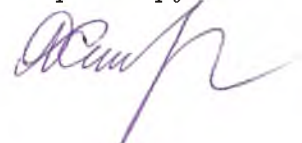


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Якшибаева Дина Ахатовна

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ В
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЯХ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Юмагулов М.Г.

Уфа – 2016

Оглавление

Введение	3
1 Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа: модели, решения, бифуркации, методы исследования	16
1.1 Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа (ФДУЗТ)	16
1.2 Точки равновесия и циклы ФДУЗТ	20
1.3 Бифуркации в ФДУЗТ	27
1.4 Операторный метод исследования локальных бифуркаций	32
1.5 Доказательства основных утверждений	41
2 Исследование локальных бифуркаций в автономных ФДУЗТ	45
2.1 Постановка задачи	45
2.2 Достаточные признаки локальных бифуркаций	46
2.3 Приближенное исследование бифуркаций	59
2.4 Устойчивость бифурцирующих решений	69
2.5 Доказательства основных утверждений	72
3 Исследование локальных бифуркаций в неавтономных ФДУЗТ	81
3.1 Постановка задачи.	81
3.2 Достаточные признаки локальных бифуркаций	82
3.3 Приближенное исследование бифуркаций	91
3.4 Устойчивость бифурцирующих решений	97
3.5 Доказательства основных утверждений	99
Заключение	104
Список литературы	105

Введение

Актуальность темы исследования. В общей теории динамических систем важное место занимают системы, описываемые функционально - дифференциальными уравнениями запаздывающего типа (ФДУЗТ). Такие уравнения возникают при изучении эволюционных процессов в механике, физике, биологии, химии, экономике и других науках. Благодаря работам Р. Беллмана, К.Л. Кука [12], [86], А.Д. Мышкиса [52], Л.Э. Эльсгольца, С.Б. Норкина [53], [78], Р.Д. Драйвера [89], Дж. Хейла [70], [105], Я. Куанга [108], Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова [1], [2], [3], [4], [59], [83], Б. Балачандрана [85] и многих других авторов, теория ФДУЗТ является хорошо развитой составной частью общей теории функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Одной из наиболее актуальных задач в теории динамических систем является задача исследования поведения системы в окрестностях стационарных и периодических решений. Здесь особо актуальными представляются исследования поведения системы в предположении, что стационарное или периодическое решение является негиперболическим. В этом случае в системе могут происходить различные бифуркационные явления, возникать новые периодические или квазипериодические решения, становится возможным хаотическое поведение системы. Теория локальных бифуркаций детально изучена для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: предложен ряд эффективных методов исследования локальных бифуркаций, получены

достаточные признаки бифуркаций, приближенные формулы, проведено исследование устойчивости и др. (см. например, [7], [8], [10], [22], [27], [35], [38], [48], [58], [61], [72], [79], [87], [88], [90], [94]). Теория бифуркаций хорошо изучена и для систем, описываемых дискретными отображениями, уравнениями в частных производных (см. например, [9], [13], [16], [48]).

Задача о локальных бифуркациях для ФДУЗТ изучена существенно меньше, хотя и здесь известно много результатов. Исследованию локальных бифуркаций для ФДУЗТ посвящены работы Дж. Хейла [70],[106], Б. Хэссарда, Н. Казаринова, И. Вэна [72], С.А. Кащенко [29], Ю.С. Колесова [31], В.Б. Колмановского [34], М.Т. Терехина [63], Б. Балачандрана [85], Я. Куанга [108], А.А. Акиньшина [5] и других авторов. Здесь получен ряд важных результатов, связанных с признаками бифуркаций, построением периодических решений, анализом их устойчивости и др. При этом большая часть полученных результатов обычно направлена на исследование конкретных типов ФДУЗТ, а из бифуркаций обычно ограничиваются рассмотрением бифуркации Андронова–Хопфа. Существенно меньше изучены другие сценарии локальных бифуркаций для ФДУЗТ. Дальнейшее изучение различных сценариев локальных бифуркаций для ФДУЗТ, разработка общих качественных и приближенных методов их исследования представляется важным и актуальным направлением в общей теории динамических систем.

Одними из эффективных методов исследования локальных бифуркаций для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или дискретными отображениями в конечномерных пространствах, являются операторные методы, основанные на топологических и геометрических подходах и разработанные в [92], [35], [36], [37], [79].

Цель диссертационной работы. Разработка методов исследования основных сценариев локальных бифуркаций динамических систем, описываемых

мых ФДУЗТ.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. разработка и обоснование операторного метода исследования локальных бифуркаций в бесконечномерных пространствах;
2. получение достаточных признаков основных сценариев локальных бифуркаций в системах ФДУЗТ;
3. получение приближенных формул нахождения бифурцирующих решений для основных сценариев локальных бифуркаций в системах ФДУЗТ;
4. анализ устойчивости бифурцирующих решений для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия систем ФДУЗТ.

Методы исследования. В работе использованы методы качественной теории ФДУЗТ, нелинейного анализа, методы приближенного решения операторных уравнений, методы теории Флоке, метод функционализации параметра исследования бифуркационных задач, метод Ньютона–Канторовича.

Научная новизна определяется проведенными исследованиями, в результате которых разработан новый математический аппарат для анализа бифуркационных явлений в динамических системах, описываемых ФДУЗТ.

При этом получены следующие новые научные результаты:

1. разработан и обоснован общий операторный подход исследования локальных бифуркаций в окрестностях стационарных решений систем ФДУЗТ, основанный на методе функционализации параметра;
2. получены новые достаточные признаки бифуркации Андронова–Хопфа, положения равновесия, вынужденных и субгармонических колебаний в системах ФДУЗТ;

3. получены новые приближенные формулы для бифурцирующих решений в задаче о локальных бифуркациях в системах ФДУЗТ;
4. проведен анализ устойчивости бифурцирующих решений для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия систем ФДУЗТ.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Предлагаемые в работе методы могут быть использованы для анализа бифуркационных явлений в динамических системах, описываемых ФДУЗТ. Полученные результаты доведены до расчетных формул.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 75-летию со дня рождения д-ра физ.-мат.наук, профессора Г.И.Быковцева (Самара, 18-21 апреля 2013 г.); международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлитамак, 26-30 июня 2013 г.); международной научной конференции «Нелинейный анализ и спектральные задачи» (г. Уфа, 18-22 июня 2013 г.); международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (г. Уфа, 24-26 сентября 2014 г.); научном семинаре по интегрируемым системам Института математики с ВЦ УНЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н., профессор Жибер А.В., д.ф.-м.н., профессор Хабибуллин И.Т.); научном семинаре кафедр математического анализа и дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета (руководители: д.ф.-м.н., профессор Фазуллин З.Ю., д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г.); научном семинаре кафедры прикладной математики и информационных технологий Сибайского института (филиала) Башкирского государственного университета (руководитель - д.ф.-м.н., профессор Байзаев С.Б.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [111]-[120], при этом статьи [111]-[113] опубликованы в изданиях, рекомендо-

ванных ВАК.

Личный вклад соискателя. Постановки основных задач принадлежат научному руководителю. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ [111]-[117], опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в разработке и обосновании предлагаемых методов исследования. Из результатов этих работ в диссертацию автором включены только результаты, полученные им лично.

Объем и структура диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 119 страниц. Список литературы содержит 120 наименований.

Краткое содержание работы

В **первой главе** приводятся известные понятия и сведения из теории ФДУЗТ, рассматривается динамика ФДУЗТ в окрестностях точек равновесия и задача нахождения периодических решений ФДУЗТ. Приводится постановка задачи о бифуркациях в окрестностях стационарных решений ФДУЗТ, зависящих от параметров; описываются необходимые условия локальных бифуркаций и их основные сценарии. Излагаются и обосновываются топологические методы исследования задачи о локальных бифуркациях для операторных уравнений в случае гильбертовых пространств. Глава носит вспомогательный характер. Приведем некоторые необходимые сведения из первой главы.

Широкий класс ФДУЗТ представляют системы уравнений вида

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] f(t, x(t - \tau), \theta), x \in R^n, \theta \in R^k. \quad (1)$$

Здесь θ — параметр, $r \in (0, T)$, $T > 0$. $R(t, \tau, \theta)$ — это $n \times n$ матрица, элементы которой определены при $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \tau \leq r$, являют-

ся функциями ограниченной вариации по τ , непрерывно дифференцируемы по θ , являются T -периодическими по t , непрерывны в среднем по t в следующем смысле: для любого t выполняется равенство $\lim_{t' \rightarrow t} \int_0^r \|R(t', \tau, \theta) - R(t, \tau, \theta)\| d\tau = 0$.

Вектор-функция $f(t, x, \theta)$ определена при всех $x \in R^n$, $t \in R$ и $\theta \in \Omega(\theta_0, \delta_0)$ — шар радиуса $\delta_0 > 0$ с центром в точке $\theta_0 \in R^k$; непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и θ ; является T -периодической по t : $f(t + T, x, \theta) \equiv f(t, x, \theta)$. Предполагается, что $f(t, 0, \theta) \equiv 0$, то есть уравнение (1) при всех θ имеет решение $x = 0$. При этом каждое начальное условие $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - r \leq t \leq t_0$, однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (1), определенное при всех $t \geq t_0$.

Интегралы в (1) понимаются в смысле Лебега–Стилтьеса.

К уравнениям вида (1) могут быть сведены многие представляющие интерес ФДУЗТ. В частности, если правая часть уравнения (1) не зависят от t , получим автономное уравнение

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] f(x(t - \tau), \theta), x \in R^n, \theta \in R^k. \quad (2)$$

Основными объектами исследования в первой главе являются неавтономная и автономная системы вида (1) и (2). Для этих систем в § 1.2 вводится понятие гиперболической и негиперболической точки равновесия, рассматривается периодическая задача; в § 1.3 рассматриваются основные сценарии локальных бифуркаций, вводится понятие точки бифуркации для каждого изучаемого сценария бифуркации. В § 1.4 приводится и обосновывается операторная схема приближенного исследования задачи о точках бифуркации систем ФДУЗТ.

Во **второй главе** изучаются основные сценарии бифуркаций для автономных ФДУЗТ, предложены новые достаточные признаки бифуркаций и асимп-

тотические формулы для возникающих бифурцирующих решений, проведен анализ устойчивости бифурцирующих решений.

Основным объектом исследования во второй главе является нелинейная система автономных ФДУЗТ вида (2):

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta)] \Phi(x(t - \tau), \theta) + \Psi(x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta), \quad (3)$$

где θ — скалярный параметр, $\tau_j \in [0, r], j = \overline{1, m}$. Вектор-функции $\Phi(x, \theta)$, $\Psi(x, \theta)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и равномерно по θ удовлетворяют условиям $\|\Phi(x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \|x\| \rightarrow 0$, $\|\Psi(x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \|x\| \rightarrow 0$. Система (3) имеет тривиальное решение $x = 0$.

Рассмотрим характеристический квазиполином:

$$L(p, \theta) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] e^{-p\tau} - pI \right). \quad (4)$$

Точка равновесия $x = 0$ системы (3) является негиперболической при $\theta = \theta_0$, если квазиполином (4), при $\theta = \theta_0$ имеет хотя бы один чисто мнимый корень. Сценарии локальных бифуркаций в окрестности негиперболической точки равновесия системы (3) определяются кратностью чисто мнимых корней квазиполинома $L(p, \theta_0)$ и их положениями на мнимой оси комплексной плоскости.

В работе рассматриваются два основных случая негиперболичности:

U1 характеристический квазиполином $L(p, \theta_0)$ имеет простой корень $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых корней,

U2 характеристический квазиполином $L(p, \theta_0)$ имеет пару простых чисто мнимых корней $p = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых корней.

В случае **U1** основным сценарием бифуркации является возникновение у системы (3) в окрестности решения $x = 0$, при θ близких к θ_0 , новых состояний равновесия.

В случае **U2** основным сценарием бифуркации является возникновение у системы (3) в окрестности решения $x = 0$, при θ близких к θ_0 , нестационарных периодических колебаний малой амплитуды.

В § 2.2 приведены достаточные признаки бифуркации положения равновесия и бифуркации Андронова–Хопфа.

Для исследования бифуркации положения равновесия предложено следующее утверждение.

Теорема 0.1 Пусть выполнено условие **U1** и $L'_\theta(p, \theta)|_{p=0, \theta=\theta_0} \neq 0$. Тогда θ_0 является точкой бифуркации положения равновесия системы (3).

Также в этом параграфе бифуркация положения равновесия изучается на основе операторного подхода. С этой целью рассматривается операторное уравнение:

$$x = B(\theta)x + b(\theta, x), \quad x \in R^n, \quad (5)$$

решения которого определяют точки равновесия системы (3). Здесь

$$B(\theta) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] + I. \quad (6)$$

В силу условия **U1** оператор (6) при $\theta = \theta_0$ имеет простое собственное значение 1. Положим e и e^* — собственные векторы соответствующие простому собственному значению 1 оператора $B(\theta_0)$ и сопряженного оператора $B^*(\theta_0)$ соответственно.

Для уравнения (5) и оператора (6) получена

Теорема 0.2 Пусть выполнено условие **U1** и $(B'(\theta_0)e, e^*) \neq 0$. Тогда θ_0 является точкой бифуркации положения равновесия уравнения (3).

Для исследования бифуркации Андронова–Хопфа предложено следующее утверждение

Теорема 0.3 Пусть выполнено условие **U2** и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & -\operatorname{Im}(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \\ \operatorname{Im}(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & \operatorname{Re}(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда пара чисел (θ_0, ω_0) является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (3).

Также в этом параграфе бифуркация Андронова–Хопфа изучается на основе операторного подхода. С этой целью в работе рассматривается операторное уравнение:

$$u(t) = B(T, \theta)u(t) + b(T, \theta, u(t)), \quad u(t) \in L_2[0, 1], \quad (7)$$

решения которого определяют периодические решения уравнения (3). Здесь

$$\begin{aligned} B(T, \theta)u(t) = & \int_0^1 u(s)ds + T \int_0^1 s \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s)ds + \\ & + T \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s)ds, \end{aligned} \quad (8)$$

где $E(m)u(s) = \begin{cases} u(s - m + 1), & 0 \leq s < m, \\ u(s - m), & m \leq s \leq 1 \end{cases}$. Оператор $B(T, \theta) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ является вполне непрерывным. В силу условия **U2** оператор $B(T, \theta)$, при $T = T_0$ и $\theta = \theta_0$, имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Сопряженный оператор $B^*(T, \theta) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, при $T = T_0$, $\theta = \theta_0$, также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Положим $e(t)$, $g(t)$ и $e^*(t)$, $g^*(t)$ — собственные функции соответствующие указанному собственному значению операторов $B(T_0, \theta_0)$ и $B^*(T_0, \theta_0)$ соответственно.

Для уравнения (7) и оператора (8) получена

Теорема 0.4 Пусть выполнено условие $U2$ и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt & \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt \\ \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt & \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда пара чисел (θ_0, T_0) является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (3).

В § 2.3 рассматривается задача о приближенном построении бифурцирующих решений системы (3) в условиях теорем 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4.

В § 2.4 изучается задача об устойчивости бифурцирующих решений системы (3).

В **третьей главе** основным объектом исследования является система нелинейных ФДУЗТ вида (1):

$$\begin{aligned} x'(t) = & \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(t, \tau, \theta)] \Phi(t, x(t - \tau), \theta) + \\ & + \Psi(t, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta), \end{aligned} \quad (9)$$

где θ — векторный параметр, $\tau_j \in [0, r]$, $j = \overline{1, m}$. Вектор-функции $\Phi(t, x, \theta)$, $\Psi(t, x, \theta)$ являются T -периодическими по t , непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и равномерно по θ и t удовлетворяют условиям $\|\Phi(t, x, \theta)\| = O(\|x\|^2)$, $\|x\| \rightarrow 0$, $\|\Psi(t, x, \theta)\| = O(\|x\|^2)$, $\|x\| \rightarrow 0$. Система (9) имеет тривиальное решение $x = 0$.

Наряду с (9) рассмотрим линейную систему

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] x(t - \tau). \quad (10)$$

Точка равновесия $x = 0$ системы (9) является негиперболической, при $\theta = \theta_0$, если система (10) при $\theta = \theta_0$ имеет хотя бы один чисто мнимый характеристический показатель. Сценарии локальных бифуркаций в окрестности

негиперболической точки равновесия системы (9) определяются кратностью чисто мнимых характеристических показателей системы (10) при $\theta = \theta_0$ и их положениями на мнимой оси комплексной плоскости.

В работе рассматриваются два основных случая негиперболичности:

U3 система (10) при $\theta = \theta_0$ имеет простой характеристический показатель $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых характеристических показателей,

U4 система (10) при $\theta = \theta_0$ имеет пару простых чисто мнимых показателей $p = \pm i\frac{2\pi d}{T}$, где $\frac{d}{q} \in (0, \frac{1}{2}]$, $\frac{d}{q}$ — рациональная несократимая дробь, и не имеет других чисто мнимых характеристических показателей.

В случае **U3** основным сценарием бифуркации является возникновение у системы (9) в окрестности точки равновесия $x = 0$ при θ близких к θ_0 ненулевых T -периодических колебаний малой амплитуды.

В случае **U4** естественным будет предположение, что параметр θ является двумерным, то есть $\theta = (\alpha, \beta)$, где α и β — скалярные параметры. В этом случае, основным сценарием бифуркации является возникновение в окрестности точки равновесия $x = 0$, при переходе параметров α и β через значения α_0 и β_0 соответственно, периодических решений периодов qT .

В § 3.2 рассмотрены достаточные признаки бифуркации вынужденных колебаний и бифуркации субгармонических колебаний. Ограничимся приведением исследования локальных бифуркаций основанного на операторном подходе.

С целью исследования бифуркации вынужденных колебаний рассмотрим операторное уравнение:

$$x(t) = B(\theta)x(t) + b(x(t), \theta), \quad x(t) \in L_2[0, T],$$

решения которого определяют T -периодические решения системы (9). Здесь

$$B(\theta)x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta)] E(\tau)x(s) \right) ds + \\ + \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta)] E(\tau)x(s) ds,$$

где $E(\tau)x(t) = \begin{cases} x(t - \tau + T), & \text{если } 0 \leq t < \tau, \\ x(t - \tau), & \text{если } \tau \leq t \leq T. \end{cases}$ Оператор $B(\theta) : L_2[0, T] \rightarrow$

$L_2[0, T]$ является вполне непрерывным. В силу условия **U3** оператор $B(\theta)$, при $\theta = \theta_0$ имеет простое собственное значение 1. Сопряженный оператор $B^*(\theta) : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ при $\theta = \theta_0$ также имеет простое собственное значение 1. Положим $e(t)$ и $e^*(t)$ — собственные функции соответствующие указанному собственному значению операторов $B(\theta_0)$ и $B^*(\theta_0)$ соответственно.

Теорема 0.5 Пусть выполнено условие **U3** и $\int_0^T (B'_\theta(\theta_0)e(t), e^*(t)) dt \neq 0$. Тогда значение θ_0 является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (9).

С целью исследования бифуркации субгармонических колебаний рассмотрим уравнение:

$$x(t) = B(\alpha, \beta)x(t) + b(x(t), \alpha, \beta), \quad x(t) \in L_2[0, qT],$$

решения которого определяют qT -периодические решения системы (9). Здесь

$$B(\alpha, \beta)x(t) = \frac{1}{qT} \int_0^{qT} \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha, \beta)] E(\tau)x(s) \right) ds + \\ + \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha, \beta)] E(\tau)x(s) ds,$$

где $E(\tau)x(t) = \begin{cases} x(t - \tau + qT), & \text{если } 0 \leq t < \tau, \\ x(t - \tau), & \text{если } \tau \leq t \leq qT. \end{cases}$. Оператор $B(\alpha, \beta) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$ является вполне непрерывным. В силу условия **U4** оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Сопряженный оператор $B^*(\alpha, \beta) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$ при $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Положим $e(t), g(t)$ и $e^*(t), g^*(t)$ — собственные функции соответствующие указанному собственному значению операторов $B(\alpha_0, \beta_0)$ и $B^*(\alpha_0, \beta_0)$ соответственно.

Теорема 0.6 Пусть выполнено условие U_4 и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \int_0^{qT} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e(t), e^*(t)) dt & \int_0^{qT} (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e(t), e^*(t)) dt \\ \int_0^{qT} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e(t), g^*(t)) dt & \int_0^{qT} (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e(t), g^*(t)) dt \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда пара (α_0, β_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы (9).

В § 3.3 рассматривается задача о приближенном построении бифурцирующих решений системы (9) в условиях теорем 0.5 и 0.6.

В § 3.4 изучается задача об устойчивости бифурцирующих решений системы (9).

Глава 1

Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа: модели, решения, бифуркации, методы исследования

Глава носит вводный характер. В ней в краткой форме приводятся необходимые сведения из теории функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, и рассматриваются простейшие модели. В главе также приводятся необходимые понятия из теории локальных бифуркаций в системах с последействием. В заключительной части главы приводится обоснование операторного метода для исследования бифуркационных задач в гильбертовых пространствах.

1.1 Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа (ФДУЗТ)

В этом параграфе без специальных ссылок приводятся классические сведения и понятия о функционально-дифференциальных уравнениях запазды-

вающего типа (см. [1], [3], [7], [11], [12], [19], [29], [52], [53], [67], [70], [78], [85], [86], [108]), используемые в настоящей работе.

Уравнениями с последействием называют дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $x(t)$, связывающие скорость $x'(t)$ с ее значениями в текущий момент времени t и некоторыми предшествующими моментами времени. Простейшим примером уравнения с последействием является скалярное уравнение

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)), \quad (1.1)$$

где величина $r > 0$ характеризует запаздывание.

Уравнения с последействием также называют функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, дифференциально-разностными уравнениями, уравнениями с запаздыванием.

В качестве начального условия для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа следует задавать не только значение $x(t_0)$ (как это имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений), но и значения искомой функции $x(t)$ в предшествующие моменты времени. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, где начальные условия принадлежат конечномерному пространству, начальные условия для уравнений запаздывающего типа это, как правило, непрерывные функции, заданные на некотором интервале. Например, начальная задача для уравнения (1.1) записывается в виде

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)), & r > 0, \quad t > t_0, \\ x(t) = \phi_0(t), & \text{при } t_0 - r \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

где $\phi_0(t)$ — некоторая функция. Далее, при заданных начальных условиях функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа нельзя

решать в обе стороны по t (то есть для $t > t_0$ и $t < t_0$), как для обыкновенных дифференциальных уравнений, а лишь вперед по $t > t_0$.

Примем следующие обозначения: R^n — n -мерное вещественное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$. При $n = 1$, обозначим его как R ; для $b > a$ введем $C[a, b]$ — банахово пространство n -мерных непрерывных вектор-функций с топологией равномерной сходимости. Для элемента $\phi \in C[a, b]$ определим норму ϕ как $\|\phi\| = \max_{a \leq \theta \leq b} |\phi(\theta)|$, где $|\cdot|$ норма в R^n .

Положим $C = C[-r, 0]$, где $r \geq 0$. Если $t_0 \in R$, $A \geq 0$ и $x(t) \in C[t_0 - r, t_0 + A]$, то для любого $t \in [t_0, t_0 + A]$ мы определим $x_t(\theta) \in C$ равенством $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$. Пусть D — подмножество в $R \times C$, $f : D \rightarrow R^n$ заданная функция, тогда равенство

$$x'(t) = f(t, x_t) \quad (1.2)$$

называют *функционально-дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом* (ФДУЗТ), определенным на D .

Пусть $t_0 \in R$ и $A > 0$. Функцию $x(t) \in C[t_0 - r, t_0 + A]$ называют решением уравнения (1.2) на отрезке $[t_0 - r, t_0 + A]$, если $(t, x_t) \in D$ и $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) для $t \in [t_0, t_0 + A]$.

Для заданных $t_0 \in R$, $\phi \in C$, $A > 0$ функцию $x(t) \in C[t_0 - r, t_0 + A]$ называют решением уравнения (1.2) на отрезке $[t_0 - r, t_0 + A]$ с начальным значением $\phi(t)$ в момент t_0 или, проще, решением, начинающимся в $(t_0, \phi(t_0))$, если $x(t)$ есть решение уравнения (1.2) на отрезке $[t_0 - r, t_0 + A]$ и $x(t) = \phi(t)$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$.

Уравнение (1.2) включает в себя обыкновенные дифференциальные уравнения ($r = 0$) вида

$$x'(t) = f[t, x(t)],$$

дифференциально-разностные уравнения

$$x'(t) = f[t, x(t), x(t - r_1(t)), \dots, x(t - r_l(t))],$$

где $0 \leq r_j(t) \leq r$, $j = \overline{1, l}$, а также интегро-дифференциальные уравнения

$$x'(t) = \int_0^r g(t, \tau, x(t - \tau)) d\tau$$

как частный случай.

Уравнение (1.2) называется линейным, если $f(t, x_t) = A(t, x_t) + h(t)$, где $A(t, x_t)$ — линейно по x_t ; однородным линейным уравнением, если $h(t) = 0$; неоднородным линейным уравнением, если $h(t) \neq 0$. Автономным уравнением называют уравнение, когда $f(t, x_t) = g(x_t)$. В случае, когда правая часть уравнения (1.2) зависит от времени t , уравнение называют неавтономным.

Широкий класс уравнений (1.2) представляют уравнения вида

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau)] f(t, x(t - \tau)). \quad (1.3)$$

Здесь $r > 0$, $R(t, \tau)$ — это $n \times n$ матрица, элементы которой определены при $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \tau \leq r$, являются функциями ограниченной вариации по τ , непрерывны в среднем по t в следующем смысле: для любого t выполняется равенство

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_0^r \|R(t', \tau) - R(t, \tau)\| d\tau = 0.$$

Функция $f(t, x_t)$ определена и непрерывно дифференцируема по переменным t , x_t , и каждое начальное условие $x(t) = \varphi(t)$, $t - r \leq t \leq t_0$ однозначно задает решение уравнения (1.3) при $t \geq t_0$ (может быть локально).

В настоящей работе основное внимание уделяется ФДУЗТ вида (1.3). Отметим в этой связи, что уравнения вида (1.3) не охватывают все возможные варианты уравнений (1.2). Другими словами, не всегда функция $f(t, x_t)$ уравнения (1.2) представляется в виде интеграла (1.3). Например, в уравне-

нии Хатчинсона–Райта $x'(t) = -\theta x(t-1) - \theta x(t)x(t-1)$ слагаемое $\theta x(t)x(t-1)$ не может быть представлено в виде интеграла в уравнении (1.3).

Для исследования ФДУЗТ разработан ряд эффективных методов, начиная с классических работ Р. Беллмана, К. Кука, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, Дж. Хейла, Л.Э. Эльсгольца и других авторов (см. [23], [24], [32], [33], [34], [60], [108]). С современными положениями в этой области можно познакомиться в работах Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова, Л.А. Беклоряна, Ю.С. Колесова, В.Б. Колмановского, В.В. Власова и других авторов (см. [29], [63], [85], [97]).

Многие практические задачи приводят к ФДУЗТ. Приведем некоторые такие уравнения, рассматриваемые в настоящей работе.

Уравнение Хатчинсона–Райта

$$x'(t) = -ax(t-1)[1+x(t)],$$

модифицированное уравнение Ван дер Поля

$$x''(t) + [\theta - x^2(t)]x'(t - \pi) + x(t) = 0,$$

модифицированное уравнение Дуффинга

$$x'' + \alpha x'(t-1) + \left(\frac{1}{4} + \beta + \beta^2 \cos t\right)x = -x^3(t-2) \sin t.$$

1.2 Точки равновесия и циклы ФДУЗТ

Основное внимание в настоящей работе уделяется исследованию динамики ФДУЗТ в окрестностях точек равновесий и циклов. Приведем соответствующие определения.

1.2.1 Точки равновесия

Точками равновесия уравнения (1.2) называют его постоянные решения $x(t) \equiv x_0$.

Рассмотрим автономную систему, динамика которой описывается системой ФДУЗТ (1.3):

$$x'(t) = \int_0^r [dR(\tau)] f(x(t - \tau)), \quad x \in R^n. \quad (1.4)$$

Пусть система (1.4) имеет точку равновесия $x(t) \equiv x_0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. То есть система (1.4) имеет постоянное решение $x(t) = 0$. Тогда система (1.4) может быть представлена в виде

$$x'(t) = Ax_t + a(x_t). \quad (1.5)$$

Здесь

$$Ax_t = \int_0^r [dR(\tau)] f'_{x_t}(0)x(t - \tau),$$

$f'_{x_t}(0)$ — матрица Якоби вектор-функции $f(x_t)$, вычисленная в точке $x = 0$, а нелинейность $a(x_t)$ удовлетворяет соотношению

$$\|a(x_t)\| = O(\|x_t\|^2), \quad \|x_t\| \rightarrow 0.$$

Наряду с системой (1.5), будем рассматривать линейную систему уравнений

$$x'(t) = Ax_t. \quad (1.6)$$

Функцию

$$L(p) = \det \left(\int_0^r [dR(\tau)] f'_{x_t}(0)e^{-\tau p} - pI \right) \quad (1.7)$$

комплексного переменного p называют *характеристическим квазиполиномом* линейного уравнения (1.6).

Свойства решений системы (1.4) в окрестности решения $x = 0$ существенно зависят от свойств корней квазиполинома (1.7).

Имеется большое количество работ, посвященных изучению расположения нулей квазиполиномов того или иного вида (см. например, [52], [70], [78], [86]).

В частности, широкий класс квазиполиномов (1.7) имеет счетное количество нулей, которые расположены в последовательность

$$p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \quad (|p_k| \rightarrow \infty) \quad (1.8)$$

в порядке возрастания их модулей: $|p_k| \leq |p_{k+1}|$.

Приведем некоторые необходимые для дальнейшего изложения результаты, а именно, укажем некоторые общие свойства квазиполинома (1.7):

1. квазиполином является целой функцией комплексного переменного p ,
2. множество нулей квазиполинома не более чем счетно,
3. множество корней не может иметь конечную точку сгущения,
4. квазиполином может иметь лишь конечное число вещественных нулей,
5. кратность каждого из нулей конечна,
6. если квазиполином имеет счетное множество нулей, то нули (1.8) удовлетворяют соотношениям:

$$\operatorname{Re} p_k \rightarrow -\infty \text{ и } \operatorname{Re} p_k = o(|\operatorname{Im} p_k|) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Известно следующее утверждение [52]:

Теорема 1.1 *Если все корни характеристического квазиполинома (1.7) имеют отрицательную действительную часть, то нулевое решение системы (1.4) является асимптотически устойчивым. Если характеристический квазиполином (1.7) имеет хотя бы один корень с положительной дей-*

ствительной частью, то нулевое решение системы (1.4) неустойчиво по Ляпунову.

Критическим является случай, когда характеристический квазиполином (1.7) имеет корни на мнимой оси комплексной плоскости. В этой связи приведем следующее определение [70].

Точку равновесия $x = 0$ системы (1.4) называют *гиперболической*, если среди корней характеристического квазиполинома (1.7) нет чисто мнимых корней. Иначе, точку равновесия $x = 0$ называют *негиперболической*.

Теперь рассмотрим неавтономную систему ФДУЗТ с T -периодической по t правой частью, динамика которой описывается системой (1.3):

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau)] f(t, x(t - \tau)), \quad x \in R^n. \quad (1.9)$$

Здесь $r \in (0, T)$, $T > 0$, $R(t + T, \tau) = R(t, \tau)$, $f(t + T, x) = f(t, x)$.

Пусть система (1.9) имеет решение $x = 0$. В этом случае система (1.9) может быть представлена в виде

$$x'(t) = A(t)x_t + a(t, x_t). \quad (1.10)$$

Здесь

$$A(t)x_t = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau)] f'_{x_t}(t, 0)x(t - \tau),$$

а нелинейность $a(t, x_t)$ удовлетворяет соотношению

$$\max_t \|a(t, x_t)\| = O(\|x_t\|^2), \quad \|x_t\| \rightarrow 0.$$

Наряду с нелинейной системой (1.10), будем рассматривать линейную систему

$$x'(t) = A(t)x_t. \quad (1.11)$$

Оператором монодромии называют оператор V , отображающий пространство $C[-r, 0]$ в себя следующим образом: функции $\phi \in C[-r, 0]$ ставится в соответствие функция $x(t+T)$ ($-r \leq t \leq 0$), где $x(t)$ есть решение начальной задачи

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x_t, & 0 \leq t < \infty; \\ x(t) = \phi(t), & -r \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Всякое $\mu \neq 0$ из точечного спектра оператора монодромии называется *мультипликатором* системы (1.11), и всякое p , для которого $\mu = e^{pT}$, называется *характеристическим показателем* (показателем Флоке) системы (1.11) (см. [70]). Здесь T — период правой части системы (1.9).

Свойства решений системы (1.9) в окрестности решения $x = 0$ существенно зависят от свойств мультипликаторов системы (1.11). Укажем некоторые свойства мультипликаторов системы (1.11) (см. например, [78], [70]):

1. $\mu = e^{pT}$ есть мультипликатор уравнения (1.11), если и только если имеется нетривиальное решение уравнения (1.11) вида $x(t) = \varphi(t)e^{pt}$, $t \in (-\infty, \infty)$, где $\varphi(t+T) = \varphi(t)$;
2. если характеристических показателей бесконечное число и $\text{Re}p_1 \geq \text{Re}p_2 \geq \dots \geq \text{Re}p_k \geq \dots$, то $\text{Re}p_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Характер устойчивости решения $x = 0$ системы (1.9) определяется свойствами мультипликаторов системы (1.11). Известно следующее утверждение [70].

Теорема 1.2 *Решение $x = 0$ системы (1.9) асимптотически устойчиво, если и только если все мультипликаторы системы (1.11) по модулю меньше чем 1. Если хотя бы один мультипликатор системы (1.11) по модулю больше 1, то решение $x = 0$ системы (1.9) неустойчиво.*

Критическим является случай, когда система (1.11) имеет мультипликаторы равные 1 по модулю. В связи с этим приведем соответствующее определение.

Решение $x = 0$ системы (1.9) называется *гиперболическим*, если система (1.11) не имеет мультипликаторов равных 1 по модулю. Иначе, решение $x = 0$ называют *негиперболическим*.

1.2.2 Периодическая задача

Рассмотрим уравнение (1.1):

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)), \quad (1.12)$$

в котором запаздывание $r > 0$ фиксировано. Пусть правая часть уравнения (1.12) $f(t, x, y)$ является непрерывно дифференцируемой по x и y и непрерывной по t , при этом $f(t, x, y)$ является T -периодической по t : $f(t + T, x, y) = f(t, x, y)$.

Периодической задачей для уравнения (1.12) называется задача нахождения его периодических решений. Так как функция $f(t, x, y)$ является T -периодической, то естественно искать периодические решения уравнения (1.12) периода T или qT , где q — натуральное число.

Без ограничения общности считать, что $0 \leq r < T$. Действительно, в противном случае можно число r представить в виде $r = nT + r_1$, где n — целое число, а r_1 удовлетворяет неравенству $0 \leq r_1 < T$ и перейти к вспомогательному уравнению

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r_1)),$$

T -периодические решения которого совпадают с T -периодическими решениями уравнения (1.12).

Введем в рассмотрение оператор $E(r)$ равенством

$$E(r)x(t) = \begin{cases} x(t - r + T), & \text{если } 0 \leq t < r, \\ x(t - r), & \text{если } r \leq t \leq T. \end{cases}$$

Оператор $E(\tau)$ определен на множестве всех вектор-функций $x(t)$, заданных на $[0, T]$.

Лемма 1.1 [35] *T -периодические решения системы (1.12) совпадают с решениями следующих интегральных уравнений:*

$$x(t) = x(T) + \int_0^t f[s, x(s), E(r)x(s)]ds, \quad (1.13)$$

$$x(t) = x(0) - \int_t^T f[s, x(s), E(r)x(\tau)]ds, \quad (1.14)$$

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \{x(s) + sf[s, x(s), E(r)x(s)]\}ds + \int_0^t f[s, x(s), E(r)x(s)]ds. \quad (1.15)$$

Уравнения (1.13) и (1.14) называют *интегро-функциональными*, так как в правой части, кроме интегрального слагаемого, есть второе слагаемое, являющееся линейным функционалом. Этот линейный функционал (значение функции в точке) определен не на каждом пространстве вектор-функций $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Например, он не определен в пространствах L_p . В связи с этим уравнения (1.13) и (1.14) можно рассматривать как операторные уравнения с непрерывными или вполне непрерывными операторами лишь в тех пространствах вектор-функций, в которых определены значения функций в точке. Например, в пространствах непрерывных функций. Уравнение (1.15) можно уже рассматривать как операторное уравнение в пространствах функций, значения которых в отдельной точке не определены, например, в

пространствах L_p (см. [35]). В дальнейшем основную роль будет играть уравнение (1.15). В этой связи отметим, что верна

Лемма 1.2 [35] *Определенный правой частью уравнения (1.15) оператор $U(r, x)$ является вполне непрерывным в пространстве $L_2[0, T]$.*

1.3 Бифуркации в ФДУЗТ

Уравнения запаздывающего типа обычно включают некоторые параметры, которые могут содержаться как в коэффициентах уравнения, так и в запаздываниях. При изменении параметров могут происходить изменения в качественной структуре решений уравнения. Такие изменения называют *бифуркациями*, а соответствующие значения параметров — *бифуркационными значениями*.

Основным предметом изучения в работе являются бифуркации в окрестностях изолированных положений равновесия и периодических орбит ФДУЗТ. Такого рода бифуркации называются *локальными*. В этом параграфе приводятся некоторые необходимые сведения из теории локальных бифуркаций для ФДУЗТ (см. например, [70], [72], [108]).

1.3.1 Локальные бифуркации для автономных уравнений

Рассмотрим сначала автономную систему, динамика которой описывается ФДУЗТ, зависящими от скалярного параметра θ :

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] f(x(t - \tau), \theta), \quad x \in R^n, \quad \theta \in R. \quad (1.16)$$

Всюду ниже предполагаются выполненными условия:

1. $f(x, \theta)$ определена при всех $x \in R^n$ и $\theta \in \Omega(\theta_0, \delta_0)$, где $\Omega(\theta_0, \delta_0) = (\theta_0 - \delta_0, \theta_0 + \delta_0)$;

2. $f(x, \theta)$ непрерывно дифференцируема по x и θ , при этом каждое начальное условие $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - r \leq t \leq t_0$, однозначно задает решение $x(t)$ системы (1.16), определенное при всех $t \geq t_0$;
3. система (1.16) при всех значениях θ имеет решение $x \equiv 0$, т.е. $f(0, \theta) = 0$.

Система (1.16) может быть представлена в виде

$$x' = A(\theta)x_t + a(x_t, \theta), \quad (1.17)$$

где

$$A(\theta)x_t = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] f'_{x_t}(0, \theta)x(t - \tau),$$

а нелинейность $a(x_t, \theta)$ равномерно по $\theta \in \Omega(\theta_0, \delta_0)$ удовлетворяет соотношению

$$\|a(x_t, \theta)\| = O(\|x_t\|^2) \text{ при } \|x_t\| \rightarrow 0.$$

Здесь $f'_{x_t}(0, \theta)$ — матрица Якоби вектор-функции $f(x_t, \theta)$, вычисленная в точке $x = 0$. Система (1.17) при всех значениях параметра θ имеет решение $x = 0$, при изменении характера устойчивости которого могут происходить локальные бифуркации: возникать новые ненулевые положения равновесия или периодические колебания.

Наряду с (1.17) будем рассматривать линейную систему

$$x' = A(\theta)x_t$$

и характеристический квазимногочлен

$$L(p, \theta) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] f'_{x_t}(0, \theta)e^{-\tau p} - pI \right).$$

Пусть при значении $\theta = \theta_0$ тривиальное решение системы (1.16) является негиперболическим, т.е. характеристический квазиполином $L(p, \theta_0)$ имеет

чисто мнимые корни. Изменение параметра θ в окрестности θ_0 может приводить к различным локальным бифуркациям в окрестности точки $x = 0$.

Сценарии бифуркаций системы (1.16) определяются кратностью чисто мнимых корней квазиполинома $L(p, \theta_0)$ и их положениями на мнимой оси комплексной плоскости. Здесь основными являются следующие два случая, когда:

1. характеристический квазиполином $L(p, \theta_0)$ имеет простой корень $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых корней,
2. характеристический квазиполином $L(p, \theta_0)$ имеет пару простых чисто мнимых корней $p = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ и не имеет других чисто мнимых корней.

В зависимости от указанных случаев возможны различные локальные бифуркации в окрестности решения $x = 0$ системы (1.16). А именно, в случае 1 типичным является сценарий возникновения в окрестности точки $x = 0$ новых положений равновесия системы (1.16). В случае 2 типичным сценарием является возникновение в окрестности точки $x = 0$ нестационарных периодических решений системы (1.16). Приведем некоторые необходимые в дальнейшем определения и утверждения.

Число θ_0 называют *точкой бифуркации положения равновесия* системы (1.16), если существует последовательность $\theta_n \rightarrow \theta_0$ такая, что при каждом $\theta = \theta_n$ система (1.16) имеет ненулевое постоянное решение x_n , причем $\|x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Число θ_0 называется *точкой бифуркации Андронова–Хопфа* системы (1.16), если существуют $\theta_n \rightarrow \theta_0$ и $T_n \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ такие, что при $\theta = \theta_n$ система (1.16) имеет нестационарное T_n -периодическое решение $x_n(t)$, причем $\max_t \|x_n(t)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

1.3.2 Локальные бифуркации для неавтономных уравнений

Рассмотрим теперь неавтономную систему ФДУЗТ с T -периодической по t правой частью, зависящей от скалярного или векторного параметра θ :

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] f(t, x(t - \tau), \theta), \quad x \in R^n, \quad \theta \in R^k. \quad (1.18)$$

Всюду ниже предполагаются выполненными условия:

1. $f(t, x, \theta)$ определена при всех $x \in R^n$, $t \in R$ и $\theta \in \Omega(\theta_0, \delta_0)$ — шар радиуса $\delta_0 > 0$ с центром в точке $\theta_0 \in R^k$;
2. $f(t, x, \theta)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и θ , при этом каждое начальное условие $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - r \leq t \leq t_0$, однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (1.18), определенное при всех $t \geq t_0$;
3. $f(t, x, \theta)$ является T -периодической по t : $f(t + T, x, \theta) \equiv f(t, x, \theta)$;
4. уравнение (1.18) при всех значениях θ имеет нулевое решение $x \equiv 0$, т.е. $f(t, 0, \theta) = 0$.

Уравнение (1.18) может быть представлено в виде

$$x' = A(t, \theta)x_t + a(t, x_t, \theta), \quad (1.19)$$

где

$$A(t, \theta)x_t = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] f'_{x_t}(t, 0, \theta)x(t - \tau),$$

а нелинейность $a(t, x_t, \theta)$ равномерно по $\theta \in \Omega(\theta_0, \delta_0)$ и $t \in [0, T]$ удовлетворяет соотношению

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|a(t, x_t, \theta)\| = O(\|x_t\|^2) \text{ при } \|x_t\| \rightarrow 0.$$

Здесь $f'_{x_t}(t, 0, \theta)$ — матрица Якоби вектор-функции $f(t, x_t, \theta)$, вычисленная в точке $x = 0$. Операторы $A(t, \theta)x_t$ и $a(t, x_t, \theta)$ являются T -периодическими по t .

Система (1.19) при всех значениях параметра θ имеет решение $x = 0$, при изменении характера устойчивости которого могут происходить различные локальные бифуркации.

Наряду с (1.19) будем рассматривать линейное уравнение

$$x' = A(t, \theta)x_t. \quad (1.20)$$

Пусть, при значении параметра $\theta = \theta_0$ решение $x = 0$ системы (1.18) является негиперболическим, т.е. один или несколько мультипликаторов системы (1.20) при $\theta = \theta_0$ по модулю равны 1. Изменение параметра θ в окрестности θ_0 может приводить к различным локальным бифуркациям в окрестности точки $x = 0$.

Сценарии бифуркаций системы (1.18) определяются кратностью мультипликаторов системы (1.20) при $\theta = \theta_0$ и их положениями на единичной окружности в комплексной плоскости. Здесь основными являются случаи, когда:

1. система (1.20) при $\theta = \theta_0$ имеет простой мультипликатор, равный 1, и не имеет других мультипликаторов равных 1 по модулю;
2. система (1.20) при $\theta = \theta_0$ имеет пару простых мультипликаторов $e^{\pm i2\pi \frac{d}{q}}$, где $\frac{d}{q} \in (0, \frac{1}{2}]$ — рациональное число и не имеет других мультипликаторов равных 1 по модулю; предполагается, что $\frac{d}{q}$ — несократимая дробь.

В зависимости от указанных случаев возможны различные локальные бифуркации в окрестности решения $x = 0$ системы (1.18).

В случае 1 основным является сценарий бифуркации вынужденных колебаний.

Число θ_0 параметра θ называется *точкой бифуркации вынужденных колебаний* системы (1.18), если существует последовательность $\theta_n \rightarrow \theta_0$ такая, что при $\theta = \theta_n$ система (1.18) имеет ненулевое T -периодическое решение $x = x_n(t)$, причем $\max_t \|x_n(t)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow 0$.

В случае 2 основным сценарием является сценарий бифуркации субгармонических колебаний.

Число θ_0 называется *точкой бифуркации субгармонических колебаний* периода qT системы (1.18), если существует последовательность $\theta_n \rightarrow \theta_0$ такая, что при $\theta = \theta_n$ система (1.18) имеет ненулевое qT -периодическое решение $x = x_n(t)$, причем $\max_t \|x_n(t)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow 0$. Здесь $q \geq 2$.

1.4 Операторный метод исследования локальных бифуркаций

Одним из эффективных методов исследования задач о бифуркации является операторная схема, основанная на методе функционализации параметра. Эта схема позволяет получить признаки бифуркаций и провести их исследование. Операторная схема предложена в работах [25], [26], [35], [54]; полное ее обоснование дано только для уравнений в конечномерных пространствах.

Операторная схема будет использована для исследования задач о локальных бифуркациях ФДУЗТ. В этом пункте приводятся и обосновываются общие положения операторной схемы исследования бифуркаций для уравнений в гильбертовых пространствах.

Рассмотрим операторное уравнение

$$u = B(\theta)u + b(u, \theta), \quad u \in H, \quad \theta \in R^m, \quad (1.21)$$

в котором H — гильбертово пространство, $B(\theta) : H \rightarrow H$ линейный вполне непрерывный оператор, гладко зависящий от векторного параметра θ , а $b(u, \theta) :$

$H \rightarrow H$ — нелинейный компактный оператор, также гладко зависящий от θ и представимый в виде

$$b(u, \theta) = b_2(u, \theta) + b_3(u, \theta) + \tilde{b}_4(u, \theta).$$

Операторы $b_2(u, \theta)$, $b_3(u, \theta)$ содержат квадратичные и кубические по u слагаемые, соответственно, а $\tilde{b}_4(u, \theta)$ является гладкой по u , при этом $\tilde{b}_4(u, \theta) = O(\|u\|^4)$, $u \rightarrow 0$, равномерно по θ .

Уравнение (1.21) при всех значениях параметра θ имеет решение $u = 0$.

Значение θ_0 параметра θ назовем *точкой бифуркации* уравнения (1.21), если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывно дифференцируемые функции $\theta = \theta(\varepsilon)$ и $u = u(\varepsilon)$ такие, что:

1. $\theta(0) = \theta_0$, $u(0) = 0$;
2. $u(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$;
3. для каждого $\varepsilon \geq 0$ функция $u(\varepsilon)$ является решением уравнения (1.21) при $\theta = \theta(\varepsilon)$.

Функции $u(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon)$ назовем *бифурцирующими решениями* уравнения (1.21).

Необходимое условие бифуркации содержится в следующем утверждении [37].

Лемма 1.3 Пусть θ_0 точка бифуркации уравнения (1.21). Тогда оператор $B(\theta_0) : H \rightarrow H$ имеет собственное значение 1.

Важным свойством бифуркации является его направленность в следующем смысле. Пусть θ_0 точка бифуркации уравнения (1.21). Тогда, в силу леммы 1.3, оператор $B(\theta_0)$ имеет собственное значение 1. Тогда непрерывная ветвь бифурцирующих решений $u(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ касается собственного подпространства E_0 , отвечающему собственному значению 1 оператора

$B(\theta_0)$. Другими словами, вектор $u'_\varepsilon(0)$ совпадает с некоторым собственным вектором e оператора $B(\theta_0)$, отвечающим собственному значению 1, то есть $u'_\varepsilon(0) = ke$.

Рассмотрим задачу о точках бифуркации в двух основных случаях:

1. оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1,
2. оператор $B(\theta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

1.4.1 Случай простого собственного значения 1.

Рассмотрим сначала случай, когда оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1. В этом случае указанный метод представлен и обоснован в [25], [26], [54] для конечномерных и гильбертовых пространств. Приведем основные положения этого метода.

Параметр θ в этом случае будет считаться скалярным, а именно, пусть $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$, где δ — некоторое положительное число. Оператор $B(\theta_0)$ имеет собственный вектор e , отвечающий простому собственному значению 1. Сопряженный оператор $B^*(\theta_0) : H \rightarrow H$ также имеет простое собственное значение 1, которому соответствует собственный вектор e^* . Векторы e и e^* можно выбрать в соответствии с равенствами

$$\|e\| = 1, \quad (e, e^*) = 1. \quad (1.22)$$

Теорема 1.3 [54] Пусть оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1. Пусть

$$(B'(\theta_0)e, e^*) \neq 0. \quad (1.23)$$

Тогда θ_0 является точкой бифуркации уравнения (1.21), при этом бифуркационное решение $u(\varepsilon)$ удовлетворяет условию $\|u(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$.

Приведем теперь схему приближенного построения, существующих в условиях теоремы 1.3 бифурцирующих решений $u(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon)$.

В основе схемы лежит метод функционализации параметра [26]. В самой общей постановке идея метода состоит в том, что параметр θ заменяется некоторым функционалом $\theta = f[u]$. Подставляя функционал $f[u]$ в уравнение (1.21), получим уравнение

$$u - B(f[u])u - b(u, f[u]) = 0, \quad (1.24)$$

уже не содержащее параметр θ . Каждое его решение u^* является решением и уравнения (1.21) при $\theta = f[u^*]$.

Без ограничения общности можно считать, что $\theta_0 \neq 0$. Функционал $f[u]$ определим равенством

$$f[u] = \frac{\theta_0}{\varepsilon} (u, e^*), \quad (1.25)$$

где $\varepsilon > 0$ — вспомогательный малый параметр. Выбор функционала в виде (1.25) позволяет установить существование бифурцирующих решений $u(\varepsilon)$ уравнения (1.21) и применить для их приближенного построения метод Ньютона – Канторовича с возмущениями.

Уравнение (1.24) представимо в виде

$$G(u) + W(u) = 0, \quad (1.26)$$

где обозначено

$$G(u) = u(t) - B(f[u])u, \quad W(u) = -b(u, f[u]).$$

Оператор $G(u)$ дифференцируем при любом $u \in H$, и его производная Фреше имеет вид

$$G'(u)h = h - f[h]B'(f[u])u - B(f[u])h, \quad h \in H. \quad (1.27)$$

Положим для простоты обозначений $u_0 = \varepsilon e$. Тогда при $u = u_0$ оператор (1.27) имеет вид

$$G'(u_0)h = h - \theta_0(h, e^*)B'(\theta_0)e - B(\theta_0)h, \quad h \in H. \quad (1.28)$$

Оператор (1.28) не зависит от $\varepsilon > 0$, несмотря на то, что вычисляется в точке $u_0 = \varepsilon e$. Этот факт является существенным в методе Ньютона–Канторовича, так как позволяет применить один и тот же оператор (1.28) для построения бифурцирующих решений $u(\varepsilon)$ и соответствующих значений параметра $\theta(\varepsilon)$ основного уравнения (1.21) при различных $\varepsilon > 0$. Пусть выполнено условие (1.23). Тогда определенный равенством (1.28) оператор $G'(u_0)h: H \rightarrow H$ непрерывно обратим. Положим,

$$\Gamma_0 = (G'(u_0))^{-1}: H \rightarrow H. \quad (1.29)$$

Этот оператор не зависит от $\varepsilon > 0$.

Положим, $S_\delta = \{u : \|u - \varepsilon e\| \leq \delta\}$. Производная оператора $G'(u)$ на любом шаре S_δ , $0 < \delta \leq \varepsilon$, при всех малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|G'(u) - G'(v)\| \leq M_\varepsilon \|u - v\|, \quad u, v \in S_\delta,$$

где постоянная $M_\varepsilon > 0$ зависит от ε и не зависит от $u, v \in S_\delta$.

Теорема 1.4 [54] *Пусть выполнены условия теоремы 1.3. Пусть функционал $f[u]$ выбран в виде (1.25). Тогда при малых $\varepsilon > 0$ уравнение (1.26) имеет в шаре $S_{r_0(\varepsilon)}$ некоторого радиуса $r_0(\varepsilon)$, $r_0(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, единственное ненулевое решение $u(\varepsilon)$, которое можно получить как предел последовательных приближений*

$$u_{k+1} = u_k - \Gamma_0(G(u_k) + W(u_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.30)$$

где $u_0 = \varepsilon e$. При этом $\|u(\varepsilon)\| \rightarrow 0$ и $f[u(\varepsilon)] \rightarrow \theta_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вектор $u(\varepsilon)$ является решением основного уравнения (1.21) при $\theta = f[u(\varepsilon)]$.

Итерационная процедура (1.30) может быть использована и для получения асимптотик бифурцирующих решений.

Теорема 1.5 [54] *Существующие в условиях теоремы 1.4 бифурцирующие решения $u(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon)$ уравнения (1.21) представимы в виде*

$$u(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad \theta(\varepsilon) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + o(\varepsilon^2), \quad (1.31)$$

где

$$e_1 = \Gamma_0 b_2(e, \theta_0),$$

$$\theta_1 = -\frac{(b_2(e, \theta_0), e^*)}{(B'(\theta_0)e, e^*)},$$

$$e_2 = \Gamma_0 \left(\theta_1 B'(\theta_0) e_1 + \frac{1}{2} \theta_1^2 B''(\theta_0) e + b'_{2u}(e, \theta_0) e_1 + \theta_1 b'_{2\theta}(e, \theta_0) + b_3(e, \theta_0) \right),$$

$$\theta_2 = (e_2, e^*) \theta_0,$$

и Γ_0 — оператор (1.29).

Формулы (1.31) называют *главными асимптотиками* бифурцирующих решений $u(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$ уравнения (1.21). Справедливость формул (1.31) будет доказана ниже.

1.4.2 Случай полупростого собственного значения 1.

Рассмотрим теперь второй случай, когда оператор $B(\theta)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Для конечномерных пространств операторный метод обоснован в [54]. В этом параграфе дается обоснование операторного метода для случая гильбертовых пространств.

Параметр θ естественно считать двумерным. Пусть $\theta = (\alpha, \beta)$, где α, β — скалярные параметры, тогда уравнение (1.21) примет вид

$$u = B(\alpha, \beta)u + b(u, \alpha, \beta), \quad u \in H. \quad (1.32)$$

Пусть e и g — собственные линейно независимые векторы оператора $B(\alpha_0, \beta_0)$, такие что выполнены равенства $B(\alpha_0, \beta_0)e = e$ и $B(\alpha_0, \beta_0)g = g$.

Сопряженный оператор $B^*(\alpha_0, \beta_0) : H \rightarrow H$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные векторы e^* и g^* .

Вектор-функции $e \in H$, $g \in H$, $e^* \in H$, $g^* \in H$ можно выбрать исходя из соотношений:

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \quad (1.33)$$

Теорема 1.6 Пусть оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Пусть

$$\det \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (1.34)$$

Тогда пара чисел (α_0, β_0) является точкой бифуркации уравнения (1.32).

Здесь операторы B'_α и B'_β — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно.

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в § 1.5.

Приведем схему приближенного построения существующих в условиях теоремы 1.6 бифурцирующих решений $u(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ уравнения (1.32) основанную на методе функционализации параметра.

Параметры (α, β) в уравнении (1.32) заменим функционалами вида

$$\alpha[u] = \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon} [(u, e^*) - \varepsilon], \quad \beta[u] = \beta_0 + \frac{1}{\varepsilon} (u, g^*), \quad (1.35)$$

где $\varepsilon > 0$ — вспомогательный параметр. Функционалы вида (1.35) позволяют установить существование бифурцирующих решений уравнения (1.32), применяя модифицированный метод Ньютона–Канторовича с возмущениями. Подставляя функционалы (1.35) в уравнение (1.32), получим

$$u - B(\alpha[u], \beta[u])u - b(u, \alpha[u], \beta[u]) = 0. \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) представим в виде:

$$G(u) + W(u) = 0, \quad (1.37)$$

где

$$G(u) = u - B(\alpha[u], \beta[u])u, \quad W(u) = -b(u, \alpha[u], \beta[u]).$$

Лемма 1.4 *Оператор $G(u)$ дифференцируем при любом $u \in H$ и его производная Фреше имеет вид*

$$G'(u)h = h - B(\alpha[u], \beta[u])h - \frac{1}{\varepsilon}(h, e^*)B'_\alpha(\alpha[u], \beta[u])u - \frac{1}{\varepsilon}(h, g^*)B'_\beta(\alpha[u], \beta[u])u, \quad h \in H. \quad (1.38)$$

Для простоты обозначений положим $u_0 = \varepsilon e$. Тогда при $u = u_0$ оператор (1.38) примет вид

$$G'[\varepsilon e]h = h - B(\alpha_0, \beta_0)h - (h, e^*)B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e - (h, g^*)B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, \quad h \in H. \quad (1.39)$$

Оператор (1.39) не зависит от $\varepsilon > 0$, что позволяет применить один и тот же оператор (1.39) для построения бифурцирующих решений $u(\varepsilon)$ и соответствующих значений параметров $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ основного уравнения (1.32) при различных значениях $\varepsilon > 0$.

Лемма 1.5 *Пусть выполнено соотношение (1.34), тогда определенный равенством (1.39) оператор $G'(\varepsilon e) : H \rightarrow H$ непрерывно обратим.*

Положим,

$$\Gamma_0 = [G'(\varepsilon e)]^{-1} : H \rightarrow H. \quad (1.40)$$

Этот оператор ограничен и не зависит от $\varepsilon > 0$.

Положим, $S_\delta = \{u : \|u - \varepsilon e\| \leq \delta\}$.

Лемма 1.6 Производная оператора $G'(u)$ на любом шаре S_δ , $0 < \delta \leq \varepsilon$, при всех малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|G'(u) - G'(v)\| \leq L_\varepsilon \|u - v\|, \quad u, v \in S_\delta,$$

где константа L_ε зависит от ε и не зависит от $u, v \in S_\delta$.

Теорема 1.7 Пусть выполнены условия теоремы 1.6. Пусть функционалы $\alpha[u]$ и $\beta[u]$ выбраны в виде (1.35). Тогда уравнение (1.37) имеет в шаре $S_{r_0(\varepsilon)}$ некоторого радиуса $r_0(\varepsilon) > 0$, при малых $\varepsilon > 0$ ненулевое решение $u(\varepsilon)$, которое можно получить как предел последовательных приближений

$$u_{k+1} = u_k - \Gamma_0(G(u_k) + W(u_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.41)$$

где $u_0 = \varepsilon e$; $\|u_{k+1} - u(\varepsilon)\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. При этом $\|u(\varepsilon)\| \rightarrow 0$ и $\alpha[u(\varepsilon)] \rightarrow \alpha_0$, $\beta[u(\varepsilon)] \rightarrow \beta_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вектор-функция $u(\varepsilon)$ является решением основного уравнения (1.32) при $\alpha = \alpha[u(\varepsilon)]$, $\beta = \beta[u(\varepsilon)]$.

Итерационная процедура (1.41) может быть использована и для получения асимптотик бифурцирующих решений.

Теорема 1.8 Существоющие в условиях теоремы 1.7 бифурцирующие решения $u(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ уравнения (1.32) представимы в виде

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &= \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \\ \alpha(\varepsilon) &= \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + o(\varepsilon^2), \\ \beta(\varepsilon) &= \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \Gamma_0 b_2(e, \alpha_0, \beta_0), & \alpha_1 &= (e_1, e^*), & \beta_1 &= (e_1, g^*), \\ e_2 &= \Gamma_0 b_3(e, \alpha_0, \beta_0) + \Gamma_0 \varphi, & \alpha_2 &= (e_2, e^*), & \beta_2 &= (e_2, g^*), \end{aligned}$$

и Γ_0 — оператор (1.40),

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha_1 B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e_1 + \beta_1 B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e_1 + \\ & + \frac{1}{2}\alpha_1^2 B''_{\alpha\alpha}(\alpha_0, \beta_0)e + \alpha_1\beta_1 B''_{\alpha\beta}(\alpha_0, \beta_0)e + \frac{1}{2}\beta_1^2 B''_{\beta\beta}(\alpha_0, \beta_0)e + \\ & + b'_{2u}(e, \alpha_0, \beta_0)e_1 + \alpha_1 b'_{2\alpha}(e, \alpha_0, \beta_0) + \beta_1 b'_{2\beta}(e, \alpha_2, \beta_2). \end{aligned}$$

1.5 Доказательства основных утверждений

Доказательство теоремы 1.5.

Теорема 1.5 была установлена в [54]. Здесь для иллюстрации приведем новое доказательство формул (1.31).

Пусть $x(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$ — непрерывные функции, зависящие от скалярного или векторного переменного ε и принимающие значения в линейном нормированном пространстве E . Следуя [36] будем говорить, что функция $y(\varepsilon)$ является *асимптотическим приближением порядка k* функции $x(\varepsilon)$, если

$$\|x(\varepsilon) - y(\varepsilon)\| = o(|\varepsilon|^k) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Будем также говорить, что функция $y(\varepsilon)$ является *асимптотическим приближением предпорядка k* функции $x(\varepsilon)$, если

$$\|x(\varepsilon) - y(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^k) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Пусть, например, дана скалярная функция $x(\varepsilon)$ такая, что $x(\varepsilon) \in C^k[-a, a]$, где $a > 0$. Для нее верна формула Тейлора

$$x(\varepsilon) = x(0) + x'(0)\varepsilon + x''(0)\frac{1}{2!}\varepsilon^2 + \cdots + x^{(k)}(0)\frac{1}{k!}\varepsilon^k + o(\varepsilon^k).$$

Тогда многочлен

$$y(\varepsilon) = x(0) + x'(0)\varepsilon + x''(0)\frac{1}{2!}\varepsilon^2 + \cdots + x^{(k)}(0)\frac{1}{k!}\varepsilon^k$$

является асимптотическим приближением порядка k функции $x(\varepsilon)$.

Для доказательства формул (1.31) достаточно показать, что функции

$$\widehat{u}(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2, \quad \widehat{\theta}(\varepsilon) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2, \quad (1.42)$$

являются асимптотическими приближениями порядка 3 и 2 функций $u(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon)$ соответственно.

Ограничимся доказательством первого факта, т.е. покажем, что функция $\widehat{u}(\varepsilon)$ является асимптотическим приближением порядка 3 функции $u(\varepsilon)$.

Прямым подсчетом можно установить, что функция $\widehat{u}(\varepsilon)$ связана со второй итерацией $u_2(\varepsilon)$ в (1.26) соотношением:

$$\|\widehat{u}(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)\| = o(\varepsilon^3). \quad (1.43)$$

Отметим, что сходимость итераций (1.26) обеспечивается тем фактом (см. [26]), что для оператора

$$F(u) = u - \Gamma_0(G(u) + W(u))$$

в шаре $S_{r_0(\varepsilon)}$ некоторого радиуса $r_0(\varepsilon)$ такого, что $r_0(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, выполнены все условия принципа сжимающих отображений. Отсюда и из [36] следует, что каждая итерация $u_k(\varepsilon)$ в (1.26) представляет собой асимптотическое приближение порядка $k + 1$ функции $u(\varepsilon)$.

Тогда из (1.43) получим, что функция $\widehat{u}(\varepsilon)$ является асимптотическим приближением порядка 3 функции $u(\varepsilon)$.

Формулы (1.31) доказаны.

Справедливость лемм и теорем параграфа 1.4 устанавливаются по той же схеме, что и для конечномерных пространств (см. [54]), но с естественными модификациями. При этом, например, асимптотические формулы (1.8) можно доказать по той же схеме, что и выше при доказательстве формул (1.31).

Особую сложность вызывает доказательство обратимости оператора $G'(\varepsilon e) : H \rightarrow H$. Поэтому ограничимся доказательством только данного факта.

Доказательство леммы 1.5. Рассмотрим оператор (1.39):

$$G'(\varepsilon e)h = h - B(\alpha_0, \beta_0)h - (h, e^*)B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e - (h, g^*)B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, \quad h \in H.$$

Оператор $B(\alpha_0, \beta_0) : H \rightarrow H$ является вполне непрерывным и следовательно, множество его собственных значений не более чем счетно и единственной точкой сгущения может быть только нуль.

Оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет собственное значение 1 кратности 2. Обозначим через H_0 — собственное подпространство, отвечающее собственному значению 1. Собственному значению 1 оператора $B(\alpha_0, \beta_0)$ отвечают линейно независимые собственные векторы e и g , образующие базис пространства H_0 .

Обозначим через H^0 — дополнительное к H_0 инвариантное для $B(\alpha_0, \beta_0)$ подпространство, $H = H_0 \oplus H^0$. Равенство $H = H_0 \oplus H^0$ определяет операторы проектирования $P_0 : H \rightarrow H_0$ и $P^0 : H \rightarrow H^0$. При этом операторы проектирования могут быть определены равенствами $P_0 u = (u, e^*)e + (u, g^*)g$ и $P^0 u = (I - P_0)u$.

Для доказательства обратимости оператора $G'(\varepsilon e) : H \rightarrow H$ воспользуемся следующим утверждением [37].

Лемма 1.7 Пусть B — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве. Тогда оператор $(I - B) : H \rightarrow H$ непрерывно обратим, если уравнение $(I - B)u = 0$ имеет единственное решение $u = 0$.

Таким образом, для доказательства обратимости оператора $G'(\varepsilon e)$ достаточно доказать, что из равенства $G'(\varepsilon e)h = 0$ следует $h = 0$.

Пусть при некотором $h \in H$ выполняется равенство $G'(\varepsilon e)h = 0$. Вектор h представим в виде $h = h_0 + h^0$, где $h_0 \in H_0$, $h^0 \in H^0$. Подставляя h в соотношение (1.39), имеем

$$h_0 + h^0 - B(\alpha_0, \beta_0)(h_0 + h^0) - (h_0 + h^0, e^*)B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e - (h_0 + h^0, g^*)B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e = 0,$$

или

$$\begin{cases} h_0 = B(\alpha_0, \beta_0)h_0 + (h, e^*)P_0B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e + (h, g^*)P_0B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, \\ h^0 = B(\alpha_0, \beta_0)h^0 + (h, e^*)P^0B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e + (h, g^*)P^0B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e. \end{cases} \quad (1.44)$$

Так как $B(\alpha_0, \beta_0)h_0 = h_0$, то первое уравнение (1.44) примет вид

$$(h, e^*)P_0B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e + (h, g^*)P_0B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e = 0.$$

После применения оператора P_0 последнее равенство запишется в виде $C_1e + C_2g = 0$, где

$$\begin{aligned} C_1 &= (h, e^*)(B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) + (h, g^*)(B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ C_2 &= (h, e^*)(B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) + (h, g^*)(B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*). \end{aligned}$$

Векторы e, g линейно независимы, следовательно $C_1 = C_2 = 0$, т.е.

$$\begin{pmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (h, e^*) \\ (h, g^*) \end{pmatrix} = 0.$$

В силу условия (1.34) определитель матрицы последней системы не равен нулю, следовательно $(h, e^*) = (h, g^*) = 0$. Отсюда получим $h \in H^0$ или что тоже самое $h = h^0$ и $h_0 = 0$.

Рассмотрим второе уравнение системы (1.44). Учитывая, что $(h, e^*) = (h, g^*) = 0$ получим $h^0 = B_0(\alpha_0, \beta_0)h^0$. Отсюда, а так же из условия $1 \notin \sigma(B(\alpha_0, \beta_0) : H^0 \rightarrow H^0)$ получим, $h^0 = 0$. Следовательно $h = 0$. Лемма доказана.

Глава 2

Исследование локальных бифуркаций в автономных ФДУЗТ

В этой главе изучаются основные сценарии бифуркаций для автономных ФДУЗТ, приведены достаточные признаки бифуркаций и асимптотические формулы для возникающих бифурцирующих решений, проведен анализ устойчивости бифурцирующих решений.

2.1 Постановка задачи

Основным объектом исследования в этой главе является система нелинейных автономных ФДУЗТ, зависящая от скалярного параметра θ :

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta)] \Phi(x(t - \tau), \theta) + \Psi(x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta). \quad (2.1)$$

Здесь $x \in R^n$, $r > 0$, $\tau_j \in [0, r]$, $j = \overline{1, m}$; $R(\tau, \theta)$, $Q(\tau, \theta)$ — это $n \times n$ матрицы, элементы которых при каждом θ являются функциями ограниченной вариации по $\tau \in [0, r]$ и при каждом $\tau \in [0, r]$ непрерывно дифференцируемы по θ . Предполагается, что вектор-функции $\Phi(x, \theta)$, $\Psi(x, \theta)$ непрерывно

дифференцируемы по совокупности переменных и равномерно по θ удовлетворяют условиям

$$\|\Phi(x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \|x\| \rightarrow 0, \quad \|\Psi(x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \|x\| \rightarrow 0.$$

Интегралы в (2.1) понимаются в смысле Лебега–Стилтьеса.

Система (2.1) при всех значениях параметра θ имеет точку равновесия $x = 0$.

Пусть $\theta = \theta_0$ фиксировано. Возможны два случая: при $\theta = \theta_0$ точка равновесия $x = 0$ системы (2.1) является либо гиперболической, либо негиперболической. В первом случае верна

Теорема 2.1 *Существует $\delta > 0$ такое, что при $\|\theta - \theta_0\| < \delta$ система (2.1) в δ -окрестности гиперболической точки равновесия $x = 0$ не имеет нетривиальных периодических решений.*

Теорема 2.1 является следствием общих утверждений относительно поведения динамической системы в окрестности гиперболической точки равновесия (см. например, [35]).

Пусть, теперь, при $\theta = \theta_0$ решение $x = 0$ системы (2.1) является негиперболической точкой равновесия. В этом случае, значение θ_0 называют точкой бифуркации системы (2.1).

Основной целью в этой главе является исследование локальных бифуркаций системы (2.1) в окрестности тривиального решения.

2.2 Достаточные признаки локальных бифуркаций

Наряду с (2.1) будем рассматривать также линейную систему уравнений

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] x(t - \tau). \quad (2.2)$$

Функция

$$L(p, \theta) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] e^{-p\tau} - pI \right) \quad (2.3)$$

комплексного переменного p является характеристическим квазиполиномом линейной системы (2.2).

Рассмотрим две основные ситуации негиперболичности:

U 2.1 квазиполином (2.3) при $\theta = \theta_0$ имеет простой корень $p = 0$ и не имеет чисто мнимых корней,

U 2.2 квазиполином (2.3) при $\theta = \theta_0$ имеет пару простых чисто мнимых корней $p = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых корней.

Ниже будут изучены основные сценарии бифуркаций системы (2.1) в случае U2.1 и U2.2.

2.2.1 Бифуркация положения равновесия

Рассмотрим сначала случай U2.1. Здесь основным сценарием бифуркации является возникновение при θ близких к θ_0 , в окрестности точки $x = 0$ новых состояний равновесия. Напомним соответствующее определение (см. п.1.3.1.).

Число θ_0 называют *точкой бифуркации положения равновесия* системы (2.1), если существует непрерывная функция $\theta = \theta(\varepsilon)$, определенная при малых $|\varepsilon|$, такая что $\theta(0) = \theta_0$, при этом система (2.1) для каждого $\theta = \theta(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon) \neq \theta_0$ имеет ненулевую точку равновесия $x^*(\varepsilon)$, причем $x^*(\varepsilon)$ — непрерывная функция и $x^*(0) = 0$.

В этом параграфе приводятся два разных достаточных признака бифуркации положения равновесия.

Первый из них содержится в следующей теореме.

Теорема 2.2 Пусть выполнено условие U2.1 и пусть для характеристического квазиполинома (2.3) верно соотношение

$$L'_\theta(p, \theta)|_{p=0, \theta=\theta_0} \neq 0.$$

Тогда θ_0 является точкой бифуркации положения равновесия системы (2.1).

Доказательство этой теоремы и последующих утверждений этой главы содержится в § 2.5.

Приведем теперь другой признак бифуркации положения равновесия системы (2.1), основанный на положениях операторного метода исследования локальных бифуркаций (см. п.1.4.1.). Для этого перейдем от (2.1) к уравнению, определяющему точки равновесия этой системы, а именно, к операторному уравнению

$$A(\theta)x + b(x, \theta) = 0, \quad x \in R^n, \quad \theta \in R, \quad (2.4)$$

где $A(\theta)$ — матрица:

$$A(\theta) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)], \quad (2.5)$$

а $b(x, \theta)$ — нелинейность:

$$b(x, \theta) = \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta)] \Phi(x, \theta) + \Psi(x, \theta).$$

Уравнение (2.4) является уравнением вида (1.21), где $A(\theta) = B(\theta) - I$.

Точки равновесия системы (2.1) совпадают с решениями операторного уравнения (2.4).

Лемма 2.1 Условие U2.1 равносильно тому, что матрица $A(\theta_0)$ имеет простое собственное число 0.

Обозначим через

$$A^*(\theta) = \int_0^r [d_\tau R^T(\tau, \theta)]$$

сопряженную матрицу. Матрица $A^*(\theta_0)$ также имеет простое собственное число 0.

Положим e и e^* собственные векторы, отвечающие простому собственному числу 0 матриц $A(\theta_0)$ и $A^*(\theta_0)$ соответственно. Векторы можно нормировать в соответствии с равенством $(e, e^*) = 1$.

Отметим, что операторы $A(\theta)$ и $b(x, \theta)$ в уравнении (2.4) действуют в конечномерном пространстве R^n при фиксированных θ . Поэтому для исследования бифуркаций можно воспользоваться операторным методом, изложенным в п. 1.4.1.

Приведем достаточный признак бифуркации для операторного уравнения (2.4). Из леммы 2.1 и теоремы 1.3 следует, что верна

Теорема 2.3 Пусть выполнено условие U2.1 и пусть верно соотношение

$$(A'(\theta_0)e, e^*) \neq 0.$$

Тогда значение $\theta = \theta_0$ является точкой бифуркации положения равновесия уравнения (2.1).

Примеры, иллюстрирующие бифуркацию положения равновесия, приведены в п.2.2.3.

2.2.2 Бифуркация Андронова–Хопфа.

Рассмотрим теперь случай U2.2. Здесь основным является сценарий, связанный с возникновением, при θ близких к θ_0 , в окрестности точки $x = 0$ нестационарных периодических колебаний малой амплитуды. Этот сценарий

называют бифуркацией Андронова–Хопфа [79]. Напомним соответствующее определение (см. п.1.3.1).

Пару чисел (θ_0, ω_0) называют *точкой бифуркации Андронова–Хопфа* системы (2.1), если существуют непрерывные функции $\theta(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$, определенные при малых $|\varepsilon|$ такие, что $\theta(0) = \theta_0$, $T(0) = \frac{2\pi}{\omega_0}$, при этом система (2.1) для каждого $\theta = \theta(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon) \neq \theta_0$ имеет нестационарное $T(\varepsilon)$ -периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$, причем $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отметим тот факт, что в уравнениях с запаздывающим аргументом бифуркация Андронова–Хопфа может возникать уже в системах первого порядка, в отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где бифуркация Андронова–Хопфа возможна только для систем второго порядка и выше.

В этом параграфе приводятся два достаточных признака бифуркации Андронова–Хопфа. Первый из них содержится в следующей теореме.

Теорема 2.4 Пусть выполнено условие U2.2 и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & -\operatorname{Im}(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \\ \operatorname{Im}(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & \operatorname{Re}(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.6)$$

Тогда пара чисел (θ_0, ω_0) является *точкой бифуркации Андронова–Хопфа* системы (2.1).

Здесь L'_p и L'_θ производные от (2.3) по p и θ соответственно.

Приведем другой признак бифуркации Андронова–Хопфа, основанный на положениях операторного метода исследований локальных бифуркаций (см. п.1.4.2.). Для этого перейдем от уравнения (2.1) к операторному уравнению:

$$u(t) = B(T, \theta)u(t) + b(u(t), T, \theta), \quad (2.7)$$

где

$$B(T, \theta)u(t) = \int_0^1 u(s)ds + T \int_0^1 s \left[\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s) \right] ds + \\ + T \int_0^t \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s) \right) ds, \quad (2.8)$$

$$b(u(t), T, \theta) = T \int_0^1 s \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta)] \Phi\left(E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s), \theta\right) ds + \\ + T \int_0^1 s \cdot \Psi\left(E\left(\frac{\tau_1}{T}\right) u(s), \dots, E\left(\frac{\tau_m}{T}\right) u(s), \theta\right) ds + \\ + T \int_0^t \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta)] \Phi\left(E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s), \theta\right) ds + \\ + T \int_0^t \Psi\left(E\left(\frac{\tau_1}{T}\right) u(s), \dots, E\left(\frac{\tau_m}{T}\right) u(s), \theta\right) ds. \quad (2.9)$$

Здесь $E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s) = \begin{cases} u\left(s - \frac{\tau}{T} + 1\right), & 0 \leq s < \frac{\tau}{T}, \\ u\left(s - \frac{\tau}{T}\right), & \frac{\tau}{T} \leq s \leq 1 \end{cases}$. Операторы $B(T, \theta)$ и $b(u(t), T, \theta)$ действуют в пространстве $L_2[0, 1]$ при фиксированных θ и T , являются вполне непрерывными (см. п. 1.2.2).

Равенство $u(t) = x(t \cdot T)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между T -периодическими решениями $x(t)$ системы (2.1) и решениями $u(t)$ операторного уравнения (2.7). Поэтому задача исследования T -периодических решений для системы (2.1) равносильна задаче исследования решений для операторного уравнения (2.7).

Лемма 2.2 *Условие U2.2 равносильно тому, что оператор $B(T_0, \theta_0) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.*

Положим $e(t), g(t)$ — собственные функции оператора $B(T_0, \theta_0) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, соответствующие полупростому собственному значению 1 кратности 2.

Сопряженный оператор $B^*(T, \theta)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} B^*(T, \theta)u(t) = & \int_0^1 u(s)ds - T \int_0^1 s \left[\int_0^r [d_\tau R^*(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau^*}{T}\right) u(s) \right] ds + \\ & + T \int_t^1 \left(\int_0^r [d_\tau R^*(\tau, \theta)] E\left(\frac{\tau^*}{T}\right) u(s) \right) ds, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $R^*(\tau, \theta)$ — транспонированная матрица, а $\tau^* = T - \tau$.

Сопряженный оператор $B^*(T_0, \theta_0) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные функции $e^*(t)$ и $g^*(t)$. Собственные функции операторов $B(T_0, \theta_0)$ и $B^*(T_0, \theta_0)$ выберем исходя из соотношений (1.33):

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e(t), e^*(t))dt &= \int_0^1 (g(t), g^*(t))dt = 1, \\ \int_0^1 (e(t), g^*(t))dt &= \int_0^1 (g(t), e^*(t))dt = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Приведем достаточный признак бифуркации для операторного уравнения (2.7).

Теорема 2.5 Пусть выполнено условие U2.2 и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt & \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt \\ \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt & \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.12)$$

Тогда пара (θ_0, T_0) является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (2.1).

Здесь B'_T и B'_θ — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(T, \theta)$ по T и θ соответственно. Справедливость теоремы следует из леммы 2.2 и теоремы 1.6.

2.2.3 Примеры

Пример 2.1 Исследуем возможные сценарии бифуркаций в окрестности решения $x = 0$ уравнения Хатчинсона–Райта

$$x'(t) = \theta x(t-1)(1+x(t)), \quad (2.13)$$

где $r = 1$, $R(\tau, \theta) = \theta H(\tau - 1)$, $\Phi = 0$, $\Psi(x(t), x(t-\theta)) = \theta x(t)x(t-1)$. Здесь $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Тривиальное решение является негиперболической точкой равновесия уравнения (2.13) при $\theta = \theta_0$, если характеристический квазиполином

$$L(p, \theta) = \theta e^{-p} - p$$

уравнения (2.13) при $\theta = \theta_0$ имеет чисто мнимые корни.

Очевидно, что при $\theta_0 = 0$ квазиполином имеет корень $p = 0$, при $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ — корни $p = \pm i\frac{\pi}{2}$. Покажем, что эти случаи соответствуют ситуациям негиперболичности U2.1 и U2.2.

Для этого сначала покажем, что эти корни квазимногочлена простые, то есть выполнено $L'_p(0, 0) \neq 0$ и $L'_p(\pm i\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \neq 0$.

Имеем $L'_p(0, 0) = (\theta_0(-1)e^{-p} - 1)|_{p=0, \theta_0=0} = -1 \neq 0$ и $L'_p(\pm \frac{\pi}{2}i, -\frac{\pi}{2}) = (\theta_0(-1)e^{-p} - 1)|_{p=\pm \frac{\pi}{2}i, \theta_0=-\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{\pi}{2}i \neq 0$.

Остается показать, что при $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ других чисто мнимых корней, кроме корней вида $p = 0$ и $p = \pm \frac{\pi}{2}i$, нет. Докажем это от противного. Пусть, сначала квазиполином $L(p, 0)$ имеет чисто мнимый корень $p = \pm \omega_0 i$, $\omega_0 > 0$. То есть $L(\pm i\omega_0, 0) = 0 \cdot e^{\mp i\omega_0} \mp i\omega_0 = 0$. Отсюда $\omega_0 = 0$. Пусть теперь квазиполином $L(p, -\frac{\pi}{2})$ имеет чисто мнимый корень $p = \pm \omega_0 i$, $\omega_0 \neq \frac{\pi}{2}$: $L(\pm \omega_0 i, -\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}e^{\mp i\omega_0} \mp i\omega_0 = 0$. Из последнего равенства получаем систему:

$$\begin{cases} \cos \omega_0 = 0, \\ \frac{\pi}{2} \sin \omega_0 = \omega_0, \end{cases}$$

единственным решением которой является $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, в уравнении (2.13) возможны два основных сценария бифуркации: точек положения равновесия и Андронова–Хопфа.

Покажем, что $\theta_0 = 0$ является точкой бифуркации положения равновесия уравнения (2.13). Для этого воспользуемся теоремой 2.2. Условие U2.1 теоремы выполнено при $\theta_0 = 0$. Проверим второе утверждение теоремы: $L'_\theta(0, 0) \neq 0$. Здесь $L'_\theta(0, 0) = (e^{-p})|_{p=0, \theta=0} = 1$.

Таким образом, $\theta_0 = 0$ является точкой бифуркации положения равновесия по теореме 2.2.

Покажем, теперь, что пара чисел $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа уравнения (2.13). Для этого воспользуемся теоремой 2.4. Первое утверждение теоремы U2.2 выполнено при $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$. Проверим второе утверждение теоремы, а именно найдем значение выражения (2.6). Здесь $L'_\theta(\pm i\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (e^{-p})|_{p=\pm i\frac{\pi}{2}, \theta=-\frac{\pi}{2}} = \mp i$, $L'_p(\pm i\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (-\theta e^{-p} - 1)|_{p=\pm i\frac{\pi}{2}, \theta=-\frac{\pi}{2}} = \mp i\frac{\pi}{2} - 1$. Отсюда соотношение (2.6) запишется

в виде

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ \mp \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Таким образом, пара чисел $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа по теореме 2.4.

Изучим теперь вопрос о локальных бифуркациях в уравнении (2.13) с использованием теорем 2.3 и 2.5.

Как было отмечено выше, условие U2.1 выполняется при $\theta = \theta_0 = 0$. Матрица (2.5) в этом примере является функцией $A(\theta) = \theta \cdot A(\theta_0)$, имеет простое собственное значение 0. Тогда $(A'(\theta_0)e, e^*) = 1$, так как $A'(\theta) = 1$, $e = e^* = 1$.

Таким образом, число $\theta_0 = 0$ является точкой бифуркации положения равновесия уравнения (2.13) согласно теореме 2.3.

Теперь, для уравнения (2.13) проверим достаточность условия бифуркации Андронова–Хопфа по теореме 2.5. Условие U2.2 выполняется при $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. Оператор (2.8) для уравнения (2.13) принимает вид

$$B(T, \theta)u(t) = \int_0^1 u(s)ds + T\theta \int_0^1 sE\left(\frac{1}{T}\right)u(s)ds + T\theta \int_0^t E\left(\frac{1}{T}\right)u(s)ds.$$

Оператор $B(T, \theta)$ имеет собственное значение 1 кратности 2 при $\theta = \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4$ в силу леммы 2.2. Несложно показать, что функции $e(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi t$ и $g(t) = \sqrt{2} \sin 2\pi t$ являются собственными функциями оператора $B(T_0, \theta_0)$ соответствующими собственному значению 1.

Проверим второе условие теоремы. Для этого определим компоненты

матрицы определителя (2.12):

$$\begin{aligned} \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2\pi t - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \sin 2\pi t \right) \sqrt{2} \cos 2\pi t dt = \frac{1}{4}, \\ \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2\pi t - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \sin 2\pi t \right) \sqrt{2} \sin 2\pi t dt = -\frac{\pi}{8}, \\ \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt &= \int_0^1 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos 2\pi t \right) \sqrt{2} \cos 2\pi t dt = -\frac{2}{\pi}, \\ \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt &= \int_0^1 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos 2\pi t \right) \sqrt{2} \sin 2\pi t dt = 0. \end{aligned}$$

Здесь $e^*(t) = e(t)$ и $g^*(t) = g(t)$. Тогда условие (2.12) принимает вид

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{\pi} \\ -\frac{\pi}{8} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Таким образом, в силу теоремы 2.5 пара чисел $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $T_0 = 4$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа.

Пример 2.2 Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) x(t - \theta) + x(t)x(t - \theta), \quad \theta > 0. \quad (2.14)$$

Здесь $r = \theta$, $R(\tau, \theta) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) H(\tau - \theta)$, $\Phi = 0$, $\Psi = x(t)x(t - \theta)$.

Характеристический квазиполином уравнения (2.14) — это функция

$$L(p, \theta) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) e^{-\theta p} - p.$$

Условие U2.1 не выполняется, ни при каком θ . Второе условие U2.2 выполняется при $\theta_0 = 1 + 4n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $p = \pm i\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что для уравнения (2.14) невозможна бифуркация точки положения равновесия и возможна бифуркация

Андропова–Хопфа при значениях параметров $\theta_0 = 1 + 4n, n \in N \cup \{0\}$ и $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 2.3 Рассмотрим модифицированное уравнение Ван дер Поля с запаздыванием

$$x''(t) + [\theta - x^2(t)]x'(t - \pi) + x(t) = 0. \quad (2.15)$$

Исследуем возможные сценарии бифуркаций в окрестности тривиального решения этого уравнения. Воспользуемся теоремами 2.2 - 2.5.

Запишем уравнение в виде системы. Пусть $y(t) = x'(t)$, тогда

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -x(t) - \theta y(t - \pi) + x^2(t)y(t - \pi). \end{cases} \quad (2.16)$$

Очевидно, что это система вида (2.1).

Характеристический квазиполином линейной системы, соответствующей системе (2.16), это выражение вида

$$L(p, \theta) = p^2 + \theta p e^{-\pi p} + 1.$$

Проверим сначала выполнение условий теоремы 2.2. Условие U2.1 не выполняется ни при каких значениях параметра θ . Отсюда заключаем, что в модифицированном уравнении Ван дер Поля с запаздыванием невозможна бифуркация положения равновесия.

Проверим теперь условия теоремы 2.4. Легко видеть, что условие U2.2 выполняется при $\theta_0 = 0$ и $p = \pm i$. Для проверки условия (2.6) найдем значения матрицы определителя (2.6):

$$\operatorname{Re} (L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) = 0, \quad \operatorname{Im} (L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) = \pm 2,$$

$$\operatorname{Re} (L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) = 0, \quad \operatorname{Im} (L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) = \mp 1.$$

Отсюда получим, что соотношение (2.6) имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Таким образом, в силу теоремы 2.4 уравнение (2.15) имеет точку бифуркации Андронова–Хопфа при $\theta_0 = 0$ и $\omega_0 = 1$.

Наконец, перейдем к проверке условий теоремы 2.5, а именно проверим условие (2.12) теоремы. Оператор (2.8) в этом примере имеет вид:

$$\begin{aligned} B(T, \theta)u(t) &= \int_0^1 u(s)ds + T \int_0^1 s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\theta E\left(\frac{\pi}{T}\right) \end{pmatrix} u(s)ds + \\ &+ T \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\theta E\left(\frac{\pi}{T}\right) \end{pmatrix} u(s)ds. \end{aligned}$$

Оператор $B(T_0, \theta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2 согласно лемме 2.2. Здесь $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$. Из равенств $B(T_0, \theta_0)e(t) = e(t)$ и $B(T_0, \theta_0)g(t) = g(t)$ найдем собственные функции оператора. Несложными вычислениями можно показать, что такими функциями будут

$$e(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos 2\pi t \\ -\sqrt{2} \sin 2\pi t \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin 2\pi t \\ \sqrt{2} \cos 2\pi t \end{pmatrix}.$$

Аналогично находятся собственные вектор-функции сопряженного оператора $B^*(T_0, \theta_0)$ отвечающие собственному значению 1 кратности 2, где $B^*(T_0, \theta_0)$ определяется из (2.10). Отсюда

$$e^*(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos 2\pi t \\ -\sqrt{2} \sin 2\pi t \end{pmatrix}, \quad g^*(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin 2\pi t \\ \sqrt{2} \cos 2\pi t \end{pmatrix}.$$

Найдем значения матрицы определителя (2.12):

$$\int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt = \frac{1}{\pi}, \quad \int_0^1 (B'_T(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt = 0,$$

$$\int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), e^*(t)) dt = 0, \quad \int_0^1 (B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), g^*(t)) dt = 1.$$

Отсюда детерминант (2.12):

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}.$$

Таким образом, в силу теоремы 2.5, уравнение Ван дер Поля с запаздыванием имеет точку бифуркации Андронова–Хопфа при $\theta_0 = 0$ и $T_0 = 2\pi$.

2.3 Приближенное исследование бифуркаций

В этом параграфе рассматривается вопрос о приближенном построении бифурцирующих решений уравнения (2.1).

2.3.1 Приближенное исследование бифуркации положения равновесия

Рассмотрим сначала задачу о приближенном построении существующих, в условиях теорем 2.2 и 2.3, бифурцирующих решений $x(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon)$ системы (2.1). Здесь $\varepsilon \geq 0$ - вспомогательный малый параметр, так что $x(0) = 0$ и $\theta(0) = \theta_0$. Исследование проводится по схеме изложенной в [25]. С этой целью рассмотрим операторное уравнение (2.4):

$$x = B(\theta)x + b(x, \theta), \quad x \in R^n, \quad \theta \in R, \quad (2.17)$$

где $B(\theta) - I = A(\theta)$.

Определим для $\varepsilon > 0$ семейство линейных функционалов

$$f[x] = \frac{\theta_0}{\varepsilon}(x, e^*) \quad (2.18)$$

считая без ограничения общности, что $\theta_0 \neq 0$.

Подставляя функционал (2.18) в уравнение (2.17), получим операторное уравнение

$$x - B(f[x])x - b(x, f[x]) = 0,$$

не содержащее параметр θ .

Обозначим $G(x) = x - B(f[x])$, а $W(x) = -b(x, f[x])$. Рассмотрим оператор $G'(\varepsilon e) : R^n \rightarrow R^n$ определенный равенством

$$G'(\varepsilon e)h = h - \theta_0(h, g)B'(\theta_0)e - B(\theta_0)h, \quad h \in R^n.$$

Этот оператор не зависит от ε и непрерывно обратим (см. п.1.4.1). Обозначим $\Gamma_0 = (G'(\varepsilon e))^{-1}$. Верны аналоги теорем 1.4 и 1.5:

Теорема 2.6 Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Пусть функционал $f[x]$ выбран в виде (2.18). Тогда при малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.4) имеет в шаре $S(\varepsilon e, r_0(\varepsilon))$ некоторого радиуса $r_0(\varepsilon)$, $r_0(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, единственное ненулевое решение $x(\varepsilon)$, которое можно получить как предел последовательных приближений

$$x_{k+1} = x_k - \Gamma_0(G(x_k) + W(x_k)), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x_0 = \varepsilon e$. При этом $\|x(\varepsilon)\| \rightarrow 0$ и $f[x(\varepsilon)] \rightarrow \theta_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вектор $x(\varepsilon)$ является постоянным решением системы (2.1) при $\theta = f[x(\varepsilon)]$.

Здесь $\Gamma_0 = [G'(\varepsilon e)]^{-1} : R^n \rightarrow R^n$, а $G'(\varepsilon e)h = h - \theta_0(h, g)B'(\theta_0)e - B(\theta_0)h$.

Пусть нелинейность $b(x, \theta)$ представляется в виде

$$b(x, \theta) = b_2(x, \theta) + \tilde{b}_3(x, \theta),$$

где $b_2(x, \theta)$ — квадратичная нелинейность, а $\tilde{b}_3(x, \theta)$ содержит члены более высокой степени.

Теорема 2.7 *Существующие в условиях теоремы 2.6 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon)$ системы (2.1) представимы в виде*

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= \varepsilon e + \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e, \theta_0) + o(\varepsilon^2), \\ \theta(\varepsilon) &= \theta_0 - \varepsilon \frac{(b_2(e, \theta_0), e^*)}{(B'(\theta_0)e, e^*)} + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Формулы (2.19) являются *главными асимптотиками* бифурцирующих решений $x(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$ системы уравнений (2.1).

Первое из равенств (2.19) понимается в следующем смысле:

$$\|x(\varepsilon) - \varepsilon e - \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e, \theta_0)\|_{R^n} = o(\varepsilon^2). \quad (2.20)$$

Аналогичный смысл имеет и второе равенство в (2.19).

В случае когда нелинейность $b(x, \theta)$ представлена квадратичным слагаемым, то в условиях теоремы 2.6 при $\theta = \theta_0$ в системе (2.1) имеет место транскритическая бифуркация. Если же нелинейность $b(x, \theta)$ является кубической, то в системе (2.1) имеет место бифуркация типа вилки.

В случае, когда нелинейность $b(x, \theta)$ представляется в виде

$$b(x, \theta) = b_2(x, \theta) + b_3(x, \theta) + \tilde{b}_4(x, \theta),$$

где $b_2(x, \theta)$ и $b_3(x, \theta)$ — квадратичная и кубическая нелинейности соответственно, а $\tilde{b}_4(x, \theta)$ содержит члены более высокой степени, также возможно представление бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$ уравнения (2.1) согласно теореме 1.5.

2.3.2 Приближенное исследование бифуркации Андронова-Хопфа

Рассмотрим теперь задачу о приближенном построении существующих в условиях теорем 2.4 и 2.5 бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ системы (2.1). Здесь $\varepsilon \geq 0$ вспомогательный малый параметр, такой что

$x(t, 0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $T(0) = T_0$. Схема приближенного построения бифурцирующих решений изложена в пункте 1.4.2. С этой целью рассмотрим эквивалентное уравнению (2.1) операторное уравнение (2.7):

$$u(t) = B(T, \theta)u(t) + b(u(t), T, \theta),$$

где $B(T, \theta)$ и $b(u(t), T, \theta)$ это операторы (2.8) и (2.9) соответственно. Определим функционалы

$$\begin{aligned} T[u(t)] &= T_0 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^1 (u(t), e^*(t)) dt - \varepsilon \right), \\ \theta[u(t)] &= \theta_0 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^1 (u(t), g^*(t)) dt \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставляя функционалы (2.21) в уравнение (2.7), вместо T и θ , приходим к уравнению

$$G[u(t), \varepsilon] + W[u(t), \varepsilon] = 0, \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} G[u(t), \varepsilon] &= u(t) - \int_0^1 u(s) ds - \\ &- T[u(t)] \int_0^1 s \left[\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta[u(t)])] E \left(\frac{\tau}{T[u(t)]} \right) u(s) \right] ds - \\ &- T[u(t)] \int_0^t \left[\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta[u(t)])] E \left(\frac{\tau}{T[u(t)]} \right) u(s) \right] ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W[u(t), \varepsilon] &= \\
&= -T[u(t)] \int_0^1 s \left[\int_0^r \left[d_\tau Q(\tau, \theta[u(t)]) \right] \Phi \left(E \left(\frac{\tau}{T[u(t)]} \right) u(s), \theta[u(t)] \right) \right] ds - \\
&\quad -T[u(t)] \int_0^1 s \left[\Psi \left(E \left(\frac{\tau_1}{T[u(t)]} \right) u(s), \dots, E \left(\frac{\tau_m}{T[u(t)]} \right) u(s), \theta[u(t)] \right) \right] ds - \\
&\quad -T[u(t)] \int_0^t \left[\int_0^r \left[d_\tau Q(\tau, \theta[u(t)]) \right] \Phi \left(E \left(\frac{\tau}{T[u(t)]} \right) u(s), \theta[u(t)] \right) \right] ds - \\
&\quad -T[u(t)] \int_0^t \left[\Psi \left(E \left(\frac{\tau_1}{T[u(t)]} \right) u(s), \dots, E \left(\frac{\tau_m}{T[u(t)]} \right) u(s), \theta[u(t)] \right) \right] ds.
\end{aligned}$$

Рассмотрим оператор $G'(\varepsilon e(t)) : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, определенный равенством

$$\begin{aligned}
G'(\varepsilon e(t))h(t) &= h(t) - B(T_0, \theta_0)h(t) - \int_0^1 (h(t), e^*(t))dt \cdot B'_T(T_0, \theta_0)e(t) - \\
&\quad - \int_0^1 (h(t), g^*(t))dt \cdot B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t), \quad h(t) \in L_2[0, 1].
\end{aligned}$$

Этот оператор не зависит от ε и непрерывно обратим (п.1.4.2). Обозначим $\Gamma_0 = [G'(\varepsilon e(t))]^{-1}$. Из теорем 1.7 и 1.8 следует справедливость следующих утверждений.

Теорема 2.8 Пусть выполнены условия теоремы 2.4 и пусть функционалы $\theta(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$ выбраны в виде (2.21). Тогда при каждом малом $\varepsilon > 0$ последовательные приближения

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) - \Gamma_0 (G[u_k(t), \varepsilon] + W[u_k(t), \varepsilon]), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $u_0(t) = \varepsilon e(t)$, сходятся к некоторой функции $u(t, \varepsilon) \in L_2[0, 1]$. При этом $\theta(\varepsilon) \rightarrow \theta_0$, $T(\varepsilon) \rightarrow T_0$, $\|u(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t)\|_{L_2} = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция

$u(t, \varepsilon)$ является бифурцирующим решением уравнения (2.7) при $\theta = \theta(\varepsilon) = \theta[u(t, \varepsilon)]$, $T = T(\varepsilon) = T[u(t, \varepsilon)]$.

Пусть нелинейность $b(u, T, \theta)$ представляется в виде

$$b(u, T, \theta) = b_2(u, T, \theta) + b_3(u, T, \theta) + \tilde{b}_4(u, T, \theta),$$

где $b_2(u, T, \theta)$ и $b_3(u, T, \theta)$ — квадратичная и кубическая нелинейности соответственно, а $\tilde{b}_4(u, T, \theta)$ содержит члены более высокой степени.

Теорема 2.9 *Существующие в условиях теоремы 2.8 бифурцирующие решения $u(t, \varepsilon)$, $T(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$ уравнения (2.7) представимы в виде*

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon e(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + \varepsilon^3 e_2(t) + o(\varepsilon^3), \quad (2.23)$$

$$T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon^2 T_2 + O(\varepsilon^4), \quad \theta(\varepsilon) = \theta_0 + \varepsilon^2 \theta_2 + O(\varepsilon^4),$$

где

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \Gamma_0 b_2(e(t), T_0, \theta_0), \\ e_2(t) &= \Gamma_0 b_3(e(t), T_0, \theta_0) + \Gamma_0 b'_{2u}(e(t), T_0, \theta_0) e_1(t), \\ T_2 &= \int_0^1 (e_2(t), e^*(t)) dt, \\ \theta_2 &= \int_0^1 (e_2(t), g^*(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Равенство (2.23) понимается в следующем смысле:

$$\|u(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t) - \varepsilon^2 e_1(t) - \varepsilon^3 e_2(t)\|_{L_2(0,1)} = o(\varepsilon^3), \quad (2.25)$$

или, что равносильно,

$$\sqrt{\int_0^1 [u(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t) - \varepsilon^2 e_1(t) - \varepsilon^3 e_2(t)]^2 dt} = o(\varepsilon^3). \quad (2.26)$$

Равенство $u(t) = x(t \cdot T(\varepsilon))$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнения (2.7) и $T(\varepsilon)$ -периодическими решениями $x(t)$ системы (2.1) при $\theta = \theta(\varepsilon)$. Поэтому бифурцирующие решения уравнения (2.1) — это функции вида:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon e \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right) + \varepsilon^2 e_1 \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right) + \varepsilon^3 e_2 \left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \right) + o(\varepsilon^3). \quad (2.27)$$

2.3.3 Примеры

Пример 2.4 Построим асимптотические приближения для бифурцирующих решений уравнения Хатчинсона–Райта (2.13) в случае бифуркации Андронова–Хопфа. Ранее в пункте 2.2.3 было показано, что эта бифуркация происходит в окрестности точки $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Формулы (2.23) в рассматриваемом случае имеют вид:

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{2} \cos 2\pi t + \varepsilon^2 e_1(t) + o(\varepsilon^2), \quad T(\varepsilon) = 4 + O(\varepsilon^2), \quad \theta(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon^2).$$

Найдем значение $e_1(t)$. Имеем из (2.24) $e_1(t) = \Gamma_0 b_2(e(t), T_0, \theta_0)$. Здесь

$$b_2(u(t), T, \theta) = T\theta \int_0^1 su(s)E \left(\frac{1}{T} \right) u(s)ds + T\theta \int_0^t u(s)E \left(\frac{1}{T} \right) u(s)ds.$$

Положим $h(t) = \Gamma_0 b_2(e(t), T_0, \theta_0)$, тогда $G'(\varepsilon e(t))h(t) = b_2(e(t), T_0, \theta_0)$. Отсюда

$$\begin{aligned} h(t) - \int_0^1 (h(t), e^*(t))dt \cdot B'_T(T_0, \theta_0)e(t) - \int_0^1 (h(t), g^*(t))dt \cdot B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t) - \\ - B(T_0, \theta_0)h(t) = b_2(e(t), T_0, \theta_0). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь $e^*(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi t$, $g^*(t) = \sqrt{2} \sin 2\pi t$, $B'_\theta(T_0, \theta_0)e(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos 2\pi t$, $B'_T(T_0, \theta_0)e(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2\pi t - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \sin 2\pi t$ из примера пункта 2.2.3.

Далее имеем

$$\begin{aligned}
b_2(e(t), T_0, \theta_0) &= -4\pi \int_0^1 s \cos 2\pi s E\left(\frac{1}{4}\right) \cos 2\pi s ds - \\
&\quad -4\pi \int_0^t \cos 2\pi s E\left(\frac{1}{4}\right) \cos 2\pi s ds = \\
&= -4\pi \left(\int_0^{\frac{1}{4}} s \cos 2\pi s \cos 2\pi \left(s - \frac{1}{4} + 1\right) ds + \int_{\frac{1}{4}}^1 s \cos 2\pi s \cos 2\pi \left(s - \frac{1}{4}\right) ds \right) - \\
&\quad -4\pi \left(\int_0^{\frac{1}{4}} \cos 2\pi s \cos 2\pi \left(s - \frac{1}{4} + 1\right) ds + \int_{\frac{1}{4}}^t \cos 2\pi s \cos 2\pi \left(s - \frac{1}{4}\right) ds \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cos 4\pi t.
\end{aligned}$$

Функцию $h(t)$ будем искать в виде $h(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi kt}$.

Найдем значения выражений $\int_0^1 (h(t), e^*(t)) dt$, $\int_0^1 (h(t), g^*(t)) dt$, $B(T_0, \theta_0)h(t)$ в уравнении (2.28). Имеем

$$\int_0^1 (h(t), e^*(t)) dt = \int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi kt} \sqrt{2} \cos 2\pi t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} (h_1 + h_{-1}),$$

$$\int_0^1 (h(t), g^*(t)) dt = \int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi kt} \sqrt{2} \sin 2\pi t dt = i \frac{\sqrt{2}}{2} (h_{-1} - h_1),$$

$$B(T_0, \theta_0)h(t) = \int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi ks} ds -$$

$$\begin{aligned}
& - 2\pi \left[\int_0^{\frac{1}{4}} s \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4}+1)} ds + \int_{\frac{1}{4}}^1 s \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4})} ds \right] - \\
& - 2\pi \left[\int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4}+1)} ds + \int_{\frac{1}{4}}^t \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4})} ds \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (2.28) запишется в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi kt} - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (h_1 + h_{-1}) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2\pi t - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \sin 2\pi t \right) + \right. \\
& \left. + i \frac{\sqrt{2}}{2} (h_{-1} - h_1) \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos 2\pi t \right) \right] - \int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi ks} ds + \\
& + 2\pi \left[\int_0^{\frac{1}{4}} s \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4}+1)} ds + \int_{\frac{1}{4}}^1 s \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4})} ds \right] + \\
& + 2\pi \left[\int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4}+1)} ds + \int_{\frac{1}{4}}^t \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{i2\pi k(s-\frac{1}{4})} ds \right] = \frac{1}{2} \cos 4\pi t.
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
h(t) &= h_2 e^{i4\pi t} + h_{-2} e^{-i4\pi t} = \left(\frac{1}{10} - i \frac{1}{20} \right) e^{i4\pi t} + \left(\frac{1}{10} + i \frac{1}{20} \right) e^{-i4\pi t} = \\
&= \frac{1}{5} \cos 4\pi t + \frac{1}{10} \sin 4\pi t.
\end{aligned}$$

Следовательно

$$e_1(t) = \frac{1}{5} \cos 4\pi t + \frac{1}{10} \sin 4\pi t.$$

Таким образом, функция

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \cos 2\pi t + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{5} \cos 4\pi t + \frac{1}{10} \sin 4\pi t \right) + o(\varepsilon^2),$$

является асимптотическим приближением для бифурцирующих решений операторного уравнения (2.7), соответствующего уравнению Хатчинсона–Райта.

Согласно (2.27) имеем

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \cos \frac{\pi}{2}t + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{5} \cos \pi t + \frac{1}{10} \sin \pi t \right) + o(\varepsilon^2).$$

Таким образом, уравнение Хатчинсона–Райта при $\theta = \theta(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon^2)$ имеет $T(\varepsilon) = 4 + O(\varepsilon^2)$ периодическое решение $\tilde{x}(t, \varepsilon)$, для которого функция $x(t, \varepsilon)$ является асимптотическим приближением.

Пример 2.5 Пользуясь формулами (2.23) можно найти асимптотики более высоких порядков. Приведем здесь соответствующие формулы к следующей модификации уравнения Хатчинсона–Райта

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t - \theta)[1 + x(t)], \quad \theta \geq 0. \quad (2.29)$$

Бифуркация Андронова–Хопфа в уравнении (2.29) происходит при значении параметров $\theta_0 = 1$ и $\omega_0 = 4$ согласно теоремам 2.4, 2.5 (см. пример 2.2 пункта 2.3.2).

Асимптотические приближения бифурцирующих решений уравнения (2.29) представимы в виде:

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon) &= 1 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10\pi} \right) + O(\varepsilon^4), \\ T(\varepsilon) &= 4 + \varepsilon^2 \frac{2}{5} + O(\varepsilon^4), \\ x(t, \varepsilon) &= \varepsilon \cos \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{5} \cos \frac{4\pi t}{T(\varepsilon)} + \frac{1}{10} \sin \frac{4\pi t}{T(\varepsilon)} \right) + \\ &+ \varepsilon^3 \left[\left(\frac{1}{5\pi} - \frac{1}{5} \right) \sin \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} - \frac{4}{5} \cos \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} + \frac{3}{40} \cos \frac{6\pi t}{T(\varepsilon)} + \frac{3}{80} \sin \frac{6\pi t}{T(\varepsilon)} \right] + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.4 Устойчивость бифурцирующих решений

2.4.1 Устойчивость решений в задаче о бифуркации положения равновесия

Рассмотрим сначала вопрос о признаках неустойчивости стационарных бифурцирующих решений (2.19) $x = x(\varepsilon)$ нелинейной автономной системы (2.1) при $\theta = \theta(\varepsilon)$ в условиях теоремы 2.7.

Теорема 2.10 Пусть квазиполином (2.3) при $\theta = \theta_0$ имеет корень с положительной вещественной частью. Тогда бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ системы (2.1) неустойчивы при всех малых $|\varepsilon|$.

Рассмотрим теперь вопрос о признаках устойчивости бифурцирующих решений (2.19) $x(\varepsilon)$ системы (2.1) при $\theta = \theta(\varepsilon)$. В силу теоремы 2.10 естественным является следующее предположение: все корни характеристического квазиполинома (2.3) при $\theta = \theta_0$ имеют отрицательные действительные части, за исключением корня $p = 0$. В этом случае могут возникать как устойчивые, так и неустойчивые решения.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x'(t) = & \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta(\varepsilon))] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta(\varepsilon))] \Phi(x(t - \tau), \theta(\varepsilon)) + \\ & + \Psi(x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (2.31)$$

решением которой является вектор $x(\varepsilon)$. Характер устойчивости нулевого решения системы (2.31) в силу теоремы 1.1 определяется корнями характеристического квазимногочлена

$$L(p, \theta(\varepsilon)) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta(\varepsilon))] e^{-\tau p} - pI \right). \quad (2.32)$$

Так как характеристический квазиполином (2.3) имеет простой тривиальный корень $p = 0$ при значении $\theta = \theta_0$, а остальные его корни имеют отрицательные вещественные части, то при малых $\varepsilon > 0$ квазиполином (2.32) имеет в точности один простой корень $p_0(\varepsilon)$, близкий к нулю так, что $p_0(0) = 0$, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Поэтому характер устойчивости решений $x(\varepsilon)$ определяется корнем $p_0(\varepsilon)$ квазиполинома (2.32).

Теорема 2.11 Пусть $p'_0(0) \neq 0$. Тогда бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ системы (2.31) асимптотически устойчивы при тех малых $|\varepsilon|$, при которых $p_0(\varepsilon) > 0$; неустойчивы при тех малых $|\varepsilon|$, при которых $p_0(\varepsilon) < 0$.

2.4.2 Устойчивость решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа

Рассмотрим сначала вопрос о признаках неустойчивости периодических бифурцирующих решений (2.27) $x = x(t, \varepsilon)$ нелинейной автономной системы (2.1) при $\theta = \theta(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$ в условиях теоремы 2.9.

Теорема 2.12 Пусть характеристический квазиполином (2.3) при значении параметра $\theta = \theta_0$ имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Тогда при всех малых $|\varepsilon|$ бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) неустойчивы.

Рассмотрим теперь вопрос о признаках устойчивости бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) при $\theta = \theta(\varepsilon)$. В силу теоремы 2.12 естественным является следующее предположение: все корни характеристического квазиполинома (2.3) при $\theta = \theta_0$ имеют отрицательные действительные части, за исключением корня $p = \pm i\omega_0$. В этом случае могут возникать как устойчивые, так и неустойчивые решения.

Для нахождения достаточного признака устойчивости воспользуемся тем фактом, что при бифуркации между бифурцирующими решениями и нулевым решением системы происходит обмен устойчивостью: например, если бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ возникают при $\theta > \theta_0$ и при этих θ нулевое решение $x = 0$ является устойчивым (неустойчивым), то бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ будут неустойчивыми (устойчивыми) (см. [76]). Этот факт позволяет получить следующий критерий устойчивости бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) в условиях теоремы 2.12.

Рассмотрим систему

$$z'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta(\varepsilon))] z(t - \tau) \quad (2.33)$$

которая является линеаризацией системы (2.1) в окрестности ее тривиального решения при $\theta = \theta(\varepsilon)$. Характер устойчивости нулевого решения (2.33) в силу теоремы 1.1 определяется корнями характеристического квазимногочлена

$$L(p, \theta(\varepsilon)) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta(\varepsilon))] e^{-\tau p} - pI \right). \quad (2.34)$$

Так как характеристический квазиполином (2.3) имеет пару простых чисто мнимых корней $p = \pm i\omega_0$, при значении $\theta = \theta_0$ и не имеет других корней на мнимой оси комплексной плоскости, а остальные его корни имеют отрицательные вещественные части, то при малых $|\varepsilon|$ квазиполином (2.34) имеет в точности один простой корень $p_0(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, близкий к $\pm i\omega_0$ так, что $p_0(0) = \pm i\omega_0$, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. При этом $\gamma(\varepsilon) = \gamma_1 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$, $\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \omega_1 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$. Поэтому характер устойчивости решения $z = 0$ определяется корнем $\gamma(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$ квазиполинома (2.34).

Теорема 2.13 Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда если $\gamma_1 > 0$, то бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) асимптотически орбитально устойчивы при всех малых $|\varepsilon|$. Если же $\gamma_1 < 0$, тогда решения $x(t, \varepsilon)$ будут неустойчивы при всех малых $|\varepsilon|$.

2.4.3 Примеры

Пример 2.6 Рассмотрим уравнение (2.29). В примере 2.5 были приведены бифурцирующие решения этого уравнения. Рассмотрим вопрос об устойчивости этих бифурцирующих решений при малых $|\varepsilon|$.

Для этого рассмотрим характеристический квазимногочлен (2.34) при $\theta = \theta(\varepsilon)$. Из равенства $L(p, \theta(\varepsilon)) = 0$ найдем корень $p = \gamma \pm i\omega$:

$$\left(-\frac{\pi}{2}\right) e^{-\theta(\varepsilon)(\gamma \pm i\omega)} - (\gamma \pm i\omega) = 0.$$

Здесь $\theta(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10\pi}\right) + O(\varepsilon^4)$ из примера 2.5. Отсюда

$$\begin{cases} \ln \left| \frac{\pi}{2\omega} \sin(\omega\theta(\varepsilon)) \right| + \omega\theta(\varepsilon) \operatorname{ctg}(\omega\theta(\varepsilon)) = 0, \\ \gamma = \frac{\ln \left| \frac{\pi}{2\omega} \sin(\omega\theta(\varepsilon)) \right|}{\theta(\varepsilon)}. \end{cases} \quad (2.35)$$

При $\varepsilon = 0$ система (2.35) имеет решение $\gamma = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{2}$. При $\varepsilon \neq 0$ система (2.35) имеет решение $\gamma = \frac{1}{10}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$ и $\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$.

Таким образом, $\gamma_1 = \frac{1}{10} > 0$, следовательно бифурцирующие решения (2.30) уравнения (2.29) асимптотически орбитально устойчивы при всех малых $|\varepsilon|$.

2.5 Доказательства основных утверждений

Доказательство теоремы 2.2. Доказательство этой теоремы основывается на теореме о неявной функции и общих теоремах о точках бифуркации. Приведем их.

Теорема 2.14 [69] Пусть функция двух переменных (комплексного переменного p , θ — скаляр) $S(p, \theta)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными $S'_p(p, \theta)$ и $S'_\theta(p, \theta)$ в некоторой окрестности точки (p_0, θ_0) ; при этом $S'_p(p_0, \theta_0) \neq 0$ и $S(p_0, \theta_0) = 0$. Тогда существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для любого θ из δ_1 -окрестности точки θ_0 существует $p = p(\theta)$ из δ_2 -окрестности точки $p = p_0$, такое что $S(p(\theta), \theta) \equiv 0$, при этом $p(\theta)$ непрерывно дифференцируема, $p(\theta_0) = p_0$ и

$$p'(\theta_0) = -\frac{S'_\theta(p_0, \theta_0)}{S'_p(p_0, \theta_0)}. \quad (2.36)$$

Теорема 2.15 [22], [37] Пусть выполнено соотношение

$$p'(\theta_0) \neq 0. \quad (2.37)$$

Тогда θ_0 является точкой бифуркации (2.4): существуют $\theta_n \rightarrow \theta_0$ так, что уравнение (2.4) при $\theta = \theta_n$ имеет ненулевое решение $x = x_n$, $\|x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В силу условия U2.1 характеристический квазиполином (2.3) при $\theta = \theta_0$ и $p = 0$ равен нулю. Корень $p = 0$ квазиполинома (2.3) является простым, а именно $L'_p(0, \theta_0) \neq 0$.

Отсюда из теоремы о неявной функции следует, что характеристический квазиполином (2.3) имеет корень $p(\theta)$, такой что $p(\theta_0) = 0$ и

$$p'(\theta_0) = -\frac{L'_\theta(0, \theta_0)}{L'_p(0, \theta_0)}.$$

Так как по условию доказываемой теоремы $L'_\theta(0, \theta_0) \neq 0$, то

$$p'(\theta_0) \neq 0.$$

Отсюда из теоремы 2.15 следует что θ_0 является точкой бифуркации положения равновесия системы (2.1). Теорема доказана.

Доказательство леммы 2.1. По определению уравнение (2.2) имеет ненулевое решение $x(t) = e^{p_0 t} x_0$, $x_0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда многочлен (2.3) имеет корень $p = p_0$. В частности уравнение (2.2) имеет ненулевую точку равновесия $x(t) \equiv x_0$ (т.е. $p_0 = 0$) тогда и только тогда, когда квази-полином (2.3) имеет корень $p = p_0 = 0$. То есть

$$L(0, \theta_0) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \right) = 0,$$

что равносильно тому, что матрица (2.5) имеет простое собственное значение $p_0 = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Доказательство теоремы основывается на теореме 2.14 о неявной функции и классической теореме о бифуркации Андронова–Хопфа, которая представлена в [70], [72].

Введем вспомогательные сведения. Рассмотрим систему (2.1) в виде:

$$x'(t) = A(\theta)x_t + a(x_t, \theta).$$

Основными классическими условиями бифуркации Андронова–Хопфа (см.[70]) являются:

1. характеристическое уравнение соответствующее линейной системе $x'(t) = A(\theta)x_t$, при значении параметра $\theta = \theta_0$ имеет простой чисто мнимый корень $p(\theta_0) = \pm i\omega_0$ и не имеет других чисто мнимых корней,
2. $Re [p'(\theta_0)] \neq 0$, где $p'(\theta_0)$ — это производная в точке θ_0 от корня характеристического уравнения.

В [70] показано, что при выполнении условий 1 и 2 существуют отличные от постоянной периодические решения уравнения (2.1) для малого θ , которые имеют период близкий к $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Перейдем к доказательству теоремы.

Условие доказываемой теоремы, а именно, что квазимногочлен $L(p, \theta_0)$ имеет простой корень $p = \pm i\omega_0$ и не имеет других чисто мнимых корней, совпадает с первым условием классической теоремы о бифуркации Андронова–Хопфа.

Покажем теперь, что соотношение (2.6) эквивалентно условию $Re [p'(\theta_0)] \neq 0$. Так как корень $p = \pm i\omega_0$ квазимногочлена (2.3) является простым, то $L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0) \neq 0$. Поэтому из теоремы 2.14 о неявной функции следует, что при θ близких к θ_0 существует корень $p(\theta)$ квазиполинома $L(p, \theta)$, при этом выполнено

$$\begin{aligned} p'(\theta_0) &= -\frac{L'_\theta(p(\theta_0), \theta_0)}{L'_p(p(\theta_0), \theta_0)} = -\frac{Re(L'_\theta(p(\theta_0), \theta_0)) + iIm(L'_\theta(p(\theta_0), \theta_0))}{Re(L'_p(p(\theta_0), \theta_0)) + iIm(L'_p(p(\theta_0), \theta_0))} = \\ &= -\frac{ReL'_\theta ReL'_p + ImL'_\theta ImL'_p - i(ReL'_\theta ImL'_p - ReL'_p ImL'_\theta)}{(ReL'_p)^2 + (ImL'_p)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$Re [p'(\theta_0)] = -\frac{1}{(ReL'_p)^2 + (ImL'_p)^2} \begin{vmatrix} Re(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & -Im(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \\ Im(L'_p(\pm i\omega_0, \theta_0)) & Re(L'_\theta(\pm i\omega_0, \theta_0)) \end{vmatrix}.$$

Из соотношения (2.6) следует, что $Re [p'(\theta_0)] \neq 0$.

Таким образом, условия 1 и 2 теоремы о бифуркации Андронова–Хопфа из [70] выполняются. Теорема доказана.

Доказательство леммы 2.2. Пусть характеристический квазимногочлен (2.3) имеет пару простых чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$ при значении параметра $\theta = \theta_0$ и не имеет других чисто мнимых корней. Тогда, согласно общей теории ФДУЗТ, линейное уравнение (2.2) имеет периодические решения $x_1(t) = \bar{A} \cos \omega_0 t - \bar{B} \sin \omega_0 t$, $x_2(t) = \bar{B} \cos \omega_0 t + \bar{A} \sin \omega_0 t$, где \bar{A} и \bar{B} некоторые векторы. Определим условия на эти векторы. Для этого подставим

$x_1(t)$ и $x_2(t)$ в (2.2) отсюда получим, что должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \left(\int_0^r d_\tau R(\tau, \theta_0) \sin \omega_0 \tau + \omega_0 I \right) \bar{B} + \int_0^r d_\tau R(\tau, \theta_0) \cos \omega_0 \tau \bar{A} = 0, \\ \left(\int_0^r d_\tau R(\tau, \theta_0) \sin \omega_0 \tau + \omega_0 I \right) \bar{A} - \int_0^r d_\tau R(\tau, \theta_0) \cos \omega_0 \tau \bar{B} = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Решения $u(t)$ операторного уравнения (2.7) связаны с решениями $x(t)$ системы (2.1) равенством $x(t \cdot T_0) = u(t)$. Имеем

$$x_1(t \cdot T_0) = \bar{A} \cos \omega_0 T_0 t - \bar{B} \sin \omega_0 T_0 t = \bar{A} \cos 2\pi t - \bar{B} \sin 2\pi t,$$

$$x_2(t \cdot T_0) = \bar{B} \cos \omega_0 T_0 t + \bar{A} \sin \omega_0 T_0 t = \bar{B} \cos 2\pi t + \bar{A} \sin 2\pi t.$$

Обозначим $e(t) = \bar{A} \cos 2\pi t - \bar{B} \sin 2\pi t$ и $g(t) = \bar{B} \cos 2\pi t + \bar{A} \sin 2\pi t$. Покажем теперь, что функции $e(t)$ и $g(t)$ являются собственными функциями оператора $B(T_0, \theta_0)$, а именно покажем, что верны равенства

$$B(T_0, \theta_0)e(t) = e(t), \quad B(T_0, \theta_0)g(t) = g(t).$$

Найдем $B(T_0, \theta_0)e(t)$ используя равенства (2.38):

$$\begin{aligned} B(T_0, \theta_0)e(t) &= \int_0^1 (\bar{A} \cos 2\pi s - \bar{B} \sin 2\pi s) ds + \\ &+ T_0 \int_0^1 s \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} E \left(\frac{\tau}{T_0} \right) \cos 2\pi s - \bar{B} E \left(\frac{\tau}{T_0} \right) \sin 2\pi s \right) ds + \\ &+ T_0 \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} E \left(\frac{\tau}{T_0} \right) \cos 2\pi s - \bar{B} E \left(\frac{\tau}{T_0} \right) \sin 2\pi s \right) ds = \\ &= T_0 \int_0^1 s \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} \cos 2\pi \left(s - \frac{\tau}{T_0} \right) - \bar{B} \sin 2\pi \left(s - \frac{\tau}{T_0} \right) \right) ds + \\ &+ T_0 \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} \cos 2\pi \left(s - \frac{\tau}{T_0} \right) - \bar{B} \sin 2\pi \left(s - \frac{\tau}{T_0} \right) \right) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T_0 \int_0^1 s \cos 2\pi s ds \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} \cos 2\pi \frac{\tau}{T_0} + \bar{B} \sin 2\pi \frac{\tau}{T_0} \right) + \\
&+ T_0 \int_0^1 s \sin 2\pi s ds \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} \sin 2\pi \frac{\tau}{T_0} - \bar{B} \cos 2\pi \frac{\tau}{T_0} \right) + \\
&+ T_0 \int_0^t \cos 2\pi s ds \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} \cos 2\pi \frac{\tau}{T_0} + \bar{B} \sin 2\pi \frac{\tau}{T_0} \right) + \\
&+ T_0 \int_0^t \sin 2\pi s ds \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] \left(\bar{A} \sin 2\pi \frac{\tau}{T_0} - \bar{B} \cos 2\pi \frac{\tau}{T_0} \right) + \\
&= T_0 \int_0^1 s \cdot \sin 2\pi s ds \left(-\frac{2\pi}{T_0} \bar{A} \right) + T_0 \int_0^1 s \cdot \cos 2\pi s ds \left(-\frac{2\pi}{T_0} \bar{B} \right) + \\
&+ T_0 \int_0^t \sin 2\pi s ds \left(-\frac{2\pi}{T_0} \bar{A} \right) + T_0 \int_0^t \cos 2\pi s ds \left(-\frac{2\pi}{T_0} \bar{B} \right) = \\
&= \bar{A} \cos 2\pi t - \bar{B} \sin 2\pi t.
\end{aligned}$$

Таким образом, $B(T_0, \theta_0) (\bar{A} \cos 2\pi t - \bar{B} \sin 2\pi t) = \bar{A} \cos 2\pi t - \bar{B} \sin 2\pi t$. Аналогично можно показать, что $B(T_0, \theta_0) (\bar{B} \cos 2\pi t + \bar{A} \sin 2\pi t) = \bar{B} \cos 2\pi t + \bar{A} \sin 2\pi t$. Отсюда следует, что оператор (2.8) при $\theta = \theta_0$ и $T = T_0$ имеет собственное значение 1 кратности 2. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.10. Вопрос об устойчивости стационарного решения уравнения (2.1) равносильен вопросу устойчивости нулевого решения уравнения

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta(\varepsilon))] y(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta(\varepsilon))] \Phi_{x_t}(x(\varepsilon), \theta(\varepsilon)) y(t - \tau) + \\
&+ \sum_{i=1}^m \Psi_{x_t}(x(\varepsilon), \theta(\varepsilon)) y(t - \tau_i),
\end{aligned}$$

который, в свою очередь, определяется корнями характеристического квазимногочлена

$$L(p, \theta(\varepsilon)) = \det \left(\int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta(\varepsilon))] e^{-\tau p} + \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta(\varepsilon))] \Phi_{x_t}(x(\varepsilon), \theta(\varepsilon)) e^{-\tau p} + \sum_{i=1}^m \Psi_{x_t}(x(\varepsilon), \theta(\varepsilon)) e^{-\tau_i p} - pI \right). \quad (2.39)$$

При $\varepsilon = 0$ этот квазимногочлен совпадает с характеристическим квазимногочленом (2.3) уравнения (2.1). Тогда при малых $\varepsilon > 0$ квазиполином (2.39) имеет корни с положительной вещественной частью. Отсюда и из теоремы 1.1 следует, что бифурцирующие решения системы (2.1) неустойчивы.

Доказательство теоремы 2.11. Воспользуемся свойством «обмен устойчивостью» [76]: а именно, если бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ системы (2.31) возникают при $\theta > \theta_0$ и при этих θ нулевое решение является устойчивым (неустойчивым), то бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ будут неустойчивыми (устойчивыми). Поэтому характер устойчивости решения $x(\varepsilon)$ системы (2.31) определяется корнями характеристического квазиполинома (2.32).

Пусть при малых $|\varepsilon|$ характеристический квазиполином (2.32) имеет корень $p_0(\varepsilon) > 0$. При этом все остальные его корни $p_{k0}(\varepsilon)$ имеют отрицательные вещественные части по условию. Из теоремы 1.1 следует, что решение $x = 0$ системы (2.31) является неустойчивым. Следовательно, решение $x(\varepsilon)$ системы (2.1) является асимптотически устойчивым.

Пусть теперь при малых $|\varepsilon|$ характеристический квазиполином (2.32) имеет корень $p_0(\varepsilon) < 0$. При этом все остальные его корни также имеют отрицательные вещественные части по условию. Из теоремы 1.1 следует, что решение $x = 0$ системы (2.31) является асимптотически устойчивым. Отсюда, решение $x(\varepsilon)$ системы (2.1) является неустойчивым. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.12. Вопрос об устойчивости бифурцирующего решения $x(t, \varepsilon)$ (2.27) уравнения (2.1) равносильен вопросу устойчивости нулевого решения уравнения

$$y'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta(\varepsilon))] y(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(\tau, \theta(\varepsilon))] \Phi_{x_t}(x(t, \varepsilon), \theta(\varepsilon)) y(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \Psi_{x_t}(x(t, \varepsilon), \theta(\varepsilon)) y(t - \tau_i). \quad (2.40)$$

который, в свою очередь, определяется характеристическими показателями уравнения (2.40).

При $\varepsilon = 0$ это уравнение становится линейным:

$$y'(t) = \int_0^r [d_\tau R(\tau, \theta_0)] y(t - \tau),$$

и его характеристический квазимногочлен совпадает с характеристическим квазимногочленом (2.3) уравнения (2.1). Поэтому при малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.40) имеет характеристические показатели $p : |e^{pT}| > 1$. Отсюда и из теоремы 1.2 следует, что бифурцирующие решения системы (2.1) неустойчивы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.13. Пусть при малых $|\varepsilon|$ характеристический квазиполином (2.34) имеет корень $p_0(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, где $\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^2 \gamma_1 + O(\varepsilon^4) > 0$. При этом все остальные его корни $p_{k0}(\varepsilon)$ имеют отрицательные вещественные части по условию. Из теоремы 1.1 следует, что решение $z = 0$ системы (2.33) является неустойчивым. Следовательно, решение $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) является асимптотически орбитально устойчивым.

Пусть теперь при малых $|\varepsilon|$ характеристический квазиполином (2.34) имеет корень $p_0(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, где $\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^2 \gamma_1 + O(\varepsilon^4) < 0$. При этом все остальные его корни также имеют отрицательные вещественные части по

условию. Из теоремы 1.1 следует, что решение $z = 0$ системы (2.33) является асимптотически устойчивым. Отсюда, решение $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) является неустойчивым. Теорема доказана.

Глава 3

Исследование локальных бифуркаций в неавтономных ФДУЗТ

В этой главе изучаются основные сценарии бифуркаций для неавтономных ФДУЗТ, приведены достаточные признаки бифуркаций и асимптотические формулы для возникающих бифурцирующих решений, проведен анализ устойчивости бифурцирующих решений.

3.1 Постановка задачи.

Основным объектом исследования в этой главе является система нелинейных неавтономных ФДУЗТ, зависящая от векторного параметра θ :

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(t, \tau, \theta)] \Phi(t, x(t - \tau), \theta) + \\ + \Psi(t, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta). \quad (3.1)$$

Здесь $x \in R^n$, $r \in (0, T)$, $T > 0$, $\tau_j \in [0, r]$, $j = \overline{1, m}$; $R(t, \tau, \theta)$, $Q(t, \tau, \theta)$ — это $n \times n$ матрицы, элементы которых определены при $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \tau \leq r$, являются функциями ограниченной вариации по τ , непрерывно дифференцируемы по θ и непрерывны в среднем по t в следующем смысле:

для любого t выполняются равенства

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_0^r \|R(t', \tau, \theta) - R(t, \tau, \theta)\| d\tau = 0, \quad \lim_{t' \rightarrow t} \int_0^r \|Q(t', \tau, \theta) - Q(t, \tau, \theta)\| d\tau = 0;$$

$R(t + T, \tau, \theta) = R(t, \tau, \theta)$, $Q(t + T, \tau, \theta) = Q(t, \tau, \theta)$. Предполагается, что вектор-функции $\Phi(t, x, \theta)$, $\Psi(t, x, \theta)$ являются T -периодическими по t , непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и равномерно по θ и t удовлетворяют условиям

$$\|\Phi(t, x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \quad \|x\| \rightarrow 0, \quad \|\Psi(t, x, \theta)\| = O(\|x\|^2), \quad \|x\| \rightarrow 0.$$

Интегралы в (3.1) понимаются в смысле Лебега–Стилтьеса.

К уравнениям вида (3.1) могут быть сведены многие представляющие интерес уравнения с последействием (см., например, [49], [70]). В частности, если $R(t, \tau, \theta)$, $Q(t, \tau, \theta)$, $\Phi(t, x, \theta)$ и $\Psi(t, x, \theta)$ не зависят от t , получим автономное уравнение (2.1).

Система уравнений (3.1) при всех значениях параметра θ имеет решение $x = 0$.

Пусть при фиксированном $\theta = \theta_0$ решение $x = 0$ системы (3.1) является негиперболической точкой равновесия. В этом случае θ_0 называют точкой бифуркации системы (3.1).

Основной целью в этой главе является исследование локальных бифуркаций системы (3.1) в окрестности тривиального решения.

3.2 Достаточные признаки локальных бифуркаций

Наряду с (3.1) будем рассматривать линейную систему уравнений

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta)] x(t - \tau). \quad (3.2)$$

Рассмотрим два основных случая негиперболичности:

U 3.1 система (3.2) при $\theta = \theta_0$ имеет простой характеристический показатель $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых характеристических показателей,

U 3.2 система (3.2) при $\theta = \theta_0$ имеет пару простых чисто мнимых показателей $p = \pm i \frac{2\pi}{T} \frac{d}{q}$, где $\frac{d}{q} \in (0, \frac{1}{2}]$, $\frac{d}{q}$ — рациональная несократимая дробь, и не имеет других чисто мнимых характеристических показателей.

Ниже будут изучены основные сценарии бифуркаций системы (3.1) в случаях U3.1 и U3.2.

3.2.1 Бифуркация вынужденных колебаний

Рассмотрим сначала случай U3.1, а именно, пусть число 0 является простым характеристическим показателем системы (3.2). В этом случае, параметр θ в системе (3.1) естественно будет считать скалярным. Здесь основным сценарием бифуркации является возникновение в окрестности точки равновесия $x = 0$, при переходе параметра θ через θ_0 , ненулевых T -периодических колебаний малой амплитуды. Напомним соответствующее определение (см. п. 1.3.2.).

Число θ_0 называется *точкой бифуркации вынужденных колебаний* системы (3.1), если существует непрерывная функция $\theta = \theta(\varepsilon)$, определенная в некотором интервале $-\delta_0 < \varepsilon < \delta_0$, и такая, что $\theta(0) = \theta_0$, при этом система (3.1) для каждого $\theta = \theta(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon) \neq \theta_0$ имеет ненулевое T -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В этом параграфе приводятся два разных достаточных признака вынужденных колебаний.

Приведем сначала признак бифуркации вынужденных колебаний системы (3.1), основанный на положениях операторного метода исследования локальных бифуркаций (см. п.1.4.1.). Для этого перейдем от (3.1) к операторному уравнению, определяющему T -периодические решения системы (3.1):

$$x(t) = B(\theta)x(t) + b(x(t), \theta), \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} B(\theta)x(t) = & \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta)] E(\tau)x(s) \right) ds + \\ & + \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta)] E(\tau)x(s) ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} b(x(t), \theta) = & \frac{1}{T} \int_0^T s \cdot \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \theta)] \Phi(s, E(\tau)x(s), \theta) ds + \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T s \cdot \Psi(s, E(\tau_1)x(s), \dots, E(\tau_m)x(s), \theta) ds + \\ & + \int_0^t \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \theta)] \Phi(s, E(\tau)x(s), \theta) ds + \\ & + \int_0^t \Psi(s, E(\tau_1)x(s), \dots, E(\tau_m)x(s), \theta) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $E(\tau)x(t) = \begin{cases} x(t - \tau + T), & \text{если } 0 \leq t < \tau, \\ x(t - \tau), & \text{если } \tau \leq t \leq T. \end{cases}$ Операторы $B(\theta)$ и $b(u(t), \theta)$

действуют в пространстве $L_2[0, T]$ при фиксированном θ , являются вполне непрерывными (см. п. 1.2.2).

Согласно лемме 1.1 задача исследования T -периодических решений для

системы (3.1) равносильна задаче исследования решений операторного уравнения (3.3).

Лемма 3.1 *Условие U3.1 равносильно тому, что оператор $B(\theta_0) : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ имеет простое собственное значение 1.*

Доказательство этой леммы и последующих утверждений этой главы приведены в § 3.5.

Положим $e(t)$ — собственная функция оператора $B(\theta_0) : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$, соответствующая простому собственному значению 1.

Сопряженный оператор $B^*(\theta)$ определяется равенством

$$B^*(\theta)x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(s) - s \int_0^r [d_\tau R^*(s, \tau, \theta)] E(\tau^*) x(s) \right) ds + \\ + \int_t^T \int_0^r [d_\tau R^*(s, \tau, \theta)] E(\tau^*) x(s) ds.$$

Здесь $R^*(s, \tau, \theta)$ — транспонированная матрица, а $\tau^* = T - \tau$. Сопряженный оператор $B^*(\theta_0) : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ также имеет простое собственное значение 1, которому отвечает собственная функция $e^*(t)$. Собственные функции операторов $B(\theta_0)$ и $B^*(\theta_0)$ выберем, исходя из соотношений (1.22):

$$\|e(t)\|_{L_2} = 1, \quad \int_0^T (e(t), e^*(t)) dt = 1.$$

Приведем достаточный признак бифуркации для операторного уравнения (3.3).

Теорема 3.1 *Пусть выполнено условие U3.1 и пусть*

$$\int_0^T (B'_\theta(\theta_0)e(t), e^*(t)) dt \neq 0. \quad (3.6)$$

Тогда значение θ_0 параметра θ является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (3.1).

Здесь B'_θ — оператор, полученный дифференцированием оператора $B(\theta)$. Справедливость теоремы следует из леммы 3.1 и теоремы 1.3.

Рассмотрим теперь другой признак, относящийся к важному частному случаю, когда матрица $R(t, \tau, \theta)$ системы (3.1) представляется в виде

$$R(t, \tau, \theta) = R_0(\tau, \theta) + R_1(t, \tau, \theta),$$

где $R_1(t, \tau, \theta_0) = 0$.

Определим квазимногочлен комплексной переменной p равенством

$$L(p, \theta) = \det \left(\int_0^r d_\tau [R_0(\tau, \theta)] e^{-p\tau} - pI \right). \quad (3.7)$$

Теорема 3.2 Пусть выполнено условие U2.1 для (3.7) и пусть

$$L'_\theta(p, \theta) \Big|_{p=0, \theta=\theta_0} \neq 0. \quad (3.8)$$

Тогда θ_0 является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (3.1).

3.2.2 Бифуркация субгармонических колебаний

Рассмотрим теперь случай U3.2. Здесь естественным будет предположение, что параметр θ является двумерным, то есть $\theta = (\alpha, \beta)$, где α и β — скалярные параметры.

В этом случае основным сценарием бифуркации является возникновение в окрестности точки равновесия $x = 0$, при переходе параметров α и β через значения α_0 и β_0 соответственно, периодических решений периода qT , $q \geq 2$. Напомним соответствующее определение (см. п.1.3.2).

Пару чисел (α_0, β_0) называют *точкой бифуркации субгармонических колебаний* периода qT системы (3.1), если существуют непрерывные функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$, определенные в некотором интервале $-\delta_0 < \varepsilon < \delta_0$, и такие, что $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$, при этом система (3.1) для каждого $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon) \neq \alpha_0$, $\beta(\varepsilon) \neq \beta_0$ имеет ненулевое qT - периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В этом параграфе приводятся два достаточных признака бифуркации субгармонических колебаний.

Приведем сначала признак бифуркации субгармонических колебаний, основанный на положениях операторного метода исследования локальных бифуркаций (см. п.1.4.2). Для этого перейдем от системы (3.1) к операторному уравнению:

$$x(t) = B(\alpha, \beta)x(t) + b(x(t), \alpha, \beta), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta)x(t) &= \frac{1}{qT} \int_0^{qT} \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha, \beta)] E(\tau)x(s) \right) ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha, \beta)] E(\tau)x(s) ds, \\ b(x(t), \alpha, \beta) &= \frac{1}{qT} \int_0^{qT} s \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \alpha, \beta)] \Phi(s, E(\tau)u(s), \alpha, \beta) ds + \\ &+ \frac{1}{qT} \int_0^{qT} s \Psi(s, E(\tau_1)u(s), \dots, E(\tau_m)u(s), \alpha, \beta) ds + \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \alpha, \beta)] \Phi(s, E(\tau)u(s), \alpha, \beta) ds + \\
& + \int_0^t \Psi(s, E(\tau_1)u(s), \dots, E(\tau_m)u(s), \alpha, \beta) ds.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь $E(\tau)x(s) = \begin{cases} x(s - \tau + qT), & 0 \leq s < \tau, \\ x(s - \tau), & \tau \leq s \leq qT \end{cases}$. Операторы $B(\alpha, \beta)$ и $b(u(t), \alpha, \beta)$ действуют в пространстве $L_2[0, qT]$ при фиксированных α и β , являются вполне непрерывными (см. п. 1.2.2).

Согласно лемме 1.1 задача исследования qT -периодических решений для системы (3.1) равносильна задаче исследования решений для операторного уравнения (3.9).

Лемма 3.2 *Условие УЗ.2 равносильно тому, что оператор $B(\alpha_0, \beta_0) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.*

Положим $e(t)$ и $g(t)$ — собственные функции оператора $B(\alpha_0, \beta_0) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$, соответствующие полупростому собственному значению 1 кратности 2.

Сопряженный оператор $B^*(\alpha, \beta)$ определяется равенством

$$\begin{aligned}
B^*(\alpha, \beta)x(t) = & \frac{1}{qT} \int_0^{qT} \left(x(s) - s \int_0^r R^*(s, \tau, \alpha, \beta) E(\tau^*)x(s) \right) ds + \\
& + \int_t^{qT} \left(\int_0^r R^*(s, \tau, \alpha, \beta) E(\tau^*)x(s) \right) ds.
\end{aligned}$$

Здесь $R^*(s, \tau, \alpha, \beta)$ — транспонированная матрица, а $\tau^* = qT - \tau$.

Сопряженный оператор $B^*(\alpha_0, \beta_0) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собствен-

ные функции $e^*(t)$ и $g^*(t)$. Собственные функции операторов $B(\alpha_0, \beta_0)$, $B^*(\alpha_0, \beta_0)$ выберем, исходя из соотношений (1.33):

$$\begin{aligned} \int_0^{qT} (e(t), e^*(t)) dt &= \int_0^{qT} (g(t), g^*(t)) dt = 1, \\ \int_0^{qT} (e(t), g^*(t)) dt &= \int_0^{qT} (g(t), e^*(t)) dt = 0. \end{aligned}$$

Приведем достаточный признак бифуркации для операторного уравнения (3.9).

Теорема 3.3 Пусть выполнено условие U3.2 и пусть

$$\det \begin{bmatrix} \int_0^{qT} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e(t), e^*(t)) dt & \int_0^{qT} (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e(t), e^*(t)) dt \\ \int_0^{qT} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e(t), g^*(t)) dt & \int_0^{qT} (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e(t), g^*(t)) dt \end{bmatrix} \neq 0. \quad (3.12)$$

Тогда пара (α_0, β_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы (3.1).

Здесь B'_α и B'_β — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно. Справедливость теоремы следует из леммы 3.2 и теоремы 1.6.

Рассмотрим теперь другой достаточный признак, относящийся к важному частному случаю, когда матрица $R(t, \tau, \alpha, \beta)$ системы (3.1) представляется в виде

$$R(t, \tau, \alpha, \beta) = R_0(\tau, \alpha, \beta) + R_1(t, \tau, \alpha, \beta),$$

где $R_1(t, \tau, \alpha_0, \beta_0) = 0$.

Определим квазимногочлен комплексной переменной p равенством

$$L(p, \alpha, \beta) = \det \left(\int_0^r [d_\tau (R_0(\tau, \alpha, \beta))] e^{-p\tau} - pI \right). \quad (3.13)$$

Теорема 3.4 Пусть для (3.13) верны соотношения

$$L\left(\pm i \frac{2\pi d}{T q}, \alpha_0, \beta_0\right) = 0, \quad L'_p\left(\pm i \frac{2\pi d}{T q}, \alpha_0, \beta_0\right) \neq 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\left(L'_\alpha\left(\pm i \frac{2\pi d}{T q}, \alpha_0, \beta_0\right)\right) & \operatorname{Re}\left(L'_\beta\left(\pm i \frac{2\pi d}{T q}, \alpha_0, \beta_0\right)\right) \\ \operatorname{Im}\left(L'_\alpha\left(\pm i \frac{2\pi d}{T q}, \alpha_0, \beta_0\right)\right) & \operatorname{Im}\left(L'_\beta\left(\pm i \frac{2\pi d}{T q}, \alpha_0, \beta_0\right)\right) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (3.14)$$

Тогда пара чисел (α_0, β_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы (3.1).

Здесь L'_α и L'_β производные от (3.13) по α и β соответственно.

3.2.3 Примеры

Пример 3.1 Рассмотрим модифицированное уравнение Дуффинга

$$y'' + \alpha y'(t-1) + \left(\frac{1}{4} + \beta + \beta^2 \cos t\right) y = -y^3(t-2) \sin t. \quad (3.15)$$

Полагая $x_1 = y'$, $x_2 = y$ и $x = (x_1, x_2)^T$, уравнение (3.15) представим в виде равносильной системы (3.1), где

$$R(\alpha, \beta, t, \tau) = \begin{pmatrix} -\alpha H(\tau-1) & -\left(\frac{1}{4} + \beta + \beta^2 \cos t\right) H(\tau) \\ H(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\alpha, \beta, x) = x^3,$$

$$Q(\alpha, \beta, t, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin t H(\tau-2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(\alpha, \beta, t, x) = 0.$$

Здесь $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Изучим вопрос о локальных бифуркациях системы в окрестности точки равновесия $x = 0$. В данном примере $T = 2\pi$.

В уравнении (3.15) матрица

$$R(t, \tau, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -\alpha H(\tau-1) & -\left(\frac{1}{4} + \beta\right) H(\tau) \\ H(\tau) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -(\beta^2 \cos t) H(\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое в правой части равенства обозначим $R_0(\tau, \alpha, \beta)$, а второе $R_1(t, \tau, \alpha, \beta)$. Здесь $R_1(t, \tau, \alpha, \beta) = 0$, при $\beta = \beta_0 = 0$.

Многочлен (3.13) при $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ имеет пару чисто мнимых простых корней $p = \pm \frac{2\pi}{T} i \frac{d}{q}$, где $\frac{d}{q} = \frac{1}{2}$. Поэтому для уравнения (3.15) выполняется указанное в теоремах 3.3 и 3.4 необходимое условие бифуркации субгармонических колебаний при $q = 2$. Иначе, выполняется необходимое условие бифуркации удвоения периода.

Простым подсчетом можно убедиться, что в рассматриваемом примере определитель (3.14) являются ненулевым, а именно определитель (3.14) равен $\mp \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$. Следовательно, согласно теореме 3.4 пара $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ образует точку бифуркации удвоения периода уравнения (3.15), то есть в окрестности нулевого решения уравнения (3.15) при переходе параметров α и β через значения $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ возникают нестационарные 4π -периодические решения.

3.3 Приближенное исследование бифуркаций

В этом параграфе рассмотрим вопрос о приближенном построении бифурцирующих решений уравнения (3.1).

3.3.1 Приближенное исследование бифуркации вынужденных колебаний

Рассмотрим сначала задачу о приближенном построении существующих в условиях теорем 3.1 и 3.2 бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$ системы (3.1). Здесь $\varepsilon \geq 0$ вспомогательный малый параметр такой, что $x(t, 0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$.

Схема приближенного построения бифурцирующих решений изложена в

пункте 1.4.1. С этой целью рассмотрим эквивалентное уравнению (3.1) операторное уравнение (3.3):

$$x(t) = B(\theta)x(t) + b(x(t), \theta),$$

где $B(\theta)$ и $b(x(t), \theta)$ это операторы (3.4) и (3.5) соответственно. Определим функционал

$$\theta[x(t)] = \frac{\theta_0}{\varepsilon} \int_0^T (x(t), e^*(t)) dt, \quad (3.16)$$

где $\varepsilon > 0$ вспомогательный параметр. Подставляя функционал (3.16) в уравнение (3.3) вместо θ , приходим к уравнению

$$G[x(t), \varepsilon] + W[x(t), \varepsilon] = 0,$$

где

$$\begin{aligned} G[x(t), \varepsilon] = & x(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta[x(t)])] E(\tau)x(s) \right) ds - \\ & - \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta[x(t)])] E(\tau)x(s) ds, \\ W[x(t), \varepsilon] = & - \frac{1}{T} \int_0^T s \cdot \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \theta[x(t)])] \Phi(s, E(\tau)x(s), \theta[x(t)]) ds - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T s \cdot \Psi(s, E(\tau_1)x(s), \dots, E(\tau_m)x(s), \theta[x(t)]) ds - \\ & - \int_0^t \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \theta[x(t)])] \Phi(s, E(\tau)x(s), \theta[x(t)]) ds - \\ & - \int_0^t \Psi(s, E(\tau_1)x(s), \dots, E(\tau_m)x(s), \theta[x(t)]) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор $G'(\varepsilon e(t)) : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$, определенный равенством

$$G'(\varepsilon e(t))h(t) = h(t) - B(\theta_0)h(t) - \theta_0 \int_0^T (h(t), e^*(t)) dt \cdot B'_\theta(\theta_0)e(t), \quad h(t) \in L_2[0, T].$$

Этот оператор не зависит от ε и непрерывно обратим (см. п.1.4.1). Обозначим $\Gamma_0 = [G'(\varepsilon e(t))]^{-1}$. Из теорем 1.4 и 1.5 следует справедливость следующих утверждений:

Теорема 3.5 Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Пусть функционал $\theta[x(t)]$ выбран в виде (3.16). Тогда при каждом малом $\varepsilon > 0$ последовательные приближения

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) - \Gamma_0 (G[x_k(t), \varepsilon] + W[x_k(t), \varepsilon]), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x_0(t) = \varepsilon e(t)$, сходятся к некоторой функции $x(t, \varepsilon) \in L_2[0, T]$, верны соотношения $\theta[x(t)] \rightarrow \theta_0$, $\|x(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t)\|_{L_2} = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция $x(t, \varepsilon)$ является бифурцирующим решением уравнения (3.1) при $\theta = \theta(\varepsilon) = \theta[x(t, \varepsilon)]$.

Пусть нелинейность $b(x, \theta)$ представляется в виде

$$b(x, \theta) = b_2(x, \theta) + \tilde{b}_3(x, \theta),$$

где $b_2(x, \theta)$ — квадратичная нелинейность, а $\tilde{b}_3(x, \theta)$ содержит члены более высокой степени.

Теорема 3.6 Существующие в условиях теоремы 3.5 бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$ уравнения (3.1) представимы в виде

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \varepsilon e(t) + \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e(t), \theta_0) + o(\varepsilon^2), \\ \theta(\varepsilon) &= \theta_0 - \varepsilon \frac{\int_0^T (b_2(e(t), \theta_0), e^*(t)) dt}{\int_0^T (B'(\theta_0)e(t), e^*(t)) dt} + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Первое из равенств (3.17) понимается в следующем смысле:

$$\|x(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t) - \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e(t), \theta_0)\|_{L_2(0, T)} = o(\varepsilon^2), \quad (3.18)$$

или, что равносильно,

$$\sqrt{\int_0^T [x(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t) - \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e(t), \theta_0)]^2 dt} = o(\varepsilon^2). \quad (3.19)$$

В случае, когда нелинейность $b(x, \theta)$ представляется в виде

$$b(x, \theta) = b_2(x, \theta) + b_3(x, \theta) + \tilde{b}_4(x, \theta),$$

где $b_2(x, \theta)$ и $b_3(x, \theta)$ — квадратичная и кубическая нелинейности соответственно, а $\tilde{b}_4(x, \theta)$ содержит члены более высокой степени, также возможно представление бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$ уравнения (3.1) согласно теореме 1.5.

3.3.2 Приближенное исследование бифуркации субгармонических колебаний

Рассмотрим теперь задачу о приближенном построении существующих в условиях теорем 3.3 и 3.4 бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ системы (3.1). Здесь $\varepsilon \geq 0$ вспомогательный малый параметр, такой что $x(t, 0) = 0$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$. Схема приближенного построения бифурцирующих решений изложена в пункте 1.4.2. С этой целью рассмотрим эквивалентное уравнению (3.1) операторное уравнение (3.9):

$$x(t) = B(\alpha, \beta)x(t) + b(x(t), \alpha, \beta),$$

где $B(\alpha, \beta)$ и $b(x(t), \alpha, \beta)$ это операторы (3.10) и (3.11) соответственно. Определим функционалы

$$\begin{aligned}\alpha[x(t)] &= \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^{qT} (x(t), e^*(t)) dt - \varepsilon \right), \\ \beta[x(t)] &= \beta_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{qT} (x(t), g^*(t)) dt,\end{aligned}\tag{3.20}$$

где $\varepsilon > 0$ вспомогательный малый параметр. Подставляя функционалы (3.20) в уравнение (3.9) вместо α и β , приходим к уравнению

$$G[x(t), \varepsilon] + W[x(t), \varepsilon] = 0,$$

где

$$\begin{aligned}G[x(t), \varepsilon] &= x(t) - \frac{1}{qT} \int_0^{qT} \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha[x(t)], \beta[x(t)])] E(\tau)x(s) \right) ds - \\ &\quad - \int_0^t \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha[x(t)], \beta[x(t)])] E(\tau)x(s) ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W[x(t), \varepsilon] &= \\ &= - \frac{1}{qT} \int_0^{qT} s \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \alpha[x(t)], \beta[x(t)])] \Phi(s, E(\tau)u(s), \alpha[x(t)], \beta[x(t)]) ds - \\ &\quad - \frac{1}{qT} \int_0^{qT} s \Psi(s, E(\tau_1)u(s), \dots, E(\tau_m)u(s), \alpha[x(t)], \beta[x(t)]) ds - \\ &\quad - \int_0^t \int_0^r [d_\tau Q(s, \tau, \alpha[x(t)], \beta[x(t)])] \Phi(s, E(\tau)u(s), \alpha[x(t)], \beta[x(t)]) ds - \\ &\quad - \int_0^t \Psi(s, E(\tau_1)u(s), \dots, E(\tau_m)u(s), \alpha[x(t)], \beta[x(t)]) ds.\end{aligned}$$

Рассмотрим оператор $G'(\varepsilon e(t)) : L_2[0, qT] \rightarrow L_2[0, qT]$, определенный равенством

$$G'(\varepsilon e(t))h(t) = h(t) - B(\alpha_0, \beta_0)h(t) - \int_0^{qT} (h(t), e^*(t))dt \cdot B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e(t) - \\ - \int_0^{qT} (h(t), g^*(t))dt \cdot B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e(t), \quad h(t) \in L_2[0, 1].$$

Этот оператор не зависит от ε и непрерывно обратим (п.1.4.1). Обозначим $\Gamma_0 = [G'(\varepsilon e(t))]^{-1}$. Из теорем 1.7 и 1.8 следует справедливость следующих утверждений.

Теорема 3.7 Пусть выполнены условия теоремы 3.4 и пусть функционалы $\alpha[x(t)]$ и $\beta[x(t)]$ выбраны в виде (3.20). Тогда при каждом малом $\varepsilon > 0$, последовательные приближения

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) - \Gamma_0 (G[x_k(t), \varepsilon] + W[x_k(t), \varepsilon]), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x_0(t) = \varepsilon e(t)$, сходятся к некоторой функции $x(t, \varepsilon) \in L_2[0, qT]$. Верны соотношения $\alpha[x(t)] \rightarrow \alpha_0$, $\beta[x(t)] \rightarrow \beta_0$, $\|x(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t)\|_{L_2} = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция $x(t, \varepsilon)$ является бифурцирующим решением уравнения (3.1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon) = \alpha[x(t, \varepsilon)]$, $\beta = \beta(\varepsilon) = \beta[x(t, \varepsilon)]$.

Пусть нелинейность $b(x, \theta)$ представляется в виде

$$b(x, \alpha, \beta) = b_2(x, \alpha, \beta) + \tilde{b}_3(x, \alpha, \beta),$$

где $b_2(x, \alpha, \beta)$ — квадратичная нелинейность, а $\tilde{b}_3(x, \alpha, \beta)$ содержит члены более высокой степени.

Теорема 3.8 *Существующие в условиях теоремы 3.7 бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ уравнения (3.1) представимы в виде*

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \varepsilon e(t) + \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e(t), \alpha_0, \beta_0) + o(\varepsilon^2), \\ \alpha(\varepsilon) &= \alpha_0 + \varepsilon \int_0^{qT} (\Gamma_0 b_2(e(t), \alpha_0, \beta_0), e^*(t)) dt + o(\varepsilon), \\ \beta(\varepsilon) &= \beta_0 + \varepsilon \int_0^{qT} (\Gamma_0 b_2(e(t), \alpha_0, \beta_0), g^*(t)) dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Первое из равенств (3.21) понимается в следующем смысле:

$$\|x(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t) - \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e(t), \alpha_0, \beta_0)\|_{L_2(0, qT)} = o(\varepsilon^2), \quad (3.22)$$

или, что равносильно,

$$\sqrt{\int_0^{qT} [x(t, \varepsilon) - \varepsilon e(t) - \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2(e(t), \alpha_0, \beta_0)]^2 dt} = o(\varepsilon^2). \quad (3.23)$$

В случае, когда нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ представляется в виде

$$b(x, \alpha, \beta) = b_2(x, \alpha, \beta) + b_3(x, \alpha, \beta) + \tilde{b}_4(x, \alpha, \beta),$$

где $b_2(x, \alpha, \beta)$ и $b_3(x, \alpha, \beta)$ — квадратичная и кубическая нелинейности соответственно, а $\tilde{b}_4(x, \alpha, \beta)$ содержит члены более высокой степени, также возможно представление бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ уравнения (3.1) согласно теореме 1.8.

3.4 Устойчивость бифурцирующих решений

Рассмотрим сначала вопрос о признаках неустойчивости бифурцирующих решений (3.17) $x(t, \varepsilon)$ нелинейной неавтономной системы (3.1) при $\theta = \theta(\varepsilon)$ в условиях теоремы 3.6.

Теорема 3.9 Пусть при $\theta = \theta_0$ у системы (3.2) существует хотя бы один характеристический показатель p удовлетворяющий неравенству $|e^{pT}| > 1$. Тогда при всех малых $|\varepsilon|$ бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ системы (3.1) неустойчивы.

Более сложным является вопрос о признаках устойчивости бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$ системы (3.1). В силу теоремы 3.9 естественным является следующее предположение: все характеристические показатели p_k системы (3.2) при $\theta = \theta_0$, удовлетворяют условию $|e^{p_k T}| < 1$, за исключением показателя $p = 0$. В этом случае могут возникать как устойчивые, так и неустойчивые решения.

Рассмотрим следующий критерий устойчивости бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$ системы (3.1) в условиях теоремы 3.9. Рассмотрим систему (3.1) при $\theta = \theta(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} x'(t) = & \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta(\varepsilon))] x(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(t, \tau, \theta(\varepsilon))] \Phi(t, x(t - \tau), \theta(\varepsilon)) + \\ & + \Psi(t, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), \theta(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (3.24)$$

решением которой является функция $x(t, \varepsilon)$. Характер устойчивости нулевого решения системы (3.24) определяется характеристическими показателями линейной системы

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta(\varepsilon))] x(t - \tau). \quad (3.25)$$

Так как у системы (3.2) существует характеристический показатель $p = 0$ при $\theta = \theta_0$, а остальные характеристические показатели p_k удовлетворяют условию $|e^{p_k T}| < 1$, то при малых $|\varepsilon|$ линейная система (3.25) имеет в точности один простой характеристический показатель $p_0(\varepsilon)$, близкий к нулю, так что $p_0(0) = 0$, а остальные характеристические показатели p_{k0}

удовлетворяют условию $|e^{p_0 T}| < 1$. Поэтому характер устойчивости решений $x(t, \varepsilon)$ определяется характеристическим показателем $p_0(\varepsilon)$ линейной системы (3.25).

Теорема 3.10 Пусть $p'_0(0) \neq 0$. Тогда бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ системы (3.1) устойчивы при тех малых $|\varepsilon|$, при которых $|e^{p_0(\varepsilon)T}| > 1$; неустойчивы при тех малых $|\varepsilon|$ при которых $|e^{p_0(\varepsilon)T}| < 1$.

Исследование устойчивости бифурцирующих решений системы (3.1) в условиях теоремы 3.8 проводятся аналогично.

3.5 Доказательства основных утверждений

Доказательство леммы 3.1. Необходимость. Пусть система (3.2) при $\theta = \theta_0$ имеет простой характеристический показатель $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых характеристических показателей. Это означает, что система (3.1) имеет ненулевое T -периодическое решение $x_0(t)$, соответствующее простому характеристическому показателю $p = 0$. В силу леммы 1.1 периодические решения системы (3.2) определяются из уравнения

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta_0)] E(\tau) x(s) \right) ds + \\ + \int_0^t \left(\int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta_0)] E(\tau) x(s) \right) ds,$$

правая часть которого представляет оператор $B(\theta_0)x(t)$. В силу равенства $x_0(t) = B(\theta_0)x_0(t)$ оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1.

Достаточность. Пусть оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1. Тогда для оператора (3.4) при $\theta = \theta_0$ существует единственная с точностью до множителя собственная функция $e(t)$ такая, что $e(t) = B(\theta_0)e(t)$.

Отсюда

$$e(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(e(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta_0)] E(\tau) e(s) \right) ds + \\ + \int_0^t \left(\int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \theta_0)] E(\tau) e(s) \right) ds.$$

Согласно лемме 1.1, последнее равенство определяет T -периодическое решение $e(t)$ системы (3.2). Следовательно, существует мультипликатор системы (3.2) равный 1. В этом случае характеристический показатель $p = 0$. Поскольку решение $e(t)$ единственное, то показатель является простым и других чисто мнимых показателей не существует. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Доказательство этой теоремы основывается на теореме о неявной функции и общих теоремах о точках бифуркации (см. § 2.5 теоремы 2.14, 2.15). По условию доказываемой теоремы характеристический квазиполином (3.7) при $\theta = \theta_0$ имеет простой корень $p = 0$. А именно для (3.7) выполняются соотношения $L(0, \theta_0) = 0$ и $L'_p(0, \theta_0) \neq 0$. В силу теоремы о неявной функции характеристический квазиполином (3.7) в малой окрестности θ_0 имеет корень $p(\theta)$, такой что $p(\theta_0) = 0$ и

$$p'(\theta_0) = -\frac{L'_\theta(0, \theta_0)}{L'_p(0, \theta_0)}.$$

Так как по условию доказываемой теоремы $L'_\theta(0, \theta_0) \neq 0$, то $p'(\theta_0) \neq 0$. Отсюда из теоремы 2.15 значение θ_0 является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (3.1). Теорема доказана.

Доказательство леммы 3.2. Необходимость. Пусть выполнено условие У3.2 а именно, пусть система (3.2) при значениях параметров $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ имеет пару простых характеристических показателей $p = \pm i \frac{2\pi}{T} \frac{q}{d}$ и не имеет других чисто мнимых показателей. Следовательно у системы (3.2)

существуют решения (см. п.1.2.1).

$$\widetilde{e}(t) = \varphi_1(t) \cos \frac{2\pi d}{T} t, \quad \widetilde{g}(t) = \varphi_2(t) \sin \frac{2\pi d}{T} t, \quad (3.26)$$

где вектор-функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ являются qT -периодическими по аргументу t .

Решения (3.26) системы (3.2) являются qT -периодическими и совпадают с решениями следующего интегрального уравнения, согласно лемме 1.1:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{qT} \int_0^{qT} x(s) ds + \frac{1}{qT} \int_0^{qT} s \left[\int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha_0, \beta_0)] E(\tau) x(s) \right] ds + \\ & + \int_0^t \left(\int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha_0, \beta_0)] E(\tau) x(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Правая часть уравнения (3.27) это оператор (3.10), а функции (3.26) являются собственными функциями оператора $B(\alpha_0, \beta_0)$.

Таким образом, оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ уравнения (3.9) имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Достаточность. Пусть оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1. Тогда для оператора $B(\alpha, \beta)$ при $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ существуют собственные функции $e(t)$ и $g(t)$ такие, что $e(t) = B(\alpha_0, \beta_0)e(t)$ и $g(t) = B(\alpha_0, \beta_0)g(t)$. Отсюда

$$\begin{aligned} e(t) = & \frac{1}{qT} \int_0^{qT} \left(e(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha_0, \beta_0)] E(\tau) e(s) \right) ds + \\ & + \int_0^t \left(\int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha_0, \beta_0)] E(\tau) e(s) \right) ds, \\ g(t) = & \frac{1}{qT} \int_0^{qT} \left(g(s) + s \int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha_0, \beta_0)] E(\tau) g(s) \right) ds + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \left(\int_0^r [d_\tau R(s, \tau, \alpha_0, \beta_0)] E(\tau) g(s) \right) ds.$$

Согласно лемме 1.1, эти равенства определяют qT -периодические решения $e(t)$ и $g(t)$ системы (3.2). Следовательно у системы (3.2) существует пара простых чисто мнимых характеристических показателей $p = \pm i \frac{2\pi}{T} \frac{d}{q}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.4 Теорема доказывается аналогично теоремам 2.4, 3.2.

Доказательство теоремы 3.9. Вопрос об устойчивости бифурцирующего решения (3.21) $x(t, \varepsilon)$ уравнения (3.1) равносильен вопросу об устойчивости нулевого решения уравнения

$$y'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t, \tau, \theta(\varepsilon))] y(t - \tau) + \int_0^r [d_\tau Q(t, \tau, \theta(\varepsilon))] \Phi_{x_t}(x(t, \varepsilon), \theta(\varepsilon)) y(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \Psi_{x_t}(x(t, \varepsilon), \theta(\varepsilon)) y(t - \tau_i), \quad (3.28)$$

который, в свою очередь, определяется характеристическими показателями системы (3.28).

Система (3.28) при $\varepsilon = 0$ совпадает с системой (3.2) при $\theta = \theta_0$. Тогда при малых $|\varepsilon|$ система (3.28) имеет характеристический показатель p : $|e^{pT}| > 1$. Отсюда и из теоремы 1.2 следует, что бифурцирующие решения системы (3.1) неустойчивы.

Доказательство теоремы 3.10. При исследовании устойчивости рождающихся периодических решений системы воспользуемся тем фактом [76], что при бифуркации между решением $x = 0$ и бифурцирующими решениями $x(t, \varepsilon)$ имеет место «обмен устойчивостью». А именно, если бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ возникают при $\theta > \theta_0$, и при этих θ нулевое решение

является устойчивым (неустойчивым), то бифурцирующие решения $x(t, \varepsilon)$ будут неустойчивыми (устойчивыми). Поэтому характер устойчивости решения $x(t, \varepsilon)$ системы (3.24) определяется характеристическими показателями системы (3.25).

Пусть при малых $|\varepsilon|$ у линейной системы (3.25) существует характеристический показатель $p_0(\varepsilon) : |e^{p_0(\varepsilon)T}| > 1$. При этом все остальные характеристические показатели системы $p_{k0}(\varepsilon) : |e^{p_{k0}(\varepsilon)T}| < 1$. Тогда из теоремы 1.2 следует, что решение $x = 0$ системы (3.24) является неустойчивым. Следовательно, решение $x(t, \varepsilon)$ системы (3.24) является орбитально асимптотически устойчивым.

Пусть теперь при малых $|\varepsilon|$ линейная система (3.25) имеет характеристический показатель $p_0(\varepsilon) : |e^{p_0(\varepsilon)T}| < 1$. При этом все остальные характеристические показатели $p_{k0}(\varepsilon)$ системы по условию такие, что $|e^{p_{k0}(\varepsilon)T}| < 1$. Тогда из теоремы 1.2 следует, что решение $x = 0$ системы (3.24) является асимптотически устойчивым. Отсюда, решение $x(t, \varepsilon)$ системы (3.24) является неустойчивым. Теорема доказана.

Заключение

В настоящей диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Разработан и обоснован общий операторный метод исследования локальных бифуркаций в окрестностях стационарных решений систем ФДУЗТ, основанный на методе функционализации параметра.
2. Получены новые достаточные признаки бифуркации Андронова-Хопфа, положения равновесия, вынужденных и субгармонических колебаний в системах ФДУЗТ.
3. Предложены итерационные процедуры приближенного построения бифурцирующих решений задач о локальных бифуркациях в системах ФДУЗТ.
4. Получены приближенные формулы для бифурцирующих решений в задачах об основных сценариях локальных бифуркаций.
5. Проведен анализ устойчивости бифурцирующих решений для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия систем ФДУЗТ.

Список литературы

- [1] Азбелев, Н.В. Функционально- дифференциальные уравнения и вариационные задачи / Н.В.Азбелев, С.Ю.Култышев, В.З.Цалюк. — М.–Ижевск: НИЦ <Региональная и хаотическая динамика>, Институт компьютерных исследований, 2006. — 122 с.
- [2] Азбелев, Н.В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, П.М. Симонов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — № 1. — С. 3-23.
- [3] Азбелев, Н.В. Элементы современной теории функционально - дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Н.В.Азбелев, В.П.Максимов, Л.Ф.Рахматуллина. — М: Институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с.
- [4] Азбелев, Н.В. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом. II / Н.В.Азбелев, П.М.Симонов // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 4. — С. 3-13.
- [5] Акиншин А.А. Бифуркация Андронова–Хопфа для некоторых нелинейных уравнений с запаздыванием / А.А. Акиншин // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т.16, №3. — С. 3-15.

- [6] Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. — М.: Физматгиз, 1959. — 560 с.
- [7] Анищенко, В.С. Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т.С. Вадивасова. — М.-Ижевск: НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, 2011. — 500 с.
- [8] Арнольд, В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И.Арнольд. — М.-Ижевск: НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, 2000. — 400 с.
- [9] Базыкин, А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д.Базыкин. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 368 с.
- [10] Басов, В.В. Бифуркация положения равновесия в системах с нулевыми корнями характеристического уравнения / В.В.Басов // Математические заметки. — 2004. — Т.75, №3. — С. 323-341.
- [11] Беклорян, Л.А. Введение в теорию функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Групповой подход / Л.А.Беклорян. — М.: Факториал Пресс, 2007. — 288 с.
- [12] Беллман, Р. Дифференциально - разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
- [13] Бобровски, Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем / Д.Бобровски. — М.-Ижевск: НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, Институт компьютерных исследований, 2006. — 360 с.
- [14] Боголюбов, Н.Н. Математика и нелинейная механика. Т.3. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. — М.: Наука, 2005. — 605 с.

- [15] Боровских, А.Б. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Б.Боровских, А.И.Перов. — М.–Ижевск: НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, Институт компьютерных исследований, 2004. — 540 с.
- [16] Борздыко В.И. Периодические решения систем „хищник-жертва" с непрерывным запаздыванием и периодическими коэффициентами / В.И. Борздыко // Укр. мат. журн. — 2010. — Т.62, № 1. — С. 15-28.
- [17] Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М.Вайнберг, В.А.Треногин. — М.: Наука, 1969. — 529 с.
- [18] Веретенников, В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем / В.Г.Веретенников. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [19] Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений / В.Вольтерра. — М.: Наука, 1982. — 304 с.
- [20] Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З.Вулих. — М.: Наука, 1967. — 416 с.
- [21] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
- [22] Гукенхеймер, Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж.Гукенхеймер, Ф.Холмс. — М.–Ижевск: НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, Институт компьютерных исследований, 2002. — 560 с.
- [23] Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн. — М.: Наука, 1970. — 535 с.

- [24] Жабко, А.П. Методы исследования систем с последствием / А.П.Жабко, Н.А.Зубов, А.В.Прасолов // Деп. ВИНТИ. — 1984. — №2103. — С. 239.
- [25] Ибрагимова, Л.С. Приближенные методы исследования бифуркационных задач с простым вырождением / Л.С.Ибрагимова // Вестник Башкирского университета. — 2006. — №2. — С. 3-5.
- [26] Ибрагимова, Л.С. Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем / Л.С.Ибрагимова, М.Г.Юмагулов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 4. — С. 3-12.
- [27] Йосс, Ж. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Ж.Йосс, Д.Джозеф. — М.: Мир., 1983. — 304 с.
- [28] Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
- [29] Кащенко, Д.С. Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие / Д.С.Кащенко, И.С.Кащенко. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. — 132 с.
- [30] Ким, А.В. i -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений / А.В.Ким, В.Г.Пименов. — М.-Ижевск: НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, 2004. — 256 с.
- [31] Колесов, Ю.С. Обоснование метода квазинормальных форм для уравнения Хатчинсона с малым коэффициентом диффузии / Ю.С.Колесов // Изв.РАН. Сер. матем. — 2001. Т.65, № 4. — С.111-132.

- [32] Колесов, А.Ю. Релаксационные колебания в математических моделях экологии. Тр.МИАН. Т.199 / А.Ю.Колесов, Ю.С.Колесов. — М.: Наука, 1993. — 126 с.
- [33] Колмановский, В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последействием / В.Б.Колмановский // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 11. — С.45-49.
- [34] Колмановский, В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В.Б.Колмановский, В.Р.Носов. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
- [35] Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А.Красносельский. — М.: Наука, 1966. — 331 с.
- [36] Приближенное решение операторных уравнений / М.А.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко, Я.Б.Рутицкий, В.Я.Стеценко. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
- [37] Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А.Красносельский, П.П.Забрейко — М.: Наука, 1975. — 511 с.
- [38] Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. — М.: Физматлит, 2001. — 295 с.
- [39] Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания. (Сер. Современная теория колебаний и волн) / А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Н.М.Рыскин. — М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2005. — 292 с.
- [40] Кузнецов, Н.А. Алгоритм исследования устойчивости периодических колебаний в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа / Н.А.Кузнецов, М.Г.Юмагулов, И.В.Шарафутдинов // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 47-52.

- [41] Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1983. — 328 с.
- [42] Ляпунов, А.М. Общая задача устойчивости движения / А.М.Ляпунов. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — 263 с.
- [43] Магницкий, Н.А. Теория динамического хаоса / Н.А.Магницкий. — М.: ЛЕНАНД, 2011. — 320 с.
- [44] Магницкий, Н.А. Новые методы хаотической динамики / Н.А.Магницкий, С.В.Сидоров. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 336 с.
- [45] Малинецкий, Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г.Малинецкий, А.Б.Потапов. — М.: Наука, 2000. — 336 с.
- [46] Малкин, И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
- [47] Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 432 с.
- [48] Мардсен, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж.Мардсен, М.Мак-Кракен. — М.: Мир, 1980. — 362 с.
- [49] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии лекции о моделях / Дж.Марри. — М.: Мир, 1983. — 297 с.
- [50] Мухамадиев Э.М. Операторы типа свертки в пространствах суммируемых функций, порожденных различными мерами /Э.М. Мухамадиев, М.Г.Юмагулов// – ДАН России. — 1997. — Т. 353.— № 1.— С. 23-25.
- [51] Мухамадиев Э.М. Соотношения вход-состояние-выход для систем запаздывающего типа / Э.М. Мухамадиев, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. — 1995.— № 7.— С. 16-23.

- [52] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д.Мышкис — М.: Ленанд, 2014. — 360 с.
- [53] Норкин, С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С.Б.Норкин — М.: Наука, 1965. — 365 с.
- [54] Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах / А.А.Вышинский, Л.С.Ибрагимова, С.А.Муртазина, М.Г.Юмагулов // Уфимский математический журнал. — 2010.— Т.2, №4. — С.3-26.
- [55] Плисс, В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений / В.А.Плисс. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
- [56] Рамазанов, М.Д. Функциональные пространства и преобразование Фурье. Граничные задачи для дифференциальных уравнений. Сборник работ / М.Д. Рамазанов // Тр. МИАН СССР. — 1967. — №91. — С. 146–170.
- [57] Розо, М. Нелинейные колебания и теория устойчивости / М.Розо. — М.: Наука, 1971. — 287 с.
- [58] Симо, К. Современные проблемы хаоса и нелинейности / К.Симо, С.Смейл, А.Шенсине. — Ижевск: НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, 2001. — 400 с.
- [59] Симонов, П.М. Устойчивость дифференциальных уравнений с последействием / П.М.Симонов // Изв. ИМИ УдГУ. — 2002. — №2(25). — С. 95-96.
- [60] Солодов, А.В. Системы с переменным запаздыванием / А.В.Солодов, Е.А.Солодова. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
- [61] Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г.Майер. — М.: Наука, 1967. — 488 с.

- [62] Теория бифуркаций. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.5. / В.И.Арнольд, В.С.Афраймович, Ю.С.Ильяшенко, Л.П.Шильников. — М.:ВИНИТИ, 1985. — 300 с.
- [63] Терехин, М.Т. Малые периодические решения нелинейных систем дифференциальных уравнений с постоянным отклонением / М.Т.Терехин // Известия вузов. Математика. — 2008. — №6. — С. 56-65.
- [64] Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 497 с.
- [65] Тхай, В.Н. Обратимые механические процессы / В.Н.Тхай // Нелинейная динамика. — М.: Физматлит. — 2001. — С. 131-146.
- [66] Тхай, В.Н. Периодические движения обратимой механической системы второго порядка. Приложение к задаче Ситникова / В.Н.Тхай // ПММ. — 2006. — Т.70, №5. — С. 813-834.
- [67] Федоров В.Е. Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания / В.Е. Федоров, Е.А.Омельченко // Изв. вузов. Матем. — 2014. — № 1. — С. 71–81.
- [68] Федоров В.Е. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В.Е. Федоров, Е.А. Омельченко // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т.53, №2. — С. 418–429.
- [69] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 / Г.М.Фихтенгольц. — М.: Наука, 1970. — 800 с.
- [70] Хейл, Дж. Теория функционально - дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

- [71] Хорн, Р. Матричный анализ. / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Книга по требованию, 2012. — 667 с.
- [72] Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б.Хэссард, Н.Казаринов, И.Вэн. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
- [73] Чезари, Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.Чезари. — М.: Мир, 2004. — 1964 с.
- [74] Четаев, Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г.Четаев. — М.: Гостехиздат, 1955. — 123 с.
- [75] Чуликов, А.И. Математические модели нелинейной динамики / А.И.Чуликов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 296 с.
- [76] Шарафутдинов И.В. Обмен устойчивостью при бифуркации Андронова – Хопфа / И.В.Шарафутдинов // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: труды международной научной конференции. — Стерлитамак: Изд-во СГПА, — 2008. — С.98-102.
- [77] Шильников Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л.П.Шильников, А.Л.Шильников, Д.В.Тураев, Чу а Л. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 416 с.
- [78] Эльсгольц, Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э.Эльсгольц, С.Б.Норкин. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
- [79] Юмагулов, М.Г. Введение в теорию динамических систем: учебное пособие / М.Г.Юмагулов. — СПб.: Лань, 2015. — 272 с.

- [80] Юмагулов, М.Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах / М.Г.Юмагулов // Доклады Академии наук. — 2009. — Т.424, № 2. — С. 177-180.
- [81] Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А.Якубович, В.М.Старжинский. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
- [82] Awrejcewicz J. Asymptotic approaches in nonlinear dynamics: new trends and applications / J.Awrejcewicz, I.V.Andrianov, L.I.Manevitch. — Berlin: Springer-Verlag, 1998. — 303 p.
- [83] Azbelev N.V.Theory of functional differential equations and applications / N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, P.M. Simonov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2011. Vol. 69, № 2. — P. 203-235.
- [84] Burton, T.A. Linear differential equations with periodic coefficients / T.A.Burton // Proc. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol.17, № 2. — P. 327-329.
- [85] Balachandran B. Delay differential equations: recent advances and directions / B.Balachandran, T.Kalmar - Nagy, D.E.Gilsinn. — New York: Springer Science + Business Media LLC, 2009. — 341 p.
- [86] Bellman R. Differential - difference equations / R.Bellman, K.L.Cooke. — New York: Academic press, 1963. — 465 p.
- [87] Chow, S.-N. Methods of bifurcation theory / S.-N.Chow, J.K.Hale. — New York: Springer-Verlag, 1982. — 513 p.
- [88] Dancer, E.N. Bifurcation theory in Real Banach Space / E.N.Dancer // Proc. London Math. Soc. — 1971. — Vol.3, № 23. — P. 699-734.

- [89] Driver, R.D. Ordinary and Delay Differential Equations / R.D. Driver. — New York: Springer–Verlag, 1977. — 242 p.
- [90] Guckenheimer, J. Dynamical systems: some computational problems. Bifurcations and Periodic orbits of Vector Fields / J.Guckenheimer, P.Worfolk // Kluwer Academic Publishers. Dordrecht etc. — 1993. — P. 241-278.
- [91] Kielhöfer, H. Bifurcations theory: an introduction with applications to PDEs / H. Kielhöfer. — New York: Springer–Verlag, 2004. — 346 p.
- [92] Kozyakin, V.S. The method of parameter functionalization in the Hopf bifurcation problem / V.S.Kozyakin, M.A.Krasnoselskii // Nonlinear Analysis. — 1987. — Vol.11, № 2. — P. 149-161.
- [93] Krasnoselskii, A.M. Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities / A.M.Krasnoselskii, J.Mawhin // Mathematical and Computer Modelling. — 2000. — № 32. — P. 1445-1455.
- [94] Kuznetsov, Yu.A. Elements of Applied Bifurcation Theory / Yu.A.Kuznetsov. — New York: Springer–Verlag, Inc, 1998. — 593 p.
- [95] Mettin, R. Bifurcation structure of the driven Van der Pol oscillator / R. Mettin, U.Parlitz, M.Lauterborn // Int. J. of Bifurcation and Chaos. — 1993. — Vol.3, №6. — P. 1529.
- [96] Mircea, G. Uncertain, stochastic and fractional dynamical systems with delay / G.Mircea, M.Neamtu, D.Opris. — Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 176 p.
- [97] Mitropolskiy, Yu. A. On asymptotic solutions to delay differential equation with slowly varying coefficients / Yu.A.Mitropolskiy, V.H.Samoylenko // Nonlinear Analysis. — 2003. — № 52. — P. 971-988.

- [98] Noris, J. The dousing of Arnold tongues for periodically forced limit cycle / J.Noris // Nonlinearity. — 1993. — № 6. — P. 1093.
- [99] Shilnikov, L.P. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Parts 2. World Scientific Series on <Nonlinear Science>, series A, vol.5 / L.P.Shilnikov, D.V.Turaev, L.O.Chua. — Singapore: World Scientific Series on <Nonlinear Science>, 2001. — 957 p.
- [100] Sparrow, C. The Lorenz Equations: bifurcations, chaos, and strange attractors / C.Sparrow. — New York: Springer-Verlag, 1982. — 269 p.
- [101] Theivasanthi, T. Dynamics simulation and chaos / T.Theivasanthi, T.Theivasanthi, S. Sivadevi. — Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2010. — 60 p.
- [102] Thirugnanasambandan, T. Chaos, bifurcations and simple dynamical models / T.Thirugnanasambandan, S.Sivadevi. — Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2010. — 80 p.
- [103] Russel, J. Bifurcation (law) / J.Russel. — М.: Книга по требованию, 2012. — 76 с.
- [104] Hanbmann, H. Local and semi - local bifurcations in Hamiltonian dynamical systems / H.Hanbmann. — Berlin, Heidelberg: Springer - Verlag, 2007. — 240 p.
- [105] Hale, J.K. Non linear oscillations / J.K.Hale. — New York: McGraw Hill. — 1963. — 211 p.
- [106] Hale, J.K. Dynamics and Bifurcations / J.K.Hale, H.Коçак. — New York: Springer-Verlag, 1991. — 567 p.

- [107] Vance, W. A detailed study of forced chemical oscillator: Arnold tongues and bifurcation sets / W.Vance, J.Ross // Chem. Phys. — 1989. — Vol.92, № 12. — P. 7654.
- [108] Kuang, Y. Delay differential equations with applications in population dynamics / Y.Kuang. — San Diego: Academic press, 1993. — 399 p.
- [109] Ye, Z. Periodic orbits and invariant tori from a semistable limit cycle in the fast dynamics / Z.Ye, M.J.Han // Shanghai Jiaotong Univ. Sci. — 2006. — Vol.11, № 1. — P. 107-112.
- [110] Yumagulov, M. G. Operator approach for the study of periodic solutions to Lienard equation / M.G. Yumagulov // Adv. in Math. Sci. Appl., Gakkotosho, Tokyo. — 1997. — Vol.7, № 2. — P. 569-578.
- [111] Юмагулов, М.Г. Исследование основных сценариев локальных бифуркаций в системах функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа / М.Г.Юмагулов, Д.А.Якшибаева // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т.6, №2. — С.104-112.
- [112] Юмагулов, М.Г. Операторный метод исследования малых автоколебаний в системах с последействием / М.Г.Юмагулов, Д.А.Якшибаева // Вестник Самарского государственного университета. — 2013. — №9-2(110). — С.37-44.
- [113] Юмагулов М.Г. Признаки субгармонической бифуркации для функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа / М.Г.Юмагулов, Д.А.Якшибаева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2013. — Т.18. №5-2. — С.2754-2756.

- [114] Юмагулов М.Г. Операторный метод исследования малых автоколебаний в системах с последействием / М.Г.Юмагулов, Д.А.Якшибаева // Актуальные проблемы математики и механики: материалы и доклады Всерос. науч. конф., посвященной 75-летию со дня рождения д-ра физ.-мат.наук, профессора Г.И.Быковцева (Самара, 18-21 апреля 2013 г.) / под общ. ред. В.И. Астафьева. - Самара: Издательство <Самарский университет>. — 2013. — С.105-108.
- [115] Юмагулов М.Г. Операторный метод исследования малых автоколебаний системы функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа / М.Г.Юмагулов, Д.А.Якшибаева // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции: В 2 т. (26-30 июня 2013 г., г. Стерлитамак) / Отв. ред. К.Б.Сабитов - Уфа: РИЦ БашГУ. — 2013. — Т.2. — С.304-306.
- [116] Юмагулов М.Г. Операторный метод исследования малых колебаний в системах с последействием / М.Г.Юмагулов, Д.А.Якшибаева // Вестник МаГУ. Математика. — Магнитогорск: МаГУ. — 2012. — Вып. 14. — С.172-176.
- [117] Юмагулов М.Г. Спектральные свойства интегральных операторов периодической задачи для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа / М.Г.Юмагулов, Д.А.Якшибаева // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: материалы международной научной конференции. — Уфа: РИЦ БашГУ. — 2014. — С. 102-104.
- [118] Якшибаева Д.А. Запаздывание в аргументе дифференциального уравнения с последействием как бифуркационный параметр // Закономерности и тенденции развития науки в современном обществе: материалы и докла-

ды международной научно-практической конференции.— Уфа: Аэтерна. — 2015. — С. 11-14.

[119] Якшибаева Д.А. Признаки субгармонической бифуркации для систем с последствием / Д.А.Якшибаева // Международная научная конференция <Нелинейный анализ и спектральные задачи>: Тезисы докладов. — Уфа: Изд-во БашГУ. — 2013. — С.136-139.

[120] Якшибаева Д.А. Признаки бифуркаций Андронова-Хопфа для уравнения с последствием / Д.А.Якшибаева // <Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании>: Материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции с международным участием (г.Сибай, 16 - 17 мая 2013г) — Уфа: РИЦ БашГУ. — 2013. — С. 129-132.