если в случае б) число продавщиц увеличить на 10%. Итак, допустим, в ситуации б) дирекция универмага на 10% увеличила число продавщиц и поэтому пропускная способность системы обслуживания стала $\mu + 0,1\mu = 1,1\mu$. Тогда соотношение $\frac{\lambda}{\mu}$ будет

$\frac{\lambda}{1,1\mu} \approx 0,86$, В этой ситуации

$$\begin{aligned} p_0 &= 0,14; \\ p_1 &= 0,86 \cdot 0,14 = 0,1204; \\ p_2 &= 0,86^2 \cdot 0,14 = 0,1035; \\ p_3 &= 0,86^3 \cdot 0,14 = 0,0890; \\ p_4 &= 0,86^4 \cdot 0,14 = 0,0766. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \\ &= 1 - (0,14 + 0,1204 + 0,1035 + 0,0890 + 0,0766) = 0,4705. \end{aligned}$$

Вероятность $P(X > 4)$ после увеличения числа продавщиц только на 10% уменьшилась на $100 - 0,4705 \cdot 100/0,7738 \approx 39\%$

Любопытный факт: увеличение числа продавщиц только на 10% привело к снижению вероятности появления длинной очереди почти на 40%. ▲

Найдем другие показатели.

При $\rho < n$ вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ равна нулю, так даже если все n каналов заняты всегда можно встать в очередь. Такой же результат можно получить из формулы (7.25) для ограниченной очереди, устремив m к бесконечности:

$$P_{\text{отк}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = 0. \quad (7.34)$$

Отсюда вероятность Q того, что заявка будет обслужена, равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1. \quad (7.35)$$

Среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (абсолютная пропускная способность) будет равна

$$A = \lambda Q = \lambda.$$

Вероятность, что заявка окажется в очереди,

$$\boxed{P_{\text{очер}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0.} \quad (7.36)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} P_{\text{очер}} &= p_{n+1} + p_{n+2} + \dots + p_{n+m} + \dots = \\ &= \frac{\rho^n p_0}{n!} \left(\frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots + \frac{\rho^m}{n^m} + \dots \right) = \\ &= \frac{\rho^n p_0}{n!} \frac{\rho/n}{1 - \rho/n} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!(n-\rho)}. \end{aligned}$$

Среднее число занятых каналов (интенсивность потока обслуженных заявок в единицу времени)

$$\boxed{\bar{k} = \rho.} \quad (7.37)$$

Последнюю формулу можно получить двумя способами.

Первый способ.

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Второй способ. Устремив в формуле (7.29) на с. 121 число заявок в очереди m к ∞ , получаем

$$\bar{k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right) = \rho.$$

Теорема 3. *Среднее число заявок в очереди выражается формулой*

$$\boxed{L_{\text{очер}} = \frac{n \cdot \rho^{n+1}}{n!(n-\rho)^2} p_0.} \quad (7.38)$$

Доказательство этой теоремы см. в книге автора [12].

Среднее число заявок в системе равно сумме среднего числа заявок в очереди и среднего числа занятых каналов:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{очер}} + \bar{k}.$$

Здесь $L_{\text{очер}}$ и \bar{k} находятся соответственно по формулам (7.38) и (7.37).

Среднее время пребывания заявки в системе или очереди определяется по формулам Литтла как среднее число заявок, деленное на среднюю скорость потока заявок λ :

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}, \quad T_{\text{очер}} = \frac{L_{\text{очер}}}{\lambda}.$$

Ранее при изучении одноканальной системы с неограниченной очередью нами был рассмотрен пример (см. с. 114), в котором рассматривались показатели эффективности работы порта и вероятность того, что хотя бы одно судно стоит в очереди. Показатели того примера свидетельствовали о перегруженности порта с одним причалом. Что будет, если в порту построят еще два дополнительных причала? Насколько изменятся показатели эффективности порта? Ответы на эти вопросы даст анализ следующего примера.

∇ **Пример 2.** В порту имеется три причала для разгрузки судов. Интенсивность потока судов составляет 0,45 судов в сутки. Интенсивность разгрузки судов — 0,5 судов в сутки. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины (суда должны непременно разгрузиться именно в этом порту). Определить показатели эффективности порта и вероятность того, что хотя бы одно судно стоит в очереди.

Решение. Так как $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,45}{0,5} = 0,9 < 3$, то очередь не может бесконечно возрастать и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Предельная вероятность того, что причал пустует, определяется соотношением (7.32), приведенным на с. 125:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3!(3-\rho)} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 0,9 + \frac{0,9^2}{2!} + \frac{0,9^3}{3!} + \frac{0,9^4}{3!(3-0,9)} \right)^{-1} \approx 0,4.$$

Для порта с одним причалом этот показатель составлял 0,1. Как видим, порт с тремя причалами будет пустовать в 4 раза чаще.

Вероятность того, что порт будет занят $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 0,6$.

Вероятность того, что хотя бы одно судно стоит в очереди вычисляется по формуле (7.36) на с. 129:

$$P_{\text{очер}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{0,9^4}{3!(3-0,9)} 0,4 = 0,02.$$

Поскольку $0,02 < 0,05$, то можно говорить о том, что очереди в порту с тремя причалами практически не образуются (в отличие от порта с одним причалом, у которого вероятность образования очереди велика: $P_{\text{очер}} = 0,81$).

Среднее число заявок в очереди выражается формулой (7.38) на с. 129:

$$L_{\text{очер}} = \frac{n \cdot \rho^{n+1}}{n!(n-\rho)^2} p_0 = \frac{3 \cdot 0,9^4}{3!(3-0,9)^2} \cdot 0,4 = 0,03.$$

Среднее число заявок в системе равно сумме среднего числа заявок в очереди и среднего числа занятых каналов:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{очер}} + \bar{k} = 0,03 + 0,9 = 0,93.$$

Здесь \bar{k} находятся по формуле $\bar{k} = \rho$.

Среднее время пребывания заявки в системе или очереди определяется по формулам Литтла как среднее число заявок, деленное на среднюю скорость потока заявок λ :

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{0,93}{0,45} \approx 2,07 \text{ суток},$$

$$T_{\text{очер}} = \frac{L_{\text{очер}}}{\lambda} = \frac{0,03}{0,45} \approx 0,07 \text{ суток.}$$

Вычисленные показатели свидетельствуют о том, что в нашем случае в порту с тремя причалами очереди из судов практически не образуется. Ведь вероятность того, что хотя бы одно судно стоит в очереди, равна 0,02 (напомним, см. с. 115, что для порта с одним причалом это число было 0,81). Среднее время нахождения в очереди $T_{\text{очер}}$ равно 0,07 суток (против 9 для порта с одним причалом), а среднее время нахождения в порту $T_{\text{сист}}$ равно двум суткам (против 20 суток для порта с одним причалом). При таких показателях порт практически не несет потерь, связанных с простоем судна. Кроме того, даже при увеличении грузопотока к причалу в три раза ($\lambda = 0,45 \cdot 3$), мы не получим неограниченного роста очереди (так как $\rho = 2,7 < 3$). Все это свидетельствует о том, что нет необходимости строительства в порту дополнительных причалов. ▲

▽ **Пример 3 (о резком увеличении простоев судов в портах при росте грузопотоков).** Развитие экономики и экономических связей приводит к росту грузопотоков. Этот процесс сопровождается резким увеличением простоев судов в ожидании разгрузки и погрузки. В 60-х годах 20 века к Б. В. Гнеденко обратился специалист по организации грузовых морских портов М. Н. Зубков. Как растут простои, Зубков проиллюстрировал следующей небольшой табличкой.

Годы	1960	1963
Грузооборот	100%	125%
Простои судов	100%	392%

Оказывается, за три года грузооборот вырос на одну четверть, а простои судов при этом выросли почти в четыре раза из-за ожидания освобождения причалов.

Зубкова заинтересовал вопрос: как могло случиться, что грузооборот возрос на 25%, а простои судов в ожидании начала обработки выросли почти на 300%? Не является ли это нарушением известных законов арифметики? С этих вопросов началась совместная деятельность математиков и организаторов работы грузовых морских портов по выяснению ответа на важную экономическую задачу снижения простоев. А это была важная экономическая задача. Ведь сутки простоя зафрахтованного за рубежом судна в 5000–6000 тонн водоизмещения обходились стране в 2500–3000 долларов.

Первый же анализ статистических данных по портам Дальнего Востока, Черного, Балтийского и северных морей позволил математикам сделать предположение о том, что случайный поток прибытия судов во все порты является простейшим (кроме Ленинградского, поскольку туда разрешалось судам прибывать только организованным караваном с лоцманом). В дальнейшем Гнеденко с коллегами показали, что формула для выражения математического ожидания M длительности обслуживания судов в порту содержит в знаменателе величину $(n - \rho)$, где ρ — это интенсивность нагрузки порта, а n — число причалов в порту. Поэтому по мере приближения ρ к n величина M будет резко возрастать:

$$M \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow n.$$

Это обстоятельство и объяснило удивившее М. Н. Зубкова явление чрезвычайно быстрого возрастания простоя судов при сравнительно небольшом увеличении грузоперевозок.

Кроме того, математиками были найдены оптимальные количества дополнительных причалов, которые требовалось построить, чтобы уменьшить суммарные затраты на строительство причалов и оплату от будущих простоев. Подробнее об этом случае и соответствующих выкладках можно прочитать в книге [27]. ▲

7.9 Нерешенные проблемы (вместо заключения)

Формулы для одноканальной системы обслуживания были получены в предположении, что функция распределения длительности обслуживания имеет конкретный вид ($G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$). Вывод формул для одноканальной системы существенно усложняется, если функция распределения $G(t)$ является общей. А для двухканальной системы с общей функцией $G(t)$ вообще не удастся получить (или доказать невозможность получения) явных формул [49, С.338]. Аналогичное положение наблюдается и для многих других систем обслуживания. Поэтому в теории массового обслуживания большое внимание уделяется асимптотическим и приближенным методам, а также оригинальным методам, использующим специфику конкретных систем обслуживания, применимым лишь к частным задачам.

Схожая ситуация наблюдается и с другими математическими моделями экономических процессов. Многие задачи остаются нерешенными, а решенные задачи не позволяют сделать существенных научных прорывов. Подтверждением этого является такой факт. В 1995 году Казенкамп и Магнус в конце своей статьи, напечатанной в журнале «*Journal of Econometrics*», обратились к читателям с просьбой назвать опубликованную работу, которая, по их мнению, изменила представление экономистов о какой-либо экономической проблеме. Если бы такая работа нашлась, она была бы примером успешного применения математических методов. Однако на вопрос Казенкампа и Магнуса никто не ответил [46].

Тем не менее, уверен, что любая новая книга (в том числе и эта) вносит свою лепту в общую копилку знаний, и способствует более полному пониманию экономических процессов.

Литература

- [1] *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987. 160 с.
- [2] *Ахтямов А. М.* Математический анализ для социально-экономических специальностей: Учебное пособие в 3-х ч. — Уфа, издание БГУ, 2001. Ч. 1. — 122 с. Ч. 2. — 199 с. Ч. 3. — 194 с.
- [3] *Ахтямов А. М.* Математика для социологов и экономистов. М.: Физматлит, 2004. 464с.; 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2008. 464 с.
- [4] *Ахтямов А. М.* Теория вероятностей и случайных процессов для студентов экономических факультетов. — Уфа: РИО БашГУ, 2005. — 304 с.
- [5] *Ахтямов А. М., Амангильдин Ш. Т.* Оптимизация графика инвестирования региона на основе математического моделирования // Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых: Сборник трудов. Т. 1. Математика. Уфа: РИО БашГУ, 2005. С. 18–28.
- [6] *Ахтямов А.М., Амангильдин Т.Г.* Об одной математической модели колебания цен // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2005. Том 12. Вып. 4. С. 901.
- [7] *Ахтямов А. М.* Инерция падения объемов выпуска продукции при росте инвестиций // Экономика и управление. 2006. № 1. С. 56–59.

- [8] *Ахтямов А.М., Гафарова Е.А.* Анализ взаимозависимости динамики индекса промышленности и инвестиций в основной капитал // *Ядкяр*, 2006. № 3. С.42–46.
- [9] *Ахтямов А. М., Амангильдин Ш. Т.* Оптимизация графика инвестирования региона на основе математического моделирования // *Проблемы региональной экономики (на примере Республики Башкортостан): Монография / Под общ. ред. Исянбаева М.Н., Шакировой С.М., Илишевой Л.И., Хайруллиной В.Г., Хасанова И.И. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. С. 143–152.*
- [10] *Ахтямов А.М.* Анализ динамики изменения предложения товара и его цены на основе модели «хищник-жертва» // *Материалы всероссийской научно-практической конференции «Наука и образование - 2005», посвященной 15-летию со дня принятия Декларации о государственном суверенитете Республики Башкортостан и 5-летию образования Нефтекамского филиала БашГУ. В 3-х ч.: Ч. III. Нефтекамск: РИО БашГУ, 2006. С. 12–13.*
- [11] *Ахтямов А.М., Кускильдин А.А., Амангильдин Ш.Т.* Оптимизация схемы инвестирования предприятия на основе математического моделирования // *Там же. С. 13–15.*
- [12] *Ахтямов А. М.* Экономико-математические методы. Ч.1. Теория вероятностей и приложения: Учебное пособие. Уфа: РИЦ БашГУ, 2007. 376 с.
- [13] *Ахтямов А.М., Иванова Е.С.* Динамика изменения цены товара от спроса на основе одной математической модели // *Экономика и математические методы: Материалы 2-ой Республиканской научно-практической конференции, 23–25 мая 2007 г. Уфа: РИЦ БашГУ, 2007. С. 35–36.*
- [14] *Берс Л.* Математический анализ: Учеб. пособие для втузов. В 2 т. — М.: Высш. шк., 1975. Т. 1. — 519 с. Т. 2. — 544 с.

- [15] *Бестужев-Лада И. В., Варыгин В. Н. Малахов В.А.* Моделирование в социологических исследованиях. — М.: Наука, 1978. — 103 с.
- [16] *Большой экономический словарь* / Под ред. А. Н. Азриляна. — 5-е изд. доп. и перераб. — М.: Институт новой экономики, 2002. — 1280 с.
- [17] *Боярский А. Я.* Математика для экономистов. — М.: Госстатиздат, 1961. — 464 с.
- [18] *Бронштейн Е.М., Черняк Д.А.* Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных проектов // Экономика и математические методы. 2005. Т.41, № 2. С.21–28.
- [19] *Валиуллин Х.Х., Шакирова Э.Р.* Иностранные инвестиции в регионы России и Китая // Проблемы прогнозирования. 2004. № 5. С.101–113.
- [20] *Ван Хорн Дж. К.* Основы управления финансами: Пер. с англ.; Гл. ред. серии Я.В.Соколов. М.: Финансы и статистика, 2003. 800 с.
- [21] *Вентцель Е. С.* Исследование операций. М., Советское радио, 1972, 552 с.
- [22] *Высшая математика для экономистов: Учебн. пособие для вузов* / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. — 439 с.
- [23] *Гальперин В. М.* Макроэкономика. —СПб.: Экономическая школа, 1997. — 719 с.
- [24] *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 6-е, стер. — М.: Высш. шк., 1998. — 479 с.
- [25] *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учеб. пособие для вузов. Изд. 4-е, стер. — М.: Высш. шк., 1998. — 400 с.
- [26] *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей: Учебник — Изд. 6-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 448 с.

- [27] *Гнеденко Б. В.* Математика и математическое образование в современном мире — М.: Просвещение, 1985. — 192 с.
- [28] *Горелик А. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. 288 с.
- [29] *Гранберг А. Г.* Динамические модели народного хозяйства: Учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Экон. кибернетика». — М.: Экономика, 1985. — 240 с.
- [30] *Гранберг А., Зайцева Ю.* Производство и использование валового регионального продукта: межрегиональные сопоставления // Российский экономический журнал. 2002. № 10. С. 42–64.
- [31] *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике: Учебник. 2-е изд. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, Дело и сервис, 1999. — 368 с.
- [32] *Ендовицкий Д. А.* Инвестиционный анализ в реальном секторе экономики: Учебное пособие / Под ред. П.Т. Гиляровской. М.: Финансы и статистика, 2003. 352 с.
- [33] *Канторович Г.Г.* Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. 2002. № 4. С.498–523.
- [34] *Колбина Л.* Новая модель оптового рынка // Эксперт-Урал. 2005. № 3, С.12–14.
- [35] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1968. 496 с.
- [36] *Коршунова Н. И., Плясунов В. С.* Математика в экономике. — М.: Вита-Пресс, 1996. — 368 с.
- [37] *Красс М. С.* Математика для экономических специальностей: Учебник. — М.: ИНФРА-М, 1998. — 464 с. — (Серия «Высшее образование»)
- [38] *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.
- [39] *Креммер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. — 543 с.

- [40] *Крынський Х. Э.* Математика для экономистов (пер. с польск.) — М.: Статистика, 1970. — 580 с.
- [41] *Крушевский А. В.* Справочник по экономико-математическим моделям и методам. — Киев: Техніка, 1982. — 208 с.
- [42] *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики: Учебн. пособие для вузов. — 7-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. — 656 с.
- [43] *Леонтьев В. В.* Межотраслевая экономика: Пер. с англ./ Автор предисл. и науч. ред. А. Г. Гранберг. — М.: ОАО "Издательство «Экономика»". 1997. — 479 с.
- [44] *Литвинцева Г.П.* Кризис инвестиций как результат несоответствия структурно-технологических характеристик экономики и институциональному устройству // Проблемы прогнозирования. 2003. № 6. С.23–40.
- [45] *Лопатников Л. И.* Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. — 5-е изд., перераб. и доп. — М: Дело, 2003. — 520 с.
- [46] *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс. Учебное пособие. 2-е изд., испр. М.: Дело, 1998. — 248 с.
- [47] *Макконел К. Р., Брю С. Л.* Экономикс: Принципы, проблемы и политика: В 2 т. Т. 1. — М.: Республика, 1995. — 400 с. Т. 2. — М.: Высш. шк., 1995. — 100 с.
- [48] *Малая математическая энциклопедия / Э. Фрид, И. Пастор, И. Рейман, П. Ревес, И. Ружа.* — Будапешт: Издательство Академии наук Венгрии, 1976. — 693 с.
- [49] *Математика.* Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. — 3-е изд. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. — 848 с.
- [50] *Мацкевич И. П., Свирид Г. П.* Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. — Мн.: Выш. шк., 1993. — 269 с.

- [51] *Николаева Ю. Н.* Оценка инвестиционной емкости региона // *Финансы*. 2004. №. 9. С. 75–76.
- [52] *Нобелевские лауреаты по экономике*. Библиографический словарь 1969–1992. — М.: Информат, 1994. — 220 с.
- [53] *Паповян С. С.* Математические методы в социальной психологии. — М.: Наука, 1983. — 344 с.
- [54] *Рубченко М., Шохина Е.* Призрак роста // *Эксперт*. 2005. №4.
- [55] *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.* Математика в экономике: Учебник в 2-х ч. Ч.1.— М.: Финансы и статистика, 1999. — 224 с.: ил.
- [56] *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г.* Математика в экономике: Учебник в 2-х ч. Ч.2.— М.: Финансы и статистика, 1999. — 376 с.: ил.
- [57] *Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г.* Математические методы и модели в управлении: Учеб. Пособие. 2-е изд., испр. М.: Дело, 2002. 440 с.
- [58] *Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах: Учебное пособие для вузов / Пер. с англ. под ред М. Р. Ефимовой. — М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. — 527 с.
-
- [59] *Calculus with applications: brief version* / Margaret L. Lial, Raymond N. Greenwell, Charles D. Miller. — 6th ed. 1998. Addison Wesley Educational Publishers, Inc. 522 p.