МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УНЦ РАН
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, ПОСВЯЩЁННАЯ 100-ЛЕТИЮ ЧЛ.-КОРР. РАН СССР А.Ф. ЛЕОНТЬЕВА.

Сборник тезисов
(г. Уфа, 24 – 27 мая 2017 г.)

УФА
РИЦ БашГУ
2017

УДК 51
ББК 22.1
М43

*Сборник издан при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ),
проект № 17-01-20080-г*

*Печатается по решению
факультета математики и информационных технологий БашГУ
(протокол №7 от 24.04.2017)
и Института математики с вычислительным центром УНЦ РАН
(протокол №2 от 18.04.2017)*

Ответственный редактор:
канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник
Р.Н. Гарифуллин

Международная математическая конференция по теории функций, посвящённая 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева**:**
У88 сборник тезисов (г. Уфа, 24 – 27 мая 2017 г.)
/ отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2017. – 214 с.
ISBN 978-5-7477-4392-2

В сборнике представлены тезисы докладов участников международной математической конференции по теории функций, посвящённой 100-летию члена-корреспондента Академии наук СССР Алексея Фёдоровича Леонтьева.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7477-4392-2

BASHKIR STATE UNIVERSITY
INSTITUTE OF MATHEMATICS
WITH COMPUTER CENTER OF RAS
ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF BASHKORTOSTAN

INTERNATIONAL MATHEMATICAL CONFERENCE ON FUNCTION THEORY DEDICATED TO THE CENTENARY OF CORRESPONDING MEMBER OF USSR ACADEMY OF SCIENCES A.F. LEONT'EV

BOOK OF ABSTRACTS
May 24 - 27, 2017

UFA - 2017

UDC 51
BBK 22.1

The Conference is sponsored
by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR)
Grant № 17-01-20080

International Mathematical Conference on Function Theory dedicated to the centenary of Corresponding member of USSR Academy of Sciences A.F. Leont'ev. Book of Abstracts.
Ufa, Russia: RITS BashSU, 2017. – 214 p.
ISBN 978-5-7477-4392-2

The book contains abstracts of the talks at International Mathematical Conference on Function Theory dedicated to the centenary of Corresponding member of USSR Academy of Sciences Aleksei Fedorovich Leont'ev.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-7477-4392-2

Инвариантные подпространства оператора интегрирования в весовых банаховых пространствах голоморфных функций

Абанин А.В.

Южный федеральный университет, г.Ростов-на-Дону, Россия

Проблема описания инвариантных подпространств для оператора Вольтерра в вещественном случае исследована достаточно полно. Что касается результатов для пространств голоморфных функций, то их не так много. Недавно А. Алеман и Б. Коренблюм [1] сформулировали ряд достаточных условий того, что в абстрактном банаховом пространстве функций, голоморфных в единичном круге, все инвариантные подпространства оператора интегрирования имеют вид $z^n X$, $n \in \mathbb{N}$. Область применимости условий из [1] — пространства функций медленного роста. Другим методом О. Константин и Х.А. Пелаез [2] получили аналогичный результат для пространств Фока целых функций, задаваемых быстро растущими весами. Сформулированные ими общие условия на веса удалось проверить для весов одного специального вида, а их проверка для других известных примеров быстро растущих весов представляется трудной, более того невыполнимой, задачей.

В докладе будет представлен новый подход к исследованию обозначенной проблемы, который применим к широкому спектру классических шкал весовых банаховых пространств голоморфных функций в круге и на плоскости — Бергмана, Дирихле, Блоха и Фока, задаваемых весами общего вида. Он основан на привлечении близких весовых пространств и пригоден для весов как медленного, так и быстрого роста. Основные результаты получены автором совместно с Фам Чонг Тиеном.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01404).

[1] Aleman A., Korenblum B. Volterra invariant subspaces of H^p. Bull. Sci. Math. // 2008. Vol. 132, No. 6. P. 510–528.

[2] Constantin O., Peláez J. A. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood-Paley formular on weighted Fock spaces. // J. Geom. Anal. 2016. Vol. 26, No. 2. P. 1109–1154.

Представление аналитических функций

Абдулнагимов А.И.
Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

Пусть $\Lambda_{\mathbb{Z}} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – перенумерованная (каким-либо образом) в порядке не убывания модулей последовательность всех комплексных чисел с целочисленными координатами: $\lambda_k = m + il$, $m, l \in \mathbb{Z}$. Обозначим через D – ограниченную выпуклую область в $\mathbb{C}$ и $H(\overline{D})$ – пространство функций, аналитических в окрестности ее замыкания $\overline{D}$. Пусть $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset \mathrm{int} K_{p+1}$, $p \geq 1$, (символ int означает внутренность множества) и $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$. Для каждого $p \geq 1$ введем банахово пространство последовательностей комплексных чисел

$$Q_p = \left\{ d = \{d_k\} : \ \|d\|_p = \sup_{k \geq 1} |d_k| \, \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty \right\},$$

где $H_L(\lambda) = \sup_{z \in L} Re(z\lambda)$ – комплексная опорная функция множества L.

Пусть $Q(D, \Lambda_{\mathbb{Z}}) = \bigcap_{p \geq 1} Q_p$ наделено топологией проективного предела.

Теорема. Пусть D – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Тогда каждая функция $g \in H(\overline{D})$ представляется рядом

$$g(z) = \sum_{m,l \in \mathbb{Z}} d_{m,l} \, e^{(m+il)z}, \quad z \in D. \tag{1}$$

При этом $\{d_{m,l}\} \in Q(D, \Lambda_{\mathbb{Z}})$ и ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах области D.

Замечания. **1.** Согласно теореме Абеля для рядов экспонент из работы [1] (Теорема 3.1), ряд (1) сходится в выпуклой области (возможно не ограниченной) абсолютно и равномерно на ее компактных подмножествах. Эта область определяется при помощи формулы Коши-Адамара для рядов экспонент ([1, Теорема 4.1]).

2. Из Леммы 2.5 работы [1] следует, что для каждого набора коэффициентов $\{d_{m,l}\} \in Q(D, \Lambda_{\mathbb{Z}})$ сумма $g(z)$ ряда (1) является функцией аналитической в области D (но не обязательно в окрестности $\overline{D}$).

[1] Кривошеева О.А. Область сходимости рядов экспоненциальных мономов. Уфимский математический журнал. 2011. Т.3. №2. С. 43–56.

Медленно убывающие функции в алгебре Шварца.

Абузярова Н. Ф.
ФМиИТ БашГУ, Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{P}$ – АЛГЕБРА ШВАРЦА, состоящая из всех целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси. Согласно хорошо известной теореме Пэли-Винера-Шварца, $\mathcal{P}$ есть изоморфный образ при преобразовании Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ пространства $\mathcal{E}'$ всех распределений с компактным носителем на вещественной прямой, причем операции умножения в $\mathcal{P}$ соответствует оператор свертки в $\mathcal{E}'$. Одним из важных вопросов, изучаемых в $\mathcal{E}'$ является вопрос о сюръективности оператора свертки, порожденного распределением $S_0 \in \mathcal{E}'$.

В работе Л. Эренпрайса [1] доказано, что свертка с S_0 сюръективна тогда и только тогда, когда функция $\varphi_0(z) = \mathcal{F}(S_0)(z) = S_0(e^{-itz}) \in \mathcal{P}$ является *медленно убывающей*: $\exists a > 0$, такое, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x' \in \mathbb{R}$: $|x - x'| \le \ln(1 + |x|)$, $|\varphi_0(x')| \ge (a + |x'|)^{-a}$.

Медленное убывание функции $\varphi \in \mathcal{P}$ эквивалентно ее *обратимости в* $\mathcal{P}$, то есть справедливости импликации: $\Phi \in \mathcal{P}$, Φ/φ – целая функция $\Longrightarrow \Phi/\varphi \in \mathcal{P}$ (см. [2, Prop. 3, Remark 3]).

В своей работе [1] Л. Эренпрайс сформулировал задачу о нахождении критерия медленного убывания функции $\varphi \in \mathcal{P}$ в терминах условий на ее нулевое множество Λ_φ и привел одно необходимое условие на Λ_φ. В монографии [3] приведены достаточные условия на Λ_φ, полученные путем сравнения этого множества с множеством нулей функции $\sin bz$.

Для последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ введем обозначения $\Lambda_+ = \Lambda \bigcap (0; +\infty)$, $\Lambda_- = \Lambda \bigcap (-\infty; 0)$ и определим функции: $n_+^\pm(x,t)$ – разность между числом точек $\lambda \in \Lambda_+$ в промежутках $(x; x+t]$ и $(x-t; x]$, $x > 0$, $t \in (0; x)$. $n_-^\pm(x,t)$ – аналогичная функция для последовательности $(-\Lambda_-)$.

Теорема. *Предположим, что множество нулей* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *функции* $\varphi_0 \in \mathcal{P}$ *удовлетворяет условиям: 1)* $\Lambda \subset \mathbb{R}$; *2)* $|\lambda_k - \lambda_m| \ge d_0 > 0$, $k \ne m$; *3) для некоторой постоянной* $C_0 \ge 0$

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \sup_{1\le M\le x} \frac{M(n_+^\pm(Mx, x) - C_0)}{\ln x} < +\infty,$$

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \sup_{1\le M\le x} \frac{M(n_-^\pm(Mx, x) - C_0)}{\ln x} < +\infty.$$

Тогда функция φ_0 *обратима (медленно убывает) в* $\mathcal{P}$.

[1] L. Ehrenpreis. *Solution of some problems of division, IV.//* Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.

[2] C.A. Berenstein, B.A. Taylor. *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable.*// Advances in Mathematics. 1980. V. 33. P. 109-143.

[3] R.E.A.C. Paley, N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain.*// New York. 1934.

Об условиях разрешимости в весовом пространстве типа Соболева одного операторно-дифференциального уравнения с обратно параболической главной частью

Алиев А.Р.[1], Сойлемезо М.А.[2]

[1]Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,

[2]Бакинский инженерный университет

Для функций $u(t)$, определенных в $R = (-\infty, +\infty)$, со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H введем следующие пространства с экспоненциальным весом $e^{-\frac{\kappa}{2}t}$, $\kappa \in R$:

$$L_{2,\kappa}(R;H) = \left\{ u(t) : \|u\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(t)\|^2_H \, e^{-\kappa t} dt < +\infty \right\},$$

$$W^3_{2,\kappa}(R;H) = \left\{ u(t) : \|u\|^2_{W^3_{2,\kappa}(R;H)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \right\|^2_H + \left\| A^3 u(t) \right\|^2_H \right) \right.$$
$$\left. \times e^{-\kappa t} dt < +\infty \right\},$$

где A - самосопряженный положительно-определенный оператор в H, а производные понимаются в смысле теории распределений.

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d}{dt} - A \right)^3 u(t) + \sum_{j=1}^{2} A_j \frac{d^{3-j} u(t)}{dt^{3-j}} = f(t), t \in R, \qquad (1)$$

где $f(t) \in L_{2,\kappa}(R;H)$, $u(t) \in W^3_{2,\kappa}(R;H)$, A_j, $j = 1, 2$, - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, а A - самосопряженный положительно-определенный оператор в H.

В работе [1] проведена классификация операторно-дифференциальных уравнений и по ней уравнение (1) при $A_j = 0$, $j = 1, 2$, относится к классу обратно параболических уравнений и, как очевидно, имеет кратную характеристику. Такого рода уравнения часто встречаются в различных областях естествознания.

В настоящей работе установлены условия на операторные коэффициенты, когда уравнение (1) имеет единственное решение $u(t) \in W^3_{2,\kappa}(R;H)$ при любом $f(t) \in L_{2,\kappa}(R;H)$.

[1] Дубинский Ю. А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Математический сборник, 1973, т. 90(132), № 1, с. 3-22.

Критерий экспоненциальной устойчивости для системы функционально-дифференциальных уравнений гиперболического типа

Анисимова Г.Д.
Омский Государственный Технический Университет, г.Омск, Россия

Работа примыкает к [1]. Рассматривается $\Pi = \mathbb{R}\times[0,\infty)$ задача Коши

$$\begin{cases} Lu = Du + \displaystyle\int_0^1 [dB\,(s)]\,u\,(x,t-s) = 0, \quad t > 1, \\ u\,|_{\Pi_0} = \varphi \in \mathrm{E}, \quad \Pi_0 = \mathbb{R}\times[0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $D = \frac{d}{dt} + A\frac{d}{dx}$, $A = \operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_N)$, $a_1 > \ldots > a_N$, $a_k \neq 0$, $B\colon [0,1] \to \mathbb{C}^{N\times N}$, $\bigvee_0^1 (B) < \infty$, $u = \left(u^1,\ldots,u^N\right)^T$, Е — банахово пространство непрерывных ограниченных функций $\Pi_0 \to \mathbb{C}^N$ с нормой $\sup|\varphi|$.

Через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Pi$ проходят характеристики $q_1,\ldots,$ q_N с уравнениями $x = \sigma_k\,(t, x_0, t_0) = x_0 + a_k\,(t-t_0)$. Оператор D далее понимается в обобщённом смысле $D = \operatorname{diag}(D_1,\ldots,D_N)$, где $D_k u^k$ – производная по t вдоль q_k. Под решением задачи (1) понимается функция $u \in \mathrm{C}(\Pi,\mathbb{C}^N)$ с гладкими вдоль “своих” характеристик q_k компонентами u_k, удовлетворяющая (1). Имеет место однозначная разрешимость в этом классе, обозначаемом далее C^1_x.

В работе исследуется устойчивость решений задачи (1) сведением к такой же проблеме для разностной задачи Коши вида

$$u_n = \Gamma u_{n-1}, n = 1,2,\ldots, \quad u_0 = \varphi \in \mathrm{E} \tag{2}$$

с компактным оператором Г в фазовом пространстве Е.

Построим по $\varphi \in E$ функции $\Pi_0 \to \mathbb{C}^N$

$$
\begin{gathered}
B_0\varphi = \int_0^t [dB\,(s)]\varphi\,(x, t-s)\,, \quad B_1\varphi = \int_t^1 [dB\,(s)]\varphi\,(x, 1+t-s)\,, \\
S\varphi = \int_0^t \begin{bmatrix} \varphi^1\,(\sigma_1\,(\tau, x, t)\,, \tau) \\ \dots \\ \varphi^N\,(\sigma_N\,(\tau, x, t)\,, \tau) \end{bmatrix} d\tau, \quad P\varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1\,(x - a_1 t, 1) \\ \dots \\ \varphi^N\,(x - a_N t, 1) \end{bmatrix}.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Лемма 1. $\mathbf{1^0}$. *Формулы (3) задают операторы из* End(E).
$\mathbf{2^0}$. *Оператор* $I + SB_0$ *имеет ограниченный обратный* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$.
$\mathbf{3^0}$. *Формула* $\Gamma = (I + SB_0)^{-1}\,(P - SB_1)$ *задаёт компактный оператор* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$.

Лемма 2. *Функция* $u\colon \Pi \to \mathbb{C}^N$ *является решением класса* C_x^1 *задачи (1) точно тогда, когда последовательность* $u_n\,(x, t) = u\,(x, t+n)\,,$ $(x, t) \in \Pi_0, n = 0, 1, \dots$ *является решением задачи (2) с оператором* 2^0.

В силу структуры спектра компактного оператора в банаховом пространстве спектр оператора Γ состоит из точки $\xi = 0$ и не более чем счётного множества собственных чисел с единственной возможной предельной точкой $\xi = 0$.

Поставим в соотвествие оператору (1) матричный пучок

$$
\Delta\,(\lambda, \mu) = \lambda I + \mu A + \int_0^1 e^{-\lambda s} dB\,(s), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \tag{4}
$$

Следующий результат является базовым для итоговой теоремы 2.

Теорема 1. *Число* $\xi \neq 0$ *является собственным числом оператора* Γ *точно тогда, когда при некотором* $\mu \in i\mathbb{R}$ *и некотором* λ *из множества* $M_\xi = \{\lambda = \ln\xi + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ *выполняется равенство*

$$
\det\Delta\,(\lambda, \mu) = 0. \tag{5}
$$

Будем говорить, что решение $u = 0$ системы (1) *экспоненциально устойчиво*, если это имеет место для решения $u_n = 0$ уравнения (2): для решений задачи Коши (2) имеет место при некоторых $\mu, \nu > 0$ оценка

$$
\|\Gamma^n\varphi\|_{\mathrm{E}} \leq \mu e^{-\nu n}\|\varphi\|_{\mathrm{E}}.
$$

Теорема 2. *Решение* $u = 0$ *системы (1) экспоненциально устойчиво точно тогда, когда при каждом* $\mu \in i\mathbb{R}$ *уравнение (5) не имеет* λ*-корней с реальной частью* $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.

Утверждение теоремы сохраняется, если в (1) $A = Z^{-1}\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_N)Z$.

[1] Романовский Р. К., Назарук Е. М. О дихотомии линейных автономных систем функционально-дифференциальных уравнений/ Матем. заметки, Т.95:1, 2014. С. 129–135.

Анализ существовании предельных цыклов и устойчивости решений квазилинейных динамических систем

Арабов М.К., Собиров Х.И.
Научно-исследовательский институт ТНУ, г.Душанбе, Таджикистан

Отметим, что предельные циклы [1] нашли широкое применение во многих областях естествознания: радиофизике, теории колебаний, математической биологии, химии, авиации, автоматическом регулировании, математической экономике, астрономии, медицине и т.д. Настоящий доклад посвящено исследованию предельных циклов нелинейного уравнения [2-3] второго порядка вида

$$y'' + ay' + by + c|dy' + ey - \varphi(y, y')| = 0. \tag{1}$$

где a, b, c, d, e-вещественные числа, а функция $\varphi(y, y')$-ограниченная, и удовлетворяющая условиям:

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{|\varphi(x, y)|}{|x| + |y|} = 0.$$

Имеем

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|dx_1 - ex_2 - \varphi(y, y')|. \end{cases} \tag{2}$$

где $y = x_1, y' = x_2$. Особые точки системы (2) лежат на оси абсцисс, т.е. имеют вид $(x_0, 0)$, где x_0 является решением скалярного уравнения

$$bx + c|dx - \varphi(x, 0)| = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) может иметь единственное и бесконечное множество решений, а также не иметь решения. Здесь мы рассмотрим случай, когда оно имеет единственное решение x_0, причем $x_0 \neq 0$.

Теорема 1. Пусть $\varphi = \lambda \neq 0, d = 0, e = 0, a > 0$ и $b - |c| > \frac{a^2}{4}$, тогда стационарные решения уравнения (1) устойчивы в целом.

Теорема 2. Предположим, что:

а) коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям $e = 0$, $d = 1$, $a > \max\{0, c - 2\sqrt{b}\}$; б) функция $\varphi(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условиям:
$((c - a)y + c\varphi(x, y) - c\varphi(x, 0))y \geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (2), отличного от стационарного, и любой последовательности $h_k \to +\infty$ существует подпоследовательность h_{k_j} такая, что решения $(x(t + h_{k_j}), y(t + h_{k_j}))$ равномерно на каждом отрезке приближаются к некоторому периодическому решению системы (2) при $j \to +\infty$.

[1] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

[2] Юмагулов М.Г., Арабов М.К. Признаки бифуркации Андронова-Хопфа для динамических систем, содержащих негладкие нелинейности // Известия Академии наук РТ, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. - 2016. - №2 (163). - С. 31-39.

[3] Арабов М.К. Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка //Известия Академии наук РТ, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. - 2015. - 1 (158). - С. 42-49.

Топологические методы анализа существования периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка

Ахмедов Дж.Т., Нуров И.Дж.

Научно-исследовательский институт ТНУ, г.Душанбе,Таджикистан

Настоящий доклад посвящён исследованию периодических решений уравнению вида

$$y'' + ay' + by + c|y' - \varphi(t, y, y')| = 0, \tag{1}$$

где функция $\varphi(t, y, y')$ является периодична по t и

$$\lim_{|y|+|y'|\to\infty} \max_t \frac{\varphi(t, y, y')}{|y| + |y'|} = 0.$$

Введём в рассмотрение семейство уравнений вида

$$y'' + ay' + by + c|y' - \mu\varphi(t, y, y')| = 0, \tag{2}$$

Как известно, вопрос о существование периодических решений [1]-[3] уравнение (2) может быть сведен к вопросу о неподвижных точек некоторых интегральных операторов, действующий в соответствующих функциональных пространствах.

Лемма 1. Пусть $a = 0$ или $a \neq 0$ и $b = \frac{c^2}{4} + \frac{\pi^2 j^2}{\omega^2}, j = 0, 1, 2, ...,$. Тогда уравнение (1) в случай $\varphi(t, y, y') = 0$ имеет ω-периодическое решение.

Теорема 1. Пусть $b \neq 0$ и выполнено одно из следующих условий:

$$1. \qquad a \neq 0;$$

$$2. \qquad a = 0, b \neq \frac{c^2}{4} + \frac{\pi^2 j^2}{\omega^2}, j = 0, 1, 2, ...,$$

тогда для множество ω-периодических решений семейство уравнения (2) справедливо априорная оценка: $\exists R > 0$, что $\forall y(t, \mu), y(t + \omega, \mu) = y(t, \mu)$ выполнено неравенство

$$\max_t (|y(t, \mu)| + |y'(t, \mu)|) < R$$

.

[1] Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа. М.:Наука, 1975.

[2] Мухамадиев Э.М. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Доклады АН СССР . - 1970, т.194, с. 510-513.

[3] Ахмедов Дж.Т. Анализ периодических решений негладкой динамической системы с вынужденным колебанием / Дж.Т. Ахмедов, С.Х. Мирзоев, И.Дж. Нуров. // Вестник ТНУ. - 2016. - вып. 1-3. - с. 14-17.

Формула Муртазина для спектра возмущений самосопряженных операторов и следствия из нее

Ахмерова Э.Ф.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматриваются возмущенные операторы вида $H = H^0 + V$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Самосопряженный оператор H^0 имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$ и соответствующие собственные проекторы P_k, причем $\inf\limits_{k \geq 1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$.

Обозначим через $R^0(\lambda)$ резольвенту оператора H^0. Пусть симметрический оператор $V\ H^0$ компактен и $d_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n,\ \lambda_n - \lambda_{n-1})/2$, существует последовательность ρ_n, такая, что

$$0 < \rho_n \leq d_n, \quad \inf_{n\geq 2} \rho_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{|\lambda-\lambda_n|\leq\rho_n} \|R_n^0(\lambda)V\| = 0,$$

где $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - P_n(\lambda_n - \lambda)^{-1}$. Тогда известно, что оператор H замкнут в области определения H^0 и имеет дискретный спектр.

Формула для спектра (вообще говоря абстрактного самосопряженного оператора H), предложенная Муртазиным Х.Х., впервые была анонсирована в работе [1]. Согласно рассуждениям этой работы, спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + P_nVP_n - P_nVR_n(\lambda)VP_n,$$

где $R_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[R_n^0(\lambda)V\right]^k R_n^0(\lambda)$.

Тем не менее, эта формула была применена только для конкретных дифференциальных операторов с разделенными краевыми условиями. Целью этой работы является:

a) показать применимость этой формулы для дифференциальных операторов 2n-го порядка с общими краевыми условиями;

b) показать применимость этой формулы для некоторого класса дифференциальных операторов в частных производных;

c) непосредственно получить формулу регуляризованного следа;

d) привести конкретные примеры.

[1] Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х. *Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов* // Докл. РАН. 2003.Т. 388, № 6. С. 731-733.

Асимптотические решения задачи конвективной диффузии в диффузионном пограничном слое внутри капли с учётом нелинейной объёмной химической реакции

Ахметов Р.Г.
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Рассматривается стационарная конвективная диффузия внутри капли при наличии нелинейной объемной химической реакции. Аналогичные и более сложные задачи исследовались во многих работах [1]. Задачи такого рода возникают в химической технологии. В докладе предполагается дать обзор основных результатов автора по данной теме. Для задачи стационарной конвективной диффузии внутри сферической капли при наличии объемной химической реакции построено асимптотическое решение по малому параметру в диффузионном пограничном слое внутри капли с учётом нелинейной объёмной химической реакции. Малый параметр соответствует большим числам Пекле. Предполагается, что число Пекле и константа скорости химической реакции стремятся к бесконечности, а их отношение ограничено. Ранее был рассмотрен случай линейной химической реакции [2].

[1] Гупало Ю. П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука. 1985. 336 стр.

[2] Головин А. М., Животягин А. Ф. Влияние объемной химической реакции на массоперенос внутри капли при больших числах Пекле // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. и механ. N 4 (1979) 77-83.

Специальные решения интегрируемых и неинтегрируемых систем

Баландин С.П.
Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Система двух связанных нелинейных уравнений Шредингера без диссипации, но с учетом смешения мод различной поляризации играет важную роль в нелинейной оптике. Она описывает различные физические процессы при некоторых выделенных значениях параметра. Проверкой на свойство Пенлеве найдены два значения параметра ρ, обеспечивающих полную интегрируемость. Построены специальные решения без подвижных особенностей путем обрыва разложений, являющимся по сути автопреобразованием Беклунда тривиального решения.

Специальным решением системы НУШ вида

$$-iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} = kv + (|u|^2 + \rho|v|^2)u, \quad -iv_z + \frac{1}{2}v_{tt} = ku + (|v|^2 + \rho|u|^2)v$$

служит $u = (\sqrt{\rho+1}(t+bz+c))^{-1}\exp(i(bt+(\frac{b^2}{2}\pm k)z+\theta)), v^2 = u^2$. Здесь $b \neq 0, c, \theta$ — произвольные константы.

Система обладает свойством Пенлеве, в частности, при $\rho = 1$ и $\rho = 3$. Для других физически важных случаев, таких как $\rho = 0$, $\rho = 2$ и $\rho = \frac{2}{3}$ система "не интегрируема". Однако полученное решение годится для всех значений параметра в диапазоне $-1 < \rho \leq \frac{25}{7}$.

Аналогичной процедуре было подвергнуто обобщение на случай переменных коэффициентов варианта уравнения Гинзбурга-Ландау с постоянными коэффициентами, приведенного в [1]. Мы рассмотрели уравнение с переменными коэффициентами

$$w_t = \alpha w + \beta w_{xx} - \gamma|w|^2 w,$$

распадающееся на два комплексно-сопряженных. Найдено его специальное решение при условии $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta^*}{\gamma^*} = k(x,t)$ — действительная функция. Выбирая $\varphi = a + b\exp(\nu x + \omega t)$, получаем

$$w = b\nu\sqrt{2}\varphi^{-1}\exp(\nu_1 x + \omega_1 t), \quad w^* = b\nu\sqrt{2}\varphi^{-1}\exp(\nu_2 x + \omega_2 t).$$

При этом имеем дополнительные соотношения на шесть параметров

$$\omega Re\gamma = 3k\nu^2|\gamma|^2, \omega_1 = \alpha + k\nu_1^2\gamma, \omega_2 = \alpha + k\nu_2^2\gamma^*, (\nu_2 - \nu_1)Re\gamma = 3i\nu Im\gamma,$$

а также

$$k = \exp((\nu_1 + \nu_2 - 2\nu)x + (\omega_1 + \omega_2 - 2\omega)t).$$

Это означает, что один из шести введенных параметров остается произвольным.

Примененный подход и разнообразные примеры его применения подробно описаны, например, в книге Кудряшова [2].

[1] Кудряшов А.Н.//Математическое моделирование (1989) Т.1, No 9, с.151-153.

[2] Кудряшов А.Н. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

Об одной краевой задачи для нагруженного уравнения смешанного типа с нехарактеристической линией изменения типа

Балтаева У.И.
Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан

Пусть Ω_1 — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y = 0,\ x = 1,\ x = 0,\ y = 1$ соответственно при $x > 0$; Ω_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси OY и двумя характеристиками $AD: x + y = 0,\ \ A_0D: x - y = -1$ при $x < 0$. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AA_0$.

В области Ω рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = \ cD_{0x}^{\alpha_i}\, u\,(x,0), \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1u \equiv u_{xx} + a_1u_x + b_1u_y + c_1u, & x \geq 0, \\ L_2u \equiv u_{xx} - u_{yy} + a_2u_x + b_2u_y + c_2u, & x \leq 0, \end{cases}$$

$cD_{0x}^{\alpha_i}$– регуляризованная дробная производная (оператор Капуто) дифференцирования порядка α_i, a_k, b_k, $c_k (k = 1, 2)$– действительные числа.

Задача. Найти регулярное в областях Ω_1 и Ω_2, решение $u(x, y)$ уравнения (1), которое $u(x, y) \in C^1(\Omega \cup AD \cup A_0D)$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x,y)|_{AB} = f_1(x),\ \ u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_1(y),\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1, \tag{1}$$

$$u(x,y)|_{AD} = \psi_1(y),\quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AD} = \psi_2(y),\quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{A_0D} = \psi_2(y),\quad \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$

и условиям склеиваниям

$$u_{xx}\,(+0, y) = u_{xx}\,(+0, y)\,,\ 0 < y < 1, \tag{4}$$

где $f_1(x)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ и $\psi_3(y)$ – заданные функции, причем $f_1(0) = \psi_1(0)$.

Теорема. *Если $b_1 < 0$, и выполнены условия φ_1, $f_1 \in C^1[0,1]$, $\psi_1(y) \in C^1[0,1/2] \cap C^3(0,1/2)$, $\psi_2(y) \in C[0,1/2] \cap C^2(0,1/2)$, $\psi_3(y) \in C[1/2,1] \cap C^2(1/2,1)$ то в области Ω существует единственное решение задачи.*

Однозначная разрешимость поставленной задачи доказывается с помощью теории интегральных уравнений[2].

[1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии, М.: Высшая школа. 1995, 301 с.

[2] Исломов Б., Балтаева У.И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка, Уфимский мат. журн. УФА, Т 3, № 3, 15–25 (2011).

Об исключительных множествах степенной малости

Башмаков Р.А., Махота А.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Нами рассматривается задача о связи между асимптотическим поведением δ-субгармонической функции и асимптотическим поведением разности ассоциированных мер.

При этом возникают некоторые исключительные множества.

Для заданного числа $\gamma \in \mathbb{R}$ множество A на плоскости называется множеством класса C_γ, если существует покрытие множества A кругами $B(z_j, r_j) = \{z : |z_j - z| < r_j\}$, $j = 1, 2, ...$, так, что выполняется условие

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Следующие свойства этих классов очевидны:

1. Всякое ограниченное множество принадлежит любому классу C_γ.

2.Объединение конечного набора множеств класса C_γ принадлежит классу C_γ.

3. Если $\gamma_1 \geq \gamma_2$, то $C_{\gamma_1} \supseteq C_{\gamma_2}$.

4. Множества класса C_0 являются C_0-множествами в классическом (см. [2]) смысле.

5. При $\gamma > 0$ класс C_γ содержит всю плоскость, значит, любое подмножество $\mathbb{C}$.

Доказаны менее очевидные свойства:

1. *Множество A принадлежит классу C_γ тогда и только тогда, когда существует покрытие этого множества кругами $B(z_j, r_j)$ так, что выполняется условие*

a) Если $\gamma > -1$, то

$$\sum_{|z_j|\le R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

b) Если $\gamma < -1$, то

$$\sum_{|z_j|\ge R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Следующее свойство является удобным при использовании множеств класса C_γ.

2. *Пусть $\gamma \le 0$ и $A \in C_\gamma$. Тогда для любого положительного числа $q > 0$ (если $\gamma = 0$, то $q < \frac{1}{8}$) и для всех $z \in \mathbb{C}$ с достаточно большим $|z|$ найдется $t \in (q; 2q)$ такое, что окружность $C(z,t) = \{w : |w - z| = t|z|^{\gamma+1}\}$ не пересекается с множеством A.*

Также установлена связь между классами C_γ и их пересечением $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{\gamma} C_\gamma$.

3. *Пусть $u(z)$ — некоторая вещественнозначная функция на плоскости, $v(t)$ — неотрицательная функция на $(0, +\infty)$. Тогда если для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ найдутся множество $A_\gamma \in C_\gamma$ и постоянная M_γ такие, что выполняется соотношение*

$$u(z) \le M_\gamma v(|z|), \quad z \notin A_\gamma,$$

то для любой положительной монотонно возрастающей до $+\infty$ функции $\chi(t)$ на $(0, +\infty)$ найдется множество $A \in \mathcal{C}$ так, что выполняется соотношение

$$u(z) \le v(|z|)\chi(|z|), \quad z \notin A.$$

[1] Румянцева А.А. Асимптотика δ-субгармонических функций и их ассоциированных мер // Уфимский мат. журнал, 2010, Т. 2, № 3, С. 83–107.

[2] Левин Б.Я. Распеределение корней целых функций. Гос. изд.-во тех.-теор. лит. М: 1956. 632с.

[3] Юлмухаметов Р.С. Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций // ДАН СССР. 1982. Т. 264, № 4.

[4] Юлмухаметов Р.С. Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций // Сиб. мат. ж. 1985. Т. 26, № 4. С. 159–175.

О построении границ областей устойчивости в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел

Белова А. С.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается задача о нахождении границ области устойчивости в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел. Дифференциальные уравнения этой задачи в координатах Нехвилла (ξ, η) имеют вид:

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \rho(\xi - \mu + \dfrac{(\mu-1)\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\mu(\xi-1)}{((\xi-1)^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}), \\ \eta'' - 2\xi' = \rho(\eta + \dfrac{(\mu-1)\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\mu\xi}{((\xi-1)^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}); \end{cases}$$

где $\rho = \frac{1}{1+\epsilon\cos t}$, $\mu = \frac{m_1}{m_0+m_1}$, ε - эксцентриситет кеплеровской орбиты $(0 < \varepsilon < 1)$, t - истинная аномалия, m_0 и m_1 – массы активно гравитирующих тел, μ – параметр масс $(0 < \mu < 1)$.

Указанная система имеет так называемые треугольные точки либрации: $L_4(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $L_5(\frac{1}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2})$. Эти точки, в зависимости от ε и μ могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

Границы области устойчивости (при малых μ) состоят из трех кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3 (см. [1]). Построению этих кривых посвящены работы многих авторов (см. [1],[2]).

В настоящем докладе обсуждается новая система построения кривой Γ_3, основанная на методе Розо (см. [3,4]).

[1] Маркеев А. П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312с.

[2] Kovacs T. Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 1-7. 2002.

[3] Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971.

[4] Ибрагимова Л.С., Мустафина И. Ж., Юмагулов М. Г. Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем, // УМЖ. 2016. №3 С.59-81.

Поведение максимального члена адамаровской композиции двух рядов Дирихле

Белоус Т.И.
УГАТУ, г.Уфа, Россия

Пусть L — класс непрерывных, неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций,

$$W = \{w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty\}$$

$$W_\varphi = \{w \in W : \lim_{t \to \infty} \varphi(t) \int_t^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx = 0\} \ \ (\varphi \in L),$$

$\Lambda = \{\lambda_n\} \, (0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = a < \infty.$$

Рассмотрим класс функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_0 = \{s : Res < 0\}$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{1}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Наряду с рядом (1) введем в рассмотрение ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{2}$$

где $B = \{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел b_n ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$), удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} = 0.$$

Через $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ обозначим максимальные члены рядов (1) и (2) соответственно.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* Φ *— некоторая фиксированная функция из класса* L*, а* φ *— обратная к* Φ *функция. Пусть* $B = \{b_n\}$ *— последовательность, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)\ln|b_n|}{\lambda_n} = 0,$$

а для максимального члена $\mu(\sigma)$ *выполняется условие*

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0.$$

Если для некоторой функции $w \in W_\varphi$ *последовательность* $B = \{b_n\}$ *удовлетворяет оценкам*

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \le e^{w(\lambda_n)} \qquad (n \ge N),$$

то при $\sigma \to 0-$ *вне некоторого множества* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой нижней плотности имеет место асимптотическое равенство*

$$\ln\mu(\sigma) = (1 + o(1))\ln\mu^*(\sigma). \tag{3}$$

Замечание. В [1] равенство (3) установлено при более сильных ограничениях на функцию φ, а именно, при условиях: 1) $\varphi(2t) \le c\varphi(t),\ (0 < c < \infty)$; 2) $\varphi(t)t^{-1}ln(t) = o(1),\ t \to \infty$.

[1] Белоус Т.И., Гайсин А.М. Асимптотика максимального члена изменного ряда Дирихле. Комплексный анализ, дифференциальные и смежные вопросы: Труды международной конф. Институт математики с ВЦ РАН. Уфа. 2000. С. 14 – 20.

Разности идемпотентов в C^*-алгебрах и квантовый эффект Холла

Бикчентаев А.М.
КФУ, г. Казань, Россия

C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов и положительных элементов соответственно. Для $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ существует единственное разложение $P = \widetilde{P} + Z$, где $\widetilde{P} = (\widetilde{P})^* \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и нильпотент $Z \in \mathcal{A}$ с $Z^2 = 0$, причем $Z\widetilde{P} = 0$, $\widetilde{P}Z = Z$.

Следом на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$, что $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. Для следа φ определим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ \colon\ \varphi(X) < +\infty\}, \quad \mathfrak{M}_\varphi = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi$, который будем обозначать той же буквой φ. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные следы (т.е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) с положительными функционалами на $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (Гельфанд–Наймарк).

Теорема 1. Пусть $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{id}}$, $Q = Q^*$ и $U = P - Q$ – изометрия. Тогда $U = U^*$ унитарен и $Q = P^\perp$.

Условие $Q = Q^*$ существенно в теореме 1. Следующая теорема является C^*-аналогом известного утверждения [1] (см. также [2]): *если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{id}}$ и $P - Q$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, то канонический след* $\mathrm{tr}(P - Q) \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$.

Следствие 1. Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и трипотенты $A, B \in \mathcal{A}$. Если $A - B \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(A - B) \in \mathbb{R}$.

Следствие 2 ([3, теорема 3.6]). Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $P = \widetilde{P} + Z$ – описанное выше разложение. Тогда $P \in \mathfrak{M}_\varphi \Leftrightarrow \widetilde{P} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и при выполнении этих условий имеем $\varphi(P) = \varphi(\widetilde{P}) \in \mathbb{R}^+$.

Доказательства приведенных утверждений см. в [4]. Получен C^*-аналог квантового эффекта Холла ([5], [6]): если $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $P - Q \in$

$\mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi((P-Q)^{2n+1}) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (проект 15-41-02433) и субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.1515.2017/ ПЧ).

[1] Avron J., Seiler R., Simon B. The index of a pair of projections // J. Funct. Anal. 1994. V. 120, N 1. P. 220–237.

[2] Kalton N. J. A note on pairs of projections // Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). 1997. V. 3, N 2. P. 309–311.

[3] Бикчентаев А. М. К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 337-348.

[4] Бикчентаев А. М. Разности идемпотентов в C^*-алгебрах // Сибирск. матем. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 183–189.

[5] Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. Topology and physics // J. Math. Phys. 1994. V. 35, N 10. P. 5373–5451.

[6] Gesztesy F. (coordinating Editor), From Mathematical Physics to Analysis: a walk in Barry Simon's Mathematical Garden, II // Notices Amer. Math. Soc. 2016. V. 63, N 8. P. 878–889.

Задачи свободной интерполяции типа А. Ф. Леонтьева в классе целых функций нулевого порядка

Боженко О.А.

Сумский государственный университет, г.Сумы, Украина

В 1948 г. А.Ф.Леонтьев [1] рассмотрел задачу свободной простой интерполяции в классе целых функций конечного порядка $\rho > 0$. Он нашел необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах произведений, определяемых узлами интерполяции.

Мы рассматриваем задачу кратной интерполяции в классе $\mathcal{E}_0$ целых функций нулевого порядка, т.е. $\rho = 0$. Пусть $D = \{a_n, q_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, – дивизор. Дивизор D называется интерполяционным в классе $\mathcal{E}_0$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_{n,k}\}$, $k = 1, \ldots, q_n$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \max_{1\le k\le q_n} \ln^+ \ln^+ \frac{|b_{n,k}|}{k!} \leqslant 0\,,$$

существует целая функция $f(z) \in \mathcal{E}_0$ со свойством:

$$f^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \quad k = 1, \ldots, q_n, n = 1, 2, \ldots .$$

Мы находим необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи как в терминах канонических произведений, определяемых узлами интерполяции (в духе А. Ф. Леонтьева), так и в терминах меры Дирака, определяемой этими узлами.

[1] Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка / А. Ф. Леонтьев // Докл. АН СССР. Т. 5. 1948. С. 785–787.

О возмущениях непрерывного спектра одного $\mathcal{PT}$-симметричного двумерного квадратичного операторного пучка

Борисов Д.И.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

В работе рассматривается квадратичный операторный пучок с малым возмущением:

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda) := -\Delta + V + \Lambda_e + \varepsilon\lambda\gamma + \lambda^2$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Здесь $V = V(x)$, $V \in C(\mathbb{R})$ – заданный вещественный потенциал, Λ_e – некоторая вещественная константа, ε – малый положительный параметр. Функция γ предполагается измеримой, ограниченной и экспоненциально убывающей на бесконечности:

$$|\gamma(x,y)| \leqslant Ce^{-a\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где C, a – фиксированные положительные константы. Целью работы является изучение поведения спектра пучка $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ при малых ε.

Рассмотрим вспомогательный оператор:

$$\mathcal{H}_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + V \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}),$$

и предположим, что существенный спектр оператора $\mathcal{H}_0$ есть подмножество полуоси $[0,+\infty)$.

Наш первый результат описывает существенный спектр пучка $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$. А именно, показано, что данный существенный спектр имеет вид:

$$\sigma_{\rm ess}(\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \lambda^2 \geqslant \Lambda_e + \Lambda_0\},$$

где Λ_0 – нижний край спектра оператора $\mathcal{H}_0$. Подчеркнём, что в типичной ситуации Λ_0 – изолированное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, вообще говоря, $\Lambda_0 < 0$. Пусть $\Lambda_j < 0$, $j = 0, \ldots, n$, – изолированные собственные значений оператора $\mathcal{H}_0$, упорядоченные по возрастанию:

$$\Lambda_0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots$$

Ясно, что числа $\pm\sqrt{\Lambda_\varepsilon + \Lambda_j}$ находятся внутри существенного спектра пучка $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$.

Наш основной результат описывает собственные значения операторного пучка $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$, сходящиеся к $\pm\sqrt{\Lambda_\varepsilon + \Lambda_j}$ при $\varepsilon \to +0$. Получены необходимые и достаточные условия существования таких собственных значений, вычислено количество таких собственных значений и первые члены их асимптотических разложений.

Особенности роста выпуклых функций

Брайчев Г.Г.
Московский педагогический государственный университет, г.Москва, Россия

Приводятся точные двусторонние равномерные оценки отношения производных двух функций через двусторонние равномерные оценки отношения самих функций.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, функция $g(x)$ дифференцируема на (a,b), причем $g'(x) > 0$, и, кроме того, $g(a+) = 0$, $g(b-) = +\infty$. Пусть, далее, с неотрицательными константами m, M, $m \le M$, выполнено условие

$$m \le \frac{f(x)}{g(x)} \le M, \qquad x \in (a,b). \tag{1}$$

Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M\,c_1(\theta) \le \frac{f'(x)}{g'(x)} \le M\,c_2(\theta), \qquad x \in (a,b),$$

где $\theta = \dfrac{m}{M}$, а величины $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$ определяются правилами

$$\begin{aligned} c_1(\theta) &= \inf_{x\in(a,\,b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}, \\ c_2(\theta) &= \sup_{x\in(a,\,b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, функция $g(x)$ дифференцируема на (a,b), причем $g'(x) < 0$, и, кроме того, $g(a+) = +\infty$, $g(b-) = 0$. Пусть, далее, с неотрицательными константами m, M, $m \le M$, выполнено условие (1). Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M\,d_1(\theta) \le \frac{f'(x)}{g'(x)} \le M\,d_2(\theta), \qquad x \in (a,b),$$

где $\theta = \dfrac{m}{M}$, а величины $d_1(\theta)$, $d_2(\theta)$ определяются правилами

$$\begin{aligned} d_1(\theta) &= \inf_{x\in(a,\,b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}, \\ d_2(\theta) &= \sup_{x\in(a,\,b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}. \end{aligned}$$

Например, для функции $g(x) = e^{\rho x}$, $\rho > 0$, $x \in (0, +\infty)$, формулы (2) дают значения $c_k(\theta) = \xi_k$, $k = 1,\, 2$, где ξ_k - корни уравнения $\xi \ln \dfrac{e}{\xi} = \theta$, $0 \le \xi_1 \le 1 \le \xi_2 \le e$. Из теоремы 1 для целой функции $f(z)$ с максимумом модуля $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ вытекает

Теорема 3. Пусть $0 \le \sigma_0 < \sigma < \infty$. Предположим, что выполняются неравенства

$$e^{\sigma_0 r^\rho} \le M_f(r) \le e^{\sigma r^\rho}, \qquad r > 0.$$

Тогда справедливы оценки

$$\xi_1\, \sigma\rho\, r^{\rho-1} M_f(r) \le M_f'(r) \le \xi_2\, \sigma\rho\, r^{\rho-1} M_f(r), \qquad r > 0,$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения $\xi \ln \dfrac{e}{\xi} = \dfrac{\sigma_0}{\sigma}$.

При $\rho = 1$ и $\sigma_0 = 0$ отсюда получаем аналог известной теоремы Бернштейна, утверждающей, что для целой функции экспоненциального типа σ, ограниченной на вещественной оси, т. е. удовлетворяющей условию $|f(x)| \le M$, $x \in \mathbb{R}$, справедлива оценка $|f'(x)| \le \sigma M$, $x \in \mathbb{R}$.

Замена ограниченности функции на вещественной оси условием $M_f(r) \leq e^{\sigma r}$ на полуоси приводит к оценке

$$M_{f'}(r) \leq \sigma e M_f(r), \quad r > 0.$$

Если, к тому же, тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ неотрицательны, то имеем

$$f'(x) \leq \sigma e f(x), \quad x > 0.$$

Об операторе обобщённого дифференцирования Гельфонда-Леонтьева

Братищев А.В.

Донской государственный технический университет, г.Ростов-на-Дону, Россия

Оператор обобщённого дифференцирования (ООД) определяется как линейный непрерывный оператор D на пространстве $H(G)$ голоморфных в односвязной области G функций, задаваемый на полной последовательности степеней по правилу: $Dz^n = a_{n-1}z^{n-1}$, $n \in N$, $D1 = 0$. $d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - порождающая функция ООД. $e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_0 \ldots a_{n-1}} z^n$, $e(0) = 1$, $\forall n \geq 0$ $a_n \neq 0$, - обобщённая экспонента.

Каждый оператор обобщённого дифференцирования порождает дифференциальное и интегральное исчисление на базе этого оператора, и только при одном наборе $\forall n \geq 0$ $a_n = n + 1$ имеем классическое исчисление.

Ассоциировнный с ООД диагональный оператор $Jz^n = a_n z^n$ имеет интегральное представление Адамара, и реализуется в виде оператора комплексной свёртки в случае $0 \notin G$.

В связи с ООД рассматриваются следующие задачи.

1) Интегральное представление ООД: $[Dy](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma y(t) \frac{1}{t^2} d(\frac{z}{t})\, dt$, где $d(\zeta)$ - порождающая функция, локально аналитическая, но вообще говоря неоднозначная, на множестве $G\,(CG)^{-1}$.

2) Выделение класса односвязных областей (в терминах мультипликатора области G) , для которых порождающие функции всех непрерывных в $H(G)$ ООД будут голоморфными на $G\,(CG)^{-1}$.

3) Взаимосвязь между непрерывностью ООД и разрешимостью интерполяционной задачи $a(1) = 0$, $a(2) = d_0$, $a(3) = d_1, \ldots$ в соответствующем классе целых функций.

4) Представление решений линейных операторных уравнений конечного порядка, порождённых ООД D.

5) Установление связи между классом ООД D и классом последовательностей полиномов Бренке, которая позволяет дать представление линейных непрерывных операторов, коммутирующих с D: $LD = DL$.

6) Описание обобщённых преобразований Бореля, сохраняющих теорему Пойа.

7) Исследование хаотичности линейных непрерывных операторов, коммутирующих с ООД D.

Перечисленные задачи и результаты по ним опубликованы в серии статей докладчика и А.В. Моржакова в «Вестнике ДГТУ» .

Обратная спектральная задача для бигармонического оператора с точечными осцилляторами

Валеев Н.Ф., Назирова Э.А.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия, БашГУ, г.Уфа, Россия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$– односвязная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $M_k = M_k(x_k, y_k) \in \Omega$ $k = 1, ..m$- произвольные точки.

На $D = \{u \in W_2^2(\Omega) | \frac{du}{dn}|_\Gamma = u|_\Gamma = 0\}$ определим замкнутую квадратичную форму:

$$Q[u,u] = \int\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dxdy$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} p_j |u(x_j, y_j)|^2, \tag{1}$$

где $p_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, m}$.

Квадратичная форма $Q[u,u]$ определяет в пространстве $W_2^2(\Omega)$ самосопряженный оператор $L(\overrightarrow{p})$, где $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, .., p_m)$ с областью определения D_L.

При этом оператор $L(\overrightarrow{p})$ допускает следующее представление:

$$L(\overrightarrow{p}) = \Delta^2 u + \sum_{k=1}^{m} p_k \delta(M - M_k) u. \tag{2}$$

Здесь $\delta(M - M_k)$ –операторы, порожденные квадратичными формами

$$Q_k[u,u] = \frac{1}{2} |u(M_k)|^2, \ \ k = \overline{1, m}.$$

Положим $L = L_0 + L_1$, $L_0 u = \Delta^2 u$, $L_1 u = \sum_{k=1}^{m} p_k \delta(M - M_k) u$, $G_0(x, y, x', y', \lambda) = G_0(M, M', \lambda)$– ядро резольвенты $R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}$.

Тогда

$$R_0(\lambda) L_1 u(M) = \sum_{k=1}^{m} p_k G_0(M, M_k, \lambda) u(M_k)$$

–конечномерный оператор. Поскольку $R(\lambda) = (L_0 + L_1 - \lambda I)^{-1} = R_0(I + RL_1)^{-1}$, то оператор $R(\lambda)$ – компактный самосопряженный при $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^m$ оператор, что влечет за собой дискретность спектра и полуограниченность оператора $L(\overrightarrow{p})$. Теперь рассмотрим следующую обратную спектральную задачу:

Задача. Требуется подобрать такие значения вектора $\overrightarrow{p}$, чтобы ровно m собственных значений оператора $L(\overrightarrow{p})$ были равны наперед заданным числам: $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*$.

Теорема. Обратная спектральная задача имеет изолированные решения для $\forall \overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, ..\lambda_m) \in \mathbb{C}^m / \{S\}$, где $\{S\}$ - множество меры ноль в $\mathbb{C}^m$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-01-01095, 17-41-020195.

[1] В.А. Садовничий Н.Ф. Валеев, Я.Т. Султанаев. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения ДАН, 2009. Т. 426. № 4. С. 457-460.

[2] В.А. Базаров, И.И, Сафаров, Ю.И. Шокин. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем : [монография] / Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т вычисл. технологий. - Новосибирск : Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 1996. - 186с.

О корректности одной задачи для уравнения агрегации

Вильданова В.Ф.
БГПУ им.М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

В цилиндрической области $D^T = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$u_t - \triangle A(x, u) + \operatorname{div}(u \nabla K * u) = 0 \qquad (1)$$

с начальным и краевым условиями

$$u(0) = u_0, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$(-\nabla A(x,u) + u\nabla K * u) \cdot \nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

где ν – вектор внешней нормали, Ω — выпуклая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ с границей класса C^3. Предполагается, что функция $A(x,u) \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, $A(x,u) \geq 0$, имеет положительную производную A'_u,

$$A'_u(x,u) > 0, \quad x \in \Omega, \quad u > 0, \tag{4}$$

удовлетворяет условиям:

$$\Delta_x A(x,u) \leq \mu_1(1+u), \quad x \in \Omega, \quad u > 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial A(x,u)}{\partial \nu} \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad u > 0. \tag{6}$$

Функция $K(x)$ подчиняется условиям:

$$K \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x)dx = 1, \quad \frac{\partial K(x-y)}{\partial \nu_x} \leq 0, \; x \in \partial\Omega, \; y \in \Omega. \tag{7}$$

Целью работы является доказательство существования и единственности решений смешанной задачи (1) – (3).

Теорема 1. Пусть $u_0 \in L_\infty(\Omega)$ неотрицательно. Тогда существует не более одного решения задачи (1) – (3).

Теорема 2. Пусть функция A удовлетворяет условиям (4) - (6), функция K удовлетворяет условию (7). Пусть u_0 неотрицательная функция в $L_\infty(\Omega)$. Тогда задача (1) – (3) имеет слабое решение в D^T.

[1] Bertozzi A., Slepcev D. Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion. Comm. Pur. Appl. Anal. 2010. Vol. 6, p. 1617–1637.

Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и его приложения

Власов В.В.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва, Россия

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное суммами вольтерровых интегральных операторов. В частности, получены результаты о структуре и локализации спектра оператор-функции

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где A - самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный, B – симметрический неотрицательный оператор, действующий на пространстве $Dom\,(A)$, и, удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\,\|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in Dom\,(A)$, $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ – преобразования Лапласа ядер интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\lambda + \gamma_k)}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\lambda + \gamma_k)},$$

На основе спектрального анализа указанных оператор-функций, получены результаты о корректной разрешимости рассматриваемых интегродифференциальных уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве, заданных на положительной полуоси.

[1] Rautian N.A., Vlasov V.V. Well-Posedness and Spectral Analysis of Hyperbolic Volterra Equations of Convolution Type, *Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **164** (2016) 411-419, Springer International Publishing.

[2] Власов В.В., Раутиан Н.А. Исследование вольтерровых интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости, *Доклады Академии наук*, **471:3** (2016) 259-256.

[3] Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **58** (2015) 22-24.

Связь между лапласианами Леви и исчислениями Хиды и Маллявэна

Волков Б.О.

МГТУ им. Н. Э. Баумана, г.Москва, Россия

В работе показывается, что в стохастическом анализе существуют два различных оператора, которые являются аналогами классического лапласиана Леви. Первый оператор действует на соболевском классе над мерой Винера и связан с калибровочными полями. Второй оператор действует на пространстве обобщенных функционалов Хиды. Он много изучался в «white noise analysis» (исчислении Хиды).

Пусть E — локально выпуклое пространство, непрерывно вложенное в $L_2(0,1)$. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0,1)$. Действие (экзотического) лапласиана Леви порядка $s \in \mathbb{R}$ на функции $f \in C^2(E)$ определяется формулой

$$\Delta_{L,s}^{\{e_n\}} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{1-s} < f''(x)e_k, e_k > .$$

При $s=1$ эта формула определяет классический лапласиан Леви. Пусть $h_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t$ и $E = W_2^1([0,1])$. Тогда уравнения Янга-Миллса для связности эквиваленты уравнению Лапласа для лапласиана Леви $\Delta_{L,1}^{\{h_n\}}$ и параллельного переноса (см. [1, 2, 3]). Пусть P — стандартная мера Винера на $C_0[0,1]$. Т.к. $\{h_n\}$ состоит из элементов пространства Камерона-Мартина меры P, определение лапласиана Леви $\Delta_{L,1}^{\{h_n\}}$ можно перенести на соболевский класс $W_2^2(P)$. Значение лапласиана Леви Δ_L на $F \in W_2^2(P)$ определяется формулой

$$\Delta_L F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{h_k}\partial_{h_k} F,$$

где ряд в правой части сходится сильно в $L_2(P)$. (О связи такого лапласиана Леви и ассоциированной с ним бесконечномерной дивергенции с уравнениями Янга-Миллса см. [3]).

В исчислении Хиды рассматриваются оснащенное гильбертово пространство $S(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \subset S^*(\mathbb{R})$, вероятностная гауссовская мера μ_I на $S^*(\mathbb{R})$ такая, что ее преобразование Фурье имеет вид $\widetilde{\mu_I}(\xi) = e^{-\frac{<\xi,\xi>}{2}}$, и оснащенное гильбертово пространство

$$(S) \subset L_2(S^*(\mathbb{R}), \mu_I) \cong \Gamma(L_2(\mathbb{R})) \subset (S)^*,$$

где (S) и $(S)^*$ — пространства пробных и обобщенных функционалов Хиды соответственно (пространство $\Gamma(L_2(\mathbb{R}))$ — фоковское пространство над $L_2(\mathbb{R})$). Если $\xi \in S(\mathbb{R})$, то $\phi_\xi = e^{<\cdot,\xi>-\frac{1}{2}<\xi,\xi>}$ — пробный функционал Хиды, который называется когерентным состоянием. Если $\Phi \in (S)^*$, то его S-преобразование — это функция на $S(\mathbb{R})$, заданная формулой $S\Phi(\xi) =< \Phi, \phi_\xi >$. Пусть $g_n(t) = \sqrt{2}\cos \pi n t$. При $s \in \{-1, 1\}$ значение лапласиана Леви $\Delta_{L,s}^{\{g_n\}}$ на $\Phi \in (S)^*$ можно определить по формуле $\Delta_{L,s}^{\{g_n\}}\Phi = S^{-1}(\Delta_{L,s}^{\{g_n\}} S\Phi)$. Для достаточно широкого класса обобщенных функционалов Хиды Φ выполняется $\Delta_{L,1}^{\{h_n\}}\Phi = \Delta_{L,1}^{\{g_n\}}\Phi$. Оператор $\Delta_{L,1}^{\{g_n\}}$ обращается в ноль на всем пространстве $L_2(S^*(\mathbb{R}), \mu_I)$.

Пусть I — естественное вложение $W_2^2(P)$ в $L_2(S^*(\mathbb{R}), \mu_I)$, полученное с помощью изоморфизма Винера-Ито-Сигала. Выполняется

Теорема. Если F принадлежит области определения Δ_L, то $\Delta_L F = \pi^2 I^{-1} \Delta_{L,-1}^{\{g_n\}} I F$.

[1] Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V. Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians. Russian Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 2, No. 2, pp. 235–250.

[2] Leandre R., Volovich I. V. The Stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2001. Vol. 4, No. 4, pp. 151–172.

[3] Volkov B.O. Stochastic Levy Differential Operators and Yang-Mills Equations. Infinite
Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics (to appear).

Существование ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича

Воробьёв Н. А., Мукминов Ф. Х.

Институт механики УНЦ РАН, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса анизотропных параболических уравнений

$$(\beta(x,u))'_t = \mathrm{div} a(t,x,u,\nabla u) + b(t,x,u,\nabla u) \qquad (1)$$

с двойными нестепенными нелинейностями в цилиндрической области $(0,T)\times\Omega$. Область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ограничена. Доказано существование ренормализованного решения. Доказательство не использует осреднение Ландеса.

За последние 20 лет появилось много работ, посвященных существованию и единственности ренормализованных решений нелинейных параболических задач. Все авторы требуют дифференциремость функции $\beta(x,u)$ по второму аргументу. В настоящей работе эта функция предполагается только каратеодориевой и возрастающей по второму аргументу. Требования на „неоднородность“ — функцию b, по-видимому, также минимальны, в сравнении с аналогичными результатами других авторов.

Все авторы используют осреднение Ландеса, не доказывая при этом необходимых его свойств. Наше доказательство использует хорошо изученное осреднение Стеклова, что позволило существенно упростить ряд предельных переходов.

Будем предполагать, что измеримая начальная функция u_0 такова, что $\beta(x,u_0)\in L_1(\Omega)$, и при любом r функция $\beta(x,r)\in L_1(\Omega)$.

Пусть существуют непрерывная функция $C(m)$ и неотрицательные функции F, F_j такие, что

$$|a_j(t,x,r,y)| \le C(m)(F_j(t,x) + \overline{B}_j^{-1}(C(m)S(y))),\ F_j \in E_{\overline{B_j}}(D^T), \qquad (2)$$

при всех $r\in[-m,m]$, $y,z\in\mathbb{R}^n$, $(t,x)\in D^T$. Запишем условие коэрцитивности

$$a(t,x,r,y)\cdot y \ge \delta_0 S(y) - C_1 F(t,x),\ S(y)=\sum_{i=1}^n B_i(y_i),\ F\in L_1(D^T). \qquad (3)$$

Положим $b(t,x,r,y) = b(t,x,0,y) - b_0(t,x,r,y)$. Пусть $|b(t,x,0,y)| \le F(t,x)$,

$$r b_0(t,x,r,y) \ge 0, \quad \forall r\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n;\ (t,x)\in D^T; \qquad (4)$$

$$|b_0(t,x,r,y)| \le C(m)(S(y)+F(t,x)),\ |r| \le m;\ \forall m > 0. \tag{5}$$

Теорема. Пусть выполнено условие строгой монотонности и (2)–(4). Тогда существует ренормализованное решение первой смешанной задачи для уравнения (1).

При несколько иных условиях доказано также существование слабого решения.

[1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва: 1958, Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры

Системы уравнений Эйлера–Пуассона

Воронова Ю.Г.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Рассматриваются системы уравнений Эйлера–Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{A}{x+y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B}{x+y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

в которых A, B–квадратные матрицы порядка n, а $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)^T$–столбец неизвестных. Найдены формулы для вычисления невырожденных инвариантов Лапласа и обобщенных инвариантов для n–компонентных систем уравнений Эйлера–Пуассона.

Теорема. Невырожденные инварианты Лапласа и обобщенные инварианты для системы уравнений (1) вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered}
H_k = \tfrac{1}{(x+y)^2}(B-k-1)(B-k)\ldots(B-1)(A+k)(B-1)^{-1}\ldots(B-k)^{-1}, \\
X_k = H_k \cdot \ldots \cdot H_0 = \tfrac{1}{(x+y)^{2k+2}}(B-k-1)\ldots(B-1)(A+k)\ldots(A+1)A, \\
K_m = \tfrac{1}{(x+y)^2}(A-m-1)(A-m)\ldots(A-1)(B+m)(A-1)^{-1}\ldots(A-m)^{-1}, \\
Y_m = K_m \cdot \ldots \cdot K_0 = \tfrac{1}{(x+y)^{2m+2}}(A-m-1)\ldots(A-1)(B+m)\ldots(B+1)B,
\end{gathered}$$

при этом

$$\begin{gathered}
a_{k+1} = \tfrac{1}{x+y}(B-k-1)\ldots(B-1)(A+2k+2)(B-1)^{-1}\ldots(B-k-1)^{-1}, \\
b_{m+1} = \tfrac{1}{x+y}(A-m-1)\ldots(A-1)(B+2m+2)(A-1)^{-1}\ldots(A-m-1)^{-1}.
\end{gathered}$$

Получен список систем с нулевыми главными инвариантами Лапласа, где A, B–постоянные матрицы третьего порядка, найдены решения таких систем.

Для систем уравнений третьего порядка, в случае, когда ранг главного инварианта равен единице, преобразование вида $u = Tv$, где T– невырожденная матрица, систему уравнений вида (1) приводит к аналогичной системе вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\tilde{A}}{x+y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\tilde{B}}{x+y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}BT$. Выбор преобразования позволяет считать, что матрица $\tilde{H}_0$ имеет вид:

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{(x+y)^2}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{3}$$

Справедливо следующее утверждение:
Лемма. Пусть для системы уравнений (2) главный инвариант $\tilde{H}_0$ задается формулой (3), и выполнены условия существования и единственности обобщенных инвариантов. Тогда обобщенные инварианты Лапласа для системы уравнений (2) вычисляются по формуле:

$$\tilde{X_n} = \tilde{H}_n \ldots \tilde{H}_0 = \frac{1}{(x+y)^{2(n+1)}}\left(\begin{array}{ccc} \prod\limits_{i=1}^{n} i(\tilde{b_{11}} - \tilde{a_{11}} - \frac{i^2+i-1}{i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Также выписаны системы уравнений, у которых обобщенный инвариант равен нулю, найдены их решения. Отметим, что в работе [1] рассмотрены двухкомпонентные системы уравнений вида (1).

[1] Гиззаткулова А.М., Жибер А.В. Системы уравнений Эйлера-Пуассона с нулевыми обобщенными инвариантами Лалпаса // Математические модели и методы их исследования. Труды международной конференции / Институт вычислительного моделирования СО РАН. Красноярск. 2001. Т. 1. С. 169-175.

Численно-аналитический метод решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае

Габбасов Н.С.
Набережночелнинский институт КФУ, г.Набережные Челны, Россия

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение в особом случае:

$$Ax \equiv t^m x(t) + \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} K_j(t,s) x^{(j)}(s) ds = y(t) \quad (-1 \le t \le 1), \qquad (1)$$

в котором $m \in \mathbb{N}$, K_j $(j = \overline{0,p})$ и y – известные "гладкие" функции, а x – искомая функция.

Конечномерное приближение к решению $x^* = A^{-1}y$ образуем в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv \sum_{i=0}^{n+p-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n+p} \delta^{\{i\}}(t), \qquad (2)$$

где δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее "тейлоровские" производные. Неизвест-ные параметры $\{c_j\}$ найдем из СЛАУ

$$(DT\rho_n)(\nu_k) = 0 \quad (k = \overline{1,n}),$$

$$(T\rho_n)^{(j)}(-1) = 0 \quad (j = \overline{0,p-1}),\ (\rho_n)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{0,m-1}), \qquad (3)$$

где $\rho_n(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, $Dg \equiv g^{(p)} \in C$; $T : C\{m;0\} \to C$ – "характеристический" оператор класса $C\{m;0\}$ функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m, а $\{\nu_k\}$ – система узлов Чебышева первого (или второго) рода.

При обосновании вычислительного алгоритма (1) -(3) существенно используются один вариант общей теории приближенных методов анализа и аппроксимативные свойства проекционного опе-ратора, порожденного методом (3).

О краевых задачах для нелинейного уравнения второго порядка с дельта-образным потенциалом

Гадыльшин Т.Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

Пусть I — либо конечный интервал (a,b), либо полуоси (a,∞), $(-\infty,b)$, либо вся ось $(-\infty,\infty)$, $\{0\}\in I$, $\Omega:=I\times(-\infty,\infty)$, $0<\varepsilon\ll 1$. Обозначим через $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_\varepsilon$ отображения следующего вида:

$$\mathcal{L}u=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\left(x,u\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u)+q_1\left(x,u\right)+q_2(x)u,$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon=\mathcal{L}+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

На функции, входящие в $\mathcal{L}$, накладываются следующие условия $k,\ p,$ $q_1\in C^1(\overline{D})$, $q_2,Q\in C(\overline{I})$, $k(x,u)\geqslant k_0>0$, $q_2\left(x\right)\geqslant q_0>0$. Будем считать, что $\operatorname{supp}Q\subset[-1,1]$, а принадлежность $k\in C^1(\overline{D})$ влечет неравенство

$$\sup_{x\in\overline{I},|u|\leqslant M}\left(|k(x,u)|+|k_x(x,u)|+|k_u(x,u)|\right)<\infty.$$

Наложим следующее ограничение на среднее значение функции Q

$$\langle Q\rangle:=\int\limits_{-1}^{1}Q(\tau)\mathrm{d}\tau>-\min\{k_0;q_0\}/4. \qquad (1)$$

Обозначим

$$m_{kq}=\min\{k_0;q_0\},\qquad \gamma=\frac{3}{4}m_{kq},\qquad K_g(M)=\sup_{x\in\overline{I},|u|\leqslant M}\left|g_u(x,u)\right|,$$

где $g(x,u)$ — произвольная гладкая функция. Положим

$$A=k_0^{-1}\left(2(\sup_{\overline{I}}|k|+\sup_{\overline{I}}|q_2|+m_{kq})+3\max_{\mathbb{R}}|Q|\right)M$$

Предполагается, что существуют такие постоянные M и $\gamma_1\in(0,\gamma)$, что выполнено неравенство

$$6K_p(2M)+2K_k(2M)M+2K_{q_1}(2M)<\gamma_1. \qquad (2)$$

$$3K_p(2M)/2+3K_k(2M)A/2+2K_{q_1}(2M)<m_{kq}. \qquad (3)$$

В случае, когда I — конечный интервал (a, b), рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon = f,\ x \in I, \quad l_a u^\varepsilon = 0,\ l_b u^\varepsilon = 0; \tag{4}$$

$$l_a u^\varepsilon := h_a u^\varepsilon(a) - H_a k(a, u^\varepsilon(a)) \frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}(a) = 0,$$

$$l_b u^\varepsilon := h_b u^\varepsilon(b) + H_b k(b, u^\varepsilon(b)) \frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}(b) = 0, \tag{5}$$

где h_a, $h_b \geqslant 0$, H_a, H_b — либо 0, либо 1, $h_a + H_a > 0$, $h_b + H_b > 0$. Если же I — полуоси (a, ∞), $(-\infty, b)$ или вся ось $(-\infty, \infty)$, то краевые условия в бесконечно удаленных точках формально не ставятся — они обеспечиваются выбором пространств, в которых ищется решение задачи. Рассматриваются все четыре вида интервалов I, причем, для краткости формулировок для всех них используется запись (4).

Аналогично понимается краевая задача

$$\mathcal{L} u_0 = f, \quad x \in I \backslash \{0\}, \tag{6}$$

$$l_a u_0 = 0, \quad l_b u_0 = 0, \qquad k(0, u_0(0))\{u_0'\}(0) = \langle Q \rangle\, u_0(0), \tag{7}$$

где

$$\{h\}(0) := h(+0) - h(-0).$$

Доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема Пусть выполнены условия (1), (2), (3). Тогда для любого $f \in L_2(I)$ такого, что $\|f\|_{L_2(I)} \leqslant \gamma_1 M/2$, для решения u^ε краевой задачи (4) справедливо равенство

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C(\bar{I})} = O(\varepsilon), \tag{8}$$

где u_0 решение краевой задачи (6), (7).

Алгоритм построения интегралов для систем ОДУ

Гайнетдинова А.А., Газизов Р.К.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Рассматриваются системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, допускающие четырехмерную алгебру Ли операторов и представимые в инвариантном виде

$$I_{2,i} = F_i\,(I)\,, i = 1,\ 2, \tag{1}$$

где I — либо дифференциальный инвариант первого порядка $I = I(t, x, y, x', y')$, либо алгебраический инвариант $I = I(t, x, y)$; $I_{2,1}(t, x, \; y, x', y', x'', y'')$, $I_{2,2}(t, x, y, x', y', x'', y'')$ — дифференциальные инварианты второго порядка. В данной работе предлагается алгоритм для интегрирования этих систем.

Предлагаемый алгоритм использует оператор инвариантного дифференцирования, действуя которым на инвариант k-го порядка можно получить инвариант более высокого порядка. В рассматриваемом случае этот оператор имеет вид $\lambda(t, x, y, x', y', \ldots)D_t$, где D_t — оператор полного дифференцирования. В [1] показано, что оператор инвариантного дифференцирования удовлетворяет условию

$$\left[X_{i,k}, \lambda D_t\right] = 0.$$

Следовательно, коэффициент λ оператора инвариантного дифференцирования можно найти из соотношений

$$X_{i,k}\left(\lambda\right) - \lambda D_t\left(\xi_i\right) = 0, \;\; i = 1, \ldots, 6, \tag{2}$$

где k — требуемый порядок производных. Т.е. в качестве λ можно взять любое частное решение системы уравнений (2). Доказано следующее утверждение.

Теорема (о представлении оператора инвариантного дифференцирования). Для любой алгебры Ли дифференциальных операторов существует такой оператор инвариантного дифференцирования λD_t и функция $\Phi\left(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)$, что

$$\frac{1}{\lambda} = D_t\left(\Phi\right). \tag{3}$$

Действуя оператором инвариантного дифференцирования на инвариант I, получим

$$\lambda D_t(I) = \Theta(I, I_{2,1}, I_{2,2})$$

с некоторой функцией Θ. На решениях системы (1) выполняется соотношение

$$\lambda D_t(I)|_{(1)} = \Psi(I), \tag{4}$$

где $\Psi(I) = \Theta\left(I, F_1(I), F_2(I)\right)$.

Уравнение (4) с учетом (3) можно переписать в виде

$$\frac{dI}{\Psi(I)} = D_t\left(\Phi\right)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Таким образом, данный алгоритм позволяет получить первый интеграл системы и, следовательно, понизить ее порядок. Повторяя данную процедуру можно, в частности, проинтегрировать в квадратурах системы, допускающие разрешимые алгебры Ли.

Данный алгоритм можно расширить на системы k уравнений порядка m, допускающих km-мерную алгебру Ли.

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1978.

Сравнение порядков ряда Дирихле с нерегулярным распределением показателей в полуполосах

Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский государственный университет,

г.Уфа, Россия

Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < \infty$, и ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \ \ 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1}$$

абсолютно сходится лишь в полуплоскости $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$, а $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a, \ \ \sigma < 0\}$. Величина

$$\rho_s = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \ \ M_s(\sigma) = \max_{|t-t_0|\le a} |F(\sigma + it)| \ \ (\sigma < 0),$$

называется порядком функции F в полуполосе $S(a, t_0)$. Пусть $\Lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$, $\psi : \ \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$, $0 < \psi(r) \uparrow 1$, $[1 - \psi(r)] \ln\ln r \to 0$ при $r \to \infty$. Положим $D(t) = \Lambda(t)t^{-1}$, $\psi_1(r) = \min\limits_{\lambda_1 \le t \le r} D(t)$, $\psi_2(r) = \max\limits_{r \le t} D(t)$. Пишем $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, если [1]: 1) существует конечный предел $\Delta = \lim\limits_{r\to\infty} \Lambda(r) \ln r/r$; 2) $\psi_2(r) - \psi_1(r) = O[(1 - \psi(r)) \ln^{-1} r]$ при $r \to \infty$. В [1] доказано, что если $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, то порядки ρ_1 и ρ_2 в любых полуполосах $S(a_i, t_i)$ $(a_i > 0, \ i = 1, 2)$ равны.

Пусть K — класс функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $h(0) = 0$, $h(t) \uparrow \infty$, $h(t)t^{-1} \downarrow 0$ при $t \to \infty$,

$$R = \left\{h \in K : \ \ h(x) \ln \frac{x}{h(x)} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right), \ \ x \to \infty\right\}.$$

R–плотностью последовательности Λ называется

$$G(R) = \inf_{h\in R} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \;\; \omega(t) = [t, t+h(t)),$$

где $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек $\lambda \in (\Lambda \cap \omega(t))$.

Введем еще следующие классы функций: $L_k = \{h \in L : h(x)\ln_{k-1} x = o(x)$ при $x \to +\infty\}$ $(k \geq 2)$,

$$R_k = \{h \in S : \;\; h(x) \ln \frac{x}{h(x)} = o\left(\frac{x}{\ln_{k-1} x}\right), \quad x \to +\infty\} \quad (k \geq 2),$$

где $\ln_0 t = t$, $\ln_m t = \underbrace{\ln\ln ... \ln}_{m} t$ $(m \geq 1)$, а

$$S = \left\{ h \in K : \varlimsup_{x\to\infty} \frac{h(x)\ln h(x)}{x \ln \frac{x}{h(x)}} < \infty \right\}.$$

Пусть $G(R_k)$ — R_k-плотность последовательности Λ. Величины

$$\rho_k = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln_k M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \quad \rho_s = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln_k^+ M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}} \quad (k \geq 2)$$

называются k-порядками функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости Π_0 и полуполосе $S = S(a, t_0)$.

Теорема. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, для которой $G(R_k) < \infty$. Если $S_1 = S(a_1,\ t_1)$, $S_2 = S(a_2,\ t_2)$ — полуполосы

$$S(a_i,\ t_i) = \{s = \sigma + it : \;\; |t - t_i| \leq a_i, \;\; \sigma < 0\} \quad (i = 1, 2),$$

каждая из которой имеет ширину больше $2\pi G(R_k)$, то $\rho_1 = \rho_2$. Здесь ρ_1 и ρ_2 — k-порядки любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ в S_1 и S_2 соответственно.

Отметим, что если $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, то $G(R) = 0$. Обратное не верно. Теорема обобщает и усиливает результат из [1].

[1] Гайсин А. М. Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 5. С. 660–669.

Интерполяционная задача в классах целых функций, определяемых неквазианалитическими весами

Гайсин Р.А.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть L — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$, таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \int\limits_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Последовательность Λ будем называть *интерполяционной*, если найдется функция $w \in W$, зависящая только от этой последовательности, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \le 1$, существует целая функция f, обладающая свойствами:

$$f(\lambda_n) = b_n \quad (n \ge 1), \qquad M_f(r) = \max_{|z| \le r} |f(z)| \le e^{w(r)}.$$

Условия, необходимые и достаточные для интерполяционности последовательности $\{p_n\}$ ($p_n \in \mathbb{N}$) в классе $\Omega = \{w \in W : \frac{w(x)}{x} \downarrow$ при $x \to \infty\}$ были получены в работе [1]. Здесь доказан критерий интерполяционности последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ в классе функций W.

Справедлива следующая

Теорема. *Для того, чтобы последовательность Λ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in W$, такая, что*

$$а)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \qquad б)\ \ -\ln \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n \\ k \ne n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| \le w(\lambda_n) \quad (n \ge 1).$$

Доказательство теоремы основано на интегральной оценке решения $\overline{\partial}$-задачи, полученной Хермандером. Этот метод впервые был использован Берндссоном [1], а также Бернштейном и Тейлором [2].

Показано, что при условии а) условие б) равносильно требованию:

$$\int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t} dt \le \varphi(\lambda_n) \quad (n \ge 1),$$

где $\nu(\lambda_n;\ t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h-\lambda_n| \leq t\}$, φ — некоторая функция из W.

Отсюда видно, что

$$\ln \frac{1}{h_n} \leq \varphi(\lambda_n) \quad (n \geq 1),$$

где $h_n = \min(\min_{k\neq n} |\lambda_n - \lambda_k|, 1)$. Это означает, что в отличие от работы [1] здесь допускается стремление к нулю величины h_n при $n \to \infty$, но с определенной скоростью.

[1] Berndtsson B. A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation // Indag. Math. 1978. V. 40. № 4. P. 409–414.

[2] Bernstein C.A., Taylor B.A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variables // Adv. Math. 1979. V. 33. № 2. P. 109–143.

Пример типа Макинтайра–Евграфова

Гайсина Г.А.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Пусть $0 < p_n \uparrow \infty,\ p_n \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n} \quad (z = x+iy) \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция. Макинтайр доказал следующее [1]: при условии $\sum_n p_n^{-1} < \infty$ функция f не ограничена на $\mathbb{R}_+$; если $\sum_n p_n^{-1} = \infty$, то найдется целая функция f вида (1), $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

В работах М.А. Евграфова [2] и Н.Н. Юсуповой [3] получены аналогичные результаты для целых рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it). \tag{2}$$

Пример типа Макинтайра–Евграфова в [3] построен для последовательностей $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, имеющих конечную верхнюю плотность τ

и конечный индекс конденсации δ. Аналогичный пример ранее был приведен в [2], но при более жестких ограничениях. В [4] доказано, что при условии $\sum\limits_n \lambda_n^{-1} < \infty$ верны неулучшаемые оценки: $0 \le d(F;\ \mathbb{R}_+) \le 1$, где

$$d(F;\ \mathbb{R}_+) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln M_F(\sigma)}, \quad M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|.$$

Возникает вопрос: какова скорость стремления к нулю функции F в примерах типа Макинтайра–Евграфова?

Теорема. Пусть $\tau < \infty$, $\delta < \infty$. Если $\sum\limits_n \lambda_n^{-1} = \infty$, то ряд Дирихле (2) с коэффициентами

$$a_n = E(-\lambda_n)/L'(\lambda_n),\ E(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}},$$

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right),$$

обладает свойствами:

1) при $\sigma = \lambda(r) \to +\infty$ верно асимптотическое равенство $F(\lambda(r)) \sim -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-r\lambda(r)}}{E(-r)\varphi(r)}$,

$$\text{где } \lambda(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_k(\lambda_k + r)}, \quad \varphi(r) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + r)^2}}\ ;$$

2) справедлива оценка

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln \mu^*(\sigma)} \le -1, \quad \mu^*(\sigma) = \max_{n\ge1} [E(-\lambda_n) e^{\lambda_n \sigma}].$$

Свойство 1) доказано в [5], а 2) — новый результат.

[1] Macintyre A.J. Asymptotic paths of integral functions with power series // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2. № 3. P. 286–296.

[2] Евграфов М.А. Об одной теореме единственности для рядов Дирихле // УМН. 1962. Т. XVII. № 3. С. 169–175.

[3] Юсупова Н.Н. Дисс. канд. наук: Асимптотика рядов Дирихле заданного роста. Уфа, 2009.

[4] Гайсин А.М. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 8. С. 55–82.

[5] Хиршман И.И., Уиддер Д.В. Преобразования типа свертки. М.: ИЛ. 1958.

Обобщенный метод моментов для интегральных уравнений с неподвижными особенностями в ядре

Галимова З.Х.

Казанский инновационный университет имени В.Г. Тимирясова (ИЭУП), г.Набережные Челны, Россия

Исследуется интегральное уравнение второго рода с неподвижными особенностями в ядре

$$Ax \equiv x(t) + \int\limits_0^1 K(t,s)[u(s)]^{-1}x(s)ds = y(t) \quad (0 \le t \le 1), \tag{1}$$

где $u(t) \equiv t^{p_1}(1-t)^{p_2}\prod\limits_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$, $t_j \in (0,1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j = \overline{1,q})$; K и y – известные функции, обладающие свойствами "гладкости" точечного характера, а x – искомая функция.

Приближенное решение уравнения (1) построим в виде

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_j\}) \equiv u(t)\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n}t^i \quad (n = 2, 3, ...), \tag{2}$$

где $m \in \mathbb{N}$ определенным образом выражается через p_1, p_2 и m_j $(j = \overline{1,q})$. Неизвестные параметры $\{c_j\}$ найдем из СЛАУ

$$\int\limits_0^1 \eta(t)(T\rho_n)(t)T_k(t)dt = 0, \quad \rho_n^{\{i\}}(t_j) = 0, \tag{3}$$

$$(k = \overline{0, n-1},\ i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2}),$$

в которой $t_{q+1} \equiv 0$, $t_{q+2} \equiv 1$; $\rho_n \equiv Ax_n - y$ – невязка приближенного решения, $T : X \to C$ – "характеристический" оператор класса X искомых "точечно -гладких" функций, а $\{T_k\}$ – полная ортонормированная на $[0,1]$ по весу $\eta(t) \equiv \frac{1}{2}(t-t^2)^{1/2}$ система смещенных полиномов Чебышева первого рода.

При обосновании схемы (1) -(3) используются результаты общей теории приближенных методов и аппроксимативные свойства оператора, порожденного методом (3).

Геометрические неравенства в теории кручения

Гафиятуллина Л.И., Салахудинов Р.Г.
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, г. Казань, Россия

Пусть G — односвязная область. Обозначим через $\mathbf{I}_p(G)$ евклидовый момент инерции области G относительно границы области порядка p, и пусть $\boldsymbol{\rho}(G)$ обозначает супремум радиусов кругов лежащих в G.

Теорема. Пусть G — выпуклая область ограниченной площади и $q < p\,(q \geq 0)$. Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{I}_q(G) \leq \frac{(p+1)(p+2)\boldsymbol{\rho}(G)^{q-p}}{(q+1)(q+2)} \left(\mathbf{I}_p(G) + \frac{(q-p)\boldsymbol{l}(\rho(G))\boldsymbol{\rho}^{q-p}}{(p+1)(p+2)} \right).$$

Равенства имеет место для широкого класса областей, в частности, для описанных многоугольников.

Теорема находит применение в теории кручения при двухсторонней оценке жесткости кручении области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00282), а также Правительства Республики Татарстан и РФФИ (проект 15-41-02433).

О существовании нулей комбинации произведений функций Бесселя

Гималтдинова А.А.
Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа, Россия

При изучении краевой задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями степенного вырождения в прямоугольной области возникает вопрос о множестве нулей функции

$$f(x) = J_\nu(x)I_{-\nu}(x) + I_\nu(x)J_{-\nu}(x), \tag{1}$$

где $J_{\pm\nu}(x)$ – функции Бесселя первого рода, $I_{\pm\nu}(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода, $0 < \nu < 1$.

Справедливо утверждение.

Теорема. *Функция* (1) *имеет счетное множество действительных нулей* $x_k^{(1)}$ *и чисто мнимых нулей* $i \cdot x_k^{(2)}$, $k \in \mathbb{N}$, *причем действительные нули взаимно разделены с нулями функции* $J_\nu(x)$, *а мнимые нули взаимно разделены с нулями функции* $I_\nu(x)$.

При доказательстве используется теорема о разделении корней [1].

[1] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. литер., 1962.

Аналог левосиметрического волчка

Голубчик И.З.

Башкирский государственный педагогический университет им.М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

Пусть $R_{n\times n}$ — алгебра $n\times n$ матриц над полем действительных чисел R с операцией умножения $A \cdot B$ и $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ — коммутатор матриц A и B. Далее, пусть g — подалгебра Ли в $R_{n\times n}$ относительно операции $[A, B]$ и $C \in R_{n\times n}$. Наконец, пусть $dimg = dim(g \cdot c)$ и N — подпространство в g, такое что $q^2 \cdot c \in N \cdot c$ для всех $g \in N$. Тогда волчок

$$q^2 \cdot c = q_t \cdot c, \quad q \in N, \quad q\mid_{t=0} = q_0 \tag{1}$$

сводится к системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Если $N = g$, то (1) — левосиметрический волчок, решение которого и примеры даны в [1].

[1] *Igor Z. Golubchik, Vladimir V. Sokolov,* Generalized operator Yang-Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras // J. Nonlinear Math. Phys. 7 (2000), no. 2, 184-197.

Об условиях существования классического решения неоднородного бигармонического уравнения

Гришанина Г. Э., Мухамадиев Э. М.
Государственный университет "Дубна", г. Дубна, Россия, Вологодский государственный университет, г. Вологда, Россия

Рассмотрим задачу о существовании классического решения неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in G \tag{1}$$

где Δ- оператор Лапласа, G- ограниченная область в R^2, $f(x,y)-$ непрерывная в G функция. Напомним, что функция $u(x,y)$ называется классическим решением уравнения (1), если она имеет в области G все непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяет уравнению (1).

Определим множество $\widetilde{G} = \{(x,y,r) : M = (x,y) \in G, 0 \le r < \rho(M, \partial G)\}$, где $\rho(M, \partial G)$ - расстояние от точки M до границы ∂G области G, и функцию $g(x,y,r,\varphi) = f(x + r\cos\varphi,\ y + r\sin\varphi)$ на $\widetilde{G} \times [0, 2\pi]$. Очевидно, эта функция непрерывна по совокупности переменных. Комплекснозначная функция

$$F_k(x,y,r) = \int_0^{2\pi} g(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)d\varphi, \quad k = \pm1, \pm2, ...$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и

$$F_k(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in G.$$

Определим функции

$$f_k(x,y,r) = \int_r^{r_1} F_k(x,y,s)\,\frac{ds}{s}, \quad 0 < r \le r_1(x,y) \equiv \frac{1}{2}\rho(M, \partial G).$$

Назовем непрерывную функцию $f(x,y)$ k-усиленно непрерывной, если $f_k(x,y,r)$ имеет непрерывное продолжение на подмножестве $\{(x,y,0) : (x,y) \in G\}$ множества $\widetilde{G}$. Очевидно, непрерывная по Гельдеру функция является k-усиленно непрерывной для любого k. Более общее достаточное условие k-усиленной непрерывности функции $f(x,y)$ дает наличие оценки для функции $F_k(x,y,r)$:

$$|F_k(x,y,r)| \le C(1 + |\ln r|)^{\nu}, \quad \nu < -1, \quad C > 0, \quad 0 < r \le r_1(x,y).$$

Очевидно, что если уравнение (1) имеет классическое решение, то функция $f(x,y)$ является непрерывной функцией.Однако существуют непрерывные функции, для которых уравнение (1) не имеет классических решений. Возникает вопрос о том, каким дополнительным условиям, кроме непрерывности, должна удовлетворять функция $f(x,y)$ для того, чтобы уравнение (1) имело классическое решение.

Теорема 1. Если уравнение (1) имеет в области G классическое решение, то функция $f(x,y)$ k-усиленно непрерывна при $k=2$ и $k=4$ в этой области.

При некоторых дополнительных условиях необходимое условие существования классического решения является и достаточным, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема и k-усиленно непрерывна при $k=2$ и $k=4$ в области G. Тогда функция

$$u_0(x,y)=\frac{1}{8\pi}\int\int_G f(\xi,\eta)r^2\ln r d\xi d\eta,\quad r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,$$

является классическим решением уравнения (1).

Условия возникновения предельных циклов в кусочно-линейных уравнениях третьего порядка

Гулов А.М., Мухамадиев Э.М.

Таджикский национальный университет, г.Душанбе, Таджикистан

Рассмотрим кусочно-линейное дифференциальное уравнение

$$y'''+ay''+by'+cy+d|y''-\lambda|=0, \tag{1}$$

зависящее от параметра λ. Уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x_1'=x_2,\\ x_2'=x_3,\\ x_3'=-ax_3-bx_2-cx_1-d|x_3-\lambda|, \end{cases} \tag{2}$$

Особые точки систем (2) лежать на оси x_1 и являются решением уравнения

$$cx_1+d|\lambda|=0.$$

Это уравнение имеет одну особую точку $x_{1*}=d\lambda/c$, при $\lambda>0$ и $x_{1*}=-d\lambda/c$, при $\lambda<0$.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

$$b > 0, \quad 0 < c < (a+d)b, c > (a-d)b \ \text{и} \ -(a-d) > \mu_1^- \ \text{при} \ \lambda > 0,$$

$$b > 0, \quad 0 < c < (a-d)b, c > (a+d)b \ \text{и} \ -(a+d) > \mu_1^+ \ \text{при} \ \lambda < 0.$$

Тогда система (2) имеет предельный цикл, которому приближается все остальные траектории при $t \to +\infty$, если $\lambda > 0$ и при $t \to -\infty$, если $\lambda < 0$.

На рис.2. приведен фазовый портрет предельного цикла при $a = 1.24, b = 3.23, c = 1.6, d = 1, \lambda = 1.7$.

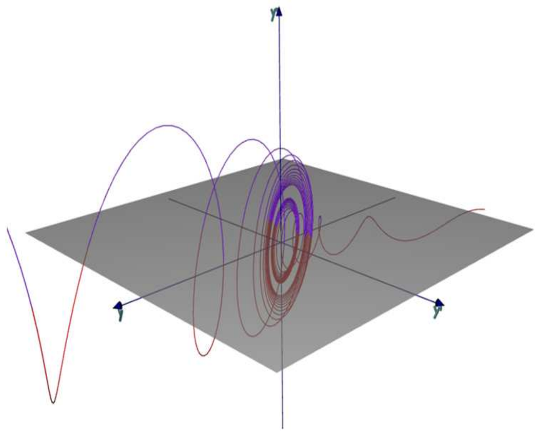

Рис. 1: Предельный цикл

[1] Гулов А.М., Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д. Анализ рождения предельных циклов одного класса нелинейной уравнений второго порядка // Вестник ВГУ. —2016. — вып. 1. — С. 118-125.

[2] Гулов А.М. О квалификации особых точек кусочно-линейного уравнения третьего порядка и возникновении предельных циклов // Вестник ТНУ — 2016. — вып. 1-3. — С. 37–41.

Асимптотика собственного значения задачи типа Стеклова в полуполосе с малым отверстием

Давлетов Д.Б.
БГПУ им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Пусть $\Omega := (-b, b)$, $\Pi := \Omega \times (a, +\infty)$, $a < 0$, $b > 0$, $\Omega_a := \Omega \times \{a\}$, $\{0\} \in \Pi$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — связная ограниченная область с гладкой границей, $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\Pi_\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$. Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача Стеклова:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_\varepsilon &= 0, \qquad x \in \Pi_\varepsilon, \qquad \psi_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a,\\ \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} &= \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \qquad x \in \Omega_a, \qquad \psi_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\omega_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

где ν — внешняя нормаль. Для (1) назовем предельной следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_0 &= 0, \qquad x \in \Pi, \qquad \psi_0 = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a,\\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} &= \lambda_0\psi_0, \qquad x \in \Omega_a. \end{aligned} \tag{2}$$

Методом Фурье легко показать, что собственные значения

$$0 < \lambda_{0,1} < \lambda_{0,2} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{0,k} \leqslant \cdots$$

и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega_a)$ собственные функции $\psi_{0,k}$ краевой задачи (2) определяются равенствами:

$$\lambda_{0,k} = \sqrt{\mu_k}, \qquad \psi_{0,k}(x) = \varphi_k(x_1)\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_k}(x_2-a)},$$

где $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{2b}\right)^2 > 0, k \in \mathbb{N}$ и φ_k — собственные значения и соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции краевой задачи:

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_k}{\mathrm{d}x_1^2} = \mu_k\varphi_k \quad \text{в } \Omega, \qquad \varphi_k = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной краевой задачи (2) и $\psi_0(0) \neq 0$. Тогда асимптотика собственного значения λ_ε краевой задачи (1), сходящегося к λ_0 при $\varepsilon \to 0$, имеет вид:

$$\lambda_\varepsilon = \beta\left(\frac{1}{\ln\varepsilon}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\beta(t)$ – голоморфная в нуле функция, такая что

$$\beta(t) = \lambda_0 - 2\pi \left|\psi_0(0)\right|^2 t + O\left(t^2\right), \quad t \to 0.$$

При построении асимптотики собственного значения λ_ε краевой задачи (1) используется метод согласования асимптотических разложений [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (16-31-00066-мол).

[1] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

Искажение конформных модулей областей при их деформации

Даутова Д.Н., Насыров С.Р.
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Рассматриваются задачи, связанные с искажением конформных модулей плоских областей при деформации. Первый круг задач связан с изучением асимптотики модуля двусвязной области при ее растяжении вдоль оси абсцисс $f_H : z \mapsto Hz$, $H > 0$, когда коэффициент растяжения H стремится к бесконечности (проблема Вуоринена). Ранее нами было установлено, что в случае симметричной относительно оси абсцисс жордановой области D, ограниченной кривыми $|y| = f(x)$, $a \le x \le b$, и $|y| = g(x)$, $c \le x \le d$, где $c < a < b < d$ и f, g — непрерывные неотрицательные на соответствующих отрезках функции, обращающиеся в нуль на концах, модуль области $D_H = f_H(D)$, имеет асимптотику

$$m(D_H) \sim \frac{1}{2cH}, \quad \text{где} \quad c = \int_a^b \frac{dx}{g(x) - f(x)}. \tag{1}$$

В данной работе рассмотрен случай несимметричной жордановой области D. Получена явная формула для главного члена асимптотики, выражающаяся через геометрические характеристики границы области и обобщающая (1). При установлении этого результата используются обобщения теорем Радо и Г.Д. Суворова о сходимости областей к ядру, теоремы Альфорса и Варшавского о модулях четырехсторонников.

Второй круг задач связан с вариацией модулей четырехсторонников, двусвязных областей, а также емкостей конденсаторов и емкостей Робена при инфинитезимальном изменении границы гладким образом. Показано, что вариация совпадает с площадью варьируемого участка области в некоторой экстремальной метрике. Обсуждается возможность многомерного обобщения этого результата: искажение конформной емкости конденсатора при гладком изменении его границ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект No 17-01-00282.

Разрешимость системы с нулевыми правыми частями для случая $a,\ b,\ c,\ g$ - положительные константы, $h_1,\ h_2$ - отрицательные константы

Донцова М.В.

НГТУ имени Р.Е. Алексеева, г.Нижний Новгород, Россия

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x) + h_1)\partial_x u(t,x) = 0 \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x) + h_2)\partial_x v(t,x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ - неизвестные функции, $a,\ b,\ c,\ g$ - известные положительные константы, $h_1,\ h_2$ - известные отрицательные константы.

В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента проводится исследование нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида (1) с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,\infty), T > 0\}$.

С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1],[2],[3]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (aw_1 + bw_3 + h_1)d\tau), \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (cw_4 + gw_2 + h_2)d\tau), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (aw_1 + bw_3 + h_1)d\tau), \\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (cw_4 + gw_2 + h_2)d\tau). \end{gathered} \tag{5}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T.

Справедлива теорема:

Теорема. *Если* $\varphi_i \in \bar{C}^2(R^1),\ i = 1, 2,$ *и выполняются условия:*

1) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ g > 0,\ h_1 < 0,\ h_2 < 0,$

2) $\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0$ на R,

Тогда для любого $T > 0$ *существует единственное решение задачи Коши* (1), (2) $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (3) - (5).

[1] Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико – математические науки. 2013. №3 (177). С. 190–201.

[2] Донцова М.В. Исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами// Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2014.

[3] Донцова М.В. Нелокальная разрешимость одной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами // Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика». Воронеж: ВГЛТА, 2014. №5. Ч. 1. С. 37-38.

Существование ведущего собственного значения нелинейной спектральной задачи

Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Исследуется задача определения минимального собственного значения $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, и отвечающей положительной собственной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, $\Omega = (0, \pi)$, $\overline{\Omega} = [0, \pi]$, удовлетворяющих уравнениям в обобщенном смысле

$$
\begin{aligned}
&-(p(\lambda s(x))u')' = r(\lambda s(x))u, \quad x \in \Omega,\\
&u(0) = u(\pi) = 0.
\end{aligned}
$$

Пусть функции $p(\mu)$, $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ являются непрерывными положительными, функция $p(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ – ограниченная, а функция $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ – неограниченная. Задача такого вида возникает при моделировании плазмы высокочастотного разряда пониженного давления [1]. В отличие от [2] мы не предполагаем монотонной зависимости от спектрального параметра.

Пусть $\gamma(\mu)$ для фиксированного $\mu \in \Lambda$ обозначает минимальное собственное значение параметрической линейной задачи на собственные значения

$$
\begin{aligned}
&-(p(\mu s(x))u')' = \gamma(\mu) r(\mu s(x))u, \quad x \in \Omega,\\
&u(0) = u(\pi) = 0.
\end{aligned}
$$

Установлено, что для существования минимального простого собственного значения исходной задачи, отвечающего положительной собственной функции, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(\xi) > 1$ для некоторого $\xi \in \Lambda$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10299).

[1] Zheltukhin V.S., Solov’ev S.I., Solov’ev P.S., and Chebakova V.Yu. Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm–Liouville problem // Lobachevskii J. Math. 2014. V. 35. № 4. P. 416–426.

[2] Соловьёв С.И. Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от параметра // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 955–962.

Об одном классе гиперболических уравнений с интегралами второго порядка

Жибер А.В., Юрьева А.М.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия, Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Для полной классификации нелинейных гиперболических уравнений лиувиллевского типа

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

следует провести описание (см.[1], [2]) уравнений специального класса

$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x}, \tag{1}$$

обладающих y-интегралами второго порядка. Здесь p, q - функции переменных x, y, u, а φ- переменных x, y, u, u_y.

Отметим (см. [4, 5, 3]), что интегрируемые уравнения Лэне содержатся в классе уравнений (1).

В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования y-интеграла второго порядка и проведен их полный анализ.

Исследование выполнено приподдержке гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

[1] Жибер А.В., Юрьева А.М. Гиперболические уравнения лиувиллевского типа специального класса. — Итоги науки и техники. Современная математика и еёприложения. Тематические обзоры. Том 137(2017). с.17-26.

[2] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. — Успехи матем. наук, 2001. Т.56. №1(337). С. 63-106

[3] Laine M. E. Sur J'application de la methode de Darboux aux eqautions $s = f(x, y, z, p, q)$. — Comptes rendus. V. 182, 1926. P.1126-1127.

[4] Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 182 с.

[5] Капцов О.В. О проблеме классификации Гурса. — Программирование, 2012. №2. С. 68-71.

Интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа первого порядка

Жураев Д.А.

Каршинский государственный университет, г.Карши, Узбекистан

В работе речь идет о справедливости интегральной формулы для системы уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизующие оператор Гельмгольца в двумерной ограниченной области.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2-$ограниченная односвязная область, граница которой состоит из отрезка $a \leq y_1 \leq b$ и некоторой гладкой кривой S ($S \in y^1$), лежащей на полуплоскости $y_2 > 0$, т.е. $\partial G = S \bigcup T$.

Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-$матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Обозначим через $H(G)-$класс вектор-функций в области G, непрерывных на $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ и удовлетворяющих системе (1).

Если $U(y) \in H(G)$, то верна следующая интегральная формула типа Коши

$$U(x) = \int_{\partial G} M(y, x) U(y) ds_y, \quad x \in G, \tag{2}$$

где

$$M(y, x) = \left(E\left(-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\lambda r) u^0 \right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \right) D(t^T).$$

Здесь $t = (t_1, t_2)-$единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y, поверхности ∂G, $-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\lambda r)-$фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, определяемое через функцию Ханкеля первого рода [1].

[1] Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач // Наука, Москва, 1991 г. – С. 164.

Задача Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца на плоскости

Жураев Д.А.

Каршинский государственный университет, г.Карши, Узбекистан

В работе используя методику работы [1] рассмотрена задача Коши для системы уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизующие оператор Гельмгольца в двумерной ограниченной области.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2-$ограниченная односвязная область, граница которой состоит из отрезка $a \leq y_1 \leq b$ и некоторой гладкой кривой S ($S \in y^1$), лежащей на полуплоскости $y_2 > 0$, т.е. $\partial G = S \bigcup T$.

Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ −матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Обозначим через $H(G)$−класс вектор-функций в области G, непрерывных на $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ и удовлетворяющих системе (1).

Теорема. Пусть $U(y) \in H(G)$ удовлетворяет неравенству

$$|U(y)| \leq 1, \;\; y \in T. \tag{2}$$

Если

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(y,\, x)U(y)ds_y, \quad x \in G, \tag{3}$$

то справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq C(\lambda,\, x)\sigma\, e^{-\sigma\, x_2^2}, \;\; \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{4}$$

Здесь для удобства, функции, зависящие от λ и x, обозначим через $C(\lambda,\, x)$. Причем в различных неравенствах они различные.

[1] Ярмухамедов Ш. Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журнал. 2004. – Т. 45. №. 3. – С. 702–719.

О разрешимости одной обратной задачи спектрального анализа

Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М.
Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики НАН Азербайджана

Пусть

$$-y'' + q\,(x)\; y = \lambda^2 y \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

— уравнение Штурма–Лиувилля с вещественным потенциалом $q\,(x) \in L_2\,[0,\pi]$. Рассмотрим пару краевых задач $P\,(\alpha_j)$, порожденных этим уравнением и неразделенными граничными условиями

$$(\alpha_j\lambda + \beta)\, y\,(0) + y'\,(0) + \omega\, y\,(\pi) = 0, \qquad -\omega\, y\,(0) + \gamma\, y\,(\pi) + y'\,(\pi) = 0,$$

где λ – спектральный параметр, α_j, β, γ, ω – вещественные числа, причем $\alpha_j \neq 0$, $\omega \neq 0$, $j = 1,\,2$. Приведем основной результат работы – достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Для того чтобы последовательности вещественных чисел* $\left\{\mu_k^{(1)}\right\}$, $\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ $(k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ *и* $\{\sigma_n\}$ $(\sigma_n = -1, 0, 1;$ $n = \pm 1, \pm 2, ...)$ *были спектральными данными краевых задач вида* $P\,(\alpha_1)$

и $P(\alpha_2)\,(\alpha_1 < \alpha_2)$, *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *имеет место асимптотическая формула*

$$\mu_k^{(j)} = k + a_j + \frac{(-1)^{k+1} A_j - B_j}{k\pi} + \frac{\tau_k^{(j)}}{k},$$

где $A_j = 2\omega \cos \pi a_j$, ω, a_j, B_j *– вещественные числа,* $-\frac{1}{2} < a_j < \frac{1}{2}$, $a_1 > a_2$, $\omega \neq 0$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left(\tau_k^{(j)}\right)^2 < \infty$;

2) *числа* $\mu_k^{(1)}$ *и* $\mu_k^{(2)}$ *при* $\omega < 0$ *удовлетворяют неравенствам*

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} \leq \mu_{+0}^{(1)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} < \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} \leq \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} < ...,$$
$$0 > \mu_{-0}^{(2)} \geq \mu_{-0}^{(1)} \geq \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} > \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} \geq \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} > ...,$$

а при $\omega > 0$ *– неравенствам*

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} < \mu_{+0}^{(1)} < \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} \leq \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} < \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} \leq ...,$$
$$0 > \mu_{-0}^{(2)} > \mu_{-0}^{(1)} > \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} \geq \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} > \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} \geq ...,$$

причем если $\mu_k^{(j)} = \mu_{k+1}^{(j)}$, *то* $\mu_{k-1}^{(3-j)} < \mu_k^{(3-j)} < \mu_{k+1}^{(3-j)}$;

3) *справедливо неравенство* $b_n \overset{def}{=} |\delta_j(\nu_n) - 2\omega| - 2|\omega| \geq 0$, *где*

$$\delta_j(\lambda) = \frac{\pi\left(\mu_{-0}^{(j)} - \lambda\right)\left(\mu_{+0}^{(j)} - \lambda\right)}{\cos \pi a_j} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\mu_k^{(j)} - \lambda}{k}$$

ν_n *– нули функции* $\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)$, *причем* $\nu_{-n} = -\nu_n$;

4) σ_n *принимает значение, равное нулю, если* $b_n = 0$, *и значение 1 или -1, если* $b_n > 0$, *причем есть такое* $N > 0$, *что* $\sigma_n = 1$ *для всех* $|n| \geq N$.

О построении областей устойчивости линейных гамильтоновых систем

Ибрагимова Л.С.
Башкирский государственный аграрный университет, г.Уфа, Россия

В докладе обсуждаются вопросы построения и изучения границ областей устойчивости точек равновесия линейных гамильтоновых динамических систем [1], описываемых дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_1(t) + (\beta - \beta_0)B_1(t) + A_2(t, \alpha, \beta)]x\,, \quad x \in R^N\,, \quad (1)$$

где N – четно, α и β – скалярные параметры, матрица A_0 является постоянной, матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$ и $A_2(\alpha, \beta, t)$ являются T-периодическими по t, при этом $A_2(t, \alpha, \beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению: $\|A_2(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$ при $(\alpha, \beta) \to (\alpha_0, \beta_0)$.

Рассматриваемая система при всех значениях параметров α и β имеет точку равновесия $x = 0$, которая при одних значениях параметров может быть устойчивой по Ляпунову, а при других – неустойчивой. Множество G в плоскости Π параметров (α, β) называют областью устойчивости (областью неустойчивости) точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $(\alpha, \beta) \in G$ точка равновесия $x = 0$ является устойчивой (неустойчивой). Точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ является граничной точкой области устойчивости G, если в любой ее окрестности содержатся точки как из области устойчивости G, так и из области неустойчивости. Совокупность граничных точек множества G образует ее границу Γ. Аналогично определяется область гиперболичности системы (1) и ее граница.

Для того, чтобы точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ была граничной для области устойчивости линейной гамильтоновой системы (1) необходимо, чтобы матрица A_0 не имела собственных значений с положительной вещественной частью и либо имела пару собственных значений вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 = \dfrac{\pi k_0}{T}$ при некотором неотрицательном целом k_0, либо имела пару непростых собственных значений вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 \neq \dfrac{\pi k}{T}$ при неотрицательных целых k.

Положим

$$Q = \begin{bmatrix} -2\omega_0 i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D(\varphi, t) = e^{Qt}[A_1(t)\cos\varphi + B_1(t)\sin\varphi]e^{-Qt},$$

и

$$S(\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T D(\varphi, \tau)d\tau .$$

Теорема. *Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 = k_0\pi/T$ при некотором натуральном числе k_0. Пусть при некотором $\varphi = \varphi^*$, $0 \le \varphi^* < 2\pi$ матрица $S(\varphi)$ является негиперболической, при этом существуют интервалы $(\varphi^* - \delta_0, \varphi^*)$ и $(\varphi^*, \varphi^* + \delta_0)$, в одном из которых она является гиперболической, а в другом – негиперболической. Тогда через точку (α_0, β_0) проходит граничная кривая области гиперболичности линейной гамильтоновой системы (1), при этом параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \tau\cos\varphi^*$, $\beta = \beta_0 + \tau\sin\varphi^*$ является касательной к этой граничной кривой.*

[1] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972.

Интегральное представление решения одного B-эллиптического уравнения с параметром

Ибрагимова Н.А.
ФГБОУ ВО Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Россия

Пусть $\mathbb{E}_p^{++}$ — часть p-мерного евклидова пространства, где $x_{p-1} > 0$, $x_p > 0$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно,$D_e = \mathbb{E}_p^{++} \setminus \overline{D}$. Для точек евклидова пространства введем обозначения: $x = (x', x_p)$, $x' = (x'', x_{p-1})$, $x'' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-2})$.

Рассмотрим в $\mathbb{E}_p^{++}$ вырождающееся B-эллиптическое уравнение с отрицательным параметром вида

$$M_B[u] = x_p^m \left(\Delta_{x'} u + B_{x_{p-1}} u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - \lambda^2 x_p^m u = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_{x'} = \sum\limits_{l=1}^{p-2} \dfrac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ — лапласиан, $B_{x_{p-1}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \dfrac{k}{x_{p-1}} \dfrac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$, $p \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $C_{B^l}^k(D)$ множество функций k раз непрерывно дифференцируемых в D и удовлетворяющих условию $\frac{\partial u}{\partial x_l} = \mathrm{o}(1)$ при $x_l \to 0$.

Нетрудно доказать, что функция

$$Z(x, x_0) = \beta C_k \int\limits_0^\pi \left(C_\gamma \int\limits_0^\pi \rho_\varphi^{-\nu} \mathrm{K}_\nu \left(\lambda \rho_\varphi\right) \sin^{\gamma-1} \varphi \, d\varphi \right) \sin^{k-1} \varphi \, d\varphi,$$

где $\mathrm{K}_\nu\left(\lambda \rho_\varphi\right)$ — функция Макдональда, $C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$, $C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, $\nu = \frac{p+k+\gamma-2}{2}$, $\gamma = \frac{m}{m+2}$, $\rho_\varphi = \Big(|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1_0}^2 - 2x_{p-1} x_{p-1_0} \cos\varphi + \frac{4}{(m+2)^2}\big(x_p^{m+2} + x_{p_0}^{m+2} - 2 x_p^{\frac{m+2}{2}} x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}} \cos\varphi\big)\Big)^{1/2}$, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке x_0.

Для всякой функции $u(x) \in C^2_{B^{p-1}}(D) \cap C^2_{B^p}(D) \cap C^1(\overline{D})$ решения уравнения (1) и для любой точки $x_0 \in D$ справедливо следующее интегральное представление

$$u(x_0) = \int\limits_{\Gamma} \left[Z(\xi, x_0) A[u(\xi)] - u(\xi) A[Z(\xi, x_0)] \right] \xi^k_{p-1} d\Gamma. \qquad (2)$$

Из интегрального представления (2) вытекают следующие свойства решения уравнения (1):

1^0. Существует решение $u(x)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условию

$$u(x) = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad x_p \to 0. \qquad (3)$$

2^0. Существует решение $u(x)$ уравнения (1) в области $D_e = \mathbb{E}^{++}_p \setminus \overline{D}$, удовлетворяющее на бесконечности условию

$$u(x) = \mathrm{O}\left(e^{-\rho_0}\right),$$

где $\rho_0^2 = |x'|^2 + \frac{4}{(m+2)^2} x_p^{m+2}$.

3^0. Принцип максимума, вытекающий из интегрального представления (2), сформулируем в виде теоремы:

Теорема (о принципе максимума). *Если функция $u(x)$ класса $C^2_{B^{p-1}}(D) \cap C^1_{B^p}(D \cup \Gamma_1) \cap C(\overline{D})$ удовлетворяет уравнению (1) в области D и условию (3), то эта функция принимает как наибольшее положительное, так и наименьшее отрицательное значение на границе Γ.*

Следствие. *Если функция $u(x)$ класса $C^2_{B^{p-1}}(D) \cap C^1_{B^p}(D \cup \Gamma_1) \cap C(\overline{D})$ удовлетворяет уравнению (1) в области D и условию (3), то $|u(x)| \leqslant \max\limits_{x_0 \in \Gamma} |u(x_0)|$, $x \in D$. В частности, если $u(x)\big|_{\Gamma} = 0$, то $u(x) \equiv 0$ в $\overline{D}$.*

О коммутантах операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций

Иванова О.А.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Пусть E – счетный индуктивный предел весовых пространств Фреше целых в $\mathbb{C}^N$ функций. Веса, задающие E, удовлетворяют стандартным техническим условиям. Описаны коммутанты $\mathcal{K}(\partial)$ и $\mathcal{K}(\tau)$ системы операторов частного дифференцирования и, соответственно, системы операторов сдвига в кольце всех линейных непрерывных в E операторов. Операторами из $\mathcal{K}(\partial) = \mathcal{K}(\tau)$, как и во многих других ситуациях, являются те и только те, которые действуют по правилу $f \mapsto \varphi_t(f(t+z))$,

$z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$, где φ – произвольный линейный непрерывный функционал на E, т. е. операторы свертки (см. [1], [2], [3]). В топологическом сопряженном E' к E естественным образом вводится умножение, с которым E' является алгеброй. Эта алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{K}(\partial)$ с обычным умножением – композицией операторов. Соответствующий изоморфизм является и топологическим, если E' наделено слабой, а $\mathcal{K}(\partial)$ – слабо-операторной топологией. Это влечет, что множество многочленов от операторов частного дифференцирования плотно в пространстве $\mathcal{K}(\partial)$, наделенном топологией поточечной сходимости. Кроме того, получены некоторые результаты о представлении операторов из $\mathcal{K}(\partial)$ в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Приведенные результаты получены совместно с С.Н. Мелиховым и Ю.Н. Мелиховым.

[1] Коробейник Ю. Ф., Моржаков В. В. Общий вид изоморфизмов, перестановочных с оператором дифференцирования, в пространствах целых функций медленного роста // Матем. сб. 91 (133). 4. 1973. 475–487

[2] Трутнев В. М. Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2006. 158–180

[3] Martineau A. Equations differentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math. France. 95. 1967. 109–154.

Непрерывные дроби и приближенные конформные отображения

Иваньшин П.Н.

Институт математики и механики КФУ, г.Казань, Россия

В работе дан один вспомогательный метод построения приближенного конформного отображения единичного круга на односвязную область. Построенная здесь конструкция дополняет [1], [2]. Напомним, что в [1] авторы конструируют приближенное полиномиальное конформное отображение единичного круга D на некоторую односвязную область B. Метод построения приближенного конформного отображения кольца на двусвязную область см. в [3].

Главный результат заключается в том, что построенные при помощи непрерывных дробей (подобные, но не совпадающие с последовательностью дробно-полиномиальных функций [4], [5]) отображения приближают квадратный корень в комплексной правой полуплоскости.

Лемма. Для $f_n(z) = 1 + \frac{z-1}{1+f_{n-1}(z)}$ для z с $Re[z] > 0$ выполнены следующие факты:

1. $Re[f_n(z)] > 0$
2. $Im[f_n(z)]$ имеет тот же знак, что и $Im[z]$.
3. Отношение $\frac{Im[f_n(z)]}{Re[f_n(z)]}$ имеет тот же знак, что и $\frac{Im[z]}{Re[z]}$, но $|\frac{Im[f_n(z)]}{Re[f_n(z)]}| < |\frac{Im[z]}{Re[z]}|$.

Теорема. В правой комплексной полуплоскости нет точек, в которых производная $f_n(z)$ равна нулю.

Утверждение. Функции $f_n(z) = 1 + \frac{z-1}{1+f_{n-1}(z)}$ сходятся к $\sqrt{z}$ для $Re[z] > 0$, $|z| < 1$.

[1] E.A. Shirokova, P. N. Ivanshin, Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory, Journal of Complex Analysis, vol. 2016, Article ID 4367205, 8 pages, 2016.

[2] Е.А. Широкова, Д.Ф. Абзалилов, Методы построения приближенных конформных отображений канонической области на одно- и дву-связные области, Материалы межд. конфю по алгебре, анализу и геометрии, Казань: КФУ; Изд-во АН РТ, 2016, 77-78.

[3] D. F. Abzalilov, E.A.Shirokova, The approximate conformal mapping onto simply and dou- bly connected domains // Complex Variables and Elliptic Equations, 2016, 1-12.

[4] A. I. Aptekarev, M. L. Yattselev Approximations of algebraic functions by rational ones – functional analogues of diophantine approximants. Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2016.

[5] A. I. Aptekarev, M. L. Yattselev, Pade approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials, Acta Math., 215, 2015, 217-280.

О свойствах отображения Ландау-Стритера

Икаева К.В.

Лаборатория квантовой теории информации МФТИ, г. Долгопрудный, Россия

Отображение вида

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{j(j+1)}(J_x\rho J_x + J_y\rho J_y + J_z\rho J_z),$$

где J_x, J_y, J_z - генераторы группы $SU(2)$ в представлении матриц размерности $2j+1$, при $j \geq 1$ было рассмотрено в работе [1] как пример неунитарного экстремального канала, обладающего свойством унитальности $\Phi(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$. Известно, что Φ, являясь вполне положительным отображнием, имеет представление Стайнспринга: существует оператор плотности окружения ρ_{env} и унитарный оператор U, такие что

$$\Phi(\rho) = tr_{env}\left(U\left(\rho \otimes \rho_{env}\right)U^{\dagger}\right).$$

Изучение частного случая $j = 1$ дает следующие новые результаты.

Найдены явный вид представления Стайнспринга с размерностью окружения $dimH_{env} = 3$ и операторы Крауса комплементарного канала $\widetilde{\Phi}$: $\widetilde{\Phi}(\rho) = tr_{sys}\left(U\left(\rho \otimes \rho_{env}\right)U^{\dagger}\right)$. Показано, что минимальная выходная энтропия: $\min\limits_{\rho} S(\Phi(\rho)) = S(\Phi(|\Psi\rangle\langle\Psi|)) = \log 2$ достигается на любом чистом состоянии, то есть $\forall\Psi : \langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ верно $\min\limits_{\rho} S(\Phi(\rho)) = S(\Phi(|\Psi\rangle\langle\Psi|)) = \log 2$. Классическая пропускная способность канала равна $C_{\chi}(\Phi) = \log d - 1$, $(d = 3)$. Показано отсутствие как деградируемости, так и антидеградируемости канала Φ, т.е. не существует канала T такого, что $\widetilde{\Phi} = T \circ \Phi$ или $\Phi = T \circ \widetilde{\Phi}$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского Научного Фонда (проект 16-11-00084) в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

[1] L. J. Landau, R. F. Streater. On Birkhoff's theorem for doubly stochastic completely positive maps of matrix algebras // Linear Algebra and its Applications **193**, 1 (1993)

О явно определяемых вариационных принципах для нелинейных уравнений математической физики

Ильясов Я.Ш.
ИМВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Обсуждаются вариацинные принципы связанные с нелинейными уравнениями выражаемые в явном виде. Вводятся обобщения известных вариационных принципов таких как, теорема Фробениуса — Перрона (Perron–Frobenius theorem), формула Коллатца-Вейланда (Collatz - Wielandt formula) (см. [3]), принцип минимакса Куранта - Фишера - Вейля (Courant –Fischer –Weyl min-max principle), отношение Релея (Rayleigh Quotient)(см. [2]). Представлены приложения этих формул к нелинейным уравнениям математической физики [3, 4, 5].

[1] Il'yasov, Ya Sh. Bifurcation calculus by the extended functional method. Functional Analysis and Its Applications 41, no. 1 (2007): 18-30.

[2] Ilyasov, Yavdat. On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh's quotient. Topol. Methods Nonlinear Anal., 10 March 2017. http://projecteuclid.org/euclid.tmna/1489114818,1-32.

[3] Il'yasov, Yavdat. A duality principle corresponding to the parabolic equations. Physica D: Nonlinear Phenomena 237, no. 5 (2008): 692-698.

[4] Il'yasov, Y., & Ivanov, A. (2016). Computation of maximal turning points to nonlinear equations by nonsmooth optimization. Optimization Methods and Software, 31(1), 1-23.

[5] Díaz, J. I., Hernández, J., & Il'yasov, Y. . Flat solutions of some non-Lipschitz autonomous semilinear equations may be stable for N? 3. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 38(1),(2017), 345-378.

О безусловных базисах из воспроизводящих ядер в слабовесовых пространствах типа Фока

Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\varphi(\lambda)$ субгармоническая функция на плоскости и

$$\mathcal{F}_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : \ ||f||^2 := \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} dm(\lambda) < \infty\},$$

где dm — плоская мера Лебега. Тогда $\mathcal{F}_\varphi$ является гильбертовым пространством, в котором точечные функционалы $\delta_\lambda : f \longrightarrow f(\lambda)$ непрерывны при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. В силу самосопряженности гильбертовых пространств каждый из этих функционалов порождается элементом $K(z, \lambda) \in \mathcal{F}_\varphi$:

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{K(z,\lambda)}e^{-2\varphi(z)}dm(z),\ \forall f \in \mathcal{F}_\varphi,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция $K(z, \lambda) \in \mathcal{F}_\varphi$ называется воспроизводящим ядром (см. [1]) пространства $\mathcal{F}_\varphi$. Очевидно,

$$||\delta_\lambda||^2 = ||K(\cdot, \lambda)||^2 = K(\lambda, \lambda),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Базис $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в некотором гильбертовом пространстве называется безусловным базисом ([2]), если для некоторого числа $P > 1$ и для любого конечного набора $a_n \in \mathbb{C},\ n = 1, ..., N$, выполняется двусторонняя оценка

$$\frac{1}{P}\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2||h_n||^2 \le \left|\left|\sum_{n=1}^{N} a_n h_n\right|\right|^2 \le P\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2||h_n||^2.$$

В работе [3] исследован вопрос о существовании безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра $K(z, \lambda_n)$ в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. В этой работе рассматриваются радиальные веса $\varphi(z) = \varphi(|z|) \in C^2$ и на функцию

$$\rho(z) = (\Delta\varphi(z))^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\varphi'(r)}{r} + \varphi''(r)\right)^{-\frac{1}{2}},\ r = |z|,$$

накладываются условия

$$0 < \inf_{r>0} \rho(r),\ \rho(r) = o(r),\ r \longrightarrow \infty,$$

$$\rho(r + \rho(r)) = (1 + o(1))\rho(r),\ r \longrightarrow \infty,\ \rho(2r) \asymp \rho(r),\ r > 0.$$

Доказано, что при $\ln^2 r = o(\varphi(r))$, $r \longrightarrow \infty$, в пространстве $L_2(\varphi)$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует, а если $\varphi(r) = \ln^\alpha(r + 1),\ 1 < \alpha \le 2$, то безусловные базисы из воспроизводящих ядер существуют.

В [4] показано, что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ есть безусловные базисы из воспроизводящих ядер, если $(\varphi(e^t))''$ — невозрастающая положительная функция и φ обладает дополнительной регулярностью.

Нами показано, что существуют сколь угодно медленно растущие функции $\varphi(r)$, для которых $\ln r = o(\varphi(r))$, $r \longrightarrow \infty$, и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ нет безусловных базисов из воспроизводящих ядер. Таким образом, критерий существования безусловных базисов невозможно дать только в терминах роста весовой функции.

[1] Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the American Mathematical Society, **68** (1950), №3, 337-–404.

[2] Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S., *Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels*, Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics, **864** (1981), 214–335.

[3] Borichev A., Lyubarskii Yu., *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, **9** (2010), 449–461.

[4] Baranov A., Belov Yu., Borichev A., *Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces*, Studia Mathematica, **236** (2017), 127–142.

Базисы Рисса из нормированных воспроизводящих ядер в пространствах типа Фока с нерадиальным весом

Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\varphi(\lambda)$ субгармоническая функция на плоскости и

$$\mathcal{F}_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : \ ||f||^2 := \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} dm(\lambda) < \infty\},$$

где dm — плоская мера Лебега. Тогда $\mathcal{F}_\varphi$ является гильбертовым пространством, в котором точечные функционалы $\delta_\lambda : f \longrightarrow f(\lambda)$ непрерывны при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. В силу самосопряженности гильбертовых пространств каждый из этих функционалов порождается элементом $K(z,\lambda) \in \mathcal{F}_\varphi$:

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{K(z,\lambda)} e^{-2\varphi(z)} dm(z), \ \forall f \in \mathcal{F}_\varphi, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция $K(z,\lambda) \in \mathcal{F}_\varphi$ называется воспроизводящим ядром (см. [1]) пространства $\mathcal{F}_\varphi$.

Базис $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в некотором гильбертовом пространстве называется безусловным базисом ([2]), если для некоторого числа $P > 1$ и для любого конечного набора $a_n \in \ \mathbb{C}, \ n = 1, ..., N$, выполняется двусторонняя оценка

$$\frac{1}{P}\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2||h_n||^2 \le \left|\left|\sum_{n=1}^{N}a_nh_n\right|\right|^2 \le P\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2||h_n||^2.$$

Безусловный базис $\{h_k,\ \ k=1,2,...\}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0<\inf||h_k||\le\sup||h_k||<\infty$.

В работе [3] исследован вопрос о существовании безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра $K(z,z_n)$ в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. В этой работе рассматриваются радиальные веса $\varphi(z)=\varphi(|z|)\in C^2$ с некоторыми условиями на регулярность. Доказано, что при $\ln^2 r=o(\varphi(r))$, $r\longrightarrow\infty$, в пространстве $L_2(\varphi)$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует, а если $\varphi(r)=\ln^\alpha(r+1),\ 1<\alpha\le 2$, то безусловные базисы из воспроизводящих ядер существуют.

В [4] показано, что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ есть безусловные базисы из воспроизводящих ядер, если $(\varphi(e^t))''$ — невозрастающая положительная функция и φ обладает дополнительной регулярностью.

Теорема. Пусть $\varphi(z)$, $\varphi(0)=0$, — субгармоническая функция на плоскости, μ — ассоциированная по Риссу с функцией φ мера. Через $\mu(z,t)$, $t>0$ будем обозначать μ - меру круга $B(z,t)$ с центром в точке z радиуса t, величину $\mu(0,t)$ сокращенно будем обозначать через $\mu(t)$. Пусть ассоциированная мера μ удовлетворяет условиям

1. Для некоторого положительного $\delta>0$ $\delta\le\mu(2t)-\mu(t)\le 1,\ t>0$.
2. Для любого $z\in\mathbb{C}$ и некоторых $A>0,\beta\in(0;1)$ $\int_0^{\beta|z|}\frac{\mu(z,t)dt}{t}\le A$.

Определим возрастающую последовательность положительных чисел R_n и последовательность $r_n\in[R_n;R_{n+1}]$, $n\in\mathbb{N}$, рекуррентными соотношениями $R_0=0,\ \mu(R_{n+1})-\mu(R_n)=1,\ n=0,1,2,...$, $\int_{R_n}^{R_{n+1}}\ln t d\mu(t)=\ln r_n$. Возьмем $z_n=(-1)^n r_n$. Система $\frac{K(z,z_n)}{\|K(z,z_n)\|}$, $n\in\mathbb{N}$, образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$.

[1] Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the American Mathematical Society, **68** (1950), №3, 337-–404.

[2] Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S., *Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels*, Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics, **864** (1981), 214–335.

[3] Borichev A., Lyubarskii Yu., *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, **9** (2010), 449–461.

[4] Baranov A., Belov Yu., Borichev A., *Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces*, Studia Mathematica, **236** (2017), 127–142.

Бифуркации в окрестностях границ областей устойчивости ограниченной задачи трех тел

Исанбаева Н.Р.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается плоская эллиптическая ограниченная задача трех тел [1]-[2]. Дифференциальные уравнения этой задачи в координатах Нехвилла (ξ,η) имеют вид:

$$\begin{cases} \xi''-2\eta'=\rho\left(\xi-\mu+\dfrac{\mu-1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\xi-\dfrac{\mu}{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}}(\xi-1)\right), \\ \eta''+2\xi'=\rho\left(\eta+\dfrac{\mu-1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\eta-\dfrac{\mu}{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}}\eta\right); \end{cases} \tag{1}$$

здесь

$$\rho=\frac{1}{1+\varepsilon\cos t}\,,\quad \mu=\frac{m_1}{m_0+m_1}\,, \tag{2}$$

ε – эксцентриситет кеплеровской орбиты $(0\leqslant\varepsilon<1)$, t – истинная аномалия, m_0 и m_1 – массы активно гравитирующих тел, μ – параметр масс $(0<\mu<1)$.

Система (1) имеет пять постоянных решений – точек либрации: прямолинейных L_1, L_2 и L_3 и треугольных L_4 и L_5. Изучается задача о бифуркации в окрестности границ областей устойчивости треугольной точки либрации L_4 и L_5 (см. [3]). Границы областей устойчивости (при малых μ) состоят из трех гладких кривых Γ_1,Γ_2 и Γ_3 (см [1]). Кривые Γ_1 и Γ_2 начинаются в точке $\varepsilon=0$, $\mu_0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}$.

В докладе показано, что при пересечении параметров (ε,μ) через линии Γ_1 и Γ_2 в системе (1) возникают нестационарные 4π-периодические решения в окрестности треугольных точек либрации.

[1] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978.

[2] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. 1978.

[3] Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации задачи трех тел. Изв. вузов. Матем., 2010, номер 6, 82–89

О свойствах ядра оператора преобразования для уравнения Штурма–Лиувилля на кривой

Ишкин Х.К.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть γ – кривая с параметризацией $z(x) = x + is(x),\ x \in [0,1]$, где функция s непрерывно дифференцируема, s' не убывает и $s(0) = s(1) = 0, s'(0) < 0 < s'(1)$. Далее пусть $q \in L^1(\gamma)$ и $\varphi(z,\lambda)$ – решение уравнения

$$-y'' + qy = \lambda^2 y,\ z \in \gamma,$$

удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0,\lambda) = 0,\ \varphi'(0,\lambda) = 1$. Если $\gamma = [0,1]$, то

$$\varphi(z,\lambda) = \frac{\sin \lambda z}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^z K(z,t)\sin \lambda t dt,\ z \in [0,1].$$

Интегральный оператор в правой части, связывающий решения задачи Коши для невозмущенного и возмущенного уравнений, был впервые введен Дельсартом (1938) и был предметом исследования многих авторов (см. [1] и имеющиеся там ссылки). Для доказательства существования ядра $K(x,t)$ использовались различные методы. По-видимому, в работе [2] впервые появилось выражение для $K(x,t)$ через преобразование Бореля: если

$$H(z,t) = \int_0^\infty e^{-i\lambda t}(\lambda\varphi(z,\lambda) - \sin \lambda z)d\lambda,$$

то

$$\lambda\varphi(z,\lambda) - \sin \lambda z = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C e^{i\lambda t}H(z,t)dt, \qquad (1)$$

где C – контур, охватывающий $[-z,z]$. Отсюда $K(z,t) = \frac{i}{\pi}(H_-(z,t) - H_+(z,t)$, где $H_\pm(z,t)$ – значения функции $H(z,t)$ на верхнем и нижнем берегах разреза по $[-z,z]$. Формула (1)сохраняет силу и в случае, когда γ произвольная гладкая кривая, так что свойства ядра оператора преобразования полностью определяются свойствами функции $H(z,t)$.

Для того, чтобы сформулировать одно из этих важных свойств, нам понадобятся обозначения: γ_z – дуга γ, соединяющая точки 0 и z, γ_z^* – образ дуги γ_z при ее повороте на угол π вокруг точки $z/2$, G_z – внешность контура $\gamma_z \cup \gamma_z^*$.

Теорема. При каждом фиксированном $z \in \gamma$ функция $H(z, \cdot)$ аналитична в области G_z и непрерывна на замыкании G_z.

[1] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. 1977.

[2] Леонтьев А. Ф. Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях аргумента и ее применения к некоторым вопросам теории функций. Сиб. матем. ж. 1960. Т. 1. № 3.

Об уравнении Гахова для операторов на классах однолистных функций

Казанцев А.В.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г.Казань, Россия

Пусть $\tilde{S}^*$ – класс звездообразных функций в единичном круге $\mathbb{D}$ с дополнительным условием $f''(0) = 0$, $\tilde{\mathcal{G}}_1$ – класс Гахова, состоящий из всех голоморфных и локально однолистных в $\mathbb{D}$ функций $f(z) = z + \ldots$, для которых уравнение Гахова

$$f''(z)/f'(z) = 2\bar{z}/(1 - |z|^2)$$

имеет единственный корень в точке $z = 0$, являющейся единственным максимумом конформного радиуса $h_f(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)|$. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество вращений $\bar{\varepsilon}p(\varepsilon z)$, $|\varepsilon| = 1$, функции $p(z) = z/(1 - z^2)$.

В работе [1] показано, что для семейства интегральных операторов

$$J_c[f](z) = \int_0^z (f(t)/t)^c dt$$

(J_1 – оператор Бернацкого) множество параметров $c \in \mathbb{C}$, допускающих включение $J_c[\tilde{S}^* \setminus \mathcal{P}] \subset \tilde{\mathcal{G}}_1$, совпадает с $\overline{\mathbb{D}}$, а множество тех $c \in \mathbb{C}$, для которых $J_c[\mathcal{P}] \subset \tilde{\mathcal{G}}_1$, есть в точности $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.

В докладе обсуждается проблема построения подобных утверждений для семейств, обобщающих операторы Либеры, Бернарди и некоторые другие.

[1] Казанцев А.В. Об уравнении Гахова для оператора Бернацкого // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 2. – С. 79-92.

Критерий $(0,0)$-выпуклости функции

Калинин С.И.
Вятский государственный университет, г.Киров, Россия

Доклад посвящается осмыслению необходимых и достаточных условий $(0,0)$-выпуклости вещественной функции, заданной на промежутке числовой прямой, в терминах $(0,1)$-выпуклости.

Приведем определения используемых понятий.

Определение 1. Пусть $f\colon l \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на промежутке $l, l \subseteq (0;+\infty)$. Условимся называть ее $(0,1)$-выпуклой на l, если для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого числа $\lambda, \lambda \in (0;1)$, будет выполняться неравенство

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) < \lambda f\left(a\right) + \left(1-\lambda\right) f\left(b\right).$$

Определение 2. Функцию $f\colon l \to \mathbb{R}$, определенную на промежутке $l, l \subseteq (0;+\infty)$, и принимающую на нем положительные значения, будем называть $(0,0)$-выпуклой на l, если для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого числа $\lambda, \lambda \in (0;1)$, будет выполняться неравенство

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) < f^{\lambda}\left(a\right) f^{1-\lambda}\left(b\right).$$

Отметим, что в литературе некоторыми авторами $(0,1)$-выпуклые функции называются геометрически выпуклыми и GA-выпуклыми, а $(0,0)$-выпуклые — геометрически логарифмически выпуклыми и GG-выпуклыми (G ассоциируется с весовым средним геометрическим, а A – аналогичным средним арифметическим двух величин). В соответствии с данным замечанием обычную выпуклость функции можно называть $(1,1)$-выпуклостью, или AA-выпуклостью.

Упоминаемый в названии доклада критерий характеризуется следующей теоремой.

Теорема A. Пусть $f\colon l \to \mathbb{R}$ — функция, принимающая в точках промежутка l, $l \subseteq (0;+\infty)$, положительные значения. На данном промежутке она будет $(0,0)$-выпуклой тогда и только тогда, когда для любого действительного числа α на этом промежутке будет $(0,1)$-выпуклой функция $x^{\alpha}f(x)$.

Сформулированная теорема позволяет обосновать следующее неочевидное свойство $(0,0)$-выпуклых функций.

Предложение. Если f и g — $(0,0)$-выпуклые на промежутке l функции, то их сумма $f+g$ также является $(0,0)$-выпуклой на данном промежутке функцией.

В докладе обсуждаются достаточные условия $(0,0)$-выпуклости дважды дифференцируемой функции в терминах ее производных. Справедлива

Теорема Б. Пусть $f\colon l \to \mathbb{R}$ — непрерывная, положительная на промежутке $l, l \subseteq (0;+\infty)$, функция, дважды дифференцируемая внутри этого промежутка. Пусть, далее,

$$\Delta(x) = f(x)f'(x) + x\left(f(x)f''(x) - (f'(x))^2\right), x \in l^o,$$

где l^o — внутренняя часть l.

Если $\Delta(x) > 0$, то функция f — будет $(0,0)$-выпуклой на промежутке l; если же $\Delta(x) < 0$, то f — $(0,0)$-вогнутая на l функция.

Теорема Б есть своеобразный аналог соответствующего утверждения о достаточных условиях обычной выпуклости функции на промежутке в терминах ее второй производной.

Асимптотическая формула для делителей мультипликативной функции

Камарадинова З.Н.

Таджикский Государственный педагогический университет имени Садриддина Айни, г.Душанбе, Таджикистан

Обозначим через $t_0(n)$ количество представлений натурального n в виде $n = \varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3$, где z_1, z_2, z_3 — некоторые целые числа. Положим также $t(n) = \frac{1}{3}t_0(n)$.

Лемма 1. *Функция натурального аргумента $t(n)$ является мультипликативной и при этом для всякого простого числа p и всякого натурального числа λ имеют место равенства*

$$t(p^{\lambda}) = \begin{cases} 2(\lambda - 1), & \text{если } p = 3,\ \lambda \geq 1; \\ \dfrac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}, & \text{если } p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3); \\ \left[\dfrac{\lambda}{2}\right] + 1, & \text{если } p \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3). \end{cases}$$

В лемме 1 переходя от сравнения по модулю 3 к сравнению по модулю 12 напишем ее в следующем удобном нам виде:

Лемма 2. *Для всякого простого числа p и всякого натурального числа α имеют место равенства*

$$t(p^\alpha)=\begin{cases} 2(\alpha-1), & \text{если } p=3 \text{ и } \alpha\geq 1;\\ \left[\dfrac{\alpha}{2}\right]+1, & \text{если } p=2 \text{ или } p\equiv j(\operatorname{mod} 12),\ j=5,\ 11;\\ \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}, & \text{если } p\equiv j(\operatorname{mod} 12),\ \ j=1,\ 7.\end{cases}$$

Для функции $r(n)$ – число решений уравнения $x_1^2+x_2^2=n$ в целых числах x_1 и x_2, известно следующая формула

$$r(n)=4\rho(n),\qquad \rho(n)=\sum_{d\backslash n}\chi_4(d),\quad \chi_4(d)=\sin\frac{\pi d}{2}, \tag{1}$$

$\chi_4(d)$– неглавный характер по модулю 4 и арифметическая функция $\rho(n)$ – мультипликативная функция.

Теорема *Для всякого простого числа p и всякого натурального числа α имеют место равенства*

$$\rho(p^\alpha)=\begin{cases} 1, & \text{если } p=2;\\ \frac{1+(-1)^\alpha}{2}, & \text{если } p=3,\ p\equiv j \pmod{12},\ j=7,11;\\ \alpha+1, & \text{если } p\equiv j \pmod{12},\ j=1,5.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой (1) вычислим точное значение функции $\rho(p^\alpha)$ для каждого $p=2$, $p=3$ и $p\equiv j(\operatorname{mod} 12)$, $j=1,5,7,11$. Имеем

$$\rho(2^\alpha)=\sum_{d\backslash 2^\alpha}\sin\frac{\pi d}{2}=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi+\sin 2\pi+\cdots+\sin\pi 2^{\alpha-1}=1;$$

$$\rho(3^\alpha)=\sum_{d\backslash 3^\alpha}\sin\frac{\pi d}{2}=\sum_{m=0}^{\alpha}\sin\frac{\pi 3^m}{2}=\sum_{m=0}^{\alpha}(-1)^m=\frac{1+(-1)^\alpha}{2}$$

Если $p\equiv j(\operatorname{mod} 12)$, $j=1,5$, то $p^\alpha\equiv 1(\operatorname{mod} 4)$, поэтому

$$\rho(p^\alpha)=\sum_{j=0}^{\alpha}\sin\frac{\pi p^j}{2}=\sum_{j=0}^{\alpha}1=\alpha+1.$$

Если же $p\equiv j(\operatorname{mod} 12)$, $j=7,11$, то $p^\alpha\equiv 1(\operatorname{mod} 4)$, если α – четное и $p^\alpha\equiv 3(\operatorname{mod} 4)$, если α – нечетное. Поэтому

$$\rho(p^\alpha)=\sum_{j=0}^{\alpha}\sin\frac{\pi p^j}{2}=\sum_{m=0}^{\alpha}(-1)^m=\frac{1+(-1)^\alpha}{2}.$$

Операторы, резольвенты которых имеют сверточное представление, и их спектральный анализ

Кангужин Б.Е., Конуркулжаева М.Н.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

В математической физике [1] решение неоднородного уравнения $Au = f$ записывается в виде свертки двух функций $u = \varepsilon * f$, где ε - соответствующее фундаментальное решение. В данной работе решение неоднородного уравнения с параметром $Au - \lambda u = f$ записывается в виде свертки, причем каждому оператору соответствует индивидуальная формула свертки. Здесь и дальше под сверткой понимается билинейная коммутативная ассоциативная операция без аннуляторов. В случае, когда существует обратный оператор A^{-1} свертка, связанная с линейным оператором A, не имеет делителей нуля [2]. Когда оператор A соответствует краевой задаче в ограниченной области, тогда свертка может зависеть от его граничных условий.

В данной работе для обратимых линейных дифференциальных операторов на отрезке явным образом строятся им соответствующие свертки. Приведены свертки, соответствующие краевой задаче Ионкина- Самарского для дифференциальных уравнений первого порядка и двухточечным краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Проведен спектральный анализ линейного оператора A в функциональном пространстве $L_2(0,1)$, резольвента которого имеет сверточное представление

$$(A - \lambda I)^{-1} f(x) = (k_\lambda * f)(x), \tag{1}$$

где k_λ - при фиксированном t мероморфная функция от λ. Заметим, что все резольвенты задач, для которых выписаны свертки удовлетворяют соотношению (1). Таким образом, здесь впервые проводится спектральный анализ линейного оператора в терминах фундаментального решения $k_\lambda(x)$. Отметим, что в работе М.Ружанского, Н.Токмагамбетова [3] вводятся свертки для дискретных операторов, корневые элементы которых могут образовывать базис Рисса в исходном гильбертовом пространстве. Однако их метод не пригоден в случае наличия бесконечного числа присоединенных элементов исходного оператора. В нашем случае краевая задача Ионкина-Самарского имеет бесконечно много присоединенных функций. Полученные результаты о сходимости спектральных разложении являются в некотором смысле не улучшаемыми.

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[2] Przeworska-Rolewicz D. Algebraic theory of right invertible operators // Studia Mathematica Netherlands, 1990. V.48. P.129–144.

[3] Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Nonharmonic Analysis of Boundary Value Problems // International Mathematics Research Notices, 2016. V. 12. P. 3548–3615.

Коэрцитивная оценка и разделимость нелинейного трижды гармонического дифференциального оператора в гильбертовом пространстве

Каримов О.Х.

Институт математики им.А.Джураева АН Республики Таджикистан

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. В основном они исследовали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[1]-[4] и имеющиеся там ссылки).

В докладе речь идёт о коэрцитивной оценке и разделимости нелинейного трижды гармонического дифференциального оператора в гильбертовом пространстве. Исследуемый оператор является строго нелинейным.

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^n)$ дифференциальное уравнение

$$-\Delta^3 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\Delta-$оператор Лапласа, $V(x,z)$-положительная функция.

Представим функцию $V(x,z)$ в виде

$$V(x,z) = F(x,\xi,\eta), \quad \xi = Rez, \quad \eta = Imz.$$

Найдены условия на функцию $F(x,\xi,\eta)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, и для всех решений $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^6_{2,loc}(R^n)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|\Delta^3 u(x); L_2(R^n)\| + \|V(x,u(x))u(x); L_2(R^n)\| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \|V^{\frac{1}{2}}(x,u(x)) \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i^3}; L_2(R^n)\| \leq M\|f(x); L_2(R^n)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

[1] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения.-Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

[2] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n.-Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

[3] E.M.E.Zayed and Saleh Omram. Separation for Triple-Harmonic Differential Operators in Hilbert Space. International J.Math.Combin, 2010. v.4, pp. 13-23.

[4] Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом.-Уфимский математический журнал, 2017, т.9, №1, с.55-62.

Псевдоголоморфные функции в теории дифференциальных уравнений

Качалов В.И.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г.Москва, Россия

Понятие псевдоголоморфной функции было введено С.А.Ломовым [1] с целью построения аналитической теории сингулярных возмущений. Эта теория позволяет строить решения сингулярно возмущенных задач в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра.

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество функций трех комплексных переменных, представимых в виде рядов

$$F(z,w,\varepsilon)=\varphi(z)-\varepsilon U_1(z,w)-\varepsilon^2U_2(z,w)-\ldots-\varepsilon^nU_n(z,w)-\ldots, \quad (1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию (α):

1°. $\varphi(z)$ голоморфна в $D^r_{z_0}=\{z:|z-z_0|<r\}$ и $\varphi(z_0)=0$;

2°. $U_n(z,w)$, $n=1,2,\ldots$ голоморфны в бицилиндре $D^r_{z_0}\times D^R_{w_0}$, где $D^R_{w_0}=\{w:|w-w_0|<R\}$;

3°. $U_1(z_0,w_0)=0$, $\dfrac{\partial U_1}{\partial w}\neq 0 \ \ \forall (z,w)\in D^r_{z_0}\times D^R_{w_0}$;

и равномерно сходящихся на любом компакте из указанного бицилиндра в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$.

Определение. Функция $w(z,\varepsilon)$, неявно определяемая уравнением $F(z,w,\varepsilon)=0$, называется *псевдоголоморфной* в точке $\varepsilon=0$, если существуют компакт $\mathcal{K}_{z_0}\subset D^r_{z_0}$, содержащий точку z_0 и множество $\Gamma_0\subset\mathbf{C}_\varepsilon$, для которого точка $\varepsilon=0$ является предельной, такие, что $w(z,\varepsilon)$ ограничена на множестве $\mathcal{K}_{z_0}\times\Gamma_0$.

Теорема. Если уравнение $U_1(z,w)=\varphi(z)/\varepsilon$ имеет решение $w=W_0(z,\Psi(\varphi(z)/\varepsilon))$, в котором Ψ — целая функция с асимптотическим значением, равным p, причем функция $W_0(z,q)$ голоморфна на множестве $\mathcal{K}_{z_0}\times Q$, где $Q\subset\mathbf{C}_q$ — компакт, содержащий точки $\Psi(0)$ и p, и $W_0(z,\Psi(\varphi(z)/\varepsilon))\in D^R_{w_0}$ $\forall(z,\varepsilon)\in\mathcal{K}_{z_0}\times\Gamma_0$, то функция $w(z,\varepsilon)$ является псевдоголоморфной в точке $\varepsilon=0$.

Введенное понятие позволяет решать вопросы, связанные с существованием псевдоголоморфных решений сингулярно возмущенных уравнений [2].

[1] Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

[2] Качалов В.И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестник МЭИ, № 6, 2010, с. 54–62.

О геометрических свойствах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов

Клячин В.А., Чебаненко Н.А.

Волгоградский государственный университет, г.Волгоград, Россия

Хорошо известна классическая теорема Лебега о почти всюду дифференцируемости монотонных функций. В многомерном случае понятие монотонности отображения является неоднозначным. Например, отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ называется монотонным по Лебегу если

$$\operatorname{osc}\{f,D'\}\le\operatorname{osc}\{f,\partial D'\},$$

для всякой подобласти $D'\subset D$. В работе В.М.Миклюкова [1] было доказано, что монотонное по Лебегу отображение принадлежащее весовому пространству Соболева почти всюду имеет полный дифференциал при определенных условиях на весовую функцию. Мы предлагаем в многомерном случае монотонность рассматривать как свойство отображения сохранять ориентацию симплекса.

Будем говорить, что невырожденный симплекс $S(P_0,P_1,...,P_n)$, $P_i\in\mathbb{R}^n$ имеет положительную (отрицательную) ориентацию, если $\det(P_1-$

$P_0, P_2-P_0, ..., P_n-P_0) > 0$ ($\det(P_1-P_0, P_2-P_0, ..., P_n-P_0) < 0$). Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. Обозначим через $S(D)$ совокупность всех невырожденных симплексов с вершинами из области D.

Зададимся вопросом определения геометрических свойств непрерывных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, которые сохраняют ориентацию симплексов из некоторого, заранее данного подмножества множества $S(D)$. Более точно, нас будет интересовать структура прообраза плоскости в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим множество непрерывных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию симплексов $S \in B \subset S(D)$ через $C_B(D)$.

Теорема 1. Если открытое отображение $f \in C_{S(D)}(D)$, то f – аффинное преобразование.

Следующая теорема является ключевым результатом о структуре прообраза гиперплоскости непрерывного отображения $f \in C_B(D)$.

Теорема 2. Если множество $B \subset S(D)$ открыто и отображение $f \in C_B(D)$ не является аффинным, то прообраз любой гиперплоскости не содержит вершин симплекса из B.

Зафиксируем $\pi/2 < \alpha_0 < \pi$. Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^2$ совокупность треугольников $S(P_0, P_1, P_2)$, имеющих максимальный угол $\alpha(S) < \alpha_0$. Обозначим эту совокупность треугольников через $S_{\alpha_0}(D)$.

Теорема 3. Если $\alpha_0 > 2\pi/3$, а отображение $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто и принадлежит классу $C_{S_{\alpha_0}}(D)$, то прообраз любой прямой локально представляет собой график функции в подходящей декартовой системе координат.

Теорема 4. Если $\alpha_0 > 3\pi/4$, а отображение $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто и принадлежит классу $C_{S_{\alpha_0}}(D)$, то прообраз любой прямой локально представляет собой график липшицевой функции в подходящей декартовой системе координат.

Для произвольной пары точек x_0, x_1 обозначим через $\Pi_{x_0x_1}$ полосу, образуемую точками расположенными между прямыми ортогональными отрезку x_0x_1 и проходящими через его концы.

Теорема 5. Пусть $\alpha_0 > \pi/2$, а отображение $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто и принадлежит классу $C_{S_{\alpha_0}}(D)$. Пусть $p_0, p_1 \in f^{-1}(L)$ – две произвольные точки на прообразе прямой $L \subset \mathbb{R}^2$. Тогда найдется такая точка $p_1' \in [p_0, p_1]$ такая, что пересечение $f^{-1}(L) \cap \Pi_{p_0p_1'}$ локально представляет собой график функции в подходящей декартовой системе координат.

[1] Миклюков В.М. Введение в негладкий анализ. 2-е издание. Волгоград: изд-во ВолГУ, 2008.

Об энтропийных решениях анизотропных эллиптических уравнений с перемеными нелинейнстями в неограниченных областях

Кожевникова Л.М.

Стерлитамакский филиал БашГУ, г. Стерлитамак, Россия

В работе [1] для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1-правой частью было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказаны его существование и единственность. Автором настоящей работы этот результат обобщен на некоторый класс эллиптических уравнений с переменными нелинейностями

$$\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u + a_0(\mathrm{x}, u), \quad u(\mathrm{x})|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

для произвольных областей $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$. Ранее автором в [2] доказано существование и единственность энтропийных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями.

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\mathrm{x}) = (p_0(\mathrm{x}), p_1(\mathrm{x}), ..., p_n(\mathrm{x})) \in (C^+(\overline{\Omega}))^{n+1}$. Положим $p_+(\mathrm{x}) = \max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x})$,

$$\overline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}, \quad p_*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{n\overline{p}(\mathrm{x})}{n-\overline{p}(\mathrm{x})}, & \overline{p}(\mathrm{x}) > n, \\ +\infty, & \overline{p}(\mathrm{x}) \leq n \end{cases},$$

$$p_\infty(\mathrm{x}) = \max\{p_*(\mathrm{x}), p_+(\mathrm{x})\}.$$

Будем считать, что

$$p_+(\mathrm{x}) \leq p_0(\mathrm{x}) < p_*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s}))$ $a_0(\mathrm{x}, s_0)$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, каратеодориевы; $a_0(\mathrm{x}, s_0)$ неубывает по $s_0 \in \mathbb{R}$; существуют $\widehat{A}, \overline{a} > 0$ и измеримые функции $\Phi_i(\mathrm{x}) \geq 0$ такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$|a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s})| \leq \widehat{A}|s_i|^{p_i(\mathrm{x})-1} + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{3}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})-\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{t}))\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{t})>0,\ \mathrm{s}\neq\mathrm{t};\quad \mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})\cdot\mathrm{s}\geq\overline{a}\sum_{i=1}^{n}|s_i|^{p_i(\mathrm{x})}. \qquad (4)$$

Здесь $\mathrm{s}\cdot\mathrm{t}$ — скалярное произведение. Положим $T_k(r)=r$ при $|r|\leq k$, $T_k(r)=k\operatorname{sign}r$ при $|r|>k$; $\langle u\rangle=\int\limits_{\Omega}u d\mathrm{x}$.

Определение. *Энтропийным решением задачи* (1) *называется измеримая функция* $u:\Omega\to\mathbb{R}$ *такая, что* $A_0(\mathrm{x})=a_0(\mathrm{x},u)\in L_1(\Omega)$; $T_k(u)\in\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ *при всех* $k>0$; *при всех* $k>0$, $\xi(\mathrm{x})\in C_0^1(\Omega)$ *справедливо неравенство:*

$$\langle(a_0(\mathrm{x},u)+|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u)T_k(u-\xi)\rangle+\langle a(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\xi)\rangle\leq 0.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2)–(4)*, тогда энтропийное решение задачи* (1) *единственно.*

Сформулируем дополнительные условия, которые используются в теореме существования. Положим $a_0(\mathrm{x},s_0)=a_0(\mathrm{x},0)+b(\mathrm{x},s_0)$. Функция $b(\mathrm{x},s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0\in\mathbb{R}$, $b(\mathrm{x},0)=0$ для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$. Будем считать, что

$$a_0(\mathrm{x},0)\in L_1(\Omega),\qquad \sup_{|s_0|\leq k}|b(\mathrm{x},s_0)|=G_k(\mathrm{x})\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \qquad (5)$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2)–(5)*, тогда существует энтропийное решение задачи* (1)*.*

[1] Benilan Ph., Boccardo L., Galluet Th., Pierre M., Vazquez J.L. An L1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. 1995. V. 22, № 2. P. 241-273.

[2] Кожевникова Л.М. Об энтропийном решении эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева–Орлича // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. V. 57, № 3. P. 429–447.

Декомпозиция неунитальных кубитных каналов и устойчивость двухкубитных сцепленных состояний

Колобова Д.В., Фризен В.В., Филиппов С.Н.
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одним из основных направлений квантовой теории информации является исследование квантовых каналов, то есть отображений множества матриц плотности кубита или системы кубитов на себя. На данный момент хорошо изучены свойства унитальных каналов (оставляющих инвариантным единичный оператор), тем не менее, многие важные и широко используемые отображения являются неунитальными, например, обобщенное затухание амплитуды или смещенный деполяризующий канал. В докладе находится явный вид декомпозиции произвольного неунитального кубитного канала, полученные результаты проиллюстрированы на примере канала обобщенного затухания амплитуды, а также найдены двухкубитные состояния, сохраняющие наибольшую сцепленность, после прохождения каждым кубитом канала этого типа.

Обозначим H_d гильбертово пространство размерности d, $B(H_d)^+$ множество положительно полуопределённых операторов над H_d. Будем называть линейное отображение $\Phi : B(H_d)^+ \to B(H_d)^+$ положительным, и также введём для $d = 2$ положительное линейное отображение $\Phi_A[\sigma] = A\sigma A^+$, где $\sigma \in B(H_2)^+$ и A положительная матрица 2×2. Матрицу плотности $\sigma \in B(H_4)^+$, которую можно представить в виде выпуклой суммы $\sigma = \sum p_i \sigma_{i1} \otimes \sigma_{i2}$, где $\sigma_{i1},\ \sigma_{i2} \in B(H_2)^+$, будем называть сепарабельной, в обратном случае - сцепленной.

Для любого отображения Φ, являющегося внутренней точкой пространства положительных линейных отображений, существуют такие положительные матрицы A и B, что Φ может быть представлено в виде $\Phi = \Phi_B \cdot \Upsilon \cdot \Phi_A$, где Υ – унитальное отображение [1]. Матрицы A и B выражаются через стационарную точку отображения $f(S) = \Phi(\Phi^*(S)^{-1})^{-1}$, где сопряжение понимается в смысле скалярного произведения $(Q, W) = Tr(QW)$. Данный метод был применён нами к каналам общего вида, то есть отображающим матрицу плотности $\rho = \frac{1}{2}(I + \sum_{i=1}^{3} r_i \sigma_i)$, σ_i – вектор Паули, в матрицу плотности ρ', где $r_i' = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} r_j + t_i$, $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ [2], в отличие от работы [3], где рассматривался случай $\vec{t} = (0, 0, t)$. Также для каналов общего вида было показано, что уравнение на стационарную точку $S = f(S)$ имеет аналитическое решение.

Данный алгоритм декомпозиции продемонстрирован на примере канала обобщенного затухания амплитуды $A_{\gamma,p}$, физический смысл которого - взаимодейтсвие кубита со средой конечной температуры. Параметр γ связан с температурой, а p со временем взаимодействия: $p = 1 - e^{-t}$, t – безразмерное время. С помощью явного вида декомпозиции найдены двухкубитные состояния, которые сохраняют наибольшую степень сцепленности после прохождения двухкубитного канала $A_{\gamma,p} \otimes A_{\gamma,p}$, и, как следствие, найдена точная область параметров γ и p, при которых канал $A_{\gamma,p} \otimes A_{\gamma,p}$ является аннигилирующим запутанность, то есть при любом входе состояние на выходе является сепарабельным [4,5].

Таким образом, с помощью сведения неунитального канала Φ к унитальному Υ, можно получить новые свойства Φ, что и было продемонстрировано.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-00084) в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

[1] Aubrun G., Szarek S.J., Two proof of Srormer's theorem. arXiv:1512.03293 [math.FA]

[2] Ruskai M., Szarek S., Werner E., An analysis of completely-positive trace-preserving maps on M_2. Linear Algebra and App. 2002

[3] Filippov S., Magadov K., Positive tensor products of maps and n-tensor-stable positive qubit maps. J. Phys. A: Math. Theor. 50, 2017

[4] Moravcikova L., Ziman M., Entanglement-annihilating and entanglement-breaking channels. J. Phys. A: Math. Theor. 43, 2010

[5] Filippov S., Melnikov A., Ziman M., Dissociation and annihilation of multipartite entanglement structure in dissipative quantum dynamics. Phys. Rev. A 88, 2013

Асимптотика решений одного класса линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с негладкими коэффициентами

Конечная Н.Н.
САФУ имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия,
n.konechnaya@narfu.ru

Пусть функции p_0, p_1, p_2 и q_0, q_1 определены и измеримы на полуоси $I := [1; +\infty)$, и пусть

(A) функции $p_0, p_0^{-1}, p_1^2 p_0^{-1}, p_2^2 p_0^{-1}, q_0^2 p_0^{-1}, q_1^2 p_0^{-1}$ локально интегрируемы по Лебегу на I.

Условие (A) позволяет определить скалярное квазидифференциальное выражение $l[y]$, которое можно представить в виде

$$l[y] = (p_0 y'')'' - i\{(q_0 y')'' + (q_0 y'')'\} - (p_1' y')' + i\{(q_1' y)' + q_1' y'\} + p_2'' y$$

(см. [1]), где $'$ всюду означает производную в обобщенном смысле. В докладе при дополнительных ограничениях на функции p_0, p_1, p_2 и q_0, q_1 (см. условия (B) и (C) ниже) будут приведены формулы для главного члена асимптотики некоторой фундаментальной системы решений уравнения

$$l[y] = \lambda y$$

при $x \to +\infty$, где λ – фиксированное комплексное число.

(B) Существуют число $\nu \geq 0$, комплексные числа a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 и комплекснозначные функции r_0, r_1, r_2, s_0, s_1, такие, что $a_0 \neq 0$ и при всех $x \geq 1$

$$p_0(x) = \frac{x^{4+\nu}}{\frac{1}{a_0} + r_0(x)}; \quad p_1(x) = x^{3+\nu}(a_1 + r_1(x)); \quad p_2(x) = x^{2+\nu}(a_2 + r_2(x));$$

$$q_0(x) = x^{3+\nu}(b_0 + s_0(x)); \quad q_1(x) = x^{2+\nu}(b_1 + s_1(x)).$$

Условие (B) позволяет подходящей заменой уравнение $l[y] = \lambda y$ свести к системе вида

$$x\frac{dY}{dx} = (A + B(x))Y,$$

где Y – неизвестный вектор-столбец размерности 4. Эта система и уравнение $l[y] = \lambda y$ эквивалентны в том смысле, что первая координата вектор-столба Y линейно зависит от решения y уравнения $l[y] = \lambda y$. Верно и обратное. Здесь A – постоянная матрица, $B(x)$ – матрица-функция размерности 4, элементы которой выражаются через функции r_0, r_1, r_2 и s_0, s_1.

Обозначим через $r+1$ кратность характеристического корня матрицы A наибольшей кратности, и пусть

(C) матрицы A и $B(x)$ таковы, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{(\ln x)^r}{x} ||B(x)|| dx < \infty,$$

где $||B(x)||$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы $B(x)$.

Сформулируем основной результат доклада:

Теорема. Пусть функции p_0, p_1, p_2 и q_0, q_1 удовлетворяют условиям (A), (B) и (C). Предположим, что $z_1, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_{q+j}$ – все различные характеристические корни матрицы A, причём $z_1, \ldots, z_q$ – однократные корни, при $1 \leq p \leq j$ кратность корня z_{q+p} равна r_p. Тогда уравнение $l[y] = \lambda y$ имеет фундаментальную систему решений $y_k(x)$ такую, что при $x \to +\infty$

$$y_k(x) = c_k x^{z_k - \frac{1}{2}}(1 + o(1)), \quad k = 1, \ldots, q,$$

и при $k = q,\ q + r_1, \ldots, q + r_1 + \ldots + r_{j-1}$

$$y_{k+i}(x) = c_{k+i} x^{z_{q+p} - \frac{1}{2}} (\ln x)^{i-1}(1 + o(1)),\ i = 1, \ldots, r_p,$$

$$\text{если } k = q + r_1 + \ldots + r_{p-1},$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные ненулевые постоянные.

[1] Мирзоев К. А., Шкаликов А. А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки, 2016. 99, 5. 788-793.

Об одном свойстве индекса конденсации

Кривошеев А.С., Рафиков А.И.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия
БашГУ, Уфа, Россия

Достаточные условия на кратную комплексную последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{+\infty}$, при которых всякая функция, аналитическая в замыкании заданной выпуклой области D раскладывается в ряд со скобками с помощью интерполирующей функции, были выведены А.Ф. Леонтьевым и описаные им в монографии «Ряды экспонент».[1, гл.IV, §5, п.4, теорема 4.6.8].

Формулировка упомянутой теоремы даётся с помощью характеристик функции $L(\lambda)$. Однако при исследовании этого вопроса с помощью методов, предложенных в статье[2], в частности, разбиения последовательности на «относительно малые» группы и введения характеристик этого разбиения, представляется возможным переформулировать эту теорему в терминах самой последовательности Λ. Результат в данной работе является вспомогательным.

Для его описания нам предварительно понадобится ввести дополнительные понятия и величины. Будем говорить, что $U = \{U_m\}_{m=1}^{+\infty}$ — разбиение последовательности Λ, если, во-первых, $\Lambda = \bigcup_{m=1}^{+\infty} U_m$, во-вторых, каждая группа $U_m \in U$ содержит хотя бы одну точку $\lambda_n \in \Lambda$ и не пересекается с остальными группами. Также под символом $\lambda_{m,l}$ будем понимать точку с номером l, находящуюся в группе U_m (нумерация внутри группы произвольна, $1 \leqslant l \leqslant N_m$), а под символом $n_{m,l}$ — её кратность. Наконец, группы договоримся называть относительно малыми, если

$$\lim_{m\to+\infty} \max_{1\leqslant j,k\leqslant N_m} \frac{|\lambda_{m,k} - \lambda_{m,j}|}{|\lambda_n|} = 0.$$

Также будем считать, что

$$\lim_{\delta\to 0+0} \overline{\lim_{|z|\to+\infty}} \frac{\text{card } (\Lambda \cap B(z,\delta|z|))}{|z|} = 0.$$

В том числе нам понадобится такая характеристика разбиения, как $S_\Lambda(U)$:

$$q_{\Lambda,U}^{m,k}(z,\delta) = \prod_{\substack{\lambda_{k,l}\in B(\lambda_{m,k},\delta|\lambda_{m,k}|,)\\ k\neq m}} \left(\frac{z-\lambda_{k,l}}{3\delta\lambda_{k,l}}\right)^{n_{k,l}},$$

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta\to+\infty} \underline{\lim}_{m\to+\infty} \min_{1\leqslant k\leqslant N_m} \frac{\ln\left|q_{\Lambda,U}^{m,k}(\lambda_{m,k},\delta)\right|}{|\lambda_{m,k}|}.$$

Теорема. Пусть Λ — кратная правильно распределённая последовательность комплексных чисел, разбитая на относительно малые группы U_m, D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Дополнительно известно, что функция угловой плотности $W(\varphi,\psi)$ последовательности Λ сявзана с функцией длины дуги $W_D(\varphi,\psi)$ границы области D соотношением $W(\varphi,\psi) = 1/2\pi \cdot W_D(\varphi,\psi)$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

1. $S_\Lambda(U) = 0$;

2. найдётся последовательность контуров Γ_k, удовлетворяющих следующим условиям:

   (a) каждый контур Γ_k содержит ровно одну группу U_m;

   (b) длина контура $|\Gamma_k|$ есть $o(|\lambda_n|)$, где λ_n —произвольная точка внутри контура, $k\to+\infty$;

   (c) $\forall\varepsilon>0 \quad \exists K(\varepsilon)>0 : \forall k > K(\varepsilon), \forall re^{i\varphi}\in\Gamma_k$:

   $$\ln|L(re^{i\varphi})| > (h(\varphi)-\varepsilon)r,$$

   где $h(\varphi)$ — опорная функция D.

[1] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.:Наука, 1976.

[2] Кривошеев А.С., Кривошеева О.А., Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций, Матем.сб., 2013, т. 204 (12), 49–104.

Базис в инвариантном подпространстве со спектром нулевой плотности

Кривошеева О.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная неограниченно возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел, т.е. $\lambda_k \in \mathbb{C}$, n_k — натуральное число, называемое кратностью точки λ_k, $|\lambda_{k+1}| > |\lambda_k|$, $k = 1, 2, \ldots$, и $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть $B(z, r)$ — круг с центром в точке z радиуса r. Обозначим через $n(r, \Lambda)$ — число точек λ_k (с учетом их кратностей) попавших в круг $B(0, r)$, $r > 0$. Верхней плотностью последовательности Λ называется величина

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \Lambda)}{r}.$$

Рассмотрим систему функций $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$, $k \geq 1$, $n = \overline{0, n_k - 1}$. Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(D)$ обозначает пространство функций аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Подпространство $W(\Lambda, D)$ является замкнутым и инвариантным относительно оператора дифференцирования. Если $a \in \mathbb{C}$, то положим:

$$W(\Lambda, a) = \bigcup_{D \ni a} W(\Lambda, D),$$

где D пробегает множество всех выпуклых окрестностей точки a.

Теорема 1. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) каждая функция из $W(\Lambda, a)$ имеет выпуклую область существования;

2) $\bar{n}(\Lambda) = 0$.

Для того, чтобы сформулировать следующую теорему, нам понадобится характеристика последовательности Λ. Следуя работе [1], введем функцию

$$q_\Lambda^m(\lambda, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|), k \neq m} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k}, \quad m \geq 1.$$

Если круг $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ не содержит точек λ_k, $k \neq m$, то $q_\Lambda^m(z, \delta) \equiv 1$. Положим (см. [1])

$$S_\Lambda = \lim_{\delta \to 0} \varliminf_{m \to \infty} \frac{\ln |q_\Lambda^m(\lambda_m, \delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Для $\delta \in (0, 1/3)$ величина $S_\Lambda \leq 0$. Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна (см., например, [2], гл. II, §5, п. 2), но при этом эффективна (в отличие от индекса конденсации Бернштейна) для любой комплексной последовательности (а не только для измеримой положительной последовательности и комплексной последовательности нулевой плотности). Равенство $S_\Lambda = 0$. означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Характер этой отделенности проясняется в лемме 2.3 работы [3].

Теорема 2. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$;

2) $S_\Lambda = 0$.

[1] Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях.* // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т.68. №2. С.71-136.

[2] Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* // М.: Наука, 1983.

[3] Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций.* // Алгебра и анализ. 2015. Т.27. №2. С.132-195.

Об одной теореме Леонтьева-Левина

Кужаев А. Ф., Кривошеев А. С.

Башкиркий государственный университет, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная последовательность положительных чисел. Здесь $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел, и n_k — натуральное число, называемое кратностью элемента $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$. Напомним, что *верхней плотностью* и *максимальной плотностью* соответственно называется следующие характеристики последовательности Λ:

$$\bar{n}(\Lambda) := \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_k \leqslant t} n_k, \quad \bar{n}_0(\Lambda) := \lim_{\delta\to 0+} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{\delta t} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_k\leqslant t} n_k.$$

Согласно [1, §E3, гл. IV] предел по $\delta \to 0+$ всегда существует, так что максимальная плотность определена корректно.

Пусть G — произвольная выпуклая область комплексной плоскости. *Вертикальным диаметром области* G будем называть следующую величину:

$$d(G) := \sup_{x} \sup_{z_1,z_2\in G} \Big\{|y_1 - y_2| : z_1 = x + iy_1, z_2 = x + iy_2,\ z_1, z_2 \in G,\ x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Выпуклую область G будем называть *вертикально сбалансированной*, если

$$d(G) = K_G\left(-\frac{\pi}{2}\right) + K_G\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

где $K_G(\varphi)$ — опорная функция области G ([2, стр. 43])

Положим $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1,l=0}^{\infty,n_k-1}$. Будем говорить, что *система функций* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *полна в выпуклой области* G, если она полна в пространстве функций, аналитических в области G с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из G.

Следующее утверждение даёт обобщение классического результата Левина-Леонтьева, который был получен ими независимо друг от друга ([2, стр. 286], [3, стр. 122]).

Теорема. Пусть $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < \infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\bar{n}(\Lambda) = \tau$;

2) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в любой вертикально сбалансированной области G с вертикальным диаметром $d(G) \leqslant 2\pi\tau$, и неполна в любой вертикально сбалансированной области G с вертикальным диаметром $d(G) > 2\pi\tau$.

[1] Koosis P. The logarithmic integral I // Cambridge University Press, 1997.

[2] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.

[3] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

О наилучшем приближении периодических функций в L_2

Лангаршоев М.Р.

Таджикский национальный университет, г.Душанбе, Таджикистан

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ обозначим пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

$L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ – это есть множество 2π-периодических функций $f(x) \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)}(x) \in L_2$.

Символом $\Im_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$.

Величина $E_n(f)$ называется наилучшее приближение функции $f \in L_2$ подпространством $\Im_{2n-1}$. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $\;r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $t \in \mathbb{R}_+$ введём в рассмотрение экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(t) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_n^2(f)}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) + \dfrac{n^2}{t} \displaystyle\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \tau\right) d\tau \right]^m}, \tag{1}$$

который содержит обобщённый модуль непрерывности [1] не только под знаком интеграла но также и вне интеграла.

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n > r$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_n^2(f)}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) + \dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \tau\right) d\tau\right]^m} = \left(\frac{tn^{1+r/m}}{\sqrt{3}}\right)^{-2m}.$$

Отметим,что аппроксимационная характеристика вида (1) для обычного модуля непрерывности $\omega_m\left(f^{(r)}, t\right)$ в пространстве L_2 была рассмотрена С.Б.Вакарчуком и А.Н.Щитовым [2].

Далее, через $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M}, L_2)$ и $\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники некоторого выпуклого центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 (см. напр.[3]).

Пусть $W_m^r(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ – класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{t^2}\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) + \frac{n^2}{t^3}\int_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \tau\right) d\tau \le 1.$$

Теорема 2. *Для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство*

$$\lambda_{2n-1}\left(W_m^r(t), L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(W_m^r(t), L_2\right) = E_n\left(W_m^r(t)\right)_{L_2} = \frac{3^{m/2}}{n^{m+r}},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

[1] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$. Матем. сборник. 1994. т.186, №8. с. 81-102.

[2] Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций. Укр. матем. журн., 2004, т.56, №11, с. 1458-1467.

[3] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений – М.: Изд-во МГУ. 1976. 304 с.

О некоторых оценках точности разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений с неограниченной нелинейностью и решениями из классов $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$

Лубышев Ф.В., Файрузов М.Э., Манапова А.Р.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Настоящая работа посвящена построению и исследованию сходимости и точности разностных схем для нелинейных уравнений математической физики (УМФ) эллиптического типа со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Установлены априорные согласованные оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$, аппроксимирующих нелинейную задачу с неограниченной нелинейностью. Доказательство сходимости разностных схем проводится в предположении, что само точное решение краевой задачи существует в классе $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$ и принадлежит некоторой ограниченной области D_u и только в этой области функции, входящие в уравнение, удовлетворяют требуемым свойствам. Так что получена шкала априорных оценок скорости сходимости в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$-норме для разностного решения, а условия, налагаемые на коэффициенты уравнения, выполнены в настоящей работе лишь в некоторой окрестности значений точного решения исходной задачи, что говорит как о наличии нелинейностей неограниченного роста, так и сильно расширяет класс допустимых функций, удовлетворяющих, например, условию равномерной эллиптичности на решениях уравнения. В случае неограниченной нелинейности в настоящей работе доказаны существование и единственность решения нелинейной разностной схемы. Для доказательства существования и единственности решения исследуемой нелинейной разностной задачи, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу, используется итерационный процесс, который можно рассматривать и как эффективный метод реализации этой нелинейной разностной схемы. Проводится строгое исследование сходимости итерационного метода для нелинейной сеточной задачи, аппроксимирующей исходную нелинейную задачу без каких-либо предположений о свойствах нелинейной разностной схемы. Заметим, что изучение итерационных методов для реализации нелинейных разностных схем представляет самостоятельный интерес.

Настоящая работа дополняет и развивает результаты, установленные в работах [1], [2] для одномерных аналогов квазилинейных уравнений эллиптического типа с неограниченной нелинейностью.

Результаты, полученные в настоящей работе, будут существенно использованы в дальнейшем при решении проблем, связанных с разработкой и исследованием разностных аппроксимаций задач оптимального управления для систем, описываемых нелинейными УМФ с неограниченной нелинейностью (см. по этому вопросу, например, [3]-[5]).

[1] Матус П. П., Москальков М. Н., Щеглик В. С. *Согласованные оценки точности метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями* // Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31, № 7. С. 1249-1256.

[2] Щеглик В. С. *Анализ разностной схемы, аппроксимирующей третью краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т.37, № 8. С. 951-957.

[3] Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс, 2002.

[4] Лубышев Ф. В. *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных.* Уфа: БашГУ, 1999.

[5] Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. *Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах при старших производных* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т.56, № 7. С. 1267-1293.

Двухмасштабное разложение дробных производных Римана–Лиувилля по малому параметру, выделяемому из порядка дробного дифференцирования

Лукащук С.Ю.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение

$$ {}_aD_x^\alpha y = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, {}_aD_x^{\alpha-m+1}y, \dots, {}_aD_x^{\alpha-1}y), \quad x > a, \quad m = [\alpha]+1, \tag{1} $$

где

$$ {}_aD_x^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{y(s)}{(x-s)^{\alpha-m+1}} ds $$

— левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля [1].

Важным с точки зрения практики является случай, когда порядок дробного дифференцирования α близок к целому числу, то есть

$$\alpha = \begin{cases} m - \varepsilon, & \{\alpha\} \geq 0.5; \\ m - 1 + \varepsilon, & \{\alpha\} < 0.5, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр.

Естественным начальным условием для уравнения (1) является задание в начальной точке $x = a$ значения дробного интеграла порядка $m - \alpha$ [1]. Тогда решение уравнения (1) будет обладать интегрируемой особенностью в этой начальной точке. В результате поведение решения в окрестности границы и в основной области оказывается существенно различным.

Для учета этой особенности введем кроме x второй масштаб $x_1 = (x-a)^\varepsilon$, характеризующий поведение решения уравнения (1) в окрестности точки $x = a$. В этой окрестности x_1 является быстрой переменной по сравнению с x.

Введем также новую зависимую переменную $z(x, x_1)$:

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \dfrac{z(x,x_1)}{x_1}, & \alpha = n - \varepsilon \quad (\{\alpha\} \geq 0.5,\ n = m); \\ \dfrac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} x_1 z(x, x_1), & \alpha = n + \varepsilon \quad (\{\alpha\} < 0.5,\ n = m - 1). \end{cases} \tag{2}$$

Тогда оказывается возможным построить двухмасштабное (x и x_1) разложение производной дробного порядка ${}_aD_x^{n\pm\varepsilon} y$ по ε через функцию $z(x, x_1)$.

Теорема. Пусть функция $y(x)$ аналитична при $x > a$ и $z(x, x_1)$ определяется соотношениями (2). Тогда для левосторонней дробной производной ${}_aD_x^{n\pm\varepsilon} y$ справедливо следующее двухмасштабное разложение:

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{n\pm\varepsilon} y = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \varepsilon x_1 \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} \frac{(-1)^{n-p-1}(n-p-1)!}{(x-a)^{n-p}} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial z}{\partial x_1} \pm \\ \pm \varepsilon \left[(\psi(n+1) + \gamma) \frac{\partial^n z}{\partial x^n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k(k+n)!} (x-a)^k \frac{\partial^{k+n} z}{\partial x^{k+n}} \right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3}$$

Получено также разложение второго порядка по ε.

Подстановка разложения (3) в уравнение (1) сводит его к дифференциальному уравнению в целых производных с малым параметром, приближенное решение которого может быть получено методами теории возмущений. Наличие двух масштабов обеспечивает равномерную пригодность получаемого приближенного решения такого уравнения как в окрестности границы, так и в основной области решения.

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

Многолистные варианты теорем Пойа - Бернштейна, Бореля для целых функций порядка $\rho \neq 1$ и их приложения

Маергойз Л.С.
Сибирский Федеральный Университет, г. Красноярск, Россия

Широко известна теорема Д. Пойа о связи между индикаторной и сопряженной диаграммами целой функции экспоненциального типа [1, лекция 9]. В докладе рассматривается вариант этой теоремы, опирающийся на конструкцию В. Бернштейна [2] многолистной индикаторной диаграммы целой функции порядка $\rho > 0, \ \rho \neq 1$ и нормального типа, с помощью которой дается описание области аналитического продолжения ряда Пюизе, порождаемого степенной функцией $z = w^{1/\rho}$. Следствие из этого результата позволяет найти область суммируемости методом Бореля «правильного» ряда Пюизе (многолистный «многоугольник Бореля»)[3, гл. 8], [4, гл. 3].

В качестве приложений упомянутых утверждений даются описания областей аналитического продолжения рядов Пюизе, в которые разлагаются многолистные функции (например, обращения рациональных функций).

[1] Levin B.Ya. Lectures on Entire Functions. Translations of Mathematical Monographes. **Vol. 150**. Amer. Math. Soc., 1996.

[2] Bernstein V. Sulle proprieta caratteristiche delle indicatrici di crescenza delle transcendenti intere d'ordine finito. Memoire della classe di scien. fis. mat. e natur., 1936, **Vol. 6**, pp. 131-189.

[3] Hardy G. H. Divergent series. Oxford, 1949.

[4] Маергойз Л. С. Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1991.

О разрешимости краевых задач для неоднородных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях

Мазепа Е.А.

Волгоградский госуниверситет, г. Волгоград, Россия

В настоящей работе, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия классов эквивалентных на многообразии M непрерывных ограниченных функций, исследованы вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач для уравнения вида

$$\Delta u - c(x)u = g(x), \tag{1}$$

где функции $c(x) \geq 0$, $c(x),\ g(x) \in C^{\gamma}(\Omega)$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma \leq 1$.

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей ∂B и непустой внутренностью, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные ограниченные на M функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $||f(x)||_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$. Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$.

Пусть $\Phi(x) \in C(\partial B)$ — произвольная функция. Будем говорить, что на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Многообразие M будем называть L-*строгим* многообразием, если для некоторого компакта $B \subset M$ существует решение v однородного уравнения $\Delta v - c(x)v = 0$ такое, что $v|_{\partial B} = 1$ и $v \in [0]$ (см. также [1]).

Теорема. Пусть на $M \setminus B$ для произвольной непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения (1) с граничными условиями $(\Phi, [f])$. Тогда на M для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.

Данное утверждение обобщает для уравнения (1) результаты, полученные ранее для однородных линейных эллиптических уравнений на произвольном некомпактном римановом многообразии M (см., напр.,[1]-[3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

[1] Мазепа Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43. № 3. С. 591-599.

[2] Losev A. G., Mazepa E. A., Chebanenko V. Y. Unbounded solutions of the stationary Schrodinger equation on Riemannian manifolds // CMFT. 2003. V. 3. № 2. P. 443-451.

[3] Корольков С. А., Лосев А. Г. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 1, Математика. Физика. 2011. № 1(14). С 23–40.

Интерполяционные задачи типа А.Ф. Леонтьева

Малютин К.Г.

Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

В 1948 году А.Ф. Леонтьев [1] впервые рассмотрел задачу, получившую впоследствии название задачи свободной интерполяции: определить, каким условиям должна удовлетворять последовательность точек $\{a_n\}$, $|a_n| \uparrow \infty$, комплексной плоскости для того, чтобы по каждой последовательности чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющей неравенству

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leqslant \rho\,, \quad \rho > 0\,,$$

можно было построить целую функцию $F(z)$ порядка ρ, удовлетворяющую равенствам $F(a_n) = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$. А.Ф. Леонтьев доказал, что для разрешимости этой задачи, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ каноническая функция $E(z)$ последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяла условию: $|E'(a_n)| \geqslant \exp(-|a_n|^\rho - \varepsilon)$, $n > N_0(\varepsilon)$. В классе целых функций конечного порядка и нормального типа А. Ф. Леонтьев решил задачу свободной интерполяции в работе [2] для случая $\rho > 0$. Необходимым и достаточным условием разрешимости этой задачи в этом случае является следующее: существует $K > 0$ такое, что каноническая функция $E(z)$ последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяет условию: $|E'(a_n)| \geqslant \exp(-K|a_n|^\rho)$. Случай $\rho = 0$ рассматривался А. В. Братищевым и Ю. Ф. Коробейником, более точные результаты получены в работе [3]. Задачами свободной интерполяции типа А.Ф. Леонтьева в различных классах целых функций в свое время занимались Б.Я. Левин, А. В. Братищев, Ю. Ф. Коробейник, А.Ф. Гришин, К.Г. Малютин, Б.В. Винницкий, Т.И. Абанина и мн. др. Во всех исследованиях условия разрешимости задач формулировались в терминах канонической функции узлов интерполяции в форме, указанной А.Ф. Леонтьевым.

В 1958 году Л. Карлесон нашел необходимые и достаточные условия разрешимости задачи свободной интерполяции в классе H^∞ ограниченных функций в полуплоскости (Л. Карлесон получил свой результат для единичного круга). Необходимым и достаточным условием разрешимости является неравенство $\Im a_n|E'(a_n)| \geqslant \delta > 0$, где $E(z)$ — произведение Бляшке узлов интерполяции, которое, в некотором смысле является аналогом условий А.Ф. Леонтьева. Эти аналогии прослеживаются и для интерполяционных задач в классах аналитических функций конечного порядка в полуплоскости, поставленных в 70-е годы XX-го столетия Б.Я. Левиным, которые были решены в серии статей [4, 5] для $\rho > 0$. Однако, эти утверждения справедливы и при $\rho = 0$. Сформулируем упрощенный вариант для класса $[\rho(r), \infty)_+$ аналитических функций уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \geqslant 0$, в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$.

Теорема. Для того, чтобы последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой принадлежат вещественной оси, была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)_+$, необходимо и достаточно, чтобы каноническая функция $E(z)$ узлов интерполяции удовлетворяла неравенству

$$\Im a_n|E'(a_n)| \geqslant \exp(-K|a_n|^{\rho(|a_n|)}), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

при некотором $K > 0$.

[1] Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка. // Докл. АН СССР. Т. 5. 1948. С. 785–787.

[2] Леонтьев А. Ф. К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка // Матем. сб. Т. 4, № 1. 1957. С. 81–96.

[3] Боженко О. А., Гришин А. Ф. , Малютин К. Г. Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 79, Вып. 2. 2015. С. 21–44.

[4] Малютин К. Г. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Матем. сб. Т. 184, No 2. 1993. С. 129–144.

[5] Малютин К.Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I, II // Известия РАН: Математика. Т. 59, №4,5. 1995. С. 125-154, 103-126.

О сопряжённом к весовому пространству бесконечно дифференцируемых функций

Маннанов М.М., Мусин И.Х.
БГАУ, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, Россия

1. В работе [1] изучалась задача описания сопряжённого пространства для пространства голоморфных функций в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих некоторым ограничениям на рост вблизи границы области и на бесконечности. При решении этой задачи пришлось иметь дело с пространством бесконечно дифференцируемых функций в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{R}^{2n}$ заданного роста вблизи границы области и на бесконечности.

Определим пространство $\mathcal{E}(\Phi)$ функций в неограниченной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ следующим образом. Пусть $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство положительных функций $h_m \in C(\Omega)$ таких, что $\forall m \in \mathbb{N}$ найдётся число $a_m \geq 0$ такое, что $h_m(x) - h_{m+1}(x) \geq \left(\ln \frac{1}{d(x)}\right)^{+} - a_m$, где $d(x)$ – расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы Ω и для $t \geq 0$ $t^+ = t$, для $t < 0$ $t^+ = 0$. Пусть $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство положительных функций $\psi_m \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\forall m \in \mathbb{N}$:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\psi_m(x)}{\|x\|} = +\infty$, где $\|\cdot\|$ – Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$,

(b) существует число $b_m \geq 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\psi_m(x) - \psi_{m+1}(x) \geq \ln(1 + \|x\|) - b_m.$$

Пусть $\varphi_m(x) = h_m(x) + \psi_m(x),\ x \in \Omega, m \in \mathbb{N}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \{f \in C^m(\Omega) : p_m(f) = \sup_{x\in\Omega, |\alpha|\leq m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty\}.$$

Образуем семейство $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ Пусть $\mathcal{E}(\Phi)$ – проективный предел пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$.

Теорема 1. *Полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varPhi)$.*

2. Теорема 1 вкупе с результатом М.М. Маннанова [1, Теорема 1] об эпиморфности преобразования Фурье-Лапласа позволяет получить теорему типа Пейли-Винера-Шварца. Наложим дополнительные ограничения на семейство $\varPhi$. Пусть $(\tilde{h}_k)_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных выпуклых монотонно возрастающих на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих условиям:

$a)$ $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists t_0 \in \mathbb{R} : \tilde{h}_k(t) - \tilde{h}_{k+1}(t) \geq t,\ t \geq t_0,$

$b)$ $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall \alpha > 0\ \exists s = s(k,\alpha) \in \mathbb{R} : \tilde{h}_k(t) - \tilde{h}_{k+\alpha}(t) \geq s(k,\alpha),\ t \in \mathbb{R},$

$c)$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\tilde{h}_k(t)}{t} = +\infty.$

Пусть $(\tilde{\psi}_k)_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных выпуклых монотонно возрастающих на $[0,\infty)$ функций, удовлетворяющих условиям:

$a)$ $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists a_k > 0, b_k \geq 0, c_k \geq 0 : \tilde{\psi}_k(t) - \tilde{\psi}_{k+1}(t) \geq a_k t - b_k,\ t \geq 0,$

$b)$ $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in [0,1]\ \tilde{\psi}(t) - \tilde{\psi}_{k+1}(t+\alpha) \geq -c_k,\ t \geq 0,$

$c)$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\tilde{\psi}_k(t)}{t} = +\infty.$

Положим $h_k(x) = \tilde{h}_k(-\ln d(x))$ $(x \in \Omega)$ и $\psi_k(x) = \tilde{\psi}_k(\|x\|)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Пусть $\varPhi^* = \{\varphi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$, где φ_m^* – функция, сопряжённая по Юнгу-Фенхелю к φ_m. Пусть $P(\varPhi^*)$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$P_k = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|F\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} |f(z)| \exp(-\varphi_k^*(Im\, z) - k\ln(1+\|z\|))\}.$$

Теорема 2. *Преобразование Фурье-Лапласа*

$$\mathcal{F} : S \in \mathcal{E}^*(\varPhi) \to S(e^{-i\langle z,\xi\rangle})$$

устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varPhi)$ и $P(\varPhi^*)$.

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№15-01-01661-а).

[1] Маннанов М. М. Описание некоторого класса аналитических функционалов. Сибирский математический журнал. Т. 31, №3. 1990. С. 62-–72.

Об интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева

Мелихов С.Н.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия; Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

В докладе идет речь об интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, ее аналогах и их применениях. Предлагается подход к определению соответствующих объектов с помощью теории двойственности между пространствами аналитических функций и их сопряженными и оператора Поммье. Приводятся результаты об использовании интерполирующей функции и соответствующего ей интерполирующего функционала при решении проблемы существования линейного непрерывного правого обратного к оператору представления рядами экспонент, а также при изучении коммутантов, циклических векторов, инвариантных подпространств оператора Поммье (см. [1], [2], [3], [4]).

[1] Мелихов С. Н. Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов // Матем. сб. 2000. 191:7, 105-128.

[2] Иванова О. А., Мелихов С. Н. Об интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева // Уфимск. матем. журн. 2014. 6:3, 17–27.

[3] Иванова О. А., Мелихов С. Н. Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ. 2016. 28:2, 114–137.

[4] Иванова О.А., Мелихов С.Н. Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа // Комплексный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 142. ВИНИТИ, М., 111-120.

Непрерывные квантовые блуждания в некоторых графах

Мещанинов Ф.П.[1,2], **Федичкин Л.Е.**[1,2,3]
[1]Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет), г. Долгопрудный,
[2]Московский Физико-Технологический Институт РАН, г. Москва,
[3]НИКС, г.Москва, Россия

Исследуются непрерывные квантовые блуждания на двух видах графов: кольцевом и двумерной конечной сетке. В кольцевом графе все узлы пронумерованы от 0 до $n-1$, а в сетке узлам присваивается две координаты: $i, j \in \overline{1, \sqrt{n}}$, где , n - количество узлов в графе. Сначала электрон помещается в узел с минимальными координатами, а затем начинается его эволюция. Каждый узел снабжен детектором, вносящим шум в систему. Рассматривается минимальное время $t = T_{mix}$, при котором в кольцевом графе $\sum_{j=0}^{n-1} |P_j(t) - 1/n| < \varepsilon$, а в сеточном - $\sum_{i,j=1}^{\sqrt{n}} |P_{i,j}(t) - 1/n| < \varepsilon$. Получены численные зависимости $T_{mix}(\Delta, n, \Gamma)$, где $\Delta = \varepsilon n$, Γ - уровень шума. На рис.1 представлена данная зависимость при $n = 40$ и $\Delta = 0.0001$ в кольцевом графе.

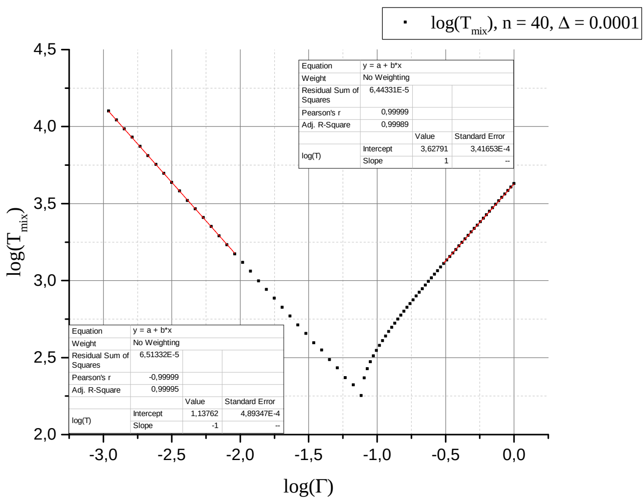

Рис. 1: Зависимость времени перемешивания T_{mix} от уровня шума Γ при $n = 40$, $\Delta = 0.0001$, кольцевой граф, двойной логарифм

[1] Fedichkin L., Solenov D., Tamon C. Mixing and decoherence in continuous-time quantum walks on cycles //Quantum Information and Computation — 2005. — V. 6. — №. 3. — pp. 263-267

[2] Solenov D., Fedichkin L. Continuous-time quantum walks on a cycle graph //Physical Review A. — 2006. — V. 73. — №. 1., 012313.

[3] Melnikov A., Fedichkin L. Quantum walks of interacting fermions on a cycle graph //Scientific Reports. — 2016. — V. 6.

[4] Fedichkin L., Meshchaninov F. Quantum-classical crossover in quantum walks mixing time //The International Conference on Micro-and Nano-Electronics 2016. — International Society for Optics and Photonics, 2016. — pp. 102242M-102242M-6.

Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений

Мирзоев К.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, mirzoev.karahan@mail.ru

В докладе будет изложен способ, позволяющий найти главный член асимптотики некоторой фундаментальной системы решений одного класса линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка вида $\tau y = \lambda y$ на бесконечности, где λ – фиксированное комплексное число. При этом накладываемые на коэффициенты дифференциального выражения τ условия не связаны с их гладкостью, а лишь обеспечивают их определенный степенной рост на бесконечности. Полученные результаты применяются к спектральному анализу соответствующих сингулярных дифференциальных операторов, в том числе и в случае, когда выражение τ является произведением нескольких дифференциальных выражений.

Доклад основан на результатах, опубликованных в работе [1].

[1] Мирзоев К. А., Конечная Н.Н. Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами // Математические заметки, 2016. 100, 2. С.312-317.

Исследование устойчивости субгармонических колебаний динамических систем в случае слабого резонанса

Муртазина С.А.
Сибайский институт (филиал) Башкирский государственный университет, г.Сибай, Россия

Рассматривается динамическая система, зависящая от двух скалярных параметров α, β и T-периодической правой частью

$$x' = (A_0 + (\alpha - \alpha_0)A(t) + (\beta - \beta_0)B(t))\, x + a(x, t, \alpha, \beta)\,, x \in R^2. \quad (1)$$

Здесь матрицы $A(t)$, $B(t)$ непрерывны по t, нелинейность $a(x, t, \mu)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и μ; $a(x, t, \mu)$ начинается с квадратичных по x слагаемых. Ниже будет предполагаться, что система (1) при всех значениях параметров α, β имеет нулевую точку равновесия $x = 0$.

Пусть пара (α_0, β_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы (1) в соответствии со следующим определением.

Значение (α_0, β_0) параметра (α, β) называют точкой бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствуют такие $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$, при которых система (1) имеет ненулевое qT-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $\alpha(\varepsilon) \to \alpha_0$, $\beta(\varepsilon) \to \beta_0$ и $\max\limits_t \|x(t, \varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

В данной работе рассматривается вопрос об устойчивости возникающих при бифуркации qT-периодических решений и порождающей их нулевой неподвижной точки системы (1) в случае слабого резонанса ($1 \le q \le 4$) [1]. Предлагается новая схема исследования устойчивости, основанная на следующем свойстве указанных бифуркаций [2]. В случае слабого резонанса возникающие субгармонические колебания и точка равновесия $x = 0$ имеют противоположный характер устойчивости: если нулевое решение системы (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ асимптотически устойчива, то возникающие при тех же значениях параметра периодические решения неустойчивы, если эти периодические решения устойчивы, то нулевое решение неустойчиво. Данное свойство позволяет существенно упростить исследование устойчивости бифуркационых решений, приводит к новым признакам устойчивости.

[1] *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

[2] *Юмагулов М.Г.* Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем.// Уфимский математический журнал. 2013, №2, том 5.

О гильбертовом пространстве целых функций

Мусин И.Х.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ – множество всех выпуклых функций g в $\mathbb{R}^n$ таких, что:
1). $g(x_1, \ldots, x_n) = g(|x_1|, \ldots, |x_n|),\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
2). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$ $(\|x\|$ – евклидова норма точки $x \in \mathbb{R}^n)$.

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $d\mu_n$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$ и для $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ $abs\, u := (|u_1|, \ldots, |u_n|)$.

С каждой функцией φ из $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ свяжем гильбертово пространство

$$F^2_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z),\ f, g \in F^2_\varphi.$$

Обозначим через $(F^2_\varphi)^*$ сопряжённое пространство к F^2_φ.

Для любого $S \in (F^2_\varphi)^*$ корректно определена функция $\hat{S}(\lambda) = S(e^{\langle\lambda,z\rangle}),\ \lambda \in \mathbb{C}^n$, – преобразование Лапласа функционала S. $\hat{S}$ – целая функция.

Для функции g с областью определения, содержащей множество $(0, \infty)^n$, определим функцию $g[e]$ в $\mathbb{R}^n$ по правилу: $g[e](x) = g(e^{x_1}, \ldots,\ e^{x_n})$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Преобразование Юнга функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле: $g^*(x) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - g(y)),\ x \in \mathbb{R}^n$.

Если E – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, h – выпуклая функция в E, $\tilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : h^*(y) < \infty\}$ и внутренность $\tilde{E}$ – непустое множество, то пусть [1]

$$D^h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : h(x) + h^*(y) - \langle x, y\rangle \le 1\},$$

$$D^h_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in D\},\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Через $V(\Omega)$ обозначаем n-мерный объём множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема. *Пусть $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ такова, что при некотором $K > 0$*

$$\frac{1}{K} \le V(D_\alpha^{\varphi[e]})V(D_\alpha^{\varphi^*[e]}) \prod_{j=1}^{n} \alpha_j \le K,\ \forall\, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Тогда отображение $\mathcal{L} : S \in (F_\varphi^2)^* \to \hat{S}$ устанавливает изоморфизм между $(F_\varphi^2)^*$ и $F_{\varphi^*}^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15–01–01661–а).

[1] Р.А. Башмаков, К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов, О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа, Уфимск. матем. журн., 2010, том 2, выпуск 1, 3–16

Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических дифференциальных уравнений в резонансном случае

Мустафина И.Ж.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В докладе рассматриваются вопросы построения и изучения свойств границ областей устойчивости точки равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_1(t) + (\beta - \beta_0)B_1(t) + A_2(t, \alpha, \beta)]x\,, \quad x \in R^2\,, \quad (1)$$

где α и β – скалярные параметры, матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$ и $A_2(\alpha, \beta, t)$ являются T-периодическими по t, при этом $A_2(t, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению: $\|A_2(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$ при $(\alpha, \beta) \to (\alpha_0, \beta_0)$. Матрица A_0 имеет вид: $A_0 = \begin{bmatrix} \omega_0 i & 0 \\ 0 & -\omega_0 i \end{bmatrix}$, где $\omega_0 = \pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0. В этом случае в уравнений (1) имеет место резонанс (см. [1, 2])

Множество G в плоскости Π параметров (α, β) будем называть *областью устойчивости* (*областью неустойчивости*) точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $(\alpha, \beta) \in G$ точка равновесия $x = 0$ является устойчивой (неустойчивой). Точку $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ будем называть *граничной точкой* области устойчивости G, если в любой ее окрестности содержатся точки как из области устойчивости G, так и из области неустойчивости. Совокупность граничных точек множества G будем называть *границей* Γ множества G.

Обозначим через p_-, p_0 и p_+ количество (с учетом кратности) мультипликаторов системы (1) модуль которых меньше, равен или больше 1 соответственно; тогда $p_- + p_0 + p_+ = 2$. Тройку (p_-, p_0, p_+) называют (см., например, [1, 2]) *топологическим типом* точки равновесия $x = 0$ системы (1). Также говорят, что точка равновесия $x = 0$ является *гиперболической*, если $p_0 = 0$; в противном случае ее называют *негиперболической*.

Положим

$$Q = \begin{bmatrix} -2\omega_0 i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D(\varphi, t) = e^{Qt}[A_1(t)\cos\varphi + B_1(t)\sin\varphi]e^{-Qt},$$

и определим матрицу

$$S(\varphi) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T D(\varphi, \tau)d\tau\,. \tag{2}$$

Теорема. Пусть при некотором $\varphi = \varphi^*$, $0 \le \varphi^* < 2\pi$ матрица $S(\varphi)$ является негиперболической, при этом на некоторых интервалах $(\varphi^* - \delta_0, \varphi^*)$ и $(\varphi^*, \varphi^* + \delta_0)$ она является гиперболической с разным топологическим типом. Тогда через точку (α_0, β_0) проходит граничная кривая области гиперболичности системы (1), при этом параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \tau\cos\varphi^*$, $\beta = \beta_0 + \tau\sin\varphi^*$ является касательной к этой граничной кривой.

Если условию теоремы удовлетворяют m различных $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*$ таких, что $\varphi_j^* - \varphi_k^* \ne \pm\pi$, то через точку (α_0, β_0) проходит, по крайней мере, m различных граничных кривых.

[1] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009. 548 с.

[2] Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука. 1971. 288 с.

О приводимости линейного однородного уравнения типа Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами

Мустафокулов Р.
Таджикский национальный университет, г. Душанбе, Таджикистан

На отрезке (a, b) рассмотрим уравнение

$$[\omega(x)]^n y^n + a_1[\omega(x)]^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – постоянные, а $\omega(x)$ – непрерывная в (a, b) функция.

При $\omega(x) = x$ уравнение (1) является известным уравнением Эйлера, которое подстановкой $x = e^t$ приводится к уравнению с постоянными коэффицентами.

В уравнение (1) сделаем постановку $t = \mu(x)$. Тогда оно приводится к уравнению

$$[\omega(x)]^n [\mu'(x)]^n y_{t^n}^{(n)} + \ldots + a_n y = 0.$$

Делим это уравнение на $[\omega(x)]^n[\mu'(x)]^n$ и потребуем, чтобы

$$\frac{a_n}{[\omega(x)]^n[\mu'(x)]^n} \equiv c, \qquad (c - const).$$

Отсюда полагая $a_n = c$, получим постановку

$$\mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}, \qquad (2)$$

которая необходима для приведения уравнения (1) к уравнению с постоянными коэффициентами.

Пусть $\omega(x) = x^\alpha$ $(\alpha \neq 1)$. Тогда в силу (2), если уравнение

$$x^{n\alpha} y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)\alpha} y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-1)} x^\alpha y' + a_n y = 0, \qquad (3)$$

приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами, то только подстановкой

$$t = \mu(x) = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}. \qquad (4)$$

Лемма. *Пусть функция* $y(x)$ *имеет* n *– е производные. Тогда при подстановке* (4) *справедливы соотношения*

$$\frac{d^k y}{dx^k} = x^{-k\alpha} \sum_{i=0}^{k-1} P_k^i(\alpha) x^{i(\alpha-1)} \frac{d^{k-i} y}{dt^{k-i}}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n,$$

где $P_k^m(\alpha)$, для каждого k, является полиномом степени m, $0 \le m \le k$:

$$P_k^m(\alpha) = P_{k-1}^m(\alpha) + P_{k-1}^{m-1}(\alpha)[(m-1)(\alpha-1) - (k-1)\alpha], \ 1 \le m \le k-1;$$
$$P_k^0(\alpha) = 1, \quad P_k^k(\alpha) = 0.$$

Подстановка (4) является лишь необходимым условием приводимости уравнения (3) к уравнению с постоянными коэффициентами. Используя лемму показывается, что при постоянных $a_1, \ldots, a_n$ это условие не является достаточным.

Теорема. *Подстановкой* (4) *к уравнение с постоянными коэффициентами может быть приведено только уравнение вида*

$$x^{n\alpha}y^{(n)} + A_1(x)x^{(n-1)\alpha}y^{(n-1)} + \ldots + A_{(n-1)}(x)x^{\alpha}y' + A_n(x)y = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты $A_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ имеют вид

$$A_k(x) = \overline{a}_k - \sum_{i=1}^{k} A_{k-i}(x)P_{n-(k-i)}^i(\alpha)x^{i(\alpha-1)}, \quad A_0(x) \equiv 1, \quad A_n(x) \equiv \overline{a}_n,$$

$\overline{a}_k$ *— постоянные числа.*

Уравнение (5) называется *модельным уравнением.* Его частное решение определяется в виде

$$y(x) = e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}x^{1-\alpha},$$

где λ — корень характеристического уравнения

$$\lambda^n + \overline{a}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \overline{a}_{n-1}\lambda + \overline{a}_n = 0.$$

О построении банахового пространства рекуррентных функций

Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н.

Вологодский государственный университет, г. Вологда, Россия

В работе построено банахово пространство $\overline{B}$ совместно рекуррентных функций с нормой $||f|| = \sup\{|f(t)| : t \in R^1\}$, которое содержит все почти периодические функции и не совпадает с множеством почти периодических функций. Кроме этого, предложен способ определения среднего значения для рекуррентных функций из $\overline{B}$. Среднее значение рекуррентной функции из пространства $\overline{B}$ может быть полезно в теории динамических систем.

В следующей теореме предлагается алгоритм построения совместно рекуррентных функций.

Теорема. *Пусть вещественные функции* $g_1(t), g_2(t), \cdots, g_m(t)$ *совместно рекуррентны. Тогда функции* $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)$*:*

$$f_k(t) = \exp\left(i\int_0^t g_k(s)ds\right), \quad 1 \le k \le m$$

вместе с функциями $g_1(t), g_2(t), \cdots, g_m(t)$ *совместно рекуррентны.*

Данная теорема в частном случае, когда $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_m(t)$ - почти периодические функции, доказана в работе ([1]).

Пусть $C = C(-\infty, \infty)$ - пространство непрерывных и ограниченных на всей оси $R^1 = (-\infty, \infty)$ комплекснозначных функций $f(t)$ с равномерной нормой $||f|| = \sup_{t\in R^1} |f(t)|$. Для любого линейного подпространства L пространства C E-расширением линейного подпространства L назовем линейное подпространство $E(L) \subset C$, образованное линейными комбинациями $c_1 f_1(t) + \ldots + c_m f_m(t)$ функций $f_1(t), \ldots, f_m(t)$, каждая из которых либо принадлежит L, либо имеет вид $\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$, где $g(t)$ - вещественная часть какой-либо функции из L. Если линейное подпространство L состоит из совместно рекуррентных функций, например, L равно множеству AP всех почти периодических функций, то его E-расширение $E(L)$ также состоит из совместно рекуррентных функций. В этом случае замыкание $E(L)$ по норме пространства C образует банахово пространство совместно рекуррентных функций.

Положим $B_0 = AP$, где AP - множество всех почти периодических функций, и построим следующую бесконечную цепочку E-расширений: $B_1 = E(B_0),\ B_2 = E(B_1),\ \ldots\ ,\ B_N = E(B_{N-1}),\ \ldots$. По построению и в силу приведенной теоремы каждое из этих множеств состоит из совместно рекуррентных функций, а их объединение $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$ образует линейное пространство совместно рекуррентных функций. Рассмотрим замыкание $\overline{B}$ линейного пространства B по равномерной норме. $\overline{B}$ - банахово пространство совместно рекуррентных функций и $\overline{B}$ не совпадает с AP.

Любой линейный ограниченный функционал, который задан в подпространстве AP, по теореме Хана-Банаха, можно продолжить на все пространство $\overline{B}$. Например, можно рассматривать функционал

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds, \tag{1}$$

определенный для функций $f(t)$ из AP. Число $M(f)$ называют средним значением почти периодической функции $f(t)$. Значение $M(f)$ определено не для всех рекуррентных функций $f(t)$. В связи с этим представляет интерес вопрос о распространении понятия среднего значения для рекуррентных функций из банахового пространства $\overline{B}$, применяя построения теоремы Хана-Банаха.

[1] Абдуваитов Х.А., Мухамадиев Э.М. О линейном множестве рекуррентных функций // Доклады АН Тадж. ССР. 1976. Т. 19. № 2. С. 3-5.

О равномерной резольвентной сходимости для многомерных эллиптических операторов в областях с малыми полостями

Мухаметрахимова А.И.
Башкирский государственный педагогический университет им. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Пусть $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega \in C^2(\Omega)$, ε – малый положительный параметр.

Выберем некоторую точку $M \in \Omega$. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\omega$. Обозначим $\omega_\varepsilon = \{x : (x - M)\varepsilon^{-1} \in \omega\}$ – область, полученная сжатием ω в ε^{-1} раз. Из области Ω вырежем отверстие $\omega_\varepsilon : \Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \omega_\varepsilon$.

Пусть $f \in L_2(\Omega)$, λ – комплексное число, мнимая часть которого отлична от нуля, ν – внешняя нормаль к $\partial\omega_\varepsilon$.

Рассматривается следующая возмущенная краевая задача:

$$-\Delta u_\varepsilon - \lambda u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\text{или} \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_\varepsilon, \\ &\text{или} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_\varepsilon, \\ &\text{или} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + a u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

Введем еще одну краевую задачу:

$$-\Delta u_0 - \lambda u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$

которую далее будем называть предельной.

Основной результат выглядит следующим образом.

Теорема. Для достаточно малых ε и любой функции $f \in L_2(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\|u_0 - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε и f, но зависит от λ, u_ε – решение задачи (1) с одним из описанных граничных условий на $\partial\omega_\varepsilon$, u_0 – решение задачи (2).

Авторезонансное параметрическое возбуждение магнитного бризера в трехслойной ферромагнитной структуре с неоднородными параметрами анизотропии и обмена

Назаров В.Н.[1], **Екомасов Е.Г.**[2]
[1]Институт физики молекул и кристаллов УНЦ РАН, г.Уфа, Россия
[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В настоящее время сэндвичеподобные магнитные структуры широко исследуются в связи с возможностью их практического применения. Часто они представляют собой периодически чередующиеся слои двух материалов с различными физическими свойствами. Для таких новых магнитных материалов и процессов, происходящих в них, исследование динамики перемагничивания и генерации неоднородной структуры под действием высокочастотного поля представляется актуальным [1]. С математической точки зрения задача сводится к модифицированному уравнению синус-Гордон в модели с примесями. Особый интерес представляет изучение контролируемых динамических условий, в которых высокие углы прецессии намагниченности могут быть достигнуты применением полей достаточно малой амплитуды [2, 3].

В этой работе описывается авторезонансное параметрическое возбуждение магнитного бризера в трехслойном ферромагнетике с уменьшенным значением анизотропии в тонком слое полями переменной частоты и малой амплитудой специального вида. Как было показано ранее [4], начальный зародыш докритической амплитудой слабо реагирует на размер дефекта и исчезает, превращаясь в затухающий бризер. В случае переменного внешнего поля существует вероятность возникновения резонансных эффектов, которые приводят к более существенному изменению амплитуды бризера. При переменной частоте поля накачки временная эволюция квадрата амплитуды определяется из резонансных условий. Такие условия интерпретируются как захват системы в параметрический резонанс и позволяют получить приближенное решение для амплитуды в течение длительного периода времени. Начальная точка выбирается вблизи пограничного слоя, где приближенное решение определяется дифференциальными уравнениями, полученными путем усреднения. Анализ этих уравнений показывает существование решений с растущей амплитудой. Кроме того, показана возможность генерации магнитного бризера с увеличением амплитуды в поле тонкого слоя из уравнений движения, сформулированных в виде уравнения синус-Гордона в модели с включением примесей [5] и решаемой с помощью численных методов [6].

[1] Семенцов Д.И., Шутый А.М. Нелинейная регулярная динамика намагниченности в тонкопленочных структурах // УФН. 2007. Т. 177, № 8. С. 831–857.

[2] Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю., Назаров В.Н., Харисов А.Т., Шамсутдинов Д.М. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009. 456с.

[3] Калякин Л.А., Шамсутдинов М.А., Гарифуллин Р.Н., Салимов Р.К. Авторезонансное параметрическое возбуждение локализованных колебаний намагниченности в легкоплоскостном ферромагнетике полем переменной частоты // ФММ. 2007. Т. 104, № 2. С. 115–128.

[4] Назаров В.Н., Шафеев Р.Р., Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю. Влияние одномерных «дефектов» на динамику зародыша новой фазы вблизи фазового перехода I рода в магнетиках // ФТТ. 2012. Т. 54, № 2. С. 282–287.

[5] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., and Murtazin R.R. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // Mathematical Methods in the Applied Sciences (DOI: 10.1002/mma.3908) (2016).

[6] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. V. 312. P. 198–208.

Антилинейные непрерывные операторы и ортоподобные системы разложения

Напалков В.В (мл.)
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть H – гильбертово пространство и система $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$, где Ω – пространство с мерой μ, есть ортоподобная система разложения в пространстве H (см. [1]). Это означает, что любой элемент $y \in H$ может быть представлен в виде

$$y = \int_\Omega (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu.$$

Для произвольного элемента $y \in H$ положим $\widehat{y}(\omega) = (e_\omega, y)_H$, $\omega \in \Omega$.

Совокупность

$$\{\widehat{y}\colon\ y \in H\} \stackrel{ob}{=} \widehat{H}, \quad (\widehat{x}, \widehat{y})_{\widehat{H}} \stackrel{def}{=} (y, x)_H,\ x, y \in H$$

образует гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $\widehat{H}$ (см., например, [2]). Отображение $S\colon y \mapsto \widehat{y}$ является антилинейным непрерывным оператором см. [3, стр. 41], действующим из H на $\widehat{H}$, поскольку выполнены условия

1.) $\|Sy\|_{\widehat{H}} = \|y\|_H$,

2.) $S(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \overline{\alpha} \cdot S(x) + \overline{\beta} \cdot S(y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Лемма. *Пространство $\widehat{H}$ состоит из функций, заданных на Ω, и является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Система воспроизводящих ядер $\{K_{\widehat{H}}(\cdot, \omega)\}_{\omega\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $\widehat{H}$; любая функция $g(\omega)$, $\omega \in \Omega$ может быть представлена в виде*

$$g(\omega) = \int_\Omega (g, K_{\widehat{H}}(\cdot, \eta))_{\widehat{H}} K_{\widehat{H}}(\omega, \eta) \, d\mu(\eta), \quad \omega \in \Omega$$

и

$$\|g\|^2_{\widehat{H}} = \int_\Omega \left|(g, K_{\widehat{H}}(\cdot, \eta))_{\widehat{H}}\right|^2 \, d\mu(\eta) = \int_\Omega |g(\eta)|^2 \, d\mu(\eta).$$

По поводу доказательства леммы см. работу [4]. Применяя эту лемму и свойства воспроизводящего ядра, можно доказать

Теорема 1. *Существует антилинейный непрерывный оператор Y, действующий из пространства $\widehat{H}$ на пространство $\widehat{H}$, и такой, что*

$$Y\colon\ K_{\widehat{H}}(\cdot, \omega) \mapsto K_{\widehat{H}}(\cdot, \omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Отсюда следует

Теорема 1'. *Существует антилинейный непрерывный оператор Y', действующий из пространства H на пространство H, и такой, что*

$$Y'\colon\ e_\omega \mapsto e_\omega, \quad \forall\omega \in \Omega.$$

[1] Лукашенко Т.П. *О свойствах систем разложения подобных ортогональным*,Известия РАН, сер. матем. т. 62, №5 (1988), С. 187–206.

[2] Aronszajn N., *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the AMS, V.68, №3 (1950), P. 337–404.

[3] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т., Общие принципы квантовой теории поля, М.: Наука. 1977. 616 с.

[4] Напалков В.В. (мл.) *Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром*, Уфимский матем. журнал, т. 5, №4 (2013), С. 91–104.

Разложение Фишера пространства $H(\mathbb{C})$ для оператора свертки

Напалков В.В., Муллабаева А.У.

ИМВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, Россия, БашГУ, г. Уфа, Россия

Обобзначим через H_m — множество всех однородных полиномов степени $m \geq 0$ от переменных $z_1, z_2, ..., z_n$ с комплексными коэффициентами, через P^* — многочлен, сопряженный с P, т.е. $P^*(z) = \overline{P(\overline{z})}$. В 1917 г. Э. Фишер доказал [1], что, если $P \in H_k$, тогда любой полином $f \in H_m$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f = g + h, \quad g, h \in H_m, \tag{1}$$

где g делится на P, а h является решением уравнения $P^*(\frac{\partial}{\partial z})h = 0$. Многочлены P и P^* называют парой Фишера, а представление (1) — разложением Фишера.

Рассмотрим пространство $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. В 1963 г. Д. Ньюман и Г. Шапиро получили аналогичный результат для функций из пространства Баргмана–Фока $f \in H(\mathbb{C}^n) : \int\limits_{\mathbb{C}^n} |f|^2 e^{-|z|^2} d\mu < \infty$, где $d\mu$ —

мера Лебега. В 1989 г. Шапиро [2] доказал справедливость разложения Фишера пространства $H(\mathbb{C}^n)$ для однородного полинома.

Нами получено разложение Фишера пространства $H(\mathbb{C})$ для оператора свертки. Введем пространство $H^*(\mathbb{C})$ — пространство сопряженное к $H(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$ — пространство целых функций экспоненциального роста. Преобразование Лапласа $\widehat{F}(\lambda) = (F, e^{\lambda z}) = \varphi(\lambda),\ F \in H^*(\mathbb{C})$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$. Рассмотрим в $H(\mathbb{C})$ оператор свертки с характеристической функцией φ:

$$M_\varphi[f(z)] = (F_t, f(z+t)), \quad f \in H(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим оператор свертки K_{φ^*} в пространстве $P_{\mathbb{C}} : K_{\varphi^*}[\psi(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{\lambda z}\varphi^*(z) g_\psi(z) dz,\ \psi \in P_{\mathbb{C}}$, где φ^* — характеристическая функция оператора, функция g_ψ — ассоциированная по Борелю с функцией ψ, контур C охватывает все особенности функции g_ψ.

Муггли показал (см. [3]), что ядро оператора K_{φ^*} состоит из функций вида $r(z) = \sum\limits_{i=1}^{Q} c_i e^{\overline{\lambda}_i z}$, где $\overline{\lambda}_1, \cdots, \overline{\lambda}_Q$ — нули функции φ^*, которые находятся внутри контура интегрирования C.

Будем говорить, что $L \subset \mathbb{C}$ *секвенциально достаточное множество в пространстве* E, если из сходимости к нулю любой последовательности функций из E на компактах множества L вытекает сходимость этой последовательности к нулю во всех точках z, принадлежащих любому компакту K, $K \subset \mathbb{C}$ в пространстве E.

Теорема. Пусть φ — характеристическая функция оператора M_φ, нули которой являются секвенциально достаточным множеством в $\ker K_{\varphi^*}$, тогда существует разложение Фишера пространства $H(\mathbb{C})$ для оператора M_φ, т.е.

$$f = w + \varphi^* \cdot l, \quad w \in \ker M_\varphi,\ l \in H(\mathbb{C}),\ \varphi^*(z) = \overline{\varphi(\overline{z})}. \tag{2}$$

Разложение Фишера применяется при решении задач Гурса, Дирихле, Коши и интерполяционной задачи Валле Пуссена.

[1] Fischer E. *Über die Differentiationsprozesse der Algebra* // J. Math. 1917. V. 148. P. 1–78

[2] Shapiro H.S. *An algebraic theorem of E. Fisher, and the holomorfic Goursat problem*// Bull. London Math. Soc. 1989. V. 21. P. 513–537.

[3] Muggli H. *Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten* // Comment. Math. Helv. 1938. V. 11. P. 151–179.

Точное неравенство Харди с весом, зависящим от функции Бесселя

Насибуллин Р.Г.
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ,
г. Казань, Россия

Неравенства типа Харди связывают функцию и ее производную в интегральном соотношении. Широкое распространение неравенства типа Харди получили в работах таких математиков как В. Левин, П.Р. Бисак, Дж. Таленти, Ф.Г. Авхадиев, К.-Й. Вирс, Дж. Томаселли, Б. Макенхоупт, Дж. Синамон и В.Д. Степанов. Отметим работу Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Вирца [1], в которой установлены неравенства типа Харди с весовыми функциями, зависящими от функции Бесселя порядка ν:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+1+\nu)},\quad x>0,\nu\geq 0.$$

Приведем формулировку этого результата: *пусть* $s\in(0,+\infty),\nu\in(0,+\infty),q>0,\Phi_{\nu,q}(t):=\sqrt{x}J_\nu(\lambda(2/q)t^{q/2})$ *и абсолютно непрерывная функция* $u:[0,1]\to\mathbb{R}$, *такая что* $u(0)=0$ *и* $u'/t^{(s-1)(1+q\nu)/4}\in L^2[0,1]$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 u'^2\frac{dt}{\Phi^{s-1}_{q,\nu}(t)}\geq s\int\limits_0^1\frac{u^2(t)}{t^2}\left(\frac{1-\nu^2q^2}{4}+\frac{q^2\lambda^2_\nu(2/q)}{4t^{-q}}\right)\frac{dt}{\Phi^{s-1}_{q,\nu}(t)}.\qquad(1)$$

Неравенство является строгим, если $f\not\equiv 0$ *и* $s\leq\frac{1-\nu q}{1+\nu q}$. *Если* $s>\frac{1-\nu q}{1+\nu q}$, *то равенство в неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $u(t)=C\Phi^s_{\nu,q}(t)$, *где* C *— некоторая константа.*

Отметим, что в статье [1] также получены аналоги неравенства (1) в произвольных выпуклых областях с конечным внутренним радиусом. Неравенство (1) является логическим развитием, с одной стороны неравенств типа Харди с весами, а с другой — неравенств с дополнительным слагаемым. Постановка задачи получения неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми принадлежит Х. Брезису и М. Маркусу.

Мы получили L^p-аналоги неравенства (1). Сначала мы доказываем одномерные неравенства и с помощью подхода Ф.Г. Авхадиева каждое полученное одномерное интегральное неравенство типа Харди распространяем на произвольную выпуклую область Ω с конечным внутренним радиусом

$$\delta_0=\delta_0(\Omega)=\sup_{x\in\Omega}\delta,$$

где $\delta=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ – функция расстояния до границы области Ω.

Далее приведем лишь одно следствие полученных неравенств.

Пусть $C_0^1(\Omega)$ — семейство непрерывно-дифференцируемой функции f с компактным носителем в Ω. Справедлива

Теорема. Пусть Ω — n-мерная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n, \delta_0 = \delta_0(\Omega) < \infty$. Если $s \in (0, +\infty), \nu \in (0, +\infty), p \in [2, +\infty)$, то для произвольной функции $f \in C_0^1(\Omega)$ выполнено следующее неравенство типа Харди:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^2}{(2\delta_0)^p} \int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2} dx,$$

где $j_{\nu-1}$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{\nu-1}(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта №15-41-02433.

[1] F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Weighted Hardy inequalities with sharp constants*, Lobachevskii J. Math., 31(2010), 1–7.

[2] F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin., 18(2011), 723–736.

«Квантование» изомонодоромной гамильтоновой ситемы с двумя степенями свободы $H^{\frac{7}{2}+1}$

Павленко В.А., Сулейманов Б.И.

ФГБОУ ВО Башкирский государственный аграрный университет, г.Уфа, Россия; Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются совместные между собой линейные эволюционные уравнения с временами t_1, t_2, зависящие от двух пространственных переменных. Эти эволюционные уравнения можно рассматривать как аналоги временных уравнений Шредингера, определяемых двумя гамильтонианами

$$H_{t_k}^{\frac{7}{2}+1}(t_1, t_2, q_1, q_2, p_1, p_2) \qquad (k = 1, 2)$$

пары совместных между собой систем, допускающих применение метода изомонодромных деформаций (ИДМ) [1]. В терминах решений соответствующих линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений ИДМ построены решения данных эволюционных уравнений. Установлено, что решения гамильтоновой системы $H^{\frac{7}{2}+1}$ явным образом задаются совместными решениями уравнения Кортевега де Вриза (КдВ)

$u_t + u_{zzz} + uu_z = 0$ и стационарной части симметрии уравнения КдВ

$$\beta(u_{zzzz} + \frac{5uu_{zz}}{3} + \frac{5(u_z)^2}{6} + \frac{5u^3}{18})'_z + 2u + zu_z - 3t(u_{zzz} + uu_z),$$

посредством которых, в частности, универсальным образом описывается [2] влияние малой дисперсии на процессы трансформации слабых гидродинамических разрывов в сильные.

[1] Kawakami H. Four-dimensional Painlevŕe-type equations associated with ramified linear equations III: Garnier systems and Fuji-Suzuki systems. http://arxiv.org/abs/1703.01379

[2] Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И. От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам. Журн. Экс. и Теор. Физ., 2010. Т. 137, вып. 1. С. 149-165.

О применении некоторых аппроксимационных пространств

Подвигин И.В.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г.Новосибирск, Россия

Пусть μ — нормированная борелевская мера на метрическом пространстве M и $\mathfrak{F}_p$, $p \in [1, \infty]$ есть всюду плотное в $L_p(M, \mu)$ банахово пространство комплекснозначных функций с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}_p}$. Для произвольной функции $f \in L_p(M, \mu)$ обозначим ее наилучшее $\mathfrak{F}_p$-приближение порядка $t \geq 0$ как

$$\tau_f(t) = \inf\{\|f - h\|_p : \ h \in \mathfrak{F}_p, \ \ \|h\|_{\mathfrak{F}_p} \leq t\}.$$

Пусть Ξ есть множество всех монотонно убывающих функций $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, стремящихся к нулю при $t \to \infty$. Пусть $\Xi^0 \subset \Xi$ те из них, которые обращаются в ноль с некоторого момента.

Определение. *Для $\Theta \in \Xi$ аппроксимационным пространством $\mathfrak{F}_p(\Theta)$ будем называть множество всех функций $f \in L_p(M, \mu)$ таких, что для наилучшего $\mathfrak{F}_p$-приближения справедливо неравенство*

$$\tau_f(ct) \leq c\Theta(t)$$

при всех $t \geq 0$ для некоторой константы $c \geq 0$. Наименьшую такую константу будем обозначать $\|f\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta)}$.

Пространства $\mathfrak{F}_p(\Theta)$ суть нормированные пространства функций с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta)}$, расширяющие исходное пространство $\mathfrak{F}_p$. Некоторые примеры можно найти в [1, §7.2]. Интерес для автора к таким аппроксимационным пространствам обусловлен задачей о расширении имеющихся оценок убывания корреляций в динамических системах на более широкий класс функций. Сформулируем результат более точно.

Предположим, что задано сохраняющее меру μ отображение $T : M \to M$, для которого справедливы следующие оценки: для любых $f \in \mathfrak{F}_p \subseteq L_p(M, \mu)$ и $g \in \mathfrak{G}_q \subseteq L_q(M, \mu)$, $p, q \in [1, +\infty]$, $1/p + 1/q = 1$

$$|c_n(f, g)| := \left| \int_M f(x)g(T^n x)\, d\mu - \int_M f(x)\, d\mu \int_M g(x)\, d\mu \right|$$
$$\leq A\|f\|_{\mathfrak{F}_p}\|g\|_{\mathfrak{G}_q}\Phi(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{\#}$$

для некоторой константы $A > 0$ и $\Phi \searrow 0$ при $n \to \infty$.

В приложениях обычно $\mathfrak{F}_p$ и $\mathfrak{G}_q$ — это множества гёльдеровских функций (или классы, содержащие в себе гёльдеровские). Следующая теорема позволяет получать оценки типа (#) для произвольных пар функций $f \in L_p(M, \mu)$ и $g \in L_q(M, \mu)$, $p, q \in [1, +\infty], 1/p + 1/q = 1$.

Теорема. Предположим, что справедлива оценка (#). Пусть Θ_1, $\Theta_2 \in \Xi$, тогда для любых $f \in \mathfrak{F}_p(\Theta_1)$, $g \in \mathfrak{G}_q(\Theta_2)$ для всех $n \geq n_0$

$$|c_n(f, g)| \leq \tilde{A}\|f\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta_1)}\|g\|_{\mathfrak{G}_q(\Theta_2)}\tilde{\Phi}(n)$$

для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, константы $\tilde{A} > 0$, и $\tilde{\Phi} \searrow 0$ при $n \to \infty$.

В случае $\Theta_1 \vee \Theta_2 \notin \Xi^0$ будет $\tilde{\Phi}(n) = \Phi(n)\upsilon(\Phi(n))$, где $\upsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ обратное отображение к

$$\frac{1}{t}(\Theta_1 \vee \Theta_2)(\sqrt{t}), \ t > 0;$$

и n_0 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\Phi(n_0)\upsilon(\Phi(n_0)) \leq 1.$$

В случае $\Theta_1 \vee \Theta_2 \in \Xi^0$ будет $\tilde{\Phi}(n) = \Phi(n)$ и $n_0 = 1$.

[1] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.

Об экстремалях функционала потенциальной энергии

Полубоярова Н.М.
Волгоградский государственный университет, г.Волгоград, Россия

Пусть M – n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\mathcal{N}$; $\Phi,\ \Psi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — C^2-гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\mathcal{N}} \Psi(x)\, dx, \tag{1}$$

которая не зависит от выбора нормали ξ. Функционал (1) назовем функционалом потенциальной энергии.

Поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$.

Обозначим

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle),$$

где $D\Phi = \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_2}, \dots, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_{n+1}}\right)$, δ_{ij} – символ Кронекера; k_i – главные кривизны; E_i – главные направления поверхности.

Теорема 1. Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2 является экстремалью функционала (1) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = \Psi(x).$$

Теорема 2. Если $f = x_{n+1}$ и $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{n+1})$, то выполнено равенство

$$\mathrm{div}((\xi_{n+1}\Phi' - \Phi)\nabla f) = \Psi(x)\xi_{n+1}.$$

При $\Psi(x) = 0$ теорема 2 обобщает хорошо известное свойство гармоничности координатных функций минимальных поверхностей.

Пусть C^2-гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданной радиус-вектором

$$\vec{R}(t,\theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \tag{2}$$

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ – радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ – C^2-гладкая функция на (a,b), ξ_{n+1} – координата единичной нормали к поверхности $\mathcal{M}$ и функция $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$.

Обозначим $\tau = \xi_{n+1} = -\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)}$, $\phi'(\tau) = d\phi/d\xi_{n+1}$, $\phi''(\tau) = d^2\phi/d\xi_{n+1}^2$, $\dot r(t) = dr(t)/dt$, $\ddot r(t) = d^2 r(t)/dt^2$,

$$B(t) = \frac{\phi''(\tau)}{(1+\dot r^2(t))\left(\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)},\ C(t) = \frac{r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}}{\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}}.$$

Теорема 3. Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2, заданная радиус-вектором (2), является экстремалью функционала (1) тогда и только тогда, когда

$$\frac{r(t)\ddot r(t)}{1+\dot r^2(t)} - \frac{(n-1) + \Psi(x)C(t)}{B(t)+1} = 0.$$

В работе [1] были получены уравнения экстремалей для поверхностей вращения при $\Psi(x) = 0$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-41-02479 р_поволжье_а.

[1] Полубоярова Н. М. Исследование устойчивости n-мерных экстремальных поверхностей вращения. Изв. вузов. Матем. - 2011. - N 2. - С. 106-109.

Оценка снизу минимума модуля целой функции через степень максимума модуля на большей окружности

Попов А.Ю.

МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Обозначим $m(f,r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $M(f,r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, где f — целая функция. В [1] приведены асимптотические оценки снизу $m(f,r)$ через некоторую степень $M(f,r)$. Например,
$\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \big(\ln m(f,r)/\ln M(f,r)\big) \geq l(\rho) > -\infty$, какова бы ни была целая функция порядка $\rho \geq 0$. Известно, что $l(\rho) = \cos\pi\rho$ при $0 \leq \rho \leq 1$, $l(\rho) \asymp -\ln\rho$ при $\rho \to +\infty$. Хейман в [2] построил целую функцию F бесконечного порядка, для которой $\lim\limits_{r\to+\infty} \big(\ln m(F,r)/\ln M(F,r)\big) = -\infty$.

Автором дана оценка снизу $m(f,r)$ через отрицательную степень $M(f,\lambda r)$, $\lambda > 1$, без ограничений на скорость роста $M(f,r)$. Сформулируем наиболее простой результат.

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной непостоянной целой функции f существует такое число $R_0 = R_0(\varepsilon, f)$, что при любом $R > R_0$

$$\exists r \in (R/2, R): \quad m(f,r) > \Big(M(f,5R)\Big)^{-1-\varepsilon}.$$

Следствие. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой непостоянной целой функции f существует такая последовательность $r_n \uparrow +\infty$, что

$$1) \quad r_{n+1} \leq 2r_n, \qquad 2) \quad m(f,r_n) > \Big(M(f,10r_n)\Big)^{-1-\varepsilon}.$$

Построен пример такой целой трансцендентной функции g нулевого порядка, что существует последовательность $R_n \to +\infty$ и

$$\max\left\{m(g,r) \mid \frac{R_n}{2} \leq r \leq R_n\right\} < M\left(g, \frac{5}{4}R_n\right)^{-1.01}.$$

Выведены более общие оценки. Получено явное выражение такой величины $\lambda = \lambda(q,d)$
($q \in (0,1), d \in (0,+\infty)$ — произвольные заданные числа), что при всех достаточно больших значениях R верна оценка $\max\{m(f,r) \mid qR \leq r \leq R\} > M^{-d-\varepsilon}(f,\lambda R)$.

[1] Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions, Academic Press, London, New York, 1976.

[2] Hayman W.K. The minimum modulus of large integral functions, Proc London Math. Soc., 1952 №2, p.469-512.

Классификация подкласса двумеризованных цепочек посредством характеристических колец Ли

Попцова М.Н.[1]**, Хабибуллин И.Т.**[1,2]

[1]Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

[2]Башкирский государственный университет

Основной целью настоящей работы является тестирование нового алгоритма классификации нелинейных интегрируемых дифференциально-разностных уравнений с тремя независимыми переменными. Мы применяем этот алгоритм к задаче описания интегрируемых случаев подкласса двумеризованных цепочек вида

$$u_{n,xy} = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) u_{n,x} u_{n,y}. \tag{1}$$

Здесь $u_n = u_n(x, y)$ – искомая функция, зависящая от целого n и веществены x, y. Функция $\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ предполагается аналитической в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^3$. Мы требуем, чтобы производные $\frac{\partial\alpha(u_{n+1},u_n,u_{n-1})}{\partial u_{n+1}}$ и $\frac{\partial\alpha(u_{n+1},u_n,u_{n-1})}{\partial u_{n-1}}$ были отличны от тождественного нуля.

Накладывая условия обрыва $u_{N_1} = c_1$ и $u_{N_2} = c_2$ в двух различных целых точках N_1 и N_2 $(N_1 < N_2)$ мы сводим цепочку (1) к конечной системе уравнений в частных производных гиперболического типа

$$\begin{aligned} &u_{N_1} = c_1, \\ &u_{n,xy} = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) u_{n,x} u_{n,y}, \quad N_1 < n < N_2, \\ &u_{N_2} = c_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Определение 1. Цепочку (1) назовем интегрируемой, если система уравнений гиперболического типа (2) является интегрируемой по Дарбу для любых N_1, N_2.

Предполагая, что цепочка (1) является интегрируемой в смысле Определения 1 мы находим функцию α.

Интегрируемые по Дарбу системы уравнений решаются в явном виде, при этом любое решение "аппроксимирующей" системы легко продолжается до решения исходной цепочки, поэтому цепочки интегрируемые в смысле определения выше допускают широкий класс явных решений. Наша гипотеза состоит в том, что такие цепочки принадлежат классу солитонных систем, т.е. являются интегрируемыми в общепринятом смысле.

В представляемой работе для того, чтобы установить интегрируемость по Дарбу системы гиперболического типа мы использовали алгебраический критерий интегрируемоти по Дарбу, согласно которому (см. [1]) характеристические кольца Ли такой системы должны иметь конечную размерность. Из этого требования можно вывести эффективные необходимые условия интегрируемости цепочки (1). По сравнению с предыдущей работой [2] мы сняли условие согласованности базисов этих колец Ли с градуировкой. Мы доказали, что с точностью до точечных преобразований в исследуемом классе существует только одна цепочка, проходящая этот тест. Эта цепочка совпадает с найденным ранее уравнением Ферапонтова-Шабата-Ямилова [3, 4].

[1] А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат, Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения, М.-Ижевск, 2012.

[2] И. Т. Хабибуллин, М.Н. Попцова, "Интегрируемые двумеризованные цепочки. Характеристические кольца Ли и классификация". В сб. «Математическая физика и смежные вопросы». Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Тематические обзоры, Дифференциальные уравнения и математическая физика. (2017) т.140, стр. 18-29.

[3] Shabat A.B., Yamilov R.I., To a transformation theory of two-dimensional integrable systems, *Phys. Lett.* A (1997) **2**27:1-2, 15–23.

[4] E. V. Ferapontov, Laplace transformations of hydrodynamic-type systems in Riemann invariants, *Theor. Math. Phys.* (1997) **1**10:1 68–77.

Исследование операторных моделей вязкоупругости и теплопроводности в средах с памятью

Раутиан Н.А.
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегродифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Указанные интегродифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина) и имеют ряд других важных приложений. В частности, рассмотрены интегродифференциальные уравнения вида

$$\frac{du(t)}{dt} + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Предполагается, что скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление

$$\mathcal{K}(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu(\tau),$$

где $d\mu$ - положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Предполагаем, что выполнено условие

$$\mathcal{K}(0) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \infty,$$

где носитель μ принадлежит полуоси $(d_1, +\infty)$, $d_1 > 0$. В ряде случаев используется также условие

$$-\mathcal{K}^{(1)}(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) < +\infty.$$

Получены результаты о корректной разрешимости рассматриваемых интегродифференциальных уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве, заданных на положительной полуоси, а также представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых отвечающих вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений. Полученные представления являются новыми для данного класса интегродифференциальных уравнений.

[1] Власов В.В., Раутиан Н.А. О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена, *Труды Московского математического общества*, **75:2** (2014) 131-155.

[2] Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **58** (2015) 22-24.

Задача Шапиро для оператора свертки Данкла

Рахимова А.И., Напалков В.В.

БашГУ, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Обобщенный оператор Данкла играет важную роль в математической физике. Его изучению посвящены множество работ, в том числе статьи [1], [2]. Он отображает пространство $H(\mathbb{C})$ в пространство $H(\mathbb{C})$. Он является частным случаем оператора Гельфонда-Леонтьева.

Обобщенный оператор Данкла определяется следующим образом:

$$\Lambda f(z) = f'(z) + \frac{c}{z}\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z), \quad c > 0,$$

где $\alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}$, $j = \overline{(0; m-1)}$.

Этот оператор имеет собственную функцию $y(z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{p(1)p(2)...p(m)}$, где $p(m) = m + \sum\limits_{j=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi i j(m+1)}{n}}$. Ее порядок и тип равны $\rho = 1$, $\sigma = 1$.

Преобразование Данкла функционала $F(z) \in H(\mathbb{C})$ имеет вид: $\mathfrak{D}F(\lambda) = (F(z), y(\lambda z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\lambda z) g_F(z) dz$.

Оператор сдвига Данкла определяется по формуле:

$$S_t f(z) = f(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{p(1)p(2)...p(m)} \Lambda^m f(z),$$

где $z, t \in \mathbb{C}$.

Оператор свертки Данкла имеет вид:

$$M_F[f](z) = (F_t, S_t f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C S_t f(z) g_F(t) dt,$$

где $g_F(z)$ — ассоциированная по Борелю функция к функционалу $F(z)$.

В работах [1], [2] были решены однородное уравнение свертки $M_F[f](z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \Lambda^k f(z) = 0$ и неоднородное уравнение свертки $M_F[f](z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \Lambda^k f(z) = g(z)$, $g(z) \in H(\mathbb{C})$ для любой функции $g(z)$.

Для уравнений свертки при дополнительных условиях на искомую функцию возникают задача Валле–Пуссена и задача Шапиро. При их решении используются представление Фишера для целых функций и сюръективность композиции оператора обобщенной свертки с операцией умножения на целую функцию.

[1] Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.) Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады Академии наук, 2008. — Т. 423. — № 3. — С. 300 – 302.

[2] Карамов И.И., Напалков В.В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал, 2014. — Т. 6. — № 1. — С. 59 – 68.

О знакоопределенности решений неоднородного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа высокого порядка

Сабитов К.Б.
Стерлитамакский филиал ИСИ РБ, Стерлитамакский филиал БашГУ, г. Стерлитамак, Россия

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа высокого порядка

$$L^m u(x,y) = f(x,y), \ \ m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где

$$L^1 v = Lv = (\mathrm{sgn} y) v_{xx} + v_{yy} = \begin{cases} \Delta v = v_{xx} + v_{yy}, \\ \Box v = -v_{xx} + v_{yy}, \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & y > 0, \\ f_2(x,y), & y < 0, \end{cases}$$

в области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l > 0$, и характеристиками $AC: \ x + y = 0$ и $CB: \ x - y = l$ уравнения (1).

Рассмотрим следующую краевую задачу, которая является аналогом задачи Трикоми для уравнений смешанного типа высоких порядков.

Задача Трикоми-Жегалова. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^{2m}(D_+ \cup D_-) \cap C^{2m-1}(D) \cap C^{2m-2}(\overline{D}), \tag{2}$$

$$L^m u(x,y) \equiv f(x,y), \ \ (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$L^k u(x,y)\big|_{\Gamma} = \varphi_k(x,y), \ \ (x,y) \in \overline{\Gamma}, \tag{4}$$

$$L^k u(x,y)\big|_{AC} = \psi_k(x), \ \ 0 \le x \le l/2, \tag{5}$$

где $f(x,y), \varphi_k(x,y), \psi_k(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_k(0,0) = \psi_k(0)$, $k = \overline{0, m-1}$, $D_+ = D \cap y > 0$, $D_- = D \cap y < 0$.

Для произвольных $m \ge 2$ задача (2) – (5) при $f(x,y) = 0$ исследована В.И. Жегаловым [1], т.е. им были установлены теоремы единственности и существования поставленной задачи.

В данной работе ставится задача качественного характера о том, что если правая часть уравнения (1) $f(x,y) > 0$ на $D_+ \cup D_-$, то как ведет себя функция $u(x,y)$ в D, т.е. требуется доказать, что $u(x,y) \neq 0$ на $D_+ \cup D_-$.

Поскольку оператор $L^m u$ в области D_+ совпадает с полигармоническим $\Delta^m u$, то возникает вопрос о знакоопределенности решения неоднородного полигармонического уравнения в зависимости от знака правой части. В связи с чем исследован этот вопрос и дан полный ответ на поставленную задачу, т.е. показано, что если в задаче (2) – (5) функции $\varphi_k(x,y) \equiv 0$, $\psi_k(x) \equiv 0$ при $k = \overline{0, m-1}$ и $f_1(x,y) \geq 0$ (≤ 0) и $f_1(x,y) \not\equiv 0$ на D_+, $f_2(x,y) > 0$ (< 0) на D_-, то $u(x,y) > 0$ (< 0) на $D_+ \cup D_-$ когда m – четное натуральное число; $u(x,y) < 0$ (> 0) на $D_+ \cup D_-$ когда m – нечетное натуральное число [2, 3].

Отметим, что в известных работах для эллиптических уравнений высокого порядка, в частности, для полигармонического уравнения, установлены оценки решения задачи Дирихле через граничные функции или правую часть. Эти оценки названы принципом максимума, из которых не следует классический принцип максимума (максимум решения не может достигаться внутри области), следовательно, и знакоопределенность решения.

[1] Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка // ДАН СССР. 1961. Т. 136. № 2. С. 2745–276.

[2] Сабитов К.Б. О положительности решения неоднородного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа высокого порядка // Матем. заметки. 2016. Т. 100. Выпуск 3. С. 433–440.

[3] Сабитов К.Б. О знакоопределенности решения неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка // Известия вузов. Математика. 2017. №7. С. 57–66.

Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа

Сабитова Ю.К.

Стерлитамакский филиал БашГУ, г.Стерлитамак, Россия,
sabitovauk@rambler.ru

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + b_1(y)u(x,d_1) = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + b_2(y)u(x,d_2) = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) : \, 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β – заданные положительные действительные числа, $b_1(y)$, $b_2(y)$ – заданные непрерывные функции, причем существуют пределы $b_1(0+0) = b_1(0)$, $b_2(0-0) = b_2(0)$. Числа $b_1(0)$ и $b_2(0)$ не связаны здесь никакими условиями, d_1 и d_2 – заданные положительные числа.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u\,(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u\,(x,\, y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\,(D_+ \cup D_-)\,; \tag{2}$$

$$Lu\,(x,\, y) \equiv 0, \quad (x,\, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u\,(0,\, y) = u\,(1,\, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u\,(x,\, \beta) = \varphi\,(x)\,, u\,(x,\, -\alpha) = \psi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\varphi\,(x)$, $\psi\,(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi\,(0) = \varphi\,(1) = \psi\,(0) = \psi\,(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В работах [1], [2] впервые для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области изучена начально-граничная задача методом спектральных разложений, где установлен критерий единственности решения и доказана теорема существования этой задачи. Решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Задача (2) – (5) при $b(t) = 0$ изучена в работе [3], установлены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи. Само решение построено в виде суммы ряда Фурье.

В данной работе, на основе [3] – [5] установлен критерий единственности решения задачи (2) – (5) для нагруженного уравнения (1) в прямоугольной области D. Решение построено в виде суммы ряда Фурье.

[1] *К. Б. Сабитов.* Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // Докл. АМАН. Нальчик. 2009. Т.11. № 1. С. 66 – 73.

[2] *К. Б. Сабитов.* Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31 – 42.

[3] *К.Б. Сабитов, Е.П. Мелишева.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв.вузов.Матем. 2013. № 7. С. 62 – 76.

[4] *Ю. К. Сабитова.* Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 3. С. 393 – 406.

[5] *К. Б. Сабитов.* Задача Дирихле для дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков // Мат. заметки. Т. 97 (2), 262 – 276 (2015).

Асимптотика фундаментальной системы решений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений со спектральным параметром

Савчук А. М.

МГУ имени М. В. Ломоносова, г.Москва, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 17-11-01215).

В докладе речь пойдет о системах n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\mathbf{y}' = \lambda\rho(x)\mathrm{B}\mathbf{y} + \mathrm{A}(x)\mathbf{y} + \mathrm{C}(x,\lambda)\mathbf{y} \tag{1}$$

на отрезке $x \in [0,1]$ с комплексным параметром λ, $|\lambda| > \lambda_0$. Здесь $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^t$ — вектор-столбец, составленный из абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций. Будем считать, что коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям.

(i) Матрица B является диагональной и постоянной:
$\mathrm{B} = \mathrm{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$, а числа b_j — комплексными и ненулевыми.

(ii) Функции $\rho(x)$, $a_{jk}(x)$ и $c_{jk}(x,\lambda)$ переменной x (при каждом фиксированном λ) суммируемы по Лебегу на $[0,1]$.

(iii) Функция $\rho(x)$ вещественна и положительна почти всюду.

(iv) При $|\lambda| \to \infty$ $\int_0^1 |c_{jk}(x,\lambda)|\,dx \to 0$ для всех $1 \le j,\ k \le n$.

Мы покажем, что к системе вида (1) сводится любое уравнение высокого порядка с коэффициентами — распределениями $l(y) = \lambda^n y$, где

$$l(y) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} (\tau_k(x) y^{(m-k)}(x))^{(m-k)} +$$
$$+ i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \left[(\sigma_k(x) y^{(m-k-1)})^{(m-k)} + (\sigma_k(x) y^{(m-k)})^{(m-k-1)} \right],$$

а коэффициенты удовлетворяют условиям

$$|\tau_0|^{-1/2},\ |\tau_0|^{-1/2}\tau_k^{(-k)},\ |\tau_0|^{-1/2}\sigma_k^{(-k)} \in L^2[0,1].$$

Основным результатом является теорема об асимптотическом поведении фундаментальной матрицы решений $Y(x,\lambda)$ системы (1) при $|\lambda| \to \infty$ в различных секторах комплексной плоскости.

Вопросы равносходимости и базисности для оператора Штурма–Лиувилля и системы Дирака

Садовничая И. В.

МГУ имени М. В. Ломоносова, г.Москва, Россия

Будут рассматриваться операторы Штурма-Лиувилля и Дирака на конечном отрезке. Краевые условия предполагаются регулярными по Биркгофу.

Изучаются вопросы равносходимости спектральных разложений некоторой функции, построенных по данным операторам, с разложениями этой же функции, соответствующими невозмущенным операторам. При этом варьируются тройки пространств: пространства, которым принадлежит раскладываемая функция, пространства, содержащие потенциалы операторов, и пространства, по норме которых исследуется равносходимость.

Основные результаты получены путем исследования асимптотического поведения собственных и присоединенных функций, спектральной функции или резольвенты оператора.

Результаты о равносходимости применяются для доказательства базисности систем собственных и присоединенных функций операторов в различных пространствах.

Подробные доказательства всех представленных в докладе утверждений можно найти в [1].

[1] Садовничая И. В. Вопросы равносходимости для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва, 2016. 204 с.

Формула следа Гельфанда-Левитана возмущения оператора Лапласа на двумерной сфере

Садовничий В. А., Фазуллин З. Ю., Атнагулов А. И.
механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, ФМиИТ БашГУ, Уфа, Россия, БГАУ, Уфа, Россия

Рассмотрим

$$H_0 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

– оператор Лапласа-Бельтрами, действующий в пространстве $L_2(S^2)$. Работа посвящена доказательству формулы следа Гельфанда-Левитана для оператора $Hu = H_0u + Vu$, где оператор V – оператор умножения на функцию $\nu(\omega)$, $\omega \in S^2$. Впервые формула следа для оператора H_0, возмущённого нечётной функцией $\nu(\omega) \in C^\infty(S^2)$ была получена В. А. Садовничим, В. В. Дубровским, В. Е. Подольским в 1993–96гг. Позднее, в 1997–2005 гг., В. А. Садовничим и автором классическая формула следа Гельфанда-Левитана была получена для любой функции (не обязательно нечётной) $\nu(\omega)$ конечной гладкости, причем в работе [1] требуется лишь $\nu(\omega) \in C^2(S^2)$. Для дальнейшего ослабления требований на возмущения $\nu(\omega)$, как оказалось, необходимо более подробное исследование свойств ядра резольвенты, ядра приведённой резольвенты оператора H_0. На основе этих исследований и методики работы [1] доказана

Теорема 1. Пусть $v(w) \in W_2^1(S^2)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}[\mu_n^{(k)} - n(n+1) - c_0] =$$

$$\frac{1}{16\pi^3}\int_{S^2}\int_{S^2}\frac{v(w)v(w_0)}{\sqrt{1-(w,w_0)^2}}d\mu(w)d\mu(w_0) - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S^2} v^2(w)d\mu(w), \qquad (1)$$

где $\mu_n^{(k)}$ – собственные числа оператора H,

$$c_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} v(w)d\mu(w),$$

ряд в левой части формулы (1) сходится абсолютно.

[1] Садовничий В. А., Фазуллин З. Ю. Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора Лапласа на сфере S^2.// Матем. заметки. 2005. Т. 77(3). С. 434 -– 448.

Аналоги пространств Соболева функций на гильбертовом пространстве с трансляционно инвариантной мерой

Сакбаев В.Ж.
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

Для описания случайных блужданий в бесконечномерном гильбертовом пространстве E водятся меры на некотором кольце $\mathcal{R}$ подмножеств этого пространства, инвариантные относительно сдвигов ([1]-[3]) и относительно сдвигов и ортогональных преобразований ([2]). В силу теоремы А. Вейля введенным мерам присущи такие особенности, как отсутствие счетной аддитивности и сигма-конечности.

По мере λ из указанного класса пространство $\mathcal{H} = L_2(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbf{C})$ квадратично интегрируемых функций определяется как пополнение пространства классов эквивалентности функций ступенчатых. Для каждого вектора $h \in E$ определяется группа $\mathbf{S}_{th}$, $t \in R$, унитарных преобразований сдвига аргумента на вектор th в пространстве $\mathcal{H}$. Получены условия на вектор h, необходимые и достаточные для сильной непрерывности группы $\mathbf{S}_{th}$.

Для гауссовской меры ν на пространстве E с корреляционным оператором $\mathbf{D}$ определяется полугруппа $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}(t) = \int\limits_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h} d\nu(h)$, $t \geq 0$, и показано, что однопараметрическое семейство $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}(t)$, $t \geq 0$, образует полугруппу сжимающий самосопряженных преобразований пространства $\mathcal{H}$. Установлено, что если оператор $\mathbf{D}$ неотрицателен, а оператор $\mathbf{D}^{\alpha}$ при некотором $\alpha \in (0, 1/2)$ ядерен, то полугруппа $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}(t)$, $t \geq 0$, сильно непрерывна.

Пусть $\mathcal{E} = \{e_k\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов неотрицательного ядерного оператора $\mathbf{D}$. Элемент $\partial_j u \in \mathcal{H}$ будем называть производной функции $u \in \mathcal{H}$ по направлению e_j, если выполняется равенство $\lim\limits_{s \to 0} \| \frac{1}{s}(\mathbf{S}_{se_j} u - u) - \partial_j u \|_{\mathcal{H}} = 0$.

Теорема 1. Пусть оператор $\mathbf{D}$ является положительным и ядерным. Тогда для любого $t > 0$, для любых $j_1, ..., j_l \in \mathbf{N}$ и любого $u \in \mathcal{H}$ элемент $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}(t)u$ имеет производную $\partial_{j_1} ... \partial_{j_l} \mathbf{U}_{\mathbf{D}}(t)u$.

Определим пространство $C^{\infty}_{\mathbf{D}}(E)$ как линейную оболочку пространств $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}(t)\mathcal{H}$, $t > 0$. В силу теоремы 1 любая функция из пространства $C^{\infty}_{\mathbf{D}}(E)$ имеет производную любого порядка по любой конечной совокупности базисных направлений $j_1, ..., j_l \in \mathbf{N}$. Но существуют функции пространства $C^{\infty}_{\mathbf{D}}(E)$, не являющиеся непрерывными на E.

Для каждого $l = 1, 2$ определим пространство $W^l_{2,\mathbf{D}}(E)$:

$$W^l_{2,\mathbf{D}}(E) = \{u \in \mathcal{H} : \ \forall \ j \in \mathbf{N} \ \exists \ \partial^l_j u \in \mathcal{H}; \ \sum_{j=1}^{\infty} d_j \|\partial^l_j u\|^2_{\mathcal{H}}\},$$

снабдив его нормой $\|u\|_{W^l_{2,\mathbf{D}}(E)} = (\|u\|^2_{\mathcal{H}} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} d_j \|\partial^l_j u\|^2_{\mathcal{H}})^{\frac{1}{2}}$. Пространства $W^l_{2,\mathbf{D}}(E)$ при $l = 1, 2$ являются гильбертовыми.

Теорема 2. Пусть оператор $\mathbf{D}$ является положительным и ядерным. Тогда если оператор $\mathbf{D}^{\alpha}$ является ядерным при некотором $\alpha \in (0, 1/2)$ (при $\alpha \in (0, 1/4)$), то пространство $C^{\infty}_{\mathbf{D}^{\alpha}}(E)$ плотно в пространстве $W^1_{2,\mathbf{D}}(E)$ (в пространстве $W^2_{2,\mathbf{D}}(E)$).

Теорема 3. Пусть оператор $\mathbf{D}$ является невырожденным и ядерным. Тогда если оператор $\mathbf{D}^{\alpha}$ является ядерным при некотором $\alpha \in (0, 1/4)$, то пространство $W^2_{2,\mathbf{D}}(E)$ является областью определения генератора $\Delta_{\mathbf{D}}$ полугруппы $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}$, причем

$$\Delta_{\mathbf{D}} u = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \partial^2_j u \ \forall \ u \in W^2_{2,\mathbf{D}}(E).$$

[1] Baker R. "Lebesgue measure"on R^{∞}. Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023-1029.

[2] Сакбаев В.Ж. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ. 2017. Т. 191. № 3. (принята в печать)

[3] Сакбаев В.Ж. Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относительно сдвигов. Труды МФТИ. 2016. Т.8. № 2. С. 134–141.

Существование решений рациональной задачи на собственные значения

Самсонов А.А., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Обозначим $\Omega = (0, 1)$, $\overline{\Omega} = [0, 1]$, $\Lambda = (0, \infty)$. Зададим непрерывные ненулевые функции $p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$, и положительные числа σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим дифференциальную рациональную задачу на собственные значения: найти числа $\lambda \in \Lambda$ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, такие, что

$$-(p(x)u'(x))' + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda}{\lambda - \sigma_i}\, \delta(x - x_i) u = \lambda r(x) u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, дифференциальное уравнение понимается в обобщенном смысле.

Доказано, что рационльная задача на собственные значения имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, с предельной точкой в бесконечности, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательности собственных значений соответствует система собственных функций u_k, $k = 1, 2, \ldots$ Установлены результаты о числе собственных значений на произвольном полуинтервале $(\alpha, \beta] \subset \Lambda$. Эти результаты обобщают и развивают результаты, полученные в работах [1, 2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10299).

[1] Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. Saarbrücken: LAP Lambert Acad. Publ., 2011. 256 с.

[2] Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a beam with elastically attached load // Lobachevskii J. Math. 2016. V. 37. № 5. P. 597–609.

[3] Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединенным грузом // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 418–432.

Индекс дефекта и спектр некоторых обобщённых Якобиевых матриц

Сафонова Т.А., Тагирова Р.Н.
САФУ имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия
e-mail: t.safonova@narfu.ru, tagirova_rena@mail.ru

Известно, что полная ортонормированная система функций Чебышёва-Эрмита $\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ является базисом матричного представления минимального оператора, порождённого симметрическим дифференциальным выражением с полиномиальными коэффициентами в гильбертовом пространстве $L^2(R)$, а соответствующая бесконечная эрмитова матрица является обобщённой якобиевой матрицей (подробнее см. [1]). Такая связь между дифференциальными операторами и операторами, порождёнными соответствующими якобиевыми матрицами в гильбертовом пространстве l^2, позволяет изучать спектральные свойства дифференциальных и разностных операторов. В данной работе приводятся примеры дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами и с известными спектральными свойствами и устанавливаются спектральные характеристики соответствующих им операторов, порождённых обобщёнными якобиевыми матрицами.

I. Рассмотрим дифференциальный оператор, порождённый в пространстве $L^2(R)$ выражением

$$l[y] = y^{(4)} + \frac{i}{2}\{(xy'')' + (xy')''\}.$$

Известно, что индекс дефекта этого оператора равен $(2,0)$ (см. [2]). Символами c_{jk} обозначим элементы обобщённой якобиевой матрица J, соответствующей минимальному оператору, порождённому выражением $l[y]$ в пространстве l^2. Несложно установить, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$, а все ненулевые элементы матрицы J вычисляются по формулам

$$c_{n,n} = 3(2n^2 + 2n + 1), \quad c_{n,n+2} = -(2-i)(3+2n)\sqrt{(n+1)(n+2)},$$

$$c_{n,n+4} = (1-i)\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, матрица J порождает в гильбертовом пространстве l^2 минимальный оператор с разными дефектными числами ($n_+ = 2$ и $n_- = 0$).

II. Известно, что индекс дефекта минимального оператора, порождённого в пространстве $L^2(R_+)$ выражением

$$l[y] = y^{(4)} + (xy')'$$

равен $(3,3)$, а интервал $(-\infty, 0]$ принадлежит существенной части спектра этого оператора (см. [2]). Поэтому индекс дефекта оператора, порождённого в пространстве l^2 якобиевой матрицей J с элементами c_{jk} такими, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ и

$$c_{n,n} = \frac{3}{4}(2n^2 + 2n + 1), \quad c_{n,n+1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(n+1)^{3/2}$$

$$c_{n,n+2} = -\frac{1}{2}(2n+3)\sqrt{(n+1)(n+2)},$$

$$c_{n,n+3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$c_{n,n+4} = \frac{1}{4}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

(все неотмеченные элементы матриц J равны 0) равен $(1,1)$, а интервал $(-\infty,0]$ принадлежит существенной части спектра этого оператора. Таким образом, матрица J порождает в гильбертовом пространстве l^2 минимальный оператор с ненулевыми дефектными числами ($n_+ = n_- = 1$) и не пустым непрерывным спектром.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору К.А. Мирзоеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

[1] А.Г. Костюченко, К.А. Мирзоев Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами // Функц. анализ и его прил., 1999. 33/1. С. 30–45.

[2] B. Schultze Problems concerning the deficiency indices of singular self-adjoint ordinary differential operators// Proc. the Third AMC 2000, World Scientific Publishing Co., 2002. PP. 495-500.

Асимптотическое поведение четных канонических произведений со слабыми неправильностями в распределении множества корней, имеющего положительную плотность

Селиверстов В.Н.

МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Получены неулучшаемые двусторонние оценки логарифма модуля четного канонического произведения $L_\Lambda(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - z^2\lambda_n^{-2})$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ — возрастающая последовательность положительных чисел, имеющая плотность $D = \lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda_n$. Обозначим $n_\Lambda(x)$ количество элементов последовательности Λ на отрезке $[0,x]$. Предполагается, что на луче $(x_0,+\infty)$ задана дифференцируемая правильно меняющаяся функция A, удовлетворяющая условиям

$$A(x) \nearrow +\infty, \quad A(x)/x \searrow 0 \text{ при } x \to +\infty,$$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} xA'(x)/A(x) = p \in [0,1].$$

Положим

$$B(r) = \int\limits_{A(r)}^{r} \frac{A(t)}{t}\,dt, \quad k_1(A) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{B(r)}{A(r)\ln\frac{r}{A(r)}},$$

$$k_0(A) = \underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{B(r)}{A(r)\ln\frac{r}{A(r)}}.$$

Теорема. Пусть конечны верхний и нижний пределы

$$a = \underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{n_\Lambda(x) - Dx}{A(x)} \le \overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{n_\Lambda(x) - Dx}{A(x)} = b. \tag{1}$$

Тогда справедливы оценки

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln|L_\Lambda(r)|}{A(r)\ln\frac{r}{A(r)}} \le b - a + 2\left(b^+ k_1(A) - b^- k_0(A)\right),$$

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{-\ln \widehat{L}_\Lambda(r)}{A(r)\ln\frac{r}{A(r)}} \le b - a + 2\left(a^- k_1(A) - a^+ k_0(A)\right),$$

где $\widehat{L}_\Lambda(r) = \frac{|L_\Lambda(r)|}{\mathrm{dist}(r,\Lambda)}$, второе неравенство выполняется при дополнительном условии отделенности друг от друга элементов последовательности Λ: $\underline{\lim}_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$.

Результаты теоремы неулучшаемы на классе последовательностей Λ, задаваемых соотношениями (1).

Случай $b > 0$, $a = -b$ был исследован в [1], но оценки были менее точными, поскольку допускались функции A из более широкого класса. Случай $a = b$ был исследован в [2].

Получены также неулучшаемые на классе последовательностей Λ, заданном условиями (1) оценки сверху величин

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln|L(re^{i\varphi})| - \pi D r \sin\varphi}{A(r)}$$

при любых $\varphi \in (0, \pi)$.

[1] А. М. Гайсин, Д. И. Сергеева, "Целые функции с заданной последовательностью нулей, имеющие правильное поведение на вещественной оси. I" Сиб. матем. журн., 48:5 (2007), 995–1007.

[2] А. А. Юхименко, "Полнота и базисные свойства систем экспонент в весовых пространствах $L_p(-\pi,\pi)$", Матем. заметки, 81:5 (2007), 776–788.

Обратные задачи по отысканию сомножителей правых частей вырождающегося параболо - гиперболического уравнения, зависящих от времени

Сидоров С.Н.
Стерлитамакский филиал ИСИ РБ, Стерлитамакский филиал БашГУ,
г. Стерлитамак, Россия

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_t - b^2 u, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) |\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\},$$

где $m > 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа и следующие обратные задачи.

Задача 1. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{6}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leq t \leq \beta, \tag{7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ – заданные функции, x_0 – заданная точка из интервала $(0,l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (2), (4) – (6) и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0], \tag{8}$$

$$u(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leq t \leq 0, \tag{9}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ – известные функции.

Задача 3. *Найти функции* $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, *удовлетворяющие условиям* (2) – (9), *здесь* $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1, 2$ – *заданные функции.*

Отметим, что исследование задач 1 – 3 базируется на прямой начально-граничной задаче (2), (4) – (6), изученной в работе [1]. В работах [2, 3] для уравнения (1) были изучены обратные задачи по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$.

В данной работе изучены задачи 1 – 3 для уравнения (1). На основании теории интегральных уравнений для этих задач доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений.

[1] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 137. С. 26–60.

[2] Сидоров С.Н. Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 2014. № 25 (196). Вып. 37. С. 45–57.

[3] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

О стационарных инвариантных подмоделях ранга два

Сираева Д.Т.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

Уравнения газовой динамики

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ &\rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,\\ &p_t + (\vec{u}\cdot\nabla)p + A(p,\rho)\mathrm{div}\vec{u} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{u}$ – скорость, ρ – плотность, p – давление, $A = \rho f_\rho$, $p = f(\rho, S)$ – уравнение состояния, наиболее глубоко изучены методами группового анализа [1]. В данной работе рассматриваются уравнения газовой динамики (1) с уравнением состояния $p = f(\rho) + g(S)$, полученного при групповой классификации [1]. Уравнения газовой динамики при данном уравнении состояния допускают 12-и мерную алгебру Ли, для которой оптимальная система неподобных подалгебр построена [2]. В построенной системе содержится 309 подалгебр, из них 40 - двумерные.

Для четырех двумерных подалгебр 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 [2] построены подмодели стационарного типа в каноническом виде. Представления инвариантных решений для получения канонического вида подмоделей вычислены по алгоритму из работ [3], [4]. Еще предстоит построить 21 подмодель ранга два стационарного типа.

[1] Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. Прикладная математика и механика, Москва: РАН, Т. 58, Вып. 4, 1994. С. 30–55.

[2] Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов. Уфимский математический журнал. Т. 6, № 1 (2014) С. 94–107.

[3] Мамонтов Е. В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики. Прикладная механика и техническая физика. Т. 40, №2, 1991. С. 50–55.

[4] Хабиров С. В. Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду. Математические заметки. Т. 66, Вып. 3, 1999. С. 439–444.

Операторы преобразования в работах А.Ф. Леонтьева и их дальнейшее развитие

Ситник С.М.

Воронежский институт МВД России, г.Воронеж, Россия

В докладе рассматриваются некоторые работы А.Ф.Леонтьева, которые относятся к теории операторов преобразования и смежным вопросам. В [1] рассматривается невозможность построения классических операторов преобразования типа Вольтерра для дифференциальных операторов высших порядков, эти вопросы также изучались в работах Л.А. Сахновича и В.И. Мацаева, см. [2]–[4]. В работах [5]–[6] при рассмотрении представлений целых функций рядами Дирихле с комплексными показателями получены результаты, которые на языке операторов преобразования могут быть сформулированы как изучение разложений по собственным и присоединенным функциям одномерного возмущения оператора интегрирования. В классической работе [7] были введены операторы Гельфонда–Леонтьева, изучение которых стало важным разделом теории дробного интегродифференцирования и связано с представлением операторов преобразования в виде рядов аналитических функций. Рассматриваются также некоторые современные исследования в области операторов преобразования [8]–[12].

[1] Леонтьев А.Ф. Оценка роста решения одного дифференциального уравнения. СМЖ. 1960. Т.1, № 3, С.456–487.

[2] Хромов А.П. Конечномерные возмущения Вольтерровых операторов. Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 10, С. 3–163.

[3] Ситник С.М. Операторы преобразования и их приложения. В сб. Исследования по современному анализу и математическому моделированию. (Редакторы Коробейник Ю.Ф., Кусраев А.Г.). 2008. Владикавказ, С. 226–293.

[4] Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a Survey. 2012. arXiv:1012.3741, 141 P.

[5] Леонтьев А.Ф. О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле. Мат. сб. 1966. Т. 71 (112), № 1. С. 132–144.

[6] Леонтьев А.Ф. О представлении целых функций некоторыми общими рядами. Мат. сб. 1966. Т. 71 (113), № 1. С. 3–13.

[7] Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. Об одном обобщении ряда Фурье. Мат. сб. 1951. Т. 29(71), № 3. С. 477–500.

[8] Sitnik S.M. Buschman–Erdélyi transmutations, classification and applications. Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). 2013. Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, P. 171–201. (arXiv version — http://arxiv.org/abs/1304.2114v1).

[9] Ситник С.М. Обзор основных свойств операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Челябинский физико–математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 63–93.

[10] Ситник С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1582–1583.

[11] Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи. ДАН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1326–1330.

[12] Катрахов В.В., Ситник С.М. Композиционный метод построения B–эллиптических, B–гиперболических и B–параболических операторов преобразования. ДАН СССР. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.

О приближенном построении центрального многообразия в задаче о точках равновесия дифференциальных уравнений

Сметанин Г.М.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В качественной теории дифференциальных уравнений, в нелинейной динамике и приложениях, важную роль играет теорема о центральном многообразии, восходящая к Плиссу В.А. и Келли А.(см [1],[2],[3]) . Эта теорема позволяет перейти от многомерного дифференциального уравнения к уравнению меньшего порядка, содержащему основные особенности исходного уравнения.

В настоящем докладе обсуждается вопрос о приближенном построении центрального многообразия для дифференциального уравнения вида:

$$\frac{dx}{dt} = A_0x + a_2(x) + a_3(x)... \ , x \in R^n$$

где A_0 - квадратная матрица, $a_m(x)$ - нелинейные однородные вектор-функции порядка m, m $>$ 1. Предполагается, что A_0 имеет простое собственное значение 0 или пару простых собственных значений вида $\pm\omega_0 i$. Центральное многообразие ищется в виде:

$$W_c = \{x : x = u + \psi(u)\},$$

где

$$u = Px, \psi : E_0 \to E^0,$$

здесь E_0 - собственное подпространство оператора A_0, соответствующее собственному значению 0 или $\pm\omega_0 i$, E^0 - дополненное собственное подпространство, $P : R^n \to E_0$ - спектральный проектор. В докладе предлагается и обосновывается алгоритм построения вектор-функций $\psi(u)$.

[1] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2002. 560 с.

[2] Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1977. 304 с.

[3] Kelley A. The stable, center-stable, center-unstable, unstable manifolds.

Существование решений спектральной задачи с нелинейным вхождением спектрального параметра

Соловьёв С.И., Соловьёв П.С.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Обозначим $\Omega = (0,1)$, $\overline{\Omega} = [0,1]$, $\Lambda = (0,\infty)$. Зададим непрерывные функции $p(\mu,x) > 0$, $q(\mu,x) \geq 0$, $r(\mu,x) \geq 0$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$. При фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ функции $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, предполагаются невозрастающими, функция $r(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, предполагается неубывающей. При каждом фиксированном $\mu \in \Lambda$ функция $r(\mu,x)$, $x \in \overline{\Omega}$, предполагается ненулевой.

Рассмотрим дифференциальную нелинейную задачу на собственные значения: найти числа $\lambda \in \Lambda$ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, такие, что

$$-(p(\lambda,x)u'(x))' + q(\lambda,x)u(x) = \lambda r(\lambda,x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Дифференциальное уравнение понимается в обобщенном смысле.

Сформулируем вспомогательную дифференциальную линейную задачу на собственные значения: найти числа $\gamma(\mu) \in \Lambda$ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, такие, что

$$-(p(\mu,x)u'(x))' + q(\mu,x)u(x) = \gamma(\mu)r(\mu,x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Здесь дифференциальное уравнение также понимается в обобщенном смысле. Линейная задача на собственные значения имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений $\gamma_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, с предельной точкой в бесконечности, $0 < \gamma_1(\mu) <$

$\gamma_2(\mu) < \ldots < \gamma_k(\mu) < \ldots$, $\gamma_k(\mu) \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательности собственных значений соответствует система собственных функций u_k, $k = 1, 2, \ldots$

Установлено, что нелинейная задача на собственные значения имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, с предельной точкой в бесконечности, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательности собственных значений соответствует система собственных функций u_k, $k = 1, 2, \ldots$ Каждое собственное значение λ_i является единственным корнем уравнения $\mu - \gamma_i(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$, $i \geq 1$. Эти результаты обобщают и развивают результаты, полученные в работах [1, 2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10299).

[1] Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. Saarbrücken: LAP Lambert Acad. Publ., 2011. 256 с.

[2] Соловьёв С.И. Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от параметра // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 955–962.

[3] Соловьёв С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 931–946.

Параметризованные произвольными функциями семейства симметрий и формальные интегралы дискретных уравнений

Старцев С.Я.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

В недавней работе [1] была высказана гипотеза о том, что существование симметрий, зависящих от произвольных функций, является необходимым и *достаточным* условием интегрируемости по Дарбу (т.е. наличия полного набора нетривиальных интегралов) как для разностных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Нетрудно показать, что ранее полученные различными авторами результаты в совокупности доказывают эту гипотезу в случае скалярных дифференциальных уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y).$$

Используя метод каскадного интегрирования Лапласа и результаты работ [2, 3], формальную версию вышеуказанной гипотезы можно также доказать для дифференциально-разностных уравнений вида

$$(u_{i+1})_x = F\left(x, u_i, u_{i+1}, (u_i)_x\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial (u_i)_x} \neq 0 \tag{1}$$

и чисто разностных уравнений на квадратной решетке

$$u_{i+1,j+1} = F(u_{i,j}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1}), \qquad \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \frac{\partial F}{\partial u_{i+1,j}} \frac{\partial F}{\partial u_{i,j+1}} \neq 0 \tag{2}$$

при условии, что уравнение (1) однозначно разрешимо относительно $(u_i)_x$, а уравнение (2) однозначно разрешимо относительно любого из аргументов его правой части. В нестрогом виде эту формальную версию гипотезы можно сформулировать следующим образом: уравнение допускает зависящие от произвольных функций симметрии по обеим характеристикам тогда и только тогда, когда по каждой из характеристик существуют операторы (два разностных оператора для уравнения (2), а для уравнения (1) – разностный и дифференциальный), переводящие симметрии в интегралы этого уравнения. Более аккуратная формулировка данного утверждения и его доказательство приведены в [4].

[1] Gubbiotti G., Levi D., Scimiterna C. On partial differential and difference equations with symmetries depending on arbitrary functions // Acta Polytechnica. 2016. Vol. 56. № 3. P. 193–201.

[2] Адлер В.Э., Старцев С. Я. О дискретных аналогах уравнения Лиувилля // ТМФ. 1999. Т. 121. № 2. С. 271–284.

[3] Старцев С.Я. Интегрируемые по Дарбу дифференциально-разностные уравнения, допускающие интеграл первого порядка // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4. № 3. С. 161—176.

[4] Startsev S. Ya. On relationships between symmetries depending on arbitrary functions and integrals of discrete equations // arXiv:1611.02235. 2016. 8 pp.

Об одном неравенстве типа Маршо

Тилеубаев Т.Е.
Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан.

Пусть $1 < p < \infty$. Через $L_p^{\alpha,\beta}$ обозначим банахово пространство состоящее из всех измеримых функций f на отрезке $[-1,1]$ с конечной нормой $\|f\|_p = (\int_{-1}^1 |f(x)|^p(1-x)^\alpha(+x)^\beta)^{\frac{1}{p}}$. Пусть $P_n^{\alpha,\beta}(x)$,$n \in Z_+$ ортогональные многочлены Якоби.

В пространстве $L_p^{\alpha,\beta}$,$1 < p < \infty$ введем оператор обобщенного сдвига Якоби[1] следующим образом:

$$T^s f(t) = \int_{-1}^1 f(z)K(t,s,z)(1-z)^\alpha(1+z)^\beta dz, \quad -1 < t,s,z < 1,$$

где $K(t,s,\theta)$ обладают следующими свойствами

$$K(t,s,\theta) \geq 0, 0 < t,s,\theta < \pi,$$

$$\int_{-1}^1 K(t,s,z)(1-z)^\alpha(1+z)^\beta dz = 1.$$

Для функции $f \in L_p^{\alpha,\beta}$ обобщенные разности k-го порядка с шагом h и обобщенные модули гладкости определяются следующими формулами [2] $\triangle_h^1 f(t) = T^s f(t) - f(t), \triangle_h^k f(t) = \triangle_h^1(\triangle_h^{k-1} f(t))$ для всех $k = 2,3,...,$

$$\Omega_k(f,\delta)_p = \sup_{0<h<\delta} \|\triangle_h^k f(\cdot)\|_p.$$

Пусть $\mathbf{w}_p^{m\alpha,\beta}$ пространства Соболева

$$\mathbf{w}_p^{m\alpha,\beta} := \{f \in L^{p,\alpha,\beta} : B^j f \in L^{p,\alpha,\beta}, j = 1,2,...m\}$$

где

$$B = \frac{-1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d}{dx}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}$$

-дифференциальный оператор Якоби. Следующие теоремы дают возможности установить взаимосвязь между обобщенными модулями гладкости различных порядков.

Теорема 1.Если $f \in L_p^{\alpha,\beta}$, $1 < p < \infty$, то для $0 < h \leq \frac{1}{2}$

$$\Omega_k(f,h)_p \leq M_{p,k} h^{2k} \left\{\int_h^1 t^{-2kp-1}\Omega_{k+1}^p(f,t)_p dt\right\}^{\frac{1}{p}}, 1 < p \leq 2,$$

$$\Omega_k(f,h)_p \le M_{p,k} h^{2k} \left\{ \int_h^1 t^{-4k-1} \Omega_{k+1}^2(f,t)_p dt \right\}^{\frac{1}{2}}, 2 \le p < \infty.$$

Теорема 2.Если

$$\int_1^0 t^{-2r-1} \Omega_{k+1}(f,t)_p dt < \infty,$$

то функция f принадлежит пространству Соболева $\mathbf{w}_p^{m\alpha,\beta}$ и справедливы неравенства

$$\Omega_k(B^r f,h)_p \le M_{p,k} h^{2k} \left\{ \int_h^1 t^{-(2k+2r)p-1} \Omega_{k+1}^p(f,t)_p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \int_0^h t^{-2r-1} \Omega_{k+1}(f,t)_p dt, 1 < p \le 2,$$

$$\Omega_k(B^r f,h)_p \le M_{p,k} h^{2k} \left\{ \int_h^1 t^{-2(2k+2r)-1} \Omega_{k+1}^2(f,t)_p dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \int_0^h t^{-2r-1} \Omega_{k+1}(f,t)_p dt, 2 \le p < \infty.$$

[1] Gasper G. Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel//Ann. Math.1972.Vol 95.No. 2,pp. 260-280.

[2] Platonov S. S. Fourier -Jacobi harmonic analysis and approximation of functions//Izb. RAN ser Mat. 2014, Vol.78, No.1, pp.117-166.

Протокол квантовой криптографии с псевдослучайным выбором базисов

Трегубов П.А.[1], Трушечкин А.С.[1,2,3]

[1]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г.Москва, Россия

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова, г.Москва, Россия

[3]Национальный исследовательский технологический институт «МИСиС», г.Москва, Россия

В докладе анализируется новый протокол квантового распределения ключей, отличительной чертой которого является использование псевдослучайных квантовых состояний. Опишем постановку задачи. Пусть имеются законные участники связи («сторона А» и «сторона Б»), которые соединены квантовым каналом, к которому противник имеет полный доступ, и классическим каналом. Противник может прослушивать классический канал, но не может изменять посылаемые по нему сообщения или посылать свои. Законные участники дополнительно обладают общим секретным ключом $k \in \{0,1\}^l$ (т.е. l — длина ключа). Задачей законных участников связи является генерация более длинного общего секретного ключа (т.е. двоичной строки).

Законные участники также используют общий генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ), на вход которого подаётся начальный ключ k и генераторы (истинно) случайных чисел (ГСЧ). Будем использовать следующее обозначение: $|\varphi\rangle = \cos\varphi|0\rangle + \sin\varphi|1\rangle$, где $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — стандартный базис пространства $\mathbb{C}^2$. Опишем предлагаемый нами протокол квантового распределения ключей.

1. Используя общий ключ k и ГПСЧ, законные участники связи генерируют общую последовательность углов $\varphi_1(k), \ldots, \varphi_N(k)$, где $\varphi_i(k) \in \{\frac{\pi j}{M}\}_{j=0}^{M-1}$, $M = 2^m$ при некотором $m \geq 2$.

2. Сторона А генерирует с помощью ГСЧ случайные биты $x_1, \ldots, x_N$.

3. Сторона А посылает стороне Б по квантовому каналу квантовые состояния (кубиты)
$|\varphi_1(k) + \frac{\pi}{2}x_1\rangle, \ldots, |\varphi_N(k) + \frac{\pi}{2}x_N\rangle$. Сторона Б измеряет их в базисах $\{|\varphi_i(k)\rangle, |\varphi_i(k) + \frac{\pi}{2}\rangle\}$, $i = 1, \ldots, n$, и записывает результаты (0 и 1 соответственно) в переменные y_i.

4. Строки x и y являются «сырыми ключами». В идеальном случае отсутствия шумов и отсутствия перехвата они должны совпадать. Однако вследствие как естественных шумов, так и, возможно, перехвата, эти строки различаются. Поэтому законные участники, как обычно в протоколах квантового распределения ключей, проводят процедуры исправления ошибок и усиления секретности и получают общий секретный ключ.

В отличие от классического протокола BB84, здесь базисы, в которых сторона А посылает состояния и в которых сторона Б их измеряет, всегда совпадают, поскольку генерируются ГПСЧ с общим для сторон А и Б входом k. Это позволяет избежать отсеивания позиций с несовпавшими базисами, в результате которого в BB84 теряется примерно половина сырого ключа. В то же время для противника, который не знает начальный ключ k, эта последовательность базисов похожа на случайную, и он не может её заранее предсказать. Поэтому, перехватывая кубиты и пытаясь угадать базисы, противник с неизбежностью будет допускать ошибки и вносить шум в сырой ключ y, в результате чего его действия будут обнаружены.

Другим отличием этого протокола от BB84 является использование не двух, а большого числа базисов, что создаёт дополнительную неопределённость для противника. Это также возможно вследствие того, что базисы выбираются сторонами не случайно и независимо друг от друга (при большом числе базисов это привело бы к отсеиванию ещё бо́льшего количества позиций), а псевдослучайно и согласованно.

Однако для доказательства стойкости этого протокола необходим анализ возможностей противника по угадыванию элементов псевдослучайной последовательности. В отличие от анализа псевдослучайных последовательностей в классической криптографии, здесь, с одной стороны, предполагается, что противник обладает неограниченными вычислительными мощностями, но, с другой стороны, его возможности ограничены квантовомеханическим принципом неопределённости. Данному анализу, а также другим вопросам взлома генераторов псевдослучайных квантовых состояний и будет посвящён доклад.

Работа А.Т. выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект МК-2815.2017.1) и программы ОМН РАН.

Структурные характеристики функций из L_2 имеющие производные в смысле Вейля

Тухлиев К.

Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова, Худжанд, Таджикистан, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru

Полученные в этой работе результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля [1]. Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f, с конечной нормой. Рассмотрим для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big)$, производную порядка $\alpha \geq 0$ в смысле Вейля, определённую равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left\{ a_k \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\}.$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 0$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$ $(\alpha \geq 0)$.

Если $s_{n-1}(f^{(\alpha)},x)$ $(\alpha\geq 0)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)}\in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)})=\inf\left\{\|f^{(\alpha)}-T_{n-1}\|:T_{n-1}\in\Im_{2n-1}\right\}=$$

$$\|f^{(\alpha)}-s_{n-1}(f^{(\alpha)})\|=\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f)=a_k^2(f)+b_k^2(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты функции f. Пусть $\Omega_m(f;t)\overset{def}{=}\sup\left\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|:\ 0<h\leq t\right\}$, которую назовем *обобщённым модулем непрерывности m-го порядка* функции $f\in L_2$, определяемой через функции Стеклова [2]. Всюду, далее полагаем $\operatorname{sinc} t:=\left\{\sin t/t,\ \text{если}\ t\neq 0,\ 1,\ \text{если}\ t=0\right\}$. Введём в рассмотрение экстремальную характеристику

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m,q,h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq const}}\left\{E_{n-1}(f)\left(\int_0^h\Omega_m^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{-1/p}\right\},$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\geq 0$, $p\in\mathbb{R}_+$, $0<h\leq\pi/n$, $q\geq 0$ — весовая функция на отрезке $[0,h]$.

Теорема. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\geq 0$, $0<p\leq 2$, $0<h\leq\pi/n$, $n\in\mathbb{N}$, q – весовая функция на отрезке $[0,h]$. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{A_{n,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1}\leq\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m,q,h)\leq\left\{\inf_{n\leq k<\infty}A_{k,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1},$$

где $A_{k,m,\alpha,p}(q,h)=\left(k^{\alpha p}\int_0^h(1-\operatorname{sinc} kt)^{mp}\,q(t)dt\right)^{1/p},\quad k\geq n.$

[1] Weyl H. // *Vierteljahresschrift der Naturschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. V.62. P. 296-302.*

[2] Тухлиев К. // *Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т.22, №1. С. 127-143.*

Краевая задача Гильберта для полуплоскости с завихрением в конечном числе точек контура

Фатыхов А.Х., Шабалин П.Л.
КГАСУ, г.Казань, Россия

Краевая задача Гильберта для полуплоскости D рассмотрена в случае, когда коэффициенты краевого условия

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = c(t),\ t \in L = \partial D,$$

имеют конечное число особых точек t_k, $k = \overline{1,n}$, в которых $\nu(t)$ аргумент функции $G(t) = a(t) - ib(t)$ имеет разрывы второго рода, а $|G(t)| \in H_\mu$ на L.

Именно, в окрестности точки t_k, имеет место представление

$$\nu(t) = \sum_{k=1}^{n} \nu_k(t) + \widetilde{\nu}(t) \quad \nu_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu_k^+}{|t-t_k|^{\rho_k}} + \widetilde{\nu}(t), & t < t_k, \\ \dfrac{\nu_k^-}{(t-t_k)^{\rho_k}} + \widetilde{\nu}(t), & t_k < t, \end{cases}$$

для некоторых чисел ν_k^+, ν_k^-, ρ_k, $0 < \rho_k < 1$, $k = \overline{1,n}$, функция $\widetilde{\nu}(t) \in H_\mu(L)$. Для такой постановки задачи Гильберта получены формулы общего решения однородной и неоднородной задач и проведено исследование разрешимости в классе ограниченных аналитических в верхней полуплоскости функций. В частности, доказана

Теорема. Однородная краевая задача

a) не имеет нетривиальных ограниченных решений, если

$$\nu_j^- \cos(\pi\rho_j) - \nu_j^+ \le 0, \quad \nu_j^- - \nu_j^+ \cos(\pi\rho_j) \le 0, \quad j = \overline{1,n},$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое;

b) имеет единственное решение, если

$$\nu_j^- \cos(\pi\rho_j) - \nu_j^+ = 0, \quad \nu_j^- - \nu_j^+ \cos(\pi\rho_j) = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

c) имеет бесконечное множество решений, если для $j = \overline{1,l}$, $l \le n$, выполнены условия

$$\begin{cases} \nu_j^- \cos(\pi\rho_j) - \nu_j^+ > 0, \\ \nu_j^- - \nu_j^+ \cos(\pi\rho_j) > 0. \end{cases}$$

Метод построения решения основан на аналитическом выделении особенностей краевого условия, которое, как обычно записываем в виде $Re[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = c(t)/|G(t)|$. При исследовании существования и числа решений задачи применяется аппарат теории целых функций. Работа продолжает исследования авторов [1], [2].

[1] Фатыхов А.Х., Шабалин П.Л. *Однородная краевая задача Гильберта с бесконечным индексом на окружности.* Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2016, 16:2, 174–180.

[2] A. Kh. Fatykhov, R. B. Salimov, and P. L. Shabalin. *Homogeneous Hilbert Boundary-Value Problem with Several Points of Turbulence.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, Vol. 38, No. 3, pp. 414–419.

Применение теоремы о порождающих в одном кольце целых функций

Филиппов В.Н.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г.Нижний Новгород, Россия

Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{C}^n$ с вершиной в начале, $H_0(r)$ – опорная функция пересечения замкнутого шара единичного радиуса с центром в начале с конусом Γ, $E(\Gamma)$ – множество целых функций первого порядка конечного типа, имеющих минимальный тип в сопряженном для Γ конусе.

Теорема. *Функции $f_1, \ldots, f_q \in E(\Gamma)$ порождают кольцо $E(\Gamma)$, т.е.*

$$\{f_1 g_1 + \ldots + f_q g_q\} = E(\Gamma), \quad g_i \in E(\Gamma),\ j = 1, \ldots, q,$$

тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|f_1(z)| + \ldots + |f_q(z)| \geq C_1 \exp\left(-\left(C_2 H_0(z) + \varepsilon\right)|z|\right),\ z \in \mathbb{C}^n,$$

где $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$, $C_2 = C_2(\varepsilon) > 0$.

В числе первых исследований о порождающих следует назвать работу [1] (в пространстве аналитических ограниченных в единичном круге функций), в [2] речь идет о кольце целых функций экспоненциального типа, в [3] рассматривается более общее кольцо аналитических на открытом множестве функций многих комплексных переменных, в [4] решена задача о порождении указанного кольца счетным набором функций.

Заметим, что в отличие от пространств в перечисленных работах пространство $E(\Gamma)$ непредставимо как индуктивный предел банаховых пространств. Схема доказательства теоремы взята из работы [5].

Полученный результат применяется при доказательстве теоремы о разрешимости неоднородной системы уравнений свертки в терминах характеристических функций.

[1] Carleson L. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem // Ann. Math. 1962. V. 76, 3. P.547–559.

[2] Kelleher J.J., Taylor B.A. An application jf the corona theorem to some ring of the entire functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, 2. P.246–249.

[3] Hërmander L. Generators for some rings of entire functions of analytic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, 6. P.943–949.

[4] Напалков В.В., Кузбеков Т.Т. О порождающих в некоторых кольцах аналитических функций // Докл. РАН. 1992. Т. 325, №5. С.919–922.

[5] Напалков В.В., Филиппов В.Н. Порождающие в кольце целых функций первого порядка и минимального типа в угле // Докл. РАН. 2014. Т. 456, №2. С.140–142.

Метод построения пар Лакса для интегрируемых уравнений гиперболического типа

Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В работах [1], [2] был предложен прямой метод построения операторов рекурсии и пар Лакса для нелинейных интегрируемых моделей. В предполагаемом докладе мы планируем обсудить применение этого метода к уравнениям гиперболического типа:

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Линеаризуем уравнение (1) в окрестности его произвольного решения:

$$U_{xy} = aU_x + bU_y + cU, \tag{2}$$

где $a = \frac{\partial f}{\partial u_x}, b = \frac{\partial f}{\partial u_y}, c = \frac{\partial f}{\partial u}$.

Найдем поверхность вида

$$G(U_k, U_{k-1}, \dots, U, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_k; x, y, u, u_1, \bar{u}_1, \dots) = 0 \tag{3}$$

совместную с линеаризованным уравнением (2), где $U_s = \frac{\partial^s}{\partial x^s}U, \bar{U}_s = \frac{\partial^s}{\partial y^s}U$ динамические переменные уравнения (2), а динамические переменные $u, u_1, \bar{u}_1, \ldots$ уравнения (1) входят в (3) в качестве параметров.

Совместность уравнений (2) и (3) понимается в следующем смысле. Применим оператор D_y полного дифференцирования по y к уравнению (3) и получим ещё одно уравнение

$$G_2(U_k, U_{k-1}, \ldots, U, \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_{k+1}; x, y, u, u_1, \bar{u}_1, \ldots) = 0. \quad (4)$$

Мы требуем, чтобы равенство

$$D_x D_y G|_{(1)-(4)} = 0 \quad (5)$$

выполнялось тождественно по $x, y, u, u_1, \bar{u}_1, \ldots$ В докладе мы обсудим как построить поверхность (3) и как из тройки уравнений (2), (3), (4) получить пару Лакса для уравнения (1).

[1] I T Habibullin, A R Khakimova and M N Poptsova 2016 On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations, J. Phys. A: Math. Theor. 49 035202 (35pp).

[2] I T Habibullin, A R Khakimova 2017 On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via quadratic ansatz, arXiv:1702.04533 [nlin.SI].

Эквивалентные состояния на ультрапроизведении алгебр фон Неймана

Халиуллин С.Г.

Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Мы вводим понятие контигуальности двух последовательностей состояний, заданных на алгебрах фон Неймана. Использование техники ультрапроизведений ([1], [2] [3]) позволяет свести это понятие к понятию эквивалентности двух состояний.

Обозначим элементы банахова пространства $(H_n)_{\mathcal{U}}$, являющимся ультрапроизведением последовательности банаховых пространств, (опр. см. в [4]) через $(h_n)_{\mathcal{U}}$, где $\mathcal{U}$ — произвольный нетривиальный ультрафильтр на $\mathbb{N}$.

Пусть (x_n) — последовательность линейных ограниченных операторов, заданных на соответствующих пространствах H_n со свойством

$\sup_n \|x_n\| < \infty$. Определим на $(H_n)_{\mathcal{U}}$ оператор ультрапроизведения, полагая $(x_n)_{\mathcal{U}}((h_n)_{\mathcal{U}}) = (x_n(h_n))_{\mathcal{U}}$. При таком определении оператор $(x_n)_{\mathcal{U}}$ является линейным и ограниченным и $\|(x_n)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|$.

Пусть далее $(\mathcal{M}_n, \varphi_n)$ — последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана с точными нормальными состояниями, обозначим через $(\mathcal{M}_n, \varphi_n)_{\mathcal{U}}$ — ультрапроизведение этой последовательности (опр. см. [1], [2]). Зададим состояние на ультрапроизведении $(\mathcal{M}_n, \varphi_n)_{\mathcal{U}}$ как $\varphi_{\mathcal{U}}((x_n)_{\mathcal{U}}) = \lim_{\mathcal{U}} \varphi_n(x_n)$.

Известно, (см. [2]) что тогда $(\mathcal{M}_n, \varphi_n)_{\mathcal{U}}$ есть алгебра фон Неймана с точным нормальным состоянием $\varphi_{\mathcal{U}}$.

Определение. *Пусть $(\mathcal{M}_n)$ — последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, φ_n и ψ_n — нормальные состояния на $\mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательности (φ_n) и (ψ_n) называются* ***взаимно контигуальными****, если $\varphi_n(x_n^* x_n) \to 0$ тогда и только тогда $\psi_n(x_n^* x_n) \to 0$, $x_n \in \mathcal{M}_n$;* ***вполне асимптотически разделимыми****, если существует такая подпоследовательность $(n') \subseteq \mathbb{N}$, что $\varphi_{n'}(x_{n'}^* x_{n'}) \to 0$, $\psi_{n'}(x_{n'}^* x_{n'}) \to 1$, $(n' \to \infty)$.*

Это определение обобщает понятия эквивалентности (взаимной абсолютной непрерывности)и сингулярности состояний. Есть различные определения этих понятия для линейных функционалов на W^*-алгебрах, см., например, [5], [6].

Теорема. *Пусть $(\mathcal{M}_n)$ — последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, φ_n и ψ_n — точные нормальные состояния на $\mathcal{M}_n, n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательности (φ_n) и (ψ_n) взаимно контигуальны тогда и только тогда, если состояния $(\varphi_n)_{\mathcal{U}}$ и $(\psi_n)_{\mathcal{U}}$ эквивалентны для любого нетривиального ультрафильтра $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$; вполне асимптотически разделимы тогда и только тогда, если существует такой нетривиальный ультрафильтр $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$, что состояния $(\varphi_n)_{\mathcal{U}}$ и $(\psi_n)_{\mathcal{U}}$ сингулярны.*

[1] Ocneanu, A.: Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras, Lect. Notes in Math., 1138, Springer, (1985)

[2] Ando, Hiroshi and Haagerup, Uffe: Ultraproducts of von Neumann algebras, Journal of Functional Analysis, 266(12), 6842–6913 (2014)

[3] Mushtari, D.H. and Haliullin, S.G.: Linear spaces with a probability measure, ultraproducts and contiguity, Lobachevskii J. Math., 35(2), 138–146 (2014)

[4] Heinrich, S.: Ultraproducts in Banach space theory, J.fur die reine und angewandte Math., 313, 72–104 (1980)

[5] Gudder, S.P.: A Radon-Nikodym theorem for $*$-algebras, Pacific Journal of Mathematics, 80(1), 141–149 (1979)

[6] Chetcutti, E. and Hamhalter, J.: Vitali-Hahn-Saks Theorem For Vector Measures on Operator Algebras, The Quarterly Journal of Mathematics, 57, 479-493, (2006)

Аналог теоремы Тимана–Пономаренко для почти–периодических функций

Хасанов Ю.Х.

Российско–Таджикский (Славянский) университет, г.Душанбе, Таджикистан

Пусть **B** — класс равномерных почти–периодических функций и ряд Фурье функции $f(x,y) \in B$ имеет вид

$$f(x,y) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\lambda_m, \mu_n) exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)),$$

где

$$A(\lambda_m, \mu_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} f(x,y) exp(-i(\lambda_m x + \mu_n y)) dxdy$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$, а $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – показатели Фурье (спектр функции), которые имеют предельную точку в бесконечности, т.е.

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0; \;\; \lambda_{-m} = -\lambda_m, \;\; \mu_{-n} = -\mu_n; \;\; \lim_{m\to\infty} \lambda_m = \infty, \;\; \lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty;$$

$$\lambda_m < \lambda_{m+1} \; (m = 0, 1, 2, \ldots), \;\; \mu_n < \mu_{n+1} \; (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Через $S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)$ $(\sigma > 0)$ обозначим частичную сумму ряда Фурье, т.е.

$$S_{\sigma,\sigma}(f;x,y) = \sum_{|\lambda_m|\le\sigma} \sum_{|\mu_n|\le\sigma} A(\lambda_m, \mu_n) exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)).$$

Положим

$$U_\sigma(f;\Phi;x,y) = \sum_{|\lambda_m|\le\sigma} \sum_{|\mu_n|\le\sigma} A(\lambda_m, \mu_n) \Phi_\sigma(\lambda_m, \mu_n) exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)),$$

где $\Phi_\sigma(t,z)$ — произвольная, вещественная, непрерывная четная функция.

В работе исследуется вопрос об отклонении заданной функции $f(x,y)$ от ее частичных сумм ряда Фурье, в зависимости от скорости стремления к нулю величины наилучшего приближения тригонометрическим полиномом ограниченной степени. Далее аналогично устанавливается оценка сверху величины отклонения равномерной почти–периодической функции от сумм Марцинкевича.

Если $f(x,y) \in B$, то при любом Λ $(0 < \Lambda < a < \sigma)$ справедливы оценки

$$\|U_\sigma(f;\Phi;x,y) - f(x,y)\|_B \leq C\frac{\sigma+a}{\sigma-a}E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B$$

и

$$\|f(x,y) - \Omega_{k,k}\|_B \leq \frac{C}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_{k,k}(f)_B,$$

где

$$\Omega_{k,k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_{k,k}(f;x,y)$$

— суммы Марцинкевича,

$$E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B = \inf_{A(\lambda_m,\mu_n)} \left\| f(x,y) - \sum_{|\lambda_m|\leq\Lambda}\sum_{|\mu_n|\leq\Lambda} A(\lambda_m,\mu_n)exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)) \right\|_B$$

— наилучшее приближение функций $f(x,y) \in B$ тригонометрическими полиномами степени не выше Λ, C – константа.

Исследование асимптотики решения нелинейного ОДУ 2-го порядка вблизи точки катастрофы "бабочка"

Хачай О. Ю., Носов П.А.
УрФУ, г. Екатеринбург, Россия

В докладе рассматривается асимптотическая задача:

$$u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |u(x;y,z,t) - H_\pm(x;y,z,t)| = 0, \tag{2}$$

где функции H_- и H_+ суть гладкие ветви корня конечного уравнения

$$u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x = 0,$$

максимально продолженные, соответственно, вправо из окрестности точки $x = -\infty$ и влево из окрестности точки $x = +\infty$. В работе [1] показано, что данной асимптотической задаче должен удовлетворять главный член внутреннего асимптотического разложения, построенного вблизи точки катастрофы "бабочка" для решения трехмерного нелинейного волнового уравнения $-U''_{TT} + U''_{XX} + U''_{YY} + U''_{ZZ} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U)$ с малым параметром $\varepsilon > 0$. Специальное решение уравнения (1), удовлетворяющее асимптотическому условию (2) согласования с разложением во внешнем слое, описывает быструю перестройку решения исходного УЧП в малой окрестности точки катастрофы.

Для задачи (1), (2) в предположении о существовании решения строится равномерное на ограниченном множестве изменения параметров y, z, t асимптотическое разложение такого решения на бесконечности по переменной x. Основное внимание в докладе сосредоточено на численном исследовании решения задачи (1), (2) в рамках двух процедур, основанных на методе Рунге-Кутты-Фельберга (4,5) и простой итерации, соответственно. Для значений параметров $y = -20$, $z = 0$, $t = 8.5$ у интегральной кривой возникает ударный слой, т.е. область резкого изменения решения, локализующийся вне конечной окрестности нуля. Для данного примера можно выделить два таких ударных слоя, расположенных симметрично относительно начала координат, приблизительно во множестве $7.4 < |x| < 9.92$, и гарантированно лежащих вне интервала $|x| < 6.5$. Возникновение такой ситуации показывает существенное отличие данной задачи от исследованной ранее [2] подобной асимптотической задачи для катастрофы типа "сборка".

Данные результаты в настоящий момент готовятся к публикации [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00222 мол_а.

[1] Khachay O. Y., Nosov P.A. On some numerical integration curves for PDE in neighborhood of "butterfly" catastrophe point. Ural Mathematical Journal. 2016. T. 2, № 2, C. 127–140.

[2] Ильин А. М., Сулейманов Б. И. Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки. Матем. сб., 2004, Т. 195, № 12 , С. 27–46.

[3] Хачай О.Ю. Исследование асимптотики решения трехмерного нелинейного волнового уравнения вблизи точки катастрофы типа "бабочка". Планир. к публ. в журн. Труды ИММ УрО РАН, № 2, 2017.

Что такое квантовый функциональный анализ?

Хелемский А.Я.
МГУ им. М.В. Ломоносова

Около 30 лет назад появилось новое направление в той части математики, которую фон Нойманн называл "абстрактным анализом". Его развитие привело к решению ряда хорошо известных проблем, которые были сформулированы в чисто классических терминах. Это стало возможным после того, как некоторые математики, работая над той или иной проблемой, осознали, что за классической нормой заданного пространства спрятана существенно более богатая структура. Речь идет о так называемой "квантовой норме"или "структуре абстрактного операторного пространства".

Мы начнем с напоминания о некоторых классических проблемах, которые были прояснены и решены после их перевода на язык квантовых норм. Затем мы перейдем к двум главным понятиям этой науки: квантовой нормы и вполне ограниченного оператора, а также приведем ряд примеров и контрпримеров. Здесь мы объясним, с позиций общей идеологии так называемой квантовой или некоммутативной математикой, правомочность использования терминов "квантовая норма"и "квантование нормированного пространства".

Во всем квантовом функциональном анализе можно легко выделить три наиболее глубоких и важных результата, которые образуют лицо предмета. Это Теорема Реализации Руана (говорящая о том. что нет квантовых пространств, кроме операторных пространств), Теорема Арвесона–Виттстока (называемая также квантовой теоремой Хана–Банаха) и Теорем Разложения Полсена–Виттстока (сводящая общие вполне ограниченные операторы к двум конкретным типам операторов). Все эти теоремы обладают весьма простой и прозрачной формулировкой, и мы обсудим их в заключительной части доклада.

Возмущение квантового и акустического волновода узким потенциалом

Хуснуллин И.Х.
БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

Исследованы краевые задачи в n-мерном цилиндре ($n \geqslant 3$), возмущенные узким комплексным потенциалом с большой интенсивностью. Потенциал зависит от малого и большого параметров. Малый параметр соответствует диаметру носителя потенциала, большой — его максимальному значению. Соотношения параметров следующее: произведение малого параметра на корень квадратный большого параметра стремится к нулю. Задача соответствует математическим моделям квантовый и акустический волноводов. Основным содержанием работы является построение специального преобразования, который переводит исходный оператор к оператору с малым локализованным возмущением. При этом данное преобразование не меняет спектр исходного оператора. Получено условие на потенциал, при которых из края непрерывного спектра возникает собственное значение, а так же условие отсутствия такого собственного значения. В случае возникновения, построены главные члены его асимптотики.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-41-020195 р-а и частично проекта 16-31-00066 мол-а).

Приближение константы Лебега полинома Лагранжа логарифмической функцией, содержащей сдвиг ее аргумента

Шакиров И.А.

Набережночелнинский государственный педагогический университет, г. Набережные Челны, Россия

Для константы Лебега $\lambda_n = \|L_n\|_C$ полинома Лагранжа $L_n(x,t)$, интерполирующего $2\pi-$ периодическую функцию $x(t)$ в нечетном числе равномерно распределенных на периоде узлов, в работе [1] получена неулучшаемая равномерная двусторонняя оценка

$$(2/\pi)[\gamma+\ln(16/\pi)]+(2/\pi)\ln n \leq \lambda_n \leq 5/3+(2/\pi)\ln n (n\in \overline{N}=N\cup\{\infty\}),$$

где $\gamma = 0.577215\ldots -$ константа Эйлера. На этой основе затем решены две экстремальные задачи, связанные с наилучшим приближением константы λ_n логарифмическими функциями вида $c\ln n + b$. Установлены вполне определенные элементы наилучшего приближения $\mu_n^* = (2/\pi)\ln n + b^*, \overline{\mu}_n = (2/\pi)\ln n + \overline{b}$ и соответствующие им наилучшие приближения $\varepsilon^* = 0.131436\cdots, \overline{\varepsilon} = 0.0495111\cdots$ (см. теорему 4 и замечание в [1]).

Здесь указанные наилучшие приближения улучшены почти на два порядка на основе приближения константы λ_n функциями вида $c\ln(n+a)+b$, содержащими сдвиг a аргумента логарифма.

Теорема . В приближенной замене константы Лебега

$$\lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\ln(n+a_0)+b_0 (b_0 = \frac{2}{\pi}(\ln\frac{16}{\pi}+\gamma) = 1.403794\cdots,$$

$$a_0 = \exp[\frac{\pi}{2}(\frac{5}{3} - b_0)] - 1 = 0.511223\cdots)$$

для погрешности $\varepsilon_0 = \sup\limits_{n \in N} |\lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln(n + a_0) - b_0|$ верна оценка $\varepsilon_0 < 0.001151\cdots$.

Замечание. *Константа Лебега классического оператора Фурье также имеет высокий порядок приближения, когда в качестве аппроксимирующего агрегата используется логарифмическая функция, содержащая сдвиг ее аргумента* [2].

[1] Шакиров И.А. О предельном значении остаточного члена константы Лебега, соответствующей тригонометрическому полиному Лагранжа// Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 302-310.

[2] Шакиров И.А. Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций// Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 139. С. 92-104.

Страсти по кубоиду

Шарипов Р. А.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Задача о совершенном кубоиде — это старая нерешённая математическая задача, ведущая свой отсчёт с 1719 года, она упоминается в книге Пауля Хальке [1]. Через полвека после этого ею занимался Леонард Эйлер (см. [2]). Задача состоит в нахождении прямоугольного параллелепипеда с целочисленными длинами рёбер, диагоналей на гранях и пространственной диагонали. Она сводится к системе диофантовых уравнений второй степени, ни одного решения которой до сих пор не найдено. Отсутствие решений также не доказано.

Автору доклада удалось найти два новых подхода к задаче о кубоиде. В первом подходе система уравнений кубоида была сведена к одному диофантовому уравнению 12-ой степени, и было найдено два специальных случая, когда это уравнение допускает понижение порядка до 10-го и 8-го. На основе этих двух специальных случаев и общего случая были сформулированы три гипотезы о неприводимости полиномов (см. [3]). Если все гипотезы верны, задача о кубоиде получает отрицательное решение — совершенных кубоидов нет. Первая гипотеза верна, она имеет элементарное доказательство. Вторая и третья остаются не доказанными и не опровергнутыми. Вторая гипотеза исследовалась асимптотическими методами в [4] и численным счётом в [5].

Второй подход основан на естественной S_3-симметрии исходных уравнений кубоида. Это позволяет перейти от исходных уравнений к уравнениям на значения так называемых мультисимметричных полиномов от длин рёбер и диагоналей на гранях (см. [6]). Совместными усилиями Джону Рамсдену и автору доклада удалось решить полученные уравнения. Было найдено семейство пар кубических полиномов с коэффициентами, зависящими от двух рациональных параметров. Если совершенный кубоид существует, то при каких-то значениях параметров рёбра кубоида являются корнями первого кубического полинома, а диагонали на гранях — корнями второго кубического полинома (см. [7]).

Дальнейшие исследования кубоидов осложнились после появления в 2015 году работы Вальтера Висса [8], в которой заявлялось доказательство несуществования совершенных кубоидов. Автор доклада нашёл ошибку в [8] и сообщил о ней Вальтеру Виссу, после чего во второй версии работы он отказался от претензий на окончательное решение проблемы. Однако в 2016 году Вальтер Висс опубликовал третью версию работы, вновь претендующую на доказательство несуществования совершенных кубоидов. Эта версия работы тоже содержит ошибку. Ошибка найдена автором доклада после тщательной проверки работы Вальтера Висса с использованием символьных вычислений на компьютере (см. [9]).

[1] Halcke P., *Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnen-Confect*, N. Sauer, Hamburg, 1719.

[2] Euler L., *Vollständige Anleitung zur Algebra*, 3 Theile, Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg, 1770-1771.

[3] Шарипов Р. А., *Неприводимые полиномы в задаче о совершенном кубоиде*, Уфимский математический журнал, 2012, Т. 4, № 1, С. 153-160.

[4] Шарипов Р. А., *Асимптотический подход к задаче о совершенном кубоиде*, Уфимский математический журнал, 2015, Т. 7, № 3, С. 100-113.

[5] Gallyamov R. R., Kadyrov I. R., Kashelevskiy D. D., Kutlugallyamov N. G., Sharipov R. A., *A fast modulo primes algorithm for searching perfect cuboids and its implementation*, 2016, e-print arXiv:1601.00636.

[6] Sharipov R. A., *Perfect cuboids and multisymmetric polynomials*, 2012, e-print arXiv:1205.3135.

[7] Ramsden J., Sharipov R. A., *Inverse problems associated with perfect cuboids*, 2012, e-print arXiv:1207.6764.

[8] Wyss W., *No perfect cuboid*, 2015, e-print arXiv:1506.02215.

[9] Sharipov R. A., *On Walter Wyss's no perfect cuboid paper*, 2017, e-print arXiv:1704.00165.

Компьютерный анализ возникновения предельных циклов уравнений маятникового типа

Шарифзода З.И., Нуров И.Дж.

Научно-исследовательский институт ТНУ, г.Душанбе, Таджикистан

Настоящий доклад посвящен компьютерному анализу возникновения предельных циклов [1] в уравнений маятникового типа вида

$$x'' - \mu cosx \cdot x' + x = 0, \tag{1}$$

где $0 < \mu << 1$.

Имеем

$$\begin{cases} x' = y, \\ x' = \mu cosx \cdot y' - x, \end{cases} \tag{2}$$

Известно, что $\Theta(0,0)$ является состоянием равновесии [2] системы (2). Оказывается уравнения (1) при $\mu = 0.5$ имеет бесконечное множество предельных циклов. Ниже на рисунке (1) приведено геометрическое иллюстрация данного результата.

Далее, интерес представляет уравнение (1) в иной форме т.е.

$$x'' - \mu(1 - k|x|) \cdot x' + x = 0, \tag{3}$$

Уравнение (3) склеивается из двух нелинейных уравнений вида

$$\begin{cases} x'' - \mu(1 - kx) \cdot x' + x = 0, & x > 0, \\ x'' - \mu(1 + kx) \cdot x' + x = 0, & x < 0. \end{cases}$$

Компьютерные эксперименты показывают, что уравнение (3) при $\mu = 0.5$ и k=1 также имеет предельный цикл вида (см. рис.2)

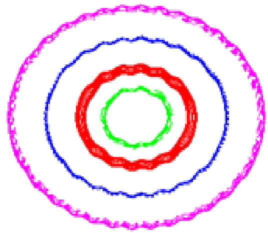

Рис. 1: Предельный цикл при $\mu = 0.5$

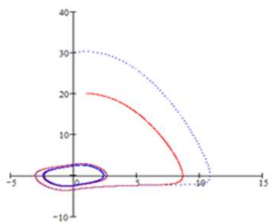

Рис. 2: Предельный цикл при $\mu = 0.5$ и k=1

[1] Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.-Ижевск: РХД, 2005. 420 с.

[2] Арабов М.К. Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка //Изв. АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. наук - 2015. - 1 (158). - С. 42-49.

Меры конечного (γ, ε)-типа

Шевцова Т.В.

Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Рассматриваются некоторые свойства положительных мер в комплексной плоскости. Такие меры играют важную роль при изучении классов субгармонических функций. Аналогичные свойства и определения для мер, которые ассоциированы с последовательностями комплексных чисел, можно найти в [1]. В [2] Б. Н. Хабибуллин ввел классы мероморфных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функций конечного (γ,ε)-типа, являющиеся обобщением классов функций конечного γ-типа в смысле Рубела-Тейлора. Эти понятия обобщаются на классы $\mathcal{S}(\gamma,\varepsilon)$ субгармонических функций конечного (γ,ε)-типа. Введем необходимые определения. Положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0,+\infty)$, называется функцией роста. Пусть $\varepsilon(r) > 0$ – невозрастающая функция на полуоси $[0,+\infty)$, удовлетворяющая условию $\varepsilon(r(1+\varepsilon(r))) \geqslant (\varepsilon(r))^\eta$, при некотором $\eta > 1$ для всех больших r. Субгармоническая функция v называется *функцией конечного* (γ,ε)*-типа*, если существуют положительные постоянные $a,\ \alpha,\ \beta$, такие, что

$$T(r,v) \leqslant \frac{a}{(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r+\beta\varepsilon(r)r)$$

для всех достаточно больших r. Через $\mathcal{S}(\gamma,\varepsilon)$ обозначим класс субгармонических функций конечного (γ,ε)-типа. Вводятся следующие характеристики мер: конечная (γ,ε)-плотность и (γ,ε)-сбалансированность. В то время как понятие конечной (γ,ε)-плотности характеризует меру круга, вводимое понятие (γ,ε)-сбалансированности характеризует, в некотором смысле, распределение меры по аргументам. Совокупность же этих понятий составляет понятие (γ,ε)-допустимости. Показано, что (γ,ε)-допустимые меры, и только они, являются риссовскими мерами функций из класса $\mathcal{S}(\gamma,\varepsilon)$. Пусть $B(a,r)$ – круг с центром в точке a радиуса r, μ – положительная мера в комплексной плоскости, $\mu(r)$ – мера круга $B(0,r)$. Предполагаем, что $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. Для $k \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ обозначим

$$N_\mu(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t}\,dt, \quad S(r;k,\mu) = \frac{1}{k}\iint\limits_{B(0,r)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k},$$

$$S(r_1,r_2;k,\mu) = S(r_2;k,\mu) - S(r_1;k,\mu), \quad r_1 \le r_2.$$

Положительная мера μ имеет конечную (γ,ε)-*плотность*, если существуют положительные постоянные $a,\ \alpha,\ \beta$, такие, что

$$N_\mu(r) \leqslant \frac{a}{(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r+\beta\varepsilon(r)r)$$

для всех достаточно больших r. Мера μ называется (γ,ε)-*сбалансированной*, если существуют положительные постоянные $a,\ \alpha,\ \beta$, при которых

$$|S(r_1,r_2;k,\mu)| \leqslant \frac{a\gamma(r_1+\beta\varepsilon(r_1)r_1)}{r_1^k(\varepsilon(r_1))^\alpha} + \frac{a\gamma(r_2+\beta\varepsilon(r_2)r_2)}{r_2^k(\varepsilon(r_2))^\alpha},$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$ и $k \in \mathbb{N}$, при некоторых положительных $a,\ \alpha,\ \beta$.

Условия (γ, ε)-сбалансированности и конечной (γ, ε)-плотности независимы.

Мера μ называется (γ, ε)-*допустимой*, если она (γ, ε)-сбалансированна и имеет конечную (γ, ε)-плотность.

Теорема. Мера μ является мерой Рисса субгармонической функции v из класса $\mathcal{S}(\gamma, \varepsilon)$, тогда и только тогда, когда она является (γ, ε)-допустимой.

[1] Rubel L. A. Entire and meromorphic functions. New York–Berlin–Heidelberg: Springer, 1996.

[2] Хабибуллин Б.Н. Рост целых функций с заданными нулями и представления мероморфных функций // Матем. заметки. Т. 73, вып 1. 2003. С. 120-134.

Использование квантовых алгоритмов оценки фазы для кутритов при измерении магнитного поля

Шляхов А.Р.[1], Землянов В.В.[1], Лебедев А.В.[2], Суслов М.В.[1], Лесовик Г.Б.[1,3], Blatter G.[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Россия

[2]Theoretische Physik, ETH Zurich, Zurich, Switzerland

[3]Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук, г. Москва, Россия

Квантовый алгоритм оценки фазы (АОФ), опирающийся на квантовое преобразование Фурье (КПФ), является составной частью множества квантовых алгоритмов для решения различных прикладных задач [1].

При решении задачи полной статистики переноса квантовых частиц нашей научной группой была обнаружена связь между полученным квантовым алгоритмом счета частиц и АОФ [2]. Найденная взаимосвязь дала возможность использовать регистр кубитов не только для счета частиц, но и для измерения непрерывных величин, таких как магнитное поле.

Для найденного алгоритма был проведен теоретический расчет вероятности определения фазы (напряженности магнитного поля) с помощью регистра кубитов [3], что позволило нашим коллегам из лаборатории Аалто, Финляндия, провести успешный эксперимент по измерению магнитного поля при помощи одного кубита. В настоящей работе мы обобщаем предыдущие результаты на кутритный случай. Так апостериорная вероятность того, что в действительности измеряемая фаза равна φ при выпадении целочисленного значения a в вычислительном базисе после проведения n измерений одного кутрита, выражается следующей формулой:

$$p_n(\varphi|a) = \frac{1}{3^n}\frac{\sin^2(\pi 3^n \delta)}{\sin^2(\pi\delta)}, \tag{1}$$

где $3^n\delta = 3^n\varphi - a$ — отклонение реальной фазы от выпавшего целого числа a, $3^n\varphi$ — реальная фаза. В случае $\delta = 0$ мы получаем точное значение фазы.

Подобное использование таких свойств квантовых объектов, как квантовая интерференция, является характерной особенностью современной квантовой метрологии и позволяет достигать в реальных экспериментах точности, ограниченной лишь фундаментальными законами квантовой механики и известной как предел Гейзенберга [4].

Данная работа была поддержана грантом РФФИ №17-02-00396-а.

[1] Cleve R. [et al.] Quantum algorithms revisited // Proc. R. Soc. Lond. A, 454, 339-354, 1998.

[2] Suslov M.V. [et al.] Quantum abacus for counting and factorizing numbers // Phys. Rev. A, 83, 052317, 2011.

[3] Lebedev A.V. [et al.] Sequential quantum-enhanced measurement with an atomic ensemble // Phys. Rev. A, 89, 012118, 2014.

[4] Higgins B.L. [et al.] Demonstrating Heisenberg-limited unambiguous phase estimation without adaptive measurements // New J. Phys., 11, 073023, 2009.

Интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с вырожденным ядром

Юлдашев Т. К.

Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия

На отрезке $[0;T]$ рассматривается уравнение вида

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) + \nu \int_0^T K(t,s)\, u(s) ds = \alpha(t)\, f\left(\int_0^T R(s)\, u(s)\, ds\right)$$

при следующих условиях

$$u(T) = \int\limits_0^T u(t)\,dt,\ u'(T) = \varphi,$$

где $0 < T < \infty$ – заданное действительное число, $0 < \lambda$ – действительный параметр, ν – действительный спектральный параметр, $\varphi = \mathrm{const}$, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i(t)\,b_i(s)$, $a_i(t) \in C[0;T]$, $b_i(s) \in C[0;T]$, $\alpha(t) \in C[0;T]$, $R(t) \in C[0;T]$. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Отметим, что интегро-дифференциальные уравнения представляют большой интерес с точки зрения приложений. Изучению обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ (см., напр. [1]–[3]). А интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром при других заданных условиях рассматривались в [4]–[7].

В настоящей работе рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения малых решений в окрестности фиксированных точек для одной нелокальной краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром. С введением обозначения получена система алгебраических уравнений. Устранены особенности, возникшие при определении произвольных (неизвестных) постоянных. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи и условия существования малых решений в окрестности некоторых точек. Доказаны соответствующие теоремы. Приведены примеры содержательного характера.

[1] Власов В. В., Перез Ортиз Р. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике // Матем. заметки. 2015. Т. 98, №4. С. 630–634.

[2] Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2012. Т. 5, №2. С. 90–102.

[3] Сидоров Н. А. Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими нелинейностями // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. №7. С. 1309–1316.

[4] Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром // Нелинейные колебания. 2015. Т. 18. №4. С. 489–506.

[5] Юлдашев Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 2015. №9. С. 74–79.

[6] Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Benney-Luke с вырожденным ядром // Изв. вузов. Математика. 2016. №9. С. 59–67.

[7] Юлдашев Т. К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. №1. С. 101–110.

Общий случай движения газа с линейным полем скоростей для эволюцилнной подмодели ранга два

Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН г.Уфа, Россия

Для системы уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния известны все 27 инвариантные подмодели ранга два [1]. Все перечисленные подмодели приводятся к системе эволюционного типа или к системе стационарного типа. В книге Хабирова С.В. [2] рассмотрены инвариантные подмодели построенные на подалгебрах 2.17, 2.9, 2.2 (нумерация подалгебр из [1]). Решения подмоделей описывают соответственно двумерные установившиеся течения газа, одномерные движения газа с цилиндрическими волнами и закруткой, течения со спиральными поверхностями уровня. Классификация точных решений остальных подмоделей не завершена. В данной работе рассматривается инвариантная подмодель ранга 2 эволюционного типа в цилиндрической системе координат, построенная на подалгебре 2.10 [1]. Ставится задача найти все решения подмодели 2.10 с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственной координаты. Найдено два различных решения. Представлена картина траекторий движения частиц газа.

[1] Мамонтов Е.В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.

[2] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем. 2003. 192 с.

Операторные методы вычисления ляпуновских величин

Юмагулов М.Г.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Во многих задачах теории бифуркаций динамических систем важную роль играют ляпуновские величины, позволяющие определить такие важнейшие свойства бифуркаций как устойчивость возникающих решений, направленность бифуркаций и др.

Имеется ряд подходов, позволяющих вычислять ляпуновские величины. Классическим является подход, связаннный с применением теоремы о центральном многообразии и метода нормальных форм (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). Для задач об основных сценариях локальных бифуркаций указанный подход позволяет преобразовать исходные уравнения к весьма простому (каноническому) виду, коэффициенты нелинейности которого и определяют ляпуновские величины.

Другой подход направлен на вычисление ляпуновских величин в терминах исходных уравнений. Получению соответствующих формул и алгоритмов посвящены работы многих авторов (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). Хотя получаемые при этом формулы, как правило, достаточно сложны, но основным их преимуществом является сам тот факт, что они позволяют проводить анализ бифуркаций непосредственно в терминах исходных уравнений.

В предлагаемом сообщении обсуждаются новые формулы для вычисления ляпуновских величин, полученные на основе общего операторного метода исследования локальных бифуркаций динамических систем, основные аспекты которого изложены в [2]. Полученные формулы позволяют не только эффективно вычислить ляпуновские величины, но и провести в новых условиях исследование свойств бифуркации.

[1] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009.

[2] Юмагулов М.Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах. // Доклады АН. 2009. Т. 424, № 2. С. 177-180.

On the Dirichlet problem for the Laplace equation with boundary value from the Morrey space

Ahmedzade N.R., Kasumov Z.A.
Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Non-tangential maximal function is considered and it is estimated from above a maximum operator, and the proof is carried out for the Poisson-Stieltjes integral, when the density belongs to the corresponding Morrey-Lebesgue space. The obtained results are applied to the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation with boundary value from Morrey-Lebesgue space.

The following theorem is proved.

Theorem. Assume that the measure $\mu(\cdot)$ satisfies the conditions (I is an interval)

$$\mu(I) \sim |I|, \forall I \subset R; \sup_{y>0;\, x\in R} \int_R P_y(s-|x|)\, d\mu(s) < +\infty.$$

Let

$$u_\mu(z) = u_\mu(x; y) = \int_R P_y(x-t) f(t)\, d\mu(t), f \in L^{p,\alpha}(d\mu), 0 \le 1-\alpha < 1,$$

where $L^{p,\alpha}(d\mu)$ is a Morrey space equipped with the norm

$$\|f\|_{p,\alpha;d\mu} = \sup_{I\subset R} \left\{ \frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_I |f(y)|^p\, d\mu(y) \right\}^{1/p}.$$

Then for $\forall \alpha_0 > 0$, $\exists A_{\alpha_0} > 0$:

$$\sup_{(x;y)\in\Gamma_{\alpha_0}(t)} |u_\mu(x;y)| \le A_{\alpha_0} M_\mu f(t), \forall t \in R, \tag{1}$$

and $u_\mu^* \in h^{p,\alpha}(d\mu)$:

$$\left\|u_\mu^*\right\|_{h^{p,\alpha}(d\mu)} \le A_{\alpha_0} \|f\|_{p,\alpha;d\mu}, \tag{2}$$

where $u_\mu^*(\cdot)$ is a nontangential maximal function for u:

$$u_\mu^*(t) = \sup_{z\in\Gamma_{\alpha_0}(t)} |u_\mu(z)|, t \in R.$$

On an open problem.

Akhtyamov A.M.
Department of Math Modeling, Bashkir State University + Mavlutov Institute of Mechanics, Russia
e-mail: AkhtyamovAM@mal.ru

It is well known an example for differential operator of any even order for which the spectrum fills the entire complex plane [1] (see also [2]). The problem is posed in [2]: Are there similar differential operators of any odd order?

Theorem. The spectrum of the problem with the equation

$$i^{-n}\, y^{(n)}(x) = \lambda\, y(x) = s^n\, y(x), \qquad x \in [0,1]$$

of any odd order n and the boundary conditions

$$y(0) + \alpha_0\, y(1) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) + \alpha_{n-1}\, y^{(n-1)}(1) = 0.$$

fills the entire complex plane if

$$\alpha_k = e^{\pi\, i} = -1, \quad \alpha_{k+1} = e^{\pi\, i + \frac{2\,\pi\, i}{n}}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} = e^{\pi\, i + \frac{2\,\pi\, k\, i}{n}},$$

$$\alpha_0 = e^{\pi\, i + \frac{2\,\pi\,(k+1)\, i}{n}}, \quad \ldots, \quad \alpha_{k-1} = e^{\pi\, i + \frac{2\,\pi\,(n-1)\, i}{n}} \qquad \left(k = \frac{n-1}{2}\right).$$

This result is published in [3]. Other similar results are obtained too.

This work was supported by the program «Leading Scientific Schools» (project No. 7461.2016.1) and by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 15-01-01095_a).

[1] Sadovnichy V.A., Kanguzhin B.E. On the connection between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 267 (1982), no. 2, 310–313 (in Russian).

[2] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators. Providence: American Mathematical Society, (2008) (Memoirs of the American Mathematical Society; Vol.195, N 911).

[3] Akhtyamov A.M. On spectrum for differential operator of odd order. Mathematical Notes. 101 (2017), no. 5.

Some spectral properties of one class discontinous Sturm-Liouville operator with transmission conditions

Ala V. and Mamedov Kh.R.
Department of Mathematics, Mersin University, Mersin, Turkey
e-mail: volkanala@mersin.edu.tr; hanlar@mersin.edu.tr

Let us consider the following boundary value problem,

$$ly := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda\rho(x)y(x), x \in [0,a) \cup (a,\pi],$$
$$L_1(y) :\equiv y(0) = 0,$$
$$L_2(y) :\equiv y'(\pi) = 0,$$
$$L_3(y) :\equiv \gamma_1 y(-a) - \gamma_2 y(+a) = 0,$$
$$L_4(y) :\equiv \beta_1 y'(-a) - \beta_2 y'(+a) = 0,$$

where λ is a complex parameter, $\rho(x) > 0$ is a piecewise continuous function,

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1^2, 0 \leq x < a, \\ \rho_2^2, a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

$q(x)$ is a real-valued continiuos function on the intervals $[0,a)$ and $[a,\pi)$ and has a finite limits $q(a \pm 0) = \lim\limits_{x \to a \pm 0} q(x), \gamma_i, \beta_j (i,j = 1,2)$ are real constants.

In this study, we discussed the properties of eigenvalues and eigenfunctions of the problem, asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions obtained, constructed the resolvent operator and investigated expansion formula according to the eigenfunctions.

There are many other works (see e.g.[1],[2]) regarding the subject of our work with different boundary conditions.

[1] O.SH. Mukhtarov and S. Yakubov Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions, Applicaple Analysis, 2002, Vol 81, 1033-1064.

[2] O.SH. Mukhtarov, M. Kadakal and F.S. Mukhtarov On Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, 2004, J. Math.Kyoto Univ., Vol. 44, Number 4,779-798.

[3] M.A. Naimark Linear Differential Operators, 1967, Ungar, Newyork.

Expansion formula for a boundary value problem with discontinuous coefficient.

Cetinkaya F.A. and Mamedov Kh.R.
Department of Mathematics, Mersin University, Turkey
Department of Mathematics, Mersin University, Turkey
e-mail: faycacetinkaya@mersin.edu.tr

In this work, we consider the boundary value problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad 0 \leq x < +\infty, \tag{1}$$

$$-\left(\alpha_1 y'(0) - \alpha_2 y(0)\right) = \lambda^2 \left(\beta_1 y'(0) - \beta_2 y(0)\right), \tag{2}$$

where λ is a spectral parameter, $q(x)$ is a real valued function which is integrable on $[0, +\infty)$ and satisfies the condition

$$\int_0^{+\infty} x\,|q(x)|\,dx > +\infty \tag{3}$$

and

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0 \leq x < a, \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

where α is a positive constant and $\alpha \neq 1$.

We obtained some solutions of the equation (1) and investigate the spectrum of the boundary value problem (1)-(3). The expansion formula in terms of the eigenfunctions constructed and the Parseval's equation is derived.

Spectral analysis of the boundary value problem (1)-(3) in the case of $\rho(x) \equiv 1$ was studied in [1, 2, 3]. The inverse scattering problem for boundary value problem (1)-(3) was solved in [4], [5].

[1] V.A. Marchenko Sturm-Liouville operators and applications, AMS Chelsea Publishing, 2011.

[2] B.M. Levitan and I.S. Sargsjan Introduction to spectral theory, AMS, 1975.

[3] G. Freiling and V.A. Yurko Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, Nova Science Publishing, 2008.

[4] I.M. Guseinov and R.T. Pashaev On an inverse problem for a second order differential operator, 2002 Usp.Math.Nauk. 57(3) 597-598.

[5] Kh.R. Mamedov Uniqueness of the solution to the inverse problem of scattering theory for the Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient, 2006 Proceedings of IMM of NAS Azerbaijan. 24 263-272.

Ultimate completely positive divisibility of dynamical maps

Filippov S.N.
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

The open system dynamics in the Schrödinger picture is $\varrho_S(t) = \Phi_t \varrho_S(0)$, where $\Phi_t(\varrho_S) = = \mathrm{tr}_E \left\{ U_t \varrho_S \otimes \varrho_E U_t^\dagger \right\}$, U_t is the unitary evolution of the system and the environment, ϱ_E is the fixed state of environment. Unital qubit processes Φ_t are characterized by three real parameters $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ as follows:

$$\Phi_t[\varrho_S] = \frac{1}{2} \left(\mathrm{tr}[\varrho_S] I + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j(t) \mathrm{tr}[\sigma_j \varrho_S] \sigma_j \right), \qquad (1)$$

where $\lambda_0 = 1$ and $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ is a conventional set of Pauli operators. The map Φ_t is known to be completely positive if $1 \pm \lambda_3(t) \geqslant |\lambda_1(t) \pm \lambda_2(t)|$. Process Φ_t is called CP-divisible if $\Phi_{t+s} = \Theta_{t,t+s} \cdot \Phi_t$, where $\Theta_{t,t+s}$ is a completely positive map for all t and s. Analogously, the process Φ_t is called P-divisible if $\Theta_{t,t+s}$ is a positive map for all t and s. The relation between P- and CP-divisible dynamics is reviewed in [1].

Consider a semigroup dynamics $\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$, where $\mathcal{L} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ is time-independent generating map. Evolution of the density operator is given by equation $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \mathcal{L}[\varrho]$. Semigroup dynamics is CP-divisible since $\Theta_{t,t+s} = \Phi_s = e^{\mathcal{L}s}$. Let us consider time-dependent perturbation

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \big(\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}(t)\big)[\varrho], \qquad (2)$$

where $\delta\mathcal{L}(0) = 0$. The term $\delta\mathcal{L}(t)$ describes infinitesimal deviations from dynamics (2), which can be caused by fluctuations of the system-environment Hamiltonian. In most cases the perturbed dynamical map $\widetilde{\Phi}_t$ remains CP-divisible since $\delta\mathcal{L}(t)$ makes minor changes in the map $\Theta_{t,t+s}$. However, for exceptional semigroups there exists an infinitesimal fluctuation $\delta\mathcal{L}(t)$ which makes the dynamical map $\widetilde{\Phi}_t$ not CP-divisible at some time. We will call such processes Φ_t *ultimate* CP-divisible. We obtain that Φ_t is ultimate CP-divisible if $\frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} + \frac{\dot{\lambda}_j}{\lambda_j} = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k}$, where indices i, j, k are permutations of $1, 2, 3$.

Physical examples of ultimate CP divisible processes: 1) pure phase damping process, when $\lambda_i(t) = 1$ and $\lambda_j(t) = \lambda_k(t) = e^{-\Gamma t}$; 2) generalized amplitude damping process with high-temperature environment, i.e. a spontaneous decay with equal probabilities of energy absorption and emission, when $\lambda_i(t) = \lambda_j(t) = e^{-\Gamma t}$ and $\lambda_k(t) = e^{-2\Gamma t}$ in Markov approximation. If this is the case, then the dissipator $\mathcal{L}[\varrho] = \Gamma\left(\sigma_+ \varrho \sigma_- + \sigma_- \varrho \sigma_+ - \varrho\right)$, where

$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_i \pm i\sigma_j)$ are excitation creation and annihilation operators. The dissipator $\mathcal{L}$ of a *general* ultimate CP-divisible process contains at most two terms:

$$\mathcal{L}[\varrho] = \frac{\gamma_i}{2}(\sigma_i \varrho \sigma_i - \varrho) + \frac{\gamma_j}{2}(\sigma_j \varrho \sigma_j - \varrho), \tag{3}$$

and the trajectory in the parameter space is $\lambda_i = e^{-\gamma_j t}$, $\lambda_j = e^{-\gamma_i t}$, $\lambda_k = e^{-(\gamma_i+\gamma_j)t}$.

Physically, the evolution $\frac{\partial}{\partial t}\varrho = \mathcal{L}[\varrho]$ with dissipator (3) is achievable as a result of sequential interactions of the system qubit with environment qubits. Such a type of interaction is called *collisional* model and has been intensively studied recently [2].

We also find a general form of *eternal* CP-indivisible processes and their realization via collisional models.

The study is supported by Russian Science Foundation under project No. 16-11-00084 and performed in Moscow Institute of Physics and Technology.

[1] F. Benatti, D. Chruscinski, S. Filippov. Tensor power of dynamical maps and positive versus completely positive divisibility // Phys. Rev. A **95**, 012112 (2017).

[2] T. Rybar, S. N. Filippov, M. Ziman, V. Buzek. Simulation of indivisible qubit channels in collision models // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **45**, 154006 (2012).

[3] I. A. Luchnikov, S. N. Filippov. Quantum evolution in the stroboscopic limit of repeated measurements // Phys. Rev. A **95**, 022113 (2017).

A few highlights on some algebras of unbounded operators

Fragoulopoulou M.

Department of Mathematics, University of Athens, Panepistimiopolis, Athens 15784, Greece

We shall present Allan's generalized B*–algebras (for short GB*–algebras), that extend the celebrated C*–algebras, in the context of locally convex *–algebras. First, we shall discuss examples and main properties of this kind of algebras and subsequently, we shall point out some of their most important results. Most precisely, **(1)** there is an *algebraic commutative Gelfand–Naimark type theorem* (Allan), where the 'partial characters' of the GB*–algebra involved may also take the value ∞. **(2)** There is an *algebraic non–commutative Gelfand–Naimark type theorem* (Dixon), where the operators that realize the given GB*–algebra are unbounded. **(3)** Given a C*–algebra $\mathcal{A}[\|\cdot\|]$ and a locally convex *–algebra topology τ on $\mathcal{A}$, coarser than the C*–norm topology, *the completion* $\widetilde{\mathcal{A}}[\tau]$ *of* $\mathcal{A}$ *with respect to* τ *is a* GB**–algebra over the* $\tau-$*closure* B_τ *of the unit ball of the given* C**–algebra* $\mathcal{A}[\|\cdot\|]$ (F.–Inoue–Kürsten). **(4)** *Two* GB**–topologies* $\tau_1,\ \tau_2$ on a given locally convex *–algebra *are equivalent*, in a sense strictly related to the "core"of the structure of the respective GB*–algebras (Allan, Dixon); we may say that this is a result similar to the uniqueness of the C*–norm in an arbitrary C*–algebra.

GB*–algebras occur among the so–called 'unbounded Hilbert algebras' that are very important for the Tomita–Takesaki theory for unbounded operator algebras developed by A. Inoue. They also contribute to the rising of the extended W*–algebras (Dixon, Inoue), that also play a decisive role in the unbounded Tomita–Takesaki theory.

Classification of five-point differential-difference equations

Garifullin R.N., Yamilov R.I. and Levi D.
Institute of Mathematics, Ufa Scientific Center, RAS,
Department of Mathematics and Physics, Roma Tre University, Rome, Italy

Using the generalized symmetry method, we carry out, up to autonomous point transformations, the classification of integrable equations of a subclass of the autonomous five-point differential-difference equations:

$$\dot{u}_n = A(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n+2} + B(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n-2}$$

$$+C(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}).$$

This subclass includes such well-known examples as the Itoh-Narita-Bogoyavlensky and the discrete Sawada-Kotera equations. The resulting list contains 17 equations some of which seem to be new. We have found non-point transformations relating most of the resulting equations among themselves and their generalized symmetries.

The details can be found in [1].

[1] R.N. Garifullin, R.I. Yamilov and D. Levi, *Classification of five-point differential-difference equations,* J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 125201 (27pp).

On the basicity of one Sturm-Liouville operator with eigenparameter in a boundary condition

Goktas S. and Maris E.A.
Department of Mathematics, Mersin University, Mersin, Turkey
Technical Science Vocation School, Mersin University, Mersin, Turkey
e-mail: srtcgoktas@gmail.com; e.ali.maris@gmail.com

The paper deals with researching the spectral properties (existence of eigenvalues, asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions, minimality and basicity of the system of eigenfunctions) for the boundary value problem

$$-y'' = \lambda y, \ 0 < x < 1,$$
$$y(0) = 0, \ y'(0) = \lambda \left(ay\,(1) + by'(1) \right),$$

where λ is a spectral parameter, a and b are arbitrary nonzero real numbers which satisfy the condition $|a| + |b| \neq 0$.

There are many articles which investigate the various aspects of boundary value problems for ordinary differential operators with a spectral parameter in the boundary condition. This study is related to the articles [1]-[4]

[1] N.B. Kerimov and V.S. Mirzoev On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition, 2003, Siberian M.J., 44(5), 813-816.

[2] D.B. Marchenkov Basis property inL_p of the system of eigenfunctions corresponding to a problem with a spectral parameter in the boundary condition, 2006, Diff. Eq., 42(6), 905-908.

[3] N.B. Kerimov and R.G. Poladov Basis properties of the system of eigenfunctions in the Sturm- Liouville problem with a spectral parameter in the boundary conditions, 2012, Dokl. Math., 85(1), 8-13.

[4] N.B. Kerimov and E.A. Maris On the basis properties and convergence of expansions in terms of eigenfunctions for a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition, 2014, Proc. IMM of NAS of Az., Sp. Issue, 245-258.

Limit automorphisms of semigroup C^*-algebras

Gumerov R.N.
Kazan Federal University, Kazan, Russia (Renat.Gumerov@kpfu.ru)

As is well known, properties of objects and morphisms in the categories of Banach algebras have appropriate analogs for objects and morphisms in algebraic and topological categories, and vice versa.

A part of motivation for the work presented in the report comes from the papers [1]–[3] devoted to self-morphisms of P-adic solenoids. In [4] there is an application of results for self-morphisms onto P-adic solenoids in the context of crossed product C^*-algebras.

We consider the inductive sequences of the Toeplitz algebras associated with sequences of prime numbers. Their inductive limits are C^*-algebras generated by isometric representations for semigroups of rational numbers. We study limit endomorphisms of these C^*-algebras which are defined by morphisms between two copies of the same inductive sequence of the Toeplitz algebras.

The report deals with necessary and sufficient conditions for limit endomorphisms of semigroup C^*-algebras to be automorphisms.

[1] Zhou Youcheng, *Covering mappings on solenoids and their dynamical properties.*–Chinese Sci.Bull. 45(2000),1066–1070.

[2] Charatonik J. J., Covarrubias P. P. *On covering mappings on solenoids.*– Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2002), 2145–2154.

[3] Gumerov R.N. *On finite-sheeted covering mappings onto solenoids.*– Proc. Amer. Math. Soc. 133(2005) 2771–2778.

[4] Brownlowe N., Raeburn I. *Two families of Exel-Larsen crossed products.*–J.Math.Anal.Appl., 398(2013), 68-79.

The $\overline{\partial}$-Neumann problem and Schrödinger operators.

Haslinger F.
Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Austria.
e-mail: friedrich.haslinger@univie.ac.at

Let $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ be a smoothly bounded pseudoconvex domain and let $1 \leq q \leq n-1$. We consider the $\overline{\partial}$-complex

$$L^2_{(0,q-1)}(\Omega) \underset{\overline{\partial}^*}{\overset{\overline{\partial}}{\rightleftarrows}} L^2_{(0,q)}(\Omega) \underset{\overline{\partial}^*}{\overset{\overline{\partial}}{\rightleftarrows}} L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$$

and we define the complex Laplacian by

$$\Box_q = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}.$$

$\Box_q : \mathrm{dom}(\Box_q) \longrightarrow L^2_{(0,q)}(\Omega)$ is a self-adjoint bijective operator and has a bounded inverse

$$N_q : L^2_{(0,q)}(\Omega) \longrightarrow L^2_{(0,q)}(\Omega),$$

the $\overline{\partial}$-Neumann operator.

Analogously, if φ is a plurisubharmonic weight function, we consider the weighted $\overline{\partial}$-complex

$$L^2_{(0,q-1)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi}) \underset{\overline{\partial}^*_\varphi}{\overset{\overline{\partial}}{\rightleftarrows}} L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi}) \underset{\overline{\partial}^*_\varphi}{\overset{\overline{\partial}}{\rightleftarrows}} L^2_{(0,q+1)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$$

and the corresponding complex Laplacian

$$\Box_{\varphi,q} = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^*_\varphi + \overline{\partial}^*_\varphi\overline{\partial}.$$

We discuss spectral properties of the $\overline{\partial}$-Neumann operator, such as a necessary condition for compactness and a sufficient condition, both being not sharp. So far, a characterization can only be given in the complex 1-dimensional case, where the complex Laplacian can be interpreted as a Schrödinger operator with magnetic field.

[1] F. Berger and F. Haslinger, On some spectral properties of the weighted d-bar-Neumann problem, arXiv:1509.08741

[2] F. Haslinger, The d-bar-Neumann problem and Schrödinger operators, De Gruyter Expositions in Mathematics 59, Walter de Gruyter, Berlin Boston, 2014.

[3] F. Haslinger, Sobolev inequalities and the d-bar-Neumann operator, J. of Geom. Analysis 26 (2016), 287-293.

Toeplitz operators on weighted Besov spaces of holomorphic functions on the polydisk

Harutyunyan A. and Lusky W.

Let U^n be the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$ and let T^n be its torus. By S we denote the class of functions of regular variation (see [2]) and by D^β the fractional derivative of f. Next we define the holomorphic Besov spaces on the polydisk (see [1]). **Definition 3.** Let $1 \le p < \infty$, $\omega \in S$ and $f \in H(U^n)$. The function is said to be in $B_p(\omega)$ if

$$||f||^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < \infty$$

where $\alpha_\omega > p-1 > \beta_\omega$. We show that $B_p(\omega)$ is a Banach space with respect to $||\cdot||_{B_p(\omega)}$ and that the set of polynomials is dense in $B_p(\omega)$. We start by defining the Toeplitz operator on the spaces $H(U^n)$. Let $L^1(T^n)$ be the class of all integrable functions on T^n. **Definition 4.** The Toeplitz operator with symbol $h \in L^1(T^n)$ is the integral

$$T_h(f)(z) := T_h(f)(z) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi)h(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

Our aim is to describe the symbols h, for which T_h defines a bounded operator $B_p(\omega) \to B_p(\omega)$. **Theorem** *Let $p > 1$. Then the following conditions are equivalent 1) $T_{\bar{h}}$ is a bounded operator $B_p(\omega) \to B_p(\omega)$ $(p > \alpha_{\omega_j},\ 1 \le j \le n)$. 2) h has the form $h = h_1 + \bar{h}_2$ where h_1 is a pointwise multiplier of $B_p(\omega)$ and $h_2 \in B_q(\omega^*)$, where $\omega^*(t) = \omega^{-q/p}(t)t^q$ and $1/p + 1/q = 1$.*

[1] A.V.Harutyunyan, W.Lusky, *Weighted holomorphic Besov spaces on the polydisks,* J. Funct. Spaces and Appl. 9, 1-16 (2011)

[2] E. Seneta, *Functions of Regular Variation*[in Russian], Nauka, Moscow, 1985

Bohr inequality for odd analytic functions

Kayumov I.R., Ponnusamy S.

Kazan Federal University, Indian Statistical Institute (Chennai Centre)

Let $\mathcal{A}$ denote the space of all functions analytic in the unit disk $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ equipped with the topology of uniform convergence on compact subsets of $\mathbb{D}$. Then the classical Bohr's inequality [1] states that if a power series $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ belongs to $\mathcal{A}$ and $|f(z)| \le 1$ for all $z \in \mathbb{D}$, then

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \le 1 \text{ for all } r \le 1/3$$

and the constant $1/3$ cannot be improved. The constant $r_0 = 1/3$ is known as Bohr's radius. Bohr actually obtained the inequality for $r \le 1/6$, but subsequently later, Wiener, Riesz and Schur, independently established the sharp inequality for $|z| \leq 1/3$. For a detailed account of the development, we refer to the recent survey article on this topic [2] and the references therein.

The present investigation is motivated by the following problem of Ali, Barnard and Solynin [3]:

Find the Bohr radius for the class of odd functions f satisfying $|f(z)| \leq 1$ for all $z \in \mathbb{D}$.

In [3, Lemma 2.2], it was shown that $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n+1} \leq 1$ for all $|z| = r \leq r_*$, where r_* is a solution of the equation

$$5r^4 + 4r^3 - 2r^2 - 4r + 1 = 0,$$

which is unique in the interval $1/\sqrt{3} < r < 1$. The value of r_* can be calculated in terms of radicals and it is equal to $0.7313\ldots$.

Moreover, in [3], an example was also given to conclude that the Bohr radius for the class of odd functions satisfies the inequalities $r_* \leq r \leq r^* \approx 0.789991$, where

$$r^* = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{B-2}{6}} + \frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{\frac{6}{B-2}} - \frac{B}{24} - \frac{1}{6}}, \tag{1}$$

with

$$B = (3601 - 192\sqrt{327})^{\frac{1}{3}} + (3601 + 192\sqrt{327})^{\frac{1}{3}}.$$

Our main result is the following theorem

Theorem. *Suppose that $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1}$ is an odd analytic function in the disk $\mathbb{D}$. If $|f(z)| \leq 1$ in this disk then*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n+1} \leq 1 \text{ for all } r \leq r^* = 0.789991\ldots$$

where the number r^* is given by (1) and cannot be improved.

[1] H. Bohr, A theorem concerning power series, *Proc. London Math. Soc.* **13**(2) (1914), 1–5.

[2] R. M. Ali, Y. Abu-Muhanna, and S. Ponnusamy, On the Bohr inequality, In "Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis" (Edited by N.K. Govil et al.), Springer Optimization and Its Applications **117** (2016), 265–295.

[3] R. M. Ali, R. W. Barnard, and A. Yu. Solynin, A note on the Bohr's phenomenon for power series, *J. Math. Anal. Appl.* (2017),

On asymptotic expansions of generalized Bergman kernels on symplectic manifolds

Kordyukov Yu. A.
Institute of mathematics, Ufa Scientific Center RAS, Ufa, Russia

We study the asymptotic behavior of the generalized Bergman kernel associated with the renormalized Bochner-Laplacian on high tensor powers of a positive line bundle over a compact symplectic manifold. So we consider a compact symplectic manifold (X,ω) of dimension $2n$ and a Hermitian line bundle (L,h^L) on X with a Hermitian connection $\nabla^L : C^\infty(X,L) \to C^\infty(X,T^*X\otimes L)$. Recall that the curvature of ∇^L is a differential two-form on X defined by $R^L=(\nabla^L)^2$. We will assume that L satisfies the pre-quantization condition:

$$\frac{i}{2\pi}R^L=\omega.$$

Let g be a Riemannian metric on X and ∇^{TX} be the Levi-Chivita connection of g. Denote by ∇^{L^p} the connection on L^p induced by ∇^L and by Δ^{L^p} the induced Bochner-Laplacian acting on $C^\infty(X,L^p)$. If $\{e_j\}_{j=1,\dots,2n}$ is an orthonormal frame of TX, then Δ^{L^p} is given by

$$\Delta^{L^p}=-\sum_j\left[(\nabla^{L^p}_{e_j})^2-\nabla^{L^p}_{\nabla^{TX}_{e_j}e_j}\right].$$

Let $J_0 : TX\to TX$ be a skew-adjoint linear endomorphism such that

$$\omega(u,v)=g(J_0u,v),\quad u,v\in TX.$$

Consider the linear endomorphism $J : TX \to TX$ given by $J=J_0(-J_0^2)^{-1/2}$. Then J is an almost complex structure on X compatible with ω and g. Let τ be a smooth function on X given by

$$\tau(x)=-\pi\operatorname{Tr}[J_0(x)J(x)],\quad x\in X.$$

The renormalized Bochner-Laplacian Δ_p acting on $C^\infty(X,L^p)$ is defined as

$$\Delta_p=\Delta^{L^p}-p\tau,$$

This operator was introduced by V. Guillemin and A. Uribe in 1988. When (X,ω) is a Kähler manifold, it is twice the corresponding Kodaira-Laplacian on functions $\square^{L^p}=\bar\partial^{L^p*}\bar\partial^{L^p}$. It is well-known that the L^2-spectrum $\sigma(\Delta_p)$ of Δ_p has the following gap property: there exists $C_L>0$ such that for any p

$$\sigma(\Delta_p)\subset[-C_L,C_L]\cup[2p\mu_0-C_L,+\infty),$$

where the constant μ_0 is given by

$$\mu_0 = \inf_{u \in T_x X, x \in X} \frac{i R^L_x(u, J(x)u)}{|u|^2_g}.$$

Let $P_{\mathcal{H}_p}$ be the orthogonal projection in $L^2(X, L^p)$ onto the linear subspace $\mathcal{H}_p \subset L^2(X, L^p)$ spanned by the eigensections of Δ_p corresponding to eigenvalues in $[-C_L, C_L]$. The smooth kernel $P_{q,p}$ of the operator $(\Delta_p)^q P_{\mathcal{H}_p}$ with respect to the Riemannian volume form dv_X is called a generalized Bergman kernel of Δ_p. The main result of the paper states the full off-diagonal expansion of the generalized Bergman kernel $P_{q,p}$ as $p \to \infty$.

As an immediate application, we construct the algebra of Toeplitz operators on the symplectic manifold X associated with the renormalized Bochner-Laplacian Δ_p. Here a Toeplitz operator is defined to be a sequence $\{T_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ of bounded linear operators $T_p : L^2(X, L^p) \to L^2(X, L^p)$, such that, for any $p \in \mathbb{N}$, we have $T_p = P_{\mathcal{H}_p} T_p P_{\mathcal{H}_p}$, and there exists a sequence $g_l \in C^\infty(X)$ such that

$$T_p = P_{\mathcal{H}_p} \left(\sum_{l=0}^{\infty} p^{-l} g_l \right) P_{\mathcal{H}_p} + \mathcal{O}(p^{-\infty}).$$

The research is supported by the Russian Science Foundation, project No. 17-11-01004.

Non-Markovian dynamics and exact solution of correlated collision model

Luchnikov I.A.
Moscow Institute of Physics and Technology

We consider the collision model [1] with correlated reservoir. We introduce the new approach to problem based on matrix product states representation [2] of initial reservoir state. We investigate non-Markovian effects induced by correlations in reservoir.
Let us introduce the initial state of reservoir in matrix product density operators representation

$$\varrho = \sum_{i_1, \dots, i_n} \mathrm{tr}\left[A_{i_1} \dots A_{i_n}\right] \varrho_{i_1} \otimes \dots \otimes \varrho_{i_n} \tag{1}$$

. For simplicity consider the translation invariant case. The reservoir Hamiltonian is $H_r = 0$. The system Hamiltonian is H_s and the interaction Hamiltonian between system and reservoir subsystem is H_{int}. Let the system interact with each reservoir subsystem one after another during some time. Using the tensor network representation of this dynamics we construct the following four-step scheme. In the first step we construct the initial tensor

$$\rho^{(0)}_{k_0 k_2} = \mathrm{tr}\Big[\sum_k A_{k_0,k,k_2}\varrho_k\Big]\rho_0, \tag{2}$$

where ρ_0 is the initial state of system. The second step consists of unitary evolution describing the collision of the system with N-th particle of the environment.

$$\rho^{(N)}_{k_0,k_2} = \sum_{k,k_1} A_{k_1,k,k_2}\mathrm{tr}_r\Big[U[\tau]\rho^{(N-1)}_{k_0,k_1}\otimes\varrho_k U[\tau]^\dagger\Big]. \tag{3}$$

Further we trace over the reservoir:

$$\rho^{(N)}_{k_0,k_2} = \sum_{k,k_1} A_{k_1,k,k_2}\rho^{(N-1)}_{k_0,k_1}\mathrm{tr}\Big[\varrho_k\Big]. \tag{4}$$

Finally, we trace over auxiliary space and get the system density operator.

$$\rho_{out} = \sum_k \rho_{k,k}. \tag{5}$$

This scheme leads to dynamics with interesting properties like non-Markovianity, indivisibility, etc. We consider the different possible applications of this features. For instance we have introduced the cryptography scheme which is based on non-Markovianity. We also consider the continuous limit[3] and application of this approach to tomography of quantum channels with memory.

The study was supported by Russian Science Foundation under Project No. 16-11-00084 and performed at the Moscow Institute of Physics and Technology.

[1] T. Rybar, S. N Filippov, M. Ziman, and V. Buzek, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **45**, 154006 (2012).

[2] R. Orus, Annals of Physics, (2014) 117 **349**.

[3] I. A. Luchnikov and S. N. Filippov, Phys. Rev. A **95**, 022113 (2017).

Absolutely separating quantum maps and channels

Magadov K.
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

A state is called absolutely separable if it remains separable under action of *any* unitary operator U. Suppose a quantum channel Φ such that its output $\varrho_{\text{out}} = \Phi[\varrho]$ is *absolutely separable* for any initial system state ϱ. Thus, a dynamical map Φ may exhibit an *absolutely separating* property, which means that its output is always absolutely separable and cannot be transformed into an entangled state by any Hamiltonian dynamics. The only deterministic way to create entaglement in a system acted upon by the absolutely separating channel Φ is to use a nonunitary CPT dynamics afterwards, e.g. a Markovian dissipative process $\widetilde{\Phi}_t = e^{t\mathcal{L}}$ with only fixed point ϱ_∞, which is entangled. From experimental viewpoint it means that absolutely separating noises should be treated in a completely different way in order to maintain entanglement.

In terms of the fixed partition $\mathcal{H}_m^A|\mathcal{H}_n^B$, the state $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{mn})$ is absolutely separable with respect to $m|n$ if and only if $U\varrho U^\dagger \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_m^A|\mathcal{H}_n^B)$ for any unitary operator U. We denote the space of absolutely separable states as $\mathcal{A}(m|n)$. A necessary condition of separability is positivity under partial transpose (PPT)

$$\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_m^A|\mathcal{H}_n^B) \Longrightarrow \varrho^{\Gamma_B} = \sum_{i,j=1}^{n} I^A \otimes |j\rangle^B\langle i|\, \varrho\, I^A \otimes |j\rangle^B\langle i| \geqslant 0$$

, where I is the indentity operator, $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ is an orthonormal basis in $\mathcal{H}_n^B$. In analogy with absolutely separable states one can introduce *absolutely PPT* [1] states with respect to partitioning $m|n$, namely, $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{mn})$ is absolutely PPT with respect to $m|n$ is absolutely PPT with respect to $m|n$ if $(U\varrho U^\dagger)^{\Gamma_B} \geqslant 0$ for all unitary operators U. The set of absolutely PPT states with respect to $m|n$ denote $\mathcal{A}_{\text{PPT}}(m|n)$. It is clear that $\mathcal{A}(m|n) \subset \mathcal{A}_{\text{PPT}}(m|n)$ for all m, n. The recent study [2] shows that $\mathcal{A}(2|n) = \mathcal{A}_{\text{PPT}}(2|n)$ for all $n = 2, 3, 4, \ldots$.

The problem of absolute separability with respect to multipartitions is very complicated. We've managed to find relation between separability classes of three qubit case. The inclusion $\mathcal{A}(2|2|2) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_4) \subset \text{PPT}(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_4) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_8)$ is trivial. Also, $\mathcal{A}(2|2|2) \subset \mathcal{A}(2|4) = \mathcal{A}_{\text{PPT}}(2|4) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_4)$. We have shown that neither $\mathcal{A}(2|4) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_2)$, nor $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{A}(2|4)$ [3].

In the paper [3] we have introduced the class of absolutely separating maps and explored their basic properties. Particular characterization of absolutely separating property is fulfilled for specific families of local and global maps. Also, the problem of the state resistance to absolute separability is discussed.

The study is supported by Russian Science Foundation under project No. 16-11-00084 and performed in Moscow Institute of Physics and Technology.

[1] R. Hildebrand, Positive partial transpose from spectra, Phys. Rev. A **76**, 052325 (2007).

[2] N. Johnston, Separability from spectrum for qubit-qudit states, Phys. Rev. A **88**, 062330 (2013).

[3] S. N. Filippov, K. Yu. Magadov and M. A. Jivulesku, 'Absolutely separating quantum maps and channels', arXiv:1703.00344 [quant-ph].

Growth of the spherical derivative vs growth of the Nevanlinna characteristic

Makhmutov S.A. and Makhmutova M.S.
Department of Mathematics and Statistics, Sultan Qaboos University, Muscat, Oman
e-mail: makhm@squ.edu.om, marinam@squ.edu.om

Let $f(z)$ be meromorphic in the complex plane $\mathbb{C}$. Then f is called Julia exceptional function if the family of functions $\{f(az)\}$, $|a| \geq 1$, is normal in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in the sense of Montel [1]. Another characterization of Julia exceptional functions is based on growth of the spherical derivative. Due to O. Lehto and K.I. Virtanen [2], a meromorphic function f is a Julia exceptional function if and only there exists a positive $K > 0$ such that

$$\sup_{0<|z|<\infty} |z| \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq K \ . \tag{1}$$

By the Ahlfors-Shimizu form of the Nevanlinna characteristic function $T(r, f)$ the estimate (1) implies that $T(r, f) = \mathcal{O}(\ln^2 r)$, as $r \to \infty$, for any Julia exceptional function f.

Theorem 1. Product of Julia exceptional functions is not necessarily a Julia function but growth of the Nevanlinna characteristic is $\mathcal{O}(\ln^2 r)$ as $r \to \infty$.

Let

$$T_1(r, f) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{1\leq|z|\leq r} \left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \right)^2 \ln \frac{r}{|z|} \ dxdy \ .$$

Theorem 2. f is a Julia exceptional function if and only if

$$\sup_{|a|\geq 1} \frac{T_1(r, f(az))}{\ln^2 r} < \infty \ .$$

[1] Julia G. Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. Paris: Gauthier-Villars, 1924.

[2] O. Lehto and K.I. Virtanen. Boundary behaviour and normal meromorphic functions. 1957 Acta Math. 97, 47-65.

On an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary conditions.

Mamedov Kh.R.
Department of Mathematics, Mersin University, Turkey
e-mail: hanlar@mersin.edu.tr

In this work, we consider the boundary value problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{1}$$

$$-\left(\alpha_1 y(0) - \alpha_2 y'(0)\right) = \lambda\left(\beta_1 y(0) - \beta_2 y'(0)\right), \tag{2}$$

on the half line $0 \leq x < +\infty$, where λ is a spectral parameter, $q(x)$ is a real valued function which is integrable on $[0, +\infty)$ and satisfies the condition

$$\int_0^{+\infty} x\,|q(x)|\,dx > +\infty \tag{3}$$

and α_i, β_i $(i = 1, 2)$ are real numbers.

The boundary value problem (1)-(3) is not selfadjoint and it may have complex eigenvalues. The scattering data for boundary value problem (1)-(3) is defined and some spectral analysis is studied.

In the case $\beta_1 = \beta_2 = 0$, the inverse scattering problem for the boundary value problem (1)-(3) was completely solved in [1], [2]. The inverse problem on the half line with spectral parameter contained in the boundary conditions was investigated according to spectral function in [4] according to Weyl function in [3], according to scatetring data in [5], [6].

[1] V.A. Marchenko Sturm-Liouville operators and applications, AMS Chelsea Publishing, 2011.

[2] B.M. Levitan and I.S. Sargsjan Introduction to spectral theory, AMS, 1975.

[3] G. Freiling and V.A. Yurko Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, Nova Science Publishing, 2008.

[4] E. A. Pocheykina-Fedotova On the inverse problem of boundary problem for second order differential equation on the half line, 1972 Izvestiya Vuzov. 17 pg. 17-24.

[5] Kh.R. Mamedov, On the inverse problem for Sturm-Liouville operator with a non-linear spectral parameter in the boundary condition, 2009 Journal of the Korean Mathematical Society. 46 1243-1254.

[6] Kh.R. Mamedov and H. Menken On the inverse problem of scattering theory for a differential operator of the second order, 2004 Functional Analysis and Applications. 197 185-194.

Dynamics of Gauss maps and the Klein-Gordon equation

Montes-Rodriguez A., Hedenmalm H.

University of Seville, Seville, Spain; KTH, Sweden

A pair (Γ, Λ), where $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ is a locally rectifiable curve and $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ is a *Heisenberg uniqueness pair* if an absolutely continuous finite complex-valued Borel measure supported on Γ whose Fourier transform vanishes on Λ necessarily is the zero measure. Here, absolute continuity is with respect to arc length measure. Recently, it was shown by Hedenmalm and Montes that if Γ is the hyperbola $x_1x_2 = \frac{M^2}{4\pi^2}$ (where $M > 0$ is the mass), and Λ is the lattice-cross $(\alpha\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \beta\mathbb{Z})$, where α, β are positive reals, then (Γ, Λ) is a Heisenberg uniqueness pair if and only if $\alpha\beta M^2 \leq 4\pi^2$. The Fourier transform of a measure supported on a hyperbola solves the one-dimensional Klein-Gordon equation, so the theorem supplies very thin uniqueness sets for a class of solutions to this equation. By rescaling, we may assume that the mass equals $M = 2\pi$, and then the above-mentioned theorem is equivalent to the following assertion: *the functions*

$$e^{i\pi\alpha mt},\ e^{-\frac{i\pi\beta n}{t}},\ m, n \in \mathbb{Z},$$

span a weak-star dense subspace of $L^\infty(\mathbb{R})$ if and only if $0 < \alpha\beta \le 1$. The proof involved ideas from Ergodic Theory. To be more specific, in the critical regime $\alpha\beta = 1$, the crucial fact was that the Gauss-type map $t \to -\frac{1}{t}$ modulo $2\mathbb{Z}$ on $[-1, 1]$ has an ergodic absolutely continuous invariant measure with infinite total mass. However, the case of the semi-axis $\mathbb{R}_+$ as well as the holomorphic counterpart remained open. We completely solve these two problems. Both results can be stated in terms of Heisenberg uniqueness, but here, we prefer the concrete formulation. As for the semi-axis, *we can show that the restriction to* $\mathbb{R}_+$ *of the functions*

$$e^{i\pi\alpha mt},\ e^{-\frac{i\pi\beta n}{t}},\ m, n \in \mathbb{Z},$$

span a weak-star dense subspace of $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ if and only if $0 < \alpha\beta \le 4$. in the critical regime $\alpha\beta = 4$ the weak-star span misses the mark by one dimension only. The proof of this statement is based on the ergodic properties of the standard Gauss map $t \to \frac{1}{t}$ *mod* $\mathbb{Z}$ on the interval $[0, 1]$. In particular, we find that for $1 < \alpha\beta < 4$, there exist nontrivial functions $f \in L^1(\mathbb{R})$ with

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\pi\alpha mt} f(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i\pi\beta n}{t}} f(t)\ dt = 0,\ m, n \in \mathbb{Z},$$

and that each such function is uniquely determined by its restriction to any of the semiaxes $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}_-$. This is an instance of *dynamical unique continuation.*

As for the holomorphic counterpart, *we show that the functions*

$$e^{i\pi\alpha mt},\ e^{-\frac{i\pi\beta n}{t}},\ m, n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\},$$

span a weak-star dense subspace of $H^\infty_+(\mathbb{R})$ if and only if $0 < \alpha\beta \le 1$. Here, $H^\infty_+(\mathbb{R})$ is the subspace of $L^\infty(\mathbb{R})$ which consists of those functions whose Poisson extensions to the upper half-plane are holomorphic. In the critical regime $\alpha\beta = 1$ the proof relies on the nonexistence of a certain invariant distribution in the predual of real H^∞ for the above-mentioned Gauss-type map, which is a new result of dynamical flavor. To attain it, we need to handle in a subtle way series of powers of transfer operators, a rather intractable problem where even the recent advances by Melbourne and Terhesiu do not apply. More specifically, our approach – which is obtained by combining ideas from Ergodic Theory with ideas from Harmonic Analysis – involves a splitting of the Hilbert kernel, as induced by the transfer operator. The careful analysis of this splitting involves detors to the Hurwitz zeta function as well as to the theory of totally positive matrices.

On almost periodic solutions of the Poisson's equation

Muhamadiev È.* and Nazarov M.**
*Department of Information Systems and Technology, Vologda State University, Vologda, Russia.
**Division of Scientific Computing, Department of Information Technology, Uppsala University, Uppsala, Sweden

We are interested in solving the following Poisson's equation

$$-\Delta u = f, \tag{1}$$

where $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the solution and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is given almost periodic source function and $\Delta = \mathrm{div} \cdot \nabla$ is the Laplace operator.

A function f is called an almost periodic of $\boldsymbol{x}$ if f is continuous in $\mathbb{R}^n$, and for every sequence of points $\{\boldsymbol{x}_n\} \in \mathbb{R}^n$, the corresponding sequence $\{f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_n)\}$ contains a uniformly convergent sub-sequence. Our interest is to study the behavior of the solution, which is obtained when the source function is almost periodic. This question was earlier addressed in [1] and the following theorem was proven:

Theorem 1. (Sibuya) Let $f(\boldsymbol{x})$ be an almost periodic function of $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$, and let $u(\boldsymbol{x})$ be a bounded continuous function of $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$. Assume that $u(\boldsymbol{x})$ is a solution of (1) in the sense of distribution. Then $u(\boldsymbol{x})$ is almost periodic with respect to $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1 shows that if a bounded continuous function u solves equation (1) in the distribution sense, then it is almost periodic. The main goal of this work is to address the following key questions: (i) to investigate the possibility of relaxing the assumption of Theorem 1, i.e., consider a wider class of solutions rather than bounded continuous functions; (ii) to investigate properties of the partial derivatives of such solutions, i.e., boundedness, continuity and almost periodicity.

Below, we formulate the main results of this paper. The first result extends the results of [1], we prove that under the same assumptions of Theorem 1, the function u is continuously differentiable and it's partial derivatives are almost periodic.

Theorem 2. Let $f(\boldsymbol{x})$ be an almost periodic function of $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$, and let $u(\boldsymbol{x})$ be a bounded continuous function of $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$. Assume that $u(\boldsymbol{x})$ is a solution of (1) in the sense of distribution. Then u has continuous partial derivatives $\partial u/\partial x_i$, which are almost periodic functions of $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 2 generalized Sibuya's result in the case that not only u is almost periodic, but also the partial derivatives $\partial u/\partial x_i$ are almost periodic.

The second result of this work is to prove that u does not have to be a bounded continuous function in the usual sense. We prove that if the weak solution of the Poisson's equation is a bounded generalized function, then it is also a bounded continuous function in the usual sense.

Definition. We say that the distribution $g(\boldsymbol{x})$ is a bounded generalized function in $\mathbb{R}^n$, if for any function $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, the function $(g * \varphi)(\boldsymbol{x}) = (g(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))$ is bounded in $\mathbb{R}^n$, i.e., $\sup |(g * \varphi)(\boldsymbol{x})| < \infty$.

It can be easily observed that the set of bounded generalized functions contain the set of usual bounded functions.

Theorem 3. Let u be a bounded generalized function in $\mathbb{R}^n$ which solves equation (1) in the distribution sense. Then u is a continuous and bounded function in $\mathbb{R}^n$.

[1] Y. Sibuya. Almost periodic solutions of Poisson's equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28:195–198, 1971. ISSN 0002-9939. URL http://dx.doi.org/10.2307/2037783.

On bases from cosines in Lebesgue spaces with variable summability index

Muradov T.R.
Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan

In this work the perturbed system of cosines is considered. Under certain conditions on summability index $p(\cdot)$ and perturbation, the basicity of this system in Lebesgue spaces $L_{p(\cdot)}(0, \pi)$ with variable summability index $p(\cdot)$ is proved. The obtained results generalize similar results for the case $p(\cdot) = p = const$. It should be noted earlier the basicity in generalized Lebesgue space of perturbed systems of exponents was considered in works [1, 2].

The following main theorem is proved.

Theorem. *Let* $1 < p^- \leq p^+ < +\infty$ *and* $\{\lambda_n; \mu_n\}_{n \in Z_+} \subset R$ *be some sequence of different numbers such that for some* $\alpha \in (1, p_0]$ *it holds*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n - \mu_n|^{\alpha} < +\infty,$$

where $p_0 = \min\{2; p^-\}$. *If the system* $\{\cos \lambda_n x\}_{n \in Z_+}$ *forms a basis for* $L_{p(\cdot)}(0, \pi)$ *equivalent to the basis* $\{\cos nx\}_{n \in Z_+}$, *then the system* $\{\cos \mu_n x\}_{n \in Z_+}$ *also forms a basis for* $L_{p(\cdot)}(0, \pi)$ *equivalent to the basis* $\{\cos nx\}_{n \in Z_+}$.

[1] Bilalov B.T., Guseynov Z.G. K-Bessel and K-Hilbert systems and K-bases// Dokl. Math., 2009, 80(3), pp. 826–828.

[2] Muradov T.R. On bases from perturbed system of exponents in Lebesgue spaces with variable summability exponent// Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014:495.

Long-time properties of solutions of quasilinear parabolic equations with regular coefficients

Muravnik A.B.

JSC "Concern "Sozvezdie", Voronezh & RUDN University, Moscow, Russia

The Cauchy problem for the equation

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(u)|\nabla u|^2$$

arising in various applications (see, e. g., [1, 2]) is considered under the assumptions that ρ is positive in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, and g is continuous on $(-\infty, +\infty)$.

Theorem. Let $u(x,t)$ be a classical bounded solution of the considered Cauchy problem with an initial-value function $u_0(x)$ and the following conditions be satisfied:

(i) the equation $\Delta w + \rho(x) = 0$ has a solution bounded in $\mathbb{R}^n$;

(ii) there exists a constant α such that $0 < \alpha < 1$, $\rho \in C^{\alpha+1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, and $f[u_0(x)] \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, where

$$f(s) = \int\limits_0^s e^{\int\limits_0^x g(\tau)d\tau} dx.$$

Then there exists a Lipschitz on $[0, +\infty)$ function A such that the relation

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{|x|=R} \int\limits_0^t f[u(x,\tau)]d\tau d\sigma_x = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} A(t)$$

holds for any positive t and the relation

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{|x|=R} \left(\int\limits_0^t f[u(x,\tau)]d\tau - A(t) \right) d\sigma_x = 0$$

holds uniformly with respect to t from $[0, T]$ for any positive T.

Remark. Condition (i) is equivalent to the following one:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(\xi - x)d\xi}{|\xi|^{n-2}} \in L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

[1] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986), 889–892.

[2] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, and Y.-C. Zhang. Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth, *Phys. Rev.*, **A 39** (1989), 3053–3075.

On μ-strong Cesaro summability at infinity and its application to the Fourier-Stieltjes transforms

Sadigova S.R.[1], Karacam C.[2], Hasanli R.R.[1]

[1] Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

[2] Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey

In this work the concept of μ-strong Cesaro summability at infinity for a locally integrable function is introduced. The concept of μ-statistical convergence at infinity is also considered and the relationship between these two concepts is established. The concept of $\mu[p]$-strong convergence at infinity point, generated by the measure $\mu(\cdot)$ is also considered. Similar results are obtained in this case too. This approach is applied to the study of the convergence of the Fourier-Stieltjes transforms. It should be noted that the results obtained in this work generalize the results of work F.Morics [1].

[1] Moricz F. Statsitical limits of measurable functions. Analysis, 24 (2004), pp. 1-18.

Resistance Analysis of Quantum Hashing

Vasiliev A., Latypov M.

Kazan Federal University, Kazan, Russia

Recently we have defined a notion of quantum hash function which is quantum one-way function and quantumly collision resistant function [1]. Quantum hash functions can be used in the quantum digital signature protocol by Gottesman and Chuang [2]. They also can also be used in different quantum computational models as a basis for efficient algorithms and communication protocols. The further generalizations were used for constructing quantum hash-based message authentication codes [3].

We have analyzed the key properties of quantum hash functions and shown that one-way property and collision resistance property are correlated for a quantum hash function [4]. The more the function is one-way the less it is collision resistant and vice versa. We showed that such a correlation can be balanced.

In [3], [5] we have presented an approach for quantum hash function constructions by establishing a connection with small biased sets [6] and quantum hash function constructions: we prove that small sized ε-biased sets allow to generate balanced quantum hash functions.

In this paper we investigate the pre-image resistance of this function. Previously, we have proved the bound on the amount of accessible information about the input using the well-known Holevo theorem [7]. Since no more than $O(s)$ classical bits of information can be extracted from s qubits and the original message contains $n \gg s$ bits, it is impossible to restore the input from the quantum hash. However, using the results of [8] and the properties of ε-biased sets here we show that the quantum hash function reveals only $O(1)$ bits of information about the input.

The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University. Work was in part supported by the Russian Foundation for Basic Research (under the grant 17-07-01606).

[1] F M Ablayev and A V Vasiliev. Cryptographic quantum hashing. *Laser Physics Letters*, 11(2):025202, 2014.

[2] Daniel Gottesman and Isaac Chuang. Quantum digital signatures. Technical Report arXiv:quant-ph/0105032, Cornell University Library, Nov 2001.

[3] Farid Ablayev, Marat Ablayev, Alexander Vasiliev, and Mansur Ziatdinov. Quantum fingerprinting and quantum hashing. computational and cryptographical aspects. *Baltic Journal of Modern Computing*, 4(4):860–875, 2016.

[4] F Ablayev, M Ablayev, and A Vasiliev. On the balanced quantum hashing. *Journal of Physics: Conference Series*, 681(1):012019, 2016.

[5] Alexander Vasiliev. Quantum hashing for finite abelian groups. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 37(6):751–754, 2016.

[6] Joseph Naor and Moni Naor. Small-bias probability spaces: Efficient constructions and applications. In *Proceedings of the Twenty-second*

Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '90, pages 213–223, New York, NY, USA, 1990. ACM.

[7] Alexander S. Holevo. Some estimates of the information transmitted by quantum communication channel (russian). *Probl. Pered. Inform. [Probl. Inf. Transm.]*, 9(3):3–11, 1973.

[8] Dmitry Gavinsky and Tsuyoshi Ito. Quantum fingerprints that keep secrets. Technical report, 2010.

A fractal graph model of capillary type systems

Zavorokhin G.L.
PDMI RAS, St.Petersburg, Russia

This work was done in cooperation with V.A. Kozlov (Linköping University, Sweden) and S.A. Nazarov (St.Petersburg State University and Institute of Mechanical Engineering Problems, St.Petersburg, Russia).

We consider blood flow in a vessel with an attached capillary system. The latter is modeled with the help of a corresponding fractal graph whose edges are supplied with ordinary differential equations obtained by the dimension-reduction procedure from a three-dimensional model of blood flow in thin vessels. The Kirchhoff transmission conditions must be satisfied at each interior vertex. The geometry and physical parameters of this system are described by a finite number of scaling factors which allow the system to have self-reproducing solutions. Namely, these solutions are determined by the factors' values on a certain fragment of the fractal graph and are extended to its rest part by virtue of these scaling factors. The main result is the existence and uniqueness of self-reproducing solutions, whose dependence on the scaling factors of the fractal graph is also studied. As a corollary we obtain a relation between the pressure and flux at the junction, where the capillary system is attached to the blood vessel. This relation leads to the Robin boundary condition at the junction and this condition allows us to solve the problem for the flow in the blood vessel without solving it for the capillary system.

The present work is supported by Linköoping University and RFBR grant 16-31-60112.

[1] *D'Angelo C., Panasenko G., Quarteroni A.* Asymptotic-numerical derivation of the Robin type coupling conditions for the macroscopic pressure at a reservoir-capillaries interface, Appl. Anal. 92 (2013), 1, 158–171.

[2] *Nazarov S.A., Pileckas K.I.* Reynolds flow of a fluid in a thin three-dimensional channel, Litovsk. mat. sbornik. 1990. V. 30, N 4. P. 772-783 (English transl.: Lithuanian Math. J. 1990. V. 30, N 4. P. 366-375).

[3] *Nazarov S.A., Videman J.H.* Reynolds type equation for a thin flow under intensive transverse percolation, Math. Nachr. 2004. Bd. 269/270. S. 189-209.

Содержание

Научное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, ПОСВЯЩЁННАЯ 100-ЛЕТИЮ ЧЛ.-КОРР. АН СССР А.Ф. ЛЕОНТЬЕВА

Сборник тезисов
(г. Уфа, 24 – 27 мая 2017 г.)

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 17.05.2017 г. Формат 60x84/16.
Усл. печ.л. 12,3. Уч.-изд.л. 12,8.
Тираж 150 экз. Изд. № 93. Заказ 214.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.