На правах рукописи

УДК 517.5

Талипова Галия Рифкатовна

ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ НА ИНТЕРВАЛЕ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа - 2016

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и геометрии
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии БашГУ
Хабибуллин Булат Нурмиевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры
высшей математики ФГБОУ ВО «Казанский государственный
архитектурно-строительный университет»
Шабалин Павел Леонидович

кандидат физико-математических наук, старший научный
сотрудник лаборатории им. П. Л. Чебышева
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
Белов Юрий Сергеевич

Ведущая организация:
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится 30 сентября 2016 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 при Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН по адресу: 450077, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН

Автореферат разослан ________________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.057.01, кандидат физ.-мат. наук С. В. Попенов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование взаимосвязи между распределением нулей целых, т. е. голоморфных на всей комплексной плоскости, функций и ограничениями на рост модуля таких функций вблизи бесконечно удаленной точки представляет значительный интерес не только как внутренний вопрос теории распределения значений (в частности, нулей) целых функций, но и как необходимый, а зачастую и решающий этап исследования таких вопросов теории функций комплексного переменного, как теории аппроксимации (например, экспоненциальными системами), интерполяции, аналитического продолжения, спектрального синтеза и т. д.

Как обычно, через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ обозначаем соответственно множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел в их естественной, если необходимо и возможно, алгебраической, геометрической, топологической и/или порядковой интерпретации.

В истоках тематики диссертации лежит несколько расширенная версия Основной теоремы алгебры (XVII–XVIII вв.), которую сформулируем здесь в подходящей для нас форме: *многочлен степени не выше $p \in \mathbb{N}$, т. е. целая функция, модуль которой растет не быстрее $|z|^p$ при $\mathbb{C} \ni z \to \infty$, имеет, с учетом кратности, ровно p корней, или нулей.* Планомерное исследование распределения нулей целых функций, прежде всего конечного порядка, было начато в конце XIX – начале XX вв. после работ Ж. Адамара и А. Пуанкаре в этом направлении. Интенсивно эти исследования продолжались весь XX в. и динамично развиваются и поныне как из внутренних потребностей теории целых функций экспоненциального типа (эти аспекты достаточно полно освещены в ряде обзоров и монографий многих авторов, в частности, у Н. Винера и Р. Пэли (1934 г.), Н. Левинсона (1940), Р. Ф. Боаса (1954), Б. Я. Левина (1956–96), Л. Шварца (1943), М. М. Джрбашяна (1966), Р. М. Редхеффера (1972), У. А. Дж. Люксембурга (1976), Р. М. Янга (1980), А. Ф. Леонтьева (1980), Н. К. Никольского, Б. С. Павлова и С. В. Хрущева (1980), П. Кусиса (1988–92–96), В. П. Хавина и Б. Ёрикке (1994), П. Боруайна и Т. Эрдели (1995), А. М. Седлецкого (2000–01–03–05), Е. И. Моисеева, А. П. Прудникова и А. М. Седлецкого (2004), К. Сейпа (2004), Б. Н. Хабибуллина (2006–08–11–12), А. Полторацкого (2015) и охватывают материал вплоть до последних десятилетий), так и в связи с многочисленными ее приложениями в теориях сигналов, связи, антенн (см. монографию Я. И. Хургина и В. П. Яковлева (1962), обзоры Х. Бруны, Х. Массанеды и Х. Ортеги-Серды (2003), Дж. Дж. Бенедетто и Х.-Ч. Ву (2000), и, например, статью Л. Кнокерта и Д. Де Зуттера

(2002)), к управляемости систем с распределёнными параметрами (см. монографию С. А. Авдонина и С. А. Иванова (2012)), в теории когерентных состояний из математической физики (см. монографию А. М. Переломова (1987), статью А. Вурдаса (1997)) и т. д.

Векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ всех голоморфных функций в открытом множестве $\mathcal{O}$ обозначаем через $\mathrm{Hol}(\mathcal{O})$; $\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций, для которого используем еще одно специальное обозначение Ent. Наше исследование сконцентрировано на выявлении условий, при которых последовательность точек $\Lambda := \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ на $\mathbb{C}$ является подпоследовательностью нулей для некоторой ненулевой функции $f \in \mathrm{Ent}$ экспоненцильного типа, т. е. удовлетворяющей условию

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{\log\bigl|f(z)\bigr|}{|z|} \leqslant \sigma < +\infty, \tag{1}$$

с дополнительными ограничениями на рост $|f|$ прежде всего вдоль вещественной оси $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ типа ограниченности сверху (пространства Бернштейна) или, более общо́, мажорированием $\log|f|$ какой-либо субгармонической функцией класса Картрайт (см. определение ниже). Результаты об описание подпоследовательностей нулей для таких классов целых функций посредством известной двойственности, наведенной преобразованием Фурье – Лапласа, дают, как правило, некоторые утверждения о (не)полноте экспоненциальных систем в различных пространствах функций на интервале заданной длины. В дополнение к задачам полноты отметим также, что в ряде вопросов интерполяции, экстраполяции, представления рядами, в задачах локального описания идеалов и подмодулей, в проблеме спектрального синтеза и др., как необходимое или достаточное условие часто фигурирует требование того, что заданная последовательность была (под)последовательность нулей для некоторого класса целых функций экспоненциального типа (**??**) из рассматриваемых в диссертации. Все это дополнительно актуализирует исследование подпоследовательностей нулей для таких классов. Одновременно заметим, что задача описания точной последовательности нулей для классов целых функций принципиально отличается от задачи описания <u>под</u>последовательностей нулей для таких классов. Довольно часто для первой задачи можно манипулировать с представлением Адамара–Вейерштрасса для таких функций, построенным по всем нулям, в то время как для подпоследовательностей нулей такой подход проблематичен. Например, на первом пути С. Ю. Фаворов относительно недавно (2008) дал полное описание последовательностей нулей для пространств Бернштейна и классов Картрайт целых функций экспоненциального типа в традиционных терминах классических плотностей последовательностей точек, возможность чего для подпоследовательностей нулей, скорее всего, невозможна.

Цели работы. Исследованы следующие аспекты очерченной тематики:

- необходимые и одновременно достаточные условия для множеств неединственности (подпоследовательностей нулей) в классе Бернштейна целых функций экспоненциального типа не выше σ, ограниченных на $\mathbb{R}$, в терминах специальных классов тестовых функций;
- критерии полноты систем экспонент в классических пространствах непрерывных на отрезке и/или класса L^p, $p \geqslant 1$, на интервале заданной длины d с точностью до конечного числа экспоненциальных функций в терминах тех же тестовых функций и длины d;
- перенос результатов о подпоследовательностях нулей для классов Бернштейна на подпространства целых функций экспоненциального типа, выделяемых верхними ограничениями на их рост посредством субгармонической функции-мажоранты класса Картрайт;
- использование полученных результатов к установлению новых теорем единственности для классов целых функций экспоненциального типа, к получению условий полноты систем экспонент в классических пространствах функций на интервале, условий устойчивости подпоследовательностей нулей для классов Бернштейна и других классов целых функций, а также устойчивости свойства полноты систем экспонент при малых вариациях показателей в терминах традиционных плотностей распределения точек на $\mathbb{C}$ или максимально близких к таковым; получение новых доказательств классических и предшествующих результатов в едином ключе, продиктованном методами, использованными в диссертации.

Методы исследования. В диссертации наряду со стандартной техникой теории функций комплексного переменного, теории целых и субгармонических функций, теории потенциала и функционального анализа используется неконструктивный, т. е. не требующий специальных явных конструкций и построений целых и субгармонических функций, метод выметания, или метод огибающей, из работ Б. Н. Хабибуллина, основанный на версиях теоремы Хана – Банаха, двойственном представлении суперлинейных функционалов на проективных пределах векторных решеток, аппарате мер и потенциалов Йенсена.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) установлены необходимые и одновременно достаточные условия для множеств неединственности в произвольном классе Бернштейна целых функций экспоненциального типа не выше числа $\sigma > 0$, ограниченных на $\mathbb{R}$, в терминах специальных классов тестовых функций;

2) даны критерии полноты систем экспонент в классических пространствах непрерывных на отрезке и/или класса L^p, $p \geqslant 1$, на отрезке (интервале) I_d заданной длины d с точностью до одной (для $C(I_d)$ и $L^p(I_d)$ при $p \geqslant 2$) или двух ($L^p(I_d)$ при $1 \leqslant p < 2$) экспонент в терминах значений тех же тестовых функций на последовательности показателей системы экспонент и длины d отрезка (интервала);

3) результаты о подпоследовательностях нулей для классов Бернштейна перенесены на подпоследовательности нулей для подпространств целых функций экспоненциального типа, выделяемых верхними ограничениями на их рост посредством субгармонической функции-мажоранты класса Картрайт;

4) полученные в диссертации основные результаты из пп. **??**)–**??**) использованы для вывода новых теорем единственности для классов целых функций экспоненциального типа, для установления условий полноты систем экспонент в классических пространствах функций на отрезке (интервале), условий устойчивости подпоследовательностей нулей для классов Бернштейна и других классов целых функций, а также устойчивости свойства полноты систем экспонент при малых вариациях показателей в терминах традиционных плотностей распределения точек на $\mathbb{C}$ или подобных им; в качестве иллюстрации даны новые доказательства классических и предшествующих результатов, продиктованные основными результатами диссертации.

Все основные условия на подпоследовательности нулей формулируются в терминах различных специальных классов тестовых функций на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, впервые введенных и исследованных в связи с результатами пп. **??**)–**??**).

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных областях математики (теория функций, теория операторов, дифференциальные уравнения, теория аппроксимации, теория потенциала и др.), где требуются информация о взаимосвязи распределения нулей целых функций и их возможным минимальным ростом на бесконечности по различным направлениям (лучам). Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН, С.-Петербургском отделении Математического института РАН, Казанском (Приволжском) федеральном университете и Институте математики и механики им. Н. И. Лобачевского при КФУ, Московском государственном университете, Южном федеральном университете, Башкирском государственном университете, Брянском государственном педагогическом университете, а также в других ведущих российских и зарубежных (Азербайджан, Армения, Израиль, Испания, Кипр, Китай, Норвегия, США, Украина, Франция, Швеция и др.) научных центрах.

Аппробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», посвященная 100-летию Башкирского государственного университета (1–6 октября 2009 г., Уфа, БашГУ), IV–VIII традиционных Международных школах-конференциях для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, БашГУ, октябрь 2011-15 гг.), Всероссийской молодёжной научно-практической конференция «Актуальные вопросы науки и образования» (Уфа, БашГУ, 25–27 апреля 2013 г.), XI–XII Казанские международные летние школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, МГУ, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 22–28 августа 2013 г. и 27 июня – 04 июля 2015 г. соответственно), Международной конференции «Комплексный анализ и смежные вопросы» (Исследовательская лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 14–18 апреля 2014 г.), на научно-исследовательском молодежном семинаре «Примеры и контрпримеры в алгебре, анализе, геометрии» кафедры высшей алгебры и геометрии, 2009–15 гг. (руководитель Б. Н. Хабибуллин).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ [?]–[?]. Основная часть результатов диссертации опубликована в трех работах [?]–[?] из п. I списка литературы, входящих в перечень ВАК и опубликованных в соавторстве. В работе [?] научному руководителю Б. Н. Хабибуллину принадлежит лишь постановка задачи и предложения по выбору метода исследования, соавтору Ф. Б. Хабибуллину — некоторые правки в формулировках и доказательствах, а также техническая поддержка. Все окончательные формулировки результатов из [?] и их доказательства принадлежат Г. Р. Талиповой. В статье [?] научному руководителю Б. Н. Хабибуллину принадлежит только постановка задачи дальнейшего совершенствования результатов из [?], а Г. Р. Талиповой — реализация такого усовершенствования в полном объёме. В совместной работе [?] Т. Ю. Байгускарову и Б. Н. Хабибуллину принадлежит только часть [?, § 2], которая вошла в диссертацию лишь как ссылка при применении, а все остальные положения и результаты из [?, §§ 1, 3–4], включенные в диссертацию с полными доказательствами, получены лично Г. Р. Талиповой. Часть промежуточных или анонсированных результатов доказаны или приведены в 11 источниках [?]–[?] из п. II списка литературы в форме трудов, материалов и тезисов международных, всероссийских и региональных конференций. Из тезисов и материалов по совместным докладам на конференциях, объединяющих нескольких авторов, включены в диссертацию также только части, разработанные лично диссертантом. Таким образом, все основные положения диссертации принадлежат Г. Р. Талиповой и доказаны ею.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из содержания, введения (раздел 1) и двух разделов 2 и 3, разбитых на подразделы (4 во втором и 2 в третьем) с отдельными пунктами и подпунктами, а также тремя иллюстрациями-чертежами. Объем диссертации — 86 страниц. Библиография — 79 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении вводятся основные определения, понятия и обозначения вместе с соглашениями (подраздел 1.1) излагается история вопроса (подраздел 1.2), а также приводятся и обсуждаются ключевые предшествующие результаты (Теоремы Картрайт, Шварца, Левинсона, Бёрлинга–Мальявена, Редхеффера–Алесандера, А. Д. Баранова и др.). Наконец, в подразделе 1.3 Введения формулируются основные выносимые на защиту теоремы в упрощенном и ослабленном виде в целях большей наглядности и обозримости — Теорема 1.1 (частный случай общего результата о подпоследовательностях нулей для пространств Бернштейна), Теорема 1.2 (о полноте систем экспонент в пространствах на интервале), Теорема 1.3 (о последовательностях нулей для пространств целых функций, мажорируемых субгармонической функцией класс Картрайт).

Приведем сначала некоторые из основных определений, обозначений и соглашений, используемых в течение всей диссертации.

Множества. Через $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z < 0\}$ обозначаем открытые верхнюю и нижнюю полуплоскости в $\mathbb{C}$, а $\mathbb{C}_\pm := \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость, или сфера Римана; $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — открытый единичный круг с центром в нуле. Используем также обозначения $\mathbb{R}_* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{C}_* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathbb{D}_* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Для $S \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\overline{S}$ и ∂S обозначаем соответственно его замыкание и границу в $\mathbb{C}_\infty$, но для $S \subset \mathbb{R}$ границу S в $\mathbb{R}$ обозначаем как $\partial_{\mathbb{R}} S$. Наряду со стандартными при $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ обозначениями (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ для различных интервалов на $\mathbb{R}$ и расширенной вещественной прямой используем и обозначения $I_d \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\overline{I}_d$) для открытого (соответственно замкнутого) интервала длины d, если по контексту значение имеет лишь его длина, а не расположение на $\mathbb{R}$.

Открытый круг с центром $z \in \mathbb{C}$ *радиуса* $t \in \mathbb{R}$ обозначаем через $D(z, t) := \bigl\{|w - z| < t \colon w \in \mathbb{C}\bigr\}$. При $t \leqslant 0$, очевидно, $D(z, t) = \varnothing$ — пустое множество. Кроме того, при $t > 0$ полагаем $\overline{D}(z, t) := \overline{D(z, t)}$ — *замкнутый круг с центром* $z \in \mathbb{C}$ *радиуса* $t \in \mathbb{R}$, но далее будет удобно считать, что по определению $\overline{D}(z, 0) := \{z\}$ — *одноточечное множество.* Наконец, используем обозначения $D(t) := D(0, t) = t\mathbb{D}$ при $t > 0$, $D(t) := \overline{D}(0, t) = t\overline{\mathbb{D}}$ при $t \geqslant 0$.

Последовательности точек в области. Каждой последовательности точек (пустой, конечной или счетной)

$$\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in K} \subset \Omega, \quad K \subset \mathbb{N}, \tag{2}$$

в области или открытом множестве Ω, где возможны и повторяющиеся конечное число раз точки, можно сопоставить положительную целочисленную *считающую меру* n_Λ, построенную по правилу

$$n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1, \quad S \subset \Omega, \tag{3}$$

— число точек λ_k, попавших в S. Для удобства и краткости записи для точки $z\in\Omega$ полагаем

$$n_\Lambda(z):=n_\Lambda\bigl(\{z\}\bigr),\quad z\in\Omega \tag{4}$$

и можем называть как саму последовательность Λ, так и функцию (??) *дивизором* на Ω. При такой трактовке *две последовательности* Λ и $\Gamma=\{\gamma_{k'}\}_{k'\in K'\subset\mathbb{N}}$ из Ω *равны*, или совпадают (пишем $\Lambda=\Gamma$), если для соответствующих им дивизоров $n_\Lambda(z)\equiv n_\Gamma(z)$ при всех $z\in\Omega$. Другими словами, способ нумерации в (??) не имеет значения. При этом носитель $\operatorname{supp}\Lambda$ для последовательности точек Λ — это носитель соответствующего ей дивизора или считающей меры. Запись $\lambda\in\Lambda$ (соотв. $\lambda\notin\Lambda$) означает, что $\lambda\in\operatorname{supp}\Lambda$ (соотв. $\lambda\notin\operatorname{supp}\Lambda$). Для подмножества $B\subset\mathbb{C}$ запись $\Lambda\subset B$ означает, что $\operatorname{supp}\Lambda\subset B$; $\Lambda\cap B$ — сужение последовательности на B с дивизором $n_\Lambda\bigm|_B$. Последовательность точек $\Gamma\subset\Omega$ включена в Λ, если $n_\Gamma(z)\leqslant n_\Lambda(z)$ в терминах дивизоров при всех $z\in\Omega$, и при этом пишем $\Gamma\subset\Lambda$, а Γ — *подпоследовательность* последовательности Λ; *объединение* $\Lambda\cup\Gamma$ через дивизоры задается тождеством $n_{\Lambda\cup\Gamma}(z)\equiv n_\Lambda(z)+n_\Gamma(z)$, $z\in\Omega$; для $\Gamma\subset\Lambda$ и только в этом случае *разность* последовательностей $\Lambda\setminus\Gamma$ определяет дивизор $n_{\Lambda\setminus\Gamma}(z)\equiv n_\Lambda(z)-n_\Gamma(z)$, $z\in\Omega$. Каждую последовательность точек, для которой важна нумерация ее членов, называем *пронумерованной,* или проиндексированной, *последовательностью*, а точки пронумерованных последовательностей Λ изображаем в круглых скобках, т. е. в виде $\Lambda=(\lambda_k)_{k\in K\subset\mathbb{N}}$, $\lambda_k\in\Omega$. Для последовательности $\Lambda\subset D(r)$ полагаем $n_\Lambda^{\text{rad}}(t):=\sum_{|\lambda|<t}n_\Lambda(\lambda)=n_\Lambda\bigl(D(t)\bigr)$, $t<r$, — *считающая* (радиальная) функция последовательности Λ; для $\Lambda\subset\Omega$ $n_\Lambda(z,t):=n_\Lambda\bigl(D(z,t)\bigr)$ — число точек из последовательности $\Lambda\subset\Omega$ в $D(z,t)\subset\Omega$.

Для меры ν на $\mathbb{C}$ с *носителем* $\operatorname{supp}\nu\subset\mathbb{R}$ используем *функцию* $\nu^{\mathbb{R}}$ её *распределения на* $\mathbb{R}$, определяемую по правилу

$$\nu^{\mathbb{R}}(t):=\begin{cases}-\nu\bigl([t,0)\bigr) & \text{при } t<0,\\ \nu\bigl([0,t]\bigr) & \text{при } t\geqslant 0.\end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, для последовательности $\Lambda\subset\mathbb{R}$ возникает функция её распределения $n_\Lambda^{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{R}$, определяемую (??) через n_Λ из (??) для Λ.

Последовательностям $\Lambda\subset\mathbb{C}$ сопоставляем экспоненциальную систему

$$\operatorname{Exp}^\Lambda:=\bigl\{z\mapsto z^{p-1}e^{\lambda z}\colon z\in\mathbb{C},\ \lambda\in\Lambda,\ 1\leqslant p\leqslant n_\Lambda(\lambda),\ p\in\mathbb{N}\bigr\}. \tag{6}$$

В таком контексте последовательность Λ называют *последовательностью показателей* системы экспонент $\operatorname{Exp}^\Lambda$. Под системой $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *на подмножестве* $S\subset\mathbb{C}$ понимаем систему из сужений функций из (??) на S.

Отношение порядка и функции. *Положительность* всюду понимается, в соответствии с контекстом, как $\geqslant 0$, а > 0 — *строгая положительность.* Аналогично для отрицательности.

Для упорядочиваемого множества X чисел, функций, мер или т. п. подкласс X^+ обозначает множество всех положительных элементов из X, а для элемента $x \in X$ полагаем $x^+ := \max\{0, x\}$. Для функции $f\colon S \to X$ используем обозначение $f^+\colon s \mapsto \bigl(f(s)\bigr)^+$, $s \in S$. В частности, $\log^+ s = \max\{\log s, 0\}$, $s \geqslant 0$, $\log 0 := -\infty$.

На множествах функций с упорядоченным множеством значений *отношение порядка* индуцируется с множества значений как *поточечное.* Функция f, действуютвующая из упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ в упорядоченное множество $(Y, \leqslant)$ *возрастающая,* если из $x_1 \leqslant x_2$, $x_1, x_2 \in X$, следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, и *строго возрастающая,* если из $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in X$, следует $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично определяется (строгое) убывание.

Сужение функции или меры a на множество S обозначаем как $a\Bigm|_S$.

Пространства функций. Как обычно, $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$ — векторные пространства над $\mathbb{C}$ непрерывных функций и интегрируемым на I_d модулем функции в p-ой степени, $p \in [1, +\infty)$, соответственно со стандартными sup-нормой и интегральной нормой $\|f\|_{L^p} := \Bigl(\int_{I_d} \bigl|f(x)\bigr|^p \,dx\Bigr)^{1/p}$ (в факторизованном по отношению эквивалентности «равны п. в.» $L^p(I_d)$).

Для открытого подмножества $\mathcal{O}$ из $\mathbb{C}$ или из $\mathbb{R}$ через $C^m(\mathcal{O})$ обозначаем пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $\mathcal{O}$ функций, $m \in \mathbb{N}$ или $m = \infty$. Если нужно уточнить, что в пространствах рассматриваются функции, принимающие только вещественные значения, то в обозначении пространства добавляем нижний индекс $\mathbb{R}$. Например, $C_{\mathbb{R}}(S)$ — пространство непрерывных на S функций со значениями из $\mathbb{R}$.

Последовательности нулей голоморфных функций. Для ненулевой функции $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ через Zero_f обозначаем последовательность точек в Ω, дивизор которой в каждой точке $z \in \Omega$ равен кратности нуля (корня) функции f в z, и называем ее *последовательностью нулей функции $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$.* Часто в нестрогой форме Zero_f называют последовательностью нулей (корней) функции f, перенумерованной с учетом кратности. Для нулевой функции в Ω по определению ее дивизор $n_{\operatorname{Zero}_0}$ — функция, тождественно равная $+\infty$ на Ω. Для любой последовательности точек Λ в Ω по определению $\Lambda \subset \operatorname{Zero}_0$. Функция $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ *обращается в нуль на* Λ (пишем $f(\Lambda) = 0$), если $\Lambda \subset \operatorname{Zero}_f$.

Пусть $H \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$ — подмножество (класс) в $\mathrm{Hol}(\Omega)$. Последовательность $\Lambda \subset \Omega$ — *последовательность нулей для* H, если существует функция $f \in H$ с $\mathrm{Zero}_f = \Lambda$; Λ — *подпоследовательность нулей для* H, если существует функция $f \not\equiv 0$ из H, для которой $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_f$. Когда класс H замкнут относительно вычитания, последовательность $\Lambda \subset \Omega$ называем *последовательностью,* или *множеством, единственности для* H, если из $f \in H$ и $f(\Lambda) = 0$ следует, что $f \equiv 0$ на Ω; подпоследовательность нулей для H в этом случае — *последовательность неединственности.*

Субгармонические функции. В диссертации используются два эквивалентных определения субгармоничности для *полунепрерывной сверху* функции $p\colon \Omega \to [-\infty, +\infty)$, $p \not\equiv -\infty$ на области Ω, а именно:

1) $p \in \mathrm{sbh}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для любой точки $z \in \Omega$ при некотором $r_z > 0$ $p(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(z + te^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$ при всех $t \in (0, r_z)$.

2) $p \in \mathrm{sbh}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда p локально интегрируема по мере Лебега на Ω и $\nu_p := \frac{1}{2\pi}\Delta p \geqslant 0$, где Δ — оператор Лапласа, а все понимается в смысле теории обобщенных функций (теории распределений Л. Шварца). При этом положительная борелевская мера ν_p называется *мерой Рисса* субгармонической функции p.

В частности, если $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ и $f \not\equiv 0$, то считающая мера n_{Zero_f} ее нулей — мера Рисса функции $\log|f| \in \mathrm{sbh}(\Omega)$. Функция $p \equiv -\infty$ на Ω, обозначаемая далее просто как $\boldsymbol{-\infty}$, по определению субгармоническая.

Через $\mathrm{sbh}(\Omega)$ и $\mathrm{har}(\Omega)$ обозначаем классы соответственно субгармонических и гармонических функций в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$.

Для $u \in \mathrm{sbh}(\Omega)$ её $(-\infty)$-множество обозначаем $(-\infty)_u(\Omega) := \{z \in \Omega\colon u(z) = -\infty\}$. Подмножество $E \subset \Omega$ называется *полярным в* Ω, если существует функция $u \in \mathrm{sbh}(\mathbb{C}) \setminus \{\boldsymbol{-\infty}\}$, для которой $E \subset (-\infty)_u(\Omega)$. В частности, если E не более чем счётно, то E — полярное множество. Если E полярное множество в $\mathbb{C}$, то мера Лебега его сужения на $\mathbb{R}$ равна нулю.

Класс Картрайт $\mathcal{C}$. Для функции φ, определённой почти всюду по мере Лебега на $\mathbb{R}$ значениями из $[-\infty, +\infty]$, полагаем $J[\varphi] := \int_{\mathbb{R}} \dfrac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$, если интеграл существует. Следуя В. И. Мацаеву и М. Л. Содину (2002 г.) функцию $u\colon \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty]$ называем *функцией класса Картрайт, если существует* $J[u^+] < +\infty$ *и дополнительно выполнены условия*

(i) $u \in \mathrm{sbh}(\mathbb{C})$ *с сужением* $u\,\big|_{\mathbb{C}_\pm} \in \mathrm{har}(\mathbb{C}_\pm)$*;*

(ii) $u(z)=u(\bar z)$ *для всех* $z\in\mathbb C$ *и* $u(0)=0$;

(iii) u — *функция конечного типа* $\operatorname{type}_\infty[u]$ *при порядке* 1, *т. е.*

$$\operatorname{type}_\infty[u]:=\limsup_{z\to\infty}\frac{u(z)}{|z|}<+\infty. \tag{7}$$

Класс всех функций Картрайт обозначаем через $\mathcal C$.

Пусть $\sigma\in(0,+\infty)$. Пример функции класса $\mathcal C$ — это функция

$$M_\sigma\colon z\mapsto\sigma|\operatorname{Im}z|,\quad z\in\mathbb C. \tag{8}$$

Для $u\in\mathcal C$ с мерой Рисса $\nu_u:=\frac{1}{2\pi}\Delta u$, очевидно, $\operatorname{supp}\nu\subset\mathbb R$ и можно использовать функцию $\nu_u^{\mathbb R}$ её распределения.

Весовые классы целых функций. Для произвольной функции

$$M\colon\mathbb C\to[-\infty,+\infty]:=\{-\infty\}\cup\mathbb R\cup\{+\infty\} \tag{9}$$

определим *весовой класс*

$$\operatorname{Ent}(\exp M):=\Bigl\{f\in\operatorname{Ent}\colon\bigl|f(z)\bigr|\leqslant\operatorname{const}_f\,e^{M(z)},\ z\in\mathbb C\Bigr\},$$

где $\operatorname{const}_f\geqslant 0$ — постоянная, зависящая от f. В таком контексте функцию M из (**??**) называем далее и *весовой функцией* или *весом*.

Для числа $\sigma>0$ в случае конкретной весовой функции M_σ из (**??**) класс $\operatorname{Ent}(\exp M)$ — это классическое пространство Бернштейна целых функций, которое можно определить и как класс целых функций, удовлетворяющих ограничению (**??**) и при этом ограниченных на вещественной оси, т. е. $\sup_{x\in\mathbb R}\bigl|f(x)\bigr|<+\infty$. Распространенное обозначение для пространства Бернштейна — B_σ^∞. Распространено также обозначение PW_σ^∞ — один из видов класса Пэли – Винера.

Преобразование Пуассона. Для функции φ, определённой почти всюду по мере Лебега на $\mathbb R$ значениями из $[-\infty,+\infty]$, значение *интеграла Пуассона* $\mathrm P_{\mathbb C_\pm}\varphi$ от такой функции φ при условии $\int_{\mathbb R}\dfrac{|\varphi(x)|}{1+x^2}\,dx<+\infty$ в произвольной точке $\lambda\in\mathbb C_\pm:=\mathbb C\setminus\mathbb R$ определяется как

$$(\mathrm P_{\mathbb C_\pm}\varphi)(\lambda):=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb R}\frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{(x-\operatorname{Re}\lambda)^2+(\operatorname{Im}\lambda)^2}\,\varphi(x)\,\mathrm dx,\quad \operatorname{Im}\lambda\neq 0. \tag{10}$$

В точках $\lambda\in\mathbb R_*:=\mathbb R\setminus\{0\}$, в которых значение функции φ определено, нам удобно полагать

$$(\mathrm P_{\mathbb C_\pm}\varphi)(\lambda):=\varphi(\lambda),\quad\lambda\in\mathbb R_*. \tag{11}$$

Определения (**??**) и (**??**) вместе определяют *преобразование Пуассона* $\mathrm P_{\mathbb C_\pm}\varphi$ функции φ, гармоническое в $\mathbb C_\pm$.

Преобразование Гильберта. Для функции φ, определённой почти всюду по мере Лебега на $\mathbb{R}$ значениями из $[-\infty,+\infty]$, для которой сходится (конечен) интеграл $J_1\bigl[|\varphi|\bigr] := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(t)|}{1+|t|}\,dt$, значение *прямого преобразования Гильберта* H функции φ в точке $x\in\mathbb{R}_*$ определяется по правилу

$$(\mathrm{H}\,\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} ⨍_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t := \frac{1}{\pi} \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} \frac{\varphi(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t, \quad x\in\mathbb{R}_*,$$

где в промежуточном равенстве перечёркнутый интеграл — главное значение интеграла в смысле Коши от функции φ. *Обратное преобразование Гильберта* отличается только знаком: $(\mathrm{H}^{-1}\,\varphi)(x) = -(\mathrm{H}\,\varphi)(x)$, $x\in\mathbb{R}_*$.

Полнота, минимальность, избыток. Система векторов из локально выпуклого пространства E *полна*, если замыкание ее линейной оболочки совпадает с пространством. Система векторов *минимальна* в E, если ни один вектор этой системы не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных. Если система векторов одновременно полна и минимальна, то она называется *точной*. Пусть $\mathcal{E}_\Lambda$ — последовательность попарно различных векторов из $\mathcal{E}\subset E$, проиндексированное точками из $\Lambda=\{\lambda_k\}\subset\mathbb{C}$. Говорим, что система $\mathcal{E}_\Lambda$ или последовательность Λ (для системы $\mathcal{E}_\Lambda$) имеет *избыток* $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda := \operatorname{exc}\Lambda = q\in\mathbb{Z}$ в пространстве E, или для E, (относительно $\mathcal{E}$) если мы придем от системы $\mathcal{E}_\Lambda$ к точной в E системе

- при $q\geqslant 0$ — после удаления q векторов из системы $\mathcal{E}_\Lambda$;
- при $q<0$ — после добавления $|q|$ новых векторов к $\mathcal{E}_\Lambda$ из $\mathcal{E}$.

Кроме того, если полнота не нарушается (не возникает) после удаления (соответственно добавления) любого конечного набора попарно различных векторов из $\mathcal{E}_\Lambda$ (соответственно из $\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_\Lambda$), то $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda := \operatorname{exc}\Lambda := +\infty$ (соответственно $\operatorname{exc}\mathcal{E}_\Lambda := \operatorname{exc}\Lambda := -\infty$).

1 Подпоследовательности нулей для пространства Бернштейна

1.1 Классы $R\mathcal{P}_0^m$ основных, или тестовых, функций

Всюду далее в этом разделе **??** *рассматриваем только случай*

$$m\in\bigl(\mathbb{N}\setminus\{1\}\bigr)\cup\{\infty\}. \tag{12}$$

Определение 1.1. Класс основных, или тестовых, функций $R\mathcal{P}_0^m$ определяем как подкласс всех *положительных непрерывных функций*

$$\varphi\colon \mathbb{R}_* \to [0,+\infty), \quad \varphi \in C(\mathbb{R}_*), \tag{??c}$$
$$Z_\varphi \subset \bigl\{x \in \mathbb{R}_*\colon \varphi(x) = 0\bigr\}, \tag{??z}$$
$$E_\varphi \subset \mathbb{R}_* \text{ — полярное в } \mathbb{C} \text{ и замкнутое в } \mathbb{R}_* \text{ подмножество,} \tag{??p}$$

с сужением на $\mathbb{R} \setminus \bigl(\{0\} \cup Z_\varphi \cup E_\varphi\bigr) = \mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)$ из класса

$$C^m\Bigl(\mathbb{R} \setminus \bigl(\{0\} \cup Z_\varphi \cup E_\varphi\bigr)\Bigr) = C^m\bigl(\mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)\bigr)$$

m раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)$, для которых одновременно выполнены

- *условие финитности*

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad |x| \geqslant R_\varphi > 0, \tag{14}$$

  где $R_\varphi > 0$ — постоянная, зависящая от φ;

- *условие полунормировки* в нуле

$$\limsup_{0 \neq x \to 0} \frac{\varphi(x)}{-\log|x|} \leqslant 1; \tag{15}$$

- *сопряженное условие положительности*

$$(-\operatorname{H}\varphi)'(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{(t-x)^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi). \tag{16}$$

Сопряженное условие положительности (**??**) эквивалентно *возрастанию* $\operatorname{H}^{-1}\varphi = -\operatorname{H}\varphi$ *отдельно на каждом открытом интервале — связной компоненте дополнения* $\mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)$ *замкнутого в* $\mathbb{R}_*$ *множества* $Z_\varphi \cup E_\varphi$ *до* $\mathbb{R}_*$. Очевидно, справедливы включения

$$R\mathcal{P}_0^\infty \subset \cdots \subset R\mathcal{P}_0^3 \subset R\mathcal{P}_0^2. \tag{17}$$

Тестовые функции класса $R\mathcal{P}_0^m$ обладают полезным свойством — инвариантностью относительно гомотетии: *если φ из класса $R\mathcal{P}_0^m$, то для любого $r \in \mathbb{R}_*$ функция $\varphi(\cdot/r)\colon t \mapsto \varphi(t/r)$, $t \in \mathbb{R}_*$, также из класса $R\mathcal{P}_0^m$.*

1.2 Формулировка основного результата для пространств Бернштейна

Напомним, что определения (**??**) и (**??**) из п. **??** вместе определяют *преобразование Пуассона* $\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}$. Нумерация утверждений как в диссертации.

Теорема 2.1 (о последовательностях единственности для пространства Бернштейна)**.** *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *последовательность в* $\mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$ *и число* $\sigma > 0$. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) Λ — *последовательность единственности для пространства* B_σ^∞*;*

2) *для некоторого (для любого)* m *из* (**??**) *выполнено условие*

$$\sup_{\varphi\in R\mathcal{P}_0^m}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)(\lambda_k) - \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty; \tag{18}$$

3) *условие* (**??**) *выполнено с заменой* $R\mathcal{P}_0^m$ *на операцию* $\sup$ *по более узкому классу гладких тестовых функций* $R\mathcal{P}_0^\infty \cap C^\infty(\mathbb{R}_*)$.

Условие $0 \notin \Lambda$ не умаляет общности. Если $\Lambda \subset \mathbb{R}_*$ — вещественная последовательность, то (**??**) выглядит совсем просто:

$$\sup_{\varphi\in R\mathcal{P}_0^m}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi(\lambda) - \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty. \tag{19}$$

В условиях (**??**), (**??**) прослеживается прямая аналогия с определениями естественных отношений порядка на вещественнозначных мерах Радона или на обобщенных функциях. Действительно, если ν и μ —две такие меры или распределения на $\mathbb{C}$, то $\nu \leqslant \mu$ по определению означает

$$\sup_{\varphi\in\left(C_0^\infty(\mathbb{C})\right)^+}\bigl(\nu(\varphi)-\mu(\varphi)\bigr) \leqslant 0,$$

где $(C_0^\infty(\mathbb{C}))^+$ — класс всех бесконечно дифференцируемых финитных положительных функций на $\mathbb{C}$. Это неравенство эквивалентно соотношению

$$\sup_{\varphi\in\left(C_0^\infty(\mathbb{C})\right)^+}\bigl(\nu(\varphi)-\mu(\varphi)\bigr) < +\infty, \tag{20}$$

поскольку класс $(C_0^\infty(\mathbb{C}))^+$ образует конус (можно домножать на любое положительное число). С другой стороны каждая последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ определяет считающую меру n_Λ по правилу (**??**). Мера μ_σ с плотностью

$$\mathrm{d}\mu_\sigma(x) := \frac{\sigma}{\pi}\,\mathrm{d}x, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

на $\mathbb{R}$ — мера Рисса субгармонической функции

$$M_\sigma(z) \overset{(??)}{:=} \sigma|\mathrm{Im}\, z|, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \mu_\sigma := \frac{1}{2\pi}\, \Delta M_\sigma \geqslant 0. \tag{22}$$

Функция M_σ и определяет класс Бернштейна B_σ^∞. В обозначениях (**??**)–(**??**) соотношения (**??**)–(**??**) можно переписать в форме

$$\sup_{\varphi \in R\mathcal{P}_0^m} \bigl(n_\Lambda(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\, \varphi) - \mu_\sigma(\varphi)\bigr) < +\infty.$$

Эту запись полезно сравнить с соотношением (**??**), аналогия с которым достаточно прозрачна, особенно в п. 3), где фигурируют бесконечно дифференцируемые финитные тестовые функции класса $R\mathcal{P}_0^\infty \cap C^\infty(\mathbb{R}_*)$.

1.3 Полнота систем экспонент

Теорема 2.3 (о полноте экспоненциальных систем в пространствах на интервале)**.** *Если для последовательности точек* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$, *выполнено условие* (**??**) *или при ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *условие* (**??**), *то система* $\mathrm{Exp}^{i\Lambda}$ *полна в любом пространстве* $C(\overline{I}_{2\sigma})$ *и* $L^p(I_{2\sigma})$, $p \geqslant 1$.

Обратно, если левая часть в (**??**) *или при ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *в* (**??**) *конечна, то (относительно системы всех кратных экспонент с систмой показателей* $i\Lambda$*)* $\mathrm{exc}\, i\Lambda \leqslant 0$ *для* $C(\overline{I}_{2\sigma})$ *и для* $L^p(I_{2\sigma})$ *при* $p \geqslant 2$, *а также* $\mathrm{exc}\, i\Lambda \leqslant 1$ *для* $L^p(I_{2\sigma})$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

При этом в условиях (**??**) *или* (**??**) *тестовые классы* $R\mathcal{P}_0^m$ *всегда можно заменить на более узкий класс из* п. 3) *Теоремы* 2.1.

Для получения из Теоремы 2.1 различных достаточных условий для множеств единственности, равно как и условий полноты систем экспонент из Теоремы 2.3, полезно использовать как можно бо́льшее множество тестовых функций (импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) Теоремы 2.1 и первая часть Теоремы 2.3). И наоборот, для исследования достаточных условий для множеств неединственности или для условий неполноты экспоненциальных систем удобно максимально сузить класс тестовых функций, при которых Теорема 2.1 (см. импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1)) или вторая часть Теоремы 2.3 о полноте (см. последнее предложение в ней) справедливы. Таким образом, представляет интерес как расширение класса тестовых функций, так и его сужение. При этом задача сужения класса тестовых функций в этих Теоремах намного сложнее и глубже, чем проблема расширения класса $R\mathcal{P}_0^2$.

1.4 Следствия о последовательностях единственности

Наиболее легко применять Теоремы 2.1 и 2.3 к получению достаточных условий для последовательностей единственности для пространств Бернштейна и условий полноты систем экспонент в $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$.

Следствие 2.1. *Пусть $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$ — ненулевая функция, $\sigma > 0$. Если для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $0 \notin \Lambda$, выполнено условие*

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_k (\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)\Bigl(\frac{\lambda_k}{r}\Bigr) - r\frac{\sigma}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right) = +\infty, \tag{23}$$

то Λ — последовательность единственности для B_σ^∞, а система экспонент $\mathrm{Exp}^{i\Lambda}$ полна в каждом из пространств $C(\overline{I}_{2\sigma})$ и $L^p(I_{2\sigma})$, $p \geqslant 1$.

Доказательство этого Следствия сразу следует из Теорем 2.1 и 2.3, если воспользоваться инвариантностью функций класса $R\mathcal{P}_0^m$ относительно гомотетии, как отмечено после Определения **??**, и заменой переменных $x = t/r$ в интегралах Пуассона и в последнем интеграле.

Примеры. Отметим применения Следствия 2.1 к некоторым $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$.

1. Пусть $\varphi(t) = \log^+\dfrac{1}{|t|}$, $t \in \mathbb{R}_*$. Это функция класса $R\mathcal{P}_0^\infty$. Тогда условие для последовательностей единственности (**??**) запишется в виде

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{x-\lambda_k/r}\Bigr|\log\frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. + \sum_{\operatorname{Im}\lambda_k=0}\log^+\frac{r}{|\lambda_k|} - \frac{2\sigma}{\pi}r\right) = +\infty. \tag{24}$$

В частности, первая сумма в левой части положительна. Таким образом, из (**??**) следует и более слабое условие для последовательности единственности

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_k\log^+\frac{r}{|\lambda_k|} - \frac{2\sigma}{\pi}r\right)$$
$$= \limsup_{r\to+\infty}\left(\int_0^r\frac{n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t)}{t}\,dt - \frac{2\sigma}{\pi}r\right) = +\infty, \tag{25}$$

которое вполне согласуется с классической Теоремой Левинсона, упоминавшейся выше. В то же время условие (**??**) строго слабее условия (**??**), поскольку в диссертации из него выводится известная Теорема Картрайт, которая по существу не следует из версий Теоремы Левинсона.

2. Выберем $\varphi(t) = \log^+(1/|t|) - \frac{1}{2}(1-t^2)^+, \quad t \in \mathbb{R}_*$. Это вновь функция класса $R\mathcal{P}_0^\infty$. Тогда условие для последовательностей единственности (**??**) запишется в виде

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{x-\lambda_k/r}\right|\left(\log\frac{1}{|x|}-\frac{1}{2}(1-x^2)\right)\mathrm{d}x\right.$$
$$\left.+\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k=0}\left(\log^+\frac{r}{|\lambda_k|}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{r^2}\right)^+\right)-\frac{4\sigma}{3\pi}r\right)=+\infty.$$

3. Приведем один «ассиметричный»пример применения Следствия 2.1.

Пусть $\zeta = te^{i\theta} \in \mathbb{C}$, k — γ-тригонометрически выпуклая 2π-периодическая функция $\geqslant 0$. Всюду считаем, что $\max k \leqslant 1$. Полагаем при $a > 1$ и $t > 1$

$$V_k(\zeta; a) = \frac{a^\gamma}{2\gamma(a^{2\gamma}+1)}\,k(\theta)\left(\left(\frac{a}{t}\right)^\gamma - \left(\frac{t}{a}\right)^\gamma\right)^+, \tag{26}$$

а при $0 < t < 1$

$$V_k(\zeta; a) = \frac{a^\gamma}{2\gamma(a^{2\gamma}+1)}\,k(\theta)\left((at)^\gamma - \left(\frac{1}{at}\right)^\gamma\right)^+ + \log^+\frac{1}{t}, \tag{27}$$

Функция V_k принадлежат классу тестовых функций $R\mathcal{P}_0^\infty$. В нашем Примере **??** ограничимся только простейший примером функции

$$k(\theta) = \frac{1}{2}\,|1+\cos\theta|, \quad V_k := (\cdot; a). \tag{28}$$

В этом случае легко проверяется, что выбранная функция является γ-тригонометрически выпуклой при любом значении $\gamma \geqslant 1/2$.

Следствие 2.2. *Пусть $\gamma \geqslant 1/2$ и для простоты полагаем $\gamma < 1$. Если функция k выбрана как в (**??**), функция V как в (**??**)–(**??**) и*

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_k V(\lambda_k; a) - r\frac{\sigma}{\pi}\left((a-1/a)\frac{2\gamma}{1-\gamma^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{1-\gamma}(a^\gamma - a^{-\gamma}) + \frac{1}{1+\gamma}(a^{-\gamma}-a) + \frac{2\gamma(a^{2\gamma}+1)}{a^\gamma}\right)\right) = +\infty,$$

то Λ — последовательность единственности для B_σ^∞.

1.5 Устойчивость подпоследовательности нулей и полноты

Следующий результат в определённой степени аналогичен одной Теореме А. Д. Баранова (2011 г.), упоминавшейся выше.

Теорема 2.4. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *— две последовательности точек на* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *без точек сгущения в* $\mathbb{C}$ *конечной верхней плотности, т. е.* $n^{\mathrm{rad}}_{\Lambda}(r) = O(r)$ *при* $r \to +\infty$*, и суммы*

$$\sum_k \left|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_k}\right|, \quad \sum_k \left|\operatorname{Im}\frac{1}{\gamma_k}\right| \tag{29}$$

конечны. Допустим, что Λ *— подпоследовательность нулей для пространства* B^{∞}_{σ}*. Если для некоторого* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и числа* $s \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\sum_{k>k_0} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\gamma_k}\right| - \sum_{k>k_0} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\lambda_k}\right| \right) \leqslant s, \tag{30}$$

то $s > -\sigma$ *и* Γ *— подпоследовательность нулей для* $B^{\infty}_{\sigma+s}$*. В частности, если* $s = 0$*, то* Γ *— подпоследовательность нулей для того же* B^{∞}_{σ}*.*

Отсюда и из Теоремы 2.3 стандартным способом легко получается

Следствие 2.3. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.4 до конечности сумм (**??**) включительно. Если для некоторого числа* $s \in \mathbb{R}$ *имеет место неравенство (**??**) и* $2s < d$*, то избыток* $\operatorname{exc} i\Lambda$ *для* $C(\overline{I}_{d-2s})$ *или* $L^p(I_{d-2s})$ *с* $p \geqslant 2$ *не меньше* $\operatorname{exc} i\Gamma - 1$*, где* $\operatorname{exc} i\Gamma$ *— избыток соответственно для* $C(\overline{I}_d)$ *или* $L^p(I_d)$ *с тем же значением* $p \geqslant 2$*, а также* $\operatorname{exc} i\Lambda$ *для* $L^p(I_{d-2s})$ *при* $1 \leqslant p < 2$ *не меньше* $\operatorname{exc} i\Gamma - 2$ *для* $L^p(I_d)$ *с таким же значением* p*.*

К этому следствию, по-видимому, уместен некоторый комментарий для случая $2s \geqslant d$. В этом случае либо $d = 2s$, $\overline{I}_{d-2s} = \overline{I}_0$ — одноточечное множество и любая система экспонент (даже из одной функции) полна в $C(\overline{I}_0)$, а $I_{d-2s} = I_0 = \varnothing$. И при $d < 2s$ имеем $I_{d-2s} = \overline{I}_{d-2s} = \varnothing$, а пространства функций на пустом множестве — пустые множества.

2 Классы целых функций, определяемые весами из класса Картрайт

2.1 Формулировка Основной Теоремы

Определение субгармонических функций класса Картрайт $\mathcal{C}$ дано выше. Для меры ν на $\mathbb{C}$ с *носителем* $\operatorname{supp}\nu \subset \mathbb{R}$ используем *функцию* $\nu^{\mathbb{R}}$ её *распределения на* $\mathbb{R}$, определённую в (**??**).

Класс тестовых функций $R\mathcal{P}_0$ определяем как подмножество всех *полунепрерывных сверху функций* $\varphi \geqslant 0$ на $\mathbb{R}_*$ для которых выполнены

(f) *условие финитности* (**??**);

(n) *условие полунормировки* в нуле (**??**);

(a) для любого $x_0 \in \mathbb{R}_*$ при $r_{x_0} \in \bigl(0, |x_0|\bigr]$ *неравенства об интегральном среднем значении* со специальным логарифмическим ядром вида

$$\varphi(x_0) \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_0 + x)\, \frac{1}{x} \log \left| \frac{x+r}{x-r} \right| dx \quad \text{при всех } r \in (0, r_{x_0}).$$

Для любых целых $m \geqslant 2$ или $m = \infty$ класс тестовых функций $R\mathcal{P}_0^m$ из Определения **??** рассматриваем во всём разделе **??** в предположении, что множества из (**??**)–(**??**) пустые: $Z_\varphi = \varnothing$, $E_\varphi = \varnothing$ для функций φ из $R\mathcal{P}_0^m$.

Предложение 2.1. *Для классов основных, или тестовых, функций $R\mathcal{P}_0^m$ из п.* **??** *цепочку* (**??**) *можно дополнить до цепочки соотношений*

$$R\mathcal{P}_0 \cap C^\infty(\mathbb{R}_*) = R\mathcal{P}_0^\infty \subset \dots \subset R\mathcal{P}_0^3 \subset R\mathcal{P}_0^2 \subset R\mathcal{P}_0. \tag{31}$$

Основная Теорема. *Пусть $0 \notin \Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$, а $M \in \mathcal{C}$ с мерой Рисса ν_M и функцией распределения $\nu_M^{\mathbb{R}}$* (см. (**??**))*. Тогда*

($\Rightarrow$) *если Λ — последовательность неединственности для* $\operatorname{Ent}(\exp M)$*, а функция M ещё и ограничена снизу на некотором интервале $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, $b > 0$, то имеет место соотношение* (ср. с (**??**))

$$\sup_{\varphi \in \odot} \left(\sum_k (\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm} \varphi)(\lambda_k) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}\nu_M^{\mathbb{R}}(t) \right) < +\infty, \tag{32}$$

где вместо символа $\odot$ под знаком операции точной верхней грани sup *можно подставить самый широкий, ввиду* (**??**)*, класс $R\mathcal{P}_0$;*

($\Leftarrow$) *если соотношение* (**??**) *выполнено при подстановке вместо символа $\odot$ хотя бы одного из классов основных функций из цепочки* (**??**)*, то для любого числа $\varepsilon > 0$ последовательность Λ — последовательность неединственности для* $\operatorname{Ent}(\exp M^{*\varepsilon})$*, где*

$$M^{*\varepsilon}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M(z + \varepsilon e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \quad \textit{при } |\operatorname{Im} z| < \varepsilon, \tag{??$^\varepsilon$}$$

— среднее значение M на окружности $z + \{w \in \mathbb{C} \colon |w| = \varepsilon\}$, но

$$M^{*\varepsilon}(z) := M(z) \quad \textit{при } |\operatorname{Im} z| \geqslant \varepsilon. \tag{??^{0}}$$

Форму критерия для множеств единственности имеет очевидное

Следствие 2.1. *При условиях $M^{*\varepsilon} \leqslant M + \mathrm{const}$ на $\mathbb{C}$ на субгармоническую функцию $M \in \mathcal{C}$ последовательность Λ — последовательность единственности для* $\mathrm{Ent}(\exp M)$*, если и только если левая часть* (**??**) *равна $+\infty$ при подстановке вместо символа $\odot$ под операцией* $\sup$ *некоторого (любого) класса тестовых функций из цепочки* (**??**).

2.2 Два следствия

В диссертации даются лишь два простых следствия из Основной Теоремы, которые доказываются совершенно аналогично соответствующим утверждениям из подразделов **??** и **??**, установленным там для конкретной весовой функции вида $z \mapsto a|\mathrm{Im}\, z|$, $z \in \mathbb{C}$. Аналог Следствия 2.1 —

Следствие 3.3. *Пусть $\varphi \in R\mathcal{P}_0$ и $0 \notin \Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$. Если*

$$\limsup_{r\to+\infty} \left(\sum_k (\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\, \varphi)\bigl(\lambda_k/r\bigr) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x/r)\, \mathrm{d}\nu_M^{\mathbb{R}}(x) \right) = +\infty,$$

где $\nu_M^{\mathbb{R}}$ — функция распределения меры Рисса из (**??**) *функции $M \in \mathcal{C}$, ограниченной снизу на некотором интервале $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, $b > 0$, то Λ — последовательность единственности для* $\mathrm{Ent}(\exp M)$.

Доказательство этого Следствия сразу следует из Основной Теоремы (часть $(\Rightarrow)$), если воспользоваться инвариантностью функций класса $R\mathcal{P}_0$ относительно гомотетии, что легко видеть из определения этого класса выше, и заменой переменных $t = x/r$ в интегралах Пуассона и в последнем интеграле. Конкретные примеры фнкций классов $R\mathcal{P}_0^m \subset R\mathcal{P}_0$ уже приводились в п. **??**. Аналогом Теоремы 2.4 об устойчивости подпоследовательностей нулей является

Теорема 3.4. *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — две последовательности точек на $\mathbb{C}_\pm$ без точек сгущения в $\mathbb{C}$ конечной верхней плотности и суммы* (**??**) *конечны. Допустим, что Λ — подпоследовательность нулей для пространства* $\mathrm{Ent}(\exp M)$*, где функция $M \in \mathcal{C}$ ограничена снизу на некотором интервале $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, $b > 0$. Если для некоторого $s \in \mathbb{R}$*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \Bigl|\mathrm{Im}\, \frac{1}{t-\gamma_k}\Bigr| - \sum_{k\in\mathbb{N}} \Bigl|\mathrm{Im}\, \frac{1}{t-\lambda_k}\Bigr| \right) \leqslant s,$$

то $s \overset{(??)}{\geqslant} -\mathrm{type}_\infty[M]$ и Γ — подпоследовательность нулей для пространства $\mathrm{Ent}\bigl(\exp\bigl(M^{*\varepsilon} + s\,\mathrm{Im}\,|\cdot|\bigr)\bigr)$ *при любом $\varepsilon > 0$* (см. (**??**)). *В частности, если $s = 0$, то Γ — подпоследовательность нулей для* $\mathrm{Ent}\bigl(\exp M^{*\varepsilon}\bigr)$.

Публикации по теме диссертации

I. Статьи с участием Г. Р. Талиповой из перечня ВАК

[1] *Хабибуллин Б. Н., Талипова Г. Р., Хабибуллин Ф. Б.* Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 2. С. 193–223.

[2] *Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н.* Последовательности единственности для классов целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси // Вестник Башкирского университета. 2015. Т. 20, № 1. С. 5–9.

[3] *Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост вдоль вещественной оси // Алгебра и анализ. 2016. Т. 26, № 2. С. 1–33.

II. Труды, материалы и тезисы конференций с участием Г. Р. Талиповой

[4] *Талипова Г. Р.* Сравнение среднего значения на сфере (на окружности) и среднего значения в шаре (в круге) субгармонической функции // Тезисы докладов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложение в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ. 2009. С. 10.

[5] *Талипова Г. Р. , Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б.* О продолжении одного специального класса функций как субгармонических на всю комплексную плоскость // Сборник докладов III Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложение в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ. 2011. Т. 1. Математика. С. 132–140.

[6] *Талипова Г. Р.* Сужение потенциалов Йенсена на $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ // Тезисы докладов IV Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложение в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ. 2012. С. 201.

[7] *Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б.* О сужении потенциалов Йенсена на проколотую вещественную ось // Сборник докладов IV Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложение в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ. 2012. Т. 1. Математика. С. 147–153.

[8] *Талипова Г.Р.* Теорема единственности для пространств Бернштейна // Тезисы Всероссийской молодёжной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки и образования». Уфа: РИЦ БашГУ. 2013. С. 153.

[9] *Талипова Г.Р.* Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями вдоль прямой // Тезисы докладов XI Казанской летней школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань. 2013. С. 419–421.

[10] *Талипова Г.Р.* Распределение нулей целых функций с ограничениями на их рост вдоль вещественной оси // Тезисы докладов V Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложение в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ. 2013. С. 262.

[11] *Talipova G.R.* Continuation of the $R\mathcal{P}_m^0$ class functions as subharmonic on the whole complex plane // Материалы студенческой научно-практической конференции. Уфа: РИЦ БашГУ. 2013. С. 169–172.

[12] *Talipova G.R.* Die Einengung des Potentials von Jensen auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ // Материалы студенческой научно-практической конференции. Уфа: РИЦ БашГУ. 2013. С. 172–173.

[13] *Bulat Khabibullin, Galiya Talipova,* Zero subsequences of entire functions of exponential type with restrictions on their growth along the real line // Международная конференция "Комплексный анализ и смежные вопросы". Россия, Санкт-Петербург, 14-18 апреля, 2014. Санкт-Петербургское отделение Математического института. С. 15–16.

[14] *Talipova G. R., Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Zero (sub-)sequences of entire functions // Материалы XII Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань. 2015. С. 519–525.