Официальный отзыв на работу Сулейменова К.М. «О вложении некоторых классов функций переменного приращения и со смешанной нормой», представленную в качестве диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Сулейменова К.М. относится к разделу метрической теории функций, более точно - теории вложений функциональных пространств функций вещественных аргументов.

Работа состоит из двух разделов.

Первый раздел – о вложении классов функций $\widetilde{H}^{\omega}_{\alpha,p}$, состоящих из всех невозрастающих неотрицательных функций $f \in L^p(0,1)$ таких, что $\omega_{\alpha,p}(f,\delta) \le \omega(\delta)$ $(0 \le \delta \le 1)$, $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < 1$ (когда в определении класса опускаются слова «невозрастающих неотрицательных», то опускается и тильда в обозначении).

Второй раздел – о вложении анизотропных пространств типа Никольского-Бесова в смешанной норме.

Остановимся на содержании первого раздела, в котором рассмотрены функций одной вещественной переменной. Напомним, пространство Лоренца заданных на отрезке $[0,1]$ функций определяется как множество измеримых в смысле Лебега функций с конечной величиной

$$\|f\|^{\nu}_{\nu,\mu} = \left\{ \int_0^1 x^{\frac{\nu}{\mu}-1} \left[f^*(x) \right]^{\nu} dx \right\},$$

где f^* - невозрастающая равноизмеримая с f функция.

Главным объектом исследований диссертанта здесь является понятие модуля непрерывности переменного степенного приращения

$$\omega_{\alpha,p}(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \int_{E_{h,\alpha}} \left| f\left(x+hx^{\alpha}\right) - f(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad 0 < \delta \le 1,$$

где $E_{h,\alpha} = \left\{ x \in (0,1) : x + hx^{\alpha} \in (0,1) \right\}$, при $f \in L^p(0,1)$, $p \in [1,\infty)$, $\alpha \in [0,1)$.

Взаимоотношения пространств функций различных гладкостей и суммируемости начиная с классических неравенств Харди и Литлвуда – активно изучалось в 50-60 годы прошлого столетия в работах десятков математиков.

Сулейменову К.М. удалось подвести итоги многим этим исследованиям, получив окончательные необходимые и достаточные условия.

Приведем для примера формулировки двух утверждении первого раздела.

Теорема 1.2. *Пусть даны числа* $1 \le p < \mu$, $0 \le \alpha < 1 - (1/p - 1/\mu)$, $0 < \nu < \infty$. *Пусть также дан некоторый модуль непрерывности* $\omega(\delta)$. *Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$\tilde{H}^{\omega}_{\alpha,p} \subset L(\mu,\nu),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{1-\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty .$$

Теорема 1.3. *Пусть даны числа* $1 \le p < \infty, 0 \le \alpha < 1, 0 < \nu < \infty$ *такие, что* $0 < \nu < p$. *Пусть также дан модуль непрерывности* $\omega(\delta)$. *Тогда, для того чтобы имело место вложение*

$$\tilde{H}^{\omega}_{\alpha,p} \subset L(p,\nu),$$

достаточно, а в случае, когда $\omega(\delta) = \underline{\underline{0}}\{\omega(\delta^2)\}$ $(0 \le \delta \le 1)$, *и необходимо, чтобы*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty .$$

Во втором разделе диссертации изучаются вложении анизотропных классов функций n-переменных и установлены окончательные результаты взаимоотношений классов пространств $B^{\omega_1,\ldots,\omega_n}_{p_1,\ldots,p_n,\theta}(R^n)$ и $L^{q_1,\ldots,q_n}(R^n)$ в терминах среднего модуля гладкости.

Средний модуль непрерывности $\Omega(u)$ - это средняя функция системы $\omega_j(u) \in \Omega_\beta$ (Ω_β, $\beta > 0$ означает класс всех непрерывных строго возрастающих на $[0, 1]$ функций $\omega(\delta)$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$ и $\omega(\delta)\delta^{-\beta}$ почти убывает на $[0, 1]$).

Теорема 2.4. *Пусть для каждого* j $(j = 1,\ldots,n)$ *даны числа* $1 \le p_j < q_j \le \infty$ $\left(L^{\infty}(R^n) \equiv C(R^n)\right)$, $0 < \theta \le \infty$, $0 < \beta_j < k_j$, *строго возрастающие модули гладкости* $\omega_j(\delta)$ *порядка* k_j *такие, что* $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) = 1$, $\omega_j(t) \cdot t^{-\beta_j}$ *почти убывает на* $(0,1]$.

Пусть $\Omega(\delta)$ *есть средний модуль гладкости системы* $\omega_1,\ldots,\omega_n$.

Также последовательно положим

$$q^* = \begin{cases} \min q_j, \text{ если } q_j < \infty \text{ при некотором } j, \\ 1, \quad \text{если } q_j = \infty \text{ при всех } j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

и

$$\rho \equiv \rho(\theta, q^*) = \begin{cases} \infty \quad \text{при } 0 < \theta \le q^*, \\ \dfrac{\theta q^*}{\theta - q^*} \quad \text{при} \theta > q^*. \end{cases}$$

Тогда условие

$$A \equiv A_{\mathbf{p},\mathbf{q},\theta,\omega_1,\ldots,\omega_n} \equiv \left\{ \int_0^1 \left[\Omega(t) \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))} \right]^{\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)} \right]^{\rho} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\rho}} < \infty ,$$

достаточно, а в случае, когда $\min\limits_{1\le j\le n} q_j = q^* = q_n$, *и необходимо для вложения*

$$B^{\omega_1,\ldots,\omega_n}_{p_1,\ldots,p_n,\theta}\left(R^n\right) \subset L^{q_1,\ldots,q_n}\left(R^n\right).$$

Подведем итоги.

Конечно, тема, выбранная Сулейменовым К.М., актуальна и сейчас, лежит в потоке основных математических исследований.

Результаты, полученные Сулейменовым К.М. верны, установлены им самим и апробированы многочисленными выступлениями на научных семинарах и публикациями в серьезных научных изданиях.

К недостаткам диссертационной работы можно было бы отнести обилие формул, которые составляют более $2/3$ ее объема, но это является особенностью всех математических работ с большими вычислениями.

Считаю, работу представленную Сулейменовым К.М. вполне достаточной для защиты в качестве кандидатской диссертации по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор Рамазанов Рамазанов М.Д.

ПОДПИСЬ Рамазанова М.Д.
ЗАВЕРЯЮ
СПЕЦИАЛИСТ ПО КАДРАМ
ПОДПИСЬ Л.Ф. САБИРОВА

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук
ОТДЕЛ КАДРОВ