Метод малого параметра в задаче о синхронизации на субгармониках

Г.Р. Абушахмина
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета, Сибай, Россия
e-mail:abushahmina_g@mail.ru

Рассматривается задача о синхронизации на субгармониках дифференциального уравнения первого порядка, зависящего от N-мерного параметра в пространстве $\mathbb{R}^N$ периодического решения периода qT в окрестности точки равновесия $x = 0$. Для изучения периодического решения делается переход к операторному виду. Получено условие разрешимости дифференциального уравнения.

Discrete spectrum of kink velocities in Josephson structures: the nonlocal double sine-Gordon model

G.L. Alfimov, A.S. Malishevskii, *E.V. Medvedeva*
National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia
e-mail: elinamedvedeva87@gmail.com
P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

We study a model of Josephson layered structure which is characterized by two peculiarities: (i) superconducting layers are thin; (ii) due to suppression of superconducting states in superconducting layers the current-phase relation is non-sinusoidal and is described by two sine harmonics. The governing equation is a nonlocal generalization of double sine-Gordon (NDSG) equation. We argue that the dynamics of fluxons in the NDSG model is unusual. Specifically, we show that there exists a set of particular velocities for non-radiating fluxon propagation. In dynamics the presence of these "priveleged" velocitied results in phenomenon of *quantization of fluxon velocities*: in our numerical experiments a travelling kink-like excitation radiates energy and slows down to one of these particular velocities, taking a shape of predicted 2π-kink. This situation differs from both, double sine-Gordon local model and the nonlocal sine-Gordon model, considered before. We conjecture that the set of these velocities is *infinite* and present an asymptotic formula for them.

One nonlinear eigenvalue problem from laser optics

G.L.Alfimov, A.A.Chernyavskiy, I.V.Melnikov
National Research University of Electronic Technology "MIET", Zelenograd, Moscow, Russia
e-mail: nickp102@gmail.com

In [1] the following dimensionless equation was derived

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\beta - \exp(i|\psi|^2 + iF_0))\psi = 0. \tag{1}$$

It describes an optical pulse for completely passive self-starting lasers with auxiliary cavity of Fabry-Perot type. Here F_0 and β are external parameters and $\psi(t)$ corresponds to the shape of the pulse. It satisfies the following boundary conditions

$$\lim_{t\to\pm\infty} \psi(t) = 0. \tag{2}$$

It turns out that the problem (1)-(2) with fixed value $F_0 \in [0; 2\pi]$ is *a nonlinear eigenvalue problem* for eigenvalue β. Correspondingly, localized solutions of Eq.(1) exist only along some curves in the plane of parameters (F_0, β). We found numerically these curves for *single* and *double* pulse solutions and present asymptotical formulas to describe the behavior of single pulse curve near its endpoints.

[1] A.V. Shipulin, K.K. Konstantinov, *Theoretical analysis of completely passive additive-pulse mode locking*. Lightwave Commun. 2, 1992, 251-264.

Higher Symmetries in spaces of random polygons

P.M. Akhmetiev
IZMIRAN, Troitsk, Moscow
e-mail: pmakhmet@izmiran.ru

A homogeneous space $V_{n,2}$ of 2-basis in the n-dimensional real Euclidean space is a well-known object in algebraic topology. In the book [1] (Theorem 1.13) is proved that the mapping $F_n : V_{n,2} \to V_{n,2}$, which is defined by the formula $(e_1, e_2) \mapsto (e_1, -e_2)$, is homotopic to the identity mapping **Id** if $n = 2^l - 1$, $l = 2, 3, 4, 5$. The mapping F is not homotopic to the identity mapping, if $n \neq 2^l - 1$. At present, if such a homotopy exists for $n = 63$ $(l = 6)$, is unknown.

In the paper [2] the space $V_{n,2}$ is used as a model of the space of plane affine n-polygons with the unite sum of lengths of edges. A polygon is considered as a random polygon, the standard volume form of $V_{n,2}$ determines the probability measure of the space of random n-polygons.

In my preprint [3] a homotopy $F_n \sim \mathbf{Id}$, which was constructed by I.James in the case $n = 7$ non-explicitly, is presented by formulas (in this case the homotopy is an isotopy). This isotopy determines a self-homotopy of the space of random polygons in $\mathbb{R}^2$, which transforms an arbitrary 7-polygon into its axial symmetric image, and which keeps the probability measure. This homotopy is called $2D$-Higher Symmetry.

The goal of my talk is to generalize the previous result for the case $n = 15$. Higher Symmetry (which is not a self-isotopy in the considered case) is defined by formulas. The structure of the zero divisors in the algebra $\mathbb{A}_4 = \mathbb{R}^{16}$ is used, see [4]. $3D$-Higher Symmetry for the space of random 15-polygon knots in $\mathbb{R}^3$ is also well-defined.

[1] Ioan James,*The topology of Stiefel manifolds.* Oxford, 1976.

[2] Jason Cantarella, Tetsuo Deguchi, and Clayton Shonkwiler *Probability Theory of Random Polygons from the Quaternionic Viewpoint,* arXiv:1206.3161v2 [math.DG] 13 Sep (2012).

[3] Akhmet'ev P.M. *A remark on the space of 7-gons with a fixed total length in R^3,* arXiv:1308.2046v1 [math.GT] 9 Aug (2013).

[4] Guillermo Moreno *The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers,* arXiv:q-alg/9710013v1 8 Oct (1997).

Метод согласования в задаче обтекания цилиндра поперечным потоком вязкой жидкости

Р.Г.Ахметов

БГПУ им. М. Акмуллы, г. Уфа, Россия

e-mail: akrust@mail.ru

В работе рассматривается задача об обтекании цилиндра потоком вязкой несжимаемой жидкости. Используется форма записи уравнений движения в переменных «функция тока - вихрь». В случае двумерных течений остаётся одна компонента вектора вихря $\bar{\Omega} = rot\bar{V}$. Уравнение несжимаемости выполняется в связи с введением функции тока ψ. Тогда для плоского стационарного течения имеем уравнения (см., напр. [1], гл. XI, стр. 471, (135), (136)

$$\frac{1}{Re}\Delta\Omega = u\frac{\partial\Omega}{\partial x} + v\frac{\partial\Omega}{\partial y},\ \Delta\psi = -\Omega, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, Re – число Рейнольдса, Ω – скалярная функция.

Метод исследования в настоящей работе состоит в следующем. В качестве первого приближения функции тока вне следа за цилиндром (в области $r \cdot$

$\sin^2\varphi > const$) рассмотрим

$$\psi_1(r,\varphi) = \left(r - \frac{1}{r} - \frac{3\ln r}{r} + \frac{\ln r}{r^2}\right)\sin\varphi. \tag{2}$$

При этом $Re = U_\infty \frac{d}{v}$, где d - диаметр цилиндра, v - коэффициент вязкости.

Далее считаем, что $Re \in [10, 500]$. Исследуем асимптотику вихря Ω методом согласования асимптотических разложений в пограничном слое вблизи цилиндра. Введем для удобства малый параметр $\epsilon^3 = 1/Re$. Уравнение (1) перепишем в виде

$$\epsilon^3\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi} = 0, \tag{3}$$

$$\zeta \to 0, r \to \infty, \tag{4}$$

где $\zeta(r,\varphi) = \Omega(x,y)$. Функцию ψ_1 (см. (2)) разлагаем в ряд в окрестности $r = 1$

Асимптотику ζ ищем в виде

$$\zeta = \zeta_0(\rho,\varphi) + \epsilon\zeta_1(\rho,\varphi) + \cdots, \text{ где } \rho = (r-1)/\epsilon. \tag{5}$$

Тогда из (3), пользуясь разложением (5) в переменных ρ, φ получаем уравнение для главного члена

$$\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial\rho^2} - \rho^2\cos\varphi\frac{\partial\zeta_0}{\partial\rho} + \rho\sin\varphi\frac{\partial\zeta_0}{\partial\varphi} = 0. \tag{6}$$

После замены $x = \rho\sqrt{\sin\varphi}, \tau = \frac{1}{2}\int_\varphi^\pi \sqrt{\sin t}dt$ из (6) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - x\frac{\partial\zeta_0}{\partial\tau} = 0. \tag{7}$$

Тогда решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (4) имеет вид

$$\zeta_0 = c\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{x^3}{9\tau}\right), \tag{8}$$

где $\Gamma(\alpha,x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ – неполная гамма функция, постоянная с определяется из условий для ζ_0 на твердой границе. За цилиндром возникает дополнительный пограничный слой. Решение ищем в переменных $\psi, s = r-1$ тогда для главного члена получаем уравнение

$$\partial\zeta/\partial s = 0.$$

Тогда получаем $\zeta = \zeta(\psi)$. Тогда второе из уравнений (1) приводится к виду

$$\Delta\psi = -\zeta(\psi).$$

Условие согласования с решением (8) дает возможность определить структуру

$$-\zeta(\psi) = 2\epsilon \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\psi^{3/2}}{9\tau_0}\right), \text{ при } \varphi = O(\epsilon).$$

В частности рассматривается случай $\psi = \psi(r)$. Численно решаем задачу

$$\psi''(r) + \frac{1}{r}\psi'(r) = -\zeta(\psi(r)), \ \psi(r_0) = \psi_{01}, \psi'(r_0) = \psi_{02}.$$

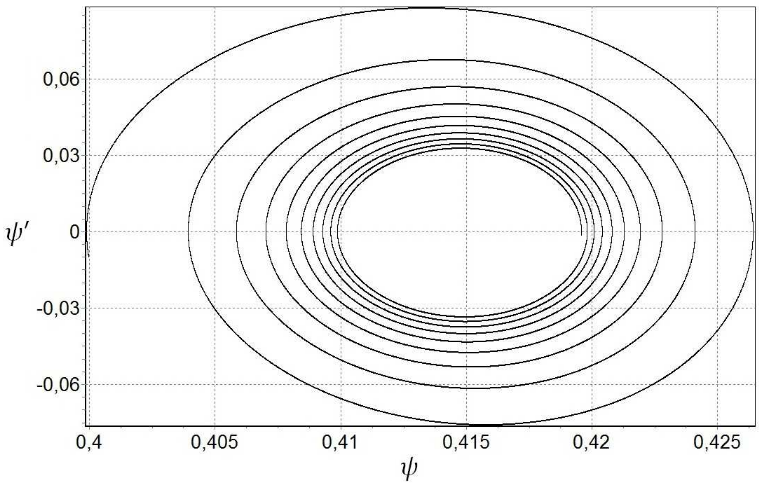

Рис. 1: Фазовые траектории для $r_0 = 1,1$, $\psi_{01} = 0,4$, $\psi_{02} = -0,01$, $Re = 300$.

Решение имеет особую точку типа фокуса.

[1] Л.Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа.* 7-е изд., исправленное. - М.: ДРОФА, 2003, 846 с.

Solvability of degenerate evolution equations with memory

L.V. Borel

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

e-mail: lidiya904@yandex.ru

Let $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{V}$ be Banach spaces, operator $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ (linear and continuous), operator $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ (linear, closed and densely defined), $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_- = \{0\} \cup \mathbb{R}_-$, $C_b^p(\overline{\mathbb{R}}_-; \mathfrak{U})$ is a Banach space of p times continuously differentiable functions with bounded derivatives equipped with the corresponding sup-norm.

In the case of (L, p)-radial operator M [1] consider the problem

$$\begin{aligned} P(u(t) - u_-(t)) = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \\ Lu'(t) = Mu(t) + \int_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t), \quad t \in [0, T), \end{aligned} \qquad (1)$$

where $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $f : [0,T) \to \mathfrak{V}$, $T \leq +\infty$, P is identity of the resolving semigroup for the equation $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ [1].

Theorem 1. *Let an operator M be (L,p)-bounded, $Pu_-(0) = Pu_-'(0) = \dots = Pu_-^{(p-1)}(0) = 0$, $Pu_- \in C_b^p(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $Qf \in C^p([0,T);\mathfrak{V})$, $(I-Q)f \in C^{p+1}([0,T);\mathfrak{U})$. Then there exists a unique solution $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T)D_M) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$ of the problem* (1) *on* $[0,T)$.

The abstract result is used for considering of a problem

$$\begin{gathered} z(x,t) = z_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \\ z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \end{gathered} \tag{2}$$

for the integrodifferential Oskolkov system on viscoelastic fluid

$$\begin{gathered} (1-\chi\Delta)z_t(x,t) = \nu\Delta z(x,t) - (\tilde{z}\cdot\nabla)z(x,t) - (z\cdot\nabla)\tilde{z}(x,t) - r(x,t) + \\ + \int_0^\infty K(s)\Delta z(x,t-s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \end{gathered} \tag{3}$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with a boundary $\partial\Omega$ of C^∞ class, $\chi, \nu \in \mathbb{R}$, functions z_-, $\tilde{z}$, K are set.

Denote $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^n$. Denote by $\mathbb{H}_\sigma$ a closure of the lineal $\mathcal{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot w = 0\}$ by the norm of the space $\mathbb{L}_2$, and $\mathbb{H}_\sigma^1$ by the norm of $\mathbb{H}^1$. Moreover, $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, where $\mathbb{H}_\pi$ is orthogonal complement to $\mathbb{H}_\sigma$.

Theorem 2. *Let $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $z_- \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathbb{H}_\sigma^2) \cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathbb{H}_\sigma^2)$, $K \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Then the problem* (2), (3) *has a unique solution $z \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}_\sigma^2) \cap C(\mathbb{R};\mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}_\pi) \cap C(\mathbb{R};\mathbb{H}_\pi)$.*

[1] V.E. Fedorov. Degenerate strongly continuous semigroups of operators, St. Petersbg. Math. J., **12**, no. 3, 471–489 (2001).

О тонком PT-симметричном волноводе

Д.И. Борисов

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия

e-mail:borisovdi@yandex.ru

We consider a model of a PT-symmetric waveguide introduced as a scalar second order differential operator in a thin multidimensional layer with non-hermitian boundary conditions. The coefficients of the operator satisfy certain symmetricity conditions, while the boundary conditions are of Robin type but with pure imaginary coefficients. This operator is self-adjoint. Our main result is the description of an effective operator, the proof of the uniform resolvent convergence of the perturbed operator to the effective one, and the complete asymptotic expansions for the eigenvalues of the perturbed operator.

Усреднение краевой задачи в области, перфорированной вдоль части границы

Р.Р. Гадыльшин, Д.В. Кожевников
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы, Уфа, Россия
e-mail: gadylshin@yandex.ru, kozhevnikovbspu@gmail.com

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, лежащая в верхней полуплоскости, граница которой Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — отрезок $[0,1]$ на оси абсцисс, а $\Gamma_2 \in C^\infty$ в окрестности концов отрезка Γ_1 совпадает с прямыми $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ соответственно. Далее, пусть B — произвольная ограниченная двумерная область, $\partial B \in C^\infty$, $B_a := \{x : (a^{-1}x_1 - b, a^{-1}x_2 - c) \in B\}$, где $0 < b < 1$, $c > 0$ фиксированны, $0 < a \ll 1$, $B^j_{\varepsilon,a} := \{x : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B_a\}$, $B_{\varepsilon,a} := \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} B^j_{\varepsilon,a}$, а $\varepsilon = \varepsilon_N = \frac{1}{N}$, где $1 \ll N \in \mathbb{N}$. Определим область $\Omega_{\varepsilon,a}$ как $\Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon,a}}$.

Доказаны два следующих утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $-\frac{1}{\varepsilon \ln a} \longrightarrow A \neq \infty$, $f \in L_2(\Omega)$ *и* λ *не является собственным значением краевой задачи*

$$-\Delta u_0 = \lambda_0 u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + 2\pi A u_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_1.$$

Тогда для решения краевой задачи

$$-\Delta U_{\varepsilon,a} = \lambda U_{\varepsilon,a} + f \quad \text{в } \Omega_{\varepsilon,a}, \quad U_{\varepsilon,a} = 0 \quad \text{на } \partial B_{\varepsilon,a}, \quad \frac{\partial U_{\varepsilon,a}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{1}$$

где ν *— вектор внешней нормали, имеет место сильная сходимость*

$$U_{\varepsilon,a} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} U_0 \qquad \text{в } W^1_2(\Omega), \tag{2}$$

если $A = 0$, *и слабая сходимость*

$$U_{\varepsilon,a} \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} U_0 \qquad \text{в } W^1_2(\Omega),$$

если $A \neq 0$, *где* U_0 *— решение предельной (усредненной) задачи*

$$-\Delta U_0 = \lambda U_0 + f \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \nu} + 2\pi A U_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_1.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon \ln a \longrightarrow 0$, $f \in L_2(\Omega)$ *и* λ *не является собственным значением краевой задачи*

$$-\Delta u_0 = \lambda_0 u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_1.$$

Тогда для решения краевой задачи (1) *имеет место сильная сходимость* (2), *где* U_0 *— решение предельной (усредненной) задачи*

$$-\Delta U_0 = \lambda U_0 + f \quad \text{в } \Omega, \quad U_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_1.$$

Работа первого автора поддержана в рамках Государственного задания Минобрнауки РФ. Работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект No. 12-01-00445).

Класс Сиддики и аппроксимативные свойства экспонент на дугах

А.М. Гайсин
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: gaisinam@mail.ru

В термине неполноты систем экспонент получено условие нетривиальности класса Сиддики на дуге ограниченного наклона, угловые коэффициенты всех хорд которой меньше единицы.

Пусть

$$E(M_n;\gamma) = \{f \in C^\infty(\gamma) : \max_{z\in\gamma} |f^{(n)}(z)| \le K_f \hat{M}_n \ (n \ge 0)\},$$

$$\hat{M}_n = \sup_{r>0} \frac{r^n}{Q(ir)}, \qquad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad \sup_n \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

Здесь $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = t + ih(t) \ (0 \le t \le 1)\}$ — дуга ограниченного наклона, то есть

$$\sup_{t_1 \ne t_2} \left| \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = M_\gamma < \infty.$$

Пусть

$$C_{00}(\hat{M}_{n-2};\gamma) = \{f \in E(\hat{M}_{n-2};\gamma) : f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b) = 0 \ (n \ge 0)\},$$

где a, b — концы дуги γ. Доказана следующая

Теорема. Пусть $M_\gamma < 1$, причем в каждой точке дуги γ (кроме концов) существуют обе односторонние касательные. Если для любого η $(0 < \eta \le 1)$ система экспонент $\left\{e^{\pm\lambda_n \eta z}\right\}$ не полна в $C(\gamma)$, то для любого ε $(0 < \varepsilon \le 1)$ класс Сиддики $C_{00}(\varepsilon^n \hat{M}_{n-2};\gamma)$ не является тривиальным.

Совпадение классов Карлемана на дугах и теорема Банга

Р.А. Гайсин
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: rashit.gajsin@mail.ru

Пусть γ — квазигладкая дуга, α и β — концы этой дуги,

$$C_{00}(M_n;\gamma) = \{f \in C^{\infty}(\gamma) : \sup_{z\in\gamma}\left|f^{(n)}(z)\right| \le K_f^n M_n,\ f^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\beta) = 0\ (n \ge 0)\},$$

где $M_n > 0$, $M_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$. Через $\{M_n^c\}$ обозначим последовательность, полученную из $\{M_n\}$ путем выпуклой регуляризации посредством логарифмов.

Речь идет о совпадении классов Карлемана $C_{00}(M_n^c;\gamma)$ и $C_{00}(M_n^c;\gamma)$ и теореме типа Банга.

Теорема. Справедливы следующие утверждения:

1) если

$$M_{n+1} \le C^n M_n \quad (n \ge 0) \tag{1}$$

и $C_{00}(M_n;\gamma) \ne \{0\}$, то классы $C_{00}(M_n^c;\gamma)$ и $C_{00}(M_n;\gamma)$ совпадают;

2) если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty,$$

то класс $C_{00}(M_n;\gamma)$ является квазианалитическим.

Первое утверждение ранее было известно только для отрезка. Второе утверждение является аналогом теоремы Банга для класса $C_{00}(M_n;\gamma)$ на квазигладкой дуге γ в случае произвольных, необязательно возрастающих $M_n > 0$, но удовлетворяющих условию (1). Последнее означает, что класс $C_{00}(M_n;\gamma)$ является инвариантным относительно дифференцирования.

Degenerate equations of fractional order in Banach spaces

D.M. Gordievskikh
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: dmitriy_g90@mail.ru

Let $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{V}$ be Banach spaces, operator $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ be linear and continuous, $\ker L \ne \{0\}$, an operator M be linear, closed and densely defined on D_M in $\mathfrak{U}$. Let for every μ such that $|\mu| > a$ there exists a continuous operator $(\mu L - M)^{-1} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$. Then we have direct sums $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$ with corresponding projectors P and Q, $M : D_M \cap \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{V}^k$, $L : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{V}^k$ for $k = 0, 1$ [1]. By M_k (L_k) we denote the restriction of operator M (L) on $D_{M_k} = \mathfrak{U}^k \cap D_M$ $(\mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$. Denote $H = M_0^{-1}L_0$, $E_{\alpha,\beta}$ is a Mittag-Leffler function,

$U_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=a+1} (\mu L - M)^{-1} L E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu$. For $\alpha > 0$ ${}_0D_t^\alpha$ is a fractional Caputo derivative, m is a smallest integer number not smaller than α. Consider a problem

$$\begin{gathered} {}_0D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \\ u^{(k)}(0) = u_k, \ k = 0, 1, \ldots, m-1. \end{gathered} \tag{1}$$

A solution is a function $u \in C([0,T]; D_M)$ such that $Lu \in C^{m-1}([0,T]; \mathfrak{V})$, $\frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} * \left(Lu(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} (Lu)^{(k)}(0) \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} \right) \in C^m([0,T]; \mathfrak{V})$, and conditions (1) are satisfied. Here $*$ is a convolution.

Theorem 1. *Let operator M be (L,p)-bounded* [1], $Qf \in C^m([0,T]; \mathfrak{V})$, $(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C([0,T]; \mathfrak{U})$ *for* $k = 0, 1, \ldots, p+1$,
$\lim\limits_{t\to 0+} \frac{d^k}{dt^k} \sum\limits_{n=0}^{p} (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}(I-Q)f(t) = -(I-P)u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$. *Then there exists a unique solution of the problem* (1), *it has a form*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}(t) u_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} U_{\alpha,\alpha}(t-s) L_1^{-1} Qf(s) ds - \\ - \sum_{k=0}^{p} (D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Let $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$, $Q_{n_1}(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n_1} d_j \lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, n_1$, $c_n, d_{n_1} \neq 0$, $n \geq n_1$. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ be a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $A_1 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ has domain $D(A_1) = H_\theta^2(\Omega)$ and acts as $A_1 u = \Delta u$. Theorem 1 is applied to the problem

$$\begin{gathered} P_n(\Delta) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = Q_{n_1}(\Delta) u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ \left(1 - \theta + \theta \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \Delta^k u(x,t) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x,0) = u_{m-1}(x), \quad x \in \Omega. \end{gathered}$$

[1] G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* VSP, Utrecht, Boston, 2003.

Сингулярно возмущенные задачи управления с гладкими геометрическими ограничениями на управление

А.Р.Данилин, О.О.Коврижных
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
e-mail:dar@imm.uran.ru

Рассматриваются задачи управления линейными системами с постоянными коэффициентами с быстрыми и медленными переменными и ограничениями на управление в виде шара в соответствующем евклидовом пространстве.

Исследуется асимптотика решения относительно малого параметра при производных в уравнениях системы и малого возмущения начальных условий.

Обмен энергиями меджу солитонами уравнения синус-Гордона в присутствии малых возмущений

С.В. Дмитриев
Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия
e-mail:dar@imm.uran.ru

Изучены многосолитонные столкновения в слабо возмущенном уравнении синус-Гордона. Показан значительный обмен энергиями между солитонами вблизи точных сепаратрисных решений интегрируемого уравнения синус-Гордона.

Interaction of sine-Gordon solitons in the model with two attracting impurities and damping

E.G. Ekomasov, **A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev, N.N. Abakumova**
Bashkir State University, Ufa, Russia
e-mail: EkomasovEG@gmail.com

In recent decades the Solitons theory for nonlinear evolutionary equations has been widely used in many fields of physics. For example, the sine-Gordon equation solitons simulate different localized dynamic excitations of the physical systems [1]. However, for an adequate description of real physical processes one requires a modification of the sine-Gordon equation by addition of summands describing the presence of attenuation and external force in the system, spatial modulation of the periodical potential (or impurity). Advanced analytical methods for studying this problem for the modified sine-Gordon equation (MSGE) using perturbation theory for solitons tend not to give an exhaustive result. The research of the large disturbances influence on the MSGE solution, in general case, can be conducted only with the help of numerical methods [2].

In this study we investigated the solitons of the sine-Gordon equation interaction dynamics in the presence of attracting impurities. For the case of two identical impurities in the system we presented, with the help of numerical simulation, the possibility of the multisolitons states generation (such as tritons and quadrons) localized on the impurities. The interaction of the kink with breather can lead to a resonant "quasitunneling" of the kink through the double impurity region (i.e. passing through a potential barrier with a sub-barrier initial velocity). Using the collective coordinates method we showed, that the original problem can be reduced to a system of ordinary differential equations for two bound harmonic oscillators with an elastic type of bind, which qualitatively describes the localized waves fluctuations. Within the limit of small amplitude fluctuations of localized waves, the spectrum of possible modes, which with good accuracy corresponds with the numerical results, was calculated.

[1] O.M. Braun, Yu.S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications.* Berlin: Springer, 2004.

[2] E.G. Ekomasov, A.M. Gumerov and R.R. Murtazin, Computer Research and Modeling, **4(3)**, 509 (2012).

Задача о вычислении электрического сопротивления

А.А. Ершов, Р.Р. Гадыльшин

ЧелГУ, Россия, e-mail: ale10919@yandex.ru

БГПУ им. Акмуллы, Россия, e-mail: gadylshin@yandex.ru

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$. И пусть эта область имеет два конечных плоских участка, с которыми мы свяжем две декартовые координатные системы $O_1x_1x_2x_3$ и $O_2y_1y_2y_3$. Множества γ_1 и γ_2 — замыкания ограниченных односвязных областей на плоскостях $x_3 = 0$ и $y_3 = 0$ соответственно, $\partial\gamma_1 \in C^\infty$, $\partial\gamma_2 \in C^\infty$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Обозначим $\gamma_k^\varepsilon = \{z : \varepsilon^{-1}z \in \gamma_k\}$, $k = 1, 2$.

Электрический потенциал моделируется с помощью решения $u(x,\varepsilon) \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{\partial\gamma_1^\varepsilon \cup \partial\gamma_2^\varepsilon\}) \cap C(\overline{\Omega})$ следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega\backslash\{\gamma_1^\varepsilon \cup \gamma_2^\varepsilon\}, \\ u = 1, \quad x \in \gamma_1^\varepsilon, \\ u = -1, \quad y \in \gamma_2^\varepsilon, \end{cases}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль.

Методом согласования асимптотических разложений [1] построено асимптотическое разложение функции $u(x,\varepsilon)$ по малому параметру ε, характеризующему размер участков γ_1^ε и γ_2^ε.

Получена следующая формула для электрического сопротивления [2] образца формы Ω с контактами γ_1^ε и γ_2^ε:

$$R = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{C_1 + C_2}{\sigma 2\pi C_1 C_2} + \frac{(C_1 + C_2)^2}{\sigma 2\pi C_1^2 C_2^2}\Big(g(O_2) - \frac{2}{|O_1O_2|}\Big) + O(\varepsilon),$$

где σ — проводимость материала, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — ёмкости дисков γ_1 и γ_2 (см., напр., [3, Гл. 2, §1], [4, Гл. 2, §3]), g — некоторая функция, зависящая только от x и Ω.

Работа первого автора поддержана РФФИ (проект № 12-01-00259) и "Фондом поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса". Работа второго автора поддержана РФФИ (проект № 14-01-00322).

[1] А.М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука, 1989.

[2] Р. Хольм, *Электрические контакты.* М.: Иностранная литература, 1961.

[3] Г. Полиа, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике.* М.: Физматлит, 1962.

[4] Н.С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука, 1966.

Relation between the codes of nonlinear modes for Gross-Pitaevskii equation and their stability

D.A.Zezyulin, G.L.Alfimov, *P.P.Kizin*
Centro de Fisica Teorica e Computacional, Lisboa, Portugal
e-mail: d.zezyulin@gmail.com
Moscow Institute of Electronic Engineering, Zelenograd, Moscow, Russia
e-mail: galfimov@yahoo.com

We considered real stationary states for Gross-Pitaevskii equation (GPE) with cosine potential $V(x) = A\cos 2x$, i.e.

$$\psi_{xx} + (\omega - A\cos 2x)\psi - \psi^3 = 0$$

It follows from [1] that there exist areas on the parametric plane (ω, A) where there exists one-to-one correspondence between the bounded solutions of this equation and bi-infinite sequences of symbols of finite alphabet $\mathcal{A}$ (*codes* of the solutions). In the plane (ω, A) these areas are situated in so-called *gaps* of Mathieu equation

$$\psi_{xx} + (\omega - A\cos 2x)\psi = 0$$

The number of symbols in this alphabet depends on the number of gap. For instance, in the first gap this alphabet consists of three symbols "$-$", "$+$" and "0" and the simplest localized mode (*gap soliton*) corresponds to the code "$\ldots 000+000\ldots$".

In this contribution we report on a relation between the codes of nonlinear localized modes and their stability properties. The results are based on extensive numerical study including both (i) linear stability analysis (see e.g. [2]) and (ii) numerical evolution of perturbed nonlinear localized mode. We conjecture that the modes with codes of alternating symbols "$+$" and "$-$" are unstable, (e.g. "$\ldots 00++-00\ldots$"), whereas the modes with codes of nonalternating symbols basically are stable.

[1] G.L. Alfimov, A.I. Avramenko, Coding of nonlinear states for the Gross-Pitaevskii equation with periodic potential, Physica D **254** 29-45 (2013)

[2] D.E. Pelinovsky, A.A. Sukhorukov, Yu.S. Kivshar, Bifurcation and stability of gap solitons in periodic potentials, Phys. Rev. E **70** 036618 (2004)

Nonlinear inverse problem for a class of partial differential equations

N.D. Ivanova
South-Ural State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

Let $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_m(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j\lambda^i$, $m \geq n$, $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$, $d_m \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ with $\partial\Omega$ of class C^∞, an operator pencil A, $B_1, \dots B_r$ is regularly elliptic [1], when

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha|\leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$
$$(B_l u)(x) = \sum_{|\alpha|\leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad b_{l\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, \dots, r.$$

Let the operator $A_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ with $D(A_1) = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ [1], acting as $A_1 u = Au$, $u \in D(A_1)$, be self-adjoint, and $\sigma(A_1)$ be right-bounded. Then $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ are orthonormal eigenfunctions of A_1 in a sense of inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on $L_2(\Omega)$, numbered in nonincreasing order of eigenvalues $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ subject to multiplicities. Denote Banach space

$$\mathcal{U} = \{w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l A^k w(x) = 0,\ k = 0, \dots, n-1,\ l = 1, \dots, r,\ x \in \partial\Omega\}.$$

For unknown $u(x,t)$ and $q(t)$ consider an evolution inverse problem

$$P_n(A)u_t(x,t) = Q_m(A)u(x,t) + q(t)\varphi(x,t)\int\limits_\Omega K(y)u(y,t)dy, \tag{1}$$

$$B_l A^k u(x,t) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad l = 1, \dots, r, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega K(x)u(x,t)dx = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Theorem. *Let $m \geq n \geq 1$, $(-1)^{m-n}\mathrm{Re}(d_m/c_n) \leq 0$, and λ_k, $k \in \mathbb{N}$, do not resolve polynomials P_n and Q_m concurrently. There are fulfilled conditions*

(i) $\varphi \in C([0,T]; L_2(\Omega))$, $u_0 \in \mathcal{U}$;

(ii) $K \in H^{2(m-2n)r}(\Omega)$ *for* $m > 2n$ *and* $K \in L_2(\Omega)$ *for* $m \leq 2n$,

(iii) *if* $P_n(\lambda_k) = 0$, *then*

$$\langle \varphi(\cdot,t), \varphi_k \rangle = 0 \ \forall t \in [0,T], \quad \langle K, \varphi_k \rangle = 0, \quad \langle u_0, \varphi_k \rangle = 0,$$

(iv) $\psi \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, $\langle K, u_0 \rangle = \psi(0)$, $\forall t \in [0,T]$ $\psi(t) \neq 0$, $\sum\limits_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{\langle \varphi(\cdot,t),\varphi_k \rangle \langle K,\varphi_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} \neq 0$.

Then there exists a mild solution $u \in C([0,T_1];\mathfrak{U})$, $q \in C([0,T_1];\mathbb{R})$ *of* (1)-(4) *on* $[0,T_1]$, $T_1 \in (0,T]$.

[1] H. Tribel, *Interpolation Theory, Differential Operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschafen, Berlin, 1978.

Фиктивные асимптотики

Л.А. Калякин

Институт математики с ВЦ РАН, Уфа, Россия

e-mail:dar@imm.uran.ru

Приводятся примеры задач, для которых возможно построение асимптотических решений, не соответствующих никакому точному решению. В частности, обсуждаются задачи, возникающие в теории стохастических возмущений.

О задаче Стеклова в полуполосе с малым отверстием

Д.В. Кожевников

Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы, Уфа, Россия

e-mail: kozhevnikovbspu@gmail.com

Пусть Σ — интервал $(0,1)$ на оси абсцисс, $\Pi := \Sigma \times (0,\infty)$, B — ограниченная односвязная двумерная область с бесконечнодифференцируемой границей, $B_a := \{x : (a^{-1}x_1 - b, a^{-1}x_2 - c) \in B\}$, где $0 < b < 1$, $c > 0$, $0 < a \ll 1$, $\Pi_a := \Pi \backslash \overline{B_a}$.

В работе методом согласования асимптотических разложений [1] построены двучленные асимптотики по малому параметру a собственных значений краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta w_a = 0 \quad \text{при } x \in \Pi_a, \\ w_a = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Pi_a \backslash \overline{\Sigma}, \\ -\frac{\partial w_a}{\partial x_2} = \lambda_a w_a \quad \text{при } x \in \Sigma. \end{cases} \tag{1}$$

Доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Собственные значения* $\left\{\lambda_a^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *краевой задачи* (1) *являются простыми и имеют асимптотики*

$$\lambda_a^{(n)} = \pi n - \frac{1}{\ln a}\, 4\pi \mathrm{e}^{-2\pi c} \sin^2(\pi n b)\,(1 + o(1))\,.$$

Если $\sin(\pi n b) = 0$*, то*

$$\lambda_a^{(n)} = \pi n + a^2 4\pi^3 n^2 C_1(B) \mathrm{e}^{-2\pi c} \cos^2(\pi n b)\Big(1 + o(1)\Big),$$

где $C_1(B)$ *— положительный коэффициент из асимптотики*

$$v(x) = x_1 + C_0(B) - C_1(B)\frac{x_1}{|x|^2} - C_2(B)\frac{x_2}{|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \qquad |x| \to 0$$

решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{B}, \\ v = 0 & \text{при } x \in \partial B. \end{cases}$$

Работа автора поддержана в рамках Государственного задания Минобрнауки РФ.

[1] А.М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* Наука, Москва, 1989.

On the Hill equation with a slowly varying parameter

V.A. Koutvitsky, E.M. Maslov
IZMIRAN, Russia

We consider a general Hill equation

$$d^2Y/d\theta^2 + h(\rho,\theta)Y = 0, \tag{1}$$

where $h(\rho,\theta)$ is a 2π-periodic even function with respect to the fast variable θ, and ρ varies slowly in accordance with equation $d\rho/d\theta = \varepsilon R(\rho) \quad (\varepsilon \ll 1)$.

The resonant solutions of Eq. (1) are constructed in the form of asymptotic expansions,

$$Y^+(\theta) = \psi(\rho,\theta)e^{\xi(\theta)}, \quad Y^-(\theta) = \psi(\rho,-\theta)e^{-\xi(\theta)}, \tag{2}$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(\rho,\theta), \quad d\xi/d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mu_n(\rho), \tag{3}$$

where $\psi_n(\rho,\theta) = \psi_n(\rho,\theta+2\pi)$ and normalizing $\psi_0(\rho,0) = 1$, $\psi_n(\rho,0) = 0$ $(n \geqslant 1)$, $\xi(0) = 0$ are assumed. Substituting (2), (3) into Eq. (1) and setting $\psi_n(\rho,\theta) = X_n(\rho,\theta)e^{-\mu_0(\rho)\theta}$, we arrive at the inhomogeneous Hill equation

$$\partial^2 X_n/\partial\theta^2 + h(\rho,\theta)X_n = F_n(\rho,\theta)e^{\mu_0(\rho)\theta}, \tag{4}$$

where $F_0 = 0$, $F_n(\rho,\theta) = F_n(\rho,\theta+2\pi) \quad (n \geqslant 1)$ and contains ψ_m with $m < n$. Note that ρ in Eq. (4) is just a parameter.

Suppose we know the solutions $X_0^{\pm}(\rho,\theta) = \psi_0(\rho,\pm\theta)e^{\pm\mu_0(\rho)\theta}$ of the homogeneous Hill equation (Eq. (4) with $n = 0$) [1]. With the use of them the solution $X_n(\rho,\theta)$ of Eq. (4) for any $n \geqslant 1$ and, hence, $\psi_n(\rho,\theta)$ are obtained immediately by integration. The corresponding $\mu_n(\rho)$ are found from the requirement of 2π-periodicity of $\psi_n(\rho,\theta)$.

For the purposes of illustration the Lamé equation with a slowly varying parameter is considered.

[1] V. Koutvitsky and E. Maslov, J. Math. Phys., **47**, 022302 (2006).

Асимптотика эллиптического синуса при $k \to 1$

Красильников А.В.
Челябинский Государственный Университет, Россия
e-mail: press-csu@yandex.ru

Была поставлена задача о нахождении асимптотики эллиптического синуса при $k \to 1$. Эллиптический синус является обращением эллиптического интеграла

$$u(z;k) = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \tag{1}$$

и, кроме того, является однолистной функцией, которая отображает прямоугольник на комплексную плоскость с разрезом, поэтому можно применить известную формулу обращения [1], и выразить эллиптический синус через эллиптический интеграл (1):

$$sn(u;k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \zeta \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-k^2\zeta^2}}}{\int\limits_0^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} - \int\limits_0^{z} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}} d\zeta, \tag{2}$$

где контур $\gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = \rho_0\}$, а ρ_0 — постоянная порядка $1 - |z|$.

Используя асимптотическое представление эллиптического интеграла по степеням $1 - k^2 = \varepsilon$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$, можно найти представление и для эллиптического синуса. В данной работе представлены два первых члена асимптотического представления для эллиптического синуса, а также доказана оценка остатка:

$$sn(u;k) = \tanh u + \frac{\varepsilon}{4}\Big(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u}\Big) + O(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Это представление и оценка равномерны для всех $z \in [-1+\alpha, 1-\alpha]$, где $\alpha << 1$.

[1] А.И. Маркушевич, *Теория аналитических функциий*, том 1 (1967), с. 456-459.

Асимптотика решения задачи конвективной диффузии с химической реакцией около капли в стоксовом потоке

Р.Р. Кутлуев

БГПУ им. М. Акмуллы, г. Уфа, Россия

e-mail: rus4652@yandex.ru

Рассматривается краевая задача

$$v''(x) - xv'(x) - \mu F(v(x)) = 0, \tag{1}$$

$$v(0) = 1,\ v(x) = O(1),\ \text{при } x \geq 0. \tag{2}$$

Предположим, что функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$F(u) = u^\alpha g(u),\ g \in C^R,\ g(0) > 0, \alpha > 1,$$

где функция $g(u)$ имеет асимптотику

$$g(u) = 1 + g_1 u + g_2 u^2 + g_3 u^3 + \cdots \text{ при } u \to 0.$$

В работе [1] построена асимптотика решения около сферической частицы, когда объемная химическая реакция $F(u) = u^\alpha((g(u) \equiv 1)$.

ФАР решения $v(x)$ задачи (1), (2) ищем в виде

$$v(x) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} C_{k,n,m}\frac{\ln^k((\alpha-1)\mu\ln x + c)}{x^{2n}((\alpha-1)\mu\ln x + c)^{(m+1)/(\alpha+1)+n+k}},$$

где коэффициенты $C_{k,n,m}$ определяются из рекуррентных равенств

$$C_{0,0,0} = 1,\ C_{0,0,1}(\alpha-2) = -g_1,\ \cdots$$
$$C_{0,1,0} = -1/2\mu,\ C_{0,1,1} = -\mu C_{0,0,1},\ \cdots$$
$$C_{1,0,0} = C_{1,0,0},\ C_{1,0,1} = \alpha(\alpha-1)C_{0,0,1}C_{1,0,0} + (\alpha+1)g_1 C_{1,0,0},\ \cdots$$
$$C_{1,1,0} = -1/2\mu\alpha C_{1,0,0},\ C_{1,1,1} = -1/2\mu(\alpha+1)C_{1,0,1},\ \cdots$$

В зависимости от значения α к правым частям этих равенств могут быть добавлены члены

$$(1-\alpha)C_{1,0,0},\ (1-\alpha)C_{1,0,1},\ \cdots\ (1-\alpha)C_{1,0,0} + \alpha\mu^2,\ \cdots$$
$$(\alpha-1)\mu C_{1,1,0} + \alpha(2\alpha-1)\mu^2 C_{1,0,0} + \alpha(1-\alpha)\mu C_{1,0,0}C_{0,1,0},\ \cdots$$

Это происходит при условии совпадения степеней, относительно которых они выписаны. Обоснование построенной асимптотики проводится как в работе [2].

[1] Р.Г. Ахметов, *Асимптотики решений одного класса квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.* Дифференциальные уравнения – 2010. – Т. 46. No 2. – С. 155–162.

[2] R.G. Akhmetov, R.R. Kutluev, *Influence of a volumetric chemical reaction on the convective mass transfer near a drop.* International Journal of Structural Stability and Dynamics – 2013. – Vol. 13. No 7. – P. 1340002 – 1–8.

On the dynamics of slow-fast Hamiltonian systems

L.M. Lerman
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
e-mail: lermanl@mm.unn.ru

We consider a slow-fast Hamiltonian system

$$\varepsilon\dot{x} = H_y,\ \varepsilon\dot{y} = -H_x,\ \dot{u} = H_v,\ \dot{v} = -H_u,$$

where function $H(x, y, u, v, \varepsilon)$ is smooth or real analytic all its variables, ε is a small positive parameter. With this system two limiting systems are related that are derived in the limit $\varepsilon \to +0$, but for different limit transitions. The first limit system usually called as *slow* one is given, if in the first two equations one formally sets $\varepsilon = 0$, and from equations $H_y = 0, H_x = 0$ one gets $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, with functions f, g given and smooth in some region $(u, v) \in D$. If one plugs f, g into third and fourth equation a Hamiltonian system of two differential equations with Hamiltonian $h(u, v) = H(f(u, v), g(u, v), u, v, 0)$ is derived. System $H_y = 0$, $H_x = 0$ for some assumptions of the general position type defines in the 4-dim phase space a smooth surface. Its points where the conditions of the implicit function theorem $H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2 \neq 0$ hold, indeed possess the above-mentioned representation and for them we have a differential system on the surface. Therefore, the surface obtained is called to be *the surface of slow motions* or simply, as slow manifold.

The second limit passage $\varepsilon \to +0$ is made in the system where a new fast time $\tau = t/\varepsilon$ has been introduced. Then ε appears as a factor in the third and fourth equations and as $\varepsilon \to +0$ one has a system of four equations (*fast system*), for this system 2-planes $(u, v) = (u_0, v_0)$ are invariant, in every such the plane its own Hamiltonian system with one degree of freedom is defined, the system depends on parameters u_0, v_0. That is why the system is called sometimes as a layer system. For the fast system the slow manifold is the manifold of its equilibria. Many phenomena of the full system are extracted from the assumption on the normal hyperbolicity of this surface. Completely different situation arises, if one assumes the normal ellipticity of the surface.

One of the main problem of the geometric theory of slow-fast systems is to extract the information on the orbit behavior of the full system ($\varepsilon > 0$ and small enough) from the properties of two limiting subsystems and its interrelations. If we are lucky, then we have some procedure of reduction of the multidimensional system to system of smaller dimensions. In the talk results in this direction will be discussed, as well as new problems and essential difficulties at this approach when a slow manifold has degeneration points w.r.t. its projection on the slow variables. Here connections with geometry of Painleve-1 and Painleve-2 equations are discussed, as well as some new simulation results obtained in the collaboration with N.E. Kulagin.

Author thanks RFBR for a partial support (grant 14-01-00344).

Асимптотика решения задачи конвективной диффузии около цилиндра с химической реакцией в диффузионном пограничном слое

Н.В.Максимова

Башкирский государственный педагогический университет им.М.Акмуллы, Уфа, Россия

e-mail: Natasha18091986@mail.ru

Рассмотрим стационарную диффузию около цилиндра, обтекаемого поперечным потоком идеальной жидкости с учетом объемной химической реакции ([1], гл. 5, § 6).

$$\varepsilon^2 \Delta u - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) - \varepsilon F(u) = 0, \tag{1}$$

$$u(1,\theta) = 1, u \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{2}$$

где r, θ - полярные координаты, $\psi(r,\theta) = (r - 1/r)\sin\theta$ - функция тока (см. напр. [2]). Предполагается, что функция $F(u)$ удовлетворяет условиям $F: R^1 \to R^1,\ F(0) = 0,\ F^{'}(u) > 0,\ F(u) \in C^\infty(R)$.

Асимптотика решения в диффузионном слое имеет вид

$$u(t,\theta,\varepsilon) = u_0(t,\theta) + \varepsilon u_1(t,\theta) + \varepsilon^2 u_2(t,\theta) + \cdots, \tag{3}$$

где $t = (r-1)/\varepsilon$.

Функцию $F(u)$ и коэффициенты при неизвестных разложим в ряд Тейлора и подставим их, а также ряд (3) в уравнение (1). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} - 2t\cos\theta\frac{\partial u_l}{\partial t} + 2\sin\theta\frac{\partial u_l}{\partial\theta} = f_l(u_0, u_1, \dots u_{l-1}, t, \theta), \tag{4}$$

где $f_0(t,\ \theta) \equiv 0$, явный вид $f_l(t,\ \theta)$ выписывается аналогично системе (1.3) работы [3]. Из условий (2) и из условий симметрии получаем граничные условия.

В работе построено асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) в диффузионном пограничном слое.

[1] Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. *Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком.* – М.: Наука, 1985

[2] Привалов И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1967. – 444 с.

[3] Ахметов Р. Г. *Асимптотика по малому параметру решения уравнения диффузии вне капли* // Асимптотические решения задач мат. физики. Уфа.: БНЦ УрО АН СССР, 1990. С. 3–16.

Variational and asymptotic analysis of a viscous fluid-thin elastic layer interaction problem in an 3D-infinite layer

I.S. Malakhova-Ziablova
Institute Camille Jordan UMR CNRS, University of Saint-Etienne, Saint-Etienne, France
e-mail:irina-smn@mail.ru

The coupled system viscous fluid flow-thin elastic plate in 3D when the thickness of the plate tends to zero, is considered. The plate lies on the fluid which occupies a thick domain. The complete asymptotic expansion is constructed. The existence, the regularity and the uniqueness of the solution for the original problem is studied by means of variational techniques. The method of asymptotic partial domain decomposition is applied for the coupled system. The error of the method is evaluated. This work is done under supervision of Grigory Petrovich Panasenko and in collaboration with Ruxandra Stavre. They have considered earlier [C.R.Mecanique, 2012] this problem in 2D, where the main distinguishing feature of the 3D-coupled system from the 2D-case is in the asymptotic analysis: when we construct the asymptotic expansion we have no more terms that we can determine explicitly, we have now the systems for them. And as before, we succeeded in differentiation between two problems: for the solid and fluid parts.

Лемма о диаманте, базисы Гребнера и примарные разложения.

С.В. Матвеев
Челябинский государственный университет

Знаменитая лемма Ньюмана 1942 года утверждает, что если некоторое множество с заданным на нем антисимметричным отношением удовлетворяет специальному условию, которое часто изображается стандартным знаком диаманта, т.е. ромбом, то каждый его элемент имеет единственный терминальный объект. Обычно эта лемма применяется в теории базисов Гребнера. В докладе будет рассказано, как небольшая модификация этой леммы позволяет как доказать несколько новых, так и опровергнуть несколько <фольклорных> результатов о примарных разложениях топологических объектов.

Асимптотический ряд преобразования монодромии.

Н.Б. Медведева
Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
e-mail: medv@csu.ru

Излагается метод раздутия особенностей, связанный с диаграммами Ньютона, позволяющий эффективно вычислять коэффициенты асимптотического ряда преобразования монодромии монодромной особой точки векторного поля на плоскости. Ранее были получены формулы [1], [2], [3], [4] для первого и второго члена асимптотики преобразовани монодромии. В данной работе построен алгоритм вычисления всех коэффициентов асимптотического ряда преобразования монодромии в случае, когда диаграмма Ньютона состоит только из одного ребра. Обсуждается общий случай.

[1] Н.Б. Медведева , Е.В. Мазаева ,“ Достаточное условие фокуса для монодромной особой точки“, *Тр. ММО*, **63**(2002), 87–114.

[2] А.С. Воронин, Н.Б. Медведева, *Известия РАН* , **77**:2(2013), 35-52.

[3] А.С. Воронин,Н.Б. Медведева, *Вестник ЧелГУ, Сер.3. Математика. Механика. Информатика.*, Вып.14 (2011), **27**(242), 12–26.

[4] А.С. Воронин, Н.Б. Медведева, *Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки.*, **3**(2009), 34–49.

Периодические параболические задачи с разрывными нелинейностями

Павленко В.Н.
Челябинский Государственный Университет, Россия
e-mail: pavlenko-vn@yandex.ru

Исследуется разрешимость периодической по t задачи

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)u_{x_j} + c(x,t)u = g(x,t,u(x,t)),\ (x,t) \in Q_T, \qquad (1)$$

$$u|_{S_T} = 0, \ u(x,0) = u(x,T), \ x \in \Omega, \tag{2}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω — ограниченная в $\mathbb{R}^n$ область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, функция $g(x,t,u) = g_2(x,t,u) - g_1(x,t,u)$, $g_1(x,t,u)$ — каратеодороиева, $g_2(x,t,u)$ — суперпозиционно измеримая и обе неубывающие по u. Оператор L равномерно параболический в Q_T и его коэффициенты a_{ij}, b_j, c и производные $(a_{ij})_{x_j}$ принадлежат $L^\infty(Q_T)$. Методом верхних и нижних решений получен следующий результат.

Теорема *Предположим, что существуют постоянные* $R_1 \le 0$ *и* $R_2 \ge 0$ *такие, что почти всюду на* Q_T *верны неравенства* $c(x,t)R_1 + g_1(x,t,R_1) \le g_2(x,t,R_1)$, $c(x,t)R_2 + g_1(x,t,R_2) \ge g_2(x,t,R_2)$ *и справедлива оценка*

$$|g_i(x,t,u)| \le a(x,t) \quad \forall u \in [R_1, R_2],$$

где $a \in L^q(Q_T), q \ge 2, i = 1,2$. *Тогда задача (1)-(2) имеет сильное решение из пространства* $W_q^{2,1}(Q_T)$. Доказательство теоремы базируется на общей схеме метода верхних и нижних решений [1, теорема 1].

[1] В.Н. Павленко, О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. — 1991. — **т. 27**, № 3. — с. 520-526.

Non-steady flow in a tube structure: equation on the graph

G. Panasenko and K. Pileckas

University of Lyon, Institute Camille Jordan UMR CNRS,Saint-Etienne, France;
Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Vilnius, Lithuania
Emails:grigory.panasenko@univ-st-etienne.fr, konstantinas.pileckas@mif.vu.li

The steady fluid flows in tube structures were considered in [1]. These domains are connected finite unions of thin finite cylinders. Each such tube structure may be schematically represented by its graph: letting the thickness of tubes to zero we find out that tubes degenerate to segments. It is known that the steady-state Navier-Stokes equations in thin structures lead to some elliptic second order equation for the macroscopic pressure on a graph (see [1]). In the non-steady case the problem for the macroscopic pressure on the graph becomes nonlocal in time. Let $O_1, O_2, \dots, O_N$ be N different points in $\mathbb{R}^n, n = 2,3$, and $e_1, e_2, \dots, e_M$ be M closed segments each connecting two of these points (i.e. each $e_j = \overline{O_{i_j} O_{k_j}}$, where $i_j, k_j \in \{1, \dots, N\}, i_j \ne k_j$). All points O_i are supposed to be the ends of some segments e_j. The segments e_j are called edges of the graph. A point O_i is called node if it is the common end of at least two edges and O_i is called vertex if it is the end of the only one edge. Any two edges e_j and e_i can intersect only at the common node. The set of vertices is supposed to be non-empty. Denote $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{j=1}^{N} e_j$ the union of edges and assume that $\mathcal{B}$ is a connected set. The union of all edges having the same end point in O_l is called the bundle $\mathcal{B}^{(l)}$.

Let e be some edge, $e = \overline{O_iO_j}$. Consider two Cartesian coordinate systems in $\mathbb{R}^n$. The first one has the origin in O_i and the axis $O_i x_n^{(e)}$ has the direction of the ray $[O_iO_j)$; the second one has the origin in O_j and the opposite direction. With every edge e_j we associate a bounded domain $\sigma^j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ having Lipschitz boundary $\partial\sigma^j$, $j = 1, \ldots, M$, an infinite tube $\sigma^j \times \mathbb{R}$, where the pressure is supposed to be linear with respect to the longitudinal variable (its slope $\mathcal{S}(\tau)$ is called the pressure drop), and the operator $L^{(e)}$ relating the pressure drop $\mathcal{S}(\tau)$ and the flux (flow rate) $\mathcal{H}(\tau)$ in an infinite cylindric pipe with the cross-section $\sigma^{(e)}$. Namely, consider the following initial boundary value problem for the heat equation: for given $\mathcal{S} \in L_2(0, +\infty)$ find $\mathcal{V} \in L_2(0, +\infty; H_0^1(\sigma^{(e)}))$ with $\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau} \in L_2(0, +\infty; L_2(\sigma^{(e)}))$ such that

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau}(y^{(e)\prime}, \tau) - \nu \Delta'_{y^{(e)\prime}} \mathcal{V}(y^{(e)\prime}, \tau) = \mathcal{S}(\tau), \quad y^{(e)\prime} \in \sigma^{(e)}, \tau > 0,$$
$$\mathcal{V}(y^{(e)\prime}, \tau)|_{\partial\sigma^{(e)}} = 0, \tau > 0, \mathcal{V}(y^{(e)\prime}, 0) = 0, \quad y^{(e)\prime} \in \sigma^{(e)},$$

and denote $L^{(e)}\mathcal{S}(\tau) = \int_{\sigma^{(e)}} \mathcal{V}(y^{(e)\prime}, \tau) dy^{(e)\prime}$.

Consider the following problem set on the graph $\mathcal{B}$. Let $\hat{T} > 0$. Given functions $\Psi_l \in H_0^1(0, +\infty)$, $l = 1, ..., N$, and functions $F^{(e_i)} \in H_0^1(0, +\infty; H^1(\mathcal{B}))$, $i = 1, ..., M$, find a function $p \in H^1(0, \hat{T}; H^1(\mathcal{B}))$ such that equations

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_n^{(e)}}\Big(L^{(e)} \frac{\partial p}{\partial x_n^{(e)}}(x_n^{(e)}, \tau)\Big) &= F^{(e)}, \quad x_n^{(e)} \in (0, |e|), \\ -\sum_{e: O_l \in e} \Big(L^{(e)} \frac{\partial p}{\partial x_n^{(e)}}\Big)(0, \tau) &= \Psi_l(\tau), \quad l = 1, ..., N_1, \\ -\Big(L^{(e)} \frac{\partial \hat{p}^{(e)}}{\partial x_n^{(e)}}\Big)(0, \tau) &= \Psi_l(\tau), \quad l = N_1 + 1, ..., N, \end{aligned} \tag{1}$$

hold for all $t \in (0, \hat{T})$ and for all edges $e = e_i$, $i = 1, ..., M$, i.e. the first equation holds on every edge e of the graph, the second equation holds at every node and the sum is taken over all edges of the bundle $\mathcal{B}^{(l)}$, the third equation holds at every vertex O_l. In conditions $(1)_2$ and $(1)_3$ the local coordinate system has the origin O_l.

This problem describes the one-dimensional flow in a pipe-wise network. Here p stands for the macroscopic pressure and the right-hand sides describe given sources distributed in the edges or concentrated at the nodes and vertices of the graph. The pressure is supposed to be continuous on the graph $\mathcal{B}$.

Theorem 1. *Let $\Psi_l \in H_0^1(0, +\infty)$, $l = 1, ..., N$, and $F^{(e_i)} \in H_0^1(0, +\infty; H^1(\mathcal{B}))$, $i = 1, ..., M$. Problem* (1) *admits a unique solution $p \in H^1(0, \hat{T}; H^1(\mathcal{B}))$*

vanishing at the vertex O_N if and only if

$$\sum_{i=1}^{M} \int_0^{|e_i|} (F^{(e_i)})_\tau dx_n^{(e_i)} d\tau + \sum_{l=1}^{N} \int_0^{\hat{T}} (\Psi_l)_\tau(\tau) = 0$$

for almost all $\tau \in (0, \hat{T})$.

[1] G.P. Panasenko, Asymptotic expansion of the solution of Navier-Stokes equation in a tube structure, *C.R.Acad.Sci.Paris*, **326**, Série IIb, 1998, 867-872.

Complicated attracting sets in a system of nonlinear oscillators coupled via movable common base

E.V. Pankratova, **V.N. Belykh**

Volga State Academy of Water Transportation, Nizhny Novgorod, Russia

e-mail: pankratova@vgavt-nn.ru

Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russia

We consider a system of coupled differential equations that models the behavior of oscillators mounted via springs on a movable common base (with taking into account friction losses) [1]. In the case of n oscillators the considered $2(n+1)$-dimensional system has 3^n equilibrium points $O_j^l(\mathbf{x}_j^l, \mathbf{z}_0)$, $\mathbf{x}_j^l$ is n-dimensional vector of oscillators' displacements, $j = \overline{1,n}$, $l = 0, 1, 2$, and $\mathbf{z}_0$ is $(n+2)$-dimensional null-vector. Notice that all of the points $O_j^l(\mathbf{x}_j^l, \mathbf{z}_0)$ are of saddle type.

In this work we focus on two particular cases with $n = 1$ and $n = 2$ and study the dynamical changes with the increase of coupling parameter. We show that the coupling mediated by the moving base results in the emergence of various dynamical regimes of behavior including periodic, quasi-periodic and chaotic oscillations of subsystems. By numerical simulations we show that in a certain region of parameters $\Psi = \Psi(a, b, \ldots)$ co-existence of a large number of chaotic and non-chaotic attractors is observed. Notice, that in this multi-stable state the structure of the phase space division represents mixed basins of the attracting sub-sets (basins of co-existing attractors) and domains of initial points leading trajectories to escape to infinity [2]. We show that part of the saddle points within the region Ψ satisfy the Shilnikov condition, and, therefore, the emergence of the complicated multi-stable regime here displays the development of Shilnikov chaos [3, 4].

This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 12-01-00694 and 14-02-31727).

[1] V.N. Belykh, E.V. Pankratova, A. Yu. Pogromsky, H. Nijmeijer, *Proceedings of the 6th EUROMECH Conference (ENOC 2008)* , Saint Petersburg, Russia, 2008.

[2] V.N. Belykh, E.V. Pankratova, Int. J. Bif. and Chaos, in press, 2014.

[3] L.P. Shilnikov, Sov. Math. Dokl., **6**, 163 (1965).

[4] L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, *Shilnikov bifurcation.* Scholarpedia, **2**(8): 1891 (2007).

Invariant solutions and optimal system of subalgebras some pseudoparabolic equation

A.V. Panov
Chelyabinsk State University, Russia
e-mail: gjd@bk.ru

Partial differential equation

$$u_t - u_{txx} = u^{-3}$$

is considered. Symmetry group [1] of this equation was found and its Lie algebra has basis [2]

$$Y_1 = \partial_t,\ Y_2 = t\partial_t + \frac{u}{4}\partial_u,\ Y_3 = \partial_x,$$

$$Y_4 = \frac{1}{2}(e^{2x}\partial_x + e^{2x}u\partial_u),\ Y_5 = \frac{1}{2}(e^{-2x}\partial_x - e^{-2x}u\partial_u).$$

Table of commutators is

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1	0	Y_1	0	0	0
Y_2	$-Y_1$	0	0	0	0
Y_3	0	0	0	$2Y_4$	$-2Y_5$
Y_4	0	0	$-2Y_4$	0	$-Y_3$
Y_5	0	0	$2Y_5$	Y_3	0

Optimal system of subalgebras [3] is constructed for this algebra. Invariant solutions of equation are found for one-dimensional subalgebras.

[1] L.V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations.* Nauka, Moscow, 1978.

[2] A.V. Panov, Ufa Mathematical Journal, **5**,4, 105–115 (2013).

[3] L.V. Ovsyannikov, Doklady Mathematics, **48**, 3, 645–649 (1994).

Showalter problem for a class of degenerate semilinear equations of a high order

M.V. Plekhanova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: mariner79@mail.ru

Let $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ be Banach spaces, operator $L : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ be linear and continuous, $\ker L \neq \{0\}$, an operator M be linear, closed and densely defined on D_M in $\mathfrak{X}$, X be an open set in $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, an operator $N : X \to \mathfrak{Y}$ be nonlinear. In the case of (L,p)-bounded operator M [1] we have direct sums $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$ with corresponding projectors P and Q. By M_k (respectively, L_k) we denote the restriction of operator M (respectively, L) to $D_{M_k} = \mathfrak{X}^k \cap D_M$ (respectively, $\mathfrak{X}^k$), $k = 0, 1$. Put $H = M_0^{-1} L_0$, $V = X \cap (\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^1)$.

For $m \in \mathbb{N}$ consider the problem

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t)), \tag{1}$$

$$P(x^{(k)}(t_0) - x_k) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2}$$

A solution of the problem (1), (2) on $[t_0, t_1]$ is a function $x \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$, satisfying condition (2), such that for any $t \in [t_0, t_1]$ we have $(t, x(t)) \in X$, $x(t) \in D_M$ and equality (1) is valid.

Various initial boundary value problems for mathematical physics systems of equations can be reduced to the problem (1), (2). Using the approach of the paper [2] for the first order degenerate differential equation we prove next theorem on unique solvability of the problem (1), (2).

The work is supported by the grant 14-01-31125 of Russian Foundation for Basic Research.

Theorem 1. *Let $p \in \mathbb{N}_0$, an operator M be (L,p)-bounded, set X be open in $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, V be open in $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^1$, for all $(t, x) \in X$, such that $(t, Px) \in X$, the conditions $N(t, x) = N(t, Px)$, $N \in C^{mp}(V; \mathfrak{Y})$, $(I - Q)N \in C^{m(p+1)}(V; \mathfrak{Y})$ be satisfied, and an operator $QN : V \to \mathfrak{Y}$ be locally Lipschitz continuous with respect to x. Then for any pair $(t_0, x_0) \in V$ there exists $t_1 > t_0$, such that the problem (1), (2) has a unique solution $x \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$.*

[1] G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* VSP, Utrecht, Boston, 2003.

[2] V.E. Fedorov, P.N. Davydov, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **19**, no 4, 267–278 (2013).

Асимптотика собственных значений краевой задачи для оператора Лапласа в области с узкой щелью

Е.Ю. Постникова
Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
e-mail: liory@bk.ru

Рассматривается асимптотика собственных значений краевой задачи для оператора Лапласа в двумерной области с узкой щелью, ширина которой является малым параметром. На границе узкой щели задаются краевые условия третьего рода. Построено асимптотическое разложение собственного значения возмущённой задачи, сходящейся к простому собственному значению предельной задачи методом согласования асимптотических разложений. Согласно этому методу построение внешнего асимптотического разложения постепенно «исправляется» внутренним.

Universal Transport in Topological Insulators

A.P. Protogenov, **V.A. Verbus, E.V. Chulkov**
Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
e-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru
Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
Departamento de Física de Materiales, Facultad de Ciencias Químicas,
Uviversidad del País Vasco, San Sebastián/Donostia, Spain
Tomsk State University, Tomsk 634050, Russia

A topological insulator is a quantum phase of matter with gapless electron states on the surface and gapped ones, in the bulk. In two-dimensional systems, conducting electron states propagate along the edge of the topological insulator. These states have a linear Dirac dispersion and spin locked to the momentum [1, 2, 3]. In the talk, we will consider the universality of the transport characteristics in two-dimensional topological insulators.

It is convenient to use the ballistic Landauer-Bütticker approach [4] writing the current I_i, injected through the terminal i into a sample as

$$I_i = \frac{e^2}{h}\sum_{j=1}^{N}(T_{ji}V_i - T_{ij}V_j)\ . \qquad (1)$$

Here, V_j is the voltage on the terminal j, e is the electron charge, h is the Planck constant, and h/e^2 is the resistance unit. We will equate it further to unity. T_{ij} is the matrix element of transmission from the terminal i to the terminal j, and N is the total number of terminals. It plays a role of the tuning parameter. The edge electron modes in topological insulators propagate in two directions. We will put that the transmission coefficients between neighboring terminals are equal

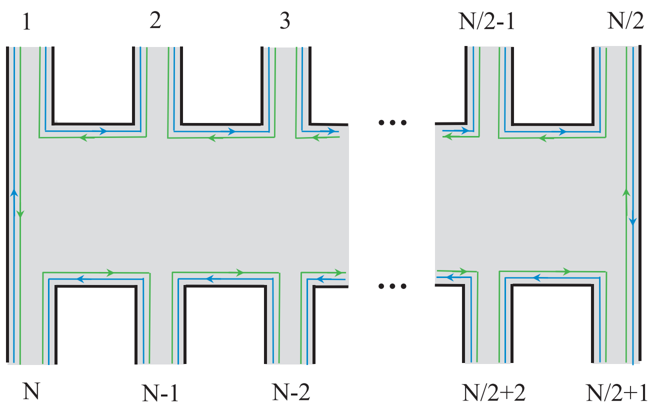

Рис. 1: Distribution of edge states in a two-dimensional N-terminal insulator.

to unity: $T_{i+1,i} = T_{i,i+1} = 1$ and other probabilities are equal to zero. The N-terminal scheme implies the use of the periodic boundary conditions $T_{N+1,N} = T_{1,N}$, $T_{N,N+1} = T_{N,1}$ in the both directions of the edge state propagation. The labels of terminals, whose voltages we will measure, will contain information about the influence of the edge state current between the terminals, through which the current flows about the voltage distribution on other terminals.

Let the current I_{1N} flows through terminals 1 and N (see Fig. 1) and the voltage be measured on all other terminals. In this case, the equation which determines the voltage on the contacts, has the form

$$A\,V = I\ , \tag{2}$$

where the matrix A equals $A_{ij} = 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i,1}\,\delta_{j,N} - \delta_{i,N}\,\delta_{j,1}$, δ_{ij} is the Kronecker delta, $1 \leq i,j \leq N$, $V = (V_1, V_2, \ldots V_{N-1}, V_N)$, and $I = I_{1N}(1, 0, \ldots 0, -1)$. We are interested in the difference between the voltage on terminals. Since the vector V is invariant with respect to the constant value shift, we may assume that $V_N = 0$.

For arbitrary N, the solution of Eq.(2) has the form $V_i = I_{1N}\left(1 - \frac{i}{N}\right)$. Therefore, the resistance $(V_1 - V_N)/I_{1N}$ between terminals 1 and N equals $R_{1N,1N} = (N-1)/N$. The nonlocal resistance $R_{kl,ij=}(V_i - V_j)/I_{kl}$ at $k = 1, l = N$ when measuring the voltage between the terminals i and j is

$$R_{1N,ij} = \frac{j-i}{N}\ . \tag{3}$$

To find the voltage distribution in the situation, when the current flows from the terminal 1 to the terminal k, in the right-hand side of Eq.(2,) we have to use the equation for the current in the form of $I = I_{1k}(1, 0, \cdots -1, \ldots 0)$. Here, -1 is located in the k place. The exact solution of Eq.(2) in this general case has the form

$$V_i = I_{1k}\left(1 - \frac{i}{N}(1 - k + N)\right)\ , \tag{4}$$

if $1 \leq i \leq k$, and

$$V_i = I_{1k}(1 - \frac{i}{N})(1 - k) \ , \tag{5}$$

if $k \leq i \leq N$. These assignments of the current and voltage terminals determine the following values of the resistance

$$R_{1k,ij} = \begin{cases} \frac{j-i}{N}\,(1-k+N)\,, & 1 \leq i,j \leq k, \\ \frac{j-i}{N}\,(1-k)\,, & k \leq i,j \leq N, \\ \frac{j-i}{N}\,(1-k)+(k-i), & 1 \leq i \leq k,\ k \leq j \leq N\ . \end{cases} \tag{6}$$

One can easy verify that after the interchange of the current $(1k)$ and voltage (ij) probe indices and the shifts $k \to j-i+1, j \to k-i+1, i \to N-i+2$ these equations satisfy the Onsager-Casimir symmetry relations $R_{mn,kl} = R_{kl,mn}$ [5] for the nonlocal resistances $R_{mn,kl}$. We would also like to mention the fact that topological universality of the ballistic transport due to the edge states under ideal conditions is determined by the topological properties of the electron quantum bulk states. Therefore, the considered phenomenon in a trivial insulator is absent.

We focused on the universal exhibition of topological order in the transport properties of ideal two-dimensional topological insulators in the most representative form. The study of the transport characteristics of the topological insulator SmB_6 revealed [6] that in the three-dimensional case the transport properties significantly depend on the geometry of samples and terminal assignments. A deviation from the universal behavior takes place also in two-dimensional systems. It occurs due to metal droplets inside real contacts. This phenomenon can be described in terms of an additional terminal. The effect of this and other factors such as a finite width of the terminal, reflections from the internal interfaces, and other conditions on amplitudes of the transitions between current and voltage terminals has been studied in Refs. [7, 8, 9, 10].

To conclude, we have described the universal distribution of the resistances studying the edge state transport in the two-dimensional topological insulators in the ballistic transport regime.

The authors are grateful to C. L. Kane, M. Büttiker and S. V. Eremeev for useful discussions. This work was supported in part by the RFBR Grant Nos. 13-02-12110 and 14-02-00174.

[1] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).

[2] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).

[3] J. E. Moore, Nature **464**, 194 (2010).

[4] M. Büttiker, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988).

[5] M. Büttiker, IBM J. Res. Dev. **32**, 317 (1988).

[6] J. Botimer, D.J. Kim, S. Thomas, T. Grant, Z. Fisk, and Jing Xia, Robust Surface Hall Effect and Nonlocal Transport in SmB_6: Indication for an Ideal Topological Insulator, arXiv:1211.6769.

[7] A. Roth, C. Brüne, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, J. Maciejko, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, Science **325**, 294 (2009).

[8] J. Wang, B. Lian, H. Zhang, S.-C. Zhang, Anomalous Edge Transport in the Quantum Anomalous Hall State, arXiv: 1306.1817

[9] C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, E. M. Hankiewicz, L. W. Molenkamp, J. Maciejko, X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Nature Physics **8**, 485 (2012) and the Supplementary Information.

[10] C. Brüne, A. Roth, E. G. Novil, M. König, H. Buhmann, E. M. Hankiewicz, W. Hanke, J. Sinova and L. W. Molenkamp, Nature Physics **6**, 448 (2010) and the Supplementary Information.

О постоянной Фридрихса мембраны, закрепленной на малом участке границы

С.В. Репьевский, А.Р. Минниахметов , Е.А. Шишкина
ЧелГУ, Челябинск, Россия, e-mail: repyevsky@gmail.com
БашГУ, Уфа, Россия, e-mail: minaidar87@mail.ru
БашГПУ им. Акумуллы, Уфа, Россия, e-mail:sun-kittenn@yandex.ru

Пусть Ω – единичный круг с центром в начале координат. Обозначим через $W^1_{2,0}(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ — подмножество функций из $W^1_2(\Omega)$ равных нулю на $\gamma_\varepsilon = \{(r,\varphi) \in \partial\Omega : (-\varepsilon < \varphi < \varepsilon)\}$, где (r,φ) — полярные координаты, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Величина

$$C(\Omega,\gamma_\varepsilon) = \sup_{u\in W^1_{2,0}(\Omega,\gamma_\varepsilon)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}} \right\}$$

называется постоянной Фридрихса.

Методом согласования асимптотических разложений [1] доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема. *При $\varepsilon \to 0$ справедливо равенство*

$$C(\Omega,\gamma_\varepsilon) = \ln\varepsilon\, K\left(\frac{1}{\ln\varepsilon}\right) + O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln\varepsilon\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $K(z)$ – аналитическая в нуле функция, причем, $K(0) = -1$.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00259-а). Работа третьего автора поддержана РФФИ (проект № 12-01-00445-а).

[1] Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач // М.: Наука, 1989.*

Analytic family of solution operators for degenerate fractional differential equation

E.A. Romanova, V.E. Fedorov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: linux_21@mail.ru, kar@csu.ru

Let $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{V}$ be Banach spaces, $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ and $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ be linear closed operators with dense domains D_L and D_M. Denote $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. For $\alpha > 0$ consider the equation

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

A fuction $u \in C(\mathbb{R}_+; D_M) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ is called a solution of equation (1) if there exists Caputo derivative [1] $D_t^\alpha Lu$ and for all $t \in \mathbb{R}_+$ equality (1) is fulfilled.

Operators family $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ is called solution operators family for equation (1), if for every $u_0 \in \mathfrak{U}$ function $u(t) = U(t)u_0$ is a solution of the equation.

For $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pair of operators (L, M) belong to the class $\mathcal{A}^\alpha(\theta, a, p)$, if

(i) there exists $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ and $\theta \in (\pi/2, \pi)$, such that the inclusion $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$ holds for all $\lambda \in S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\}$;

(ii) there exists $K \in \mathbb{R}_+$, such that

$$\max\left\{\left\|\prod_{k=0}^{p} R^L_{\mu_k^\alpha}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \left\|\prod_{k=0}^{p} L^L_{\mu_k^\alpha}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k^{\alpha-1}(\mu_k - a)|}$$

for all $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$.

In the case of continuous operator $L^{-1} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ we have $(L, M) \in \mathcal{A}^\alpha(\theta, a, 0)$, iff $L^{-1}M \in \mathcal{A}^\alpha(\theta, a)$ (see [1]).

Theorem 1. *Let* $(L, M) \in \mathcal{A}^\alpha(\theta, a, p)$, $\gamma = \partial S^L_{a,\theta}(M) + 1$. *Then operators*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu^{\alpha-1}(\mu^\alpha L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu,\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+\,,$$

form an analytic family of solution operators for the equation (1).

[1] E.G. Bajlekova, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces.* PhD thesis, Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.

О численном решении некоторого нелинейного трехмерного уравнения Клейна-Гордона

Салимов Р.К., *Екомасов Е.Г.*
Башкирский государственный университет, Россия
e-mail: salemsrk@yandex.ru

Изучение нелинейных уравнений Клейна-Гордона $u_{xx} - u_{tt} = F(u)$ для разного вида функций $F(u)$ играет важную роль в исследовании солитонов. Эти уравнения легко обобщить на пространства более высокой размерности, например $\bigtriangledown^2 u - u_{tt} = F(u)$,или для сферической симметрии $u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = F(u)$. Как известно, не существует стационарных решений Лоренц-инвариантных полевых уравнений для пространственной размерности более одной [1, 3]. Однако это не исключает зависящих от времени осциллирующих решений.

Нами численно исследовались решения уравнений вида $u_{rr}+2\frac{u_r}{r}-u_{tt} = u^{\frac{m}{n}}$ и с правой частью вида $F(u) = sin(u) + u^{\frac{m}{n}}$ (в частности $m/n = 1/3, m/n = 3/5$). При этом были получены интересные долгоживущие бризероподобные решения, аналогичные пульсонам уравнения синус Гордон[2].

Для численного исследования подобных уравнений разностные схемы не совсем удобны, поэтому нами использовались спектральные методы. В качестве функций для разложения в ряд использовались тригонометрические функции и собственные функции гармонического квантового осциллятора.

Уравнения с правой частью вида $u^{\frac{m}{n}}$ имеют симметрии растяжения по r, t и сдвига по времени и могут быть приведены к одной переменой. Частное решение редуцированного уравнения исследовалось также численно, но его решения не имеют локализованный вид. Далее численно исследовались уравнения вида $u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = u^{\frac{m}{n}}(u_r^2 - u_t^2)^{\frac{k}{s}}$, которые также имеют бризероподобные решения и симметрии растяжения и сдвига по времени.

[1] *Derrick G.* Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles // J. Math.Phys., 1964.№. 5.P.1252–4.

[2] *Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г.* Динамика сферически-симметричных пульсонов большой амплитуды // Письма в ЖЭТФ., 1977.Т. 25. №. 2.С. 120–123.

[3] *Маханьков В.Г.* Солитоны и численный эксперимент // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14 №. 1.С. 124–177.

Второй член асимптотики решения уравнения Хамера

А.А. Соловьев
Челябинский государственный университет

Найден второй член асимптотики решения начальной задачи для уравнения Хамера. Доказывается, что он кратен второму члену асимптотики решения начальной задачи для уравнения Бюргерса.

Nonlocal solvability of hydrodynamical type systems of equations

V.E. Fedorov, P.N. Davydov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: kar@csu.ru, davydov@csu.ru

Denote $\underset{1}{v} = (v_{x_1}, v_{x_2}, \dots, v_{x_n})$, $\underset{2}{v} = (v_{x_1x_1}, v_{x_1x_2}, \dots, v_{x_nx_n})$, fix $T > 0$. Using the approach of [1] we will research the unique nonlocal solvability of the initial boundary value problem

$$(1-\chi\Delta)v_t = \nu\Delta v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v + G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v+ \\ \sum_{i=1}^{n} G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j} - r, \ \ (x,t)\in\Omega\times[t_0,t_0+T], \tag{1}$$

$$\nabla\cdot v = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times[t_0,t_0+T], \tag{2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[t_0,t_0+T], \tag{3}$$

$$v(x,t_0) = v_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{4}$$

Here $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ is a bounded region with a smooth boundary $\partial\Omega$, $n\le 4$. Equations of the form (1), (2) arise in the dynamics of viscoelastic fluids. Vector functions $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ of velocity, and $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ of pressure gradient are unknown. Vector function $q = (q^1, \dots, q^n)$ and functionals G, G^i, G^{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, depending on t, v, $\underset{1}{v}$, $\underset{2}{v}$ are set, moreover, G, G^i, $G^{ij} : \mathbb{R}\times\mathbb{L}_2^{n+n^2+n^3}\to\mathbb{R}$, where $\mathbb{L}_2^m$ is a Cartesian power of the space $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$. For example, G, G^i, G^{ij} may be functions of integrals of v, $\underset{1}{v}$, $\underset{2}{v}$ over Ω or its subregions. Also they may be functions of values of v in the fixed points of Ω.

Denote $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. The closure of $\mathfrak{L} = \{v\in(C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla\cdot v = 0\}$ in $\mathbb{L}_2$ is denoted by $\mathbb{H}_\sigma$, the closure in $\mathbb{H}^1$ will be written as $\mathbb{H}_\sigma^1$. Put $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$. Denote the orthogonal complement to $\mathbb{H}_\sigma$ in $\mathbb{L}_2$ as $\mathbb{H}_\pi$.

Main result of this report is a theorem on conditions for the existence of an unique solution $v\in C^1([t_0,t_0+T];\mathbb{H}_\sigma^2)$, $r\in C^1([t_0,t_0+T];\mathbb{H}_\sigma^2)$ of the problem (1)–(4) for every $v_0\in\mathbb{H}_\sigma^2$ with fixed $T>0$ independent of v_0.

The work is partially supported by the grant 14-01-31125 of Russian Foundation for Basic Research.

[1] V.E. Fedorov, P.N. Davydov, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **19**, no 4, 267–278 (2013).

Group analysis of an equation describing a distribution of defects in solids

N.V.Filin
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: nikolay_filin@inbox.ru

In this work simmetries [1] of an equation

$$c_{tt}(t,x) = ac_{xx}(t,x) + g(c(t,x))c_x(t,x), \quad a \neq 0, \tag{1}$$

were studied. Lie algebra of the equivalence transformations group was found. For example, in the case of $g'(c) \neq 0$ algebra has a basis of the form

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial c}, \quad Y_4 = c\frac{\partial}{\partial c},$$

$$Y_5 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - g\frac{\partial}{\partial g}.$$

Nonlinear specifications of g were found corresponding to the additional symmetries. A search of invariant solutions or submodels for equation (1) was done. For example, for the function $g(c) = e^c$ we have a submodel

$$(s^2 - as^4)\varphi''(s) + \left(s^2\varphi(s)^b - \frac{2}{b}s - 2as^3\right)\varphi'(s) + \frac{1+b}{b^2}\varphi(s) = 0$$

of equation (1), then corresponding invariant solution will be of the form $c(t,x) = \varphi(s)t^{-\frac{1}{b}}$, where $s = t/x$. For the specification $g(c) = c^b$ a submodel

$$(s^2 - as^4)\varphi''(s) + (s^2 e^{\varphi(s)} - 2as^3)\varphi'(s) + 1 = 0$$

was obtained, where $s = t/x$, and the invariant solution $c(t,x)$ has a form $c(t,x) = -\ln t + \varphi(t/x)$.

[1] L.V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations.* Nauka, Moscow, 1978.

Functional invariants of germs of two-dimensional resonant maps

P.A.Fomina, S.M.Voronin
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: fominapa@gmail.com, voron@csu.ru

We consider germs of two-dimensional holomorphisms with fixed point 0 and resonant linear part of Siegel type. It is easy to verify that formal classification of such (typical) germs has finite number of numeric moduli. Let f_0 be one of the corresponding formal normal forms. Two germs are *strongly equivalent* if there is a local transformation, conjugating them and close to identity. Denote by $\mathcal{F}$ a class of strong formal equivalency of f_0. For $f \in \mathcal{F}$, call *cut neighborhood* a neighborhood of 0 with deleted invariant hyperbolic submanifolds of f. An atlas τ is *normalizing atlas* on a cut neighborhood for f, if in its charts f coincides with f_0, and the formal strongly-normalizing transformation of f is asymptotic series for all the charts of τ.

Theorem. A normalizing atlas exists for any $f \in \mathcal{F}$.

Let us consider collection t_f of the transition functions of a normalizing atlas τ_f of $f \in \mathcal{F}$. We show that:

the collection t_f are uniquely defined by a more simple collection (modulus) $m_f = (\Phi_f, \Psi_f, \psi_f)$ from a (exactly described) functional space $\mathcal{M}$;

two germs of $\mathcal{F}$ are strongly analytically equivalent iff its moduli coincide;

(realization) any $m \in \mathcal{M}$ is a modulus of some $f \in \mathcal{F}$.

Applications. We can suppose that f_0 is 1-time shift of a formal normal form from [4] or [5]. Then: 1) $f \in \mathcal{F}$ can be included in a flow iff Φ-component of its modulus m_f is trivial. Moreover, in this case Ψ-component of m_f is Martinet-Ramis modulus (see [1, 2]), and ψ-component is modulus Grinchii [4] or Teyssier-Mescheryakovoi [3, 5] of the generator of the flow . 2) It is possible to show that (for semihyperbolic germ f) existence of a central manifold C_f is equivalent to triviality of one of the components of m_f. In this case, the restriction of f to C_f is a parabolic germ, and its Ecalle-Voronin moduli [6] are restrictions of remaining components of m_f.

The work is partially supported by the grant 13-01-00512a of Russian Foundation for Basic Research.

[1] J. Martinet, J.P. Ramis, Ann. Sci. École norm. supér., **16**, 4 (1983).

[2] J.Martinet, J.P.Ramis, Inst. Hautes 'Etudes Sci.Publ.Math. , **55** (1982).

[3] L.Teyssier, J. Dynam. Control Systems , **10**, 4 (2004).

[4] S.M. Voronin, A.A.Grinchii, J. Dynam. Control Systems, **2**, 1 (1996).

[5] S.M.Voronin, A.Yu. Mescheryakova, Trudy MMO, **66** (2005).

[6] S.M.Voronin, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **15**, 1 (1981).

Asymptotics of the solution of a nonlinear initial value problem for the ODE system of chemical kinetics

O. Yu. Khachay
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
e-mail: khachay@yandex.ru

Differential equations of chemical kinetics are used for describing the rate of change between the molar concentrations of the reacting substances. With the introduction of the small parameter method for such equations it is possible to obtain modeling initial value problems, which could be implemented in practice, and then applying the method of matched asymptotic expansions [1] to construct the asymptotic behavior of their solutions. By analyzing the parameters on which these decisions are dependent, it is possible to solve the inverse problem of chemical kinetics – to find the coefficients of the reaction rate.

The report considers the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations (ODE) with a small parameter describing the kinetics of the initial stage of oxidation of organic matter with molecular oxygen in the presence of an inhibitor, the initial chemical statement of the problem coincides with the oxidation kinetic problem considered the publication [2] up to the choice of values of coefficients. The difference lies in the change of this choice, which leads to another occurrence of various degrees a small parameter in the system of ODE under consideration.

[1] A. M. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[2] L. A. Kalyakin, A. M. Il'in, S. I. Maslennikov, *The mathching method for asymptotic solution in chemical physics problems* Adv. in Chem. Phys., **47** (1997), P.1–46.

Резольвентная сходимость для задачи с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле

Т.Ф. Шарапов
Россия, г. Уфа, ФГБОУ ВПО БГПУ им. М. Акмуллы
e-mail: stf0804@mail.ru

Рассматривается эллиптический оператор в многомерной области с частой сменой краевых условий в случае, когда усредненный оператор содержит краевое условие Дирихле. Не предполагается, что область ограничена. На границе области выделяется набор подмножеств. На этих подмножествах задается граничное условие Дирихле, на оставшейся части границы - условие

Неймана. Исследуется поведение решений такой краевой задачи, когда число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремится к нулю. Возможны также постановки задач, в которых описанная смена краевых условий задается не на всей границе, а лишь на фиксированной ее части, в то время как на остальной части границы задается одно граничное условие Дирихле. Доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному. Получены оценки скорости сходимости нормы оператора.

Submodels of the thermal motion of a gas

Yu. A. Chirkunov, E. O. Pikmullina
Institute of Computational Technologies, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
e-mail: chr101@mail.ru
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia
e-mail: elena187@list.ru

Systematic study of gas dynamics submodels was launched in the proposed by academician L. V. Ovsyannikov project called Submodels. In the study, the submodel of thermal motion of a gas obtained unlucky number 13. This submodel (or rather one of its invariant solutions) has been used previously by academician L. I. Sedov to solve the problem of an intense explosion.

In this paper it is shown, that the system of equations of thermal motion of a gas with four independent variables is converted to an equivalent nonlinear reduced system with three independent variables describing the trajectory of the gas particles. The simplest representatives of all significantly different (not limited by point transformations) invariant submodels of rank 0 and 1 are found for the reduced system of differential equations. Some boundary value problems for the system have been studied by means of these invariant submodels and production solution formulas. Thus, a description of gas particles trajectories obtained in case of, generally speaking, not invariant thermal motion, i.e. at much more general gas flow pattern.

The results obtained in this paper may be used in the analysis of the thermal motion of a gas in strongly rarefied space.

[1] Yu.A. Chirkunov, S. V. Habirov, Elements of symmetry analysis of differential equtions of continuum mechanics. Novosibirsk, NSTU, **659**, 2012.

Распределение полюсов решений уравнения Пенлеве-4 с бесконечным числом полюсов

Щелконогов А.А.
ЧелГУ, Челябинск, Россия
e-mail: alexey91-91@ya.ru

В работе исследуется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка Пенлеве-4:

$$u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2(x^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{2u}. \tag{1}$$

Ранее было исследовано поведение полюсов рациональных решений Пенлеве-4. Теперь осуществлен предельный переход к решениям с бесконечным числом полюсов. Для этого был использован метод скейлингового предела. Таким образом решение уравнения Пенлеве-4 сводится к некоторой эллиптической функции $r(t)$, являющейся решением уравнения:

$$(r')^2 = r^4 + 4t_0 r^3 + 2(t_0^2 - 4)r^2 + Cr, \tag{2}$$

где t_0 и C - константы. В итоге полюса решений в предельном случае совпадают с полюсами $r(t)$. Чтобы определить распределение полюсов $r(t)$, эллиптическая функция была приведена к нормальной форме Вейерштрасса.

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции. Том 3*, Москва, 1967

[2] И.Р. Итс, А.А. Капаев, В.Ю. Новокшенов, А.С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, Москва, Ижевск, 2005

Содержание