

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Сулейменова Кенесары Машимовича
"О вложении некоторых классов функций
переменного приращения и со смешанной нормой",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Теория вложения функциональных пространств, получившая свое начало в классических работах Г.Г.Харди, Дж.И.Литтлвуда и С.Л.Соболева активно развивается и в настоящее время. Важный вклад в ее развитие внесли такие математики, как С.М.Никольский, который ввел обобщенные гельдеровы пространства $H_p^r(\mathbb{R}^n)$, носящие теперь его имя, О.В.Бесов, пространства которого оказались востребованными в самых различных областях математики, включая комплексный анализ, хотя первоначально они вводились в действительном случае, П.Л.Ульянов, предложивший использовать невозрастающие перестановки функций для установления теорем вложения пространств H_p^ω .

Работа К.М.Сулейменова посвящена изучению вложений типа Ульянова для обобщения H_p^ω , связанного с частным случаем модуля непрерывности Дитциана-Тотика в пространства Лоренца и вложений анизотропного пространства Бесова в пространство $L^{q_1, \dots, q_n}(\mathbb{R}^n)$ со смешанной нормой. Актуальность работы не вызывает сомнений. Она содержит 70 страниц набранного на компьютере текста и состоит из Введения, двух глав, заключения и списка литературы из 64 наименований.

Во введении, как и в автореферате, подробно объяснена связь результатов автора с предшествующими результатами, наиболее важные из которых приведены полностью, дан также краткий обзор основных направлений теории вложения функциональных пространств.

В главе 1 изучаются вложения пространств невозрастающих функций с заданной мажорантой модуля непрерывности Дитциана-Тотика в частном случае, когда порождающая функция является степенной, в двупараметрические пространства Лоренца $L(\mu, \nu)$. Ранее для обычного модуля непрерывности такое вложение рассматривал Н.Темиргалиев (Сибирский математический журнал, 1983, том 24, с.160-172), а для вложения указанного выше пространства в пространство Лебега L^q этим занимался венгерский математик вьетнамского происхождения Н.Ки (Analysis Mathematica, 1993, vol. 19, pp. 255-265). Помимо того, что в теоремах 1.2 и 1.3 приведены критерии соответствующих вложений, с помощью оценок обобщенных модулей непрерывности степенной функции показывается большая точность оценок автора по сравнению с предшествующими оценками Н.Ки.

В главе 2 доказывается одна большая теорема о вложении анизотропных пространств Бесова, задаваемых с помощью смешанной нормы и приводятся многочисленные ее следствия. Она является далеко идущим обобщением результата М.Л.Гольдмана (см. Труды МИАН СССР, 1984, том 170, с. 86-104) для изотропных пространств Бесова в обычном пространстве L^p . Много внимания в этой главе уделено также доказательству вспомогательных утверждений, многие из которых были

известны только в изотропном случае.

Заключение представляет основные цели, достигнутые автором в диссертационной работе.

Это краткое перечисление результатов работы говорит о том, что в ней были поставлены и решены важные и интересные задачи. Доказательства являются четкими и убедительными, хотя и не всегда подробными, автору удалось преодолеть ряд технических сложностей. Работа выполнена самостоятельно, ее название соответствует содержанию. Результаты, полученные К.М.Сулейменовым, найдут применение в теории функций одной и многих переменных, в теории вложения функциональных пространств и могут использоваться в Московском, Саратовском университетах, а также в Российском университете дружбы народов.

Основные результаты работы изложены в 9 работах автора, в том числе 2 работы в журналах, входящих в список ВАК рекомендованных к публикации результатов докторских и кандидатских диссертаций. Автореферат полностью отражает содержание диссертационной работы.

В работе есть определенные недостатки.

1) Определение целой функции экспоненциального типа ν_j по переменной x_j на странице 8, строки 9-11, не закончено, во всяком случае, оно не получается автоматически из предыдущего определения.

2) На странице 5, 2 строка снизу приводится неравенство, которое доказывается далее в замечании 1 на странице 31, но последнее обстоятельство не указано.

3) Не сформулированы свойства модулей непрерывности Дитциана-Тотика, например, Δ_2 -условие, которое вытекает из эквивалентности этих модулей непрерывности и К-функционалов (см. теорему 2.1.1. в книге Ditzian Z., Totik. V. Moduli of smoothness. New York: Springer, 1987). При этом фактически это свойство используется.

4) На странице 15, например, в следствии 1, не очень понятно, что представляет собой пространство $B_{q_1, \dots, q_n, \theta}^{r_1, \dots, r_n}$, не удалось найти его определение и в главе 2.

5) Леммы 1 и 5 на странице 18 при $q \geq 1$ являются следствиями неравенств Л.Лейндлера (см. Acta Sci. Math.(Szeged), 1970, vol. 31, pp. 279–285), которые представляют собой весьма полезное обобщение классических неравенств Харди-Литтлвуда (см. теорему 346 в книге Г.Г.Харди, Д.Е.Литтлвуд, Г.Полиа. Неравенства. М., Изд-во иностр. литературы, 1948), а при $0 < q < 1$ легко следуют из неравенства Йенсена и перемены порядка суммирования.

6) В асимптотическом равенстве замечания 1 на странице 25 (кстати, внутри одной главы есть замечания с одинаковыми номерами), не указано, при каких x оно имеет место, во всяком случай при $x \rightarrow 1 - 0$ оно неверно.

7) В (1.17) получается, что $\eta(x)$ равна нулю вне некоторого отрезка, на котором равна η_k , судя же по доказательству, она принимает все значения η_i на аналогичных отрезках. Надо было также отметить, что $\eta_{-1} = 0$, поскольку далее возникает эта величина.

8) В конце доказательства леммы 5 на странице 48 упоминается теорема Л.Шварца без ссылки, а в начале доказательства леммы 7 на странице 50 ссылка на монографию С.М.Никольского не сопровождается ни номером страницы, ни номером раздела.

По оформлению работы есть следующие претензии.

- 1) Неправильно используются тире и дефисы (например, страница 4, 17 строка сверху, страница 6, 2, 6 и 9 строки снизу и т.д.).
- 2) Из-за неудачного текстового редактора минусы в формулах часто сливаются с чертой, отделяющей числитель от знаменателя (например, в формулах (0.16) и (0.18))
- 3) В списке математиков на страницах 3-4 неправильно записаны фамилии Йохансона (Яхонсон) и Шерстневой (Шестернева).
- 4) В [64] из списка литературы фамилии С.М.Никольского и О.В.Бесова написаны с маленькой буквы. В [62] Contemporary Mathematics не надо заключать в кавычки, там же "Lebesgue" надо писать с большой буквы, а фамилия Никольского обычно пишется по-английски "Nikol'skii" (по крайней мере в переводе монографии С.М.Никольского в издательстве Шпрингер).
- 5) З.Дитциана и В.Тотика на страницах 5 и 9, Н. Ки на страницах 9 и 10 следовало бы записать по-русски.

Отмеченные недостатки не влияют на положительную оценку работы.

Считаю, что работа К.М. Сулейменова "О вложении некоторых классов функций переменного приращения и со смешанной нормой" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, соответствует пп. 9-11, 13, 14 "Положения о присуждении ученых степеней", а ее автор Кенесары Машимович Сулейменов заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

19 мая 2017 года

Волосивец Сергей Сергеевич

Кандидат физико-математических наук, доцент
 доцент кафедры теории функций и стохастического анализа
 механико-математического факультета
 ФГБОУ "Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н.Г. Чернышевского",
 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83
 тел.: +7 (8452) 51 - 55 - 32,
 email: VolosivetsSS@mail.ru

