Российская академия наук
Институт математики с вычислительным
центром УНЦ РАН

Международная конференция

"Нелинейные уравнения и комплексный анализ"

18-22 марта 2013 г., Уфа

Тезисы докладов

Уфа

2013

Организационный комитет

чл.-корр. РАН В.В. Напалков (председатель, Уфа)

д.ф.-м.н. А.М. Гайсин (заместитель председателя, Уфа)

к.ф.-м.н. Р.Н. Гарифуллин (секретарь, Уфа)

д.ф.-м.н. Л.А. Калякин (Уфа)

д.ф.-м.н. А.В. Михайлов (Лидс)

д.ф.-м.н. И.Х. Мусин (Уфа)

д.ф.-м.н. В.Ю. Новокшенов (заместитель председателя, Уфа)

Финансовая поддержка

Российский фонд фундаментальных исследований проект №13-01-06009-г.

Содержание

Coding of complex nonlinear states for Nonlinear Schrodinger Equation with periodic potential

G.L.Alfimov, *P.P.Kizin*
National Research University of Electronic Technology "MIET", Zelenograd, Moscow, Russia
e-mail: gamekoff@yandex.ru

The Nonlinear Schrodinger Equation with additional periodic potential $U(x)$,

$$\begin{aligned} i\psi_t &= -\psi_{xx} + U(x)\psi + \sigma|\psi|^2\psi, \\ \sigma &= \pm 1, \quad U(x) = U(x+\pi) \end{aligned} \tag{1}$$

arises in many physical applications including nonlinear optics and theory of Bose-Einstein condensation. Its complex nonlinear states are of the form

$$\psi(x,t) = u(x)\exp\{-i(\omega t + \phi(x))\}$$

The equation for the real amplitude $u(x)$ is

$$u_{xx} + (\omega - U(x))u - \sigma u^3 - \frac{C^2}{u^3} = 0, \tag{2}$$

where C is an arbitrary real constant. The phase $\phi(x)$ can be found from the relation $u^2\phi_x = C$.

We study numerically bounded solutions of Eq.(2) for the case $\sigma = 1$ ("defocusing" nonlinearity) and cosine potential $U(x) = A\cos 2x$. We make use of a fact that the "most part" of the solutions of (2) collapse (i.e. tend to infinity) at some finite point $x_0 \in \mathbb{R}$. Therefore, the set of bounded solutions is quite scanty. We give a numerical evidence that for large areas in the space of parameters (ω, A, C) all the non-collapsing solutions can be coded by sequences of "letters" of some N-symbol alphabet, where N depends of the parameters (ω, A, C).

Discrete spectrum of nonlinear modes in problem with singular perturbation

G.L.Alfimov, *E.V.Medvedeva*, **D.E.Pelinovsky**
National Research University of Electronic Technology "MIET", Zelenograd, Moscow, Russia
e-mail: elinamedvedeva87@gmail.com;
Department of Mathematics, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada,
Department of Applied Mathematics, R.E.Alexeev Technical University of Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod, Russia

We discuss a hypothesis on existence of a countable set of heteroclinic orbits connecting saddle-center points (also called "embedded solitons" in some applications). In short, it can be described as follows.

Let a system of differential equations

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{xx} &= F(\mathbf{u}, v), \\ \varepsilon^2 v_{xx} &= G(\mathbf{u}, v) \end{aligned}$$

where $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, $v \in \mathbb{R}$ depend on external parameter ε and $\varepsilon \ll 1$. Assume that the system has a heteroclinic orbit for $\varepsilon = 0$ and that the corresponding solution $(\mathbf{u}(x), v(x))$ can be analytically extended into upper complex half-plane with the closest to the real axis singularities given by a pair of points $x = \pm\alpha + i\beta$. Then there is a countable set of heteroclinic orbits for the singularly perturbed system corresponding to the discrete set of values ε, $\varepsilon = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ such that $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$ and

$$\varepsilon_n \sim \frac{\alpha}{\pi/2 - \varphi_0 + \pi n}, \quad n = 0, 1, 2...,$$

where φ_0 is a constant. We illustrate this statement by numerical results for several nonlinear problems of various physical origin.

Numerical study of singularities for quasilinear ODE of forth order

G.L.Alfimov, **A.A.Chernyavsky**
National Research University of Electronic Technology "MIET", Zelenograd, Moscow, Russia
e-mail: galfimov@yahoo.com.

We study the distribution of singularities in the complex plane of the solutions for model equation

$$u_{xxxx} = u^3 \tag{1}$$

Eq.(1) is quasi-homogeneous and can be reduced to the system

$$(p_1)_v = p_2 - \frac{3}{2}p_1^2 \tag{2}$$

$$(p_2)_v = p_3 - 2p_1p_2 \tag{3}$$

$$(p_3)_v = 1 - \frac{5}{2}p_1p_3 \tag{4}$$

with new independent variable $v = \int_0^x \sqrt{u(\xi)}\ d\xi$. Singular points in the complex v-plane of solutions of (2)-(4) are branching points of the third order. Asymptotically, they are arranged along straight lines and are equally spaced. The Riemann surface of this system is multi-sheeted with quite sophisticated laws of switching between the sheets when circling around a singularity.

Returning to initial Eq.(1) one gets a "natural boundary" consisting of singularities. It has a structure of fractal set of amazing appearance.

On homotopy groups of the 2-sphere

P.M. Akhmet'ev

Troitsk, Moscow region, IZMIRAN, Russia,

e-mail: pmakhmet@izmiran.ru

We discuss the following two basic results:

– The construction by V.I.Arnol'd (1989), which describes the homotopy groups $\pi_n(S^2)$, $n \geq 2$, as the homotopy groups of the space of real functions with prescribed singularities.

– The construction by J. Wu (1994), which describes the homotopy groups $\pi_n(S^2)$, $n \geq 4$, as the group of the spherical Brunnian $(n+1)$-braids modulo plane Brunnian $(n+1)$-braids.

Theorem 1 Let F be the space of functions $f : R^1 \to R^1$ with „right" boundary conditions, for which derivatives of the orders 1,2, and 3 are not degenerated simultaneously. Define the mapping $A : F \to \Omega(R^3 \setminus 0)$, by the formula $A(f) = \{x \mapsto (\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3})\}$.

The induced homomorphism $A_n : \pi_n(F) \to \pi_n(\Omega(R^3 \setminus \{0\})) \cong \pi_{n+1}(S^2)$ is an isomorphism for $n \geq 0$.

Theorem 2 There exists an exact sequence of groups, $n \geq 3$:

$$0 \to Brun_{n+3}(S^2) \to Brun_{n+2}(R^2) \to Brun_{n+2}(S^2) \to \pi_{n+1}(S^2) \to 0.$$

Theorem 1 is proved by V.I.Arnol'd (1989) for $n = 1$ (the group $\pi_2(S^2)$), by V.A.Vassiliev (1989) for $n = 2$ (the group $\pi_3(S^2)$), by Ya.M.Eliashberg and

N.M.Mishachev (1994) for $n \geq 3$, see [1] Ch. 3. Theorem 2 is proved, for example, in [3], the sequence (1.1).

New results will be presented:

–algebraic properties of Cerf's diagrams, see [2];

–an attempt by the author of applications of Theorem 2 for asymptotic invariants of random spherical braids (mostly, the case $n = 2$, which formally is not included in the theorem).

[1] V. A. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*, 2-d extended edition, Translations of Math. Monographs, 98, AMS, Providence, RI, (1994) 268 pp.

[2] P. M. Akhmet'ev, D. Repovš̃, M. Cencelj, *Some Algebraic Properties of Cerf Diagrams of One-Parameter Function Families*, Funkts. Anal. Prilozh., 39:3 (2005) 1-–13.

[3] V. G. Bardakov, R. Mikhailov, V. V. Vershinin, and J. Wu, *Brunnian braids on surfaces*, arXiv:0909.3387v2 [math.GT] 12 Apr 2010.

Об отсутствии решений степенного роста некоторых эллиптических систем

С. Байзаев

Сибайский институт (филиал) Башкирского госуниверситета, Сибай, Россия

e-mail: baisat54@rambler.ru

В докладе рассматривается обобщенная система Коши - Римана вида

$$w_{\overline{z}} + a(z)\overline{w} = 0, \tag{1}$$

где $a(z)$ - функция, определенная в области G.

Для системы (1) справедливы следующие утверждения.

1) Пусть функция $a(z)$ антианалитическая в области G и $w(z)-$ненулевое регулярное в G решение системы (1). Тогда функция $|w(z)|$ не имеет внутри области G локальных максимумов;

2) Пусть $a(z)-$ антианалитический полином степени n и $w(z)-$ненулевое регулярное во всей плоскости решение системы (1). Тогда найдутся такое число r_0 , зависящее от $a(z)$, и число c, зависящее от $w(z)$ и $a(z)$, что для любого $r \geq r_0$ имеет место соотношение

$$\max_{|z|\leq r} |w(z)| = \max_{|t|=r} |w(t)| \geq c\frac{e^{2r}}{r^{n+1}};$$

3) Пусть $a(z)-$ антианалитический полином степени n. Тогда система (1) не имеет ненулевых решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $|z|^N$ (N- целое неотрицательное число).

Отметим, что если функция $a(z)$ не является антианалитической, то утверждения 1) - 3) могут быть неверными. Например, при $a(z) = z|z|^2$ система (1) имеет решение $w(z) = e^{-|z|^4/2}$, для которого утверждения 1) - 3) перестают быть верными.

Крвевая задача для нагруженного уравнения с гиперболическим оператором

У.И. Балтаева

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

e-mail: umida baltayeva@mail.ru

Рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx} - u_{yy} - \lambda u\right) - \mu \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{0x}^{\alpha_i} u(x,0) = 0, \qquad (1)$$

где $D_{0x}^{\alpha_i}$ $-$ оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегрирования порядка α_i при $\alpha_i < 0$ и дробного дифференцирования порядка α_i при $0 < \alpha_i < 1$ и задается формулой

$$D_{0x}^{\alpha_i} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha_i)} \int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+\alpha_i}}, & \alpha_i < 0, \\ \frac{d}{dx} D_{0x}^{\alpha_i - 1} f(x), & 0 < \alpha_i < 1. \end{cases}$$

Предположим, что $\alpha_n < \alpha_{n-1} < ... < \alpha_1 = \alpha < 1$ и коэффициенты $a_i(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1)$, $\lambda, \mu -$ действительные постоянные, причем $\lambda > 0$.

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в[1], [2]. Нагруженным дифференциальным уравнениям, нагруженная часть которых содержит лищ значение искомого решения в фиксированных точках области их задания, посвящена работа[2].

Пусть D $-$ область, ограниченная характеристиками

$$AC : x + y = 0, \qquad BC : x - y = 1$$

уравнений (1) и отрезком AB оси $y = 0$.

В области D рассмотрим следующий аналог задачи Коши-Гурса для нагруженного уравнения (1)

Задача(Коши-Гурса). Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$, обладающее непрерывными производными u_x, u_y вплоть до $AB \cup AC \cup BC$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u_y(x,y)|_{AB} = \nu(x), \quad 0 \le x < 1, \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \; \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \tag{3}$$

где n – внутренняя нормаль, $\nu(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ – заданные функции, причем $2\nu(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - \psi_1'(0)$,

$$\nu(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \psi_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

$$\psi_2(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right), \psi_3(x) \in C\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap C^2\left(\frac{1}{2}, 1\right). \tag{5}$$

Теорема. Если выполнены условия (4), (5), то в области D существует единственное решение задачи Коши-Гурса.

Однозначная разрешимость поставленной задачи доказивается с помошью теории интегральних уравнений [3].

Литература

1. *Нахушев А.М.* О задаче Дарбу для одного вырождающего-ся нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // Дифф. уравнения. 1976.-Т. 12. -№ 1. -С. 103-108.

2. *Исламов Б., Балтаева У.И.* Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка. // Уфимский мат. журнал. 2011. Т 3, №3, с. 15-25. 200 с.

Функции с особенностями на отрезке

Р.А. Башмаков

Башкирский государственный университет, Россия

e-mail: bashmakov rustem@mail.ru

В вопросах, связанных с представлением аналитических функций в выпуклых областях рядами обобщенных экспонент (см. [1])

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(\lambda_n z),$$

возникают задачи об особенностях функции ассоциированной по Борелю с функцией f.

В работе приводятся необходимые и достаточные условия, при которых функция

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}}$$

будет иметь особенности на отрезке $[0,\ 1]$ вещественной оси и на отрезке $[q,\ 1]$ вещественной оси, где $q \in (0,\ 1]$ с некоторыми оценками вблизи особых точек.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358.

[1] А. Ф. Леонтьев *Представление целых функций рядами обобщенных экспонент.*//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1987. Т.172. С. 215-234.

The impact of the external magnetic field on the nanostructured film of polydiphenylenephtalide.

Yu.I. Bayanova ***N.V. Vorob'eva***
Bashkir State University, Ufa, Russia, IMCP URC RAS, Ufa, Russia
e-mail: Bayanova.uyliya@mail.ru

Sandwich heterostructures of the metal/ polydiphenylenephtalide type have been studied before in the magnetic field in connection with the revealing of huge magnetoresistance [1] The film of polydiphenylenephtalide (PDP) in the state of high conductivity is the self-organized nanostructure with complex charge motion through low-dimensional ways [2].

Therefore it must exist the direct influence of the external magnetic field on the nanostructured polymer layer. This report is dedicated to the review of the experimental evidences of such effects.

The particularities of conductivity switching are shown for the nanostructured film of PDP in the magnetic field on the non-ferromagnetic substrate.

Current-voltage characteristics (CVC) are obtained and investigated for the structure of Cu/PDP/Cu in the states of high and low conductivities. The state of conductivity of the sample was tuned by the external pressure [3].

The effect of the external magnetic field (0.35 T) normal to the current on CVC is revealed. The slope of CVC is decreased in the magnetic field for the dielectric state of the polymer film. This effect can be referred to influence of the Hall effect. The slope of CVC is increased in the magnetic field for the high-conductive state of the polymer film in spite of the Hall effect influence.

The number of the experiments performed gives evidence that the external magnetic field facilitates to the irreversible increasing of conductivity of the polymer film. The similar effect of the electroplasticity in the magnetic field was obtained also for semiconductors of silicon [4]. This effect is connected with the charge motion in the magnetic field and needs further investigations.

[1] A.N. Lachinov, N.V. Vorob'eva, A.A. Lachinov, *JETP Letters*, **84**, 604, 2006.

[2] V.M. Kornilov, A.N. Lachinov, A.F. Galiev, G.Sh. Sultanbayeva, E.R. Zhdanov, L.R. Kalimullina, *Proceedingsof the VIII International Conference вЂњAmorphous and microcrystalline semiconductorsвЂќ, S. Petersburg*, 55 (2012).

[3] A.N. Lachinov, V.M. Kornilov, T.G. Zagurenko, A.Yu. Zherebov, *JETP*, **102**, 640 (2006).

[4] A.R Velikhanov, *Proceedingsof the XXII International Conference вЂњNew in Magnetism and Magnetic MaterialsвЂќ*, Astrakhan, 129 (2012).

О физичности новых точных решений уравнения свободного растекания пластического слоя на плоскости.

Н.А. Белов, В.А. Кадымов

Институт Проблем Механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, МАМИ

e-mail: vkadymov@yandex.ru

В работе исследуются на физичность новые точные решения эволюционного уравнения для определения границы области, занятой растекающимся между сближающимися жесткими плитами пластическим слоем

О существовании знакопеременных решений эллиптических уравнений с выпукло-вогнутыми нелинейностями

В.Е. Бобков

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, Россия

e-mail: bobkovve@gmail.com

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ с кусочно-гладкой границей рассматривается задача Дирихле с выпукло-вогнутой нелинейностью

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

где $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$.

Задаче ($\mathcal{D}$) соответствует функционал энергии

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega |u|^\gamma dx.$$

Будем обозначать $\mathcal{L}_\lambda(u) := D^2_{u,u} I_\lambda(u)(u,u)$.

Под *знакопеременным решением* задачи $(\mathcal{D})$ будем понимать такое решение $u_\lambda \in W^{1,2}_0(\Omega)$, для которого $u^+_\lambda := \max\{0, u_\lambda\} \neq 0$ и $u^-_\lambda := \min\{0, u_\lambda\} \neq 0$.

С помощью спектрального анализа по методу расслоений [1, 2] вводится следующий спектральный параметр

$$\lambda^* = \frac{q(\gamma-2)}{\gamma(2-q)} \left(\frac{\gamma(2-q)}{2(\gamma-q)} \right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \inf_{v \in W^{1,2}_0 \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}}}{\int_\Omega |v|^q dx \left(\int_\Omega |v|^\gamma dx \right)^{\frac{2-q}{\gamma-2}}}. \qquad (1)$$

Для всех $\lambda \in (0, \lambda^*)$ функционал I_λ имеет два непересекающихся семейства критических точек, разделенных знаком $\mathcal{L}_\lambda$, и одно семейство критических точек, при $\lambda \leq 0$.

Теорема *Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$. Тогда для любого $\lambda \in (-\infty, \lambda^*)$ существует знакопеременное решение $u_\lambda = u^+_\lambda + u^-_\lambda \in W^{1,2}_0(\Omega)$ задачи $(\mathcal{D})$, такое что $\mathcal{L}_\lambda(u^+_\lambda) < 0$ и $\mathcal{L}_\lambda(u^-_\lambda) < 0$, при этом u_λ имеет ровно две узловые области.*

Более того, семейство решений u_λ образует непрерывную ветвь на $(-\infty, \lambda^*)$ в смысле уровня I_λ.

[1] S.I. Pohozaev, *Proc. Steklov Inst. Math.*, No. 192, 157-173, (1990).

[2] Ya. Il'yasov, *Proc. Steklov Inst. Math.*, No. 232, 150-156, (2001).

The Showalter problem for a class of weighted Sobolev-type equations

L.V. Borel

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

e-mail: lidiya904@mail.ru

Let us consider generalized Showalter problem [1]

$$Pu(0) = u_0, \qquad (1)$$

for the integro-differential equation of Sobolev type

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \qquad (2)$$

where $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ are Banach spaces, operator $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ (linear and continuous), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ (linear, closed and densely defined), μ is a function with a bounded variation on $[0,T]$. A solution of the problem (1), (2) is a function

$u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$, which satisfies the equation (2) on $[0,T]$ and the initial condition (1).

In the case of strongly (L,p)-radial operator M [2] for operator function $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ and function with a bounded variation $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ and for $T > 0$ denotation

$$F(T)=V_0^T(\mu)K(T)\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})}\sum_{n=0}^{p+1}\max_{t,s\in[0,T]}\left(s\left\|\frac{\partial^n\mathcal{K}}{\partial t^n}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\right)+$$

$$+V_0^T(\mu)\max_{k=0,1,\dots,p}\|H^kM_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})}\sum_{n=0}^{p+1}\max_{t,s\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^n\mathcal{K}}{\partial t^n}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}$$

will be used. Here $K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\}$, K, a are the constants in the definition of strong (L,p)-radiality [2].

Theorem 1. *Let an operator M be strongly (L,p)-radial, $u_0 \in \mathrm{dom}M_1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ is a function with a bounded variation, $F(T) < 1$. Then there exists a unique solution $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ of the problem* (1), (2).

The designations for operators Q, L_1^{-1}, M_0^{-1}, M_1, H can be found in [2].

[1] R.E. Showalter, *Partial differential equations of Sobolev – Galperin type.* Pacific J. Math., **31**, 3 (1963).

[2] V.E. Fedorov, *The degenerate strongly continuous semigroup of operators.* Algebra and analysis., **12**, 3 (2000).

Спиновые возбуждения в магнитных системах с неоднородным основным состоянием и ЯМР, как метод его исследования

М.А. Борич, **А.П. Танкеев, В.В. Смагин**

Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия

e-mail: borich@imp.uran.ru

Проведено исследование статических и динамических свойств ферромагнетика без центра инверсии с анизотропией типа “легкая плоскость”, помещенного во внешнее магнитное поле. Магнитное поле в этой задаче является как источником нелинейности, так и управляющим параметром. Энергия такого ферромагнетика может быть представлена в виде суммы вкладов неоднородного обменного взаимодействия, магнитной анизотропии и взаимодействия типа Дзялошинского [1, 2, 3], ответственного за формирование спиральной магнитной структуры. ЯМР здесь выступает как структурный метод и как метод исследования динамических свойств. Для изучения магнитных свойств рассматриваемых систем методами ЯМР необходимо проанализировать поведение малоамплитудных возмущений на фоне основного (неоднородного) состояния и отклик этих возмущений на внешнее воздействие.

В результате исследования основного состояния показано, что в малых магнитных полях энергетически выгодным является неоднородная спиральная структура. Характеристики спирали определяются величиной приложенного магнитного поля. В сильных полях спиральная структура преобразуется в 360° доменную стенку (зародыш новой фазы). Итоги исследования динамической части задачи следующие: рассчитаны закон дисперсии волн, компоненты тензора динамической восприимчивости, коэффициенты усиления, интегральная форма линии ЯМР поглощения. Показано, что форма линии поглощения существенно зависит от параметров спиральной структуры, которые контролируются внешним магнитным полем. Показана возможность определения характеристик основного состояния по форме интегральной линии ЯМР-поглощения.

Работа частично поддержана Проектом по программе физических исследований УрО РАН № 12-У-2-1025 и Проектом РФФИ № 12-02-31814.

[1] Б.Н. Филиппов, А.П. Танкеев, *Динамические эффекты в ферромагнетике с доменной структурой.* М.: Наука, 1987, 216 с.

[2] Ю.А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длинно-периодических структурах.* М.: Атомиздат, 1987, 200 с.

[3] М.М. Фарзтдинов, *Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках с доменной структурой.* М.: Атомиздат, 1988, 239 с.

The static magnetic field as the source of the electric potential in the spintronics devices

N. V. Vorob'eva
IMCP URC RAS, Ufa, Russia
e-mail: vnv@anrb.ru

The effects often take place that are generated by the additional electric potential, arising in the static magnetic field in the materials and devices of spintronics. The appearance of such potentials explains the nature of the effect of huge magnetoresistance in metal/polymer systems [1] or of the photomagnetic anneal in yttrium-iron garnets (YIG) [2].

Since the static magnetic field itself cannot generate the additional potential difference, the question arises about the nature of intermediary phenomenon that is responsible for the effect. The theory of arising of such phenomenon was developed in [3]. The essence of the idea of the authors of [3] is in the accounting of the relaxation processes that take place in the ferromagnetic material through the notable time interval after the magnetic field switching on. The present report is devoted to the review of application of the details of theory, developed in [3], to the effects of the type of [1] and [2].

For ferrimagnetic YIG crystals the concept about the additional electromotive forces that are connected with nonconservative spin motion explains the appearance of the selected directions. The process is connected with the sensitivity of the non-equilibrium charges to the change of geometric phase. Thus, the nature of the uniaxial induced anisotropy turns out to be the same for all types of the photomagnetic YIG samples and for all the considered ways of gaining of such anisotropy. The additional electric field arises under the impact of the exposure of the sample in the external static magnetic field or in the external magnetic field with the incident light. This process leads to the nonequilibrium charge redistribution in favor of the selected direction.

For the metal/polymer systems the basic factor that determinates the appearance of the huge magnetoresistance is the deformation of the potential barrier in the interface in magnetic field that leads to the change of the parameters of the charge tunneling. The deformation of the potential barrier is also caused by the additional electric potential in the interface.

The conditions of [3] are also fair for the interface of the metal/polymer structure. This consideration is suitable so for huge magnetoresistance, as for the low magnetoresistive effects in the metal/polymer interface.

[1] A.N. Lachinov, N.V. Vorob’eva, A.A. Lachinov, *JETP Letters*, **84**, 604, 2006.

[2] J.F. Dillon, E.M. Gyorgy, J.P. Remeika, *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 643, 1969.

[3] S.E. Barnes, S. Maekawa, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 246601 (2007).

Оценка промежуточных производных на гладкой дуге

Гайсин А.М.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Неравенства, связывающие между собой верхние грани функции и n ее первых производных на всей прямой были впервые указаны А.Н.Колмогоровым (1938), а позднее - А.Горным (1939). Сходный результат получил А.Картан [1, гл.VI, п.3, замечание переводчика на с.206]. Для конечного отрезка соответствующие оценки были получены Карлеманом, А.Горным и А.Картаном. Оказывается, эти результаты допускают обобщение и на случай гладких дуг.

Теорема. Пусть γ — гладкая дуга, заданная уравнением $x = g(y)$ ($A \leq y \leq B$). Если $f \in C^{n+2}(\gamma)$, причем:

$$1)\ \max_{\gamma} |f^{(k)}(z)| \leq M_i\ (i = 0, 1;\ n+1, n+2);$$

$$2)\ f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0\ (k = 0, 1, \dots, n),$$

то для всех $k, 1 \leq k \leq n$, верны оценки

$$\max_{\gamma} |f^{(k)}(z)| \leq 4N(2e)^k (M_0 + M_1)^{1-\frac{k}{n+1}} (M_{n+1} + M_{n+2})^{\frac{k}{n+1}},$$

где $N = c(8d + |\gamma| + 1)$, $d = diam\gamma$, $|\gamma|$ — длина γ, c — постоянная ($0 < c < \infty$),

$$c = \sup_{z,\xi \in \gamma} \frac{|\gamma(z,\xi)|}{|z - \xi|},$$

$|\gamma(z,\xi)|$ — длина части дуги γ между точками z и ξ.

[1] Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М.: ИЛ, 1955.

Теорема типа Салинаса для областей специального вида

Гайсин Р.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, D — некоторая область комплексной плоскости,

$$H(D, M_n) = \{f \in H(D) : |f^{(n)}(z)| \leq c_f M_n\ (n \geq 0), z \in D\}.$$

Класс $H(D, M_n)$ называется квазианалитическим в точке $z_0 \in \partial D$, если из того, что $f \in H(D, M_n)$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \geq 0)$ следует, что $f \equiv 0$ в D .

Пусть D — выпуклая область, а в точке $z_0 \in \partial D$ выполнено условие

$$\sup_{s} \int_{s}^{\epsilon} \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx < \infty, \qquad \pi\alpha = \lim_{s \to 0} \beta(z_0, s). \tag{1}$$

Здесь $\epsilon > 0$ — достаточно мало, $\beta(z_0, s)$ — величина угла между касательными к границе D, проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s [1]. В сделанных предположениях верна

Теорема. Класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке z_0 тогда и только тогда, когда

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty, \tag{2}$$

где $T(r) = \sup\limits_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ — функция следа последовательности $\{M_n\}$.

Если последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла, то есть $M_n^2 \leq M_{n-1} \cdot M_{n+1}$ $(n \geq 1)$, то условие (2) эквивалентно условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = +\infty$ [3]. Оказывается, критерии квазианалитичности и для более общих областей G (необязательно выпуклых и односвязных) совпадают с условием (2), если они обладают свойством: $K_1^\alpha \subset G \subset K_2^\alpha$, где $K_i^\alpha (i = 1, 2)$ — некоторые двуугольники (K_1^α — выпуклый двуугольник,K_2^α — пересечение внешностей двух кругов). Этот факт для K_1^α следует из сформулированной выше теоремы (для него условие (1) выполняется), а для K_2^α — из [2].

[1] Юлмухаметов Р.С. Аппроксимация субгармонических функций и применения. Дисс. ... докт. физ.-мат наук. Уфа: 1986–197с.

[2] Прилипко Т.И. Квазианалитические классы функций в комплексной области // Укр. матем. журнал. 1967. Т. 19. № 2. С. 127–134.

[3] Гайсин Р.А. Эквивалентные критерии квазианалитичности класса Карлемана в угле. Сб. тр. Межд. шк.-конф. для студ., асп. и мол. уч. "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Т. 1. Математика. Уфа: БашГУ, 2012. С. 69–76.

Space - modulated structures in $BiFeO_3$ – like multiferroics

Z.V. Gareeva ***A.K. Zvezdin***

IMCP URC RAS, Ufa, Russia

e-mail: gzv@anrb.ru

A.M. Prokhorov General Physics Institute, Moscow, Russia

The influence of variations of magnetic parameters on the transformations of antiferromagnetic space –modulated structure in $BiFeO_3$ –like multiferroics is investigated. We discuss the specificity of variations of magnetic parameters of different origin namely the magnetic anisotropy, the stiffness related to temperature changes, the rare вЂ“ earth doping, the lattice mismatch between multiferroics film and oriented substrate which can substantially change the conditions of space-modulated structures emergence and the character of space вЂ“ modulated structures reciprocal transformations in bulk crystals and thin films [1-3].

Phase diagrams representing the regions of homogeneous magnetic states and incommensurate structures stability are constructed for three essential geometries of magnetic field ($\mathbf{H} \parallel [1\bar{1}0], \mathbf{H} \parallel [11\bar{2}], \mathbf{H} \parallel [111]$). It is shown that the direction of applied magnetic field substantially affects set of magnetic phases, properties of incommensurate structures, character of phase transitions. Novel conical type of cycloidal ordering is revealed during the transition from incommensurate cycloidal structure into homogeneous magnetic state. Elaborated phase diagrams allow estimate appropriate combination of control parameters (magnetic field, magnetic anisotropy, stiffness) required to the destruction of cycloidal ordering corresponding to the transition into homogeneous structure.

Our results show that the magnitude of critical magnetic field suppressing cycloid is lowered in multiferroics films comparing to single crystals, it can be also lowered by the selection of orientation of magnetic field.

[1] J.T. Zhang et al., *Applied Physics Letters*, **100**, 242413, 2012.

[2] N.E. Kulagin, A.F. Popkov, A.K. Zvezdin, *Physics of the Solid State*, **53**, 970 (2011).

[3] S. Alpay and A.L. Roytburd, *Journal of applied physics*, **83**, 4714, 1998.

The quad graph equation with a nonstandard generalized symmetry structure.

R.N. Garifullin, A.V. Mikhailov and R.I. Yamilov.

Institute of Mathematics, Ufa, Russia

Department of Applied Mathematics, University of Leeds, United Kingdom

e-mail: rustem@matem.anrb.ru

The equation

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m}-u_{n,m+1})-u_{n+1,m}(u_{n,m}+u_{n,m+1})+1=0 \tag{1}$$

is found in article [1]. In those artcile is shown that eq.(1) have two generalized symmetry in different directions:

$$\frac{d}{dt_1}u_{n,m}=h_{n,m}h_{n-1,m}(a_n u_{n+2,m}-a_{n-1}u_{n-2,m}), \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt_2}u_{n,m}=(-1)^n\frac{u_{n,m+1}u_{n,m-1}+u_{n,m}^2}{u_{n,m+1}+u_{n,m-1}}, \tag{3}$$

where $h_{n,m}=1-2u_{n+1,m}u_{n,m}$, $a_{n+2}=a_n$. One can see that n is an outer parameter in eq. (3), and this equation is really a known 1+1-dimensional autonomous equation of the Volterra type. In the case of eq. (2), we have the essentially non-autonomous Itoh-Narita-Bogoyavlensky equation with two-periodic coefficient a_n.

We show that eq. (3) can be rewritte as Gerdjikov-Ivanov-Tsuchida system [2] for odd and even $u_{n,m}$. We find Lax pairs for equations (1,2,3) in the form:

$$\Psi_{n+2,m} = N_{n,m}\Psi_{n,m}, \quad \Psi_{n,m+1} = M_{n,m}\Psi_{n,m}$$

$$\frac{d}{dt_1}\Psi_{n,m} = A_{n,m}\Psi_{n,m}, \quad \frac{d}{dt_2}\Psi_{n,m} = B_{n,m}\Psi_{n,m},$$

where $\Psi_{n,m}$ – vector function, $A_{n,m}, B_{n,m}, N_{n,m}, M_{n,m}$ – 2×2 matrtixes.

[1] R.N. Garifullin and R.I. Yamilov Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters 2012 J. Phys. A: Math. Theor. 45 345205.

[2] T. Tsuchida Integrable discretizations of derivative nonlinear Schrodinger equations, 2002 J. Phys. A: Math. Gen. 35 7827.

Integrable Discretisations of the Nonlinear Schrödinger Equation on Grassmann Algebras

G. G. Grahovski, **A. V. Mikhailov**

Department of Applied Mathematics, University of Leeds, United Kingdom

Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, Bulgaria

Institute of Mathematics, RAS, Russia

E-mails: G.Grahovski@leeds.ac.uk A.V. Mikhailov@leeds.ac.uk

Integrable discretisations for a class of coupled nonlinear Schrödinger (NLS) type of equations are presented. The class corresponds to a Lax operator with entries in a Grassmann algebra.

Elementary Darboux transformations are constructed. As a result, Grassmann generalisations of the Toda lattice and the NLS dressing chain are obtained.

Furthermore, the compatibility (Bianchi commutativity) of these Darboux transformations leads to integrable Grassmamm generalisations of the difference Toda and NLS equations.

The resulting discrete systems will have Lax pairs provided by the set of two consistent Darboux transformations. The corresponding Bäcklund transformations represent symmetries of the discrete (difference systems) and formal diagonalisations of the Darboux transformations provide generating functions of integrals of motion.

Частные решениия (2+1)-мерного нелинейного уравнения типа Шредингера

П.Н. Давыдов
ЧелГУ, e-mail: davydov@csu.ru

Theorem of solution existence and uniqueness is proved for a class of semilinear degenerate evolution equations with the generalized Showalter initial condition. The result is illustrated on the example of initial boundary value problem for Oskolkov system.

Управление точкой малой массы в среде без сопротивления

А.Р. Данилин, *О.О. Коврижных*
ИММ УрО РАН, РФ
e-mail: dar@imm.uran.ru

Рассматривается задача оптимального управления точкой малой массы действием силы, ограниченной по величине, при отсутствии сопротивления среды. Кроме этого в задаче имеется еще один независимый малый параметр, связанный с возмущением начальных данных:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \overline{y}, & \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2, \\ \varepsilon^2 \dot{\overline{y}} = \overline{u}, & \overline{u} \in \mathbb{R}^2,\ \|\overline{u}\| \leqslant 1 \\ \overline{x}(0) = x_0 + \mu x_1,\ \overline{y}(0) = y_0 + \mu y_1, & 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ \overline{x}(T_{\varepsilon,\mu}) = 0,\ \overline{y}(T_{\varepsilon,\mu}) = 0,\ T_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min. & \end{cases}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Перейдя в рассматриваемой задаче к новому времени $\tau := t/\varepsilon$ и переобозначив $\overline{x}(\varepsilon\tau)$, $\varepsilon\overline{y}(\varepsilon\tau)$, $\overline{u}(\varepsilon\tau)$ и $T_{\varepsilon,\mu}/\varepsilon$ через $x(\tau)$, $y(\tau)$, $u(\tau)$ и $\theta_{\varepsilon,\mu}$, соответственно, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, & z \in \mathbb{R}^4, \\ \|u\| \leqslant 1, & u \in \mathbb{R}^2, \\ z(0) = ((x_0 + \mu x_1)^*, \varepsilon(y_0 + \mu y_1)^*)^*, & 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ z(\theta_{\varepsilon,\mu}) = 0,\ \theta_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min, & \end{cases}$$

где

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица второго порядка, а * — знак операции транспонирования матриц.

Отметим, что предельной для описанной задачи при $\varepsilon \to 0$ и $\mu \to 0$ будет аналогичная задача, соответствующая $\varepsilon = 0$ и $\mu = 0$.

Строится асимптотика времени быстродействия $T_{\varepsilon,\mu}$ и оптимального управления при $\varepsilon \to 0$ и $\mu \to 0$. Показано, что в данной задаче даже для ситуаций общего положения асимптотика времени быстродействия носит сложной характер, аналогичный асимптотике из работ [1, 2].

[1] А.Р. Данилин, А.М. Ильин, Техн. кибернетика, (1994), № 3, 96.

[2] А.Р. Данилин, А.М. Ильин, Фундамент. и прикл. математика, **4**, 905, (1998).

Discrete Schlesinger Transformations and Difference Painlevé Equations

A. Dzhamay, **H. Sakai, T. Takenawa**
University of Northern Colorado, Greeley, USA
e-mail: adzham@unco.edu
University of Tokyo, Tokyo, Japan
Tokyo University of Marine Science and Technology, Tokyo, Japan

We known that differential Painlevé equations can be obtained as reductions of Schlesinger equations describing isomonodromic deformations of Fuchsian systems. Similarly, discrete Schlesinger transformations of Fuchsian systems give rise to discrete Painlevé equations. Sometimes both can be obtained for the same Fuchsian system, e.g., in the rank-two system with three finite poles, whose isomonodromic transformations are described by Painlevé-VI equation P_{VI}, and discrete Schlesinger transformations are described by the difference Painlevé-V equation d-P_V, which also corresponds to the Bäcklund transformations of P_{VI}. However, some discrete equations do not have a continuous counterpart. In [2] Sakai posed a problem of representing such equations using Schlesinger transformations, we consider here one such equation of type d-$P(A_2^{(1)*})$. Corresponding Fuchsian system was described by Boalch in [1]. Using a recently obtained discrete Hamiltonian of elementary Schlesinger transformations we explicitly compute this example, verify that we indeed obtain discrete Painlevé equation type d-$P(A_2^{(1)*})$, and compare it to the usual form of d-$P(A_2^{(1)*})$ by comparing the blow-up structures of the corresponding rational surfaces.

[1] Philip Boalch, *Quivers and difference Painlevé equations*, Groups and symmetries, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 25–51.

[2] Hidetaka Sakai, *Problem: discrete Painlevé equations and their Lax forms*, Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, pp. 195–208.

Nonlinear dynamics of the magnetic inhomogenities in magnetic with modulation of the magnetic parameters

E.G. Ekomasov, **A.M. Gumerov, R.R. Murtazin**
Bashkir State University, Ufa, Russia
e-mail: EkomasovEG@gmail.com

It is known that in real magnetics the appearance of magnetic parameters local changes happens due to structural and chemical non-homogeneities and local influence (mechanical, thermal or solar). It results in considerable complication of Landau-Lifshitz equation for the magnetization. Although the task of excitation and distribution of the magnetization waves, under certain conditions, is reduced to the studies of the modified sine-Gordon equation with floating factor [1, 2]. The investigation of the big perturbations influence on the solution of the modified sine-Gordon equation in general case can be investigated only with the help of numerical methods [3].

This research considers our studies of the domain walls (DW) dynamics in ferromagnetics with an optional size one dimensional modulation of the magnetic anisotropy constant in terms of stimulation and radiation of the nonlinear waves. In the presence of the nonhomogeneity of the constant magnetic anisotropy (NCMA) was obtained a reflection of the DW from the NCMA region. It was connected with the DW resonant interaction with the magnetic nonhomogeneity of the breather type, stimulated in the NCMA region. We have shown the possibility of the DW quasitunneling involving several NCMA regions (i.e. when the particle crosses the barrier with the speed below ultimate). We have also shown the origin of the magnetic nonhomogeneities of the multi-pulson type in the form of kink and breather bound state cophased and antiphased with the oscillating breathers.

[1] M.A. Shamsutdinov and other, *Ferro- and antiferromagnitodynamic. Nonlinear oscillations, waves and solitons.* Nauka, Moscow, 2009.

[2] E.G. Ekomasov, Sh.A. Azamatov, and R.R. Murtazin, The Physics of Metals and Metallography, **105(4)**, 313 (2008).

[3] E.G. Ekomasov, Sh.A. Azamatov, and R.R. Murtazin, The Physics of Metals and Metallography, **108(6)**, 532 (2009).

Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления с большим ресурсом управления

А.П. Зорин

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия

e-mail: zorinaolga@mail.ru

Рассматривается следующая задача оптимального управления с управлением на границе [1, глава 2, соотношения (2.41), (2.9)]:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z - a(x) z = f(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), & x \in \Gamma, \ |||u||| \leqslant 1 \end{cases}$$

$$J(u) = \|z\|^2 + \nu^{-1} \cdot |||u|||^2 \to \inf$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ есть выпуклая, замкнутая ограниченная область, содержащая начало координат O(0;0), с гладкой границей Γ, удовлетворяющей условию: граница Γ области Ω есть бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n-1$, расположенное локально по одну сторону от Ω (иными словами, мы рассматриваем $\overline{\Omega}$ как многообразие с краем Γ класса C^∞.)

где $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, $\partial z / \partial n$ — производная по внешней нормали к Γ.

$$a(\cdot), f(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha^2 > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$
$$\mathcal{U} := \Big\{ u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \ : \ |||u||| \leqslant 1 \Big\}.$$

Здесь через $||| \cdot |||$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. В пространстве $L_2(\Omega)$ для нормы используется обозначение $\| \cdot \|$.

Функции $a(\cdot), f(\cdot), g(\cdot)$ берутся из $C^\infty(\Omega), C^\infty(\Gamma)$ соответственно, для удобства построения асимптотического разложения решения и доказательства оценок для этого решения.

При выполнении указанных условиях доказывается существование и единственность решения, строится асимптотическое разложение решения и обосновывается построенная асимптотика.

Производится расчет числового примера для конкретно заданных функций, когда область Ω – круг единичного радиуса.

Аналогичная задача, у которой в левой части граничного условия содержится малый параметр ε была рассмотрена в [2].

[1] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. –М.: Мир, 1972.

[2] Данилин А.Р., Зорин А.П. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления //Доклады РАН 2011–Том 440, № 4, с. 1–4.

Nonlinear inverse problem for a linearized Oskolkov system

N.D. Ivanova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

Consider a nonlinear inverse problem for a system of equations

$$(1-\chi\nabla^2)v_t(x,t)=\nu\nabla^2 v(x,t)-(\tilde{v}\cdot\nabla)v(x,t)-(v\cdot\nabla)\tilde{v}(x,t)-r(x,t)+$$

$$+b(t)\|v\|_0^\alpha v+q_1(t)(1-\chi\nabla^2)v(x,t)+\sum_{j=2}^{3m}q_j(t)f^j(x,t),\ (x,t)\in\Omega\times[0,T],\quad (1)$$

$$\nabla\cdot v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T],\quad (2)$$

$$v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T],\quad (3)$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad x\in\Omega,\quad (4)$$

$$v(x_i,t)=\psi^i(t),\quad i=1,\dots,m,\quad t\in[0,T],\quad (5)$$

describing a motion of incompressible viscoelastic fluid. Here $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ is a region with a boundary $\partial\Omega\in C^\infty$, $T>0$, $m\in\mathbb{N}$. Parameters $\chi\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ are fluid characteristics. A velocity v, a pressure gradient r and functions $q_j=q_j(t)$, $j=1,2,\dots,3m$, are unknown. A vector function $\tilde{v}_k=\tilde{v}_k(x)$, $k=1,2,3$, is a given stationary solution. A function $b=b(t)$, vector functions $f^j=f^j(x,t)$, $j=2,\dots,3m$, $\psi_k^i=\psi_k^i(t)$, $i=1,\dots,m$, $k=1,2,3$, are also given. All points $x_i\in\Omega$, $i=1,\dots,m$, are different, $\|v\|_0=\|v\|_{(L_2(\Omega))^3}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Denote by $\mathbb{L}_2=(L_2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^1=(W_2^1(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^2=(W_2^2(\Omega))^3$ Sobolev spaces. A closure of $\mathcal{L}=\{v\in(C_0^\infty(\Omega))^3:\nabla\cdot v=0\}$ by the norm $\mathbb{L}_2$ is $\mathbb{H}_\sigma$, and by the norm $\mathbb{H}^1$ is $\mathbb{H}_\sigma^1$. Also $\mathbb{H}_\sigma^2=\mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$. Denote $\mathbb{H}_\pi$ as an orthogonal complement of $\mathbb{H}_\sigma$ in $\mathbb{L}_2$. Let $A=\Sigma\nabla^2$ and

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix}
\psi_1^1(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^1)_1(x_1,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_1(x_1,t)\\
\psi_2^1(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^1)_2(x_1,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_2(x_1,t)\\
\psi_3^1(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^1)_3(x_1,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_3(x_1,t)\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\psi_1^m(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^1)_1(x_m,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_1(x_m,t)\\
\psi_2^m(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^1)_2(x_m,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_2(x_m,t)\\
\psi_3^m(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^1)_3(x_m,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_3(x_m,t)
\end{pmatrix}.$$

Theorem [1]. *Let* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$*,* $v_0 \neq 0$*, if* $\alpha < 3$*,* $b \in C^1([0,T];\mathbb{R})$*,* $f^j \in C^1([0,T];\mathbb{L}_2)$*,* $j = 2,\ldots,3m$*,* $\psi^i \in C^2([0,T];\mathbb{R}^3)$*,* $i = 1,\ldots,m$*, and* $\det\Lambda(t) \neq 0$ *for all* $t \in [0,T]$*, compatibility conditions* $v_0(x_i) = \psi^i(0)$*,* $i = 1,\ldots,m$*, hold. Then there exists a unique solution* $v \in C^1([0,T_1];\mathbb{H}_\sigma)$*,* $r \in C^1([0,T_1];\mathbb{H}_\pi)$*,* $q_j \in C^1([0,T_1];\mathbb{R})$*,* $j = 1,2,\ldots,3m$*, of the inverse problem* (1)–(5) *with some* $T_1 \in (0,T]$.

[1] N.D. Ivanova, V.E. Fedorov, and K.M. Komarova, Chelyabinsk State Univ. Bulletin. Mathematics. Mechanics. Informatics, **13**, no. 26 (2012).

Начально-краевая задача для одной совмещенной нелинейной модели пористой среды

Имомназаров Х.Х., Турдиев У.К.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Каршинский филиал ТАТУ, Карши, Узбекистан

Рассмотрим следующую абстрактную задачу Коши

$$\ddot{u}(t) + A(w(t))u(t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u^0, \quad \dot{u}(0) = u^1, \tag{2}$$

$$\dot{v}(t) = G(t; w(t)) + f(t), \quad t \geq 0, \qquad 3)$$

$$v(0) = 0, \tag{4}$$

которая возникает в нелинейной модели пороупругости [1, 2, 1, 4], $w = (u, v)$.

В данной работе при некоторых ограничениях на оператор A и функцию G на основе метода интегралов энергии [5] доказана локальная корректность задачи Коши (1)-(4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00773).

[1] В.Н. Доровский, Геология и геофизика, 7 (1989).

[2] В.Н. Доровский, Ю.В. Перепечко, Е.И. Роменский, Физика горения и взрыва, 1 (1993).

[3] A.M. Blokhin, V.N. Dorovsky, *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum*. Nova Science Publishers Inc, New York. 1995.

[4] Н.М. Жабборов, Х.Х. Имомназаров, *Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред.* Изд-во НУУз им. Мирзо Улугбека. 2012.

[5] C.M. Dafermos, W.J. Hrusa, Arch. Rational Mech. Anal., **87**, 267 (1985).

Прямая и обратная начально-краевые задачи для нелинейного одномерного уравнения пороупругости

Имомназаров Х.Х., Коробов П.В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Рассмотрим следующую одномерную начально-краевую задачу для системы уравнений нелинейной пороупругости [1, 2]:

$$\rho_s u_{tt} = (\mu(u_x)u_x)_x - \rho_l^2\left((u-v)\,\chi(u-v)\right)_t\,, \quad x\in(0,\,L), \quad t\in(0,\,T), \tag{1}$$

$$\rho_l v_t = \rho_l^2\,(u-v)\,\chi(u-v), \quad x\in(0,\,L), \quad t\in(0,\,T), \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x\in(0,\,L), \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad x\in(0,\,L), \tag{4}$$

$$\mu(u_x)\,u_x|_{x=L} = f(t), \quad t\in(0,\,T), \tag{5}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t\in(0,\,T). \tag{6}$$

Здесь u, v, скорости упругого пористого тела с постоянной парциальной плотностью $\rho_s = \rho_s^f(1-d_0)$ и жидкости с постоянной парциальной плотностью $\rho_l = \rho_l^f d_0$ соответственно, d_0 пористость, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, f : [0,T] \to R$, $u_0 : [0,L] \to R$, $u_1 : [0,L] \to R$, ρ_s^f и ρ_l^f физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, $\mu(\nu)$ трижды непрерывно-дифференцируемая положительная функция, $\chi(\nu)$ дважды непрерывная положительная функция.

В данной работе доказана теорема локальной разрешимости классического решения прямой задачи. Доказана дифференцируемость по Фреше оператора прямой задачи. Получены оценки условной устойчивости обратной задачи [об определении u, v, μ из (1)-(6) (при заданных χ , ρ_s , ρ_l) по дополнительной информации $\tilde{u} := u(L,\cdot)$].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-05-31216).

[1] A.M. Blokhin, V.N. Dorovsky, *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum.* Nova Science Publishers Inc, New York. 1995.

[2] Н.М. Жабборов, Х.Х. Имомназаров, *Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред.* Изд-во НУУз им. Мирзо Улугбека. 2012.

О решении одного класса обратных стохастических дифференциальных уравнений

Исмагилов Н.С.
УГАТУ, Уфа

В работе рассматриваются обратные стохастические дифференциальные уравнения (ОСДУ) следующего вида

$$dY(t) = h(t, Y(t), Z(t))dt + Z(t)dW(t), \quad Y(T) = \xi, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где T — фиксированный момент времени, $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, второй интеграл в правой части (1) понимается в смысле Ито, а ξ — некоторая случайная величина, задающая значение Y в конечный момент T. Особенностью уравнений такого вида является тот факт, что требуется найти непреждающую пару функций $(Y(t), Z(t))$, удовлетворяющую уравнению (1).

Уравнения вида (1) впервые были исследованы в работах [1] (линейный случай) и [2] (нелиныйный случай), они возникают в задачах стохастического оптимального управления [3] и задачах финансовой математики [4].

В упомянутых выше работах приведены теоремы существования и единственности решений ОСДУ. Опираясь на эти результаты, в настоящей работе найден новый способ решений ОСДУ. Доказано, что при определенных предположениях решение задачи (1) может быть представлено в виде: $Y(t) = \Phi(t, W(t))$, $Z(t) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(t, W(t))$, где $\Phi(t, x)$ является решением уравнения с частными производными второго порядка

$$\Phi'_t + \frac{1}{2}\Phi''_{xx} = h(t, \Phi, \Phi'_x), \quad \Phi(T, x) = f(x),$$

где $f(x)$ — некоторая известная функция.

[1] J. M. Bismut, *Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control*, J. Math. Anal. Appl. **44**, 384–404 (1973).

[2] E. Pardoux, S. Peng, *Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation,* Systems Control Lett., **14**, 55–61, (1990).

[3] J. Yong, X. Y. Zhou, *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations,* Springer-Verlag, New-York, 1999.

[4] El Karoui, N., S. Peng, and M. C. Quenez, *Backward Stochastic Differential Equations in Finance* Mathematical Finance 7.1., 1-71 (1997)

Об аналитических свойствах функции Вейля оператора Штурма-Лиувилля с комплексным потенциалом

Х.К. Ишкин
Башкирский Государственный университет
e-mail: ishkin62@mail.ru

Основной результат работы— доказательство необходимости (с некоторыми оговорками) полученных ранее Муртазиным Х.Х. достаточных условий на $W(x)$, при которых функция Вейля оператора M_beta допускает аналитическое продолжение на некоторый угол из нефизического листа.

Численное решение обратных задач порожденных возмущенными самосопряженными операторами методом регуляризованных следов

С. И. Кадченко
Магнитогорский государственный университет, г. Магнитогорск, Россия
e-mail: kadchenko@masu.ru

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора $T+P$

$$(T+P)\varphi = \beta\varphi,$$

где T - дискретный полуограниченный снизу оператор, а P - ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, которые занумерованы в порядке возрастания собственных значений μ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного значения μ_n, а количество всех неравных друг другу собственных значений, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = 0,5|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Теорема. *Если для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T являются базисом в H, то собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам [1]*

$$\beta_n = \mu_n + (P\omega_n, \omega_n) + \delta_n, \ n = \overline{1, m_0}. \tag{1}$$

Здесь для δ_n *справедливы оценки* $|\delta_n| \leq (2n-1)\rho_n \frac{q^2}{1-q}$, $q = \max_{n \in N} q_n$, $q_n = 2||P||/|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|$, $m_0 = \sum_{n=1}^{n_0} \nu_n$.

Используя уравнения (1), рассмотрим задачу восстановления значений потенциала P по собственным числам $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$. Пусть выполняются все требования выше сформулированной теоремы и P - ограниченный оператор умножения на функцию $p(x)$. Тогда собственные значения оператора $T+P$ вычисляются по формулам

$$\beta_n = \mu_n + \int_a^b p(s)\omega_n^2(s)ds + \delta_n, \;\; n = \overline{1, m_0}. \tag{2}$$

Запишем уравнения (2) в виде

$$\int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x), \tag{3}$$

где функции $f(x)$, $K(x,s)$ $(s \in (a,b), x \in (c,d))$ такие, что

$$f(x_n) = \beta_n - \mu_n - \delta_n, \;\; K(x_n, s) = \omega_n^2(s), \;\; n = \overline{1, m_0}.$$

Пусть функция $K(x,s)$ есть вещественная непрерывная в прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, а $f(x) \in L_2(c,d)$, $y(s) \in W_2^1(a,b)$.

Задача решения уравнения (3) является некорректно поставленной. Ее приближенное решение может быть найдено с помощью метода регуляризации Тихонова.

Для проверки разработанной методики нахождения значений потенциала P по собственным числам $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ рассмотрим спектральную задачу Штурма - Лиувилля

$$\begin{cases} -u'' + p(s)u = \beta u, \;\; a < s < b; \\ \cos\alpha u'(a) + \sin\alpha u(a) = 0; \\ \cos\gamma u'(b) + \sin\gamma u(b) = 0, \;\; \alpha, \gamma \in R. \end{cases} \tag{4}$$

Задавая функцию $p(s)$ и используя метод Бубнова-Галеркина, найдем первые n_0 собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{n_0}$ задачи (4). Решая приближенно уравнение (3) с использованием конечно-разностной аппроксимации, найдем приближенные значения $\tilde{p}(s)$ потенциала $p(s)$ в узловых точках $s_1 = a. \ldots, s_N = b$. Сравнивая их значения, получим информацию о точности решения обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля (4) методом регуляризованных следов. Многочисленные расчеты показали его хорошую точность и вычислительную эффективность.

[1] Кадченко, С.И, Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Сер. „Математическое моделирование и программирование“. – 2011. – Вып. 8, №17 (234). – С. 46 – 51.

Захват в резонанс при наличии шума

Л.А. Калякин
ИМсВЦ УНЦ РАН
e-mail: klenru@mail.ru

Для уравнений, описывающих начальный этап авторезонанса, анализируются решения с учетом случайных возмущений типа “белый шум”. Проблема устойчивости резонансных решений относительно шума сводится к изучению уравнения Колмогорова. Основной результат состоит в получении априорных оценок для решения, которое соответствует математическому ожидаданию квадрата расстояния от равновесия для возмущенной траектории.

Solitons and large time asymptotics of solutions for the Novikov-Veselov equation

A. Kazeykina
Ecole Polytechnique, France; Moscow Institute of Physics and Technology, Russia
e-mail: kazeykina@cmap.polytechnique.fr

The Novikov-Veselov equation is a (2+1)-dimensional analog of the renowned Korteweg-de Vries equation, integrable via the inverse scattering transform for the 2-dimensional stationary Schrodinger equation at fixed energy.

The first part of the talk is devoted to the study of existence/absence of localized solitons for the Novikov-Veselov equation. In particular, we show that, unlike its (1+1)-dimensional counterpart, the Novikov-Veselov equation at nonzero energy does not possess sufficiently localized soliton solutions. In the second part, we study the question of the asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for the Novikov-Veselov equation at nonzero energy under assumption that the scattering data for these solutions are nonsingular.

Methods of analysis include, in particular, the study of complex geometrical optics solutions for the stationary Schrodinger equation, d-bar problem, theory of generalized analytic functions, stationary phase method.

Численный метод нахождения значений собственных функций дискретных операторов методом регуляризованных следов

С. Н. Какушкин
Магнитогорский государственный университет, г. Магнитогорск, Россия
e-mail: kakushkin-sergei@mail.ru

Рассмотрим задачу нахождения значений собственных функций оператора $T+P$

$$\Big(T+P\Big)u=\mu u,$$

где T - дискретный полуограниченный снизу оператор, P - ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D. Предположим, что известны собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин, и ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, соответствующие этим собственным числам и образующие базис в H. Обозначим через n_0 количество всех неравных друг другу λ_n, лежащих внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0}=\dfrac{|\lambda_{n_0+1}+\lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ - собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей, а $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - соответствующие им собственные функции.

Теорема. *Если для всех $n\in N$ выполняются неравенства $q_n=\frac{2||P||}{|\lambda_{n+1}-\lambda_n|}<1$, то значение произведения собственной функции $u_n(x)$ на ее сопряженную $\overline{u}_n(y)$, при любых значениях аргументов $x,\ y\in D$, можно найти по формулам:*

$$u_n(x)\overline{u}_n(y)=\frac{1}{\mu_n}\Big(\lambda_n v_n(x)\overline{v}_n(y)+$$

$$+\sum_{k=1}^{t}[\alpha_k^{(1)}(n,x,y)-\alpha_k^{(1)}(n-1,x,y)]\Big)+\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y), \qquad (1)$$

где для $\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)$ справедливы оценки

$$|\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)|\le\frac{2||P||}{\mu_n}C_0^4S_n\rho_n^2\frac{q^t}{1-q},\ \forall t\in N,\ n=\overline{1,n_0}.$$

Здесь

$$\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^p[K_T(x,z_k,\lambda)\circ P_{z_k}]^k\circ K_T(z_k,y,\lambda)d\lambda$$

- k-тые поправки теории возмущений к „взвешенной“ спектральной функции оператора $T+P$ целого порядка p; операция „$\circ$“ вводится по правилу

$$(K \circ P \circ Q)(x,y,\lambda) = \int\limits_D K(x,z,\lambda) P_z Q(z,y,\lambda)dz;$$

$K_T(x,y,\lambda)$ *- ядро резольвенты* $R_\lambda(T)$ *оператора* T; $S_n = \sup\limits_{\lambda_i} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_i|} \right)^2$, $|v_i(x)| \le C_0 \ \forall i = \overline{1,\infty}$, $q = \max\limits_{n \ge 1} q_n$.

Правые части уравнений (1) явно выражаются через собственные числа и собственные функции невозмущенного самосопряженного оператора T. Используя теорему о вычетах и спектральное представление ядра резольвенты $K_T(x,y,\lambda)$, получены аналитические формулы, удобные для нахождения „взвешенных“ поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)$ и оценки для них [1].

В случае, если собственные функции $u_n(x)$ возмущенного оператора $T+P$ являются функциями действительной переменной, то для нахождения значений собственных функций в узлах дискретизации, используя формулу (1), достаточно в качестве аргументов x и y взять одно и то же число и извлечь корень из правой части (1). Если собственные функции $u_n(x)$ принимают комплексные значения, то явно найти значение собственной функции, непосредственно используя формулы (1), нельзя, так как произведения $u_n(x)\overline{u}_n(y)$ дают лишь модуль комплексного числа. В работе [2] разработан алгоритм, позволяющий обойти эту трудность.

Результаты, полученные разработанным методом РС, сравнивались с результатами, полученными известными методами (А. Н. Крылова и А. М. Данилевского). При этом в процессе вычисления значений n-ой собственной функции известными методами появляются значения собственных функций с 1 по n-ую, тогда как метод РС позволяет вычислить значение n-ой собственной функции непосредственно.

[1] Кадченко С.И. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов методом регуляризованных следов /С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, – Самара, 2012. – №6 (97). С. 13 – 21.

[2] Кадченко С.И. Методика нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов /С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования „ПМТУММ – 2012“: материалы V Международной конференции, – Воронеж, 2012. С. 147 – 149.

Solution of the equivalence problem for Emden-Fowler equation

V.V.Kartak
BSU, UGATU, Russia
e-mail: kvera@mail.ru

Emden-Fowler equation is the following nonlinear second order ODE:

$$Y'' = aX^nY^m, \qquad a = const \neq 0.$$

It has important applications in Astrophysics and Nuclear Physics (in particular, Thomas-Fermi equation is $y'' = x^{-1/2}y^{3/2}$), see [1].

In this paper the complete set of the equivalence classes of the Emden-Fowler equation under the general point transformations is found, see for comparison [2]. Here Z is an point symmetries algebra.

No.	m	n	normalize form	invariant	$dim(Z)$
1	$0,1$	$\forall$	$y''=0$		8
2	2	$0, -\frac{15}{7}$ -5, $-\frac{20}{7}$	$y''=y^2$		2
3	2	$-\frac{5}{2}$	$y''=y^2+1$		1
4	2	$\neq 0, -\frac{15}{7}, -5,$ $\neq -\frac{20}{7}, -\frac{5}{2}$	$y''=y^2+\frac{128}{kx^4}$	k	1
5	-3	0	$y''=y^{-3}$		3
6	-3	$\neq 0$	$y''=x^ny^{-3}$, $n>0$,	n^2	1
7	$\neq -3, 0,$ $\neq 1, 2$	$0, -(m+3)$	$y''=\frac{y^m}{m(m-1)}$	m	2
8	$\neq -3, 0,$ $\neq 1, 2$	$-\frac{m+3}{2}$	$y''=\frac{y^m}{m(m-1)}+y$	m	1
9	$\neq -3, 0,$ $\neq 1, 2$	$\neq -\frac{m+3}{2},$ $\neq -(m+3)$	$y''=\frac{y^m}{m(m-1)}+\frac{4y}{kx^2}$	m, k	1

In terms of the invariants of the equation (more details are in [3])

$$y'' = P(x,y) + 3\,Q(x,y)y' + 3\,R(x,y)y'^2 + S(x,y)y'^3. \qquad (1)$$

for every class 1-9 the criterias are given. It means that if the necessary and sufficient conditions from the criteria are true, equation (1) is from the corresponding class of Emden-Fowler equation (i.e. (1) is equivalent to the corresponding normalize form).

[1] V. F. Zaitsev, A. D. Polyanin, *Handbook of ordinary differential equations.* Moscow: Fizmatlit. 2001.

[2] C. Bandle and L.A. Bordag, *Equivalence classes for Emden equations.* Nonlinear Analysis. V.50. 2002. Pp. 523–540.

[3] R.A. Sharipov, *Effective procedure of point classification for the equations* $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,y'^2 + S\,y'^3$. Electronic archive at LANL, Math$\dot{\text{D}}$G #9802027, 1998, pp.1–35.

Аналитическое описание солитонов и слабонелинейных волн на фоне спиральной структуры

В.В. Киселев, *А.А. Расковалов*
Институт физики металлов УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: kiseliev@imp.uran.ru

Теоретическое исследование коллективных возбуждений в сильно нелинейных периодических структурах представляет сложную и до сих пор малоисследованную задачу. Соответствующие динамические уравнения могут быть решены только с помощью специальных методов интегрирования.

Мы развили процедуру интегрирования модели sine-Gordon при наличии спиральной (полосовой доменной) структуры [1], [2], [3]. Она представляет “одевание” фоновой структуры с помощью задачи Римана на римановой поверхности, связанной со структурой. На основе модели, аналитически описаны новые солитоны: “лишние” доменные стенки и их связанные состояния – бризеры. Их образование и движение всегда сопровождается локальными трансляциями фоновой структуры. Такие трансляции можно наблюдать магнитооптическими методами. Частоты внутренних осцилляций бризеров в спиральной структуре лежат ниже спектра частот стоячих волн в структуре, поэтому бризеры могут быть зафиксированы по поглощению мощности внешней накачки.

Мы получили спектр энергии для нелинейных возбуждений в спиральной структуре, включающий солитоны и слабонелинейные волны. Решение начально-краевой задачи по описанию нелинейной динамики солитонов и волн в структуре сведено к решению линейных интегральных уравнений на торе.

[1] В.В. Киселев, А.А. Расковалов, ТМФ, **173**, №2, с. 268-292 (2012).

[2] В.В. Киселев, А.А. Расковалов, ФММ, **113**, №12, с. 1180-1192 (2012).

[3] В.В. Киселев, А.А. Расковалов, ЖЭТФ, **143**, №1 (2013).

The loss of smoothness twice for outer function compared to its module

S.V.Kislyakov, A.Medvedev, A.V.Vasin
PDMI, Sankt-Peterburg
Pb State University, Sankt-Peterburg
State University of Marine and River Fleet,Sankt-Peterburg
e-mail: andrejvasin@gmail.com

The well-known theorem of Carleson-Jacobs-Havin [1] claims about the loss of smoothness twice for the outer function Φ with modulus $|\Phi| \in Lip\ \alpha$. Kislyakov has noticed that the above theorem is essentially local, if the smoothness is measured by means of special integral modules of continuity. Namely, consider the point $t_0 \in \mathbb{T}$, and constants $a, d > 0, 0 < \alpha < 1$ such that $|\phi(t) - \phi(t_0| \leq a|t - t_0|^\alpha$ and $d = \int_T |\log \phi| < \infty$. Then the outer function Φ with modulus $|\Phi| = \phi$ for arbitrary arc $I \ni t_0$ satisfies

$$\inf_c \left(\frac{1}{I} \int_I |\Phi - c|^2\right)^{1/2} \leq C(a, d)|I|^{\alpha/2}. \tag{1}$$

If (1) holds uniformly over all points $t_0 \in \mathbb{T}$, then the Campanato inequality ensures that $\Phi \in Lip\ \alpha/2$. It turns out that acting in the similar way we can extend the result to $Lip\ \alpha$ with $0 < \alpha \leq 2$.

Local "one-half smoothness"theorem. *Suppose we are given the point $t_0 \in \mathbb{T}$, positive constant $a, d, 0 < \alpha \leq 2$. Let be $|\phi(t) - \phi(t_0| \leq a|t - t_0|^\alpha$ for arbitrary $t \in \mathbb{T}$ and $d = \int_{\mathbb{T}} |\log \phi| < \infty$. There is a constant $C(a, d)$ independent of $\phi(t_0)$ such that for arbitrary arc $I \ni t_0$ we have*

$$\inf_\pi \left(\frac{1}{|I|} \int_I |\Phi - \pi|^2\right)^{1/2} \leq C(a, d)|I|^{\alpha/2}, \tag{2}$$

where inf *is taken over the set of polynomials of the first degree.*

This theorem is a good local form of the Carleson-Jacobs-Havin theorem because of the following reason. If the estimates (2) hold uniformly over $t_0 \in \mathbb{T}$, then the variations of the John-Nirenberg theorem [2] induce

$$\inf_\pi \|\Phi - \pi\|_\infty \leq C|I|^{\alpha/2}.$$

After this applying the Marchoud inequality for polynomial modules of continuity, we obtain the original (global) "one half smoothness"theorem now just as a consequence of the above local result. Once more advantage of the local theorem is application to estimates for special maximal functions in the homogeneous spaces.

[1] Havin V.P., Generalization of the Privalov-Zigmund theorem on module of continuity of conjugate function.-Izv. Akadem. nauk Armyansk. SSR, ser. Matem.,**VI**, 2-4 (1971).

[2] S. Kislyakov, N. Kruglyak *Extremal problems in interpolation theory, Whitney-Besicovitch coverings, and singular integrals*(in Press).

О решениях анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью в неограниченных областях

Л.М. Кожевникова, *А.А. Леонтьев*
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Россия

Работа посвящена некоторому классу анизотропных параболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью, представителем которого является модельное уравнение вида

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{m_\alpha-1}D_{x_\alpha}^{m_\alpha}\left[\left|D_{x_\alpha}^{m_\alpha}u\right|^{p_\alpha-2}D_{x_\alpha}^{m_\alpha}u\right],$$

$$m_1,\dots,m_n\in\mathbb{N},\quad p_n\geq\ldots\geq p_1>k,\quad k>1.$$

Для такого уравнения рассматривается первая смешанная в цилиндрической области $D=(0,\infty)\times\Omega$ с неограниченной областью $\Omega\subset\mathbb{R}_n,\ n\geq 2$, однородным краевым условием Дирихле и финитной начальной функцией φ.

Существование сильного решения доказано методом галеркинских приближений, способ построения которых для модельного изотропного уравнения второго порядка ранее был предложен Ф.Х. Мукминовым и Э.Р. Андрияновой [1]. На основе галеркинских приближений получена оценка допустимой скорости убывания решения

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)}\geq\|\varphi\|_{L_k(\Omega)}\left(C(\varphi)t+1\right)^{-1/(p_1-k)},\quad t\geq 0,\quad C(\varphi)>0.$$

Для областей, расположенных вдоль выделенной оси, установлена оценка сверху. В частности, для областей вращения $\Omega(f)[s]=\{\mathbf{x}=(\mathbf{x}'_s,x_s)\in\mathbb{R}_n\,|\ x_s>0,\ |\mathbf{x}'{}_s|<f(x_s)\},\ s\in\overline{2,n},\ \mathbf{x}'_s=(x_1,...,x_{s-1},x_{s+1},...x_n)$, $0<f(x_s)<\infty$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{r\to\infty}(\ln r)^{-1}\int_1^r f^{-p_1m_1(p_sm_s)}(x)dx=\infty,$$

$$\sup\left\{f(z)\ \middle|\ z\in[x-f^{p_1m_1/(p_sm_s)}(x),x+f^{(p_1m_1)/(p_sm_s)}(x)]\right\}\leq\omega f(x),\ x,\omega\geq 1,$$

она принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega(f))}\leq Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)},\quad t>0,\quad \varepsilon\in(0,1),\quad M>0.$$

Перечисленные результаты для случая $m_\alpha=1$, $\alpha=\overline{1,n}$, ранее установлены в [2].

[1] Э.Р. Андриянова, Ф.Х. Мукминов, *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью.* Уфимск. матем. журн. Т. 3, 3(2011), С.3–14.

[2] Л.М. Кожевникова, А.А. Леонтьев *Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью.* Уфимск. матем. журн. Т. 3, 4(2011), С.64–85.

Квантоворазмерные явления в органических изоляторах

А.Н. Лачинов

ИФМК УНЦ РАН

e-mail: lachinov@anrb.ru

Недавно было установлено, что при выполнении определнных условий, контакт двух изоляторов можно рассматривать как квантовую яму. В настоящем докладе анализируется возможность размерного квантования вдоль интерфейса двух полимерных органических изоляторов и создания квантовой ямы, заполненной квазидвумерным электронным газом. Приводятся результаты экспериментальных исследований.

Dynamics of the cosmological scalar fields with singular potentials

V.A. Koutvitsky, E.M. Maslov

IZMIRAN, Russia

We investigate the dynamics of the inflaton scalar field $\phi(t,\mathbf{r})$ governed by the nonlinear Klein-Gordon equation in the Friedmann-Robertson-Walker Universe,

$$\phi_{tt} + 3H\phi_t - a^{-2}\Delta\phi + U'(\phi) = 0,$$

where $a(t)$ is the scale factor, $H = a_t/a$ is the Hubble parameter. We consider the potentials having singularity at their minimum, $|U''(\phi)| \to \infty$ $(\phi \to 0)$.

First, the rapid oscillations of the homogeneous background $\phi(t)$ near the minimum are studied. These damped oscillations determine growth of the scale factor $a(t)$ through the Friedmann equations in which the effective pressure and energy density are $p = \phi_t^2/2 - U(\phi)$, $\rho = \phi_t^2/2 + U(\phi)$ [1]. To describe the oscillations we make the transformation $(\phi, \phi_t) \to (\rho, \theta)$, representing the field as $\phi(t) = \varphi(\rho, \theta)$, where ρ and θ are slow and fast variables. In the Van der Pol approximation their evolution is governed by

$$\rho_t = -2\sqrt{6\pi G}\rho^{3/2}\gamma(\rho), \quad \theta_t = \omega(\rho),$$

where the functions $\gamma(\rho)$ and $\omega(\rho)$ are determined by the potential $U(\phi)$.

As examples, we consider two singular potentials, $U = (m^2\phi^2/2)(1-\ln(\phi/\sigma)^2)$ and $U = -m^2\phi^2/2 + (3\lambda/4)\phi^{4/3}$. For these potentials we calculate the equation of state parameter $w = p/\rho = \gamma(\rho) - 1$ and show that in some range of ρ it lies in the interval $-1 < w < -1/3$, providing the accelerated expansion of the Universe.

Then we examine the resonance amplification of the inhomogeneities $\delta\phi(t, \mathbf{r})$ on the oscillating background $\phi(t)$. The Fourier k-modes of $\delta\phi$ satisfy the singular Hill equation with slowly varying parameters ρ and k/a. Using the stability-instability chart, calculated by the generalized Lindemann-Stieltjes method [2], we argue that the field inhomogeneities can be significantly amplified when the representative trajectories of the parameters cross the resonance zones.

[1] M.S. Turner, Phys. Rev. D, **28**, 1243 (1983).

[2] V.A. Koutvitsky and E.M. Maslov, J. Math. Phys., **47**, 022302 (2006).

Сведение задачи о полноте ситстем экспонент из выпкулой области с гладкой границей на круг

Махота А.А.

Башкирский Государственный Университет, Уфа, Россия

e-mail: allarum@mail.ru

Пусть D — ограниченная, выпуклая область комплексной плоскости, $H(D)$ — пространство аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на компактах. С каждым множеством комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$, в которое числа λ_k могут входить с некоторой кратностью $n_k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $k = 1, 2, ...$, связывается система экспоненциальных мономов

$$\exp\Lambda = \{\lambda^j e^{\lambda_k\lambda},\ k = 1, 2, ...,\ j = 0, ..., n_k\}.$$

Рассмотрим области с дважды непрерывно дифференцируемой опорной функцией $h(\varphi) = \max_{z\in\overline{D}} \Re(e^{i\varphi}z)$. Положим

$$M = \max_{\varphi\in[0;2\pi]} (h''(\varphi) + h(\varphi)). \tag{1}$$

Из геометрической интерпретации опорных функций следует, что M — это максимальный радиус кривизны в точках границы области D.

Суммой $\Lambda' + \Lambda''$ двух наборов $\Lambda' = \{(\lambda'_k, n_k)\}$ и $\Lambda'' = \{(\lambda''_k, m_k)\}$ будем называть объединение множеств λ'_k, λ''_k, $k = 1, 2, ...$, с кратностью n_k или m_k, если точка попадает только в один из наборов, и с суммарной кратностью, если какая-то точка попадает в оба множества.

В дальнейшем через L будем обозначать какую-нибудь фиксированную целую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Юлмухаметова Р.С. о приближении субгармонической функции логарифмом модуля целой функции. Через Λ_0 обозначим множество нулей функции L с учетом кратности.

Теорема 1. *Система экспонент* $\exp\Lambda$ *не полна в пространстве* $H(D)$ *тогда и только тогда, когда система* $\exp(\Lambda+\Lambda_0)$ *не полна в пространстве* $H(K_M)$*, где* K_M *— круг радиуса* M *с центром в нуле.*

В качестве примера подробно рассматривается случай, когда D — эллипс.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358.

3D integrable Hamiltonian systems: the structure and bifurcations

L.M. Lerman
N.I.Lobachevsky Nizhny Novgorod State University, Russia
e-mail: lermanl@mm.unn.ru

We describe the topology of Liouville foliations for integrable Hamiltonian systems in three degrees of freedom. This includes the structure of a system under study near saturated neighborhoods of singular points which supposed to be simple (as 0-dim Poisson orbits) and the description of possible bifurcations that can occur along 1-parametric families of periodic orbits, 2-parameter families of 2-dimensional isotropic tori. Since these families contain parameters, one can meet degenerations (periodic orbits, 2-dim tori) along the family that cannot be described by invariants of [2, 3] and require a special study. In particular, we present related bifurcation diagrams, invariants of isoenergetic conjugacy (where found), the monodromy where exists, the structures of saturated neighborhoods for degenerate periodic orbits (1-dim compact Poisson action orbits) and their bifurcations, the same is done for degenerate invariant tori (2-dim compact Poisson orbits).

The talk is based on previous results [2, 1] and recent results.

This research was supported in part by the Russian Foundation of Basic Research (grant 11-01-00001a)

[1] L.M. Lerman, *Isoenergetical structure of integrable Hamiltonian systems in an extended neighborhood of a simple singular point: three degrees of freedom.* In the book: "Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics Supplement, L. Lerman, G. Polotovski, L. Shilnikov (Eds.), vol. 200 of American Mathematical Society Translation Series 2, AMS, Providence, RI, 2000, pp. 219–242.

[2] L.M. Lerman, Ya.L. Umanskiy. *Four-Dimensional Integrable Hamiltonian Systems with Simple Singular Points (Topological Aspects)*, Trans. Math. Monographs, **176**, AMS, R.I. (1998).

[3] A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko. *Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, topology, classification*, Chapman& Hall, Roca Baton, FL, pp.730 (2004).

Interpolation with multiplicities from the points on the real axes by a series of exponentials converging in the space of entire functions

S.G. Merzlyakov, *S.V. Popenov*
Institute of Mathematics with Computer Center, Ufa, Russia
e-mail: spopenov@gmail.com

Let $\{t_n\}$ be an infinite discrete sequence of points on the real axes of the complex plane $\mathbb{C}$ (nodes of interpolation) and $\{m_n\}$, $m_n \geq 0$, be a sequence of integers (multiplicities of the points t_n). Let $\{\lambda_n\}$ be an infinite discrete sequence of complex points, which has finite upper density, and $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^{-1} < \infty$, and $|y_n| \leq A|x_n|$, where $\lambda_n = x_n + iy_n$.

We prove that for any locally holomorphic function $f(z)$ on the sequence $\{t_n\}$ there exists a series of exponentials $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \exp \lambda_j z$, converging in the topology of the space of all entire functions, such that $|f(z) - g(z)| = O(|z - t_n|^{m_n+1})$, when $z \to t_n$. So we prove that it is solvable the following problem of interpolation with multiplicities from the nodes of interpolation on the real axes by means of series of exponentials in the space of all entire functions: for any entire function $f(z)$ there exists a series of exponentials $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \exp \lambda_j z$, such that $f^{(k)}(t_n) = g^{(k)}(t_n)$, $k = 0, 1, \ldots, m_n$.

The problem of interpolation from finite set of points on the real axes by means of the finite sums of exponentials is discussed in [1].

Note that in particular we give a new proof of the result from the paper [2] wherein the sequence $\{\lambda_n\}$ is the zero set of an entire function of the exponential type of growth and interpolation is realized therein by means of the function $g(z)$ from the closure of linear span of exponentials $\{\exp \lambda_n z\}$, thus we futhermore solve the problem of interpolation by means of functions from a set which is smaller then in [2].

We give the examples showing that the condition $|y_n| \leq A|x_n|$ is essential for the problem of interpolation from the points on the real axes by means of series of exponentials in the space of all entire functions and we also show that all the frequences λ_n of exponentials may be chosen only in the right halfplane in the case where all the nodes of interpolation $t_n \geq 0$.

We plan to discuss the conditions for solvability of the interpolation problem in the space of all functions which are holomorphic in the right halfplane.

[1] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis.* V. 1,2,3, A Wiley–Interscience Publication, 1974, 1977, 1986.

[2] V.V.Napalkov, A. A. Nuyatov, *The multipoint de la Vallé-Poussin problem for a convolution operator*, Matem. Sbornik, 203:2 (2012), С. 77вЂ“-86 (in Russian).

Riemann-Hilbert problem and mKdV equation with step like initial data: Parametrixes for elliptic wave region

А.А. Минаков
ФТИНТ им Б.И.Веркина НАН Украины
e-mail: minakov.ilt@gmail.com

We consider the modified Korteweg – de Vries equation on the line. The initial function is step-like, that is it tends to some constants when $x \to \pm\infty$. Our goal is to study the asymptotic behavior of the solution of the initial value problem as $t \to \infty$. For elliptic wave region the parametrixes in Airy function and its derivative are constructed. Main methods are method of Riemann – Hilbert problem, the g-function method and the nonlinear steepest – descent method.

Об одной периодической задаче четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами

С.И. Митрохин
НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассматривается периодическая краевая задача для оператора четвёртого порядка с суммируемым потенциалом с гладкой весовой функцией. Найдена асимптотика решений соответствующих дифференциальных уравнений при больших значениях спектрального параметра. Вычислена асимптотика собственных значений исследуемой краевой задачи.

О линеаризации стохастических дифференциальных уравнений первого порядка.

Насыров Ф.С., Абдуллин М.А.

Уфимский государственный технический университет

e-mail:farsagit@yandex.ru, 79marat97@rambler.ru

Рассматривается задача нахождения замены переменной $\eta(t) = g(t, \xi(t))$, которая переводит стохастическое дифференциальное уравнение

$$\xi(t) - \xi(0) = \sigma(t, \xi(t)) * dW(t) + b(t, \xi(t))ds, \qquad \xi(0) = \xi_0. \tag{1}$$

в линейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\eta(t) = A(s)\eta(s) * dW(s) + B(s)\eta(s)ds. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $\sigma(s, \xi) \neq 0$, *тогда замена переменных*

$$g(t, \xi(t)) = C^* \exp\left(\int\limits_0^t L(s, \xi(s))ds + A \int\limits_{\xi(0)}^{\xi(t)} \frac{1}{\sigma(t, \xi(s))} d\xi \right),$$

где $L(s, \xi) = B(s) - \frac{A(s)b(s,\xi(s))}{\sigma(s,\xi(s))} - A'_t \int\limits_{\xi(0)}^{\xi(t)} \frac{1}{\sigma(s,\xi(s))} d\xi + A \int\limits_{\xi(0)}^{\xi(t)} \frac{\sigma'_t(s,\xi)}{\sigma(s,\xi)} d\xi$, *преобразует уравнение (1) в (2).*

Теорема 2. Замена переменной $\xi_t = \Phi(t, \eta_t)$, осуществляющая переход от уравнения (2) к уравнению (1), есть решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = \frac{\sigma(t, \xi_t)}{A(t)\eta_t} * d\eta_t + \left[b(t, \xi_t) - \frac{B(t)}{A(t)} \sigma(t, \xi_t) \right] dt.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

[1] *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. -М.: Физматлит 2011. -212 с.

[2] *Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Meleshko S.V, Kovalev V.F.* Symmetries of integro-differential equations with application in mechanics and plasma physics. Springer Science+Business Media B.V. 2010 – 305 p.

Об редуцированных деформациях Шлезингера и Гарнье

Д.П. Новиков
ОмГТУ, e-mail: nvdmpr@mail.ru

В условиях изомонодромной деформации Шлезингера и Гарнье подразумевается независимость изменения регулярных точек в сопровождающих фуксовых уравнениях. В докладе рассматриваются редукции этих деформаций, когда изменения регулярных точек функционально зависимы.

Symmetry groups for a class of quasilinear pseudoparabolic equations

A.V. Panov
Chelyabinsk State University, Russia
e-mail: gjd@bk.ru

Quasilinear partial differential equation

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u) \tag{1}$$

is considered, where α and $f = f(z)$ are constant and functional parameters respectively, $u = u(t, x)$ is an unknown function. Such equations describe physical processes in semiconductors with $\alpha \neq 0$ and $f(z) = e^z$ or $f(z) = z$ [1]. Methods of group analysis [2, 3] were applied for symmetry properties research of the equation. Some results of this investigation are formulated below.

Theorem 1. *The kernel of principal Lie algebras for the equation* (1) *with* $\alpha \neq 0$ *has a basis of the operators*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

In the case of $\alpha = 0$ *the basis has a form*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2t\frac{\partial}{\partial t}.$$

Theorem 2. *The basis of principal Lie algebra for the equation* (1) *with* $\alpha \neq 0$, $f(z) = e^z$ *consists of the operators*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}.$$

In the case of $\alpha = 0$ *it can be chosen as*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2t\frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} - \tau'(t)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Theorem 3. *The principal Lie algebra of the equation* (1) *with* $\alpha \neq 0$, $f(z) = z$ *has a basis of operators*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = u\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = b(t, x)\frac{\partial}{\partial u}.$$

[1] A.G. Sveshnikov, A.B. Alshin, M.O. Korpusov, Yu.D. Pletner, *Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations.* FISMATLIT, Moscow, 2007.

[2] L.V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations.* Nauka, Moscow, 1978.

[3] N.H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics.* Nauka, Moscow, 1983.

Влияние акустических волн на динамику двужидкостных сред

Ю.В. Перепечко, К.Э. Сорокин, Х.Х. Имомназаров

Институт геологии и минералогии СО РАН, Новосибирск, Россия

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия,

e-mail: perep@sibmail.ru

В данной работе исследуется воздействие высокочастотных акустических волн на течение гетерофазных сред в в двухжидкостном приближении. Влияние акустических волн на характер течения в пористых средах в приближении Дарси исследовано в работах [1, 2]. Нелинейные уравнения гидродинамики двухжидкостной среды получены в рамках метода законов сохранения [3, 4]

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_n \mathbf{u}_n) = 0, \quad \rho\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{j}, \nabla)\, s = -\operatorname{div}\left(\kappa\frac{1}{T}\nabla T + \nu\,\mathbf{w}\right) + \frac{R}{T},$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + (\mathbf{u}_n, \nabla)\,\mathbf{u}_n\right) = -\frac{\rho_n}{\rho}\nabla p - \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}\nabla q - b\,\mathbf{w} + \partial_k(\eta_n v_{n,ik}) + \nu\,\nabla T + \mathbf{g}$$

Здесь n — номер фазы ($n = 1, 2$); ρ_n, $\mathbf{u}_n$ — парциальные плотности и скорости фаз; $\rho = \rho_1 + \rho_2$; $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$; $\mathbf{j} = \rho_1\mathbf{u}_1 + \rho_2\mathbf{u}_2$; $v_{n,ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_{n,i} + \partial_i u_{n,k} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{u}_n\right)$; s — массовая плотность энтропии; T — температура; p — давление; ν, η_n, b, κ — кинетические коэффициенты; $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. Диссипативная функция принимает вид: $R = b\mathbf{w}^2 + \kappa\frac{1}{T}(\nabla T)^2 + 2\nu(\nabla T, \mathbf{w}) + \eta_1 v_{1,ik}^2 + \eta_2 v_{2,ik}^2$.

Уравнения решались методом контрольного объема [5], обеспечивающим выполнение законов сохранения. Итерационный алгоритм SIMPLE был модифицирован для расчёта двух полей давлений p и q, характеризующих двухскоростную гетерофазную среду. Численно исследован нестационарный конвективный тепломассоперенос в прямоугольной области с сейсмическим источником на вертикальной границе и влияние высокочастотных акустических волн на развитие конвекции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (ГК № 07.514.11.4156).

[1] I.A. Beresnev, and P.A. Johnson, Geophysics, **59**, 1000 (1994).

[2] P. Poesio, G. Ooms, S. Barake, and F. van der Bas, J. Acoust. Soc. Am., **111**, 2019 (2002).

[3] И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести.* М.: Наука, 1965.

[4] В.Н. Доровский, Геология и геофизика, **7**, 39 (1989).

[5] С.В. Патанкар, *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.* М.: Энергоиздат, 1984.

Degenerate evolution equations with memory

O.A. Stakheeva
Chelyabinsk State University, Russia
e-mail: osta@csu.ru

Let $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{F}$ be Banach spaces, operator $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ is linear and continuous (briefly, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$), and operator $M : D_M \to \mathfrak{F}$ is linear, closed and densely defined in $\mathfrak{U}$ (for brevity $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$), domain D_M of operator M is supplied with the norm of its graph. We shall deal with the Cauchy problem

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

for Sobolev type equation with memory effects

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t), \tag{2}$$

where $\{\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}) : t \geq 0\}$, $f : [0, +\infty) \to \mathfrak{F}$ are given.

Solution of the problem (1), (2) on $[0, T)$, $T \in (0, +\infty]$, is a function $u \in C^1((0, T); \mathfrak{U}) \cap C((0, T); D_M) \cap C([0, T); \mathfrak{U})$ satisfying the conditions (1) and the equation (2) on $(0, T)$.

Let $\ker L \neq \{0\}$, operator M is strongly (L, p)-sectorial, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Then there exist projections P and Q on spaces $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{F}$ respectively (see [1]). Let us denote $\sigma^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$, $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$. Besides, denote by L_k (M_k) the restriction of operator L (M) on $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$. Then operator $H = M_0^{-1} L_0$ is nilpotent of a degree at most p.

Theorem 1. *Let an operator M be strongly (L,p)-sectorial,* $\sup\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \sigma^L(M)\} < 0$, $\mathcal{K} \in C([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}))$, *for all* $t \geq 0$ $\mathrm{im}\,\mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{F}^1$, $Qf \in C^\alpha([0,T];\mathfrak{F})$ *for some* $\alpha \in (0,1)$ *and every* $T > 0$, $(I-Q)f \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathfrak{F})$, $u_0 \in \mathfrak{U}$, $(I-P)u_0 = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(0)$. *Then there exists a unique solution of the problem* (1), (2) *on* $[0,T_0)$ *for some* $T_0 > 0$. *If function* $Q\mathcal{K} : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *is bounded, then there exists an unique solution of the problem* (1), (2) *on* $[0,+\infty)$.

[1] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E., *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators.* VSP, 2003.

Stability of autoresonance under random perturbations

O.A. Sultanov

Institute of Mathematics with Computer Center of RAS, Russia

e-mail: oasultanov@gmail.com

In recent years the study of autoresonance phenomena has received much interest [1]. Specifically, the problem of stability of autoresonance model is considered here. The main object of our research is the system of two differential equations:

$$\frac{dr}{dt} = \sin\psi, \quad r\left[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t\right] = b\cos\psi, \quad b \neq 0,\ \lambda > 0,\ t > 0,$$

where $r(t)$, $\psi(t)$ correspond to slowly varying amplitude and phase shift of fast harmonic oscillations. These equations appear after averaging procedure in the theory of nonlinear oscillations under external force with slowly varying frequency. The solutions having increased amplitude are associated with autoresonance phenomena. Because of nonlinearity of the considered model explicit formulas for the solutions can't be obtained. However, it is possible to construct an asymptotic expansion for some particular solution:

$$R_0(t) = \sqrt{\lambda t} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - t^{-1/2}\sqrt{\lambda}/2 + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \to \infty.$$

The stability of this solution under persistent perturbations is analyzed. The perturbed equations are considered in the form:

$$\frac{dr}{dt} = (1+\mu\,\xi)\sin\psi, \quad r\left[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t + \mu\,\zeta\right] = b(1+\mu\,\eta)\cos\psi,$$

where ξ,η,ζ are random processes defined on probabilistic space $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbf{P})$, $(r,\psi) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, and $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \ll 1$ is the parameter characterizing the smallness of the perturbations. Our purpose is to identify the class of perturbations under which the solution $R_0(t)$,$\Psi_0(t)$ is steady. Random perturbations of the white noise type are not considered here.

It is turn out that considered model is non-dissipative, therefore well-known results [2] can't be applied.

We define the class $\mathfrak{M}$ of perturbations (ξ, η, ζ): $|\xi(t,\omega)| \leq t^{-5/4}\gamma(\tau,\omega)$, $|\eta(t,\omega)| \leq t^{-1/2}\gamma(\tau,\omega)$, $|\zeta(t,\omega)| \leq t^{-1}\gamma(\tau,\omega)$, $\forall\ (r,\psi) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 1$, $\tau = \kappa t^{5/4}$, $\kappa = \lambda^{1/4}4\sqrt{2}/5$. Where $\gamma(\tau,\omega)$ is such that $\exists\, m(\omega), T > 0 : \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\gamma(\vartheta,\omega)d\vartheta \leq m(\omega)$, $\forall\, t \geq 1$, $\omega \in \Omega$. The expectation of the random variable $m(\omega)$ to be limited: $\mathbf{E}[m(\omega)] < \infty$.

We have the following proposition:

Theorem. If $b > 1/2$, then the solution $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ is stable in probability under persistent random perturbations $\mathfrak{M}$.

[1] L.A. Kalyakin, Russian Math. Surveys, **63**, (2008).

[2] R.Z. Khasminskii, *Stochastic stability of differential equations*. Springer, New York, 2012.

An initial problem for a class of semilinear degenerate evolution equations

V.E. Fedorov, P.N. Davydov

Chelyabinsk State University, Russia

e-mail: kar@csu.ru, davydov@csu.ru

Let $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ are Banach spaces, operator $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ is linear and bounded, $\ker L \neq \{0\}$, $M : D(M) \to \mathfrak{F}$ is linear, closed and densely defined, $D(M) \subset \mathfrak{U}$. In the case of (L,p)-bounded operator M there exists a nontrivial projector $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ along the kernel of the identity of the resolving group for the linear equation $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ on the image of the identity (see [1]), denoted by $\mathfrak{U}^1$ below. Consider the so-called generalized Showalter problem

$$Pu(t_0) = u_0. \tag{1}$$

for the semilinear degenerate equation

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t,u(t)), \tag{2}$$

with nonlinear operator $N : U \to \mathfrak{F}$, where U is a set in $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}$.

Theorem 1. *Let operator M be $(L,0)$-bounded, the set $V = U \cap (\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1)$ is open in $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1$, the restriction of $N : U \to \mathfrak{F}$ on V is continuous with respect to t and satisfies the local Lipschitz condition with respect to u, besides, $N(t,u) =$*

$N(t, Pu)$ for all $u \in \mathfrak{U}$. Then for every $(t_0, u_0) \in V$ the problem (1), (2) *has a unique solution $u \in C^1([t_0, t_1]; \mathfrak{U})$ with some $t_1 \in (t_0, T]$.*

Consider the initial boundary value problem

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [t_0, T], \tag{3}$$

$$v(x, t_0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

for the system of equations

$$(1 - \chi\nabla^2)v_t(x,t) = \nu\nabla^2 v(x,t) - (v \cdot \nabla)v(x,t) - r(x,t), \ (x,t) \in \Omega \times [t_0, T], \tag{5}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [t_0, T], \tag{6}$$

modelling the flow of viscoelastic incompressible fluid [2]. Here $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded region with boundary $\partial\Omega$ of the class C^∞, $n \leq 4$, $T > t_0$. Introduce the denotation $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$. The closure of $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ in the space $\mathbb{L}_2$ is denoted by $\mathbb{H}_\sigma$. Let $\mathbb{H}_\pi$ is orthonormal complement for $\mathbb{H}_\sigma$ in $\mathbb{L}_2$. The existence of unique solution $v \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\sigma)$, $r \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ of the problem (3)–(6) can be proven by applying of the Theorem 1.

[1] *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht etc.: VSP, 2003.

[2] *Oskolkov A. P.* Initial boundary value problems for flows of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids, Trudy Mat. Inst. AN SSSR, **179**, 126–164 (1988).

Метод геометрической интерпретации зачачи для решения систем нелинейных (недифференциальных) уравнений

А.С. Фомочкина

РГУ нефти и газа им.И.М. Губкина, Москва, Россия

e-mail: nastja88@gmail.com

В настоящей работе предлагается новый вычислительный алгоритм для решения систем нелинейных (недифференциальных) уравнений, специально рассчитанный на эффективное использование многопроцессорных систем за счет изначального присутствия в нем так называемого естественного параллелизма [1]. Алгоритм относится к решению системы из n-нелинейных уравнений в постановке, когда требуется ответить на вопрос лежит ли решение внутри некоторой области n-мерного пространства или нет. Итак, задана система уравнений

$$
\begin{cases}
F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
\qquad\qquad \vdots \\
F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0
\end{cases} \tag{1}
$$

Требуется найти ее решение, т.е. найти такие наборы , что каждый из них удовлетворяет каждому из уравнений системы (1). Поступим следующим образом. Зададим в n-мерном пространстве шар K с границей S и постараемся ответить на вопрос: имеются ли внутри шара точки, координаты которых являются решением системы (1). Если такие точки имеются, то уточнять решение будем, уменьшая размер шара. Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим преобразование n-мерного пространства, заданное следующими соотношениями:

$$
\begin{cases}
x_{1\,\mathrm{new}} = x_{1\,\mathrm{old}} + F_1(x_{1\,\mathrm{old}}, x_{2\,\mathrm{old}}, \ldots, x_{n\,\mathrm{old}}) \\
\qquad\quad \vdots \\
x_{n\,\mathrm{new}} = x_{n\,\mathrm{old}} + F_n(x_{1\,\mathrm{old}}, x_{2\,\mathrm{old}}, \ldots, x_{n\,\mathrm{old}})
\end{cases} \tag{2}
$$

Очевидно, неподвижные точки этого преобразования – это точки, координаты которых являются решениями системы (1). Далее опираясь на теорему Брауэра [2], проверим, есть ли внутри неподвижная точка или нет. Для этого применим к точкам на сфере S преобразование (2), затем получившиеся векторы нормируем и перенесем в начало координат. Тем самым получим отображение сферы в единичную сферу. И, в зависимости от того, насколько последняя будет заполнена, и какова будет ориентация точек на ней, ответим на поставленный вопрос.

[1] Е.В. Гливенко, Параллельные вычисления при разведке и разработке залежей нефти и газа. М.: МАКС Пресс, 2010

[2] П.С. Александров, Комбинаторная топология. М., Л.: ОГИЗ, 1947.

Теорема Хелли, трансляты множеств и опорная функция

Б.Н.Хабибуллин

Башкирский государственный университет, Уфа

e-mail: khabib-bulat@mail.ru

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство множеств в $\mathbb{R}^n$, S — объединение всех этих множеств, а C — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. В терминах опорных функций множеств из $\mathcal{S}$ и множества C устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых некоторый параллельный сдвиг (транслят) множества C покрывает множество S. Будет отмечена связь рассматриваемых вопросов с задачами неполноты экспоненциальных систем в пространствах функций. Исследование основано на Теореме Хелли о пересечениях выпуклых множеств [1] и ее развитиях.

Приведем характерные результаты, ограничившись плоским (двумерным) случаем; $\mathbb{R}^2$ отождествляется с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Опорной функцией множества $S \subset \mathbb{C}$ называется функция $h_S(\theta) := \sup_{s\in S} \operatorname{Re} se^{-i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Теорема о покрытии транслятами выпуклого множества $C \Subset \mathbb{C}$. *Пусть C — выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}$ — семейство множеств из $\mathbb{C}$, а S — объединение всех множеств из $\mathcal{S}$. Кроме того, C замкнутое или S открытое множество. Тогда следующие 4 утверждения эквивалентны.*

1. *Некоторый транслят множества C покрывает S.*
2. *Для любого набора трех множеств S_1, S_2, S_3 из $\mathcal{S}$ и любого замкнутого треугольника, описанного вокруг C, найдется точка $z \in \mathbb{C}$, для которой все три транслята S_1+z, S_2+z, S_3+z содержатся в этом треугольнике.*
3. *Для любого набора трех множеств $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ и для любых наборов чисел $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ и $q_1, q_2, q_3 \geq 0$ при $q_1e^{i\theta_1} + q_2e^{i\theta_2} + q_3e^{i\theta_3} = 0$ выполнено неравенство $q_1h_{S_1}(\theta_1)+q_2h_{S_2}(\theta_2)+q_3h_{S_3}(\theta_3) \leq q_1h_C(\theta_1)+q_2h_C(\theta_2)+q_3h_C(\theta_3)$.*
4. *Для любого набора трех множеств $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ и для любого набора чисел $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ имеют место следующие условия.*
   (a) *Если всякая разность из этого набора чисел кратна π, то для каждой пары номеров $k, j \in \{1, 2, 3\}$, для которых разность $\theta_j - \theta_k$ не кратна 2π, выполнено неравенство $h_{S_1}(\theta_k) + h_{S_2}(\theta_j) \leq h_C(\theta_k) + h_C(\theta_j)$.*
   (b) *Если разность $\theta_2 - \theta_1$ не кратна π, то справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &h_{S_1}(\theta_1)\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} + h_{S_3}(\theta_3) + h_{S_2}(\theta_2)\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} \\ &\leq h_C(\theta_1)\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} + h_C(\theta_3) + h_C(\theta_2)\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\,. \end{aligned}$$

Ситуация неограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ ввиду ее многовариантности при $n \geq 3$ будет рассмотрена лишь для некоторых случаев и несколько более детально для плоского случая $n = 2$. Случаи ни замкнутого, ни открытого выпуклого множества C вовсе не затрагиваются как весьма затруднительные даже в выборе подходящей терминологии.

Исследование поддержано проектом ФЦП «Развитие научно-технических программ», соглашение № 14.Б37.21.0358.

[1] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли *Теорема Хелли.* М.: Мир, 1968.

[2] Хабибуллин Б. Н. Теорема Хелли и трансляты множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции // Матем. сборник (в печати).

Об иерархии подмоделей дифференциальных уравнений

С.В. Хабиров

ИМех РАН, УГАТУ, e-mail: habirov@anrb.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений допускающая группу преобразований. По алгебре Ли этой группы можно построить иерархию подмоделей. Эту иерархию можно выбрать так, что решения любой подмодели будут решениями некоторой другой подмодели этой же иерархии. Для этого надо вычислить оптимальную систему подалгебр и построить граф - дерево вложенных подалгебр, а затем вычислить дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования для каждой подалгебры. Инварианты надалгебры будут функциями инвариантов подалгебры. Операторы инвариантного дифференцирования надалгебры линейно выражаются через операторы инвариантного дифференцирования подалгебры над полем инвариантов подалгебры. Сравнение представлений групповых решений дает связь между решениями подмоделей надалгебры и подалгебры.

Авторезонансное возбуждение магнитного бризера полем упругой волны

А.Т. Харисов

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

e-mail: khantaf@mail.ru

Рассматривается параметрическое авторезонансное возбуждение малоамплитудной нелинейной магнитной неоднородности в виде бризера полем упругой волны в магнитных материалах. При этом нелинейная динамика намагниченности описывается возмущенным уравнением синус-Гордона. Показано, что возбуждение магнитного бризера возможно упругой волной с частотой, равной удвоенной частоте ферромагнитного резонанса при медленном росте со временем резонансного поля. В реальности эффективное возбуждение магнитного бризера достаточно большой амплитуды становится наиболее вероятным либо вблизи существующих дефектов образца, на которых имеются готовые магнитные статические неоднородности, либо на магнитных неоднородностях, созданных импульсным пространственно локализованным магнитным полем.

Matching of power-logarithmic asymptotic expansions of singular Cauchy problem for system of ODEs

O.Yu. Khachay
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
e-mail: khachay@yandex.ru

We consider the Cauchy problem for two nonlinear ordinary differential equations (ODEs)

$$\varepsilon\frac{dU}{dt} = f(t,U,V), \;\; \frac{dV}{dt} = g(t,U,V), \;\; U(0) = A, \;\; V(0) = 0 \tag{1}$$

with a small parameter $\varepsilon > 0$ multiplying the derivative in one of the equations. The functions $f(t,U,V)$ and $g(t,U,V)$ are assumed to be infinitely differentiable for all $0 \le t \le T$, $0 \le U \le B$, $|V| \leqslant B$, where $0 < A < B$. Following conditions: $\frac{\partial f}{\partial U}(t,U,V) < 0$ for $t > 0, U > 0$ and $g(0,0,0) = 0$ are also assumed to be satisfied. The right-hand side of this equation has a zero of high order at the origin with respect to one of the unknown functions. Rather common example of behavior of such functions is shown by asymptotic: $f(t,U,V) = t - U^r + \varphi(V) + t\psi(t,V) - U\chi_1^2(t,V) - U^2\chi_2^2(t,V) - \ldots - U^s\chi_s^2(t,V)$, where $r, s \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$, all functions φ, ψ and χ_j belong to $\mathbf{C}^\infty$ and each of them tends to zero at the origin.

Using method of matched asymptotic expansions [1] we construct inner, intermediate and outer expansions, because problem (1) has two boundary layers in a neighborhood of the initial point [2, 3]. Despite the additional complexity of this problem associated with the inability to use standard matching conditions relating the power-logarithmic expansions in the small parameter in the intermediate and outer layers, a uniform asymptotic approximation to the solution modulo any power of the small parameter is constructed and justified.

[1] A.M. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[2] A.M. Il'in, Yu.A. Leonychev and O.Yu. Khachay, Sbornik Math. **201**, Is. 1–2, P. 79–101 (2010)

[3] O.Yu. Khachay, Diff. Eq., **47**, Is. 4, P. 604–607 (2011)

Граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических неубывающих по времени областях

Шухардин А.А.
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия
e-mail: shukhardinaa@gmail.com

Пусть нецилиндрическая область $\Omega_T = \{(x,t)|0 < x < s(t), 0 < t < T\}$, где $x = s(t)$ - известная гладкая функция, занята вязким теплопроводным газом. Одномерное нестационарное движение газа в области Ω_T описывается системой уравнений [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = R\rho\theta, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{2}$$

$$\rho(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x}) = \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \mu(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - p\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x,t) \in \Omega_T. \tag{3}$$

Здесь $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $p(x,t)$ и $\theta(x,t)$ - плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа; μ, R, κ - положительные константы: вязкость, газовая постоянная и коэффициент теплопроводности газа соответственно.

В начальный момент времени задаются u, θ, ρ:

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta(x,t)|_{t=0} = \theta_0(x), \quad \rho(x,t)|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in [0, s_0], \tag{4}$$

где $s_0 = s(0)$. На известных границах $x = 0$ и $x = s(t)$ задаются условия:

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=s(t)} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\rho(x,t)|_{x=s(t)} = \rho_2(t) \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

$$\theta(x,t)|_{x=0} = \theta_1(t), \quad \theta(x,t)|_{x=s(t)} = \theta_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Задача Gas. Требуется найти функции $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $\theta(x,t)$ удовлетворяющие системе уравнений (1)–(3), если в начальный момент и на известных границах выполняются условия (4)–(7).

В работе доказываются теоремы существования и единственности глобального обобщенного и классического решений задачи Gas.

[1] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.*Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* Новосибирск: Наука, 1983.

[2] Kaliev I.A., Kazhikhov A.V. Well-posedness of a gas-solid phase transition problem. *J. of Math. Fluid Mech.* (1999) **1**, No. 3, 282–308.

Признаки синхронизации на субгармониках в нелинейных динамических системах

М.Г. Юмагулов

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: yum_mg@mail.ru

Рассматривается зависящая от параметра μ динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$x' = F(x, \mu) + g(t, \mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

в котором $F(x, \mu)$ и $g(t, \mu)$ – это гладкие по совокупности переменных функции, при этом функция $g(t, \mu)$ является T-периодической по t. Предполагается, что $F(0, \mu) \equiv 0$ и при некотором $\mu = \mu_0$ выполнено тождество $g(t, \mu_0) \equiv 0$. Наконец, предполагается, что матрица Якоби $A(\mu) = F'_x(0, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ имеет пару простых собственных значений $\pm\nu_0 i$, где $\nu_0 > 0$. Уравнение (1) можно рассматривать как динамическую систему, имеющую собственную частоту ν_0 и на которую воздействует внешний периодический сигнал $g(t, \mu)$ частоты $\nu = 2\pi/T$.

Пусть q – натуральное число. Говорят [1], что значение μ_0 параметра μ является *точкой синхронизации на субгармониках периода qT системы (1)*, если существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и определенная при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывная функция $\mu(\varepsilon)$ такая, что $\mu(0) = \mu_0$ и для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (1) при $\mu = \mu(\varepsilon)$ имеет ненулевое периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$ минимального периода qT такое, что функция $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε, при этом $\|x(t, \varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to +0$ равномерно по t.

В докладе приводится схема исследования задачи о синхронизации на субгармониках в системе (1), основанная на разработанном ранее (см. [2] и имеющуюся там библиографию) операторном методе исследования задач о многопараметрических бифуркациях. Основным является предположение, что отношение частот ν_0 и ν является рациональным: $\dfrac{\nu_0}{\nu} = \dfrac{p}{q}$ при натуральных p и q. Предлагаемая схема позволяет в новых условиях изучить явление синхронизации, получить ряд эффективных его признаков, получить асимптотические представления возникающих колебаний. Рассмотрены приложения к анализу задач о синхронизации периодических колебаний в моделях Матье, Дуффинга и Ван-дер-Поля.

[1] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. *Лекции по нелинейной динамике.* - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. – 516 с.

[2] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфим. матем. журнал. 2010. Т. 2, № 4. С. 3-26.

Inverse problem for a nonlinear partial integro-differential equations of the higher order

T.K. Yuldashev

Siberian State Aerospace University, Russia

In this paper it is considered an inverse problem for a nonlinear partial integro-differential equation of the higher order

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n \times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\left(t,x,\int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x) =$$

$$= p(t)u(t,x) + f(t,x,u(t,x))$$

with initial value conditions

$$u(t,x)_{|t=0} = \varphi_1(x),\ \frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_{k+1}(x),\ x \in \Re,\ k = \overline{1,2n+m-1}$$

and with additional condition

$$u(t,x)_{|x=x_0} = \psi(t),$$

where $f(t,x,u) \in C(D \times \Re)$, $\varphi_i(x) \in C(\Re)$, $i = \overline{1,2n+m}$, $\psi(t) \in C^{2n+m}(D_T)$, $\psi(0) \neq 0$, $p(t), u(t,x)$ – unknown functions, n, m – arbitrary natural numbers, $a = a\left(t,x,\int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(s,y)u(s,y)dyds\right) \in C^{2n+m,2n+m}(D \times \Re)$, $0 < K_i(t,x) \in C(D)$, $i = 1,2$, $D_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$.

It is proposed in this paper a technique based on the characteristics method. This technique allows, moving to a new variable, provide a partial differential equation as an ordinary differential equation describing the change of unknown function along the characteristics. The study of the inverse problem reduces to the study of nonlinear Volterra integral equation. By the method of successive approximations it is proved the existence and uniqueness of the solution of this problem.

Частные решениия (2+1)-мерного нелинейного уравнения типа Шредингера

К.Р. Есмаханова, М.Т. Ильясова, Ж.Р. Мырзакулова, Д.И. Тунгушбаева
Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
e-mail: myrzakul@mail.ru

Рассматривается (2+1)-мерное нелинейное уравнение типа Шредингера следующего вида:

$$iq_t + M_1 q + vq = 0, \quad ip_t - M_1 p - vp = 0, \quad M_2 v = -2M_1(pq), \tag{1}$$

где p, q и v являются произвольными комплексными функциями. Здесь $M_1 = 4(a^2-2ab-b)\partial^2_{xx}+4\alpha(b-a)\partial^2_{xy}+\alpha^2\partial^2_{yy}$, $\quad M_2 = 4a(a+1)\partial^2_{xx}-2\alpha(2a+1)\partial^2_{xy}+\alpha^2\partial^2_{yy}$, где a, b – действительные постоянные и α – комплексная постояннная. Решение системы (1) ищем для граничных условий: $q \to 0, \quad p \to 0, \quad v \to 0, \quad$ при $x, y \to \pm\infty$. Для построения решений, необходимо рассматривать матричную $\bar{\partial}$ – проблему вида

$$\frac{\partial W(\lambda,\bar\lambda)}{\partial\bar\lambda} = \iint\limits_G W(\mu,\bar\mu)R(\mu,\bar\mu;\lambda,\bar\lambda)d\mu\wedge d\bar\mu + W'(\lambda,\bar\lambda), \tag{2}$$

где W, W' и R являются матричными функциями, определенными на ограниченной области G. Интегральное матричное уравнение, соответствующее уравнению (2), имеет вид:

$$W(\lambda,\bar\lambda) = V(\lambda,\bar\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_G \frac{d\lambda'\wedge d\bar\lambda'}{\lambda'-\lambda}\iint\limits_G W(\mu,\bar\mu)R(\mu,\bar\mu;\lambda',\bar\lambda')d\mu\wedge d\bar\mu, \tag{3}$$

где символ $\wedge$ означает внешнее произведение и $W' = \frac{\partial V}{\partial\bar\lambda}$. Наша задача построить матричные функции W и R, удовлетворяющие (3). Рассмотрим (3) в классах $V(\lambda,\bar\lambda) \in L_q(G), \quad q \geq \frac{p}{p-1}, \quad p > 2, \quad R(\mu,\bar\mu;\lambda',\bar\lambda') \in L_p(G), \quad p > 2$ по μ, $\bar\mu$ и $L_1(G)$ по λ , $\bar\lambda$ $\quad 1 \leq q < 2, \quad W \in L_q(G), \qquad q \geq \frac{p}{p-1} \Rightarrow \; 1 \leq q < 2$. Связь между уравнением (1) и интегральным уравненем (3) задается формулами $q = -2i(W_{-1})_{12}, \quad p = 2i(W_{-1})_{21}, \quad v = i(C_2 - C_1), \quad C_1 = i(W_{-1})_{11}, \quad C_2 = i(W_{-1})_{22}$.

Конкретный вид решения уравнения (1) зависит от выбора ядра R, что позволяет находить различные частные решения, в том числе солитонного типа [1, 2].

[1] L. Martina, K. Myrzakul, R. Myrzakulov and G. Soliani *Deformation of surfaces, integrable systems and Chern-Simons theory.* J. Math. Phys. V.42, №3.(2001), 1397–1417.

[2] K. Esmakhanova and et all. *Integrable Heisenberg ferromagnets and soliton geometry of curves and surfaces*, In book: "Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II". World Scientific, London, P. 248-253 (2003).