Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Борель Лидия Викторовна

# ВЫРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Федоров

ЧЕЛЯБИНСК — 2016

# Содержание

# Введение

## Актуальность темы исследования

Начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, описывающих различные процессы в естественных и технических науках, удобно исследовать в рамках начальных задач для эволюционных уравнений в банаховых пространствах [7, 23, 42]. Некоторые начально-краевые задачи редуцируются к уравнениям первого порядка с вырожденным оператором при производной [47, 51], в дальнейшем называемым вырожденными эволюционными уравнениями. При этом нередко возникают модели, описываемые эволюционными интегро-дифференциальными уравнениями с интегралами различных типов или, другими словами, эволюционными уравнениями с интегральными возмущениями. При этом интегралы Вольтерра, например, описывают процессы с памятью, такие, как термомеханическое поведение полимеров [46], вязкоупругих жидкостей [15], и др. [43–45]. Интегралы Фредгольма встречаются в так называемых нагруженных уравнениях, содержащих помимо дифференциальной части некоторый функционал от искомой функции в виде, например, интеграла от решения по некоторому подмножеству меньшей меры [2, 3, 12]. Такие уравнения возникают при поиске приближенных решений дифференциальных уравнений [11], при математическом моделировании нелокальных [14], в том числе фрактальных процессов и явлений, например, в математической биологии [13], в теории тепломассопереноса в составных средах с фрактальной организацией [20], в экономике.

## Степень разработанности темы исследования

В диссертации использовались полученные в работах В. Е. Федорова [31, 51] результаты теории вырожденных полугрупп операторов, в частности вид решения линейного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве, оператор при производной в котором вырожден, т. е. имеет нетривиальное ядро (далее — вырожденное эволюционное уравнение). Вопросы существования вырожденных полугрупп различных классов гладкости, разрешающих однородное линейное вырожденное эволюционное уравнение, при различных условиях на операторы в уравнении рассматривались ранее в работах А. Г. Руткаса [18], A. Favini и A. Yagi [47], Г. А. Свиридюка [51], И. В. Мельниковой [10].

В работах В. Е. Федорова и О. А. Стахеевой [38–41] исследованы вопросы однозначной разрешимости невырожденных и вырожденных эволюционных уравнений с интегральным оператором памяти в случае, когда соответствующее однородное уравнение обладает аналитической в секторе разрешающей полугруппой.

Отметим также близкие по предмету исследования работы В. Е. Федорова и Е. А. Омельченко, в которых вырожденные эволюционные уравнения с запаздыванием на конечном промежутке исследуются методами теории полугрупп операторов [35] и с помощью теоремы о неподвижной точке [36].

Среди многочисленных методов исследования вырожденных эволюционных уравнений отметим также используемый Н. А. Сидоровым и представителями его школы метод, предполагающий фредгольмовость оператора при производной в уравнении (1.1) и существование его полного жорданова набора. В работах М. В. Фалалеева и С. С. Орлова этот метод получил свое развитие при исследовании интегро-дифференциальных уравнений с памятью. М. В. Фалалеевым исследована разрешимость в смысле обобщенных и классических решений вырожденных эволюционных уравнений с памятью первого порядка в банаховых пространствах методами теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов. В работах [26–29] М. В. Фалалеев и С. С. Орлов исследовали интегро-дифференциальные уравнения высокого порядка с эффектами памяти и вырожденным оператором при старшей производной в случаях интегральных ядер специального вида. При этом предполагается выполненным условие фредгольмовости оператора при старшей производной, либо спектральной ограниченности пучка операторов из уравнения.

### Цели и задачи

Целью данной работы является установление условий однозначной разрешимости начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений в банаховых пространствах с интегральными возмущениями двух видов — для уравнений с памятью и для нагруженных уравнений. Полученные общие результаты используются для установления существования единственного решения различных начально-краевых задач для не разрешимых относительно производной по времени уравнений и систем уравнений в частных производных с интегральным оператором памяти и с оператором Фредгольма по временно́й переменной — нагруженных уравнений.

### Научная новизна

Нагруженные уравнения для вырожденных эволюционных уравнений, по-видимому, ранее не исследовались. Уравнения с памятью для вырожденных эволюционных уравнений в отличие от работ М. В. Фалалеева с С. С. Орловым и В. Е. Федорова с О. А. Стахеевой исследуются при более общих условиях на операторы в уравнении — в диссертационной работе не предполагается фредгольмовость оператора при производной. При этом, вообще говоря, накладывается лишь условие существования сильно непрерывной разрешающей полугруппы соответствующего вырожденного однородного уравнения, а не аналитической полугруппы, как в работах других авторов. Кроме того, для уравнений с памятью исследовался, по-видимому, не использовавшийся ранее в общей постановке метод исследования невырожденного уравнения путем его сведения к системе двух невозмущенных уравнений в более широком пространстве с последующим применением результатов классической теории полугрупп.

## Теоретическая и практическая значимость работы

Первичным теоретически значимым результатом при исследовании новых задач является установление условий их однозначной разрешимости, именно этому посвящена данная работа. Кроме того, исследуемые в диссертационной работе начальные задачи для вырожденных эволюционных уравнений в банаховых пространствах с интегральными возмущениями имеют интерпретации, важные с практической точки зрения. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть практически использованы при исследовании прикладных задач, описывающих конкретные физические процессы и явления.

## Методология и методы исследования

Методами теории вырожденных полугрупп операторов вырожденное линейное эволюционное уравнение с памятью в банаховом пространстве сведено к системе двух уравнений, одно из которых разрешено относительно производной, а другое имеет при производной нильпотентный оператор. Задача с заданной историей для разрешенного относительно производной уравнения с памятью редуцирована к задаче Коши для стационарной системы уравнений в более широком пространстве. Это позволило получить методами класической теории полугрупп операторов условия существования единственного решения задачи, в том числе решения повышенной гладкости. В итоге была исследована однозначная разрешимость задачи с заданной историей для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью при некоторых ограничениях на ядро интегрального оператора памяти. Кроме того, была исследована аналогичная задача с условием типа обобщенного условия

Шоуолтера–Сидорова на историю системы при условии независимости интегрального ядра от элементов подпространства вырождения для рассматриваемого уравнения.

При исследовании нагруженных вырожденных эволцюионных уравнений использовалась теорема о сжимающем отображении. Для построения сжимающего оператора использовался вид решения неоднородного линейного вырожденного эволюционного уравнения. Это позволило получить теоремы об однозначной разрешимости задач Коши и Шоуолтера–Сидорова без привлечения дополнительных ограничений на ядро интегрального оператора.

Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для линеаризованных интегро-дифференциальных системы уравнений Осколкова, описывающих динамику жидкости Кельвина–Фойгта нулевого, а также высокого (второго и выше) порядка в смысле реологического соотношения, для интегро-дифференциальных систем уравнений внутренних и гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска, для алгебро-интегро-дифференциальной системы уравнений с частными производными, для вырожденной системы интегро-дифференциальных уравнений функций одной переменной, для нагруженных псевдопараболических уравнений, возникающих в теории фильтрации.

### Положения выносимые на защиту

1. Получены теоремы о существовании и единственности решения задач с заданной историей для вырожденных эволюционных уравнений с памятью, в случае, когда однородная часть уравнения обладает сильно непрерывной разрешающей полугруппой или аналитической разрешающей группой операторов.

2. Найдены условия однозначной разрешимости начально-краевых задач для интегро-дифференциальных систем уравнений Осколкова, модели-

рующих динамику вякоупругой жидкости Кельвина–Фойгта нулевого и высокого порядка, для систем внутренних и гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска, для алгебро-интегро-дифференциальной системы уравнений.

3. Сформулированы и доказаны теоремы о существовании единственного решения вырожденного эволюционного уравнения, нагруженного интегральным (в смысле Лебега–Стилтьеса) оператором типа Фредгольма.

4. Исследованы вопросы однозначной разрешимости начально-краевых задач для класса нагруженных псевдопараболических уравнений, включающего некоторые уравнения теории фильтрации, для нагруженных алгебро-дифференциальных систем уравнений для функций одной переменной и для функций нескольких переменных.

## Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (рук. д.ф.-м.н., проф. В. Е. Федоров), на конференциях: Международная конференция «Физико-математические науки и образование», Магнитогорский государственный университет, г. Магнитогорск, 2012 г.; Международная конференция «Нелинейные уравнения и комплексный анализ», Институт математики с вычислительным центром Уфимского центра РАН, оз. Банное, Башкортостан, 2013 г., 2014 г.; Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна», Воронежский государственный университет, г. Воронеж, 2014 г.; Международная конференция «Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology», Izmir University, Измир, Турция, 2015 г.; Международная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти А. В. Бицадзе, Московский государственный университет им. М. В.

Ломоносова, г. Москва, 2016 г.

Все результаты диссертации получены лично автором и опубликованы в работах [52]– [65]. В совместных работах с В. Е. Фёдоровым научному руководителю принадлежат постановка задачи и общее руководство.

Работа поддержана грантом Фонда поддержки молодых ученых Челябинского государственного университета (2015 г.), грантом № 14.Z50.31.0020 Правительства Российской Федерации.

**Краткое содержание диссертации**

Диссертационная работа содержит введение, три главы, список обозначений и список литературы. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь личные вкусы автора.

**Введение** содержит постановку задачи, историографию вопроса, актуальность темы исследования, новизну полученных результатов, методы исследования, краткое содержание, апробации.

В **первой главе** собраны понятия и факты, которые так или иначе используются при доказательстве основных результатов диссертации. В первом параграфе первой главы собраны сведения об относительных резольвентах. Второй и третий параграфы содержат определения и основные факты об $(L,p)$-радиальных и $(L,p)$-ограниченных операторах и соответствующих им сильно непрерывных полугруппах и аналитических группах операторов с ядрами, доказанные ранее в работах Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова (см., например, [51]).

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линейный и непрерывный оператор из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линейный, замкнутый, плотно в $\mathfrak{U}$ определенный оператор, действующий в $\mathfrak{V}$). Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$ ($L$-резольвентное множество) и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ ($L$-спектор оператора

ратора $M$).

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор $M$ называется $(L,p)$-*радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu \in (a,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\} \leq \frac{K}{(\mu-a)^{n(p+1)}}.$$

$(L,p)$-радиальный оператор $M$ называется сильно $(L,p)$-радиальным, если выполняется условие

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1}v\|_{\mathfrak{V}} \leq \frac{\mathrm{const}(v)}{(\mu-a)^{p+2}} \quad \forall v \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}};$$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu-a)^{p+2}}$$

при любом $\mu \in (a,+\infty)$.

**Теорема 0.0.1.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* $p$.

**Замечание 0.0.1.** Проектор вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (вдоль $\mathfrak{V}^0$ на подпространство $\mathfrak{V}^1$) может быть вычислен по формуле

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}, \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}).$$

**Теорема 0.0.2.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, функция $g \in C^1([0,T];\mathfrak{V})$ такова, что $(I-Q)g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V}^0)$. Тогда*

(i) *если $u_0 \in D_M$ и выполняется условие*

$$(I-P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)g)^{(k)}(0),$$

*то существует единственное решение* $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ *задачи Коши* $u(0) = u_0$ *для уравнения*

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.0.1}$$

*при этом*

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(s)L_1^{-1}Qg(t-s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)g)^{(k)}(t); \tag{0.0.2}$$

(ii) *если начальное значение* $u_0 \in D_{M_1}$, *то существует единственное решение* $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ *обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова* $Pu(0) = u_0$ *для уравнения* (0.0.1), *при этом решение имеет вид* (0.0.2).

Оператор $M$ называется $(L,\sigma)$-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)),$$

т. е. $L$-спектр оператора $M$ $\sigma^L(M)$ является ограниченным множеством.

**Теорема 0.0.3.** *Пусть оператор* $M$ $(L,\sigma)$-*ограничен. Тогда*

(i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{V}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$;

(iii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$.

$(L,\sigma)$-ограниченный оператор $M$ назовем $(L,p)$-*ограниченным* при $p \in \mathbb{N}_0$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$ ($H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$). Если такого $p \in \mathbb{N}_0$ не существует, назовем его $(L,\infty)$-*ограниченным*.

Во **второй главе** диссертации рассмотрены условия разрешимости начальных задач для эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной (часто называемых уравнениями соболевского типа [1,9,31, 51]), имеющих вид

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{0.0.3}$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $T > 0$, $\mathcal{K} : [0,T] \times [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации.

При исследовании разрешимости нагруженных уравнений, не разрешимых относительно производной, использовались результаты теории вырожденных полугрупп операторов, в частности вид решения уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t)$, где $g : [0,T] \to \mathfrak{V}$, полученные в работах [31], и теорема о сжимающем отображении. Такой подход позволил обойтись без дополнительных ограничений на ядро или образ интегрального оператора.

Первый параграф содержит основные результаты главы. Здесь сформулированы задача Коши и обобщенная задача Шоуолтера–Сидорова для нагруженного уравнения соболевского типа и доказаны теоремы об однозначной разрешимости этих задач в случае пары операторов в основной части уравнения, порождающей вырожденную сильно непрерывную полугруппу.

**Теорема 0.0.4.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$,*

$$\mathcal{K}_t^{(n)}(0,s) \equiv 0, \quad n = 0,1,\ldots,p,$$

*$\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ задачи $u(0) = u_0$ для уравнения* (0.0.3).

**Теорема 0.0.5.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ задачи $Pu(0) = u_0$ для уравнения* (0.0.3).

Во втором параграфе рассмотрено нагруженное псевдопараболическое уравнение, возникающее в теории фильтрации, с краевыми и различными начальными условиями, с различными интегральными операторами. Для всех рассмотренных задач установлены условия однозначной разрешимости с помощью абстрактных результатов предыдущего параграфа.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.0.4}$$

$$z(x,t) = \Delta z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{0.0.5}$$

для модифицированного уравнения Дзекцера, возникающего в теории фильтрации [4],

$$(\lambda - \Delta) z_t(x,t) = \triangle z(x,t) - \beta \Delta^2 z(x,t) +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Omega k(x,y,t,s) z(y,s) dy d\mu(s), \; (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{0.0.6}$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ имеет гладкую границу, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$. Обозначим

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0, \, x \in \partial\Omega\},$$

$$H_\partial^4(\Omega) = \{u \in H^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0, \, x \in \partial\Omega\}.$$

$$[\mathcal{K}(t,s)u](\cdot) = \int\limits_\Omega k(\cdot, y, t, s) u(y) dy,$$

$\lambda_m$, $m \in \mathbb{N}$, — собственные значения оператора Лапласа, определенного на $H_0^2(\Omega)$ и действующего в $L_2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная система соответствующих собственных функций этого оператора.

Обозначим

$$\widetilde{F}(T) = V_0^T(\mu) \left( \sup_{\lambda \neq \lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|} \max\left\{1, \sup_{\lambda \neq \lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|}\right\} \times \right.$$

$$\times \max\left\{1, \exp\left(T \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m}\right)\right\} \times$$

$$\times \left( \max_{t,s \in [0,T]} s \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s \in [0,T]} s \|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} \right) +$$

$$+\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda-\beta\lambda^2|}\left(\max_{t,s\in[0,T]}\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}+\max_{t,s\in[0,T]}\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}\right)\Bigg).$$

**Теорема 0.0.6.** *Пусть* $\beta>0$, $\lambda-\beta\lambda^2\neq 0$, $z_0\in H^4_\partial(\Omega)$, $\langle z_0,\varphi_m\rangle=0$ *при* $m\in\mathbb{N}$, *для которых* $\lambda_m=\lambda$, $k(x,y,t,s)\in C([0,T]\times[0,T];L_2(\Omega\times\Omega))$, $k_t(x,y,t,s)\in C([0,T]\times[0,T];L_2(\Omega\times\Omega))$, $k(x,y,0,s)\equiv 0$, $\mu:[0,T]\to\mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации, выполняется условие* $\widetilde{F}(T)<1$. *Тогда существует единственное решение* $u\in C^1([0,T];H^2_0(\Omega))\cap C([0,T];H^4_\partial(\Omega))$ *задачи* (0.0.4)–(0.0.6).

Для такого же уравнения с более простым интегральным оператором

$$(\lambda-\Delta)z_t(x,t)=\triangle z(x,t)-\beta\Delta^2 z(x,t)+\int\limits_0^T k(t,s)z(x,s)d\mu(s),\ \ (x,t)\in\Omega\times[0,T],\tag{0.0.7}$$

в той же области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ рассмотрим краевые условия (0.0.5) и начальное условие

$$(\lambda-\Delta)(z(x,0)-z_0(x))=0,\quad x\in\Omega.\tag{0.0.8}$$

Рассматриваемая задача (0.0.5), (0.0.7), (0.0.8) представляет собой частный случай обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова.

**Теорема 0.0.7.** *Пусть* $\beta>0$, $\lambda-\beta\lambda^2\neq 0$, $z_0\in H^4_\partial(\Omega)$, $k\in C([0,T]\times[0,T];\mathbb{R})$, $k_t\in C([0,T]\times[0,T];\mathbb{R})$, $\mu:[0,T]\to\mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации,* $\widetilde{F}(T)<1$. *Тогда существует единственное решение* $u\in C^1([0,T];H^2_0(\Omega))\cap C([0,T];H^4_\partial(\Omega))$ *задачи* (0.0.5), (0.0.7), (0.0.8).

Здесь

$$\widetilde{F}(T)=V_0^T(\mu)\left(\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\max\left\{1,\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\}\times\right.$$

$$\times\max\left\{1,\exp\left(T\sup_{\lambda_m\neq\lambda}\frac{\lambda_m-\beta\lambda_m^2}{\lambda-\lambda_m}\right)\right\}\left(\max_{t,s\in[0,T]}s|k(t,s)|+\max_{t,s\in[0,T]}s|k_t(t,s)|\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda-\beta\lambda^2|}\left(\max_{t,s\in[0,T]}|k(t,s)|+\max_{t,s\in[0,T]}|k_t(t,s)|\right)\Bigg).$$

В третьем параграфе продемонстрированы некоторые возможные улучшения общих результатов в частных случаях.

Четвертый параграф посвящен алгебро-интегро-дифференциальной системе уравнений с частными производными и условиям разрешимости данной системы с применением абстрактных результатов второй главы.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z_1(x,0)=z_{10}(x),\quad x\in\Omega, \tag{0.0.9}$$

$$z_i(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T],\quad i=1,2,3. \tag{0.0.10}$$

для модельной интегро-дифференциальной системы уравнений

$$\begin{gathered}
z_{1t}(x,t)=\triangle z_1(x,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_0^T k_{1i}(t,s)z_i(x,s)d\mu(s),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T],\\
z_{3t}(x,t)=\triangle z_2(x,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_0^T k_{2i}(t,s)z_i(x,s)d\mu(s),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T],\\
0=\triangle z_3(x,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_0^T k_{3i}(t,s)z_i(x,s)d\mu(s),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T].
\end{gathered} \tag{0.0.11}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, заданы функции $z_{10}:\Omega\to\mathbb{R}$, $k_{ji}:[0,T]\times[0,T]\to\mathbb{R}$, $i,j=1,2,3$.

**Теорема 0.0.8.** *Пусть $z_{10}\in H_0^2(\Omega)$, $\mu:[0,T]\to\mathbb{R}$ – функция ограниченной вариации, $k_{ij}\in C^{2,0}(\overline{\mathbb{R}}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+;L_2(\Omega))$, $i,j=1,2,3$,*

$$V_0^T(\mu)\max\left\{\sum_{n=0}^{2}K_{n,1}(T)+\frac{1}{|\lambda_1|}\sum_{n=0}^{2}K_n(T),\frac{1}{|\lambda_1|^2}\sum_{n=0}^{2}K_n(T)\right\}<1.$$

*Тогда существует единственное решение $z_1,z_2,z_3\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;L_2(\Omega))$ задачи (0.0.9)–(0.0.11).*

Аналогичным образом получен результат о разрешимости задачи (0.0.10), (0.0.11) с начальными условиями Коши

$$z_i(x,0)=z_{i0}(x),\quad x\in\Omega,\quad i=1,2,3. \tag{0.0.12}$$

**Теорема 0.0.9.** *Пусть* $z_{i0} \in H_0^2(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации,* $k_{ij} \in C^{2,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, 3$, $k(0, s) \equiv 0$, $\frac{\partial k}{\partial t}(0, s) \equiv 0$ *для* $s \in [0, T]$,

$$V_0^T(\mu) \max \left\{ \sum_{n=0}^{2} K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=0}^{2} K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_{n=0}^{2} K_n(T) \right\} < 1.$$

*Тогда существует единственное решение* $z_1, z_2, z_3 \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ *задачи* (0.0.10)–(0.0.12).

В пятом параграфе абстрактные результаты применены к вырожденной системе интегро-дифференциальных уравнений функций одной переменной.

**Третья глава** посвящена вырожденным эволюционным уравнениям с памятью. Рассмотрим задачу с заданной историей для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью

$$u(t) = u_-(t), \quad t \leq 0, \tag{0.0.13}$$

$$\frac{d}{dt} Lu(t) = Mu(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(s) u(t - s) ds + f(t), \quad t \in [0, T), \tag{0.0.14}$$

с линейными операторами $L$, $M$, $\mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, действующими из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$ и выполняется условие сильной $(L, p)$-радиальности оператора $M$. К таким задачам могут быть редуцированы начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику процессов с эффектами памяти, например, термомеханическое поведение полимеров [46], вязкоупругих жидкостей [15], и других процессов [43, 44].

В первом параграфе исследуется задача с заданной историей для невырожденного уравнения с памятью.

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, задан оператор $A : D_A \to \mathfrak{U}$, где $D_A \subset \mathfrak{U}$. Рассмотрим задачу

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{0.0.15}$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{0.0.16}$$

с заданными функциями $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $f : [0,T) \to \mathfrak{U}$, $T \in (0,+\infty]$. Обозначим

$$v(t,s) = \int\limits_{0}^{s} u(t-\tau)d\tau = \int\limits_{t-s}^{t} u(\tau)d\tau.$$

Сведем исходную задачу к задаче Коши для стационарного неоднородного уравнения

$$w'(t) = Bw(t) + g(t)$$

в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$. Здесь

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A_1 \\ J & A_2 \end{pmatrix}, \tag{0.0.17}$$

при этом $A_1 : C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \to \mathfrak{U}$, $A_2 : C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \to C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, $J : \mathfrak{U} \to C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ действуют по правилам

$$A_1 z = -\int\limits_{0}^{+\infty} \mathcal{K}'(s)z(s)ds, \quad (A_2 z)(s) = -z'(s), \quad (Jz)(s) \equiv z,\ s \geq 0.$$

**Лемма 0.0.1.** *$J \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, $\|J\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))} = 1$.*

**Лемма 0.0.2.** *Пусть $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. Тогда $A_1 \in \mathcal{L}(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U});\mathfrak{U})$.*

**Лемма 0.0.3.** *Оператор $A_2 \in \mathcal{C}l(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$ с областью определения $D_{A_2} = C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ порождает сжимающую $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов.*

**Теорема 0.0.10.** *Пусть оператор $A$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в $\mathfrak{U}$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. Тогда определенный в (0.0.17) оператор $B$ с областью определения $D_B = D_A \times C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в $\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.*

**Теорема 0.0.11.** *Пусть оператор $A$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, и выполняется одно из двух условий:*

(i) $f \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$;

(ii) $f \in C([0,T);D_A)$.

*Тогда задача* (0.0.15), (0.0.16) *имеет единственное решение*

$$u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U}).$$

**Теорема 0.0.12.** *Пусть оператор $A$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, выполняются условия $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\int\limits_0^{+\infty} A\mathcal{K}(s)u_-(-s)ds < \infty$, выполняется одно из условий:*

(i) $f \in C^2([0,T);\mathfrak{U})$, $f(0) \in D_A$;

(ii) $f \in C^1([0,T);D_A)$;

(iii) $f \in C([0,T);D_{A^2}) \cap C([0,T);D_A) \cap C^1([0,T);\mathfrak{U})$.

*Тогда задача* (0.0.15), (0.0.16) *имеет единственное решение на* $[0,T)$, *при этом оно лежит в* $C^2([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$.

Во втором параграфе данной главы получены условия однозначной разрешимости задачи (0.0.13), (0.0.14) при некотором ограничении на образы $\mathrm{im}\mathcal{K}(s)$ или при условии $\ker P \subset \ker \mathcal{K}(s)$ для $s \geq 0$, где $P$ — единица разрешающей полугруппы уравнения $\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t)$.

**Теорема 0.0.13.** *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, функция $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ ограничена, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ при $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C^p([0,T);\mathfrak{V})$,*

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(0)$$

*и выполняется одно из двух условий:*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V}); \mathcal{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$, $L_1^{-1}\mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};D_M)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};D_M))$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.13), (0.0.14) *на промежутке* $[0,T)$.

Во втором случае, когда $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, рассмотрена не только задача с заданной историей, но и задача с условием типа обобщенного условия Шоуолтера–Сидорова [21, 48]

$$P(u(t) - u_-(t)) = 0, \quad t \leq 0. \tag{0.0.18}$$

**Теорема 0.0.14.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,0)$-радиален, $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$,*

$$(I-P)u_-(0) = -\int\limits_{-\infty}^{0} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(-s)Pu_-(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(0)$$

*и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.13), (0.0.14) *на промежутке* $[0,T)$.

**Теорема 0.0.15.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,0)$-радиален, функция $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$ и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.14), (0.0.18) *на промежутке* $[0,T)$.

**Теорема 0.0.16.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,1)$-радиален, функция $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$, $\mathcal{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$ и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.14), (0.0.18) *на промежутке* $[0,T)$.

В третьем параграфе та же задача рассмотрена при более сильном условии $(L,p)$-ограниченности оператора $M$, получены условия ее однозначной разрешимости.

**Лемма 0.0.4.** *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для определенного в* (0.0.17) *оператора $B$ имеет место равенство $D_{B^n} = \mathfrak{U} \times D_{A_2^n}$.*

**Теорема 0.0.17.** *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n \in \mathbb{N}$, $u_- \in C_0^{n-1}(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $f \in C^{n-1}([0,T);\mathfrak{U})$. Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.15), (0.0.16) *на промежутке* $[0,T)$, *при этом оно принадлежит классу $C^n([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$.*

**Теорема 0.0.18.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ ограниченная функция, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ при $s \geq 0$, $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k = 0,1,\ldots,p$,*

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t)\Big|_{t=0}.$$

*Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.13), (0.0.14) *на промежутке* $[0,T)$.

**Теорема 0.0.19.** *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ $(L,p)$-*ограничен*, $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$ *при* $s \geq 0$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K} \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(l)}(0) = 0$, $l = 0,1,\dots,k-1$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(n)} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n = 0,1,\dots,k$, $k = 0,1,\dots,p$, $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k = 0,1,\dots,p$,

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p}\int_{-\infty}^{0}(H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K})^{(k)}(-s)Pu_-(s)ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{p}\frac{d^k}{dt^k}H^kM_0^{-1}(I-Q)f\bigg|_{t=0}.$$

*Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.13), (0.0.14) *на промежутке* $[0,T)$.

$$Pu(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-. \qquad (0.0.19)$$

**Теорема 0.0.20.** *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ $(L,p)$-*ограничен*, $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0^{p-2}(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K} \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(n)} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n = 0,1,\dots,k$, $k = 0,1,\dots,p$, $Qf \in C^{p-2}([0,T);\mathfrak{V})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k = 0,1,\dots,p$. *Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.14), (0.0.19) *на промежутке* $[0,T)$.

В четвертом параграфе абстрактные результаты применены к системе гравитационно-гироскопических волн
в приближении Буссинеска

Рассмотрим начально краевую задачу

$$v_n(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T), \qquad (0.0.20)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.0.21}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t) = [v(x,t), \overline{\omega}] - r(x,t) + N^2 \int\limits_0^t v_3(x,s) e_3 ds, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{0.0.22}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{0.0.23}$$

описывающей в приближении Буссинеска малые колебания равномерно вращающейся относительно вертикальной оси $Ox_3$ в поле силы тяжести идеальной несжимаемой жидкости. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$, вектор $v = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость частиц жидкости, $r$ — градиент динамического давления $P$, т. е. $r = (r_1, r_2.r_3) = (P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3})$, $e_3 = (0,0,1)$, $\omega$ — удвоенная угловая скорость, $[\cdot, \overline{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\overline{\omega} = \omega e_3 = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$, $v_3 e_3 = (0,0,v_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $v_n = \langle v, n \rangle_{\mathbb{R}^3}$, $N^2$ — частота Вяйселя — Брента, $\nabla \cdot v$ — дивергенция вектор-функции $v$. Неизвестными являются вектор-функции $v$ и $r$. Заменим уравнение несжимаемости (0.0.23) и граничное условие (0.0.20) на уравнение

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in [0,T). \tag{0.0.24}$$

**Теорема 0.0.21.** *Пусть $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $T > 0$ конечно. Тогда существует единственное решение задачи* (0.0.21), (0.0.22), (0.0.24).

В пятом и шестом параграфах абстрактные результаты пременены к интегро-дифференциальной системе уравнений Осколкова и линеаризованной системе уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта высокого порядка соответственно.

Рассмотрим задачу

$$v(x,t) = v_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{0.0.25}$$

$$v(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{0.0.26}$$

для интегро-дифференциальной системы уравнений, моделирующей динамику жидкости Кельвина–Фойгта нулевого порядка (см. [15], система (0.30)), линеаризованной в окрестности стационарного решения $\widetilde{v}=(\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2,\ldots,\widetilde{v}_d)$,

$$(1-\chi\Delta)v_t(x,t)=\nu\Delta v(x,t)-(\widetilde{v}\cdot\nabla)v(x,t)-(v\cdot\nabla)\widetilde{v}(x,t)-r(x,t)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t}K(t-s)\Delta v(x,s)ds, \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{0.0.27}$$

$$\nabla\cdot v=0, \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{0.0.28}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi,\nu\in\mathbb{R}$, помимо $\widetilde{v}$ задана функция $K:\overline{\mathbb{R}}_+\to\mathbb{R}$. Искомыми являются вектор-функции скорости $v=(v_1,v_2,\ldots,v_d)$ жидкости и градиента давления $r=(r_1,r_2,\ldots,r_d)$. Уравнение несжимаемости (0.0.28) заменим более общим уравнением

$$\Pi v(\cdot,t)=0, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{0.0.29}$$

**Теорема 0.0.22.** *Пусть $\chi\neq0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $v_-\in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathbb{H}_\sigma^2)\cap\mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathbb{H}_\sigma^2)$, $K\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, $K,K'\in\mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Тогда задача* (0.0.25)–(0.0.27), (0.0.29) *имеет единственное решение $v\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}_\sigma^2)\cap C(\mathbb{R};\mathbb{H}_\sigma^2)$, $r\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}_\pi)$.*

Теперь рассмотрим начально-краевую задачу

$$y(x,t)=y_-(x,t), \quad z(x,t)=z_-(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_-, \tag{0.0.30}$$

$$y(x,t)=0, \quad z(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{0.0.31}$$

для линеаризованной системы уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта порядка 2, 3, ... (система (0.55) в [15])

$$(1-\chi\Delta)y_t(x,t)=\nu\Delta y(x,t)-(\widetilde{y}\cdot\nabla)y(x,t)-(y\cdot\nabla)\widetilde{y}(x,t)+$$

$$+\Delta z(x,t)-r(x,t)+g(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{0.0.32}$$

$$z_t(x,t) = \alpha y(x,t) + \beta z(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)z(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (0.0.33)$$

$$\nabla \cdot y = 0, \quad \nabla \cdot z = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (0.0.34)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, постоянные $\chi, \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, заданы функции $y_-$, $z_-$, $\widetilde{y}$, $K$. Функция $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_d)$ соответствует стационарному решению системы, параметр $\chi$ характеризует упругие свойства жидкости, $\nu$ — ее вязкие свойства. Вектор-функции $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ (вектор скорости жидкости), $z = (z_1, z_2, \ldots, z_d)$ (свертка по временно́й переменной скорости и некоторой весовой функции), а также $r = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$ (градиент давления) неизвестны.

Положим

$$\mathfrak{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}^2_\sigma, \quad \mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 \times \mathbb{H}^2_\sigma = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}^2_\sigma. \quad (0.0.35)$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & 0 & 0 \\ -\chi\Pi\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \Sigma D & 0 & A \\ \Pi D & -I & \Pi\Delta \\ \alpha I & 0 & \beta I \end{pmatrix}, \mathcal{K}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(s) \end{pmatrix} \quad (0.0.36)$$

и лежат в $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$.

**Теорема 0.0.23.** *Пусть пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *определены в* (0.0.35), *а операторы* $L$ *и* $M$ *заданы формулами* (0.0.36), $\nu, \chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$. *Тогда оператор* $M$ $(L, 0)$*-ограничен, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & 0 & \Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

**Теорема 0.0.24.** *Пусть* $\nu, \chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $y_-, z_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $K \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $K, K' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $g \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$. *Тогда существует единственное решение* $y, z \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap C(\mathbb{R}; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $r \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}_\pi)$ *задачи* (0.0.30)–(0.0.34).

Седьмой параграф посвящен алгебро-дифференциальной системе уравнений с частными производными и условиям разрешимости данной системы с применением абстрактных результатов третьей главы.

Рассмотрим задачу

$$z_i(x,t) = z_{i-}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \quad i = 1,2,3, \tag{0.0.37}$$

$$(1-\theta)z_i(x,t) + \theta \frac{\partial z_i}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad i = 1,2,3. \tag{0.0.38}$$

для интегро-дифференциальной системы уравнений

$$\begin{aligned} z_{1t}(x,t) &= \triangle z_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} k_{1i}(t-s) z_i(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ z_{3t}(x,t) &= \triangle z_2(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} k_{2i}(t-s) z_i(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ 0 &= \triangle z_3(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} k_{3i}(t-s) z_i(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \end{aligned} \tag{0.0.39}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\theta \in \mathbb{R}$, заданы функции $z_{i-} : \overline{\mathbb{R}}_- \to \mathbb{R}$, $k_{ji} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,3$.

**Теорема 0.0.25.** *Пусть функция* $z_{1-} \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, *функции* $z_{2-}, z_{3-} \in C(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega))$ *ограничены,* $z_{2-}(\cdot,0) \equiv z_{3-}(\cdot,0) \equiv 0$, $k_{2i} \equiv k_{3i} \equiv 0$, $k_{1i} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $k_{1i}, k'_{1i} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $i = 1,2,3$. *Тогда задача* (0.0.37)–(0.0.39) *имеет единственное решение*

$$z_1, z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)),$$

$$z_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)).$$

В случае обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова

$$z_1(x,t) = z_{1-}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{0.0.40}$$

имеет место следующая теорема.

**Теорема 0.0.26.** *Пусть* $z_{1-} \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, $k_{j2} \equiv k_{j3} \equiv 0$, $k_{j1} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $k_{j1}, k'_{j1} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $j = 1, 2, 3$. *Тогда задача* (0.0.38)–(0.0.40) *имеет единственное решение*

$$z_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)),$$

$$z_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)), \quad z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)).$$

# 1. Вырожденные линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах

## 1.1. Относительные резольвенты

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ – банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ обозначим банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в пространстве $\mathfrak{U}$ операторов, действующих в пространство $\mathfrak{V}$. Введем также обозначения $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ будем называть соответственно *$L$-резольвентным множеством* и *$L$-спектром* оператора $M$.

Очевидно, что если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$, то $\rho^L(M) = \emptyset$.

В дальнейших рассмотрениях нам понадобятся тождества, справедливые при любых $\mu, \lambda \in \rho^L(M)$:

$$(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) = I + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}L,$$
$$(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1},$$
$$(\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1}.$$

Отметим, что в левой части первого из этих тождеств оператор непрерывен, поскольку на $D_M$ совпадает с непрерывным оператором в правой части этого тождества. Из этих тождеств вытекает, что правые и левые $L$-резольвенты коммутируют, и следуют лемма 1.1.1. и теорема 1.1.1.

**Лемма 1.1.1.** *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Тогда $L$-резольвентное множество оператора $M$ $\rho^L(M)$ открыто, а $L$-спектр оператора $M$ $\sigma^L(M)$ замкнут.*

Оператор-функции комплексного переменного $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ будем называть соответственно *$L$-резольвентой, правой* и *левой* $L$-резольвентами оператора $M$.

**Теорема 1.1.1.** *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Тогда $L$-резольвента, правая и левая $L$-резольвенты оператора $M$ аналитичны в $\rho^L(M)$.*

Отметим еще полезные тождества:

$$L(\mu L - M)^{-1}M = M(\mu L - M)^{-1}L,$$
$$(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1}L(\mu L - M)^{-1},$$
$$(\mu - \lambda)R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M) = R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M),$$
$$(\mu - \lambda)L^L_\lambda(M)L^L_\mu(M) = L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M),$$

следующие из предыдущих. Они также справедливы при любых $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ называется *цепочкой $M$-присоединенных векторов* оператора $L$, соответствующей вектору $\varphi_0$, если

$$L\varphi_q = M\varphi_{q-1}, \qquad \varphi_q \notin \ker L, \qquad q = 1, 2, \ldots$$

Индекс вектора называется его высотой в цепочке $M$-присоединенных векторов. Цепочка конечна, если существует такой $M$-присоединенный вектор $\varphi_p$, что либо $\varphi_p \notin D_M$, либо $M\varphi_p \notin \mathrm{im} L$. Высота последнего вектора в цепочке называется *длиной* цепочки. Цепочка может иметь бесконечную длину.

Линейную оболочку всех собственных и $M$-присоединенных векторов оператора $L$ назовем *$M$-корневым линеалом оператора $L$.*

**Лемма 1.1.2.** *$M$-корневой линеал оператора $L$ состоит только из $M$-присоединенных векторов оператора $L$ и нуля.*

**Лемма 1.1.3.** *Пусть $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда*

(i) $\ker(R^L_\lambda(M))^{p+1}$ *состоит из $M$-присоединенных, высоты, не большей $p$, векторов оператора $L$,* $\mathrm{im}(R^L_\lambda(M))^{p+1} = \mathrm{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$;

(ii) $\ker(L^L_\lambda(M))^{p+1} = \{M\varphi : \varphi \in \ker(R^L_\lambda(M))^{p+1} \cap D_M\}$, $\mathrm{im}(R^L_\mu(M))^{p+1} = (L^L_\mu(M))^{p+1}$.

## 1.2. Относительно $p$-радиальные операторы

Доказательства большинства утверждений данного параграфа, кроме некоторых, доказанных здесь же, могут быть найдены в работах [31, 51].

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

**Определение 1.2.1.** Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор $M$ называется $(L,p)$-*радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}$ $(a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+$ $\forall \mu \in (a,+\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\} \leq \frac{K}{(\mu-a)^{n(p+1)}}.$$

$(L,p)$-радиальный оператор $M$ на зывается сильно $(L,p)$-радиальным, если выполняется условие

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1}v\|_{\mathfrak{V}} \leq \frac{\mathrm{const}(v)}{(\mu-a)^{p+2}} \quad \forall v \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}};$$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu-a)^{p+2}}$$

при любом $\mu \in (a,+\infty)$.

**Замечание 1.2.1.** Эквивалентность условий данного определения аналогичным более сложным условиям, использованным в работах [31], [37], доказана в [33].

**Лемма 1.2.1.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален. Тогда*

(i) *длины всех цепочек $M$-присоединенных векторов оператора $L$ ограничены числом $p$;*

(ii) *множество $\ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$ совпадает с $M$-корневым пространством оператора $L$;*

(iii) $\ker(R^L_\mu(M))^{p+1}\cap\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}=\{0\}$,
$\ker(L^L_\mu(M))^{p+1}\cap\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}=\{0\}$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$, $\mathfrak{V}^0 = \ker(L^L_\mu(M))^{p+1}$; $\mathfrak{U}^1$ – замыкание образа оператора $\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ – замыкание образа $\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через $L_k$ ($M_k$) сужение оператора $L$ ($M$) на $\mathfrak{U}^k$ ($D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

**Теорема 1.2.1.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L, p)$-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* $p$.

**Замечание 1.2.2.** Проектор вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (вдоль $\mathfrak{V}^0$ на подпространство $\mathfrak{V}^1$) может быть вычислен по формуле

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}, \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}).$$

Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{1.2.1}$$

*Решением* уравнения (1.2.1) будем называть удовлетворяющую этому уравнению на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функцию $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_M)$.

*Решением* уравнения

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{1.2.2}$$

будем называть функцию $u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_M)$, для которой $Lu \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{V})$ и выполняется равенство (1.2.2).

Из определений видно, что всякое решение уравнения (1.2.1) является решением уравнения (1.2.2). Покажем, что в случае однородных уравнений обратное тоже верно.

**Лемма 1.2.2.** *Пусть оператор сильно $(L,p)$-радиален. Тогда множества решений уравнений* (1.2.1) *и* (1.2.2) *совпадают.*

**Доказательство.** С помощью теоремы 1.2.1 уравнение (1.2.1) редуцируется к системе уравнений $\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t)$ и $H\dot{w}(t) = w(t)$, а уравнение (1.2.2) — к системе $\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t)$ и $DHw(t) = w(t)$, где $v(t) = Pu(t)$, $w(t) = (I-P)u(t)$, $D = d/dt$. Утверждение леммы следует из того, что второе уравнение в каждой из систем имеет только нулевое решение $w \equiv 0$. Покажем это для последнего из уравнений. Подействуем на обе его части оператором $DH$ и получим равенства $(DH)^2w(t) = DHw(t) = w(t)$. Продолжая процесс, получим

$$w(t) = (DH)^{p+1}w(t) = D^{p+1}H^{p+1}w(t) \equiv 0. \qquad \square$$

Введем в рассмотрение также уравнение

$$L_\alpha^L(M)\dot{v}(t) = M(\alpha L - M)^{-1}v(t), \quad \alpha \in \rho^L(M), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{1.2.3}$$

на пространстве $\mathfrak{V}$. Очевидно, что всякому его решению $v$ соответствует решение $u = (\alpha L - M)^{-1}v$ уравнения (1.2.1). Обратное тоже верно при условии дифференцируемости функции $v = (\alpha L - M)u$.

Замкнутое множество $\mathcal{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1.2.1), если

(i) любое решение $u(t)$ уравнения (1.2.1) лежит в $\mathcal{P}$ поточечно;

(ii) для любого $u_0$ из некоторого линеала, плотного в $\mathcal{P}$, существует единственное решение задачи $u(0) = u_0$ для уравнения (1.2.1).

**Теорема 1.2.2.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален. Тогда фазовым пространством уравнения* (1.2.1) (*уравнения* (1.2.3)) *является множество* $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{V}^1$).

Отображение $U(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется *полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей полугруппой*) уравнения (1.2.1), если

(i) $U(s)U(t) = U(s+t)$ $\forall s, t \geq 0$;

(ii) $u(t) = U(t)u_0$ есть решение этого уравнения для любого $u_0$ из плотного в $\mathfrak{U}$ линеала;

(iii) $\operatorname{im} U(0) = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — фазовое пространство уравнения (1.2.1).

**Теорема 1.2.3.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален с константами $K \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ $(\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}) : t \geq 0\})$ уравнения* (1.2.1) (*уравнения* (1.2.3)). *При этом $U(0) = P$ $(V(0) = Q)$, для $t > 0$*

$$U(t) = s\text{-}\lim_{k\to\infty} \left( \frac{k(p+1)}{t} R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M) \right)^{k(p+1)}$$

$$\left( V(t) = s\text{-}\lim_{k\to\infty} \left( \frac{k(p+1)}{t} L^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M) \right)^{k(p+1)} \right),$$

*выполняется неравенство*

$$\forall t \geq 0 \quad \|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq Ke^{at} \quad (\|V(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \leq Ke^{at}).$$

**Замечание 1.2.3.** Определяемые аналогичным образом фазовое пространство и разрешающая полугруппа уравнения (1.2.2) в силу леммы 1.2.2 совпадают с фазовым пространством и разрешающей полугруппой для уравнения (1.2.1).

**Замечание 1.2.4.** Если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — рефлексивные банаховы пространства, то все предыдущие утверждения параграфа, использующие условие сильной $(L,p)$-радиальности оператора $M$, при замене его на условие $(L,p)$-радиальности оператора $M$ остаются в силе, кроме утверждения (iii) теоремы 1.2.1 об операторе $L_1^{-1}$. В этом случае можно утверждать лишь, что существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ [32].

**Лемма 1.2.3.** *Пусть оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ нильпотентен степени не больше $p$, функция $g \in C^{p+1}([0,T]; \mathfrak{U})$. Тогда существует единственное решение*

*$u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ уравнения*

$$H\dot{u}(t) = u(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2.4}$$

*причем $u(t) = -\sum\limits_{l=0}^{p} H^l g^{(l)}(t)$.*

**Теорема 1.2.4.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, функция $g \in C^1([0,T];\mathfrak{V})$ такова, что $(I-Q)g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V}^0)$. Тогда*

(i) *если $u_0 \in D_M$ и выполняется условие*

$$(I-P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)g)^{(k)}(0), \tag{1.2.5}$$

*то существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения*

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2.6}$$

*при этом*

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(s)L_1^{-1}Qg(t-s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)g)^{(k)}(t); \tag{1.2.7}$$

(ii) *если начальное значение $u_0 \in D_{M_1}$, то существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова $Pu(0) = u_0$ для уравнения (1.2.6), при этом решение имеет вид (1.2.7).*

**Замечание 1.2.5.** Используя изложенные выше результаты, уравнение (1.2.6) мы можем представить в виде системы двух уравнений

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}Qg(t), \tag{1.2.8}$$

$$H\dot{w}(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)g(t) \tag{1.2.9}$$

на подпространствах $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{U}^0$ соответственно. Здесь $v(t) = Pu(t)$, $w(t) = (I-P)u(t)$. В представленном в теореме 1.2.4 решении уравнения (1.2.6) первые два слагаемых разрешают уравнение (1.2.8), а оставшаяся сумма — уравнение (1.2.9) (в силу леммы 1.2.3).

**Лемма 1.2.4.** *Пусть оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ нильпотентен степени не больше $p$, функция $g \in C^p([0,T];\mathfrak{U})$. Тогда существует единственное решение ($u \in C([0,T];\mathfrak{U})$, для которого $Hu \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$) уравнения*

$$\frac{d}{dt}Hu(t) = u(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2.10}$$

*причем* $u(t) = -\sum\limits_{l=0}^{p} H^l g^{(l)}(t)$.

**Доказательство.** Как и при доказательстве леммы 1.2.2, действуя на обе части рассматриваемого уравнения оператором $DH$, получим равенства

$$(DH)^2 u(t) = DHu(t) + DHg(t) = u(t) + g(t) + DHg(t).$$

При этом левая часть равенства определена в силу того, что определена его правая часть. Продолжая процесс, получим

$$(DH)^{p+1}u(t) = D^{p+1}H^{p+1}u(t) = u(t)+g(t)+DHg(t)+\cdots+(DH)^p g(t) \equiv 0. \ \square$$

**Замечание 1.2.6.** Как видно из лемм 1.2.3, 1.2.4, для разрешимости уравнения (1.2.10) можно требовать меньшей гладкости от правой части $g$, чем в случае уравнения (1.2.4).

**Замечание 1.2.7.** Нетрудно заметить, что требования на гладкость функции $g$ можно ослабить еще сильнее, потребовав вместо условия $g \in C^p([0,T];\mathfrak{U})$ лишь выполнения условий $H^k g \in C^k([0,T];\mathfrak{U})$ при $k = 0, 1, \ldots, p$.

**Теорема 1.2.5.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, функция $g : [0,T] \to \mathfrak{V}$ такова, что $Qg \in C^1([0,T];\mathfrak{V})$, $(I-Q)g \in C^p([0,T];\mathfrak{V}^0)$. Тогда*

(i) *если $u_0 \in D_M$ и выполняется условие (1.2.5), то существует единственное решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения*

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2.11}$$

*при этом оно имеет вид* (1.2.7);

(ii) *если* $u_0 \in D_{M_1}$, *то существует единственное решение обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова* $Pu(0) = u_0$ *для уравнения* (1.2.11), *при этом решение имеет вид* (1.2.7).

**Замечание 1.2.8.** Отличие этой теоремы от теоремы 1.2.4 лишь в меньших требованиях на гладкость функции $(I-Q)g$, следует оно из того, что уравнение (1.2.11) на подпространстве $\mathfrak{U}^0$ редуцируется не к уравнению (1.2.9), а к уравнению

$$\frac{d}{dt}Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)g(t) \tag{1.2.12}$$

(см. замечание 1.2.6). На подпространстве же $\mathfrak{U}^1$ дифференцируемость функций $Pu$ и $L_1Pu$ равносильны в силу гомеоморфности оператора $L_1 : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{V}^1$.

## 1.3. Относительно $\sigma$-ограниченные операторы

Доказательства результатов данного параграфа можно найти в [19,51].

Оператор $M$ называется $(L,\sigma)$-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)),$$

т. е. $L$-спектр оператора $M$ $\sigma^L(M)$ является ограниченным множеством.

Возьмем $(L,\sigma)$-ограниченный оператор $M$, выберем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ замкнутый контур

$$\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}. \tag{1.3.1}$$

Тогда имеют смысл следующие интегралы, как интегралы от аналитических функций по замкнутому контуру:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^L(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L_\mu^L(M)d\mu. \tag{1.3.2}$$

Нетрудно проверить, что операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ являются проекторами. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{V}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{V}^1 = \operatorname{im} Q$. Тогда

$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$. Через $L_k$ ($M_k$) обозначим сужение оператора $L$ ($M$) на $\mathfrak{U}^k$ ($D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

**Теорема 1.3.1.** *Пусть оператор $M$ $(L, \sigma)$-ограничен. Тогда*

(i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{V}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1)$;

(iii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$.

При условии $(L, \sigma)$-ограниченности оператора $M$ согласно теореме 1.3.1 существует оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$. $(L, \sigma)$-ограниченный оператор $M$ назовем $(L, p)$-*ограниченным* при $p \in \mathbb{N}_0$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$. Если такого $p \in \mathbb{N}_0$ не существует, назовем его $(L, \infty)$-*ограниченным.*

**Теорема 1.3.2.** (i) *Пусть оператор $M$ $(L, 0)$-ограничен. Тогда оператор $L$ не имеет $M$-присоединенных векторов,* $\ker L = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} L = \mathfrak{V}^1$;

(ii) *пусть оператор $M$ $(L, p)$-ограничен, $p \in \mathbb{N}$. Тогда длина любой цепочки $M$-присоединенных векторов оператора $L$ ограничена числом $p$, цепочка длины $p$ при этом существует, и $M$-корневой линеал оператора $L$ совпадает с подпространством* $\mathfrak{U}^0$;

(iii) *пусть оператор $M$ $(L, \infty)$-ограничен. Тогда $M$-корневой линеал оператора $L$ содержится в* $\mathfrak{U}^0$.

Отображение $U(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется группой разрешающих операторов (или просто разрешающей группой) уравнения (1.2.1), если

(i) $U(s)U(t) = U(s + t)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U(t)u_0$ есть решение уравнения (1.2.1);

(iii) $\operatorname{im} U(0) = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — фазовое пространство уравнения (1.2.1).

Разрешающая группа называется *аналитической*, если она допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с сохранением свойства (i).

**Теорема 1.3.3.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен. Тогда существует аналитическая разрешающая группа $\{U(t)\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t\in\mathbb{R}\}$ уравнения* (1.2.1), *причем*

$$U(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

*где замкнутый контур $\gamma$ удовлетворяет условию* (1.3.1).

**Замечание 1.3.1.** Можно показать, что $(L,p)$-ограниченный оператор является сильно $(L,p)$-радиальным. Поэтому, в частности, при условии $(L,p)$-ограниченности оператора $M$ множества решений уравнений (1.2.1) и (1.2.2), а также их фазовые пространства и разрешающие группы совпадают (см. предыдущий параграф). Отсюда же, из теорем 1.2.4, 1.2.5, а также из ограниченности оператора $M_1$ согласно теореме 1.3.1 (ii) вытекают следующие утверждения.

**Теорема 1.3.4.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $Qg\in C([0,T];\mathfrak{V})$, $g_0\equiv(I-Q)g\in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$. Тогда*

(i) *для любого начального значения $u_0\in\mathfrak{U}$, удовлетворяющего условию* (1.2.5), *существует единственное решение $u\in C^1([0,T];\mathfrak{U})\cap C([0,T];D_M)$ задачи $u(0)=u_0$ для уравнения* (1.2.6), *при этом решение имеет вид* (1.2.7);

(ii) *если $u_0\in\mathfrak{U}^1$, то обобщенная задача Шоуолтера–Сидорова $Pu(0)=u_0$ для уравнения* (1.2.6) *имеет единственное решение*

$$u\in C^1([0,T];\mathfrak{U})\cap C([0,T];D_M),$$

*при этом оно имеет вид* (1.2.7).

**Теорема 1.3.5.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $Qg\in C([0,T];\mathfrak{V})$, $g_0\equiv(I-Q)g\in C^{p}([0,T];\mathfrak{V})$. Тогда*

(i) *для любого начального значения $u_0\in\mathfrak{U}$, удовлетворяющего условию* (1.2.5), *существует единственное решение задачи Коши $u(0)=u_0$ для уравнения* (1.2.11), *при этом оно имеет вид* (1.2.7);

(ii) *если* $u_0 \in \mathfrak{U}^1$, *то существует единственное решение обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова* $Pu(0) = u_0$ *для уравнения* (1.2.11), *при этом оно имеет вид* (1.2.7).

**Замечание 1.3.2.** С помощью теоремы 1.3.1 при условии $(L, p)$-ограниченности оператора $M$ уравнение (1.2.6) или (1.2.11) также можно представить в виде системы уравнений (1.2.8), (1.2.9) или системы уравнений (1.2.8), (1.2.12) соответственно, заданных на подпространствах $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{U}^0$.

**Замечание 1.3.3.** По сравнению с аналогичными утверждениями в случае сильно $(L, p)$-ограниченного оператора $M$ в теоремах 1.3.4, 1.3.5 ослаблены требования на $u_0$ и $Qg$ в силу ограниченности оператора $M_1$.

# 2. Нагруженные линейные эволюционные уравнения с вырожденным оператором при производной

## 2.1. Нагруженные уравнения в банаховом пространстве

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \tag{2.1.1}$$

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{2.1.2}$$

где $T > 0$, $\mathcal{K} : [0,T] \times [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. *Решением* задачи (2.1.1), (2.1.2) называется функция $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$, удовлетворяющая уравнению (2.1.2) на отрезке $[0,T]$ и условию (2.1.1).

Частным случаем уравнения (2.1.2) является нагруженное уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \sum_{l=1}^{l_0} c_l(t)u(t_l), \quad t \in [0,T],$$

где $l_0 \in \mathbb{N}$, $c_l(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ при $t \in [0,T]$, $l = 1,\dots,l_0$, $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_{l_0} \le T$.

Для сильно $(L,p)$-радиального оператора $M$, оператор-функции $\mathcal{K}$ из класса $C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ (непрерывной и имеющей непрерывные по совокупности переменных частные производные по первому аргументу до порядка $p+1$) и функции ограниченной вариации $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ обозначим при $T > 0$, $n = 0,1,\dots,p+1$

$$\frac{\partial^n \mathcal{K}}{\partial t^n} \equiv \mathcal{K}_t^{(n)}, \quad V_0^T(\mu) \max_{t,s\in[0,T]} \left\| \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} \equiv K_n(T),$$

$$V_0^T(\mu) \max_{t,s\in[0,T]} s \left\| \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} \equiv K_{n,1}(T),$$

$$\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \equiv C_1, \quad \|H^k M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \equiv h_k, \; k = 0,1,\dots,p,$$

$$F(T) = \max\left\{C_1 K(T)\sum_{n=0}^{p+1} K_{n,1}(T) + h_0 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T),\right.$$
$$\left. h_1 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T), \dots, h_p \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T)\right\}.$$

Здесь $V_0^T(\mu)$ — вариация функции $\mu$ на отрезке $[0,T]$,

$$K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\} = \begin{cases} K, & a \le 0; \\ Ke^{aT}, & a > 0, \end{cases}$$

$K$, $a$ — константы из определения 1.2.1. В силу теоремы 1.2.4 (i) $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \le K(T)$ при всех $t \in [0,T]$.

**Теорема 2.1.1.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$,*

$$\mathcal{K}_t^{(n)}(0,s) \equiv 0, \quad n = 0,1,\dots,p, \tag{2.1.3}$$

*$\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T]; D_M)$ задачи* (2.1.1), (2.1.2).

**Доказательство.** Согласно теореме 1.2.4 (i) для $g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$, удовлетворяющего условию (1.2.5) при заданном в условии (2.1.1) $u_0$, решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T]; D_M)$ задачи (1.2.6), (2.1.1) существует, единственно и имеет вид (1.2.7) при $t \in [0,T]$. Используя этот вид решения при заданной функции $g$, определим оператор

$$[\Phi g](t) = \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s) =$$

$$= \int_0^T \mathcal{K}(t,s)U(s)u_0 d\mu(s) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)\int_0^s U(\tau)L_1^{-1}Qg(s-\tau)d\tau d\mu(s) -$$

$$-\int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(s)d\mu(s).$$

Покажем, что при $n=0,1,\ldots,p$, $s\in[0,T]$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)f(s)d\mu(s)=\int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s)f(s)d\mu(s),$$

где $f\in C([0,T];\mathfrak{U})$. По теореме Лагранжа при некотором $\theta$, лежащем между $t$ и $t+\delta$,

$$\left\|\frac{\mathcal{K}_t^{(n)}(t+\delta,s)-\mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)}{\delta}f(s)-\mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s)f(s)\right\|_{\mathfrak{V}}\leq$$

$$\leq\left\|\mathcal{K}_t^{(n+1)}(\theta,s)-\mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\max_{\tau\in[0,T]}\|f(\tau)\|_{\mathfrak{U}}\to 0$$

при $\delta\to 0$ равномерно по $s\in[0,T]$, поскольку оператор-функция $\mathcal{K}_t^{(n+1)}(\theta,s)-\mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, а потому и равномерно непрерывна на этом компакте в смысле нормы в $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Таким образом, при $n=1,2,\ldots,p+1$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)f(s)d\mu(s)=\int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)f(s)d\mu(s).$$

Отсюда следует, что в условиях теоремы при $t\in[0,T]$, $n=0,1,\ldots,p+1$

$$[\Phi g]^{(n)}(t)=\int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)U(s)u_0d\mu(s)+\int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\int\limits_0^s U(\tau)L_1^{-1}Qg(s-\tau)d\tau d\mu(s)-$$

$$-\int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(s)d\mu(s).$$

Поэтому в силу условий (2.1.3) имеем $[\Phi g]^{(n)}(0)=0$ при $n=0,1,\ldots,p$. Так как в силу условий данной теоремы $(I-P)u_0=0$, функция $\Phi g$ удовлетворяет условию (1.2.5) с заданным $u_0\in\mathfrak{U}^1$.

Рассмотрим банахово пространство $C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$ с нормой

$$\|g\|_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \sup_{t\in[0,T]} \|g^{(k)}(t)\|_{\mathfrak{V}}$$

и метрическое пространство

$$E = \left\{ g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V}) : \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(0) = 0 \right\}$$

с метрикой $d(g,h) = \|g-h\|_{p+1}$. Оно не пусто, поскольку содержит постоянную функцию $g \equiv 0$. Покажем, что $E$ является полным метрическим пространством. Пусть $\{g_n\} \subset E$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|g_n - g_m\|_{p+1} = 0$. Тогда в силу полноты $C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$ существует $g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{p+1} = 0$. Имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q) g^{(k)}(0) \right\|_{\mathfrak{V}} \leq$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q) \left( g^{(k)}(0) - g_n^{(k)}(0) \right) \right\|_{\mathfrak{V}} \leq \max_{k=0,\dots,p} h_k \|g - g_n\|_{p+1} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому $g \in E$. Таким образом, имеет место действие оператора $\Phi : E \to E$.

Далее,

$$[\Phi g_1](t) - [\Phi g_2](t) = \int_0^T \mathcal{K}(t,s) \int_0^s U(s-\tau) L_1^{-1} Q (g_1(\tau) - g_2(\tau)) d\tau d\mu(s) -$$

$$- \int_0^T \mathcal{K}(t,s) \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)(g_1^{(k)}(s) - g_2^{(k)}(s)) d\mu(s),$$

$$\|\Phi g_1 - \Phi g_2\|_{p+1} \leq \sum_{n=0}^{p+1} \left( C_1 K(T) K_{n,1}(T) \|g_1 - g_2\|_0 + K_n(T) \sum_{k=0}^{p} h_k \|g_1 - g_2\|_k \right) \leq$$

$$\leq F(T) \|g_1 - g_2\|_{p+1}.$$

Поскольку по условию теоремы $F(T) < 1$, то $\Phi$ является сжимающим отображением на полном метрическом пространстве $E$. Следовательно, по теореме о неподвижной точке найдется единственный элемент $g^* \in E$, такой, что $g^* = \Phi g^*$. В этом случае функция

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qg^*(s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{*(k)}(t)$$

является одновременно решением задач (1.2.6), (2.1.1) и (2.1.1), (2.1.2), так как $L\dot{u}(t) - Mu(t) = g^*(t) = [\Phi g^*](t)$.

Пусть $u_1, u_2 \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ — два решения задачи (2.1.1), (2.1.2). При $i = 1, 2$ обозначим

$$g_i(t) = \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u_i(s)d\mu(s),$$

тогда

$$g_i^{(n)}(t) = \int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)u_i(s)d\mu(s),\ n = 1,\dots,p+1,$$

$g_i^{(n)}(0) = 0$ при $n = 0, 1, \dots, p$. Имеем $L\dot{u}_i - Mu_i = g_i \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$ и $\Phi g_i = g_i$, поскольку $g_i$ удовлетворяют условию (1.2.5) с $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ и поэтому

$$u_i(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qg_i(s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)g_i^{(k)}(t),\ i = 1, 2.$$

В силу единственности неподвижной точки сжимающего отображения $\Phi : E \to E$ получаем равенство $g_1 \equiv g_2$. Обозначим $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $t \in [0,T]$, тогда $L\dot{w}(t) - Mw(t) \equiv 0$, $w(0) = 0$. В силу теоремы 1.2.4 (i) $w \equiv 0$, поэтому решение задачи (2.1.1), (2.1.2) единственно. $\square$

Рассмотрим теперь обобщенную задачу Шоуолтера–Сидорова [21, 49]

$$Pu(0) = u_0, \tag{2.1.4}$$

которая для вырожденных эволюционных уравнений возникает естественным образом (см. [37] и примеры далее).

**Теорема 2.1.2.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];D_M)$ задачи* (2.1.2), (2.1.4).

Отличие от доказательства предыдущей теоремы заключается в том, что используется ссылка на теорему 1.2.4 (ii) о разрешимости задачи (1.2.6), (2.1.4), поэтому условие согласования(1.2.5) в задаче не является необходимым и в качестве метрического пространства, в котором действует сжимающий оператор прежнего вида, используется все $E = C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$.

**Замечание 2.1.1.** Условие $F(T) < 1$ в теоремах 2.1.1 и 2.1.2 определяется только операторами $L$, $M$, оператор-функцией $\mathcal{K}$ и вариацией функции $\mu$ и не зависит от $u_0$.

**Замечание 2.1.2.** Пусть $\mu : [0,\widehat{T}] \to \mathbb{R}$. Можно заметить, что при некоторых дополнительных условиях можно добиться выполнения неравенства $F(T) < 1$ в предположении справедливости остальных условий теоремы 2.1.1 (или 2.1.2) за счет уменьшения $T$ в пределах полуинтервала $(0,\widehat{T}]$. Действительно, $\lim\limits_{T\to 0+} K_{n,1}(T) = 0, \quad n = 0,1,\dots,p+1$, в силу условий (2.1.3) $\lim\limits_{T\to 0+} K_n(T) = 0, \quad n = 0,\dots,p$, поэтому

$$F(0+) \equiv \lim_{T\to 0+} F(T) = \max_{k=0,\dots,p} h_k \left|\lim_{t\to 0+}\mu(t) - \mu(0)\right| \left\|\mathcal{K}_t^{(p+1)}(0,0)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}.$$

Поэтому упомянутым дополнительным условием является выполнение неравенства $F(0+) < 1$, которое с очевидностью выполняется, например, если функция $\mu$ непрерывна в нуле справа или $\mathcal{K}_t^{(p+1)}(0,0) = 0$. Тогда при некотором малом $T$ решение задачи (2.1.1), (2.1.2) (или (2.1.2), (2.1.4)) будет существовать на отрезке $[0,T]$.

**Замечание 2.1.3.** В случае, когда функция $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ монотонна, можно условие $F(T) < 1$ теоремы 2.1.1 (2.1.2) заменить на менее жесткое условие

$\widehat{F}(T) < 1$, где

$$\widehat{F}(T) = \max\left\{C_1 K(T)\sum_{n=0}^{p+1}\widehat{K}_{n,1}(T) + h_0\sum_{n=0}^{p+1}\widehat{K}_n(T),\right.$$

$$\left. h_1\sum_{n=0}^{p+1}\widehat{K}_n(T), \ldots, h_p\sum_{n=0}^{p+1}\widehat{K}_n(T)\right\},$$

$$\widehat{K}_n(T) \equiv \max_{t\in[0,T]}\int_0^T \left\|\mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} d|\mu(s)|,$$

$$\widehat{K}_{n,1}(T) \equiv \max_{t\in[0,T]}\int_0^T s\left\|\mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} d|\mu(s)|$$

при $T > 0$, $n = 0, 1, \ldots, p+1$.

**Замечание 2.1.4.** Решением уравнения

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{2.1.5}$$

в котором оператор $L$ стоит под знаком производной, назовем функцию $u \in C([0,T]; D_M)$, для которой $Lu \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ и выполняется равенство (2.1.5) на отрезке $[0,T]$. Соображения, изложенные в замечании 1.2.8 позволяют сразу утверждать, что в условиях теоремы 2.1.1 задача Коши (2.1.1), а в условиях теоремы 2.1.2 обобщенная задача Шоуолтера–Сидорова (2.1.4) для уравнения (2.1.5) однозначно разрешимы. Более того, в этих теоремах условие $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ можно ослабить, потребовав, чтобы $\mathcal{K} \in C^{\max\{1,p\},0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$. Если же оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, то для разрешимости этих задач достаточно взять оператор-функцию $\mathcal{K} \in C^{p,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ и начальное значение $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ при сохранении остальных условий теорем (см. замечание 1.3.3).

## 2.2. Нагруженное псевдопараболическое уравнение

В качестве примера применения теоремы 2.1.1 рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.2.1}$$

$$z(x,t) = \Delta z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2.2.2}$$

для модифицированного уравнения Дзекцера, возникающего в теории фильтрации [4],

$$\begin{gathered}(\lambda - \Delta) z_t(x,t) = \triangle z(x,t) - \beta\Delta^2 z(x,t) + \\ + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega k(x,y,t,s) z(y,s) dy d\mu(s),\ (x,t) \in \Omega \times [0,T],\end{gathered} \tag{2.2.3}$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ имеет гладкую границу, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$.

Пусть

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\},$$

$$H_\partial^4(\Omega) = \{u \in H^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}.$$

Чтобы редуцировать задачу (2.2.1)–(2.2.3) к задаче (2.1.1), (2.1.2), введем в рассмотрение семейство интегральных операторов $\mathcal{K}(t,s) : H_0^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $t, s \in [0,T]$, вида

$$[\mathcal{K}(t,s)u](\cdot) = \int\limits_\Omega k(\cdot, y, t, s) u(y) dy.$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\|\mathcal{K}(t,s)u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int\limits_\Omega \left| \int\limits_\Omega k(x,y,t,s) u(y) dy \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |k(x,y,t,s)|^2 dy dx \int\limits_\Omega |u(y)|^2 dy \leq \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |k(x,y,t,s)|^2 dy dx \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2,$$

$$\|\mathcal{K}(t,s)\|_{\mathcal{L}(H_0^2(\Omega);L_2(\Omega))} \leq \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}, \quad t, s \in [0,T]. \tag{2.2.4}$$

Обозначим через $\lambda_m$, $m \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора Лапласа, определенного на $H_0^2(\Omega)$ и действующего в $L_2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Кроме того, пусть $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ — ортоноромированная система соответствующих собственных функций этого оператора. Предполагается, что $\lambda_m = \lambda$ при некоторых $m$, т. е. уравнение (2.2.3) не разрешимо относительно $z_t$.

**Лемма 2.2.1.** *Пусть $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $k(x,y,t,s) \in C([0,T] \times [0,T]; L_2(\Omega \times \Omega))$, $k_t(x,y,t,s) \in C([0,T] \times [0,T]; L_2(\Omega \times \Omega))$. Тогда*

$$F(T) \leq V_0^T(\mu) \left( \sup_{\lambda \neq \lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|} \max\left\{1, \sup_{\lambda \neq \lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|}\right\} \times \right.$$

$$\times \max\left\{1, \exp\left(T \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m}\right)\right\} \times$$

$$\times \left( \max_{t,s \in [0,T]} s\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s \in [0,T]} s\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} \right) +$$

$$\left. + \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda - \beta\lambda^2|} \left( \max_{t,s \in [0,T]} \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s \in [0,T]} \|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} \right) \right). \tag{2.2.5}$$

**Доказательство.** Возьмем пространства $\mathfrak{U} = H_0^2(\Omega)$, $\mathfrak{V} = L_2(\Omega)$, операторы $L = \lambda - \triangle$, $M = \Delta - \beta\Delta^2$ с областью определения $D_M = H_\partial^4(\Omega)$. Известно [37], что в случае $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, такой оператор $M$ является сильно $(L,0)$-радиальным.

Оценим величину $F(T)$ для задачи (2.2.1)–(2.2.3) согласно теореме 2.1.1, используя результаты работы [37]. Имеем

$$L_1^{-1}Q = \sum_{\lambda_m \neq \lambda}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_m \rangle \varphi_m}{\lambda - \lambda_m},$$

поэтому для $v \in L_2(\Omega)$

$$\|L_1^{-1}Qv\|^2_{H^2(\Omega)} = \sum_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{(1+\lambda_m^2)|\langle v, \varphi_m\rangle|^2}{|\lambda - \lambda_m|^2},$$

$$C_1 = \|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega);H^2(\Omega))} = \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|}.$$

Аналогично,

$$M_0^{-1}(I-Q) = \sum_{\lambda_m = \lambda} \frac{\langle \cdot, \varphi_m\rangle \varphi_m}{\lambda - \beta\lambda^2},\ h_0 = \|M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega);H_0^2(\Omega))} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda - \beta\lambda^2|},$$

$$a = \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m}, \quad K = \max\left\{1, \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|}\right\},$$

$$K(T) = \max\left\{1, \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|}, \exp\left(T \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m}\right),\right.$$

$$\left. \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|} \exp\left(T \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m}\right)\right\},$$

$$K_0(T) \leq V_0^T(\mu) \max_{t,s \in [0,T]} \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)},$$

$$K_1(T) \leq V_0^T(\mu) \max_{t,s \in [0,T]} \|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)},$$

$$K_{0,1}(T) \leq V_0^T(\mu) \max_{t,s \in [0,T]} s\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)},$$

$$K_{1,1}(T) \leq V_0^T(\mu) \max_{t,s \in [0,T]} s\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}.$$

При этом используется равенство (2.2.4). Лемма доказана. □

Обозначим правую часть неравенства (2.2.5) через $\widetilde{F}(T)$.

**Теорема 2.2.1.** *Пусть $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $z_0 \in H^4_\partial(\Omega)$, $\langle z_0, \varphi_m\rangle = 0$ при $m \in \mathbb{N}$, для которых $\lambda_m = \lambda$, $k(x,y,t,s) \in C([0,T]\times[0,T]; L_2(\Omega\times\Omega))$, $k_t(x,y,t,s) \in C([0,T]\times[0,T]; L_2(\Omega\times\Omega))$, $k(x,y,0,s) \equiv 0$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, выполняется условие $\widetilde{F}(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $z \in C^1([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H^4_\partial(\Omega))$ задачи (2.2.1)–(2.2.3).*

**Доказательство.** Очевидно, что функция $z_0$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1.1 на функцию $u_0$ из условия (2.1.1) в терминах задачи (2.2.1)–(2.2.3).

В силу неравенства (2.2.4) функции $k(\cdot,\cdot,t,s), k_t(\cdot,\cdot,t,s) \in L_2(\Omega\times\Omega)$ определяют операторы $\mathcal{K}(t,s), \mathcal{K}_t^{(1)}(t,s) \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega); L_2(\Omega))$ при $t,s\in[0,T]$. Выполнение остальных условий на оператор-функцию $\mathcal{K}$ из теоремы 2.1.1 следует из свойств функции $k$. Осталось применить теорему 2.1.1, учитывая, что в силу леммы 2.2.1 $F(T)\le\widetilde{F}(T)<1$. $\Box$

Для такого же уравнения с более простым интегральным оператором

$$(\lambda-\Delta)z_t(x,t)=\triangle z(x,t)-\beta\Delta^2 z(x,t)+\int\limits_0^T k(t,s)z(x,s)d\mu(s),\ \ (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{2.2.6}$$

в той же области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ рассмотрим краевые условия (2.2.2) и начальное условие

$$(\lambda-\Delta)(z(x,0)-z_0(x))=0,\quad x\in\Omega. \tag{2.2.7}$$

Тогда рассматриваемая задача (2.2.2), (2.2.6), (2.2.7) представляет собой частный случай обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова (2.1.2), (2.1.4), поскольку проектор $P$ имеет вид $P=\sum\limits_{\lambda_m\ne\lambda}\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m$ [37] и поэтому $\ker(\lambda-\Delta)=\ker P$. Операторы $\mathcal{K}(t,s): H_0^2(\Omega)\to L_2(\Omega)$, $t,s\in[0,T]$, в данном случае имеют вид

$$[\mathcal{K}(t,s)u](\cdot)=k(t,s)u(\cdot),\quad \|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^2(\Omega);L_2(\Omega))}\le|k(t,s)|.$$

Для уравнения (2.2.6) построим функцию

$$\widetilde{F}(T)=V_0^T(\mu)\left(\sup_{\lambda\ne\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\max\left\{1,\sup_{\lambda\ne\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\}\times\right.$$
$$\times\max\left\{1,\exp\left(T\sup_{\lambda_m\ne\lambda}\frac{\lambda_m-\beta\lambda_m^2}{\lambda-\lambda_m}\right)\right\}\left(\max_{t,s\in[0,T]}s|k(t,s)|+\max_{t,s\in[0,T]}s|k_t(t,s)|\right)+$$
$$\left.+\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda-\beta\lambda^2|}\left(\max_{t,s\in[0,T]}|k(t,s)|+\max_{t,s\in[0,T]}|k_t(t,s)|\right)\right).$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.2.1, с помощью теоремы 2.1.2 нетрудно получить следующий результат.

**Теорема 2.2.2.** *Пусть $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $z_0 \in H^4_\partial(\Omega)$, $k \in C([0,T] \times [0,T];\mathbb{R})$, $k_t \in C([0,T] \times [0,T];\mathbb{R})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $\widetilde{F}(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $z \in C^1([0,T];H^2_0(\Omega)) \cap C([0,T];H^4_\partial(\Omega))$ задачи* (2.2.2), (2.2.6), (2.2.7).

Отметим лишь, что $(\lambda - \Delta)z_0 \in \mathfrak{U}^1$, так как $(I - P)(\lambda - \Delta)z_0 = 0$. Поэтому и предположения теоремы 2.1.2 на $u_0 = (\lambda - \Delta)z_0$ из условия (2.1.4) выполняются.

## 2.3. Некоторые частные случаи и обобщения

Заметим, что в конкретных задачах общее для уравнений рассмотренного типа достаточное условие однозначной разрешимости $F(T) < 1$, и тем более условие $\widetilde{F}(T) < 1$, не является необходимым и может быть ослаблено. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример.

Пусть $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $\lambda = -1$, $\beta = 2$, рассмотрим частный случай задачи (2.2.2), (2.2.6), (2.2.7)

$$z(x,0) + z_{xx}(x,0) - z_0(x) - z_{0xx}(x,0) = 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{2.3.8}$$

$$z(0,t) = z_{xx}(0,t) = z(\pi,t) = z_{xx}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.9}$$

$$\begin{aligned} -z_t(x,t) - z_{txx}(x,t) = z_{xx}(x,t) - 2z_{xxxx}(x,t) + \\ + \sum_{l=1}^{l_0} c_l(t) z(x,t_l),\ (x,t) \in (0,\pi) \times [0,T], \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

$c_l(0) = 0$ при $l = 1,\ldots,l_0$. Тогда (см. [37]) $\lambda_m = -m^2$, $\varphi_m = \sin mx$ при $m \in \mathbb{N}$,

$$C_1 = \|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(L_2(0,\pi);H^2_0(0,\pi))} = \sup_{m=2,3,\ldots} \frac{\sqrt{1+m^4}}{m^2-1} = \frac{\sqrt{17}}{3},$$

$$h_0 = \|M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(L_2(0,\pi);H^2_0(0,\pi))} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$a = \sup_{m=2,3,\ldots} \frac{-m^2 - 2m^4}{m^2-1} = -12, \quad K(T) = K = \sup\left\{1, \frac{\sqrt{17}}{3}\right\} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Доказать существование решения задачи (2.3.8)–(2.3.10) по аналогии с теоремой 2.1.2 можно с помощью оператора

$$[\Phi_1 g](t)=\sum_{l=1}^{l_0} c_l(t)u(t_l)=\sum_{l=1}^{l_0} c_l(t)U(t_l)u_0+\sum_{l=1}^{l_0} c_l(t)\int\limits_0^{t_l} U(\tau)L_1^{-1}Qg(t_l-\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{l=1}^{l_0} c_l(t)M_0^{-1}(I-Q)g(t_l).$$

Здесь учитывается, что $p=0$. Условие того, что $\Phi_1$ является сжимающим в $C^1([0,T];L_2(\Omega))$, будет иметь вид

$$\widehat{F}(T)=\sum_{l=1}^{l_0}(C_1K(T)t_l+h_0)\left(\max_{t\in[0,T]}|c_l(t)|+\max_{t\in[0,T]}|c_l'(t)|\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{l_0}\left(\frac{17}{9}t_l+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(\max_{t\in[0,T]}|c_l(t)|+\max_{t\in[0,T]}|c_l'(t)|\right)<1.$$

Можно заметить, что в данной ситуации удобно считать, что функция $\mu$ постоянна, за исключением конечного числа $l_0$ единичных скачков и величина $\widehat{F}(T)$ определена в замечании 2.1.2 для случая монотонной функции $\mu$. При этом $k(t,t_l)=c_l(t)$ при $l=1,\dots,l_0$. В то же время

$$\widetilde{F}(T)=\frac{17l_0}{9}\left(\max_{t\in[0,T],\,l=1,\dots,l_0} t_l|c_l(t)|+\max_{t\in[0,T],\,l=1,\dots,l_0} t_l|c_l'(t)|\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{2}l_0}{3}\left(\max_{t\in[0,T],\,l=1,\dots,l_0}|c_l(t)|+\max_{t\in[0,T],\,l=1,\dots,l_0}|c_l'(t)|\right)>\widehat{F}(T),$$

если, например, $l_0\geq 2$ и не все $|c_l|$ одинаковы.

В случае задачи (2.3.8), (2.3.9) для простейшего уравнения вида (2.3.10) – уравнения

$$-z_t(x,t)-z_{txx}(x,t)=z_{xx}(x,t)-2z_{xxxx}(x,t)+cz(x,1),\ (x,t)\in(0,\pi)\times[0,1], \tag{2.3.11}$$

имеем $\widehat{F}(T)=|c|\left(\frac{17}{9}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. Поэтому при $|c|<\frac{9}{17+3\sqrt{2}}$ по теореме 2.1.2 гарантированно существует единственное решение задачи (2.3.8), (2.3.9), (2.3.11) на отрезке $[0,1]$.

**Замечание 2.3.1.** Таким же образом, как исследована начально-краевая задача для уравнения Дзекцера, могут быть исследованы начально-краевые задачи вида

$$P_n(A)z_t(x,t) = Q_m(A)z(x,t) + \int\limits_0^T (\mathcal{K}(t,s)z)(x)d\mu(s),\ (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{2.3.12}$$

$$B_l A^k z(x,t) = 0,\ l = 1,2,\ldots,r,\ k = 1,2,\ldots,\max\{n,m\},\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2.3.13}$$

$$R(z(x,0) - z_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.3.14}$$

где $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_m(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j\lambda^j$ — многочлены, для которых $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m$, $c_n d_m \neq 0$, набор операторов $A$, $B_1,\ldots B_r$ — регулярно эллиптический [25], где

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha|\leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(x) = \sum_{|\alpha|\leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad b_{l\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1,\ldots,r,$$

$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1,2,\ldots,d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Оператор $A_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{A_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ [25], действующий как $A_1 u = Au$ для $u \in D_{A_1}$, пусть является самосопряженным и имеет ограниченный справа спектр $\sigma(A_1)$. Через $R$ в (2.3.14) обозначен тождественный оператор в случае условия Коши и $P_n(A)$ для задания условия Шоуолтера–Сидорова, $\mathcal{K}(t,s)$ — одно из семейств интегральных операторов, рассмотренных в этом параграфе. Положив

$$\mathfrak{U} = \{u \in H^{2rn}(\Omega) : B_l A^k u(x) = 0,\ k = 0,\ldots,n-1,\ l = 1,\ldots,r,\ x \in \partial\Omega\},$$

$$\mathfrak{V} = L_2(\Omega), \quad L = P_n(A), \quad M = Q_m(A),$$

$$D_M = \{u \in H^{2rm}(\Omega) : B_l A^k u(x) = 0,\ k = 0, \ldots, m-1,\ l = 1, \ldots, r,\ x \in \partial\Omega\}$$

и потребовав условия отсутствия общих корней у многочленов $P_n$ и $Q_m$ среди собственных значений оператора $A_1$, а также выполнения одного из условий $n \geq m$, либо $(-1)^{m-n}\mathrm{Re}(d_m/c_n)$, получим согласно результатам [37] сильную $(L,0)$-радиальность оператора $M$. Тогда нетрудно получить результаты, аналогичные теоремам 2.2.1, 2.2.2.

## 2.4. Алгебро-интегро-дифференциальная система уравнений с частными производными

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z_1(x,0) = z_{10}(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.4.1}$$

$$z_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \quad i = 1,2,3, \tag{2.4.2}$$

для модельной интегро-дифференциальной системы уравнений

$$\begin{gathered} z_{1t}(x,t) = \triangle z_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{1i}(t,s) z_i(x,s) d\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ z_{3t}(x,t) = \triangle z_2(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{2i}(t,s) z_i(x,s) d\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ 0 = \triangle z_3(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{3i}(t,s) z_i(x,s) d\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \end{gathered} \tag{2.4.3}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, заданы функции $z_{10} : \Omega \to \mathbb{R}$, $k_{ji} : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,3$.

Положим $H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^3$, $D_M = \left(H_0^2(\Omega)\right)^3$,

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}(t,s)=\begin{pmatrix} k_{11}(t,s) & k_{12}(t,s) & k_{13}(t,s)\\ k_{21}(t,s) & k_{22}(t,s) & k_{23}(t,s)\\ k_{31}(t,s) & k_{32}(t,s) & k_{33}(t,s)\end{pmatrix}$$

при $t,s\in[0,T]$. Тогда $u(t)=\mathrm{col}(z_1(\cdot,t),z_2(\cdot,t),z_3(\cdot,t))$. В работе [17] показана сильная $(L,1)$-радиальность оператора $M$ в данной ситуации и найдены подпространства

$$\mathfrak{U}^0=\mathfrak{V}^0=\{0\}\times L_2(\Omega)\times L_2(\Omega),\quad \mathfrak{U}^1=\mathfrak{V}^1=L_2(\Omega)\times\{0\}\times\{0\}.$$

При этом имеем $a=0$, $K=1$, поэтому $K(T)\equiv 1$, $L_1^{-1}=I$, $C_1=1$,

$$M_0^{-1}=\begin{pmatrix}\triangle^{-1} & 0\\ 0 & \triangle^{-1}\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}0 & \triangle^{-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$M_0^{-1}(I-Q)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \triangle^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \triangle^{-1}\end{pmatrix},\quad HM_0^{-1}(I-Q)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \triangle^{-2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$h_k=\|H^kM_0^{-1}(I-Q)\|=\frac{1}{|\lambda_1|^{k+1}},\quad k=0,1,$$

где $\lambda_1$ — первое, а значит и наименьшее по модулю собственное значение оператора Лапласа с условием Дирихле на границе,

$$K_n(T)=V_0^T(\mu)\max_{t,s\in[0,T]}\max_{i,j=1,2,3}\left|\frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t,s)\right|,\quad n=0,1,2,$$

$$K_{n,1}(T)=V_0^T(\mu)\max_{t,s\in[0,T]}\left\{s\max_{i,j=1,2,3}\left|\frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t,s)\right|\right\},\quad n=0,1,2.$$

Отсюда с помощью теоремы 2.1.2 сразу получим следующее утверждение.

**Теорема 2.4.1.** *Пусть $z_{10}\in H_0^2(\Omega)$, $\mu:[0,T]\to\mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $k_{ij}\in C^{2,0}([0,T]\times[0,T];\mathbb{R})$, $i,j=1,2,3$,*

$$V_0^T(\mu)\max\left\{\sum_{n=0}^{2}K_{n,1}(T)+\frac{1}{|\lambda_1|}\sum_{n=0}^{2}K_n(T),\frac{1}{|\lambda_1|^2}\sum_{n=0}^{2}K_n(T)\right\}<1.$$

*Тогда существует единственное решение*

$$z_1, z_2, z_3 \in C^1([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^2(\Omega))$$

*задачи* (2.4.1)–(2.4.3).

В частном случае получим следующий результат.

**Следствие 2.4.1.** *Пусть* $z_{10} \in H_0^2(0,\pi)$, $l_{ij} \in C^{2,0}([0,1]\times[0,1];\mathbb{R})$, $i,j = 1,2,3,$

$$\sum_{n=0}^{2} \max_{t\in[0,1]} \max_{i,j=1,2,3} \left| \frac{\partial^n l_{ij}}{\partial t^n}(t) \right| < 1.$$

*Тогда существует единственное решение*

$$z_1, z_2, z_3 \in C^1([0,1]; L_2(0,\pi)) \cap C([0,T]; H_0^2(0,\pi))$$

*задачи*

$$z_1(x,0) = z_{10}(x), \quad x \in (0,\pi),$$

$$z_i(0,t) = z_i(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = 1,2,3,$$

$$z_{1t}(x,t) = \triangle z_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} l_{1i}(t) z_i(x,1), \quad (x,t) \in (0,\pi)\times[0,1],$$

$$z_{3t}(x,t) = \triangle z_2(x,t) + \sum_{i=1}^{3} l_{2i}(t) z_i(x,1), \quad (x,t) \in (0,\pi)\times[0,1],$$

$$0 = \triangle z_3(x,t) + \sum_{i=1}^{3} l_{3i}(t) z_i(x,1), \quad (x,t) \in (0,\pi)\times[0,1].$$

Доказательство. Здесь $H_0^2(0,\pi) = \{v \in L_2(0,\pi) : v(0) = v(\pi) = 0\}$. Возьмем в предыдущей теореме $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $T = 1$, $\mu \equiv 0$ на $[0,1)$, $\mu(1) = 1$, $k_{ij}(t,s) = l_i(t)$ при $(t,s) \in [0,1]\times[0,1]$. Тогда $V_0^1(\mu) = 1$, $\lambda_1 = -1$ и по теореме 2.4.1 получим требуемое. □

Аналогичным образом нетрудно получить результат о разрешимости задачи (2.4.2), (2.4.3) с начальными условиями Коши

$$z_i(x,0) = z_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{2.4.4}$$

**Теорема 2.4.2.** *Пусть* $z_{i0} \in H_0^2(\Omega)$, $i = 1,2,3$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации,* $k_{ij} \in C^{2,0}([0,T] \times [0,T];\mathbb{R})$, $i,j = 1,2,3$, $k_{ij}(0,s) \equiv 0$, $\frac{\partial k_{ij}}{\partial t}(0,s) \equiv 0$ *для* $s \in [0,T]$,

$$V_0^T(\mu) \max\left\{\sum_{n=0}^{2} K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|}\sum_{n=0}^{2} K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2}\sum_{n=0}^{2} K_n(T)\right\} < 1.$$

*Тогда задача* (2.4.2)–(2.4.4) *имеет единственное решение*

$$z_1, z_2, z_3 \in C^1([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^2(\Omega)).$$

## 2.5. Вырожденная система интегро-дифференциальных уравнений функций одной переменной

Пусть $B$ и $C$ — квадратные матрицы порядка $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rang} B = k$, $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $K(t,s)$ — квадратная матрица порядка $d \in \mathbb{N}$, зависящая от двух параметров $t, s \in [0,T]$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.5.1}$$

для алгебро-дифференциальной системы уравнений для функций одной переменной

$$B\dot{u}(t) = Cu(t) + \int_0^T K(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{2.5.2}$$

где $u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_d(t))$, $u_0 = \mathrm{col}(u_{10}, u_{20}, \dots u_{d0})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Задача (2.5.1), (2.5.2) совпадает с задачей (2.1.1), (2.1.2), если положить $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathbb{R}^d$, а действие операторов $L$, $M$ и $\mathcal{K}(t,s)$ отождествить с действием матриц $B$, $C$ и $K(t,s)$ соответственно.

**Лемма 2.5.1.** [51, с. 122]. *Пусть существует такое* $\alpha \in \mathbb{C}$, *что* $\det(\alpha B - C) \neq 0$. *Тогда оператор* $M$ *сильно* $(L,p)$*-радиален при некотором* $p \in \{0, \dots, d-1\}$.

Для данного случая (см. [51, с. 89–90]) проектор $P$ может быть вычислен по формуле

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda B - C)^{-1} B d\lambda$$

с помощью теории вычетов. В условиях леммы 2.5.1 из теоремы 2.1.1 следует, что если начальное значение $u_0 \in \mathrm{im}P$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T]; \mathbb{R}^{d\times d})$, $F(T) < 1$, то существует единственное решение задачи (2.5.1), (2.5.2).

Рассмотрим для определенности при $d = 3$ задачу

$$u_i(0) = u_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.5.3}$$

$$\begin{gathered}
\dot{u}_1(t) = u_1(t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{1i}(t,s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0,T], \\
\dot{u}_3(t) = u_2(t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{2i}(t,s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0,T], \\
0 = u_3(t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{3i}(t,s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0,T],
\end{gathered} \tag{2.5.4}$$

близкую по форме к задаче (2.4.1)–(2.4.3). Рассуждая, как в предыдущем параграфе, получим

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = I, \quad (\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\mu \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (R_\mu^L(M))^2 = (L_\mu^L(M))^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(R_\mu^L(M))^2 (\mu L - M)^{-1} = M(\mu L - M)^{-1} (L_\mu^L(M))^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому оператор $I$ сильно $(L,1)$-радиален с константами $a = 1$, $K = 1$, $K(T) = e^T$, $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{V}^0 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{V}^1 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, $L_1^{-1} = I$, $C_1 = h_0 = h_1 = 1$.

**Утверждение 2.5.1.** *Пусть* $u_{i0} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации,* $k_{ij} \in C^{2,0}([0,T] \times [0,T]; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, 3$,

$$k_{ij}(0,s) \equiv 0, \ \frac{\partial k_{ij}}{\partial t}(0,s) \equiv 0, \ s \in [0,T], \tag{2.5.5}$$

$$V_0^T(\mu)\sum_{n=0}^{2}\max_{t,s\in[0,T]}\max_{i,j=1,2,3}\left|\frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t,s)\right|<1.$$

*Тогда существует единственное решение* $u_1, u_2, u_3 \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ *задачи* (2.5.3), (2.5.4).

Для задачи с условием Шоуолтера–Сидорова $Pu(0) = u_0$ аналогичное утверждение справедливо и без условий (2.5.5).

# 3. Исследование вырожденных эволюционных уравнений с памятью методами теории полугрупп операторов

Через $D_M$, как и ранее, обозначается область определения оператора $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Снабженное нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{U}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{V}}$ это множество является банаховым пространством в силу замкнутости $M$.

Обозначим также $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_- = \{0\} \cup \mathbb{R}_-$, $\mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ — множество функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, для которых несобственный интеграл Римана $\int_0^{+\infty} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}} dt$ сходится. Через $C_0^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ обозначим банахово пространство $k$ раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных на $\overline{\mathbb{R}}_+$ вместе с $k$ первыми производными функций, удовлетворяющих равенствам $u^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, 1, \dots, k$, с нормой

$$\|u\|_{C_0^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \geq 0} \|u^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{U}}.$$

При этом для краткости $C_0^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \equiv C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

## 3.1. Невырожденное уравнение с памятью

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, задан оператор $A : D_A \to \mathfrak{U}$, где $D_A \subset \mathfrak{U}$. Рассмотрим задачу

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.1.1}$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{3.1.2}$$

с заданными функциями $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $f : [0,T) \to \mathfrak{U}$, $T \in (0,+\infty]$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathcal{K}(t-s)u_-(s)ds + \int\limits_{0}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds.$$

Решением задачи (3.1.1), (3.1.2) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой справедливо условие (3.1.1) и при каждом $t \in [0,T)$ выполняется равенство (3.1.2).

Следуя работам [43–45], введем в рассмотрение функцию

$$v(t,s) = \int\limits_0^s u(t-\tau)d\tau = \int\limits_{t-s}^t u(\tau)d\tau,$$

тогда при $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$

$$\int\limits_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}(s)\frac{\partial}{\partial s}v(t,s)ds =$$

$$= \mathcal{K}(s)v(t,s)\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^0 u_-(\tau)d\tau + \int\limits_0^t u(\tau)d\tau\right)\lim_{s\to+\infty}\mathcal{K}(s) - \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds.$$

Получено уравнение

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) - \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds + f(t). \tag{3.1.3}$$

Вычислим частную производную

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^s u(t-\tau)d\tau = -\int\limits_0^s \frac{\partial}{\partial \tau}u(t-\tau)d\tau = u(t)-u(t-s) = u(t)-\frac{\partial}{\partial s}v(t,s). \tag{3.1.4}$$

Таким образом, задача (3.1.1) для уравнения (3.1.2) сведена к задаче Коши

$$u(0) = u_-(0), \quad v(0,s) = \int\limits_{-s}^0 u_-(\tau)d\tau,\ \ s \geq 0,$$

для системы уравнений (3.1.3), (3.1.4), которую можно записать в виде неоднородного уравнения

$$w'(t) = Bw(t) + g(t)$$

с постоянным оператором $B$ в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$. Здесь

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A_1 \\ J & A_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1.5}$$

при этом $A_1 : C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}) \to \mathfrak{U}$, $A_2 : C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}) \to C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$, $J : \mathfrak{U} \to C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ действуют по правилам

$$A_1 z = -\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}'(s) z(s) ds, \quad (A_2 z)(s) = -z'(s), \quad (Jz)(s) \equiv z, \; s \geq 0.$$

**Лемма 3.1.1.** *$J \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}))$, $\|J\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}))} = 1$.*

**Доказательство.** При $z \in \mathfrak{U}$ имеем

$$\|Jz\|_{C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})} = \sup_{s \geq 0} \|(Jz)(s)\|_{\mathfrak{U}} = \|z\|_{\mathfrak{U}}. \qquad \square$$

**Лемма 3.1.2.** *Пусть $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. Тогда $A_1 \in \mathcal{L}(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}); \mathfrak{U})$.*

**Доказательство.** Для $z \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$

$$\|A_1 z\|_{\mathfrak{U}} \leq \sup_{\tau \geq 0} \|z(\tau)\|_{\mathfrak{U}} \int\limits_0^{+\infty} \|\mathcal{K}'(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \, ds. \qquad \square$$

Полугруппу операторов $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ будем называть сжимающей, если $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq 1$ для всех $t \geq 0$.

**Лемма 3.1.3.** *Оператор $A_2 \in \mathcal{C}l(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}))$ с областью определения $D_{A_2} = C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ порождает сжимающую $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов.*

**Доказательство.** При $\mu > 0$ и $z_2 \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ уравнение $(\mu I - A_2)z_1 = z_2$ относительно $z_1 \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ представляет собой дифференциальное уравнение $\mu z_1 + z_1' = z_2$. Соответствующее однородное уравнение $\mu z_1 + z_1' = 0$ имеет общее решение $z_1(s) = Ce^{-\mu s}$, поэтому решение неоднородного уравнения будем искать в виде $z_1(s) = C(s)e^{-\mu s}$. Подставив его в исходное уравнение, получим равенство $C'(s)e^{-\mu s} = z_2$, поэтому

$$C(s) = C_1 + \int\limits_0^s z_2(\tau)e^{\mu\tau}d\tau, \quad z_1(s) = C_1e^{-\mu s} + \int\limits_0^s e^{\mu(\tau-s)}z_2(\tau)d\tau.$$

Поскольку $z_1 \in D_{A_2}$, то $z_1(0) = 0$ и $C_1 = 0$.

Таким образом,

$$[(\mu I - A_2)^{-1}z_2](s) = \int\limits_0^s e^{\mu(\tau-s)}z_2(\tau)d\tau,$$

$$\|(\mu I - A_2)^{-1}z_2\|_{C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})} = \sup_{s\geq 0}\left\|\int\limits_0^s e^{\mu(\tau-s)}z_2(\tau)d\tau\right\|_{\mathfrak{U}} \leq$$

$$\leq \sup_{s\geq 0}\int\limits_0^s e^{\mu(\tau-s)}\,\|z_2(\tau)\|_{\mathfrak{U}}\,d\tau \leq \frac{1}{\mu}\|z_2\|_{C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})}.$$

Получаем

$$||(\mu I - A_2)^{-1}||_{\mathcal{L}(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Таким образом, оператор $A_2$ является генератором сжимающей $(C_0)$-непрерывной полугруппы операторов. □

**Замечание 3.1.1.** Именно ради этой леммы выбрано и в дальнейшем используется пространство $C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ непрерывных и ограниченных функций, удовлетворяющих условию $z_2(0) = 0$.

**Теорема 3.1.1.** *Пусть оператор $A$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в $\mathfrak{U}$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. Тогда определенный в (3.1.5) оператор $B$ с областью определения $D_B = D_A \times C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в $\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.*

**Доказательство.** Имеем $B = B_0 + B_1$, где

$$B_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $B_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, поскольку операторы $A$ и $A_2$ являются генераторами $(C_0)$-непрерывных полугрупп на пространствах $\mathfrak{U}$ и $C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ соответственно. Оператор $B_1$ непрерывен на пространстве $\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ в силу лемм 3.1.1, 3.1.2, поэтому по теореме 2.1 [6] оператор $B = B_0 + B_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$ является генератором $(C_0)$-непрерывной полугруппы на пространстве $\mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$. $\square$

**Теорема 3.1.2.** *Пусть оператор $A$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, и выполняется одно из двух условий:*

(i) $f \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$;

(ii) $f \in C([0,T);D_A)$.

*Тогда задача* (3.1.1), (3.1.2) *имеет единственное решение*

$$u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U}).$$

**Доказательство.** Выше задача (3.1.1), (3.1.2) редуцирована к задаче Коши

$$w(0) = w_0 \tag{3.1.6}$$

для неоднородного уравнения

$$w'(t) = Bw(t) + g(t) \tag{3.1.7}$$

в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$. Условия теоремы на функции $u_-$ и $f$ означают, что $w_0 = \begin{pmatrix} u_-(0) \\ v(0,\cdot) \end{pmatrix} \in D_B = D_A \times D_{A_2}$, а функция $g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in$

$C^1([0,T);\mathfrak{W})$ или $g \in C([0,T);D_B)$. В частности,

$$v(0,s) = \int\limits_{-s}^{0} u_-(\tau)d\tau, \quad [A_2 v(0,\cdot)](s) = -\frac{\partial v}{\partial s}(0,s) = -u_-(-s)$$

принадлежит классу $C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

В силу вышесказанного согласно теореме 5.6 [7] и теореме 3.1.1 существует единственное решение $w \in C^1([0,T);\mathfrak{W}) \cap C([0,T);D_B)$ задачи (3.1.6), (3.1.7) на промежутке $[0,T)$, при этом оно имеет вид

$$w(t) = e^{tB}w_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}g(s)ds, \tag{3.1.8}$$

где $\{e^{tB} \in \mathcal{L}(\mathfrak{W}) : t \geq 0\}$ — полугруппа операторов, порождаемая оператором $B$. Решением исходной задачи (3.1.1), (3.1.2) является первая компонента вектор-функции $w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t,\cdot) \end{pmatrix}$. $\square$

Для исследования вырожденных эволюционных уравнений с памятью далее понадобятся решения большей гладкости. Сформулируем следующий результат.

**Теорема 3.1.3.** *Пусть оператор $A$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U}$, $u_- \in C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, выполняются условия $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\int\limits_0^{+\infty} A\mathcal{K}(s)u_-(-s)ds < \infty$, выполняется одно из условий:*

(i) $f \in C^2([0,T);\mathfrak{U})$, $f(0) \in D_A$;

(ii) $f \in C^1([0,T);D_A)$;

(iii) $f \in C([0,T);D_{A^2}) \cap C([0,T);D_A) \cap C^1([0,T);\mathfrak{U})$.

*Тогда задача* (3.1.1), (3.1.2) *имеет единственное решение на* $[0,T)$, *при этом оно лежит в* $C^2([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$.

**Доказательство.** Воспользуемся формулой (3.1.8) решения задачи (3.1.6), (3.1.7). Функция $e^{tB}w_0$ дважды непрерывно дифференцируема, если $w_0 \in$

$D_{B^2}$. Расписав оператор $B^2$, увидим, что для этого требуется, чтобы выполнялось $u_-(0) \in D_{A^2}$, $v(0,\cdot) \in D_{A_2^2}$, $A_1 v(0,\cdot) \in D_A$. Второе включение следует из условия $u_- \in C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$. Покажем выполнение третьего условия. Имеем

$$-\int\limits_0^{+\infty} A\mathcal{K}'(s)\int\limits_{-s}^{0} u_-(\tau)d\tau ds = -A\mathcal{K}(s)\int\limits_{-s}^{0} u_-(\tau)d\tau\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} A\mathcal{K}(s)u_-(-s)ds =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} A\mathcal{K}(s)u_-(-s)ds.$$

Здесь выражение в граничных точках интервала интегрирования обнулилось в силу того, что $u_- \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, а последний интеграл сходится по условию теоремы.

Для функции $w_1(t) = \int\limits_0^t e^{(t-s)B}g(s)ds$ имеем

$$w_1'(t) = g(t) + \int\limits_0^t \frac{d}{dt}e^{(t-s)B}g(s)ds = g(t) - \int\limits_0^t \frac{d}{ds}e^{(t-s)B}g(s)ds.$$

Если продифференцировать последнее выражение по частям, то получится

$$e^{tB}g(0) + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}g'(s)ds, \tag{3.1.9}$$

а если продифференцировать саму полугруппу, то

$$g(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}Bg(s)ds. \tag{3.1.10}$$

В случае (i) выражение (3.1.9) продифференцируем по частям еще раз, и, учитывая, что $f(0) \in D_A$, а значит, и $g(0) \in D_B$, получим

$$w_1''(t) = e^{tB}Bg(0) + e^{tB}g'(0) + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}g''(s)ds.$$

При выполнении условия (ii) (3.1.9) продифференцируем, используя дифференцирование полугруппы, и получим

$$w_1''(t) = e^{tB}Bg(0) + g'(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}Bg'(s)ds.$$

Аналогичный результат получится, если дифференцировать (3.1.10) по частям.

В случае выполнения условий (iii) используем для дальнейшего дифференцирования (3.1.10) и, дифференцируя при этом полугруппу, получим непрерывную функцию

$$w_1''(t) = g'(t) + Bg(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}B^2g(s)ds.$$

Из предыдущей теоремы следует единственность решения задачи (3.1.1), (3.1.2) в классе $C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T);D_A) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$. $\square$

## 3.2. Вырожденное уравнение с памятью

Рассмотрим задачу

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.2.1}$$

для уравнения с памятью

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + \int\limits_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{3.2.2}$$

где $u_- : \overline{\mathbb{R}}_- \to \mathfrak{U}$, $\mathcal{K} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $f : [0,T) \to \mathfrak{V}$, $T \in (0,+\infty]$. Решением задачи (3.2.1), (3.2.2) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C([0,T);D_M) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой $Lu \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$, выполняется условие (3.2.1) и при каждом $t \in [0,T)$ — равенство (3.2.2).

**Теорема 3.2.1.** *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ *сильно* $(L,p)$*-радиален, функция* $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ *ограничена,* $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ *при* $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C^p([0,T);\mathfrak{V})$,

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(0) \qquad (3.2.3)$$

*и выполняется одно из двух условий*:

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V}), \mathcal{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$, $L_1^{-1}\mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};D_M)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};D_M))$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на промежутке* $[0,T)$.

**Доказательство.** Обозначим $Pu(t) = u^1(t)$, $(I-P)u(t) = u^0(t)$. Подействуем на обе части уравнения (3.2.2) оператором $M_0^{-1}(I-Q)$, тогда согласно утверждениям теоремы 1.2.1 и условию на образ операторов $\mathcal{K}(s)$ получим уравнение

$$\frac{d}{dt}Hu^0(t) = u^0(t) + M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Оно в силу нильпотентности оператора $H$ имеет единственное решение $u^0(t) = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k h^{(k)}(t)$ при $t \in [0,T)$, где $h(t) = M_0^{-1}(I-Q)f(t)$. Отсюда следует, что задача (3.2.1), (3.2.2) разрешима только в случае выполнения условия (3.2.3) согласования в нуле.

Если же на (3.2.2) подействовать оператором $L_1^{-1}Q$, то получим уравнение

$$\frac{d}{dt}u^1(t) = L_1^{-1}M_1u^1(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds + g(t), \qquad (3.2.4)$$

где

$$g(t) = L_1^{-1}Qf(t) + k(t), \quad k(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}\mathcal{K}(t-s)u^0(s)\,ds.$$

Таким образом, задача (3.2.1), (3.2.2) редуцирована к задаче

$$u^1(t) = Pu_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.2.5}$$

для уравнения (3.2.4). Оператор $L_1^{-1}M_1$ порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу по теореме 1.2.1. Проверим, что для задачи (3.2.4), (3.2.5) выполняются остальные условия теоремы 3.1.2.

В случае непрерывной дифференцируемости функции $Qf$ (условие (i) данной теоремы) для того, чтобы доказать включение $g \in C^1([0,T);\mathfrak{U}^1)$, необходимо доказать, что $k \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$. Имеем

$$k'(t) = L_1^{-1}\mathcal{K}(0)u^0(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}\mathcal{K}'(t-s)u^0(s)\,ds$$

при условии равномерной сходимости последнего интеграла по параметру $t \in [0,T)$. Поскольку $L_1^{-1}\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \forall A' > A \int\limits_{A'}^{+\infty} \left\|L_1^{-1}\mathcal{K}'(s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} ds < \frac{\varepsilon}{\sup\limits_{t\in(-\infty,0]} \|(I-P)u_-(t)\|_{\mathfrak{U}}}.$$

Тогда

$$\forall t \in [0,T) \quad \left\|\int\limits_{-\infty}^{-A'} L_1^{-1}\mathcal{K}'(t-s)u^0(s)ds\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} < \varepsilon.$$

Отсюда следует требуемое, поэтому $g \in C^1([0,T);\mathfrak{U}^1)$. Это означает выполнение условия (i) теоремы 3.1.2.

При выполнении условий (ii) данной теоремы выполнение условия (ii) теоремы 3.1.2 с оператором $A = L_1^{-1}M_1$ доказывается аналогично.

Таким образом, в каждом из случаев по теореме 3.1.2 существует единственное решение задачи (3.2.4), (3.2.5), а значит, существует единственное решение исходной задачи. $\square$

Теперь вместо условия $\operatorname{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ рассмотрим случай, когда $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$.

**Теорема 3.2.2.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,0)$-радиален, $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$,*

$$(I-P)u_-(0) = -\int\limits_{-\infty}^{0} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(-s)Pu_-(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(0) \quad (3.2.6)$$

*и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на промежутке* $[0,T)$.

**Доказательство.** Как и при доказательстве предыдущей теоремы, из уравнения (3.2.2) получим уравнение

$$\frac{d}{dt}u^1(t) = L_1^{-1}M_1u^1(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds + L_1^{-1}Qf(t) \quad (3.2.7)$$

с учетом свойств ядер $\ker \mathcal{K}(s)$. Задача (3.2.5) для этого уравнения удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1.2, поэтому существует ее единственное решение $u^1$ на промежутке $[0,T)$.

Действием оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ на уравнение (3.2.2) с учетом сильной $(L,0)$-радиальности оператора $M$ получим

$$u^0(t) = -\int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Отсюда следует существование решения задачи (3.2.1), (3.2.2) при выполнении условия согласования (3.2.6). $\square$

При условии $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$ интегральный оператор памяти не зависит от значений решения на подпространстве $\mathfrak{U}^0$ и помимо задачи (3.2.1) для уравнения с памятью можно рассмотреть также обобщенную задачу Шоуолтера–Сидорова

$$Pu(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-. \tag{3.2.8}$$

Решением задачи (3.2.2), (3.2.8) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C([0,T);D_M)$, для которой $Pu \in C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, $Lu \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$, выполняется (3.2.8) и при каждом $t \in [0,T)$ — равенство (3.2.2). Из доказательства теоремы 3.2.2 видно, что единственным отличием теоремы о разрешимости задачи (3.2.2), (3.2.8) от нее будет отсутствие необходимости выполнения условия согласования (3.2.6).

**Теорема 3.2.3.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,0)$-радиален, функция $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$ и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.2), (3.2.8) *на промежутке* $[0,T)$.

Докажем аналогичную теорему в случае уравнения с бóльшим вырождением — когда оператор $M$ сильно $(L,1)$-радиален.

**Теорема 3.2.4.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,1)$-радиален, функция $u_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$, $\mathcal{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$ и выполняется одно из двух условий*

(i) *$Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;*

(ii) *$L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.*

*Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.2), (3.2.8) *на промежутке* $[0,T)$.

**Доказательство.** Задача (3.2.5), (3.2.7) однозначно разрешима по теореме 3.1.2. Действием же оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ на уравнение (3.2.2) получим уравнение

$$\frac{d}{dt}Hu^0(t) = u^0(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds + M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad (3.2.9)$$

где $u^1$ — решение задачи (3.2.5), (3.2.7). Из нильпотентности оператора $H$ степени 1 следует существование решения $u^0(t) = -h(t) - Hh'(t)$ уравнения (3.2.9), где

$$h(t) = l(t) + M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad l(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds.$$

Принадлежность функции $l$ классу $C^1([0,T),\mathfrak{U})$ доказывается так же, как аналогичный факт для функции $k$ при доказательстве теоремы 3.2.1 с учетом ограниченности функции $u_-$. $\square$

**Замечание 3.2.1.** Из теорем 3.2.1–3.2.4 видно, что задача (3.2.8) (в случаях, когда ее постановка возможна, как в условиях теорем 3.2.2 – 3.2.4), когда интегральный оператор памяти не зависит от функции $(I-P)u_-$) является более естественной для уравнения (3.2.2) в том смысле, что она однозначно разрешима без дополнительных условий согласования в нуле типа условий (3.2.3), (3.2.6).

**Замечание 3.2.2.** Решением задачи (3.2.1) для уравнения

$$L\frac{d}{dt}u(t) = Mu(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \quad (3.2.10)$$

где $u_- : \overline{\mathbb{R}}_- \to \mathfrak{U}$, $\mathcal{K} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $f : [0,T) \to \mathfrak{V}$, $T \in (0,+\infty]$, на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C([0,T);D_M) \cap C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой при каждом $t \in [0,T)$ выполняется равенство (3.2.10) и при $T \leq 0$ — условие (3.2.1). Исследование однозначной разрешимости этой задачи или задачи (3.2.8) для уравнения (3.2.10) проводится совершенно аналогично тому, как это сделано в данном параграфе в случае уравнения (3.2.2). Разница заключается лишь в том, что в данном случае решение $u^0$

получающегося уравнения на подпространстве $\mathfrak{U}^0$ (а не $L_0u^0$, как для уравнения (3.2.2)) должно быть дифференцируемо. Это приводит к незначительному усилению требований на гладкость некоторых данных в формулировках утверждений. Например, в утверждении об однозначной разрешимости задачи (3.2.1), (3.2.10), аналогичном теореме 3.2.1, достаточно лишь заменить условие $(I-Q)f \in C^p([0,T);\mathfrak{V})$ на условие $(I-Q)f \in C^{p+1}([0,T);\mathfrak{V})$. См. по этому поводу также замечание 1.2.8.

## 3.3. Случай $(L,p)$-ограниченного оператора

В парагпафе §3.1 были получены условия существования решения задачи Коши (3.1.1), (3.1.2) класса $C^2([0,T);\mathfrak{U}) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$. Понятно, что усилив условия на функции $\mathcal{K}$, $f$ и $u_-$, нетрудно получить условия, достаточные для существования решения задачи (3.1.1), (3.1.2) класса $C^3([0,T);\mathfrak{U}) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$. При получении общего результата о существовании решения класса $C^n([0,T);\mathfrak{U}) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$ возникает проблема с описанием множества $D_{B^n}$ (см. (3.1.5)), которое имеет непростую структуру. Однако в случае ограниченного оператора $A$ такое описание получено в следующей лемме.

**Лемма 3.3.1.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для определенного в* (3.1.5) *оператора* $B$ *имеет место равенство* $D_{B^n} = \mathfrak{U} \times D_{A_2^n}$.

**Доказательство.** Используя очевидное равенство $A_2J = 0$, по индукции нетрудно доказать, что при всех $k \in \mathbb{N}$ оператор $B^k$ имеет вид

$$B^k = \begin{pmatrix} D_k & \sum\limits_{m=0}^{k-1} F_{k,m}A_2^m \\ JD_{k-1} & A_2^k + J\sum\limits_{m=0}^{k-2} G_{k,m}A_2^m \end{pmatrix},$$

где $D_0 = I$, $D_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $F_{k,m} \in \mathcal{L}(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U});\mathfrak{U})$, $m = 0,1,\dots,k-1$, $G_{k,m} \in \mathcal{L}(C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, $m = 0,1,\dots,k-2$. В случае $k=1$ нижний предел суммирования в последней сумме больше верхнего, по умолчанию это означает отсутствие суммы.

Из полученного представления оператора $B^k$ следует утверждение леммы. $\square$.

**Теорема 3.3.1.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n \in \mathbb{N}$, $u_- \in C_0^{n-1}(\overline{\mathbb{R}}_-; \mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; \mathfrak{U})$, $f \in C^{n-1}([0,T); \mathfrak{U})$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.1.1), (3.1.2) *на промежутке* $[0,T)$, *при этом оно принадлежит классу* $C^n([0,T); \mathfrak{U}) \cap C([0,T); D_A) \cap C((-\infty,T); \mathfrak{U})$.

**Доказательство** проводится так же, как для теоремы 3.1.3 с учетом ограниченности оператора $A$ и с использованием леммы 3.3.1. Условия на $u_-$ означают, что $u_- \in D_{A_2^n}$ и $w_0 \in D_B$. Из равенства (3.1.8) $n$-кратным дифференцированием, используя прямое дифференцирование полугруппы под знаком интеграла, получим

$$w^{(n)}(t) = e^{tB} B^n w_0 + \sum_{k=0}^{n-1} B^{n-1-k} g^{(k)}(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)B} B^n g(s) ds.$$

Осталось учесть, что вторая компонента у вектор-функции $g$ нулевая, а на первую оператор $B$ действует ограниченным образом. $\square$

В случае $(L,p)$-ограниченного оператора $M$ предположим, что при всех $s \geq 0$ $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$. Подействуем на уравнение (3.2.2) оператором $M_0^{-1}(I-Q)$ и получим в силу теоремы 1.3.1 уравнение

$$\frac{d}{dt} H u^0(t) = u^0(t) + h(t), \quad t \in [0,T), \tag{3.3.11}$$

где $u^0(t) = (I-P)u(t)$, $h(t) = M_0^{-1}(I-Q)f(t)$. Под его решением по определению понимается функция $u^0 \in C([0,T); \mathfrak{U}^0)$, для которой $Hu^0 \in C^1([0,T); \mathfrak{U}^0)$ и при всех $t \in [0,T)$ выполняется равенство (3.3.11). Оператор $H$ нильпотентен степени $p \in \mathbb{N}_0$ по определению $(L,p)$-ограниченного оператора $M$. Из леммы 1.2.4, как уже было замечено, следует, что при рассмотрении задачи

(3.2.1), (3.2.2) возникает необходимое условие согласования

$$w(0) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t)\Big|_{t=0} = (I-P)u_-(0)$$

с заданной функцией истории $u_-$.

Если же на уравнение (3.2.2) подействовать оператором $L_1^{-1}Q$, то будет получено уравнение

$$\frac{d}{dt}u^1(t) = L_1^{-1}M_1u^1(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)(u^1+u^0)(s)ds + L_1^{-1}Qf(t),\ t \in [0,T),$$

где $u^1(t) = Pu(t)$. Поскольку функция $u^0$ уже известна, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}u^1(t) = L_1^{-1}M_1u^1(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds + g(t), \quad t \in [0,T), \tag{3.3.12}$$

где $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)u^0(s)ds + L_1^{-1}Qf(t)$. Таким образом, исходная задача (3.2.1), (3.2.2) сведена к задаче

$$u^1(t) = Pu_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.3.13}$$

для уравнения (3.3.12) с ограниченным оператором $L_1^{-1}M_1$ согласно теореме 1.3.1.

Теперь есть возможность закончить исследование разрешимости задачи с заданной историей для вырожденного эволюционного уравнения с эффектами памяти в случае $(L,p)$-ограниченного оператора $M$. При этом воспользуемся леммой 1.2.4 и замечанием 1.2.7.

**Теорема 3.3.2.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ ограниченная функция, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathcal{K},\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ при $s \geq 0$, $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in$*

$C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k=0,1,\dots,p$,

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t)\Big|_{t=0}.$$

*Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на промежутке* $[0,T)$.

**Доказательство.** В силу леммы 1.2.4 функция $u^0$ непрерывна. Используя непрерывность оператор-функции $\mathcal{K}$, ограниченность функции $(I-P)u_-$ на $\overline{\mathbb{R}}_-$ и принадлежность $\mathcal{K} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, нетрудно показать равномерную сходимость по $t$ на произвольном отрезке $[t_0,t_1] \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ интеграла

$$\int_{-\infty}^{t} L_1^{-1} Q\mathcal{K}(t-s)u^0(s)ds = \int_{0}^{+\infty} L_1^{-1} Q\mathcal{K}(s)u^0(t-s)ds,$$

а значит, и непрерывность функции $g$ из уравнения (3.3.12). По теореме 3.3.1 задача (3.3.12), (3.3.13) однозначно рарешима. Учитывая проведенные перед формулировкой теоремы рассуждения, получим требуемое. $\square$

Вместо условия $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ рассмотрим теперь ограничение $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$ при $s \geq 0$.

**Теорема 3.3.3.** *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ $(L,p)$*-ограничен,* $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$ *при* $s \geq 0$, $H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K} \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(l)}(0) = 0$, $l=0,1,\dots,k-1$, $H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(n)} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n=0,1,\dots,k$, $k=0,1,\dots,p$, $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $H^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k=0,1,\dots,p$,

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} \int_{-\infty}^{0} (H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K})^{(k)}(-s)Pu_-(s)ds -$$

$$-\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f\Big|_{t=0}. \qquad (3.3.14)$$

*Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на промежутке* $[0, T)$.

**Доказательство.** С помощью теоремы 1.3.1 из уравнения с памятью получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt}Hu^0(t) = u^0(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds + M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad (3.3.15)$$

$$\frac{d}{dt}u^1(t) = L_1^{-1}M_1u^1(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds + L_1^{-1}Qf(t). \quad (3.3.16)$$

Учитывая, что задача (3.3.13) для уравнения (3.3.16) по теореме 3.3.1 однозначно разрешима, перепишем уравнение (3.3.15) в виде

$$\frac{d}{dt}Hu^0(t) = u^0(t) + g(t), \quad (3.3.17)$$

где $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t-s)u^1(s)ds + M_0^{-1}(I-Q)f(t)$ — заданная функция. Тем самым, исходная задача (3.2.1), (3.2.2) сведена к задаче $u^0(t) = (I-P)u_-(t)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_-$, для уравнения (3.3.17), условия разрешимости которого сформулированы в замечании 1.2.7.

Покажем существование $k$-й производной у функции $H^k g$. Обозначим при $k \in \mathbb{N}_0$ $G_k(t) = H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t)$, тогда, поскольку $G_k^{(l)}(0) = 0$ при $l = 0, 1, \dots, k-1$, то

$$\frac{d^n}{dt^n}H^k g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_k^{(n)}(t-s)u^1(s)ds + \frac{d^n}{dt^n}H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t),$$

$n = 0, 1, \dots, k$, $k = 0, 1, \dots, p$, при условии дифференцируемости соответствующего несобственного интеграла. Докажем ее. Действительно, так как $G_k^{(n)} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое достаточно большое $A > 0$, что при всех $A' > A$, $t \geq 0$

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{-A'} G_k^{(n)}(t-s)u^1(s)ds \right\|_{\mathfrak{U}} \leq \sup_{\tau \leq 0} \|Pu_-(\tau)\|_{\mathfrak{U}} \int\limits_{A'}^{+\infty} \left\| G_k^{(n)}(s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} ds < \varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная сходимость по $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ соответствующих интегралов, а значит, и их дифференцируемость.

Необходимость условия согласования данных (3.3.14) следует из вида решения уравнения (3.3.17), приведенного в лемме 1.2.4. $\square$

При выполнении ограничения $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, можно рассматривать модифицированное условие заданной истории системы — обобщенное условие Шоуолтера–Сидорова

$$Pu(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.3.18}$$

когда задана лишь история проекции состояния системы на подпространство $\mathfrak{U}^1$. Для задачи (3.2.2), (3.3.18) будет справедлив результат, аналогичный теореме 3.3.3, лишь условие согласования (3.3.14) в этом случае становится лишним. Рассмотрим другой вариант теоремы об однозначной разрешимости задачи (3.2.2), (3.3.18), в котором ослабим требования на функции $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}$, добившись большей гладкости функции $v$.

Пусть по определению $C^{-n}([0,T);\mathfrak{V}) = C([0,T);\mathfrak{V})$, $C_0^{-n}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) = C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ при $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 3.3.4.** *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ $(L,p)$*-ограничен,* $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0^{p-2}(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K} \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(n)} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n = 0,1,\ldots,k$, $k = 0,1,\ldots,p$, $Qf \in C^{p-2}([0,T);\mathfrak{V})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k = 0,1,\ldots,p$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.2), (3.3.18) *на промежутке* $[0,T)$.

**Доказательство.** Отличие от доказательства предыдущей теоремы состоит лишь в том, что теперь решение $u^1$ уравнения (3.3.16) принадлежит классу $C^{p-1}([0,T);\mathfrak{V}) \cap C^1([0,T);\mathfrak{V})$ по теореме 3.3.1, при этом

$$\frac{d^n}{dt^n}H^kg(t) = \sum_{l=0}^{n-1} G_k^{(l)}(0)(u^1)^{(n-1-l)}(t) + \int_{-\infty}^{t} G_k^{(n)}(t-s)u^1(s)ds +$$

$$+\frac{d^n}{dt^n}H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad k=0,1,\ldots,p,\ n=0,1,\ldots,k,$$

и выполнение условия согласования (3.3.14) не требуется. $\square$

**Замечание 3.3.1.** Для уравнения

$$L\frac{d}{dt}u(t) = Mu(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t),$$

в случае $(L,p)$-ограниченного оператора $M$ справедливы все соображения, изложенные в замечании 3.2.2.

## 3.4. Система гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска

Рассмотрим начально краевую задачу

$$v_n(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T), \tag{3.4.1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.4.2}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t) = [v(x,t), \overline{\omega}] - r(x,t) + N^2 \int\limits_0^t v_3(x,s)e_3 ds,\ (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{3.4.3}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{3.4.4}$$

описывающей в приближении Буссинеска малые колебания равномерно вращающейся относительно вертикальной оси $Ox_3$ в поле силы тяжести идеальной несжимаемой жидкости. Она называется также системой гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска [1, с. 186] Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$, вектор $v = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость частиц жидкости, $r$ — градиент динамического давления $P$, т. е. $r = (r_1, r_2.r_3) = (P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3})$, $e_3 = (0,0,1)$, $\omega$ — удвоенная угловая скорость, $[\cdot, \overline{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\overline{\omega} = \omega e_3 = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$,

$v_3e_3 = (0,0,v_3)$, $n = (n_1,n_2,n_3)$ — вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $v_n = \langle v, n\rangle_{\mathbb{R}^3}$, $N^2$ — частота Вяйселя — Брента, $\nabla\cdot v$ — дивергенция вектор-функции $v$. Неизвестными являются вектор-функции $v$ и $r$.

Обозначим $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla\cdot v = 0\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Пусть $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ — ортопроектор вдоль $\mathbb{H}_\sigma$.

Следуя подходу, примененному в работе [22] к системе уравнений Соболева, которая от данной системы отличается лишь отсутствием интегрального слагаемого, используем обобщенную постановку начально-краевой задачи (3.4.1)–(3.4.4), заменив уравнение несжимаемости (3.4.4) и граничное условие (3.4.1) на уравнение

$$\Pi v(\cdot,t) = 0, \quad t \in [0,T). \tag{3.4.5}$$

После замены $w(t,x) = v(t,x) - v_0(x)$, считая, что $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, получим начально-краевую задачу

$$w(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.4.6}$$

$$\begin{gathered} w_t(x,t) = [v(x,t),\overline{\omega}] - r(x,t) + N^2 \int\limits_0^t w_3(x,s)e_3 ds + \\ +[v_0(x),\omega] + N^2 t v_{03}(x)e_3, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \end{gathered} \tag{3.4.7}$$

$$\Pi w(\cdot,t) = 0, \quad t \in [0,T). \tag{3.4.8}$$

При этом считается, что предыстория, определяемая условием (3.4.6), тождественно нулевая, поскольку она никак не влияет на состояние системы при $t > 0$.

Формулой $\widehat{G} : z \to [z,\overline{\omega}]$, $\overline{\omega} = (0,0,\omega)$, зададим линейный непрерывный оператор $\widehat{G} : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{L}_2$, $\widehat{G}_\sigma = \widehat{G}|_{\mathbb{H}_\sigma}$. Обозначим $\Sigma = I - \Pi$, $P_3 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ — проектор вектор-функций на ось $Ox_3$, т. е. $P_3 z = \langle z, e_3\rangle_{\mathbb{R}^3} = (0,0,z_3)$, если

$z = (z_1, z_2, z_3)$. Положим

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{3.4.9}$$

тогда векторы имеют вид $u = (v, r) \in \mathfrak{U}$, $f = (g, h) = (\Sigma f, \Pi f) \in \mathfrak{V}$. При этом использовано то, что в силу (3.4.8) $w(\cdot, t) = 0 \in \mathbb{H}_\sigma$, а градиент давления $r(\cdot, t) = \nabla P(\cdot, t) \in \nabla H^1(\Omega) = \mathbb{H}_\pi$ для всех $t \in [0, T)$.

Систему (3.4.7), (3.4.8) можно задать в виде (3.2.2) с помощью операторов

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \Sigma\widehat{G}_\sigma & \mathbb{O} \\ \Pi\widehat{G}_\sigma & -I \end{pmatrix}, \mathcal{K}(t) = \begin{pmatrix} \Sigma k(t) P_3 & 0 \\ \Pi k(t) P_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \tag{3.4.10}$$

где

$$k(t) = \begin{cases} N^2, \ t \in [0, T), \\ N^2(1 - (t - T)), \ t \in [T, T+1), \\ 0, \ t \geq T + 1, \end{cases}$$

и $f(t) = [v_0(x), \omega] + N^2 t v_{03}(x) e_3$.

**Лемма 3.4.1.** [34]. *Пусть заданы пространства* (3.4.9) *и операторы* (3.4.10). *Тогда оператор $M$ сильно $(L, 0)$-радиален, при этом проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \Pi\widehat{G}_\sigma & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Из вида проектора $P$ и операторов $\mathcal{K}(t)$ следует, что (3.4.6) для данной задачи имеет вид условия (3.2.8), и $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$ при всех $t \geq 0$. При этом по построению функции $k(t)$, не влияющему на задачу (3.4.6)–(3.4.8) при конечном $T > 0$, получаем интегрируемость по Риману оператор-функций $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ (там, где она существует — кроме точек $t = T$ и $t = T + 1$) на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$. Из теоремы 3.3.4 следует разрешимость задачи (3.4.6)–(3.4.8), а значит, и задачи (3.4.2), (3.4.3), (3.4.5).

**Теорема 3.4.1.** *Пусть* $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $T > 0$ *конечно. Тогда существует единственное решение задачи* (3.4.2), (3.4.3), (3.4.5).

**Замечание 3.4.1.** В случае $\omega = 0$ получается система внутренних волн в приближении Буссинеска [1, с. 186], для которой теорема 3.4.1 также верна.

## 3.5. Интегро-дифференциальная система уравнений Осколкова

Рассмотрим задачу

$$v(x,t) = v_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.5.1}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3.5.2}$$

для интегро-дифференциальной системы уравнений, моделирующей динамику жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка (см. [15], система (0.30)), линеаризованной в окрестности стационарного решения $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \dots, \widetilde{v}_d)$,

$$(1 - \chi\Delta)v_t(x,t) = \nu\Delta v(x,t) - (\widetilde{v} \cdot \nabla)v(x,t) - (v \cdot \nabla)\widetilde{v}(x,t) - r(x,t) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)\Delta v(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3.5.3}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{3.5.4}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi, \nu \in \mathbb{R}$, помимо $\widetilde{v}$ задана функция $K : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$. Система уравнений моделирует течение вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта. Искомыми являются вектор-функции скорости $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ жидкости и градиента давления $r = (r_1, r_2, \dots, r_d)$.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^d$. Замыкание линеала бездивергентных финитных функций $\mathcal{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla \cdot w = 0\}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Кроме того, будем использовать обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Имеем представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим представлением ортопроектор, $\Sigma = I - \Pi$.

Уравнение несжимаемости (3.5.4) заменим более общим уравнением

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{3.5.5}$$

Действительно, если $v$ — достаточно гладкая функция, то из $\Pi v \equiv 0$ следует равенство (3.5.4). В общем случае в силу (3.5.5) $v$ является пределом в смысле $\mathbb{L}_2$ гладких функций, удовлетворяющих условию (3.5.4).

Обозначим через $A = \Sigma \operatorname{diag}\{\Delta, \ldots, \Delta\}$ оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathbb{H}_\sigma)$ с областью определения $\mathbb{H}^2_\sigma$. Известно, что этот оператор имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр $\sigma(A)$, сгущающийся только на $-\infty$ [8]. Пусть $\widetilde{v} \in \mathbb{H}^1$, тогда формулой $Dw = \nu\Delta w - (\widetilde{v} \cdot \nabla)w - (w \cdot \nabla)\widetilde{v}$ зададим оператор $D \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma; \mathbb{L}_2)$.

Учитывая уравнение (3.5.5), положим $\mathfrak{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$,

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \Sigma D & \mathbb{O} \\ \Pi D & -I \end{pmatrix}, \mathcal{K}(s) = \begin{pmatrix} K(s)A & \mathbb{O} \\ K(s)\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$$

при $s \geq 0$. Поскольку функция $r$ задает градиент давления, то она ищется как функция от $t$ со значениями в подпространстве градиентных функций $\mathbb{H}_\pi$.

**Теорема 3.5.1.** *Пусть* $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $v_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $K \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $K, K' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. *Тогда задача* (3.5.1)–(3.5.3), (3.5.5) *имеет единственное решение* $v \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap C(\mathbb{R}; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $r \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}_\pi)$.

**Доказательство.** В работе [5] показано, что в условиях данной теоремы оператор $M$ сильно $(L, 0)$-радиален, при этом

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, условие (3.5.1) представляет собой обобщенное условие Шоуолтера–Сидорова и $\ker P = \mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$ при всех $s \geq 0$. По теореме 3.2.3

получим требуемое. При этом от функции $r$ не требуется дифференцируемость по определению решения, поскольку она попадает в ядро оператора $L$. $\square$

**Замечание 3.5.1.** В случае жидкостей Олдройта ненулевого порядка (система (0.25) в [15]) предложенный подход приводит к уравнению (3.1.2) с оператором $M$, который не является $(L,\sigma)$-ограниченным или сильно $(L,p)$-радиальным.

## 3.6. Линеаризованная система уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта высокого порядка

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$y(x,t) = y_-(x,t), \quad z(x,t) = z_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.6.1}$$

$$y(x,t) = 0, \quad z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3.6.2}$$

для линеаризованной системы уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта порядка 2, 3, ... (система (0.55) в [15])

$$(1-\chi\Delta)y_t(x,t) = \nu\Delta y(x,t) - (\widetilde{y}\cdot\nabla)y(x,t) - (y\cdot\nabla)\widetilde{y}(x,t) +$$

$$+\Delta z(x,t) - r(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3.6.3}$$

$$z_t(x,t) = \alpha y(x,t) + \beta z(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)z(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3.6.4}$$

$$\nabla\cdot y = 0, \quad \nabla\cdot z = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{3.6.5}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, постоянные $\chi,\nu,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, заданы функции $y_-$, $z_-$, $\widetilde{y}$, $K$. Функция $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\ldots,\widetilde{y}_d)$ соответствует стационарному решению системы, параметр $\chi$ характеризует упругие свойства жидкости, $\nu$ – ее вязкие свойства. Вектор-функции $y = (y_1,y_2,\ldots,y_d)$ (вектор скорости жидкости), $z = (z_1,z_2,\ldots,z_d)$ (свертка по временно́й переменной скорости и некоторой весовой функции), а также $r = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$ (градиент давления) неизвестны.

Как в прежнем параграфе, определим заданные на $\mathbb{H}^2_\sigma$ операторы $A \in \mathcal{C}l(\mathbb{H}_\sigma)$, $Aw = \Sigma\Delta w$, и $D \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma; \mathbb{L}_2)$, $Dw = \nu\Delta w - (\widetilde{y}\cdot\nabla)w - (w\cdot\nabla)\widetilde{y}$ при заданном $\widetilde{y} \in \mathbb{H}^1$. Учитывая уравнения (3.6.5) и тот факт, что градиент давления $r$ ищется как функция от $t$ со значениями в подпространстве градиентных функций $\mathbb{H}_\pi$, положим

$$\mathfrak{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}^2_\sigma, \quad \mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 \times \mathbb{H}^2_\sigma = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}^2_\sigma. \tag{3.6.6}$$

Здесь также используется тот факт, что при фиксированном $t$ все слагаемые в уравнении (3.6.4) являются элементами $\mathbb{H}^2_\sigma$. Тогда операторы, задающие систему (3.6.1)–(3.6.5) в виде уравнения (3.2.2), имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} I-\chi A & 0 & 0 \\ -\chi\Pi\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \Sigma D & 0 & A \\ \Pi D & -I & \Pi\Delta \\ \alpha I & 0 & \beta I \end{pmatrix}, \mathcal{K}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(s) \end{pmatrix} \tag{3.6.7}$$

и лежат в $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$.

**Теорема 3.6.1.** *Пусть пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *определены в* (3.6.6), *а операторы* $L$ *и* $M$ *заданы формулами* (3.6.7), $\nu, \chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$. *Тогда оператор* $M$ $(L, 0)$-*ограничен, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \chi\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & 0 & \Pi\Delta(I-\chi A)^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.6.8}$$

**Доказательство.** Обозначим $\chi_\mu = \chi + \frac{\alpha}{\mu(\mu-\beta)}$. Так как, $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} \chi_\mu = \chi \neq 0$, а спектр оператора $A$ дискретен, то при достаточно больших $|\mu|$ существует оператор $(I - \chi_\mu A)^{-1} = \chi_\mu^{-1}(\chi_\mu^{-1} I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$. В силу свойств резольвенты $\lim\limits_{|\mu|\to\infty}(I - \chi_\mu A)^{-1} = (I - \chi A)^{-1}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$.

Для любого $v \in \mathbb{H}_\sigma$ имеем

$$\|(I-\chi_\mu A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|1-\chi_\mu\lambda_k|^2} \le C_\mu \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v,\varphi_k\rangle|^2 = C_\mu\|v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma},$$

поэтому $(I-\chi_\mu A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}^2_\sigma)$. Оценим константу $C_\mu = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1+\lambda_k^2}{(1-\chi_\mu\lambda_k)^2}$ при достаточно больших $|\mu|$. Если $\chi > 0$, то в силу отрицательности спектра $\sigma(A)$ $C_\mu$ не превосходит максимума значений функции $h_\mu(x) = (1+x^2)(1-\chi_\mu x)^{-2}$ в точке 0 и на $-\infty$: $C_\mu \le \max\{1,\chi_\mu^{-2}\} \le C(\varepsilon) \equiv \max\{1,(\chi-\varepsilon)^{-2}\}$ при некотором малом $\varepsilon > 0$. В случае же $\chi < 0$ имеем

$$C_\mu \le C(\varepsilon) \equiv \frac{\chi^2 + (1+d\chi)^2}{d^2\chi^4} + \varepsilon, \quad d = \inf_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k - \chi^{-1}| > |\chi_\mu^{-1} - \chi^{-1}|.$$

В этом случае взят максимум значений функции $h(x) = (1+x^2)(1-\chi x)^{-2}$ в точках $\chi^{-1} \pm d$ с поправкой на то, что $\chi_\mu \ne \chi$.

Таким образом, обратный оператор

$$D_\mu \equiv (I-\chi_\mu A - \mu^{-1}\Sigma D)^{-1} = (I-\chi_\mu A)^{-1}\left(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}\right)^{-1}$$

существует и непрерывно действует из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{H}^2_\sigma$ при достаточно большом $|\mu|$, в том числе при условии $|\mu| > C(\varepsilon)\|\Sigma D\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma;\mathbb{H}_\sigma)}$. При таких $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu(I-\chi A) - \Sigma D & 0 & -A \\ -\mu\chi\Pi\Delta - \Pi D & I & -\Pi\Delta \\ -\alpha I & 0 & (\mu-\beta)I \end{pmatrix},$$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}D_\mu & 0 & \frac{D_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ \Pi\frac{(\mu-\beta)(\mu\chi\Delta + D) + \alpha\Delta}{\mu(\mu-\beta)}D_\mu & I & \Pi\frac{\Delta D_\mu[\mu(I-\chi A)-\Sigma D] + (\mu\chi\Delta + D)D_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ \frac{\alpha}{\mu(\mu-\beta)}D_\mu & 0 & D_\mu\frac{\mu(I-\chi A)-\Sigma D}{\mu(\mu-\beta)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что при достаточно больших $|\mu|$ оператор $(\mu L - M)^{-1} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ непрерывен, что означает $(L,\sigma)$-ограниченность оператора $M$.

При $v \in \mathbb{H}_\sigma$ и достаточно больших $|\mu|$

$$\|(I-\chi_\mu A)^{-1}v - (I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} = (\chi_\mu - \chi)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{(1-\chi_\mu\lambda_k)^2(1-\chi\lambda_k)^2} \le$$

$$\leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{[(1-\chi\lambda_k)^2-\delta](1-\chi\lambda_k)^2} \leq C(\delta)\varepsilon^2\|v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma},$$

где величина $C(\delta)$ ограничена при $|\mu| \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{|\mu|\to\infty}(I-\chi_\mu A)^{-1} = (I-\chi A)^{-1}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}^2_\sigma)$. Кроме того,

$$\lim_{|\mu|\to\infty}\left\|\left(I-\frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}\right)^{-1}-I\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} \leq$$

$$\leq \lim_{|\mu|\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\|\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}+\delta\right)^k}{|\mu|^k}=0.$$

Поэтому $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} D_\mu = (I-\chi A)^{-1}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}^2_\sigma)$.

Далее, для $v\in\mathbb{H}^2_\sigma$ и достаточно больших $|\mu|$

$$\|(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)v-v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma}\leq$$

$$\leq(\chi_\mu-\chi)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{(1-\chi_\mu\lambda_k)^2}\leq\frac{C^2\|v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma}}{|\mu|^2|\mu-\beta|^2},$$

$$\|\mu D_\mu(I-\chi A)-\mu I-(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}\leq$$

$$\leq|\mu|\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-I\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+$$

$$+\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\|\frac{((I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D)^k}{\mu^{k-1}}(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}\leq\frac{C}{|\mu-\beta|}+$$

$$+\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+$$

$$+\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D-(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[\|(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+\delta]^k}{|\mu|^{k-1}}(1+\delta).$$

Последнее выражение стремится к нулю при $|\mu|\to\infty$, следовательно,

$$\lim_{|\mu|\to\infty}\mu(D_\mu(I-\chi A)-I)=(I-\chi A)^{-1}\Sigma D$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)$.

Таким образом, обозначив

$$A_{21}(\mu)=\mu\chi\Pi\Delta(D_\mu(I-\chi A)-I)+\Pi\left(D+\frac{\alpha\Delta}{\mu-\beta}\right)D_\mu(I-\chi A),$$

получим операторы

$$R^L_\mu(M)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}D_\mu(I-\chi A) & 0 & \frac{D_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ \frac{1}{\mu}A_{21}(\mu) & 0 & \Pi\frac{\Delta D_\mu(\mu I-\Sigma D)+DD_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ \frac{\alpha}{\mu(\mu-\beta)}D_\mu(I-\chi A) & 0 & D_\mu\frac{\mu(I-\chi A)-\Sigma D}{\mu(\mu-\beta)} \end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}),$$

$$L^L_\mu(M)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}(I-\chi A)D_\mu & 0 & (I-\chi A)\frac{D_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ -\frac{1}{\mu}\chi\Pi\Delta D_\mu & 0 & -\chi\Pi\Delta\frac{D_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ \frac{\alpha}{\mu(\mu-\beta)}D_\mu & 0 & D_\mu\frac{\mu(I-\chi A)-\Sigma D}{\mu(\mu-\beta)} \end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathfrak{V}).$$

При доказательстве $(L,p)$-радиальности оператора $M$ проблема возникает лишь с одним выражением из $\mu^{-1}A_{21}(\mu)$:

$$\chi\Pi\Delta(D_\mu(I-\chi A)-I)=$$

$$=\chi\Pi\Delta((I-\mu^{-1}(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D)^{-1}(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-I)=$$
$$=\chi\Pi\Delta\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}[(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D]^k(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-I\right)=$$
$$=\chi\Pi\Delta\left((I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-I+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}[(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D]^k\right).$$

Отсюда для $v\in\mathbb{H}^2_\sigma$ в силу доказанного выше

$$\|\chi\Pi\Delta(D_\mu(I-\chi A)-I)v\|_{\mathbb{H}_\pi}\leq$$

$$C_1\left\|\left((I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-I+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}[(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D]^k\right)v\right\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}\leq$$

$$\leq\frac{C_1C\|v\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}}{|\mu||\mu-\beta|}+\frac{C_1C_2\|v\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}}{|\mu|-C_2},$$

где $C_2$ — константа, ограничивающая нормы операторов $\|(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}$ при достаточно больших $|\mu|$.

Из $(L,p)$-радиальности оператора $M$ и рефлексивности пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ следует существование проектора $P$ вдоль $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (см. замечание 1.2.4), который можно вычислить по формуле $P=\lim\limits_{\mu\to+\infty}\mu R^L_\mu(M)$. Вычислив предел, получим оператор (3.6.8). Поскольку $\ker L=\ker P$, то оператор $M$ $(L,0)$-ограничен. $\square$

Из вида проектора $P$ следует, что $\mathfrak{U}^0=\{0\}\times\mathbb{H}_\pi\times\{0\}$, $\mathfrak{U}^1=\{(y,r,z)\in\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times\mathbb{H}^2_\sigma : r=\chi\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}\Sigma Dy+\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}z\}$. Это означает, в частности, что равенства (3.6.1) образуют аналог обобщенного условия Шоуолтера–Сидорова.

**Теорема 3.6.2.** *Пусть* $\nu,\chi\neq 0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $y_-,z_-\in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathbb{H}^2_\sigma)\cap\mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathbb{H}^2_\sigma)$, $K\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, $K,K'\in\mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$, $g\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$. *Тогда существует единственное решение* $y,z\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}^2_\sigma)\cap C(\mathbb{R};\mathbb{H}^2_\sigma)$, $r\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}_\pi)$ *задачи* (3.6.1)–(3.6.5).

**Доказательство.** По теореме 3.3.4 при $p=0$ получим требуемое. Заметим лишь, что $\ker P=\mathfrak{U}^0\subset\ker\mathcal{K}(s)$ при всех $s\geq 0$. $\square$

## 3.7. Система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными

Рассмотрим задачу

$$z_i(x,t)=z_{i-}(x,t),\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_-,\quad i=1,2,3, \tag{3.7.1}$$

$$(1-\theta)z_i(x,t)+\theta\frac{\partial z_i}{\partial n}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+,\quad i=1,2,3. \tag{3.7.2}$$

для интегро-дифференциальной системы уравнений

$$\begin{gathered}
z_{1t}(x,t)=\triangle z_1(x,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{t}k_{1i}(t-s)z_i(x,s)ds,\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+,\\
z_{3t}(x,t)=\triangle z_2(x,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{t}k_{2i}(t-s)z_i(x,s)ds,\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+,\\
0=\triangle z_3(x,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{t}k_{3i}(t-s)z_i(x,s)ds,\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+.
\end{gathered}\tag{3.7.3}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\theta \in \mathbb{R}$, заданы функции $z_{i-} : \overline{\mathbb{R}}_- \to \mathbb{R}$, $k_{ji} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Положим $H^2_\theta(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : (1-\theta)u(x) + \theta\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^3$, $D_M = \left(H^2_\theta(\Omega)\right)^3$,

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix},\ \mathcal{K}(s) = \begin{pmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) & k_{13}(s) \\ k_{21}(s) & k_{22}(s) & k_{23}(s) \\ k_{31}(s) & k_{32}(s) & k_{33}(s) \end{pmatrix}$$

при $s \geq 0$. Как уже отмечалось в §2.5 оператор $M$ сильно $(L, 1)$-радиален и подпрострвнства $\mathfrak{U}^0$, $\mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V}^0$ и $\mathfrak{V}^1$ выглядят следующим образом

$$\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{V}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \quad \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{V}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\} \times \{0\}.$$

Поэтому условие $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{U}^1$ в данной ситуации означает, что $k_{2i} \equiv k_{3i} \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$, условие $\ker\mathcal{K}(s) \supset \mathfrak{U}^0$ — что $k_{j2} \equiv k_{j3} \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$. Именно эти два случая позволяют исследовать результаты, полученные в §3.2. По теореме 3.2.1 сразу получим следующий результат.

**Теорема 3.7.1.** *Пусть функция* $z_{1-} \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, *функции* $z_{2-}, z_{3-} \in C(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega))$ *ограничены*, $z_{2-}(\cdot, 0) \equiv z_{3-}(\cdot, 0) \equiv 0$, $k_{2i} \equiv k_{3i} \equiv 0$, $k_{1i} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $k_{1i}, k'_{1i} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$. *Тогда задача* (3.7.1)–(3.7.3) *имеет единственное решение*

$$z_1, z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)),$$

$$z_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)).$$

Для второго случая аналогичным образом можно исследовать не только задачу (3.7.1), но и, используя теорему 3.2.4, обобщенную задачу Шоуолтера–Сидорова

$$z_1(x, t) = z_{1-}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-. \qquad (3.7.4)$$

**Теорема 3.7.2.** *Пусть* $z_{1-} \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, $k_{j2} \equiv k_{j3} \equiv 0$, $k_{j1} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})$, $k_{j1}, k'_{j1} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $j = 1, 2, 3$. *Тогда задача* (3.7.2)–(3.7.4) *имеет единственное решение*

$$z_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)),$$

$$z_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)), \quad z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)).$$

# Заключение

В данной работе получены условия однозначной разрешимости начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений в банаховых пространствах с интегральными возмущениями двух видов — для нагруженных уравнений и для уравнений с памятью. Абстрактные результаты использованы для установления существования единственного решения различных начально-краевых задач для не разрешимых относительно производной по времени уравнений и систем уравнений в частных производных с интегральным оператором памяти и с оператором Фредгольма по временно́й переменной. В частности это линеаризованные интегро-дифференциальные системы уравнений Осколкова, описывающие динамику жидкости Кельвина–Фойгта нулевого, а также высокого (второго и выше) порядка, алгебро-интегро-дифференциальная система уравнений с частными производными, вырожденная система интегро-дифференциальных уравнений функций одной переменной, нагруженные псевдопараболические уравнения, возникающие в теории фильтрации.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании новых начально-краевых задач для вырожденных уравнений и систем уравнений в частных производных с памятью, при рассмотрении соответствующих прикладных задач — для корректного выбора условий и данных задачи, при разработке численных методов и изучении обратных коэффициентных задач — для исследования возникающих при этом нагруженных эволюционных уравнений.

**Обозначения и соглашения**

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, при этом

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$;

$\mathbb{R}_- = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_- = \{0\} \cup \mathbb{R}_-$;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

2. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов, кроме операторов, которые обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

3. $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{F}$;

$\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в пространстве $\mathfrak{U}$ операторов, действующих в пространство $\mathfrak{F}$;

$\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

4. Область определения оператора $A$ обозначается через $D_A$, его ядро — через $\ker A$, образ — через imA.

5. $C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ — класс непрерывных функций, имеющих непрерывные по совокупности переменных частные производные по первому аргументу до порядка $p+1$;

$C_0^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ — банахово пространство $k$ раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных на $\overline{\mathbb{R}}_+$ вместе с $k$ первыми производными функций, удовлетворяющих равенствам $u^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, 1, \ldots, k$, с нормой

$$\|u\|_{C_0^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \geq 0} \|u^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{U}}.$$

Для краткости обозначим $C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \equiv C_0^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$;

$\mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ — множество функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, для которых несобственный интеграл Римана $\int_0^{+\infty} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}} dt$ сходится.

6. Символом $s\text{-}\lim$ обозначается предел последовательности операторов в сильной топологии.

7. Символами $I$ и $\mathbb{O}$ обозначаются соответственно тождественный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

8. Символ $\Box$ лежит в конце доказательства.

# Список литературы

[1] Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438+xviii с.

[2] Дженалиев, М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М. Т. Дженалиев. — Алматы: Компьюторный центр ИТПМ, 1995.

[3] Дженалиев, М. Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов. — Алматы: Fылым, 2010.

[4] Дзекцер, Е. С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е. С. Дзекцер // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 202, № 5. — С. 1031–1033.

[5] Иванова, Н. Д. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения / Н. Д. Иванова, В. Е. Федоров, К. М. Комарова // Вестник Челяб. гос. ун-та. — 2012. — № 26. — Сер. Математика. Механика. Информатика. — Вып. 15. — С. 49–70.

[6] Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

[7] Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[8] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская – М.: Физматлит, 1961.

[9] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007.

[10] Мельникова, И. В. Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений / И. В. Мельникова // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 4. — С. 892–910.

[11] Нахушев, А. М. Нагруженные уравнения и их приложения / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения — 1983. — Т. 19, № 1. — С. 86–94.

[12] Нахушев, А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения — 1976. — Т. 12, № 1. — С. 103–108.

[13] Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М.: Высшая школа, 1995.

[14] Нахушева, В. А. Нагруженные уравнения и их приложения / В. А. Нахушева — М.: Наука, 2006.

[15] Осколков, А. П. Начально–краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

[16] Плеханова, М. В. О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — Т. 75, № 2. — С. 177–194.

[17] Рузакова, О. А. Об $\varepsilon$-управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах / О. А. Рузакова, В. Е. Федоров // Вычислительные технологии. — 2005. — Т. 10, № 5. — С. 90–102.

[18] Руткас, А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax`(t) + Bx(t) = f(t)$ / А. Г. Руткас // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 11. — С. 1996–2010.

[19] Свиридюк, Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.

[20] Сербина, Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах / Л. И. Сербина. — М.: Наука, 2007.

[21] Сидоров, Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. — 1984. — Т. 25, № 4. — С. 569–578.

[22] Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.

[23] Соломяк, М. З. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 5. — С. 767–769.

[24] Стахеева, О. А. Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью / О. А. Стахеева // Вестник Челябинского гос. ун-та. — 2009. — № 20 (158). — Сер. Математика. Механика. Информатика. — Вып. 11. — С. 70–76.

[25] Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М. : Мир, 1980.

[26] Фалалеев, М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 90–102.

[27] Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. — 2010. — № 35 (211). — Сер. Мат. моделирование и программирование. — Вып. 6. — С. 104–109.

[28] Фалалеев, М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2011. — Т. 4, № 1. — С. 118–134.

[29] Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 10. — С. 68–79.

[30] Федоров, В. Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно $p$-радиальными операторами / В. Е. Федоров // Докл. Академии наук. — 1996. — Т. 351, № 3. — С. 316–318.

[31] Федоров, В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В. Е. Федоров // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 173–200.

[32] Федоров, В. Е. Обобщение теоремы Хилле–Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 2. — С. 426–448.

[33] Федоров, В. Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов / В. Е. Федоров // Вестник Челяб. гос. ун-та. — 2009. — № 20. — Сер. Математика. Механика. Информатика. — Вып. 11. — С. 12–19.

[34] Федоров, В. Е. Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров, Н. Д. Иванова // Сибирские электронные мат. известия. Т. 8. Труды второй международной школы-конференции. Ч. I. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». — 2011. — С. 363–378. (http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf)

[35] Федоров, В. Е. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т.53, № 2. — С. 418–429.

[36] Федоров, В. Е. Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 1. — С. 71–81.

[37] Федоров, В. Е. О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров, О. А. Рузакова // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 189–217.

[38] Федоров, В. Е. О локальной разрешимости линейных эволюционных уравнений с памятью / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. —2008. — № 27 (127). — Сер. Мат. моделирование и программирование. — Вып. 2. — С. 104–109.

[39] Федоров, В. Е. О разрешимости линейных уравнений соболевского типа с эффектом памяти / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 2010. — С. 245–261.

[40] Федоров, В. Е. О разрешимости эволюционных уравнений с памятью / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. — 2014. — № 19 (190). — Сер.: Математика. Физика. — Вып. 36. — С. 111–125.

[41] Федоров, В. Е. О локальном существовании решений уравнений с памятью, не разрешимых относительно производной по времени / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Мат. заметки. — 2015. — Т.98, № 3. — С. 414–426.

[42] Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: Функциональный анализ и полугруппы, 1962.

[43] Gatti, S. Robust exponential attractors for a family of nonconserved phase-field systems with memory / S. Gatti, M. Grasselli, V. Pata, M. Squassina. // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2005. — Vol. 12, № 5. — P. 1019–1029.

[44] Giorgi, C. Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory / C. Giorgi, A. Marzocchi // Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 1998. — Vol. 5. — P. 333–354.

[45] Grasselli, M. Exponential stability and singular limit for a linear thermoelastic plate with memory effects / M. Grasselli, M. Squassina // Advances in Mathematical Sciences and Applications. — 2006. — Vol. 16, № 1. — P. 15–31.

[46] Gurtin, M. E. A general theory of heat conduction with finite wave speeds / M. E. Gurtin, A. C. Pipkin // Arch. Rational Mech. Anal. — 1968. — Vol. 31. — P. 113–126.

[47] Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York etc.: Marcel Dekker Inc., 1999. — 324 p.

[48] Showalter, R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R. E. Showalter // SIAM J. Math. Anal. — 1975. — Vol. 6, № 1. — P. 25–42.

[49] Showalter, R. E. Partial differential equations of Sobolev–Galperin type / V. E. Fedorov // Pacific J. Math. — 1969. — Vol. 31, № 3. — P. 787–793.

[50] Sidorov, N. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 548 p.

[51] Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. — 216+vii p.

**Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ведущих периодических изданий**

[52] Федоров, В. Е. Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оперетором при производной / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 190–205.

[53] Федоров, В. Е. О разрешимости линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Изв. Иркут. гос. ун-та. — 2014. — Т. 10. — С. 106–124.

[54] Борель, Л. В. О разрешимости вырожденных нагруженных систем уравнений / Л. В. Борель // Мат. заметки Сев.-Восточн. федеральн. ун-та. — 2015. — Т. 22, № 4 (88). — С. 3–11.

[55] Федоров, В.Е. Исследование вырожденных эволюционных уравнений с памятью методами теории полугрупп операторов / В.Е. Федоров, Л.В. Борель // Сиб. мат. журн. — 2016. — Т. 57, № 4. — С. 899–912.

**Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным**

[56] Борель, Л. В. Задача Шоуолтера для нагруженных уравнений Соболевского типа / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Фундаментальная математика и её приложения в естествознании: тез. докл. Междунар. шк.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — С. 205.

[57] Борель, Л. В. О разрешимости линейных нагруженных уравнений Соболевского тип / Л. В. Борель // Физ.-мат. науки и образование: материалы Всеросс. научно-практическ. конф. — Магнитогорск: МаГУ, 2012. — С. 73–75.

[58] Borel, L. V. The Showalter problem for a class of weighted Sobolev-type equations / L. V. Borel, V. E. Fedorov // Нелинейные уравнения и комплексный анализ: тез. докл. междунар. конф. — Уфа: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 2013. — С. 14–15.

[59] Борель, Л. В. Задача Коши для класса линейных нагруженных уравнений Соболевского типа / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тез. докл. IV междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения чл.-корр. РАН, акад. Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. — Москва: РУДН, 2013. — С. 168–169.

[60] Борель, Л. В. Нагруженные уравнения Соболевского типа / Л. В. Борель // Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных ураненииях и теории чисел: тез. докл. междунар. конф. — Белгород: БелГУ, 2013. — С. 31–32.

[61] Борель, Л. В. Один класс интегро-дифференциальных уравнений Соболевского типа / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева. — Новосибирск: Ин-т математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 2013. — С. 101.

[62] Борель, Л. В. Разрешимость вырожденных эволюционных уравнений с памятью / Л. В. Борель, В. Е. Федоров // Материалы Воронеж. зимн.

мат. шк. С. Г. Крейна. Воронеж: Издат.-полиграфич. Центр «Научная книга», 2014. С.65–67.

[63] Borel, L. V. Solvability of degenerate evolution equations with memory / L. V. Borel, V. E. Fedorov // Нелинейные уравнения и комплексный анализ: тез. докл. междунар. конф. памяти акадкмика Ильина А.М. — Уфа: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 2014. — С. 13–14.

[64] Borel, L. Investigation of degenerate evolution equations with memory using the methods of the Theory of Semigroups of operators / L. Borel // Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology: abstracts of International Conference. — Izmir: Izmir University, 2015 — P. 27–28.

[65] Борель, Л.В. Об однозначной разрешимости системы гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска / Л.В. Борель, В.Е. Федоров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 2. — С. 16–23.